

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



Н. П. Уланова, В. В. Приходько

**ПРАКТИКУМ З ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ
КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ**

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДПУ»
2025

УДК 517. 53 (075)
У47

*Рекомендовано вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка»
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності
113(F1) Прикладна математика
(протокол № 4 від 19.11.2025)*

Рецензенти:

А.П. Дзюба – д-р техн. наук, проф. (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара);

В.В. Лобода – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара)

Уланова Н.П.

У47 Практикум з теорії функцій комплексної змінної [Електронний ресурс] : навч. посіб. 2-ге вид. перероб. і доп. / Н. П. Уланова, В. В. Приходько; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2025. – 176 с.

У навчальному посібнику вміщено приклади та задачі із спеціального розділу вищої математики – основ теорії функцій комплексної змінної. На початку кожного розділу посібника наведено основні визначення, теореми, формули. Виклад теоретичного матеріалу супроводжується прикладами розв'язування задач. З метою закріплення навчального матеріалу запропоновано вправи для самостійної роботи та індивідуальні варіанти типових розрахунків.

УДК 517. 53 (075)

© Н.П. Уланова, В.В. Приходько, 2025
© НТУ «Дніпровська політехніка», 2025

Зміст

ВСТУП.	5
1. Комплексні числа та дії над ними.	6
2. Послідовність комплексних чисел.	16
3. Сфера Рімана. Стереографічна проекція.	22
4. Поняття числового ряду та його збіжності.	24
5. Лінії та області на комплексній площині.	32
6. Функції комплексної змінної.	38
7. Основні елементарні функції.	43
8. Границя і неперервність функції комплексної змінної.	48
9. Диференційовність функцій комплексної змінної.	53
10. Геометричний зміст модуля й аргументу похідної.	59
11. Конформні відображення.	61
11.1 Лінійна функція.	62
11.2 Дробово-лінійна функція.	66
11.3 Степенева функція.	72
11.4 Функція Жуковського.	75
11.5 Показникова функція.	78
12. Інтегрування функцій комплексної змінної.	84
13. Функціональні ряди.	97
13.1 Степеневі ряди.	99
13.2 Ряд Тейлора.	103
13.3 Ряд Лорана.	114
14. Ізольовані особливі точки однозначної аналітичної функції. ...	120
15. Лишки функції.	130
16. Застосування лишків до обчислення інтегралів.	137
Індивідуальні домашні завдання.	147
Розв'язок типового варіанта розрахунку.	163
Список літератури.	174

Вступ

Сучасна прикладна математика ґрунтується на поєднанні глибоких теоретичних знань з умінням використовувати їх для розв'язування реальних задач. Одним із фундаментальних розділів математичного аналізу, який має потужний апарат для опису й дослідження складних процесів, є теорія функцій комплексної змінної.

Методи цієї теорії широко застосовуються у різних галузях науки й техніки – у гідродинаміці, електродинаміці, теорії теплопровідності, механіці суцільних середовищ, обробці сигналів, моделюванні коливальних процесів. Ці методи слугують основою таких важливих напрямів математики, як перетворення Фур'є та Лапласа. Численні задачі, пов'язані з дослідженням плоских векторних полів, можуть бути розв'язані методом конформних відображень.

Вивчення теорії функцій комплексної змінної формує в майбутніх спеціалістів з прикладної математики не тільки глибоке розуміння властивостей аналітичних функцій, а й уміння використовувати абстрактні математичні ідеї в прикладних задачах.

Пропонований навчальний посібник є другим виданням “Практикуму з теорії функцій комплексної змінної”, до якого додані окремі розділи, що стосуються сфери Рімана та стереографічної проекції, функціональних рядів, конформних відображень. Новими прикладами доповнено вправи до розділів і самостійної роботи.

Зміст посібника відповідає робочій програмі навчальної дисципліни «Теорія функцій комплексної змінної» для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 Прикладна математика.

У цьому виданні розглянуто основні поняття, теореми і методи теорії функцій комплексної змінної, зокрема аналітичні функції та їхні властивості, теорію інтегрування та фундаментальну задачу Коші, ряди Тейлора і Лорана, теорію лишків та її застосування в обчисленні інтегралів, а також конформні відображення.

Теоретичний матеріал проілюстровано розв'язуванням прикладів з кожної теми і вправами для самостійного виконання. Питання для самоперевірки, подані до кожного розділу, сприяють кращому засвоєнню теоретичного матеріалу і розумінню можливостей його застосування. Користуючись джерелами із списку літератури, можна більш детально ознайомитись з навчальним матеріалом дисципліни “Теорія функцій комплексної змінної”.

1. Комплексні числа та дії над ними

Комплексним називається число вигляду

$$z = x + iy, \quad (1)$$

де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця; x, y – дійсні числа, які позначаються $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ і називаються відповідно **дійсною** та **уявною** частинами комплексного числа z . З геометричного погляду всякому комплексному числу $z = x + iy$ відповідає точка $M(x, y)$ площини (або вектор \overline{OM}) і навпаки: будь-якій точці $M(x, y)$ відповідає комплексне число $z = x + iy$. Між множиною комплексних чисел та точками площини xOy встановлено взаємно однозначну відповідність, тому дана площина називається **комплексною** і позначається символом (z) (рис. 1).

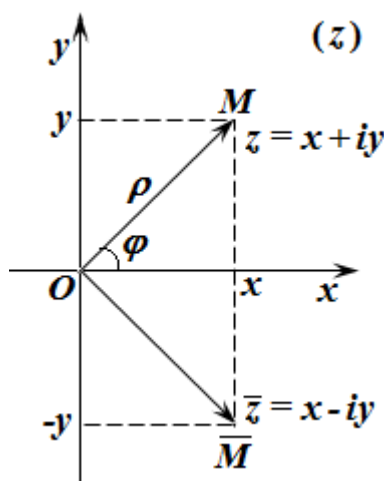


Рис.1

Множина всіх комплексних чисел позначається літерою C . Відзначимо, що $R \subset C$. Точки, які відповідають дійсним числам $z = x$, розташовані на осі Ox , яка називається **дійсною віссю комплексної площини**, а точки, що відповідають уявним числам $z = iy$, – на осі Oy , яка називається **уявною віссю комплексної площини**. Запис комплексного числа у вигляді (1) називається алгебраїчною формою комплексного числа.

Комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ вважаються **рівними** між собою тоді і тільки тоді, коли в них рівні окремо дійсні та уявні частини $z_1 = z_2$, якщо $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Числа вигляду $z = x + iy$ і $\bar{z} = x - iy$

називаються **спряженими** (рис.1).

Дії над комплексними числами $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ виконуються за такими правилами:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

(останнє має місце за умови $z_2 \neq 0$). Зазначені дії над комплексними числами мають усі властивості щодо дій над дійсними числами.

Для будь-яких комплексних чисел z_1 і z_2 справедливі рівності:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad (z_2 \neq 0),$$

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2. \quad (2)$$

Приклад 1. Дано комплексні числа $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 - 4i$; $z_3 = 1 + i$.

Знайти $z = \frac{z_1 + z_1 z_2 + z_2^2}{z_1 + z_3}$.

Розв'язок. Обчислимо послідовно:

$$z_1 + z_3 = (2 + 3i) + (1 + i) = 3 + 4i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(3 - 4i) = (6 + 12) + i(9 - 8) = 18 + i;$$

$$z_2^2 = (3 - 4i)^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i;$$

$$z_1 + z_1 z_2 + z_2^2 = 2 + 3i + 18 + i - 7 - 24i = 13 - 20i;$$

$$z = \frac{13 - 20i}{3 + 4i} = \frac{(13 - 20i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{(39 - 80) + i(-60 - 52)}{25} = -\frac{41}{25} - i\frac{112}{25}.$$

Приклад 2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(3 + 5i)x + (4 - i)y = 11 + 3i.$$

Розв'язок. Виділимо в лівій і правій частині рівняння дійсну і уявну частини:

$$(3 + 5i)x + (4 - i)y = 11 + 3i.$$

Скориставшись означенням рівності двох комплексних чисел, запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 11, \\ 5x - y = 3. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо дійсні розв'язки системи $x = 1$, $y = 2$.

Слід зазначити, що при піднесенні уявної одиниці до степеня з натуральними показниками значення i^n повторюються: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i \cdot i^2 = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$, $i^5 = i \cdot i^4 = i$, ... , тобто $i^{n+4} = i^n$. Отже маємо:

$$i^{4m+k} = i^k \quad (m \in \mathbb{N}, k = 0, 1, 2, 3).$$

Таким чином, для визначення i^n , де $n = 4m + k$, треба i піднести до степеня, показник якого дорівнює остачі від ділення n на 4.

Приклад 3. Обчислити i^{719} .

Розв'язок. Оскільки остача від ділення 719 на 4 дорівнює 3, то $i^{719} = i^3 = -i$.

Приклад 4. Знайти дійсну і уявну частини комплексного числа $\left(\frac{i^5 + 2}{i^{10} + 1}\right)^2$.

Розв'язок.

$$\left(\frac{i^5 + 2}{i^{10} + 1}\right)^2 = \left(\frac{i + 2}{1 - i}\right)^2 = \left(\frac{(i + 2)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}\right)^2 = \left(\frac{1 + 3i}{2}\right)^2 = \frac{-8 + 6i}{4} = \frac{-4 + 3i}{2} = -2 + \frac{3}{2}i,$$

$$\operatorname{Re} z = -2, \operatorname{Im} z = \frac{3}{2}.$$

Число $\rho = |\overline{OM}| = \sqrt{z\bar{z}}$ називається *модулем комплексного числа z* .

Кут φ , утворений вектором \overline{OM} з додатним напрямом осі Ox , називається *аргументом* комплексного числа z і позначається $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Кожній точці площини відповідає нескінченна множина значень кута φ , які відрізняються одне від одного на $2k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), тому величина $\operatorname{Arg} z$ багатозначна. Те із значень цього кута, що задовольняє нерівність $-\pi < \varphi \leq \pi$ (або $0 \leq \varphi < 2\pi$), називається *головним значенням аргументу* числа z і позначається $\arg z$. Надалі позначення φ будемо використовувати тільки для головного значення аргументу z , тобто $\varphi = \arg z$. Таким чином, аргумент z визначимо формулою:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Зв'язок між модулем і аргументом комплексного числа z та його дійсною і уявною частинами встановимо за формулами (рис.1):

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi;$$

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \cos \varphi = \frac{x}{\rho}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{\rho}. \quad (3)$$

Головне значення аргументу z можна обчислювати також за формулою

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{якщо } x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{якщо } x < 0, y \geq 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{якщо } x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{якщо } x = 0, y < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Усяке комплексне число $z = x + iy$ з урахуванням (3) може бути зображено у **тригонометричній** формі:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (5)$$

Використання формули Ейлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ дозволяє записати комплексне число z у **показниковій** формі:

$$z = \rho e^{i\varphi}. \quad (6)$$

Для чисел, зображених у тригонометричній формі, рівність $z_1 = z_2$ має місце, якщо $|z_1| = |z_2|$ і $\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi$, $k \in Z$.

Для спряжених комплексних чисел виконується співвідношення $|z| = |\bar{z}|$, $\arg z = -\arg \bar{z}$ (рис.1).

Якщо $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, то

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad z_2 \neq 0; \quad (7)$$

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = \rho^n e^{in\varphi} \quad (\text{формула Муавра}).$$

Корінь степеня n ($n > 1, n \in Z$) із комплексного числа $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ має n різних значень, які знаходимо за допомогою формули

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\varphi + 2k\pi)/n} \quad (k = 0, 1, \dots, (n-1)) \quad (8)$$

(під $\sqrt[n]{\rho}$ розуміється арифметичний корінь). Одержані при цьому комплексні числа відповідають вершинам правильного n -кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{\rho}$ з центром у точці $z = 0$.

Приклад 4. Знайти модуль, головне значення аргументу комплексного числа, зобразити число на комплексній площині та записати у

тригонометричній і показниковій формах: а) $z_1 = 2$; б) $z_2 = 1 + i$; в) $z_3 = 3i$; г) $z_4 = -1 + i\sqrt{3}$; д) $z_5 = -2$; е) $z_6 = -\sqrt{3} - i$; є) $z_7 = -3i$; ж) $z_8 = 2 - i$.

Розв'язок: а) оскільки $z_1 = x_1 + iy_1 = 2$, то $x_1 = 2$, $y_1 = 0$ і $|z_1| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$. До того ж $x > 0$; $y = 0$, тому $\varphi_1 = \arctg \frac{y_1}{x_1} = \arctg 0 = 0$.

Геометричне зображення числа z_1 – точка комплексної площини

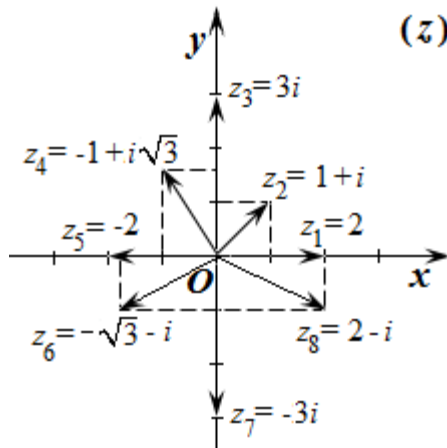


Рис.2

(z) з координатами $(2; 0)$ або її радіус-вектор (рис.2). Тригонометричною і показниковою формами комплексного числа $z_1 = 2$ будуть

$$2 = 2(\cos 0 + i \sin 0), \quad 2 = 2e^{i0};$$

б) маємо $z_2 = x_2 + iy_2 = 1 + i$, тому $x_2 = 1$; $y_2 = 1$ і $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Оскільки $x_2 > 0$, $y_2 > 0$, то

$$\varphi_2 = \arctg \frac{y_2}{x_2} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Геометричне зображення числа $z_2 = 1 + i$ – точка комплексної площини (z) з координатами $(1; 1)$ або її радіус-вектор (рис.2). Тригонометричною і показниковою формами комплексного числа $z_2 = 1 + i$ будуть

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); \quad 1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4};$$

в) оскільки $z_3 = x_3 + iy_3 = 3i$, то $x_3 = 0$; $y_3 = 3$ і $|z_3| = 3$. До того ж $x_3 = 0$;

$y_3 > 0$, тому $\varphi_3 = \arctg \frac{y_3}{x_3} = \arctg \infty = \frac{\pi}{2}$. Геометричне зображення числа

$z_3 = 3i$ – точка комплексної площини (z) з координатами $(0; 3)$ або її радіус-вектор (рис.2). Тригонометричною і показниковою формами комплексного числа $z_3 = 3i$ будуть

$$3i = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right); \quad 3i = 3e^{i\pi/2};$$

г) маємо $z_4 = x_4 + iy_4 = -1 + i\sqrt{3}$, тому $x_4 = -1$; $y_4 = \sqrt{3}$ і $|z_4| = \sqrt{1 + 3} = 2$. Оскільки $x_4 < 0$, $y_4 > 0$, то

$$\varphi_4 = \operatorname{arctg} \frac{y_4}{x_4} + \pi = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Геометричне зображення числа $z_4 = -1 + i\sqrt{3}$ – точка комплексної площини (z) з координатами $(-1; \sqrt{3})$ або її радіус-вектор (рис.2). Тригонометричною і показниковою формами комплексного числа $z_4 = -1 + i\sqrt{3}$ будуть

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2e^{i2\pi/3};$$

д) якщо маємо $z_5 = x_5 + iy_5 = -2$, то $x_5 = -2$; $y_5 = 0$ і $|z_5| = 2$. Оскільки

$x_5 < 0$; $y_5 = 0$, тому $\varphi_5 = \operatorname{arctg} \frac{y_5}{x_5} + \pi = \operatorname{arctg} 0 + \pi = \pi$. Геометричне

зображення числа $z_5 = -2$ – точка комплексної площини (z) з координатами $(-2; 0)$ або її радіус-вектор (рис.2). Тригонометричною і показниковою формами комплексного числа $z_5 = -2$ будуть

$$-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{i\pi};$$

е) оскільки $z_6 = x_6 + iy_6 = -\sqrt{3} - i$, то $x_6 = -\sqrt{3}$; $y_6 = -1$, $|z_6| = 2$. У цьому разі $x_6 < 0$, $y_6 < 0$, тому

$$\varphi_6 = \operatorname{arctg} \frac{y_6}{x_6} - \pi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

Геометричне зображення числа $z_6 = -\sqrt{3} - i$ – точка комплексної площини (z) з координатами $(-\sqrt{3}; -1)$ або її радіус-вектор (рис.2). Тригонометричною і показниковою формами комплексного числа $z_6 = -\sqrt{3} - i$ будуть

$$-\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right) = 2e^{-i5\pi/6};$$

є) маємо $x_7 = 0$; $y_7 = -3$ і $|z_7| = 3$. У зв'язку з тим, що $x_7 = 0$,

$\varphi_7 = \operatorname{arctg} \frac{y_7}{x_7} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$. Геометричне зображення числа $z_7 = -3i$ –

точка комплексної площини (z) з координатами $(0; -3)$ або її радіус-вектор (рис.2). Тригонометричною і показниковою формами комплексного числа $z_7 = -3i$ будуть

$$-3i = 3 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 3e^{-i\pi/2};$$

$$\text{ж) тут } x_8 = 2 > 0; \quad y_8 = -1 < 0 \quad \text{і} \quad |z_8| = \sqrt{5}; \quad \varphi_8 = \operatorname{arctg} \frac{y_8}{x_8} =$$

$= \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. Геометричне зображення числа $z_8 = 2 - i$ – точка комплексної площини (z) з координатами $(2; -1)$ або її радіус-вектор (рис.2). Тригонометрична і показникова форми комплексного числа $z_8 = 2 - i$ мають вигляд

$$2 - i = \sqrt{5} \left(\cos \left(-\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) + i \sin \left(-\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \right) = \sqrt{5} e^{-i \operatorname{arctg}(1/2)}.$$

Приклад 5. Знайти модуль і головне значення аргументу комплексного числа $z = -\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$.

Розв'язок. Маємо $x = -\cos \frac{\pi}{7} < 0$, $y = \sin \frac{\pi}{7} > 0$. Модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-\cos \frac{\pi}{7} \right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{7} \right)^2} = 1$. Головне значення аргументу визначимо за формулою (4):

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg} \left(-\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \right) = \pi - \operatorname{arctg} \operatorname{tg} \frac{\pi}{7} = \pi - \frac{\pi}{7} = \frac{6\pi}{7}.$$

Приклад 6. Знайти $(1 + i)^{12}$.

Розв'язок. Запишемо комплексне число $z = 1 + i$ у тригонометричній або показниковій формі, використовуючи формули (5) і (6):

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4};$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}.$$

Тоді

$$z^{12} = (\sqrt{2})^{12} \left(\cos \left(12 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(12 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right) = 64 \cdot e^{i3\pi} = 64(\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = -64.$$

Приклад 7. Знайти всі корені рівняння $z^3 - 1 + i\sqrt{3} = 0$. Зобразити їх на комплексній площині.

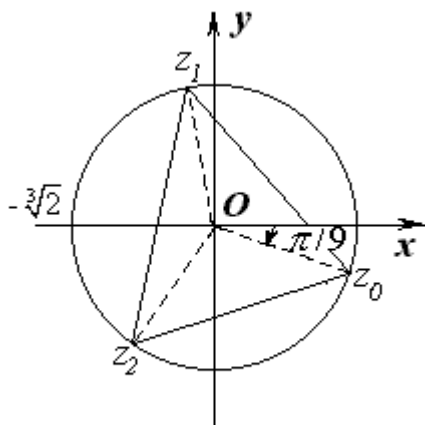


Рис.3

Розв'язок. Через те, що

$$z^3 = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right),$$

за формулою (8) маємо

$$z_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3} \right),$$

$$k = 0, 1, 2.$$

Тобто коренями даного рівняння будуть

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{9} - i \sin \frac{\pi}{9} \right);$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{9} + i \sin \frac{5\pi}{9} \right);$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{9} + i \sin \frac{11\pi}{9} \right).$$

Зображення всіх коренів наведено на рис.3.

Приклад 8. Записати в комплексній формі рівняння

$$\text{а) } x^2 - y^2 = 4, \quad \text{б) } x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0.$$

Розв'язок. Скористаємося співвідношеннями (2):

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.$$

Маємо а) $x^2 - y^2 = 4$,

$$\left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 = 4,$$

$$\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} - \frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{-4} = 4, \quad \frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 + z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} = 4,$$

$$2z^2 + 2\bar{z}^2 = 16, \quad z^2 + \bar{z}^2 = 8;$$

б) $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$,

$$z \cdot \bar{z} + 4 \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} + 2 \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} = 0, \quad z \cdot \bar{z} + \left(2 + \frac{1}{i} \right) z + \left(2 - \frac{1}{i} \right) \bar{z} = 0.$$

Приклад 9. Знайти амплітуду струму в електричному колі з параметрами: опір $R = 4$ Ом, індуктивність $L = 1$ Гн, ємність $C = 0,01$ Ф, джерело напруги $V(t) = 10 \cos 10t$ В, якщо всі елементи з'єднані послідовно.

Розв'язок. Розв'яжемо приклад за допомогою метода комплексних амплітуд і опорів. Тоді $V = 10e^{i10t}$ (амплітуда напруги $V_0 = 10\text{В}$), комплексний опір котушки $Z_L = i\omega L$, комплексний опір конденсатора $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$. Оскільки в колі є активний опір R , то вважаємо його комплексним опором.

Скористаємось комплексним законом Ома

$$I = \frac{V}{Z},$$

де $Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ – комплексний опір кола. За умовою

задачі $Z = 4 + i\left(10 \cdot 1 - \frac{1}{10 \cdot 0,01}\right) = 4 + i(10 - 10) = 4$ (Ом). Отже, амплітуда

струму $I_0 = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{10}{4} = 2,5$ (А).

Вправи до розділу

1. Знайти значення виразу $(z_1 + 2z_2)z_3$, якщо $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 + 2i$; $z_3 = 5 - 2i$.

Відповідь: $54 + 19i$.

2. Знайти значення виразу $\frac{z_1 + z_2 z_3}{z_2}$, якщо $z_1 = 4 + 5i$; $z_2 = 1 + i$; $z_3 = 7 - 9i$.

Відповідь: $\frac{23 - 17i}{2}$.

3. Записати числа $z_1 = 4$; $z_2 = \sqrt{3} + i$; $z_3 = i$; $z_4 = -1 + \sqrt{3}i$; $z_5 = -\frac{1}{2}$; $z_6 = -1 - \sqrt{3}i$; $z_7 = -2i$; $z_8 = -1 + i$ у тригонометричній та показниковій формах.

4. Знайти модулі, головні значення аргументів і аргументи комплексних чисел

а) $z = -\sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$, б) $z = 1 + i^{283}$.

Відповіді: а) $|z| = 1$, $\arg z = \frac{7\pi}{10}$, $\text{Arg } z = \frac{7\pi}{10} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $|z| = \sqrt{2}$,

$\arg z = -\frac{\pi}{4}$, $\text{Arg } z = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Знайти модуль і головне значення аргументу комплексних чисел:

а) $2 + 5i$; б) ib ($b \neq 0$); в) e^{-i5} .

Відповіді: а) $\sqrt{29}$, $\operatorname{arctg} \frac{5}{2}$; б) $|b|$, $\frac{\pi|b|}{2b}$; в) 1 , $-5 + 2\pi$.

6. Обчислити: а) $(1 + i\sqrt{3})^3$; б) $\frac{1}{(3 - 2i)^2}$.

Відповіді: а) -8 ; б) $\frac{5}{169} + \frac{12}{169}i$.

7. Знайти всі значення коренів: а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[4]{-1}$; в) $\sqrt[5]{-4 + 3i}$.

Відповіді: а) 1 , $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$;

в) $\sqrt[5]{5} \left(\cos \frac{(2k+1)\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{4}}{5} + i \sin \frac{(2k+1)\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{4}}{5} \right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

8. Знайти всі корені рівняння $z^8 - 1 = 0$.

Відповідь: ± 1 , $\pm i$, $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6, \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8. \end{cases}$

Відповідь: $x = 2 + i$, $y = 2 - i$.

10. Довести, що $\left(\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha} \right)^n = \frac{1 + i \operatorname{tg} n\alpha}{1 - i \operatorname{tg} n\alpha}$.

11. Написати в комплексній формі рівняння ліній: а) осей Ox і Oy ; б) прямої $y = 2x + 1$.

Відповіді: а) $\bar{z} - z = 0$, $\bar{z} + z = 0$; б) $2(z + \bar{z}) + 2 + i(z - \bar{z}) = 0$.

12. У який вектор перейде вектор $-\sqrt{3} - i$ після повороту його на кут $\frac{2\pi}{3}$?

Відповідь: $\sqrt{3} - i$.

Самостійна робота

1. Знайти значення виразу $\frac{z_1 + z_2}{z_3}$, якщо $z_1 = 5 + i$; $z_2 = 1 + 2i$; $z_3 = 1 - i$.

2. Знайти значення виразу $\frac{z_1^2}{z_2 - z_3}$, якщо $z_1 = -1 + 2i$; $z_2 = i$; $z_3 = 2 + i$.

3. Знайти $z_1 \bar{z}_2$, якщо $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$; $z_2 = 2 + 2i$.
4. Знайти числа $z_1 = 5$; $z_2 = -1 - i$; $z_3 = -4i$; $z_4 = 1 + \sqrt{2}i$ у тригонометричній і показниковій формах.
5. Чи всі дані числа подано у тригонометричній формі:
- а) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; б) $-2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; в) $\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$?
- Якщо ні, то запишіть, а також у алгебраїчній та показниковій формах.
6. Знайти значення коренів: а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\sqrt{2 - i2\sqrt{2}}$; в) $\sqrt[4]{1 - i}$.
7. Знайти корені рівнянь і зобразити їх на комплексній площині:
- а) $z^3 - 4\sqrt{2}(1 + i) = 0$; б) $z^4 - i = 0$; в) $z^3 + 1 - i = 0$.
8. Знайти всі комплексні числа, що задовольняють умову $\bar{z} = z^2$.
9. Розв'язати рівняння $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$.

2. Послідовність комплексних чисел

Якщо кожному натуральному числу n поставлено у відповідність комплексне число z_n , то кажуть, що задана **послідовність комплексних чисел** $\{z_n\}$.

Комплексне число a називається **границею послідовності** $\{z_n\}$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|z_n - a| < \varepsilon$.

В цьому випадку пишуть $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Іншими словами, комплексне число a називається границею послідовності $\{z_n\}$, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - a| = 0.$$

ε -околом точки a називається круг $|z - a| < \varepsilon$ радіуса ε з центром в точці a . Геометрично точка a є границею послідовності $\{z_n\}$, якщо всі точки z_n при $n > N(\varepsilon)$ містяться в ε -околі точки a .

Послідовність $\{z_n\}$ називається **обмеженою**, якщо існує число $M > 0$ таке, що для будь-якого $n \in N$ виконується нерівність $|z_n| < M$. Послідовність, яка не є обмеженою, називається **необмеженою**.

Послідовність $\{z_n\}$ називається **нескінченно малою**, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер $N(\varepsilon)$ такий, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|z_n| < \varepsilon$.

Послідовність $\{z_n\}$ називається **нескінченно великою**, якщо для будь-якого числа $R > 0$ знайдеться номер $N(R)$ такий, що для всіх $n > N(R)$ виконується нерівність

$$|z_n| > R. \quad (9)$$

Геометрично нерівність (9) означає, що члени послідовності $\{z_n\}$ для $n > N(R)$ розташовані зовні круга радіуса R з центром в точці 0 , тобто в області $|z| > R$, яка називається **околом нескінченності**.

Послідовність, що має границю, називається **збіжною**, а послідовність, що не має границі, – **розбіжною**.

Розбіжною послідовністю являється будь-яка необмежена послідовність, зокрема нескінченно велика. Нескінченно велика послідовність позначається

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty.$$

З визначення нескінченно малої і нескінченно великої послідовностей випливає, що якщо α_n – нескінченно мала послідовність, то $z_n = \frac{1}{\alpha_n}$ – нескінченно велика, і навпаки, якщо z_n – нескінченно велика послідовність, то $\alpha_n = \frac{1}{z_n}$ – нескінченно мала.

Теорема. Для того, щоб послідовність $\{z_n\}$ мала скінчену границю $c = \alpha + i\beta$, необхідно і достатньо, щоб послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, де $x_n = \operatorname{Re} z_n$, $y_n = \operatorname{Im} z_n$, мали скінченні границі, які дорівнюють відповідно α та β :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta.$$

З теореми і властивостей збіжних послідовностей дійсних чисел випливають наступні **властивості послідовностей** з комплексними числами.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = b$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + u_n) = a + b;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot u_n = a \cdot b;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{u_n} = \frac{a}{b}, \quad u_n \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad b \neq 0.$$

Критерій Коші. Для того, щоб послідовність $\{z_n\}$ збігалася необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існував такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ і $m > N$ виконувалась нерівність $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Приклад 1. Користуючись визначенням, довести, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 3ni}{n + 1} = 1 - 3i.$$

Розв'язок. Нехай ε – довільне додатне число. Треба довести, що існує таке число $N = N(\varepsilon)$, що при всіх значеннях $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|z_n - (1 - 3i)| < \varepsilon$.

Знайдемо абсолютну величину різниці

$$|z_n - (1 - 3i)| = \left| \frac{n - 3ni}{n + 1} - 1 + 3i \right| = \left| \frac{3i - 1}{n + 1} \right| = \frac{\sqrt{10}}{n + 1}.$$

Таким чином нерівність $|z_n - (1 - 3i)| < \varepsilon$ виконується, якщо $\frac{\sqrt{10}}{n + 1} < \varepsilon$, звідки

$n > \frac{\sqrt{10}}{\varepsilon} - 1$. Тому в якості $N(\varepsilon)$ можна взяти цілу частину числа $\frac{\sqrt{10}}{\varepsilon} - 1$:

$$N = N(\varepsilon) = \left[\frac{\sqrt{10}}{\varepsilon} - 1 \right].$$

Тобто, для будь-якого ε знайдено таке число $N(\varepsilon)$, що з нерівності $n > N(\varepsilon)$ випливає нерівність $|z_n - (1 - 3i)| < \varepsilon$, а це означає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 3ni}{n + 1} = 1 - 3i.$$

Приклад 2. Обчислити границю послідовності з комплексними числами

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + ni}{n - 2i}.$$

Розв'язок. *Перший спосіб.* Скористаємося для визначення границі теоремою. Для цього знайдемо дійсну і уявну частини послідовності $\{z_n\}$ застосувавши правило ділення комплексних чисел:

$$\frac{4 + ni}{n - 2i} = \frac{(4 + ni)(n + 2i)}{(n - 2i)(n + 2i)} = \frac{2n + i(n^2 + 8)}{n^2 + 4} = \frac{2n}{n^2 + 4} + i \frac{n^2 + 8}{n^2 + 4}.$$

Тоді $x_n = \frac{2n}{n^2 + 4}$, $y_n = \frac{n^2 + 8}{n^2 + 4}$. Знайдемо границі отриманих послідовностей

дійсних чисел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2 + 4} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 8}{n^2 + 4} = 1$. Тобто $\alpha = 0$,

$\beta = 1$. Таким чином, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + ni}{n - 2i} = i$.

Другий спосіб. Скористаємося властивостями послідовностей і методами дійсного аналізу.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + ni}{n - 2i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n} + i}{1 - \frac{2}{n}i} = i.$$

Приклад 3. Обчислити границю послідовності з комплексними числами

$$z_n = \left(\frac{3n+1}{3n-5} \right)^n + i \left(1 - \sin 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \right) n^4.$$

Розв'язок. Знайдемо границі дійсної і уявної частин послідовності

$$\operatorname{Re} z_n = x_n = \left(\frac{3n+1}{3n-5} \right)^n, \quad \operatorname{Im} z_n = y_n = \left(1 - \sin 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \right) n^4.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-5} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{3n-5} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{6}{3n-5} \right)^{\frac{3n-5}{6}} \right)^{\frac{6n}{3n-5}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{3n-5}} = e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sin 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \right) n^4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{n^2} \right) \right) n^4 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \cos \frac{2}{n^2} \right) n^4 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sin^2 \frac{1}{n^2} n^4 = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \right)^2 = 2. \end{aligned}$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = e^2 + 2i$.

Теорема. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |c|$; якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$; а $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$.

Приклад 4. Обчислити границю послідовності $z_n = \left(\frac{i}{4-3i} \right)^n$.

Розв'язок. $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \left| \left(\frac{i}{4-3i} \right)^n \right| = 0$, оскільки $\left| \frac{i}{4-3i} \right| = \frac{1}{5} < 1$. Тому і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0.$$

Достатня умова збіжності послідовності комплексних чисел

Нехай $z_n = \rho_n e^{i\varphi_n}$, де $\rho_n = |z_n|$, $\varphi_n = \arg z_n$. Тоді, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \rho_0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi_0, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \rho_0 e^{i\varphi_0}.$$

Приклад 5. Нехай φ – дійсне число. Довести, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\varphi}{n} \right)^n = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Доведення. Скористаємося достатньою умовою збіжності послідовності $\{z_n\}$.

$$\begin{aligned} \rho_n = |z_n| &= \left| \left(1 + \frac{i\varphi}{n} \right)^n \right| = \left(1 + \left(\frac{\varphi}{n} \right)^2 \right)^{\frac{n}{2}}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\varphi^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{\varphi^2}{n^2} \right)^{\frac{n^2}{\varphi^2}} \right)^{\frac{\varphi^2 \cdot n}{n^2 \cdot 2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{\varphi^2}{n^2} \right)^{\frac{n^2}{\varphi^2}} \right)^{\frac{\varphi^2}{2n}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

$$\varphi_n = \arg z_n = \arg \left(1 + \frac{i\varphi}{n} \right)^n = n \arg \left(1 + \frac{i\varphi}{n} \right) =$$

$$= n \cdot \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{n} = n \cdot \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\varphi}{n} = \varphi.$$

Тобто, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n = 1 \cdot e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, що й треба було довести.

Приклад 6. Нехай $x_n = 1 + \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2^2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2^3} \cos 3\alpha + \dots + \frac{1}{2^n} \cos n\alpha$,
 $n = 1, 2, \dots$ Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Розв'язок. Введемо додатково

$$y_n = \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2^2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2^3} \sin 3\alpha + \dots + \frac{1}{2^n} \sin n\alpha$$

і розглянемо послідовність комплексних чисел

$$z_n = x_n + iy_n = 1 + \frac{1}{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha) + \frac{1}{2^2}(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) + \dots + \frac{1}{2^n}(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

Скористаємося формулою Муавра (7):

$$z_n = 1 + \frac{1}{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha) + \left(\frac{1}{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha)\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha)\right)^n.$$

Оскільки $\left|\frac{1}{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha)\right| = \frac{1}{2} < 1$, то при $n \rightarrow \infty$ застосуємо формулу суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha)}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = \operatorname{Re} \frac{1}{\left(1 - \frac{\cos \alpha}{2}\right) - i \frac{\sin \alpha}{2}} = \frac{1 - \frac{\cos \alpha}{2}}{\left(1 - \frac{\cos \alpha}{2}\right)^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{4}} = \\ &= \frac{1 - \frac{\cos \alpha}{2}}{1 - \cos \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{4} + \frac{\sin^2 \alpha}{4}} = \frac{4 - 2 \cos \alpha}{5 - 4 \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Вправи до розділу

1. Користуючись визначенням, довести, що

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+i}{7n-2i} = \frac{5}{7}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-ni}{5n-i} = -\frac{i}{5}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+i}{2n^2-4i} = 1$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7+ni}{3-ni} = -1$.

Обчислити границі послідовностей з комплексними числами:

$$2. z_n = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n + i \frac{n-4}{n+3}. \quad 3. z_n = n \sin \frac{1}{n} + i \frac{n^2+2}{n^2-n+3}. \quad 4. z_n = n \sin \frac{i}{n}.$$

$$5. z_n = \left(\frac{2i+3}{i-5}\right)^n. \quad 6. z_n = \frac{i^n}{n}. \quad 7. z_n = \frac{(-1)^n}{n^2} + i \frac{2^n + (-1)^n}{2^n}.$$

$$8. z_n = \sqrt{n^2 + n + 3} - n + in^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right).$$

$$9. z_n = 1 + \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3^3} \cos \frac{3\pi}{3} + \dots + \frac{1}{3^n} \cos \frac{n\pi}{3}.$$

$$10. z_n = \frac{3}{4} \sin \frac{\pi}{4} + \frac{9}{16} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{27}{64} \sin \frac{3\pi}{4} + \dots + \frac{3^n}{4^n} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

$$\text{Відповіді: } 2. \frac{1}{e^2} + 1. \quad 3. 1 + i. \quad 4. i. \quad 5. 0. \quad 6. 0. \quad 7. i. \quad 8. 1 + i \frac{1}{2}. \quad 9. \frac{15}{14}. \quad 10. \frac{6\sqrt{2}}{25 - 12\sqrt{2}}.$$

3. Сфера Рімана. Стереографічна проекція

Комплексна площина з приєднаною до неї нескінченно віддаленою точкою називається **розширеною** або **замкненою** комплексною площиною \bar{C} .

Геометрична інтерпретація розширеної комплексної площини здійснюється за допомогою сфери Рімана.

Розглянемо декартову систему координат $(\xi; \eta; \zeta)$, узгоджену з системою координат $(x; y)$, яка розглядається як комплексна числова площина.

Вважаємо, що осі Ox і Oy співпадають з осями $O\xi$ і $O\eta$.

Візьмемо одиничну сферу S (сферу одиничного діаметра), що дотикається площини xOy в початку координат – точці $O(0; 0)$. Ця точка називається **південним** полюсом сфери S , а діаметрально протилежна їй точка N – **північним** полюсом (рис.4). Кожному комплексному числу $z = x + iy$, яке задано на комплексній площині xOy точкою $P(x; y)$, поставимо у відповідність точку $P'(\xi; \eta; \zeta)$ перетину відрізка PN зі сферою S . Така відповідність між точками розширеної комплексної площини і точками сфери S , яка в цьому випадку називається **сферою Рімана**, є взаємно однозначною, що дає можливість ототожнення \bar{C} і S .

Побудова відображення площини на сферу і навпаки називається **стереографічною проекцією**.

Стереографічна проекція зберігає кути між кривими, що перетинаються на площині, і образами цих кривих на сфері Рімана; також кола переходять в кола.

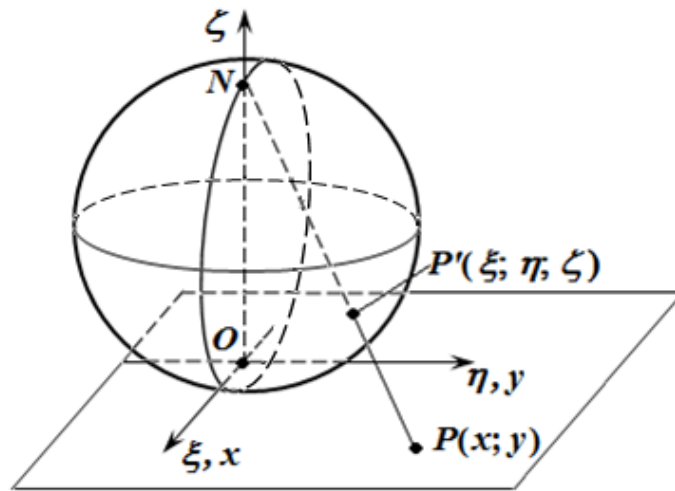


Рис.4

Стереографічна проекція записується за допомогою наступних формул:

$$\xi = \frac{x}{1+x^2+y^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+x^2+y^2}, \quad \zeta = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}. \quad (10)$$

Стереографічна проекція застосовується в картографії для зображення поверхні Землі на карті, астрономії, кристалографії, навігації, геометрії надр, структурної геології та в інших галузях науки і техніки.

Приклад 1. Знайти і побудувати стереографічну проекцію точки $z = \sqrt{3} + i$.

Розв'язок. Якщо $z = \sqrt{3} + i$, то $x = \sqrt{3}$, $y = 1$. За формулами (10) $\xi = \frac{\sqrt{3}}{5}$, $\eta = \frac{1}{5}$, $\zeta = \frac{4}{5}$. Отже, шукана точка $P' \left(\frac{\sqrt{3}}{5}; \frac{1}{5}; \frac{4}{5} \right)$ (рис.5).

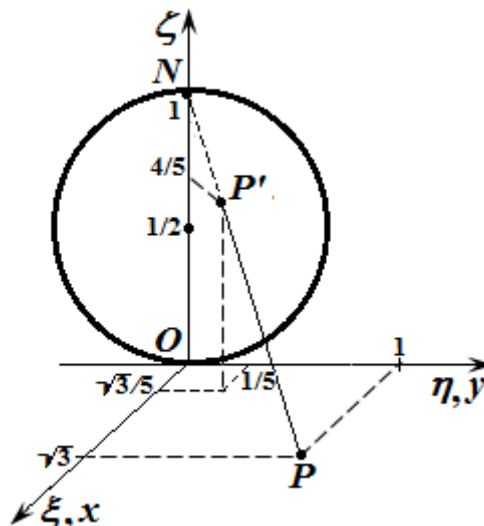


Рис.5

Приклад 2. Знайти і побудувати стереографічну проекцію множини точок комплексної площини, заданої нерівністю $|z| > 2$.

Розв'язок. Знайдемо спочатку стереографічну проекцію кола $|z|=2$. Для цього за формулами (10) визначимо стереографічну проекцію точки $P(1; \sqrt{3})$, яка належить колу: $\xi = \frac{1}{5}$, $\eta = \frac{\sqrt{3}}{5}$, $\zeta = \frac{4}{5}$. Стереографічну проекцію кола $|z|=2$ отримаємо як коло перетину сфери Рімана і площини $\zeta = \frac{4}{5}$, що паралельна $\xi O \eta$:

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \\ \zeta = \frac{4}{5}. \end{cases} \Rightarrow \xi^2 + \eta^2 = \frac{16}{100}. \quad \text{Таким чином, стереографічна}$$

проекція множини точок комплексної площини, заданої нерівністю $|z| > 2$ – це множина точок сфери Рімана, розташованих вище кола $\xi^2 + \eta^2 = \frac{16}{100}$ радіуса $R = 0,4$ (рис.6).

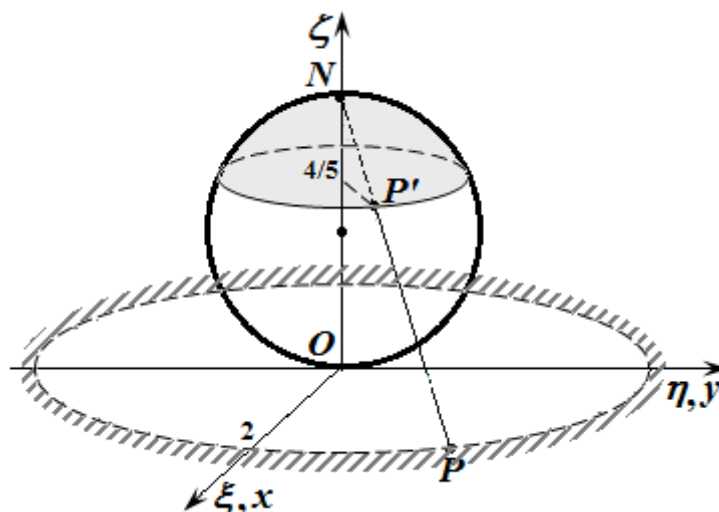


Рис.6

4. Поняття числового ряду та його збіжність

Числовим комплексним рядом називається вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad (11)$$

де $z_n = x_n + iy_n$ – комплексні числа.

Сума перших n членів ряду називається *n-ю частковою сумою* ряду

$$S_n = z_1 + z_1 + z_3 + \dots + z_n = \sum_{k=1}^n z_k.$$

Якщо існує скінченна границя комплексної послідовності $\{S_n\}$ часткових сум

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

то ряд (11) називається **збіжним**, а число S – **сумою ряду**. Якщо границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує або нескінченна, то ряд називається **розбіжним**.

Ряд (11) збігається тоді і тільки тоді, коли одночасно збігаються ряди, складені з дійсних та уявних частин комплексного числа z_n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n. \quad (12)$$

При дослідженні на збіжність рядів (12) користуються ознаками збіжності рядів з дійсними членами.

1. Ознака порівняння рядів. Нехай дано два ряди з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Якщо існує натуральне число N таке, що нерівність $a_n \leq b_n$

виконано для всіх $n \geq N$, то з збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

При дослідженні рядів за цією ознакою часто використовують геометричну прогресію $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ ($a > 0$), яка збігається при $|q| < 1$ і

розбігається при $|q| > 1$ і узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, який

збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \leq 1$.

2. Гранична ознака порівняння. Нехай дано два ряди з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Якщо границя відношення загальних членів цих рядів дорівнює скінченному, відмінному від нуля числу A :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A \quad (0 < A < \infty),$$

то обидва ряди збігаються і розбігаються одночасно.

3. Ознака Даламбера. Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

то при $l < 1$ ряд збігається, при $l > 1$ – розбігається.

4. Радикальна ознака Коші. Якщо для ряду з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то при $q < 1$ ряд збігається, при $q > 1$ – розбігається.

Ознака Лейбніца. Якщо для членів знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, де $a_n > 0$ при будь-якому n ,

$$a_n \geq a_{n+1} \quad (n = k, k+1, \dots) \quad \text{і} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

то ряд збігається.

Критерій Коші. Для того щоб ряд (11) збігався, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існувало $N = N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n > N$ і натурального m виконувалась нерівність

$$|S_{n+m} - S_n| = |z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+m}| < \varepsilon.$$

Необхідна ознака збіжності рядів. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ збігається, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0.$$

Якщо ж $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$, то ряд розбігається. Це *достатня ознака розбіжності* ряду.

Властивості збіжних числових рядів

1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ збігається і має суму, що дорівнює S , то його добуток на число c теж збігається і має суму cS :

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = c \sum_{n=1}^{\infty} z_n = cS.$$

2. Сумою двох збіжних рядів є збіжний ряд, причому його сума S дорівнює $S_1 + S_2$, де S_1 і S_2 – суми додаваних рядів.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|, \text{ де } |z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}. \text{ Якщо ряд } \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ збігається, а ряд } \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

розбігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ називається **умовно збіжним**.

Приклад 1. Користуючись означенням збіжності числового ряду, встановити, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n^2 - 1} + i \frac{4}{3^{n-1}} \right)$ збігається, і знайти його суму.

Розв'язок. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Знайдемо його n -ну часткову суму

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$\text{Тоді } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}.$$

Суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ отримуємо скориставшись формулою суми членів

нескінченно спадної геометричної прогресії з знаменником $q = \frac{1}{3}$. Таким чином, досліджуваний ряд збігається і його сума

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n^2 - 1} + i \frac{4}{3^{n-1}} \right) = \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{3}{2} i = \frac{1}{2} + 6i.$$

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + i \frac{1}{n} \right); \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 4} + i \frac{n}{5^n} \right).$$

Розв'язок: а) розглянемо ряди з дійсними членами: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ збігається, оскільки складається з членів нескінченно спадної

геометричної прогресії, знаменник якої $q = 1/3 < 1$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається як

гармонійний. Отже, досліджуваний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + i \frac{1}{n} \right)$ розбігається;

б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$ збігається через ознаку порівняння $\frac{1}{n^2 + 4} < \frac{1}{n^2}$. Ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ теж збігається за ознакою Даламбера, бо

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)5^n}{5^{n+1}n} = \frac{1}{5} < 1$. Тобто досліджуваний ряд збігається.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3 + \sin^2(3^n)} + i \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3n}}{n} \right)$.

Розв'язок. Розглянемо два ряди, складені з дійсних та уявних частин

комплексного числа $z_n: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + \sin^2(3^n)} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3n}}{n}$.

Оскільки послідовність $\{\sin^2(3^n)\}$ обмежена $0 \leq \sin^2(3^n) \leq 1$, то знаменник першого ряду $n^3 + \sin^2(3^n) \geq n^3$. Отже, для будь-яких натуральних n виконується $\frac{1}{n^3 + \sin^2(3^n)} \leq \frac{1}{n^3}$. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ($\alpha = 3 > 1$) збігається, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + \sin^2(3^n)}$.

Порівняємо другий ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ($\alpha = 2 > 1$).

Скористаємося граничною ознакою порівняння і принципом заміни еквівалентними ($\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3n}}{3n}}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3n}}{n} \cdot n^2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{3n} \cdot n \right) = \frac{\pi}{3} -$$

отримали скінченне, відмінне від нуля число. Тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3n}}{n}$ збігається

разом з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Отже, оскільки одночасно збігаються ряди з дійсної і уявної частин членів досліджуваного ряду, то і сам ряд збігається.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5in + 1}{3in^2 - \sqrt{2}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5in + 1}{3in^4 - \sqrt{2}}$.

Розв'язок. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5in + 1}{3in^2 - \sqrt{2}} = \frac{1}{3i} \neq 0$ – ряд розбігається, оскільки не виконується необхідна ознака збіжності ряду;

б) в цьому випадку необхідна ознака збіжності $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5in + 1}{3in^4 - \sqrt{2}} = 0$

виконується. Для подальшого дослідження ряду скористаємося граничною ознакою порівняння зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ($\alpha = 2 > 1$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_n|}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^4 + 5in^3 + n^2}{3in^4 - \sqrt{2}} \right| = \left| \frac{1}{3i} \right| = \frac{1}{3}.$$

Отже, за ознакою порівняння ряд збігається.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$.

Розв'язок. За формулою Ейлера $e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{n}$

розбігається разом з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ за ознакою порівняння. Таким чином досліджуваний ряд розбігається.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{3n-1} + i \frac{1}{3n+1} \right)$.

Розв'язок. Розглянемо знакозмінні ряди з дійсними членами $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-1}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n+1}$. За ознакою Лейбніца ці ряди збігаються.

Тоді і ряд з комплексними членами буде збіжним.

Складемо ряд з модулів z_n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{1}{3n-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{3n+1}\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{18n^2 + 2}}{9n^2 - 1}.$$

Порівняємо отриманий ряд з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{18n^2 + 2}}{9n^2 - 1} : \frac{1}{n} = \frac{\sqrt{2}}{3}. \text{ За граничною ознакою порівняння ряд розбігається,}$$

тобто ряд з комплексними членами збігається умовно.

Приклад 7. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3i)^n}{n!}$ збігається абсолютно.

Розв'язок. Скористаємося ознакою Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(3i)^{n+1} n!}{(n+1)! (3i)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3i}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$, то ряд збігається абсолютно.

Вправи до розділу

1. Користуючись означенням збіжності числового ряду, встановити, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 3n} + i \frac{5}{2^{n-1}} \right)$ збігається, і знайти його суму.

Відповідь. $\frac{11}{18} + 10i$.

2. Дослідити на збіжність ряди:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(3i+1)}{3^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1} + i \frac{n}{3n^2+1} \right); & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+i)^{2n}}{4^n}; \\ \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}; & \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+i}}; & \text{е) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2in}{n-3i}; \end{array} \quad \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{3}}{3^n} + i \sin \frac{n}{n^2+1}.$$

Відповіді: а) збігається; б) розбігається; в) розбігається; г) збігається; д) розбігається; е) розбігається; є) розбігається.

3. Дослідити на абсолютну збіжність ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{4}\right)^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^n} + \frac{i}{3^n}\right); \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}.$$

Відповіді: а) збігається абсолютно; б) збігається абсолютно; в) збігається умовно; г) збігається абсолютно.

4. Дослідити на абсолютну збіжність ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n(2-i)+1}{n(3-2i)-3}\right)^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in^2}}{n!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{3n}}{i+n^2}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{(3i)^n}.$$

Відповіді: а) збігається абсолютно; б) збігається абсолютно; в) збігається абсолютно; г) збігається абсолютно.

Самостійна робота

Дослідити на збіжність ряди:

$$\begin{aligned} & 1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} + i \frac{n+1}{n+2}\right). \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} (2i-1)^n. \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i2n}}{n\sqrt{n}}. \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}. \\ & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (1+i)^{n-1}. \end{aligned}$$

5. Лінії та області на комплексній площині

Якщо кожному значенню t з інтервалу $a < t < b$ поставлено у відповідність комплексне число $z = x(t) + iy(t)$, де $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$, а $y(t) = \operatorname{Im} z(t)$, то кажуть, що на інтервалі $(a; b)$ задана **комплекснозначна функція** $z(t)$ дійсного аргументу t .

Нехай задана комплекснозначна функція $z(t)$, що неперервна на відрізку $[a; b]$. **Неперервною кривою** на комплексній площині називають множину точок $z(t) = x + iy$ таких, що

$$z = z(t) \quad \text{або} \quad x = x(t), \quad y = y(t) \quad (-\infty \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq \infty),$$

де $x(t)$ і $y(t)$ – неперервні функції дійсного параметра t . Рівняння $z = z(t)$ називають **параметричним рівнянням** кривої.

Неперервна крива (або її частина) називається **кривою Жордано**, якщо вона складається з єдиної гілки і не містить кратних точок. Це означає, що функції $x = x(t)$ і $y = y(t)$ однозначні і в замкненому інтервалі $[t_1; t_2]$ не існує таких двох різних значень τ_1 і τ_2 , для яких слушні обидві рівності $x(\tau_1) = x(\tau_2)$ і $y(\tau_1) = y(\tau_2)$.

Якщо початкова і кінцева точки кривої співпадають ($z(\tau_1) = z(\tau_2)$), то такі криві називаються **замкненими**.

Оскільки кожна точка $(x; y)$ на площині (z) зображує комплексне число $z = x + iy$, то рівняння кривої може бути записано в **комплексно-параметричній** формі

$$z = x(t) + iy(t) \quad (-\infty \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq \infty).$$

Криві, рівняння яких задано в параметричному вигляді, вважаються орієнтованими в напрямку зростання параметра t . Напрямок руху точки z вздовж кривої в цьому випадку називають **додатним**.

Крива на комплексній площині може бути задана рівнянням $F(z) = 0$ або $F(x, y) = 0$.

Приклад 1. Визначити тип кривих: а) $z = t - it$; б) $z = R \cos t + iR \sin t$; в) $z = i \sin t$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$; г) $z = e^{i2t} - 2$, $0 \leq t < 2\pi$.

Розв'язок: а) нехай $z = x + iy$. Тоді $x = t$; $y = -t$. Вилучивши t рівнянь, маємо $y = -x$, тобто рівняння прямої;

б) $x = R \cos t$; $y = R \sin t$. Піднесемо до квадрата обидві частини першого і другого рівнянь та почленно додамо: $x^2 + y^2 = R^2$ – це рівняння кола з центром на початку координат і радіусом R ;

в) функція $\sin t$ при зміні параметра t в межах від 0 до 2π приймає дійсні значення з проміжку $[-1; 1]$. В цьому випадку крива $z = i \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) являє собою відрізок уявної осі $-1 \leq y \leq 1$. Оскільки значенням параметрів $t = 0$ і $t = 2\pi$ відповідає одне і теж значення функції $z = 0$, то крива замкнена. Крива має кратні точки: для параметра t_1 і $\pi - t_1$ при $0 < t_1 < \pi$ $z(t_1) = z(\pi - t_1) = i \sin t_1$, для параметра t_2 і $3\pi - t_2$ при $\pi < t_2 < 2\pi$ $z(t_2) = z(\pi - t_2) = i \sin t_2$. Це означає, що при зміні параметра t від 0 до 2π відрізок $[-1; 1]$ уявної осі обходиться двічі;

г) скориставшись формулами Ейлера, запишемо $z = \cos 2t + i \sin 2t - 2$, або $z = \cos 2t - 2 + i \sin 2t$. Тоді $x = \cos 2t - 2$, $y = \sin 2t$. Вилучивши параметр t з системи рівнянь

$$\begin{cases} x - 2 = \cos 2t, \\ y = \sin 2t, \end{cases}$$

отримаємо рівняння кола $(x-2)^2 + y^2 = 1$ з центром в точці $(2; 0)$ і радіусом $R = 1$, контур якого обходиться двічі проти годинникової стрілки.

Приклад 2. Установити лінії на площині xOy , які визначаються рівняннями а) $z \cdot \bar{z} + i(z - \bar{z}) - 4 = 0$; б) $|z - i| + |z + i| = 4$.

Розв'язок. а) нехай $z = x + iy$, тоді $\bar{z} = x - iy$, $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$. Рівняння кривої набуває вигляду

$$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0, \text{ або } x^2 + (y-1)^2 = 4.$$

Ця лінія є колом з центром в точці $(0; 1)$ і радіусом $R = 2$.

б) нехай $z = x + iy$, тоді

$$z - i = x + iy - i = x + i(y-1), \quad z + i = x + iy + i = x + i(y+1).$$

Рівняння кривої набуває вигляду

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4.$$

Далі, підносячи до квадрату, отримаємо

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2y + 1 &= 16 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} + x^2 + y^2 + 2y + 1, \\ y + 4 &= 2\sqrt{x^2 + (y+1)^2}, \quad y^2 + 8y + 16 = 4x^2 + 4y^2 + 8y + 4, \quad 4x^2 + 3y^2 = 12. \end{aligned}$$

Отже, маємо канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Точка z називається **внутрішньою точкою** множини E точок комплексної площини, якщо існує ε -окіл точки z , який цілком належить множині E .

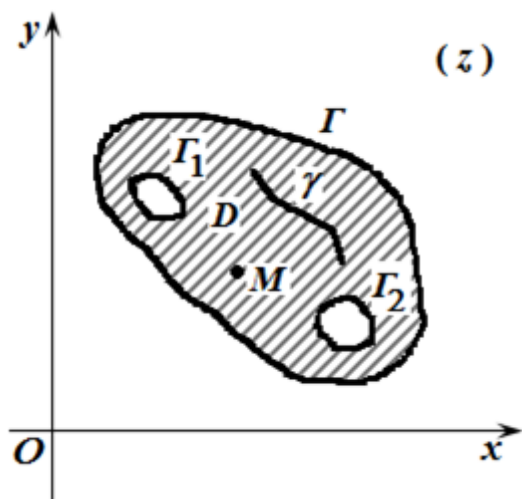
Множина E називається **областю**, якщо: 1) кожна точка множини E – внутрішня; 2) будь-які її дві точки можна з'єднати неперервною кривою, всі точки якої належать даній множині.

Надалі область будемо позначати буквою D . **Межовою** точкою області D називається точка, яка сама не належить області D , але будь-який її ε -окіл містить точки D . Сукупність усіх межових точок називається **межею області D** .

Область D з приєднаною межею називається **замкненою областю**. Замкнену область позначимо \bar{D} . Далі вважатимемо, що границя області складається з кінцевого числа кусково-гладких (замкнених або незамкнених) кривих. Деякі криві можуть вироджуватися на точку чи подвійну лінію, яку називають **розрізом**.

Область D називається **обмеженою**, якщо можна вказати круг певного радіуса, який цілком містить в собі область D . У протилежному випадку область D називається **необмеженою**.

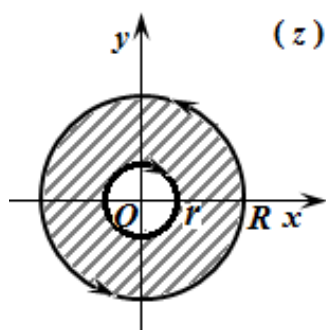
Число зв'язних частин, на які розбивається границя, називається **порядком зв'язності області**. На рис.7 зображена п'ятизв'язна область, що



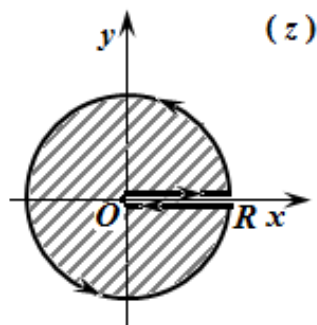
(z) обмежена замкненими лініями $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$, одним розрізом γ і однією ізольованою точкою M . Надалі будемо вважати межові криві області D орієнтованими так, що при русі вздовж них в напрямку цієї орієнтації область D залишається зліва. Такий напрям обходу контуру називається **додатним**. На рис.8 зображені області з додатними напрямками обходу контурів:

Рис.7

а) границя області $r < |z| < R$ складається з двох кривих, одна з яких, коло $|z| = R$, орієнтована проти годинникової стрілки, друга – коло $|z| = r$, орієнтована за годинниковою стрілкою;



а)



б)

Рис.8

б) область $|z| < R, 0 < \arg z < 2\pi$ являє собою круг $|z| < R$ з розрізом по відріжку $[0; R]$. Границя області складається з кола $|z| = R$, що проходиться проти годинникової стрілки, і розрізу. Розріз має два береги, які проходяться у протилежних напрямках, оскільки кожній точці напівінтервалу $(0; R]$ відповідають дві різні точки, що належать нижньому і верхньому берегу розрізу.

Приклад 3. Установити множину точок комплексної площини (z) , які задовольняють співвідношення: а) $\text{Im } z = 2$; б) $\text{Re } z < 1$; в) $\arg z = \pi / 4$; г) $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{6}$; д) $|z - z_0| = R$; е) $|z| - \text{Im } z < \frac{3}{2}$.

Ров'язок: а) нехай $z = x + iy$. Тоді з умови $\text{Im } z = 2$ випливає умова $y = 2$. Тобто множина точок $\text{Im } z = 2$ належить прямій $y = 2$ (рис.9);

б) оскільки $\operatorname{Re} z = x < 1$, то шукана множина точок – це півплощина, яка лежить ліворуч від прямої $x = 1$, не включаючи цю пряму (рис.10);

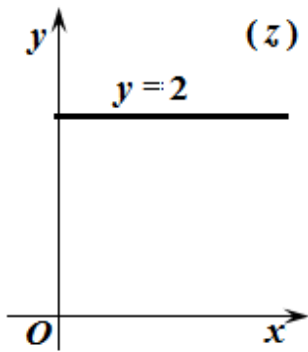


Рис.9

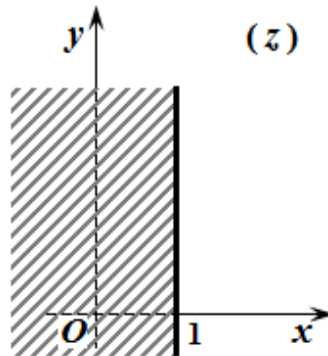


Рис.10

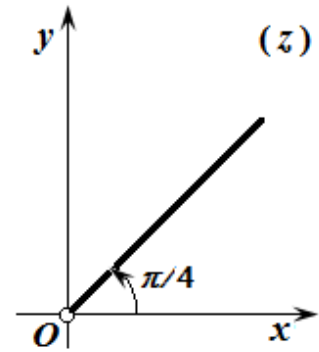


Рис.11

в) $\arg z$ – це кут між додатним напрямом осі Ox і радіусом-вектором точки z комплексної площини (z). Тоді шукана множина точок z , для яких $\arg z$ сталий і дорівнює $\frac{\pi}{4}$, – це промінь, що виходить з початку координат і складає з віссю Ox кут, який дорівнює $\frac{\pi}{4}$ (рис.11). Точка $z = 0$ з цього променя вилучається, оскільки аргумент числа 0 невизначений;

г) умову $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{6}$ задовольняють усі точки z комплексної площини, що лежать у куті розхилу $\frac{\pi}{6}$ і на його сторонах (рис.12). Точка $z = 0$ не входить до цієї множини;

д) якщо $z = x + iy$; $z_0 = x_0 + iy_0$, то $|z - z_0| = |(x - x_0) + i(y - y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Тоді умова $|z - z_0| = R$ перетворюється на умову

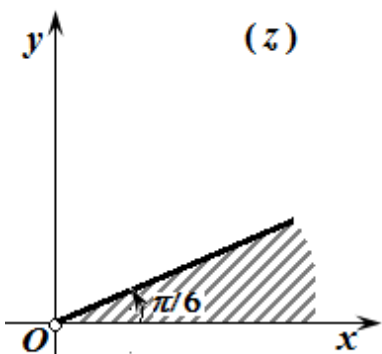


Рис.12

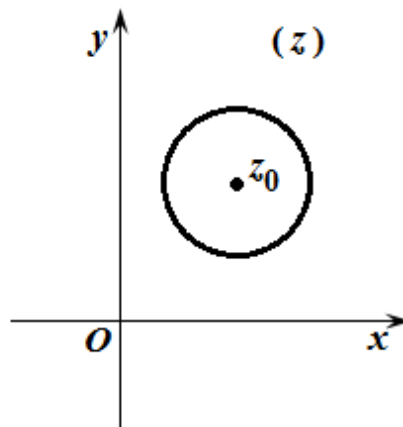


Рис.13

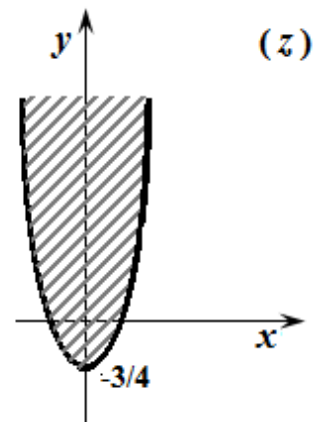


Рис.14

$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R$ або $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$. Це рівняння кола з центром у точці (x_0, y_0) та радіусом R (рис.13);

е) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\text{Im} z = y$. Тоді одержимо $\sqrt{x^2 + y^2} - y < \frac{3}{2}$ або $\sqrt{x^2 + y^2} < \frac{3}{2} + y$ $\left(y > -\frac{3}{2}\right)$.

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрата:

$$x^2 + y^2 < \frac{9}{4} + 3y + y^2.$$

Тобто шукана множина точок визначається нерівністю

$$x^2 < 3y + \frac{9}{4}.$$

Це – відкрита множина точок, обмежена графіком параболи:

$$x^2 = 3\left(y + \frac{3}{4}\right) \text{ (рис.14).}$$

Вправи до розділу

1. Визначити типи кривих:

а) $z = 3e^{it} - \frac{1}{2e^{it}}$; б) $z = 2 \text{ch } 2t + i3 \text{sh } 2t$; в) $z = t^2 + 2t + 5 + i(t^2 + 2t + 1)$,
 $t \in (-\infty; \infty)$; г) $z = i + 2e^{it}$ ($3\pi \leq t \leq 5\pi$); д) $z = \frac{1}{t} + it$ ($-\infty < t < \infty$).

Відповіді: а) еліпс $\frac{x^2}{25/4} + \frac{y^2}{49/4} = 1$; б) гіпербола $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; в) промінь $x - y - 4 = 0$, ($x \geq 4, y \geq 0$); г) коло $x^2 + (y-1)^2 = 4$; д) гіпербола $y = \frac{1}{x}$.

2. Установити лінії у площині (z), задані рівняннями

а) $\text{Im}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{2}$; б) $\text{Re}(\bar{z}^2) = 1$; в) $\arg z = \frac{\pi}{3}$; г) $\left|\frac{z-1}{z+3}\right| = 1$; д) $|z-1| + |z+1| = 2$.

Відповіді: а) коло $x^2 + (y-1)^2 = 1$; б) гіпербола $x^2 - y^2 = 1$; в) промінь, що виходить з початку координат і становить кут $\frac{\pi}{3}$ з віссю Ox ; г) пряма $x = -1$; д) відрізок $[-1; 1]$ дійсної осі.

3. Довести, що рівняння прямої, яка проходить через точки z_1 і z_2 має вигляд $(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)z + (z_2 - z_1)\bar{z} + z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 = 0$.

4. Установити множину точок комплексної площини, які задовольняють співвідношення, і виявити також – чи вони однозв’язні: а) $|z| > 2$; б) $|z + i| < 2$; в) $1 < |z - 1| < 2$; г) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$; д) $\frac{1}{4} < \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) < \frac{1}{2}$.

Відповіді: а) зовнішність круга з центром у точці O та радіусом 2; однозв’язна; б) внутрішність круга з центром у точці $-i$ та радіусом 2; однозв’язна; в) внутрішність кільця між двома колами радіусів 1 і 2 з центром у точці 1; двозв’язна; г) внутрішність горизонтальної смуги, яка міститься між прямими $y = -1$ і $y = 0$; однозв’язна; д) область, яка знаходиться між колами

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \text{ і } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8; \text{ однозв’язна.}$$

5. Знайти множину точок z , при яких збігається ряд

$$1 + (1 + z^2) + (1 + z^2)^2 + \dots + (1 + z^2)^n + \dots$$

Відповідь: внутрішність лемніскати $\rho^2 = -2 \cos 2\varphi$.

6. Знайти і зобразити на рисунку множину точок комплексної площини, що задано нерівностями: а) $\left| \frac{z}{z+2} \right| < 1$; б) $\operatorname{Im}(z^2) < 2$; в) $\operatorname{Re}(z^2) > 2$.

Відповіді: а) півплощина $\operatorname{Re} z > -1$; б) область між двома гілками гіперболи $y = \frac{1}{x}$; в) внутрішність обох гілок гіперболи $x^2 - y^2 > 2$.

Самостійна робота

1. Установити лінії у комплексній площині (z), задані рівняннями

а) $\operatorname{Im} z^2 = 2$; б) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$; в) $z = \operatorname{ctg} t - i 2 \operatorname{cosec} t$.

2. Установити множину точок комплексної площини, які задовольняють співвідношення, а також їх однозв’язність:

а) $0 \leq \arg z \leq 3\pi / 4$; б) $|z - 3 - 4i| = 5$; в) $|z - i| + |z + i| < 4$.

6. Функції комплексної змінної

Нехай маємо дві площини комплексних чисел $z = x + iy$ і $w = u + iv$ (рис. 15). Розглянемо деяку множину точок D у площині (z) і множину точок G у площині (w).

Кажуть, що на множині D задана функція комплексної змінної z , якщо задано правило, за яким кожному комплексному числу $z \in D$ поставлено у відповідність одне чи декілька комплексних чисел $w \in G$. Ця відповідність символічно записується у вигляді $w = f(z)$.

Множина D називається **областю визначення** функції $f(z)$, яка

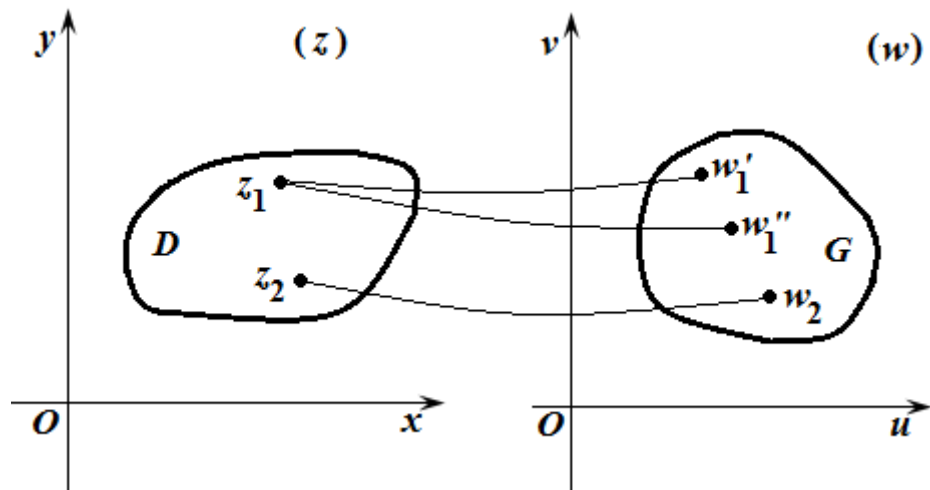


Рис.15

називається **однозначною**, якщо кожному значенню $z \in D$ відповідає тільки одне комплексне число w . Якщо ж кожному значенню z відповідає декілька значень w , ця функція називається **багатозначною**.

Якщо геометрично кожна точка множини G – значення функції, то G – це **множина значень** цієї функції або **образ** множини D за допомогою функції $w = f(z)$, тобто остання функція відображає D на G .

Нехай кожній точці $w \in G$ поставлено у відповідність одну або кілька точок z множини D (таких, що $w = f(z)$). Таке відображення реалізується функцією, **оберненою** до $f(z)$, і позначається $z = f^{-1}(w)$.

Однозначна функція $f(z)$ називається **однолистою** в області D , якщо в різних точках цієї області вона приймає різні значення.

Якщо функція $w = f(z)$ однолиста в області D і G є множиною її значень, то кожному значенню $w \in G$ відповідає одне значення $z \in D$, тобто в області G визначена функція $w = f^{-1}(w)$, яка є оберненою до функції $f(z)$ і однозначною в області G .

Функція $w = f(z)$ може бути зображена за допомогою двох дійсних функцій $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$ дійсних змінних x та y :

$$w = f(z) = u + iv = u(x, y) + iv(x, y),$$

де $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$; $v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ називаються відповідно **дійсною і уявною частинами** функції $w = f(z)$.

Точки z^* називають **нерухомими точками** відображення $w = f(z)$, якщо $f(z^*) = z^*$.

Модуль функції комплексної змінної

$$|w| = |f(z)| = \sqrt{(u(x, y))^2 + (v(x, y))^2} = \varphi(x, y)$$

геометрично являє собою поверхню $|w| = \varphi(x, y)$, де $|w|$ – апліката, що поставлена в точці $z = x + iy$. Ця поверхня називається **рельєфом функції** і, оскільки модуль функції є величиною невід'ємною, її рельєф знаходиться завжди над областю визначення D функції $f(z)$, за виключенням нулів функції.

Приклад 1. Знайти дійсну та уявну частини функцій і виразити їх через 1) дійсну і уявну частини змінної z ; 2) через модуль і аргумент цієї змінної:

$$\text{а) } w = i\bar{z} + 2z^2; \quad \text{б) } w = 1/z.$$

Розв'язок: а) нехай $z = x + iy$, тоді $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = i(x - iy) + 2(x + iy)^2 = 2x^2 - 2y^2 + y + i(x + 4xy)$.

Таким чином, $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + y$; $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = x + 4xy$.

Запишемо z в тригонометричній формі $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Після перетворень отримаємо:

$$w = i\rho(\cos \varphi - i \sin \varphi) + 2\rho^2(\cos \varphi - i \sin \varphi)^2 = \rho \sin \varphi + 2\rho^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + i(\rho \cos \varphi + 4\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi) = \rho \sin \varphi + 2\rho^2 \cos 2\varphi + i(\rho \cos \varphi + 2\rho^2 \sin 2\varphi).$$

Отже,

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = \rho \sin \varphi + 2\rho^2 \cos 2\varphi, \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = \rho \cos \varphi + 2\rho^2 \sin 2\varphi;$$

$$\text{б) } f(z) = u + iv = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Маємо } \operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Знайдемо дійсну та уявну частини функцій через модуль і аргумент змінної z .

$$w = \frac{1}{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\rho}.$$

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = \frac{\cos \varphi}{\rho}, \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = -\frac{\sin \varphi}{\rho}.$$

Приклад 2. Визначити функцію $w = f(z)$ за відомими дійсною і уявною частинами $u(x, y) = x - 2y$, $v(x, y) = 2x - y$.

Розв'язок. Скористаємося формулами (2):

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Тоді

$$u(x, y) = \frac{z + \bar{z}}{2} - 2 \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{z + \bar{z}}{2} + (z - \bar{z})i = \frac{1 + 2i}{2} z + \frac{1 - 2i}{2} \bar{z},$$

$$v(x, y) = 2 \frac{z + \bar{z}}{2} - \frac{z - \bar{z}}{2i} = z + \bar{z} + \frac{z - \bar{z}}{2} i = \frac{2 + i}{2} z + \frac{2 - i}{2} \bar{z}.$$

Отже,

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1 + 2i}{2} z + \frac{1 - 2i}{2} \bar{z} + i \frac{2 + i}{2} z + i \frac{2 - i}{2} \bar{z} = \bar{z} + 2iz.$$

Приклад 3. З'ясувати, в яку криву відображається за допомогою функції $w = 2z + i$ крива $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Розв'язок. За умовою задачі на площині (z) задано коло

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

з центром в точці $(1; 0)$ і радіусом $R = 1$.

Нехай $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тоді функцію $w = 2z + i$ можна записати у вигляді $u + iv = 2x + i(2y + 1)$. Звідки $u = 2x$, $v = 2y + 1$, тобто $x = \frac{u}{2}$,

$y = \frac{v - 1}{2}$. Підставивши в рівняння кривої, отримаємо

$$\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{v - 1}{2}\right)^2 - 2 \frac{u}{2} = 0, \quad \text{або} \quad (u - 2)^2 + (v - 1)^2 = 4,$$

тобто коло на площині (w) радіусу 2 з центром у точці $(2; 1)$.

Приклад 4. В яку криву відображається за допомогою функції $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{\bar{z}} \right)$ одиничне коло $|z| = 1$?

Розв'язок. В цьому прикладі розв'язок задачі зручно знаходити, записавши рівняння кола в параметричному вигляді: $z = e^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

Тоді образом кола $|z|=1$ на площині (w) буде лінія

$$w = \frac{1}{2} \left(e^{i\varphi} + \frac{1}{e^{-i\varphi}} \right) = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{i\varphi}) = e^{i\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

яка являє собою коло $|w|=1$.

Приклад 5. В яку фігуру відображається одиничний круг $|z|<1$ за допомогою функції $w = |z|$?

Розв'язок. Нехай $z = x + iy$, $w = u + iv$. Для одиничного круга $0 \leq |z| < 1$ маємо $0 \leq w < 1$ або $0 \leq u + iv < 1$. Тоді $0 \leq u < 1$, $v = 0$, тобто одиничний круг відображається в напівсегмент $[0; 1)$ дійсної осі.

Приклад 6. Знайти нерухомі точки відображення $w = z^2 - z + 10$.

Розв'язок. Нерухомі точки відображення є корені рівняння $z^2 - z + 10 = z$, або $z^2 - 2z + 10 = 0$. Звідки $z_{1,2} = 1 \pm 3i$.

Вправи до розділу

1. Знайти дійсну та уявну частини для функцій:

а) $w = z^3 - i\bar{z}$; б) $w = \frac{iz+1}{\bar{z}-i}$; в) $w = \frac{\bar{z}}{z}$.

Відповіді: а) $u = x^3 - 3xy^2 - y$, $v = 3x^2y - x - y^3$; б) $u = -\frac{2xy}{x^2 + (y+1)^2}$,

$v = \frac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 + (y+1)^2}$; в) $u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $v = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

2. Визначити функції $w = f(z)$ за відомими дійсною і уявною частинами:

а) $u(x, y) = 3x + 2xy$, $v(x, y) = 3y - x^2 + y^2$; б) $u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2}$,

$v(x, y) = xy - 5$.

Відповіді: а) $w = 3z - iz^2$; б) $w = \frac{z^2}{2} - 5i$.

3. З'ясувати, в які фігури площини (w) перетворює функція $w = \bar{z} - i$ наступні фігури площини (z): а) координатні осі; б) декартову координатну сітку; в) одиничне коло.

Відповіді: а) вісь Ox перетворюється в пряму $\text{Im } w = -1$, вісь Oy – в себе; б) координатна сітка площини (z) перетворюється в себе; в) одиничне коло перетворюється в коло $u^2 + (v+1)^2 = 1$.

4. З'ясувати, в яку криву відображається за допомогою функції $w = iz + 2$ крива $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

Відповідь: парабола $(v-1)^2 = -4(u-2)$.

5. Знайти нерухомі точки відображення $w = z^2 - 3z + 29$.

Відповідь: $z_{1,2} = 2 \pm 5i$.

7. Основні елементарні функції комплексної змінної

1. **Дробово-раціональна функція** $w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}$, $n, m \in N$. (13)

Окремі її випадки:

лінійна $w = az + b$; $a, b \in C$, $a \neq 0$;

степенева $w = z^n$, $n \in N$; (14)

дробово-лінійна $w = \frac{az + b}{cz + d}$; $a, b, c, d \in C$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$.

2. **Показникова функція** $w = e^z$ визначається за формулою

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (15)$$

$\text{Re } z = e^x \cos y$, $\text{Im } z = e^x \sin y$. Показникова функція характеризується

властивостями: $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$ при довільних значеннях

комплексних чисел z_1 і z_2 ; $(e^z)^n = e^{zn}$ $n \in N$; $e^{z+2k\pi i} = e^z$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$),

тобто e^z – періодична функція з уявним періодом $2\pi i$; не є однолистою.

3. **Тригонометричні функції** $w = \sin z$; $w = \cos z$; $w = \text{tg } z$; $w = \text{ctg } z$ визначають за формулами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \text{tg } z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \text{ctg } z = \frac{\cos z}{\sin z}. \quad (16)$$

Періодичні функції $w = \sin z$; $w = \cos z$ – з дійсним періодом 2π , а $w = \operatorname{tg} z$, $w = \operatorname{ctg} z$ – з дійсним періодом π .

Функції $w = \sin z$ і $w = \cos z$ задовольняють для будь-яких $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ рівності

$$\begin{aligned}\cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.\end{aligned}$$

З цих формул отримуємо формули зведення аргументу

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = -\sin z, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \cos z,$$

а також основну тригонометричну тотожність

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Таким чином, усі співвідношення між тригонометричними функціями дійсної змінної зберігаються також і для функцій комплексної змінної.

4. Гіперболічні функції $w = \operatorname{sh} z$; $w = \operatorname{ch} z$; $w = \operatorname{th} z$; $w = \operatorname{cth} z$ визначають за формулами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \quad (17)$$

Мають місце рівності:

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} z &= -i \sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \quad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz, \\ \sin z &= -i \operatorname{sh} iz, \quad \cos z = \operatorname{ch} iz, \quad \operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz, \quad \operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz.\end{aligned} \quad (18)$$

Гіперболічні функції $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ – періодичні з періодом $2\pi i$, а $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ – періодичні з періодом πi .

Основні співвідношення між гіперболічними функціями

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1; \quad \operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z; \quad \operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z; \quad (19)$$

$$\operatorname{ch}^2 \frac{z}{2} = \frac{\operatorname{ch} z + 1}{2}; \quad \operatorname{sh}^2 \frac{z}{2} = \frac{\operatorname{ch} z - 1}{2}.$$

5. Логарифмічна функція $w = \operatorname{Ln} z$, де $z \neq 0$, визначається як обернена до показникової, причому

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

Функція $w = \operatorname{Ln} z$ багатозначна. Значення функції при $k = 0$ називається **головним значенням** логарифмічної функції або **головною віткою** і позначається

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z. \quad (21)$$

Логарифмічна функція має такі властивості:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2; \quad \operatorname{Ln}(z_1 / z_2) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2;$$

$$\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z; \quad \operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

6. Загальна показникова функція $w = a^z$, де $a \neq 0$, визначається рівністю

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}. \quad (22)$$

Це багатозначна функція, головне значення якої $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$.

7. Загальна степенева функція $w = z^\alpha$, де $\alpha \in C$, визначається за допомогою рівності

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}, \quad z \neq 0. \quad (23)$$

Функція багатозначна, значення $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ називається головним значенням.

8. Обернені тригонометричні та гіперболічні функції $w = \operatorname{Arcsin} z$; $w = \operatorname{Arccos} z$; $w = \operatorname{Arctg} z$; $w = \operatorname{Arcctg} z$; $w = \operatorname{Arsh} z$; $w = \operatorname{Arch} z$; $w = \operatorname{Arth} z$; $w = \operatorname{Arcth} z$ є багатозначними і визначаються як обернені до функцій $w = \sin z$; $w = \cos z$; $w = \operatorname{tg} z$; $w = \operatorname{ctg} z$; $w = \operatorname{sh} z$; $w = \operatorname{ch} z$; $w = \operatorname{th} z$; $w = \operatorname{cth} z$.

Наприклад, якщо $z = \cos w$, то w називається арккосинусом числа z і позначається $w = \operatorname{Arccos} z$. Усі ці функції багатозначні і виражаються через логарифмічні функції:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} z &= -i \operatorname{Ln}(iz \pm \sqrt{1-z^2}); & \operatorname{Arccos} z &= -i \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1}); \\ \operatorname{Arctg} z &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}; & \operatorname{Arcctg} z &= \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i}; \\ \operatorname{Arsh} z &= \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2+1}), & \operatorname{Arch} z &= \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1}); \\ \operatorname{Arth} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}; & \operatorname{Arcth} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Значення обернених функцій, які відповідають головному значенню логарифма, називаються головними значеннями і позначаються $\operatorname{arcsin} z$; $\operatorname{arccos} z$; $\operatorname{arctg} z$; $\operatorname{arcctg} z$.

Приклад 1. Знайти модуль і головне значення аргументу функції $w = e^z$ при а) $z_1 = 1 - 2i$; б) $z_2 = -1 - 5i$; в) $z_3 = 2 + 5i$.

Розв'язок: а) при $z_1 = 1 - 2i$ $w_1 = e^{1-2i} = (\cos(-2) + i \sin(-2))$. Звідси $|w_1| = e^{-2}$, $\arg w_1 = -2$;

б) при $z_2 = -1 - 5i$ $w_2 = e^{-1-5i} = e^{-1}(\cos(-5) + i \sin(-5))$. Тому $|w_2| = e^{-1}$, $\arg w_2 = -5 + 2\pi$, оскільки $-\pi < \arg w \leq \pi$;

в) при $z_3 = 2 + 5i$ $w_3 = e^{2+5i} = e^2(\cos 5 + i \sin 5)$. Тому $|w_3| = e^2$, $\arg w_3 = 5 - 2\pi$.

Приклад 2. Знайти дійсні та уявні частини значень: а) $w_1 = \cos i$; б) $w_2 = \sin(1 + 2i)$.

Розв'язок: а) скористаємося формулою $\cos iz = \operatorname{ch} z$. Тоді $\cos i = \operatorname{ch} 1$; $\operatorname{Re} w_1 = \operatorname{Re} \cos i = \operatorname{ch} 1$; $\operatorname{Im} w_1 = \operatorname{Im} \cos i = 0$;

б) оскільки $\sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x$, то $\operatorname{Re} w_2 = \operatorname{Re} \sin(1 + 2i) = \sin 1 \operatorname{ch} 2$; $\operatorname{Im} w_2 = \operatorname{Im} \sin(1 + 2i) = \operatorname{sh} 2 \cos 1$.

Приклад 3. Записати в алгебраїчній формі: а) $\operatorname{sh} \frac{\pi i}{2}$; б) $\operatorname{th} \pi i$.

Розв'язок: а) скористаємося формулою $\operatorname{sh} iz = i \sin z$; $\operatorname{sh} \frac{\pi i}{2} = i \sin \frac{\pi}{2} = i$;
б) оскільки $\operatorname{th} iz = i \operatorname{tg} z$, то $\operatorname{th} \pi i = i \operatorname{tg} \pi = 0$.

Приклад 4. Обчислити: а) $\operatorname{Ln} 2$; б) $\operatorname{Ln}(-1)$; в) $\operatorname{Ln} i$; г) $\operatorname{Ln}(-2 + 3i)$.

Розв'язок: а) за означенням $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
Тому $z = 2$, $|z| = 2$, $\arg 2 = 0$, $\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + i2k\pi$, $k \in Z$;

б) $z = -1$, $|z| = 1$, $\arg(-1) = \pi$, $\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2k\pi) = i(\pi + 2k\pi)$, $k \in Z$;

в) $z = i$, $|z| = 1$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Ln} i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in Z$;

г) $z = -2 + 3i$, $|z| = \sqrt{13}$, $\arg(-2 + 3i) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{2}\right) + \pi =$
 $= \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right)$, $\operatorname{Ln}(-2 + 3i) = \ln \sqrt{13} + i\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in Z$.

Приклад 5. Знайти всі значення степенів: а) $(-1)^{\sqrt{2}}$; б) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$;
в) $(-3 + 4i)^{1+i}$.

Розв'язок. За означенням $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$. Тому:

а) $\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2k\pi) = i\pi(2k + 1)$, $k \in Z$.

$(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln}(-1)} = e^{i\sqrt{2}\pi(2k+1)} = \cos(\sqrt{2}\pi(2k+1)) + i \sin(\sqrt{2}\pi(2k+1))$, $k \in Z$;

б) $\operatorname{Ln}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \ln 1 + i\left(\arg\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in Z$;

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i} = e^{2ii(\pi/4+2k\pi)} = e^{-\pi(1/2+4k)}, \quad k \in Z;$$

$$\text{в) } \operatorname{Ln}(-3+4i) = \ln|-3+4i| + i(\arg(-3+4i) + 2k\pi) = \ln 5 + i\left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + 2k\pi\right), \quad k \in Z;$$

$$\begin{aligned} (-3+4i)^{1+i} &= e^{(1+i)\operatorname{Ln}(-3+4i)} = e^{(1+i)(\ln 5 + i(\pi - \operatorname{arctg}(4/3) + 2k\pi))} = \\ &= e^{(\ln 5 + \operatorname{arctg}(4/3) - \pi(2k+1)) + i(\ln 5 - \operatorname{arctg}(4/3) + \pi(2k+1))} = \\ &= 5e^{\operatorname{arctg}(4/3) - \pi(2k+1)} \cdot \left(\cos\left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \pi\right) + i \sin\left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \pi\right) \right), \quad k \in Z. \end{aligned}$$

Приклад 6. Знайти всі значення функцій: а) $\operatorname{Arcsin} i$; б) $\operatorname{Arctg} \frac{i}{3}$;

в) $\operatorname{Arch}(-1)$; г) $\operatorname{Arth}(2i)$.

Розв'язок: а) $\operatorname{Arcsin} i = -i \operatorname{Ln}(i \cdot i \pm \sqrt{1-i^2})$;

$$(\operatorname{Arcsin} i)_1 = -i(\ln(\sqrt{2}-1) + 0i + 2k\pi i) = -i \ln(\sqrt{2}-1) + 2k\pi, \quad k \in Z;$$

$$(\operatorname{Arcsin} i)_2 = -i(\ln(\sqrt{2}+1) + \pi i + 2k\pi i) = -i \ln(\sqrt{2}+1) + \pi + 2k\pi, \quad k \in Z;$$

$$\text{б) } \operatorname{Arctg} \frac{i}{3} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} \right) = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1}{2} = -\frac{i}{2} \left(\ln \frac{1}{2} + i \left(\arg \frac{1}{2} + 2k\pi \right) \right) =$$

$$= -\frac{i}{2} \left(\ln \frac{1}{2} + i 2k\pi \right) = k\pi - \frac{i}{2} \ln \frac{1}{2} = k\pi + \frac{i}{2} \ln 2, \quad k \in Z;$$

$$\text{в) } \operatorname{Arch}(-1) = \operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2k\pi) = i\pi(2k+1), \quad k \in Z;$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \operatorname{Arth}(2i) &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+2i}{1-2i} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{(1+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{-3+4i}{5} = \frac{1}{2} \left(\ln 1 + \right. \\ &\left. + i \left(\arg \left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right) + 2k\pi \right) \right) = \frac{i}{2} \left(-\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \pi + 2k\pi \right), \quad k \in Z. \end{aligned}$$

Приклад 7. Розв'язати рівняння $e^z e^z + i = 0$.

Розв'язок. $e^z = -i$. Приклад зводиться до знаходження

$$z = \operatorname{Ln}(-i) = \ln 1 + i(\arg(-i) + 2k\pi) = i \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \quad k \in Z.$$

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\sin z - 2 = 0$.

Розв'язок. Оскільки $\sin z = 2$, то за формулою (18)

$$z = \operatorname{Arcsin} 2 = -i \operatorname{Ln}(i \cdot 2 \pm \sqrt{3}i).$$

Враховуючи, що

$$\arg((2 + \sqrt{3})i) = \arg((2 - \sqrt{3})i) = \frac{\pi}{2}, \quad |(2 + \sqrt{3})i| = 2 + \sqrt{3}, \quad |(2 - \sqrt{3})i| = 2 - \sqrt{3},$$

$$\text{маємо } \operatorname{Ln}((2 \pm \sqrt{3})i) = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in Z.$$

$$\text{Остаточнo } z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \ln(2 \pm \sqrt{3}), \quad k \in Z.$$

Вправи до розділу

1. Знайти модулі і головні значення аргументів комплексних чисел

а) e^{1+2i} ; б) e^{-2-5i} .

Відповіді: а) e ; 2; б) e^{-2} ; $5 - 2\pi$.

2. Знайти всі значення функцій а) $\operatorname{Ln}(-1+i)$; б) 3^i ; в) i^{1+i} ; г) $\sin \pi i$; д) $\operatorname{Arcsin} 2$; е) $\operatorname{Arch} 2i$.

Відповіді: а) $\frac{1}{2} \ln 2 + i\pi(2k + 3/4)$, $k \in Z$; б) $e^{-2\pi k} (\cos \ln 3 + i \sin \ln 3)$, $k \in Z$;

в) $ie^{\frac{\pi(2k-1)}{2}}$, $k \in Z$; г) $i \operatorname{sh} \pi$; д) $\pi(2k + 1/2) - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$, $k \in Z$;

е) $\ln(\sqrt{5} \pm 2) + (2k \pm \frac{1}{2})\pi i$, $k \in Z$.

3. Розв'язати рівняння а) $\operatorname{sh} iz = -i$; б) $4 \cos z + 5 = 0$.

Відповіді: а) $k\pi - \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$; б) $z_k = (2k + 1)\pi \pm i \ln 2$, $k \in Z$.

Самостійна робота

1. Знайти дійсну та уявну частини для функцій а) $w = (i+1)z - i$; б) $w = 2^{z^2}$; в) $w = \operatorname{ch}(z - i)$.

2. Знайти всі значення функцій а) $\operatorname{Ln}(1-i)$; б) e^{-3-4i} ; в) $(1+i)^i$; г) $\operatorname{Arcsin} 2i$; д) $\operatorname{Arctg}(1+2i)$.

3. Розв'язати рівняння $\operatorname{ch} z = i$.

8. Границя і неперервність функції комплексної змінної

Скінченне число A називається **границею** функції $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $z \neq z_0$, що задовольняють нерівність $|z - z_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(z) - A| < \varepsilon$ (означення границі функції за Коші).

При цьому пишуть

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A.$$

Це визначення границі еквівалентне наступному.

Скінченне число A називається **границею** функції $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$ ($\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$), якщо для будь-якої послідовності $\{z_n\}$, $z_n \in C$, $z_n \neq z_0$ ($n = 1, 2, \dots$), що збігається до z_0 , послідовність $\{f(z_n)\}$ збігається до A , тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ (означення границі функції за Гейне).

Кажуть, що $f(z)$ прямує до ∞ при $z \rightarrow z_0$, якщо для будь-якого $R > 0$ знайдеться $\delta = \delta(R) > 0$ таке, що для всіх $z \neq z_0$ таких, що $|z - z_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(z)| > R$. Записують

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty.$$

Існування границі $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, де $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ рівносильне існуванню двох границь $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y)$ і $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y)$, причому

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) + i \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y).$$

Границі функцій комплексної змінної мають такі ж властивості, як і границі функцій дійсного змінного.

Якщо існують границі $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ і $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$, то

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm g(z)) = A \pm B,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot g(z) = A \cdot B,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Формула виду $f(z) \sim g(z)$ ($z \rightarrow a$, $z \in C$) називається **асимптотичною формулою** і означає, що $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = 1$ ($z \in C$).

Нехай функція $f(z)$ визначена на множині C і точка z_0 належить множині C .

Функція $f(z)$ називається **неперервною** в точці z_0 , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх $z \in C$, які задовольняють умову $|z - z_0| < \delta$ виконується нерівність

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Функція $f(z)$ називається **неперервною** в точці z_0 , якщо вона визначена в цій точці і

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Функція $f(z)$ **неперервна** в області D , якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Для того, щоб функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ була неперервна в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ необхідно і достатньо, щоб функції дійсних аргументів $u(x, y)$ і $v(x, y)$ були неперервні в точці (x_0, y_0) .

Як і для функції дійсних змінних, для функцій комплексної змінної справедливі теореми про неперервність в області D суми, різниці, частки, відношення неперервних функцій і складної функції від неперервних функцій (у разі частки функція $\frac{f(z)}{g(z)}$ неперервна в точках області D , де $g(z) \neq 0$).

Функція $f(z)$ називається **рівномірно неперервною** в області D , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-яких точок z_1 і z_2 з області D таких, що $|z_1 - z_2| < \delta$, виконується нерівність $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

Приклад 1. Користуючись визначенням границі функції довести, що

$$\lim_{z \rightarrow -i} \frac{3z^2 + 2iz + 1}{z + i} = -4i.$$

Розв'язок. Нехай ε – довільне додатне число. Треба довести: існує таке число $\delta > 0$, що для всіх z , які задовольняють умову $0 < |z + i| < \delta$, буде виконуватися умова

$$\left| \frac{3z^2 + 2iz + 1}{z + i} + 4i \right| < \varepsilon.$$

Для виконання цієї нерівності необхідно, щоб

$$\left| \frac{3(z+i)(z-i/3)}{z+i} + 4i \right| < \varepsilon, \text{ або } 3|z+i| < \varepsilon, |z+i| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тобто, якщо взяти в якості δ число $\frac{\varepsilon}{3}$, отримаємо: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує

таке число $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, що з нерівності $0 < |z+i| < \delta$, буде випливати нерівність

$$\left| \frac{3z^2 + 2iz + 1}{z+i} + 4i \right| < \varepsilon.$$

Таким чином, доведено, що $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{3z^2 + 2iz + 1}{z+i} = -4i$.

Приклад 2. Знайти границі функцій:

а) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z-1)(z-2)(z-3)+6}{z}$; б) $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 5iz - 4}{z+i}$; в) $\lim_{z \rightarrow \frac{i\pi}{4}} \frac{\operatorname{ch} z + \sin iz}{\operatorname{ch} 2z}$;

г) $\lim_{z \rightarrow \frac{\pi i}{2}} \frac{e^{-2z} + 1}{e^{-z} + i}$; д) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3 + 3z^2 - 1}{z^2 + 4}$; е) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}}$.

Розв'язок.

а)

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z-1)(z-2)(z-3)+6}{z} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3 - 6z^2 + 11z - 6 + 6}{z} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(z^2 - 6z + 11)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} (z^2 - 6z + 11) = 11; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 5iz - 4}{z+i} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{(z+i)(z+4i)}{z+i} = \lim_{z \rightarrow -i} (z+4i) = 3i;$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{z \rightarrow \frac{i\pi}{4}} \frac{\operatorname{ch} z + \sin iz}{\operatorname{ch} 2z} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{z \rightarrow \frac{i\pi}{4}} \frac{\cos iz + \sin iz}{\cos 2iz} = \lim_{z \rightarrow \frac{i\pi}{4}} \frac{\cos iz + \sin iz}{(\cos^2 iz - \sin^2 iz)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{i\pi}{4}} \frac{\cos iz + \sin iz}{(\cos iz + \sin iz)(\cos iz - \sin iz)} = \lim_{z \rightarrow \frac{i\pi}{4}} \frac{1}{\cos iz - \sin iz} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{aligned}$$

$$\text{г) } \lim_{z \rightarrow \frac{\pi i}{2}} \frac{e^{-2z} + 1}{e^{-z} + i} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi i}{2}} \frac{(e^{-z} + i)(e^{-z} - i)}{e^{-z} + i} = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi i}{2}} (e^{-z} - i) = e^{\frac{\pi i}{2}} - i =$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - i = -2i;$$

д) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3 + 3z^2 - 1}{z^2 + 4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3z^2 + 6z}{2z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3z + 6}{2} = \infty$ (тут використано правило Лопіталя);

е) Для визначення границі $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}}$ запишемо комплексне число z в показниковій формі $z = \rho e^{i\varphi}$. Оскільки $z \rightarrow 0$, то і $\rho \rightarrow 0$. Тоді маємо

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{-i\varphi}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} e^{2i\varphi} = \lim_{\rho \rightarrow 0} (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

При різних значеннях φ отримаємо різні значення границі, тобто границя не існує.

Приклад 3. Дослідити на неперервність функцію комплексної змінної $f(z) = \bar{z} - 2$.

Розв'язок. Нехай $z = x + iy$, тоді $f(z) = u + iv = x - iy - 2 = x - 2 - iy$. Оскільки $u(x, y) = x - 2$ і $v(x, y) = -y$ є неперервними функціями дійсних змінних, то функція $f(z)$ неперервна на всій комплексній площині.

Приклад 4. Дослідити на неперервність і рівномірну неперервність функцію $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z}{|z|^2}$ на множині $E = \{z : 0 < |z| < 1\}$.

Розв'язок. Розглянемо дві збіжні до нуля послідовності $z'_n = \frac{1}{n}(1+i)$ і $z''_n = \frac{1}{n}$. Тоді для будь-яких $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ і $z'_n, z''_n \in E$ маємо $f(z'_n) = \frac{1}{2}$, $f(z''_n) = 0$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(z''_n)$. В цьому випадку за означенням за Гейне границі функції не існує і вона не може бути довизначена в точці $z = 0$.

Функція $f(z)$ не є рівномірно неперервною на множині E , оскільки при $|z'_n - z''_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ величина $|f(z'_n) - f(z''_n)| = \frac{1}{2}$.

Вправи до розділу

1. Користуючись визначенням границі функції довести, що

$$\text{a) } \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-i}{z} = 1-i; \quad \text{б) } \lim_{z \rightarrow 1} \frac{3z+2}{z+4} = 1.$$

2. Знайти границі функцій:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + iz + 2}{z-i}; \quad \text{б) } \lim_{z \rightarrow 1+i} \bar{z}; \quad \text{в) } \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2z}{\operatorname{ch} iz + i \operatorname{sh} iz}; \\ \text{г) } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{|z|^2}; \quad \text{д) } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 + 2z + 5}{z^3 + 4z + 1}. \end{aligned}$$

Відповіді: а) $3i$; б) $1-i$; в) $\sqrt{2}$; г) ∞ ; д) 0 .

3. Чи можна до визначити функції в точці $z=0$, щоб вони стали неперервними в цій точці:

$$\text{а) } f(z) = \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z \operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}; \quad \text{в) } f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{\bar{z}}?$$

Відповіді: а) $f(0)=0$; б) $f(0)=0$; в) ні.

9. Диференційовність функцій комплексної змінної. Умови Коші-Рімана

Нехай функція $w = f(z)$ визначена і неперервна в деякій області D комплексної змінної z . Розглянемо дві точки z і $z + \Delta z$, які належать області D , і позначимо через $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$ приріст функції $f(z)$. Складемо відношення $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$.

Похідною однозначної функції $w = f(z)$ в точці z називається границя відношення $\frac{\Delta w}{\Delta z}$, якщо Δz будь-яким способом прямує до нуля:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) = \frac{dw}{dz}. \quad (25)$$

Якщо в точці $z \in D$ функція $f(z)$ має похідну, то вона називається **диференційовною** в точці z .

З визначення похідної і властивості границь випливає, що на функції комплексної змінної поширюються правила диференціювання функцій дійсної змінної. Залишаються справедливими теорема щодо диференціювання складної функції, а також таблиця похідних функцій дійсної змінної.

Для того, щоб функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, визначена в деякому околі точки z , мала похідну в цій точці, необхідне і достатнє 1) існування частинних похідних від функцій $u(x, y)$, $v(x, y)$; 2) виконання **умов Коші-Рімана**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (26)$$

або в полярних координатах

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \quad (27)$$

При виконанні умов Коші-Рімана похідну $f'(z)$ обчислимо за формулами

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (28)$$

чи в полярних координатах

$$f'(z) = \frac{\rho}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + i \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right).$$

Функція $f(z)$ називається **аналітичною** в точці z , якщо вона диференційовна як в самій точці z , так і в деякому її околі.

Функція $w = f(z)$ називається аналітичною в області D , якщо вона аналітична в кожній точці $z \in D$.

Функція $f(z)$ називається **аналітичною на нескінченності**, якщо функція $f\left(\frac{1}{z}\right)$ аналітична в точці $z = 0$.

Точки комплексної площини, в яких однозначна функція $f(z)$ є аналітичною називаються **правильними** точками цієї функції. Точки, в яких функція $f(z)$ не є аналітичною, в тому числі точки в яких функція не визначена, називаються **особливими** точками цієї функції.

Функція двох змінних $\varphi(x, y)$ називається **гармонічною** в області D , якщо вона має в цій області неперервні частинні похідні другого порядку і задовольняє рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

В області D , де функція $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ є аналітичною, функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ є гармонічними функціями, тобто задовольняють рівнянню Лапласа.

Гармонічні функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$, що зв'язані між собою умовами Коші-Рімана, називаються *спряженими*.

Для будь-якої функції $u(x, y)$, гармонічної в однозв'язній області D , можна знайти спряжену з нею гармонічну функцію, що визначається з точністю до довільного сталого доданка за формулою:

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C. \quad (29)$$

Тут точка (x_0, y_0) – фіксована точка області D , шлях інтегрування до довільної точки (x, y) належить області D .

Аналогічно за функцією $v(x, y)$ можна визначити $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + C. \quad (30)$$

Приклад 1. Показати, що функція $w = e^{5z}$ аналітична на всій комплексній площині й довести, що $(e^{5z})' = 5e^{5z}$.

Розв'язок. Маємо $w = u + iv = e^{5x+i5y} = e^{5x}(\cos 5y + i \sin 5y)$. Функції $u(x, y) = e^{5x} \cos 5y$; $v(x, y) = e^{5x} \sin 5y$ як функції дійсного аргументу диференційовні в будь-якій точці (x, y) . Обчислимо $\frac{\partial u}{\partial x} = 5e^{5x} \cos 5y$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -5e^{5x} \sin 5y$; $\frac{\partial v}{\partial x} = 5e^{5x} \sin 5y$; $\frac{\partial v}{\partial y} = e^{5x} \cos 5y$. Умови

Коші-Рімана (26) виконуються для довільних x і y , тому функція $w = e^{5z}$ аналітична на всій комплексній площині.

Обчислимо похідну $w = e^{5z}$ за формулою $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$:

$$(e^{5z})' = (e^{5x} \cos 5y)'_x + i(e^{5x} \sin 5y)'_x = 5e^{5x}(\cos 5y + i \sin 5y) = e^{5z}.$$

Приклад 2. Перевірити, чи виконуються умови Коші-Рімана у разі функції $w = z^3$ і, якщо виконуються, знайти похідну функції в полярних координатах.

Розв'язок. Оскільки $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то

$$w = z^3 = \rho^3 e^{i3\varphi} = \rho^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi).$$

Отже, дійсна $u(\rho, \varphi) = \rho^3 \cos 3\varphi$ і уявна $v(\rho, \varphi) = \rho^3 \sin 3\varphi$ частини функції диференційовні в будь-якій точці (ρ, φ) , причому

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = 3\rho^2 \cos 3\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = 3\rho^2 \sin 3\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -3\rho^3 \sin 3\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 3\rho^3 \cos 3\varphi.$$

Тобто умови Коші-Рімана (27) виконуються при будь-якому скінченному значенні $z = \rho e^{i\varphi}$. Тоді

$$(z^3)' = \frac{\rho}{z} (3\rho^2 \cos 3\varphi + i3\rho^2 \sin 3\varphi) = 3 \frac{\rho^3}{z} (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = 3 \frac{z^3}{z} = 3z^2.$$

Приклад 3. Установити, чи функція $w = \bar{z} \operatorname{Re} z$ аналітична.

Розв'язок. $\bar{z} \operatorname{Re} z = (x - iy)x = x^2 - ixy$. Звідси $u(x, y) = x^2$; $v(x, y) = -xy$;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -x. \text{ Умови Коші-Рімана}$$

$$\begin{cases} 2x = -x, \\ 0 = -y \end{cases}$$

задовольняються тільки в точці $(0; 0)$, тобто функція $w = \bar{z} \operatorname{Re} z$ диференційовна лише в точці $z = 0$ і ніде не аналітична.

Приклад 4. Чи існує аналітична функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, якщо

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y?$$

Розв'язок. Перевіримо гармонічність функції $u(x, y)$. Знайдемо похідні

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - 2, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}. \end{aligned}$$

Маємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

тобто $u(x, y)$ – це гармонічна в області $0 < |z| < \infty$ функція.

Таким чином аналітична функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ існує в будь-якій області, яка не містить точку $z = 0$.

Приклад 5. Перевірити, що функція $u(x, y) = x^2 - y^2 + 3x + y$ є дійсною частиною аналітичної функції $f(z)$ і знайти $f(z)$.

Розв'язок. Перевіримо, чи буде функція $u(x, y)$ гармонічною. Для цього знайдемо похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y + 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$$

Тобто функція $u(x, y)$ задовольняє рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ і є гармонічною на всій комплексній площині.

За формулою (29)

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-(-2y + 1)dx + (2x + 3)dy) = \int_{x_0}^x (2y_0 - 1)dx - \int_{y_0}^y (2x + 3)dy = \\ &= (2y_0 - 1)(x - x_0) - (2x + 3)(y - y_0) = 2xy + 3y - x - 2x_0y_0 + x_0 - 3y_0 = \\ &= 2xy + 3y - x + C. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 - y^2 + 3x + y + i(2xy + 3y - x + C) = \\ &= (x + iy)^2 + 3(x + iy) + (-xi + y) + Ci = z^2 + 3z - iz + Ci. \end{aligned}$$

Слід зауважити, що на практиці при відновленні диференційованої функції за заданою її дійсною (або уявною) частиною частіше буває більш зручно замість формул (29), (30) безпосередньо використовувати умови Коші-Рімана.

Приклад 6. Знайти аналітичну функцію $w = f(z)$ за відомою її дійсною частиною $u = x^2 - y^2 + 2x$ та значенням $f(i) = 2i - 1$.

Розв'язок. Знайдемо функцію $v(x, y)$ скориставшись умовами Коші-Рімана (26).

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$, то

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2; \tag{31}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y. \tag{32}$$

Зінтегруємо (31) за змінною y :

$$v(x, y) = 2xy + 2y + \varphi(x), \tag{33}$$

де функція $\varphi(x)$ – поки що невідома. Продиференціюємо (33) за x і використаємо другу умову Коші-Рімана:

$$2y + \varphi'(x) = 2y,$$

звідки $\varphi'(x) = 0$ і $\varphi(x) = C$. Отже, $v(x, y) = 2xy + 2y + C$. Тоді

$$w = u + iv = (x^2 - y^2 + 2x) + i(2xy + 2y + C) = z^2 + 2z + iC.$$

Постійну C знайдемо з умови $f(i) = 2i - 1$, тобто $i^2 + 2i + iC = 2i - 1$, звідки $C = 0$. Тому остаточно одержимо $f(z) = z^2 + 2z$.

Вправи до розділу

1. Вказати функції, які мають похідні у будь-яких точках площини (z):

а) $w = z^2$; б) $w = z \operatorname{Im} z$; в) $w = \operatorname{Re} z$.

Відповіді: а) має похідну в кожній точці площини; б) має похідну в точці $z = 0$; в) похідна не існує в жодній точці.

2. Користуючись умовами Коші-Рімана, з'ясувати, які з наведених далі функцій аналітичні хоча б в одній точці:

а) $w = \cos z$; б) $w = \operatorname{Ln} z$; в) $w = z^2 \bar{z}$; г) $w = |z| \operatorname{Im} z$; д) $w = \sin 3z - i$.

Відповіді: а) так; б) так; в) ні; г) ні; д) так.

3. Довести гармонічність функцій:

а) $u = 2xy + 3$; б) $v = 3e^x \sin y$; в) $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; г) $u = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y$.

4. Чи можуть наступні функції бути дійсною або уявною частиною аналітичної функції $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$?

а) $u = x^2 + 2xy - y^2$; б) $u = y^2$; в) $v = \ln(x^2 + y^2)$.

Відповіді: а) так; б) ні; в) так.

5. Чи будуть наведені пари функцій спряженими гармонічними?

а) $u = x^3 - 3xy^2$, $v = 3x^2y - y^3$; б) $u = x - y + \frac{x^2 - y^2}{2}$, $v = x + y + xy$;

в) $u = 3(x^2 - y^2)$, $v = 3x^2y - y^3$; г) $u = e^x \cos y + x$; $v = e^x \sin y + y$.

Відповіді: а) так; б) так; в) ні; г) так.

6. Знайти аналітичну функцію $w = f(z)$ за відомою її дійсною або уявною частиною:

а) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$; б) $v = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy)$ і значенням $f(0) = 0$;

в) $v(x, y) = 2xy + 3x$; г) $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ і значенням $f(\pi) = \frac{1}{\pi}$.

Відповіді: а) $w = z^3 + Ci$; б) $w = 2\operatorname{sh} z - z^2$; в) $w = z^2 + 3iz + C$; г) $w = \frac{1}{z}$.

Самостійна робота

1. Користуючись умовами Коші-Рімана, з'ясувати, які з подальших функцій аналітичні хоча б в одній точці: а) $w = \bar{z} \operatorname{Im} z$; б) $w = e^{z^2}$; в) $w = |z| \operatorname{Re} \bar{z}$.
2. Знайти аналітичну функцію $w = f(z) = u + iv$ за відомою її дійсною або уявною частиною: а) $v = 2xy + 2y$; б) $v = 3x + 2xy$; в) $u = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x$ і значенням $f(0) = 0$.

10. Геометричний зміст модуля і аргументу похідної

Нехай $f(z)$ – аналітична функція в області D і $f'(z_0) \neq 0$. Тоді $|f'(z_0)|$ дорівнює коефіцієнту розтягу k в точці z_0 при відображенні $w = f(z)$ площини (z) на площину (w) . Якщо $k = |f'(z_0)| > 1$, то має місце розтяг, а при $k = |f'(z_0)| < 1$ – стиснення.

Аргумент похідної $f'(z_0)$ дорівнює куту, на який треба повернути дотичну в точці z_0 до будь-якої гладкої кривої на площині (z) , щоб одержати дотичну в точці $w_0 = f(z_0)$ до образу даної кривої на площині (w) при відображенні $w = f(z)$. Зауважимо, що при $\varphi = \arg f'(z) > 0$ поворот відбувається проти стрілки годинника, а при $\varphi < 0$ – за нею.

Приклад 1. Відображення відбувається за допомогою функції $w = z^2$. Знайти кут повороту φ напряму, який виходить з точки z_0 , і коефіцієнт розтягу k у точці а) $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; б) $z_0 = 1$.

Розв'язок. Маємо $w' = f'(z) = 2z$, тоді $f'(z_0) = 2z_0$. Кут повороту φ напряму, який виходить з точки z_0 , визначається за формулою, а коефіцієнт розтягу k в точці z_0 дорівнює $k = |f'(z_0)|$:

а) у точці $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ $f'(z_0) = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} = 4(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2) = 4(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$. Тому $k = |f'(z_0)| = 4$; $\varphi = \arg f'(z_0) = \pi/4$;

б) у точці $z_0 = 1$ $f'(z_0) = 2 = 2(\cos 0 + i\sin 0)$. Тому $k = 2$; $\varphi = 0$.

Приклад 2. Яка частина площини стискається, а яка розтягується, якщо відображення здійснюється за допомогою функцій: а) $w = z^3$; б) $w = 1/z$; в) $w = e^z$?

Розв'язок: а) для $w = z^3$ маємо $w' = 3z^2$, $k = |w'| = 3|z^2|$. Звідси $k > 1$ при $|z|^2 > 1/3$, $|z| > 1/\sqrt{3}$ і $k < 1$ при $|z|^2 < 1/3$, $|z| < 1/\sqrt{3}$. Це значить, що при відображенні за допомогою функції $w = z^3$ внутрішність круга $|z| < 1/\sqrt{3}$ стискається, а зовнішність $|z| > 1/\sqrt{3}$ розтягується;

б) для $w = 1/z$ маємо $w' = -1/z^2$; $k = |w'| = |-1/z^2| = 1/|z|^2$. Звідси $k > 1$ при $0 < |z| < 1$ і $k < 1$ при $|z| > 1$. Тобто при відображенні за допомогою функції $w = 1/z$ внутрішність круга $0 < |z| < 1$ (крім $z = 1$) розтягується, а зовнішність $|z| > 1$ – стискається;

в) для $w = e^z$ маємо $w' = e^z$, $k = |w'| = |e^z| = |e^x|$. Звідси $k > 1$ при $e^x > 1$ або при $x > 0$ і $k < 1$ при $e^x < 1$ або при $x < 0$. Це означає, що при відображенні за допомогою функції $w = e^z$ півплощина $\operatorname{Re} z > 0$ розтягується, а півплощина $\operatorname{Re} z < 0$ – стискається.

Вправи до розділу

1. Знайти кут повороту φ і коефіцієнт розтягу k при відображенні за допомогою функції $w = f(z)$ у точках z_0 : а) $w = e^z$, $z_0 = \ln 2 + i\frac{\pi}{4}$; б) $w = z^3$, $z_0 = 1 + i$; в) $w = \sin z$, $z_0 = 0$.

Відповіді: а) $k = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; б) $k = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; в) $k = 1$, $\varphi = 0$.

2. Установити, яка частина площини (z) стискається, а яка розтягується за допомогою функцій а) $w = z^2 + 2z$; б) $w = \ln z$.

Відповіді: а) внутрішність круга $|z + 1| < 1/2$ стискається, а зовнішність розтягується; б) внутрішність круга $|z| < 1$ (крім $z = 0$) розтягується, а зовнішність стискається.

3. В яких точках площини коефіцієнт розтягу наступних відображень дорівнює одиниці: а) $w = z^2 + 1$; б) $w = \frac{z^3 + 1}{3}$; в) $w = z^2 + 2z$?

Відповіді: а) $|z| = \frac{1}{2}$; б) $|z| = 1$; в) $|z + 1| = \frac{1}{2}$.

4. В яких точках площини кут повороту наступних відображень дорівнює нулю: а) $w = -2z^3$; б) $w = iz^2 + 1$?

Відповіді: а) $\operatorname{Re} z = 0$; б) $\arg z = -\frac{\pi}{2}$.

Самостійна робота

1. Знайти кут повороту φ і коефіцієнт розтягу k при відображеннях за допомогою функції $w = f(z)$ у точках z_0 : а) $w = z^2$, $z_0 = 1+i$;

б) $w = e^z$, $z_0 = -1 - i\pi/2$; в) $w = \sin z$, $z_0 = 1+i$.

2. Установити, яка частина площини (z) стискається, а яка розтягується завдяки функції а) $w = \ln(z-1)$; б) $w = 3z^3$.

11. Конформні відображення

При відображенні за допомогою аналітичної функції кути між лініями в точках, де $f'(z) \neq 0$, зберігаються, а розтяг у точці – однаковий для всіх напрямів. Відображення з такими властивостями називається **конформним** (рис 16).

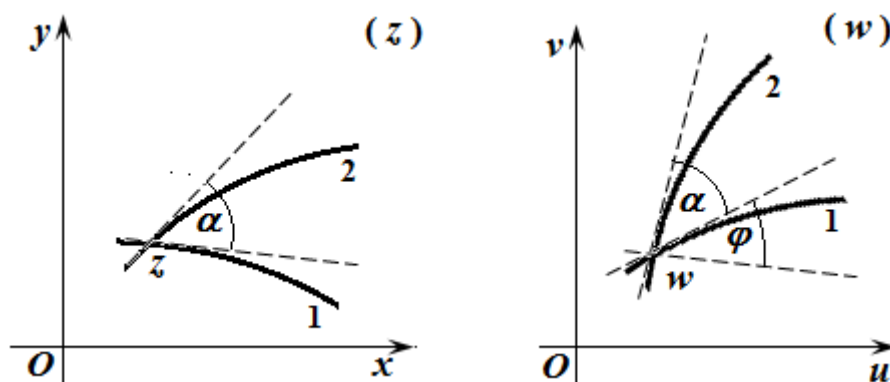


Рис.16

Відображення називається **конформним в області D** , якщо воно конформне в кожній точці цієї області.

Якщо при конформному відображенні зберігаються величини кутів і напрямки їх відліку, то таке відображення називається **конформним відображенням 1-го роду**, якщо, при незмінних величинах кутів, напрямки їх відліку змінюються на протилежний – **конформним відображенням 2-го роду**.

Теорема Рімана. Нехай D – однозв'язна область розширеної комплексної площини, границя якої складається більше, ніж з однієї точки. Тоді

- 1) існує функція $w = f(z)$, яка конформно відображає область D на круг $|w| < 1$;
- 2) ця функція єдина, якщо виконуються умови

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha. \quad (34)$$

Тут z_0, w_0 – задані точки ($z_0 \in D, |w_0| < 1$), α – задане дійсне число.

Наслідок. Нехай границі однозв'язних областей D і G складаються більше, ніж з однієї точки. Тоді існує одна і тільки одна функція $w = f(z)$, яка конформно відображає область D в область G так, що

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha, \quad (35)$$

де $z_0 \in D, w_0 \in G, \alpha$ – дійсне число.

В теорії конформних відображень розглядаються дві задачі – пряма і обернена. Пряма задача полягає у визначенні при заданому відображенні $w = f(z)$ образу відомої лінії або області. Обернена – у визначенні функції $w = f(z)$, яка здійснює відображення однієї відомої лінії або області на другу відому лінію або область.

При розв'язанні прямої задачі для визначення образу кривої необхідно вилучити невідому z з системи рівнянь, що складається з рівняння лінії і рівняння відображення $w = f(z)$. Це можна зробити скориставшись формулами (2).

Таким методом можна розв'язувати і задачу відображення області. При цьому кусочно-гладка границя області D розширеної комплексної площини при конформному відображенні переходить в границю образу G взаємно однозначно з збереженням орієнтації. Внутрішні точки області D переходять у внутрішні точки області G .

При розв'язанні оберненої задачі крім властивостей найпростіших відображень використовуються також таблиці відомих відображень.

Конформні відображення знаходять застосування в електротехніці, гідродинаміки, аеродинаміки та інших галузях.

11.1. Лінійна функція. Лінійна функція

$$w = az + b, \quad \text{де } a = |a|e^{i\varphi} \neq 0 \quad (36)$$

визначає конформне перетворення розширеної комплексної площини (z), оскільки є функцією аналітичною і $w' = a \neq 0$.

Лінійне відображення можна розглядати як послідовне виконання трьох найпростіших відображень:

$w_1 = |a|z$ – гомотетія (центральна подібність) з центром у початку координат O і коефіцієнтом $k = |a|$;

$w_2 = e^{j \arg a} w_1$ – поворот на кут $\varphi = \arg a$ навколо початку координат;

$w_3 = w_2 + b$ – паралельний перенос в напрямку вектора \bar{b} на величину $|b|$.

Лінійне відображення переводить кола і прямі площини (z) відповідно в кола і прямі площини (w) (*властивість лінійності*).

Нерухомою точкою відображення $w = f(z)$ називається така точка z_0 , що $f(z_0) = z_0$.

Лінійне відображення має дві нерухомі точки $z_1 = \frac{b}{1-a}$ ($a \neq 1$) і $z_2 = \infty$.

Приклад 1. Знайти лінійне відображення $w = az + b$, $a \neq 0$ з нерухомою точкою $z_0 = 3i$, що переводить точку $z = 1$ у точку $w = 1 + 2i$.

Розв'язок. Запишемо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів a і b :

$$\begin{cases} 3i = a \cdot 3i + b, \\ 1 + 2i = a \cdot 1 + b. \end{cases} \text{ Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо } a = \frac{2+i}{5}, b = \frac{3+9i}{5}.$$

Тоді лінійне відображення набуває вигляду $w = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right)z + \frac{3}{5} + \frac{9}{5}i$.

Приклад 2. Знайти образ круга $|z| < 1$ при відображенні $w = z - 2 - i$.

Розв'язок. Перший спосіб. Оберненою до функції $w = z - 2 - i$ є функція $z = w + 2 + i$. Підставивши отриманий вираз в нерівність $|z| < 1$, отримуємо $|w + 2 + i| < 1$. Отже, образом круга $|z| < 1$ є круг $|w + 2 + i| < 1$.

Другий спосіб. Наведемо геометричний розв'язок задачі. Виконаємо послідовно перетворення границі області $|z| = 1$. Оскільки з умови $w = z - 2 - i$ випливає, що $a = 1$ і $|a| = 1$, то маємо гомотетію з коефіцієнтом $k = 1$. Повороту відображення немає, бо $\varphi = \arg a = 0$. Застосуємо перетворення переміщення на вектор, що зображує комплексне число $b = -2 - i$.

На рис.17 дано геометричне зображення отриманої області $|w + 2 + i| < 1$.

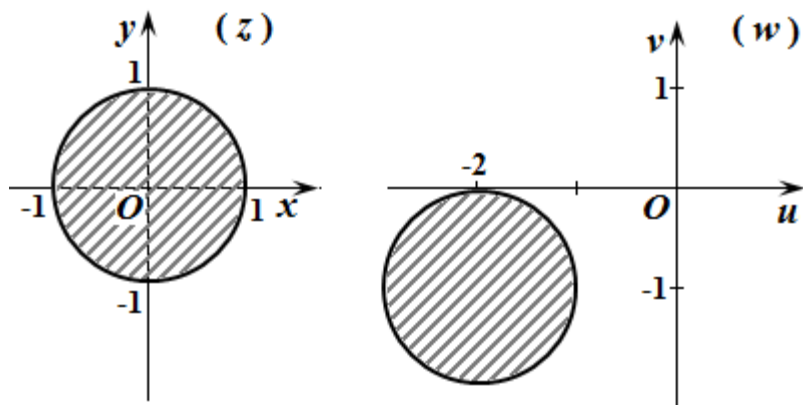


Рис. 17

Приклад 3. Знайти лінійну функцію, яка відображає область $\begin{cases} |z| < 1, \\ \text{Im } z < 0 \end{cases}$ на область $\begin{cases} |w| < 1, \\ \text{Re } w > 0. \end{cases}$

Розв'язок. Треба розв'язати обернену задачу відображень – за даними образом і прообразом (рис.18) знайти відповідне лінійне відображення. Застосуємо геометричний метод розв'язування. Для цього скористаємося властивостями лінійного відображення – геометричним змістом його складових. Розкладемо відображення на найпростіші відображення.

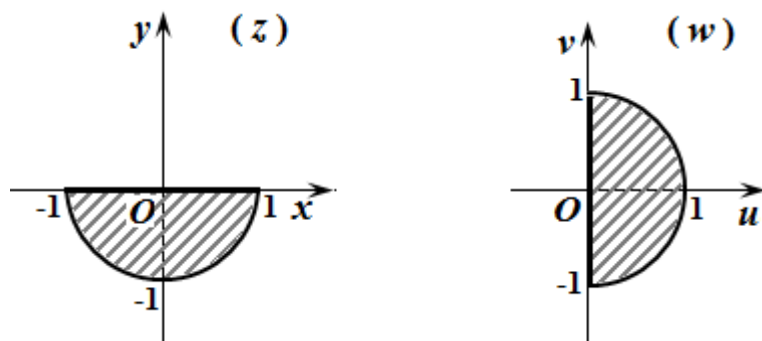


Рис.18

Оскільки розтягування або стискання області нема, то $k = |a| = 1$. Відбувається поворот області проти годинникової стрілки (в додатньому напрямку) на кут $\varphi = \arg a = \frac{\pi}{2}$. За відомими модулем і аргументом визначаємо параметр $a = |a|e^{i\arg a} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. При відображенні відсутній паралельний перенос області, тобто $b = 0$. Остаточно маємо лінійне відображення $w = iz$.

Приклад 4. Знайти лінійну функцію, яка відображає область $\text{Im } z > 2$ в область $\text{Re } w > 0$.

Розв'язок. Застосуємо геометричний спосіб розв'язування. Знайдемо функцію $w = az + b$, яка встановлює відповідність між границею $\text{Im } z = 2$ в площині (z) і границею $\text{Re } w = 0$ в області (w) . Для цього скористаємося геометричними властивостями складових лінійного відображення.

На першому етапі зсунемо границю півплощини D на дві одиниці вниз за допомогою функції $w_1 = az + b$, де $k = |a| = 1$, $\varphi = \arg a = 0$, тобто $a = |a|e^{i\arg a} = e^0 = 1$, $b = -2i$. Маємо $w_1 = z - 2i$. Образом півплощини D буде півплощина G_1 .

На другому етапі повернемо границю півплощини G_1 за годинниковою стрілкою (у від'ємному напрямку) на кут $\varphi = \arg a = -\frac{\pi}{2}$. Оскільки

$k = |a| = 1$, то $a = |a|e^{i\arg a} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$, $b = 0$. Образом півплощини G_1 буде півплощина G (рис.19). Рівняння шуканого відображенні $w = -iw_1$. Після підстановки w_1 маємо $w = -i(z - 2i)$, або $w = -iz - 2$.

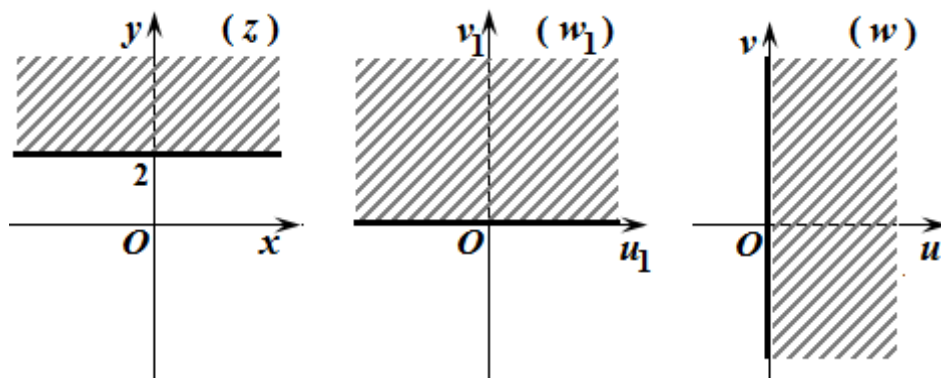


Рис.19

Приклад 5. Знайти образ кута $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ при відображенні $w = (i - 1)(z + 1)$.

Розв'язок. Лінійна функція має вигляд $w = (i - 1)z + i - 1$. Запишемо параметр $a = i - 1$ в показниковій формі: $|a| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\text{tg } \varphi = -1$,

$\varphi = \arg a = \pi + \text{arctg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, $a = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Оскільки параметр $b = i - 1$,

то $w = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}z + i - 1$.

Здійснимо лінійне відображення як суперпозицію складових відображень.

На першому етапі в площині (z) застосуємо перетворення $w_1 = \sqrt{2}z$, що дає розтягування в $\sqrt{2}$ раз. Оскільки нескінченна область D обмежена прямими $\arg z = \frac{\pi}{4}$ і $\arg z = \frac{\pi}{2}$, то вид її відображення G_1 в площині (w_1) не зміниться.

На другому етапі застосуємо перетворення $w_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} w_1$. Для цього границі області G_1 повернемо навколо початку координат проти годинникової стрілки на кут $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Образом G_1 в площині (w_2) буде область G_2 .

На третьому етапі перенесемо границі області G_2 в напрямку вектора, що зображує комплексне число b , тобто розглянемо відображення $w = w_2 + i - 1$. Образом G_2 в площині (w) буде область G – образ кута $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

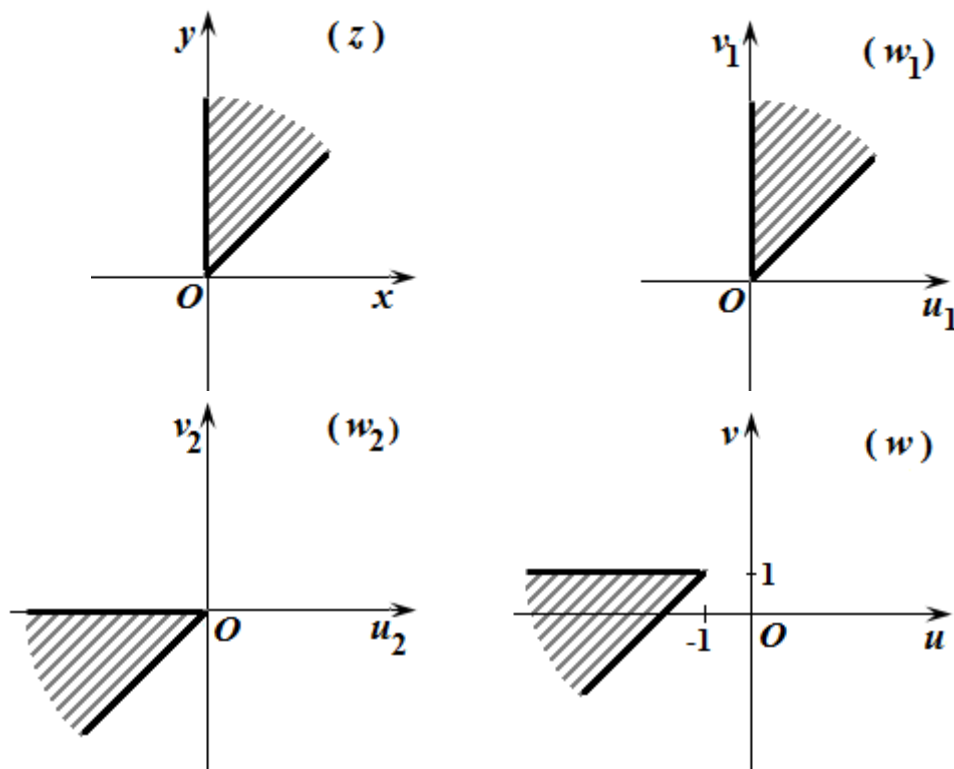


Рис. 20

11.2. Дробово-лінійна функція. Дробово-лінійна функція

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0, c \neq 0) \quad (37)$$

однозначно і конформно відображає розширену площину (z) на розширену площину (w).

Кут між лініями в нескінченно віддаленій точці однієї з площин (площини (z) або (w)) вважають рівним куту між зображеннями ліній в початку координат іншої площини.

Основні властивості дробово-лінійного відображення.

1. *Групова властивість.* Сукупність дробово-лінійних відображень утворює групу, тобто: а) суперпозиція дробово-лінійних відображень є дробово-лінійним відображенням; б) відображення, обернене до дробово-лінійного, також є дробово-лінійним.

2. *Кругова властивість.* Дробово-лінійне відображення $w = \frac{az + b}{cz + d}$ перетворює кола або прямі площини (z), що проходять через точку $z = -\frac{d}{c}$, в прямі площини (w), а інші кола і прямі – в кола.

3. *Властивість збереження симетрії.* При дробово-лінійному відображенні пара точок, симетричних відносно деякого кола, переходять в пару точок, симетричних відносно образу цього кола.

Зауваження. Точки z_1 і z_2 називаються *симетричними* відносно кола $|z - z_0| = R$, якщо вони лежать на одному промені, що виходить з точки z_0 , і

$$|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R^2. \quad (38)$$

Точкою, що симетрична точці z_0 – центру кола, є нескінченно віддалена точка.

4. Дробово-лінійна функція цілком визначається завданням відображення трьох точок $z_1 \rightarrow w_1, z_2 \rightarrow w_2, z_3 \rightarrow w_3$:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \quad (39)$$

Якщо одна з точок z_1, z_2, z_3 або w_1, w_2, w_3 є нескінченно віддаленою точкою, то в формулі (39) слід замінити одиницею всі різниці, що містять цю точку.

Частинним випадком дробово-раціональної функції є функція $w = \frac{1}{z}$. Це відображення можна подати у вигляді двох складових: симетричного відображення відносно одиничного кола $w_1 = \frac{1}{z}$ (інверсії) і симетричного відображення відносно дійсної осі $w_2 = \bar{w}_1$.

Відображення $w = \frac{1}{z}$ переводить внутрішність круга $|z| \leq 1$ у зовнішню частину круга $|w| \leq 1$, і, навпаки, зовнішню частину круга $|z| \leq 1$ – у

внутрішню частину круга $|w| \leq 1$. Нерухомими точками цього перетворення є точки $z = 1$ і $z = -1$.

Приклад 1. Відобразити на площину (w) коло $x^2 + y^2 = \frac{y}{5}$ за допомогою функції $w = \frac{1}{z}$.

Розв'язок. Позначимо $z = x + iy$; $w = u + iv$. Для знаходження образу кола, вилучимо x і y з системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{y}{5}, \\ w = \frac{1}{z}. \end{cases} \quad \text{Скористаємося формулами (1а): } x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$. Тоді рівняння кола перепишеться у вигляді $x^2 + y^2 - \frac{y}{5} = z \cdot \bar{z} - \frac{z - \bar{z}}{10i} = 0$. Зробимо заміну $z = \frac{1}{w}$, $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$. Маємо:

$$\frac{1}{w\bar{w}} = \frac{1}{10i} \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} \right), \quad \text{або } 1 = \frac{1}{10i} (\bar{w} - w).$$

Враховуючи, що $w = u + iv$, отримуємо $v = -5$. Таким чином, коло $x^2 + y^2 = \frac{y}{5}$ перетворюється на пряму $v = -5$, що паралельна дійсній осі.

Приклад 2. Відобразити на площину (w) смугу $0 < x < 1$ за допомогою функції $w = \frac{z - 2 + i}{z + 1 + i}$.

Розв'язок. Позначимо $z = x + iy$; $w = u + iv$, тоді $w = u + iv = \frac{z - 2 + i}{z + 1 + i} = 1 - \frac{3}{z + 1 + i} = 1 - \frac{3}{(x + 1) + i(y + 1)} = 1 - \frac{3((x + 1) - i(y + 1))}{(x + 1)^2 + (y + 1)^2}$, звідки

$$u - 1 = -\frac{3(x + 1)}{(x + 1)^2 + (y + 1)^2}; \quad v = \frac{3(y + 1)}{(x + 1)^2 + (y + 1)^2}.$$

Якщо $x = 0$, то $u - 1 = -\frac{3}{1 + (y + 1)^2}$; $v = \frac{3(y + 1)}{1 + (y + 1)^2}$. Вилучаючи y , маємо зображення прямої $x = 0$: $(u - 1)^2 + v^2 = -3(u - 1)$, або $(u + 1/2)^2 + v^2 = 9/4$.

Якщо $x=1$, то $u-1 = -\frac{6}{4+(y+1)^2}$; $v = \frac{3(y+1)}{4+(y+1)^2}$. Вилучаючи y , маємо зображення прямої $x=1$: $(u-1)^2 + v^2 = -3(u-1)/2$, або $(u-1/4)^2 + v^2 = 9/16$.

Внутрішня точка $z_0 = \frac{1}{2}$ відбивається на точку $w_0\left(-\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right)$. Тобто при відображенні за допомогою дробово-раціональної функції $w = \frac{z-2+i}{z+1+i}$ смуга $0 < x < 1$ відображається в область, яка лежить між колом $\left|w - \frac{1}{4}\right| = \frac{3}{4}$ з центром у точці $\left(\frac{1}{4}; 0\right)$ радіуса $\frac{3}{4}$ і колом $\left|w + \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$ з центром у точці $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ радіуса $\frac{3}{2}$ (рис. 21).

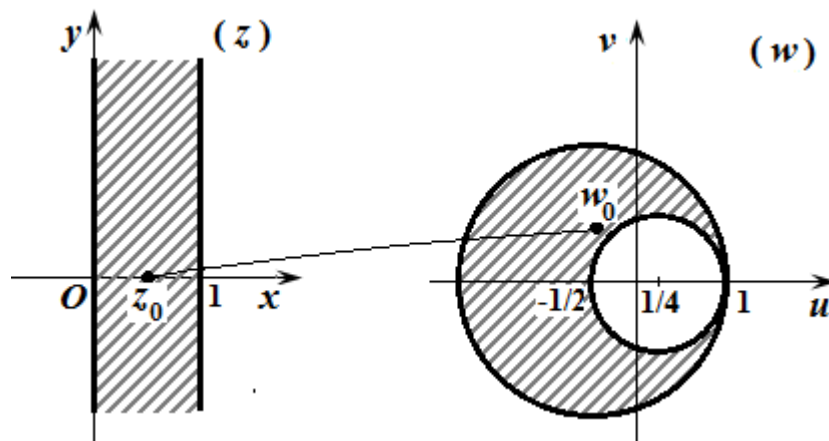


Рис.21

Приклад 3. Відобразити на площину (w) область $\text{Im} z > \frac{1}{2}$ за допомогою функції $w = \frac{1}{z}$.

Розв'язок. Перший спосіб. Для того, щоб з'ясувати, в яку лінію відображається границя півплощини $\text{Im} z = \frac{1}{2}$, скористаємося круговою властивістю дробово-лінійного відображення. Точка $z = -\frac{d}{c} = -\frac{0}{1} = 0$ не належить прямій $\text{Im} z = \frac{1}{2}$, тобто ця пряма перетворюється в коло площини (w) .

Скористаємося геометричним способом відображення прямої в коло за трьома точками. Для цього оберемо на прямій точки $z_1 = \frac{1}{2}i$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ та $z_3 = \infty$. Підставивши їх значення в функцію $w = \frac{1}{z}$, знайдемо три точки площини (w): $w_1 = -2i$, $w_2 = 1 - i$, $w_3 = 0$. Ці точки утворюють трикутник, навколо якого описується коло. Центром кола є точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника. Центр кола знаходиться в точці $(0; -i)$, радіус кола $R = 1$ (рис.22б).

Оскільки при русі вздовж границі у напрямку точок z_1, z_2, z_3 область $\text{Im} z > \frac{1}{2}$ залишається зліва, то й при русі у напрямку відповідних точок w_1, w_2, w_3 відображена область також залишається зліва від границі.

Тобто образом півплощини $\text{Im} z > \frac{1}{2}$ при відображенні $w = \frac{1}{z}$ є внутрішність круга $u^2 + (v+1)^2 < 1$ (рис.22).

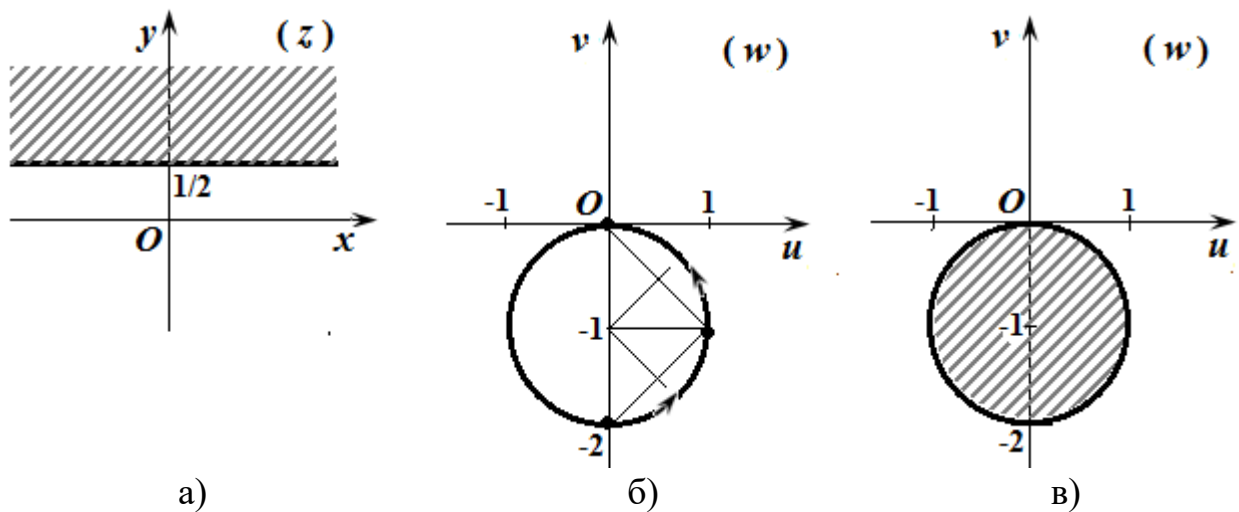


Рис. 22

Другий спосіб. Отримаємо образ області $\text{Im} z > \frac{1}{2}$ алгебраїчним шляхом.

Позначимо $z = x + iy$, $w = u + iv$. Оскільки $z = \frac{1}{w}$, то $x + iy = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2}$. Звідки $y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$. Область в площині (z) являє собою півплощину $y > \frac{1}{2}$. Вилучаючи y , маємо

$-\frac{v}{u^2+v^2} > \frac{1}{2}$. Перетворимо отриману нерівність $u^2 + v^2 + 2v < 0 \Rightarrow u^2 + (v^2 + 2v + 1) - 1 < 0 \Rightarrow u^2 + (v+1)^2 < 1$. Таким чином образом області $\text{Im } z > \frac{1}{2}$ при відображенні $w = \frac{1}{z}$ є внутрішність круга, обмеженого колом $u^2 + (v+1)^2 = 1$ з центром в точці $(0; -i)$ і радіусом $R = 1$.

Приклад 4. Знайти дробово-лінійну функцію, яка переводить точки $0, 1, \infty$ площини (z) відповідно в точки $-2, 0, 2$ площини (w) . В яку область при цьому відображенні переходить верхня півплощина?

Розв'язок. Введемо позначення $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty$ і $w_1 = -2, w_2 = 0, w_3 = 2$. Скористаємося формулою (39), замінивши одиницею всі різниці, що містять точку z_3 :

$$\frac{w+2}{w-0} \cdot \frac{2-0}{2+2} = \frac{z-0}{z-1} \cdot \frac{1}{1},$$

звідки

$$\frac{w+2}{2w} = \frac{z}{z-1}.$$

Тоді $w = \frac{2z-2}{z+1}$.

З'ясуємо, в яку область при отриманому відображенні переходить верхня півплощина. За умовою задачі дійсна вісь площини (z) , яка є границею верхньої півплощини, переходить взаємно однозначно і з збереженням орієнтації в дійсну вісь площини (w) . Оскільки при русі вздовж дійсної осі в площині (z) в напрямку заданих точок $0, 1, \infty$ півплощина залишається зліва, то і при відповідному русі вздовж дійсної осі площини (w) в напрямку точок $-2, 0, 2$ область повинна також залишатися зліва, тобто бути верхньою півплощиною.

Таким чином, образом верхньої півплощини (z) при відображенні $w = \frac{2z-2}{z+1}$ є верхня півплощина (w) .

Приклад 5. Знайти дробово-лінійну функцію, яка відображає область $|z-i| < 1$ на область $|w+i| > 1$ так, що точки 0 і i залишаються нерухомими.

Розв'язок. Для визначення дробово-лінійної функції скористаємося формулою (37). Оскільки точки $z_1 = 0$ і $z_2 = i$ – нерухомі, то $w_1 = 0$ і $w_2 = i$.

Для визначення третьої пари точок застосуємо властивість збереження симетричних точок.

Знайдемо точки, які симетричні точкам $z=i$ і $w=i$ відносно відповідних кіл. Для точки $z=i$, яка є центром кола $|z-i|=1$, симетричною точкою відносно цього кола буде точка $z_3=\infty$. Для точки $w=i$ точку, симетричну відносно кола $|w+i|=1$, знайдемо, скориставшись формулою (38): $|i-(-i)| \cdot |w^*-(-i)|=1 \Rightarrow |w^*+i|=\frac{1}{2}$. Таким чином, симетрична точка розташована на відстані $\frac{1}{2}$ від центра кола $w_0=-i$. За визначенням, ця точка лежить на промені, який проходить через центр кола і точку i , тобто $w_3=-\frac{i}{2}$ (рис. 23).

Застосуємо формулу (37), замінивши різниці з z_3 одиницею:

$$\frac{w-0}{w-i} \cdot \frac{-\frac{i}{2}-i}{-\frac{i}{2}-0} = \frac{z-0}{z-i} \cdot \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{3w}{w-i} = \frac{z}{z-i}.$$

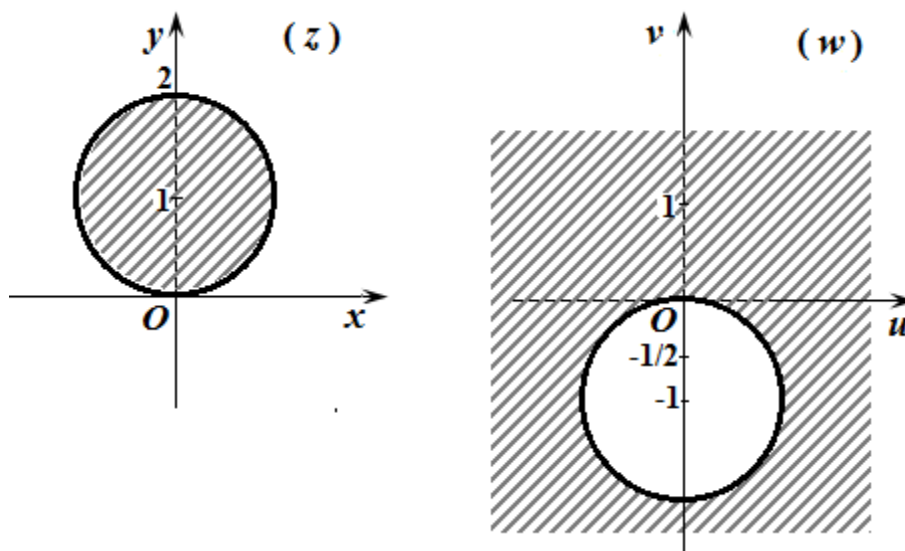


Рис.23

Після перетворень отримуємо: $w = \frac{zi}{3i-2z}$.

11.3. Степенева функція. Відображення $w=z^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) є конформним всюди в розширеній комплексній площині, крім точки $z=0$ ($w'(z)=nz^{n-1}$, $w'(z) \neq 0$ для будь-якого $z \neq 0$).

Функція $w=z^n$ конформно і взаємно однозначно відображає будь-який сектор

$$\frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n} \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

на всю площину (w) з розрізом по додатній частині дійсної осі.

Запишемо змінні в показниковій формі $z = |z| \cdot e^{i \arg z}$, $w = |w| \cdot e^{i \arg w}$. Тоді маємо $|w| \cdot e^{i \arg w} = |z|^n \cdot e^{in \arg z}$. Звідси $|w| = |z|^n$, $\arg w = n \arg z$, тобто при відображенні $w = z^n$ модуль підноситься до степеня n , а аргумент збільшується в n разів.

Оскільки відображення $w = z^n$ збільшує в n разів кути між прямими, що проходять через початок координат, то його використовують, коли потрібно збільшити кути при переході від прообразу до образу.

Функція $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right)}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) є функцією багатозначною. В областях, що не містять точок $z = 0$ і $z = \infty$, можна виділити однозначну вітку, яка відображає площину (z) з розрізом по невід'ємній частині дійсної осі на відповідний сектор

$$\frac{2k\pi}{n} < \arg w < \frac{2(k+1)\pi}{n},$$

де k – фіксовано.

Оскільки відображення $w = \sqrt[n]{z}$ зменшує в n разів кути між прямими, що проходять через початок координат, то його використовують, коли потрібно зменшити кути при переході від прообразу до образу.

Приклад 1. Для відображення $w = z^2$ знайти образи ліній а) $x = 1$; б) $y = 2$; в) $|z| = 4$; г) $\arg z = \pi/4$.

Розв'язок. Нехай $z = x + iy$; $w = u + iv$. Тоді $w = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$. Звідси $u = x^2 - y^2$; $v = 2xy$;

а) для знаходження образу прямої $x = 1$ вилучимо x і y з рівнянь

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy, \\ x = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} u = 1 - y^2, \\ v = 2y, \end{cases} \quad \text{тобто } u = 1 - v^2/4 \text{ – це рівняння параболи;}$$

б) для знаходження образу прямої $y = 2$ вилучимо x і y з рівнянь

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy, \\ y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} u = x^2 - 4, \\ v = 4x, \end{cases} \quad \text{тобто } u = v^2/16 - 4 \text{ – це також рівняння параболи;}$$

в) для знаходження образу кола $|z| = 4$ вилучимо x і y з рівнянь

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy, \\ x^2 + y^2 = 16. \end{cases} \quad \text{Піднесемо обидві частини першого і другого рівнянь до}$$

квадрата і додамо одне рівняння до другого:

$$u^2 + v^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

З урахуванням третього з них одержимо

$$u^2 + v^2 = 16^2 \quad (\text{рівняння кола з радіусом 16});$$

г) для знаходження образу променя $\arg z = \pi/4$ запишемо z у показниковій формі $z = |z|e^{i\arg z}$. Тоді функція $w = z^2 = |z|^2 e^{i2\arg z}$. Тобто $\arg w = 2\arg z$. Тому образом променя $\arg z = \pi/4$ буде промінь $\arg w = \pi/2$.

Приклад 2. Знайти функцію, що відображає область $\frac{\pi}{4} < \arg(z-i) < \pi$ на верхню півплощину $\text{Im } w > 0$.

Розв'язок. Здійснимо відображення як суперпозицію складових відображень.

На першому етапі за допомогою лінійного перетворення $w_1 = az + b$ перенесемо границі області D площини (z) (рис. 24а) в напрямку вектора, що зображує комплексне число $b = -i$. Оскільки розтягування і повороту області немає, то $k = |a| = 1$, $\varphi = 0$ і $a = |a|e^{i\varphi} = 1$. Отримана функція $w_1 = z - i$ відображає область D площини (z) на область G_1 площини (w_1) (рис. 24б).

На другому етапі повернемо границі області G_1 на кут $-\frac{\pi}{4}$ (за годинниковою стрілкою), застосувавши лінійну функцію $w_2 = aw_1 + b$. Тут $k = |a| = 1$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, $a = 1 \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}}$, $b = 0$. Таким чином, $w_2 = e^{-\frac{\pi i}{4}} w_1$. Образом області G_1 в площині (w_2) буде область G_2 (рис. 24в).

На третьому етапі збільшимо кут $\frac{3\pi}{4}$ між границями області G_2 в $\frac{4}{3}$ рази так, щоб отримана область G являла собою верхню півплощину (рис. 24г). Для цього функцію w_2 піднесемо до степеня $\frac{4}{3}$:

$$w = w_2^{4/3} = \left(e^{-\frac{\pi i}{4}} w_1 \right)^{4/3} = e^{-\frac{\pi i}{3}} w_1^{4/3} = e^{-\frac{\pi i}{3}} (z-i)^{4/3}.$$

Остаточно функція, що відображає область $\frac{\pi}{4} < \arg(z-i) < \pi$ на верхню півплощину $\text{Im } w > 0$, має вигляд $w = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}(z-i)$.

11.4. Функція Жуковського. Функція $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ називається функцією Жуковського. Ця функція однозначна і аналітична в точках $z \neq 0$. Похідна функції $w'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$, причому $w'(z) \neq 0$ при $z \neq \pm 1$. Тому перетворення конформно всюди на комплексній площині, за виключенням критичних точок $z = \pm 1$.

Функція Жуковського є однолистою в області D тоді і тільки тоді, коли в цій області не міститься жодної пари різних точок z_1 і z_2 , отриманих одна з одної подвійною симетрією: відносно одиничного кола $|z|=1$ і відносно дійсної осі $\text{Im } z = 0$, тобто зв'язаних рівністю $z_1 z_2 = 1$.

Областями, де функція Жуковського однолиста є, наприклад, одиничний круг $|z| < 1$, зовнішність одиничного круга $|z| > 1$, верхня і нижня півплощини $\text{Im } z > 0$ і $\text{Im } z < 0$ відповідно.

Функція Жуковського відображає коло, $|z| = R$ $0 < R < +\infty$, $R \neq 1$ в точки

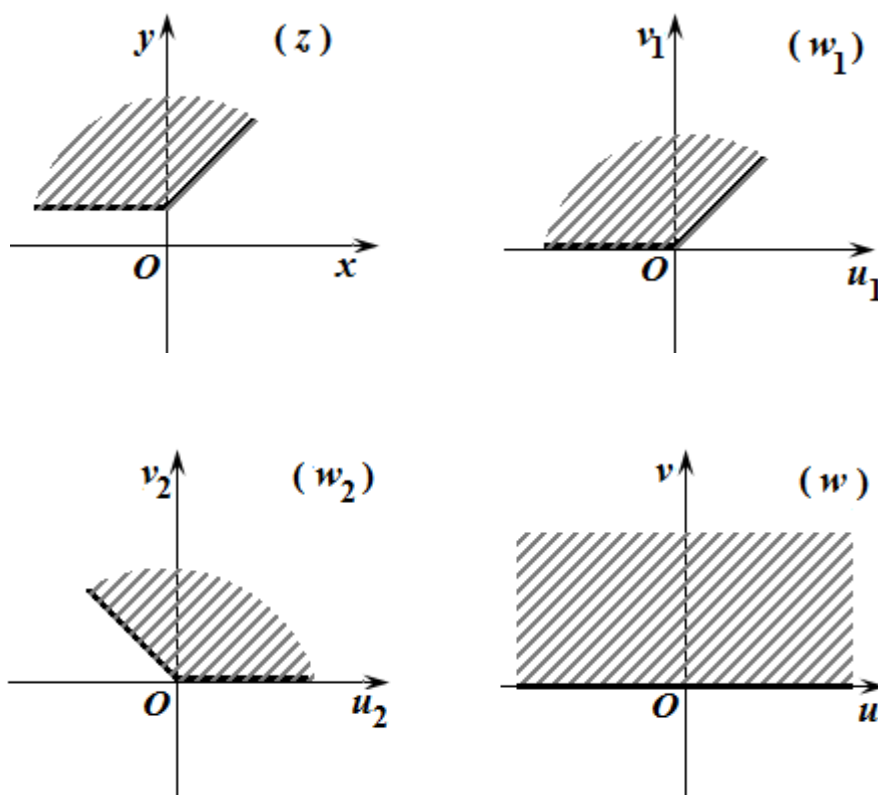


Рис.24

еліпса $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, де $a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right) > 0$, $b = \pm \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)$ з фокусами в точках ± 1 . При $R > 1$ напрямком обходу по колу та по відповідному еліпсу однаковий, а при $0 < R < 1$ – протилежний.

Коло $|z|=1$ функція Жуковського відображає у відрізок $[-1; 1]$, що проходиться двічі.

Функція відображає внутрішність або зовнішність одиничного круга площини (z) на площину (w) з розрізом вздовж відрізка $[-1; 1]$.

Промені $z = re^{i\alpha}$, де α – фіксоване ($0 < r < +\infty$), відображаються функцією Жуковського в гіперболи $\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1$ ($\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$) з фокусами ± 1 і асимптотами $v = \pm u \operatorname{tg} \alpha$. Відрізки променів $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \pi$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ при $0 < r \leq 1$ відображаються відповідно у промені $[1; +\infty)$, $(-\infty; 0]$, $(-\infty; -1]$, $[0; +\infty i)$.

Обернена до функції Жуковського функція $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ двозначна. Кожна її гілка відображає площину (z) з розрізом вздовж відрізка $[-1; 1]$ на внутрішність або на зовнішність одиничного круга в площині (w).

Приклад 1. Знайти образ внутрішності круга $|z| < 1$ з розрізом вздовж відрізка $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ на верхню півплощину $\operatorname{Im} z > 0$.

Розв'язок. На першому етапі при перетворенні за допомогою функції Жуковського $w_1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ коло $|z|=1$ відображається в точки відрізка $[-1; 1]$ дійсної осі площини (w_1), а точки $z_1 = 1$ і $z_2 = \frac{1}{2}$ відображаються в точки $w_1(1) = 1$ і $w_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$.

На другому етапі за допомогою функції $w_2 = \frac{aw_1 + b}{cw_1 + d}$ відобразимо отриману множину на площину (w_2) з розрізом вздовж дійсної додатної півосі. Для цього достатньо трійку точок $\left(-1; 0; \frac{5}{4}\right)$ перевести в трійку $(0; 1; \infty)$. Скориставшись формулою (39), маємо:

$$\frac{w_2 - 0}{w_2 - 1} \cdot \frac{\infty - 1}{\infty - 0} = \frac{w_1 + 1}{w_1 - 0} \cdot \frac{5/4 - 0}{5/4 + 1}.$$

Отже,

$$w_2 = -\frac{5(w_1 + 1)}{4w_1 - 5}.$$

На третьому етапі застосуємо перетворення $w = \sqrt{w_2}$, яке зменшує кути вдвічі (рис.25). Остаточно

$$w = \sqrt{-\frac{5(z^2 + 2z + 1)}{2(2z^2 - 5z + 2)}}.$$

Приклад 2. Знайти відображення площини (z) з розрізами по відрізку, що з'єднує точки i і $2i$, і по відрізку, що з'єднує точки i і $1+i$, на внутрішність одиничного круга $|w| < 1$.

Розв'язок. Шукане відображення знаходимо у вигляді трьох відображень.

На першому етапі функція $w_1 = z - i$ переводить точку $z = i$ в початок координат.

На другому етапі в результаті перетворення $w_2 = w_1^2$ розріз відображається у відрізок $[-1; 1]$.

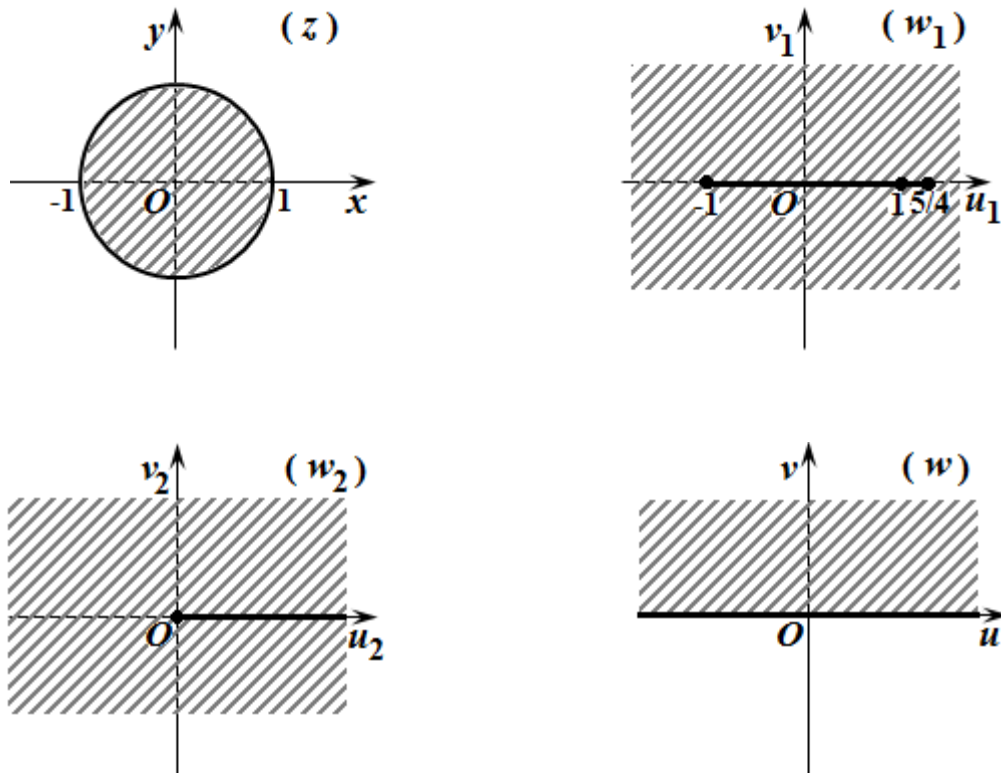


Рис.25

На третьому етапі функція $w = w_2 + \sqrt{w_2^2 - 1}$ відображає зовнішність відрізка $[-1; 1]$ на внутрішність одиничного круга (рис.26).

Таким чином, $w = (z - i)^2 + \sqrt{(z - i)^4 - 1}$.

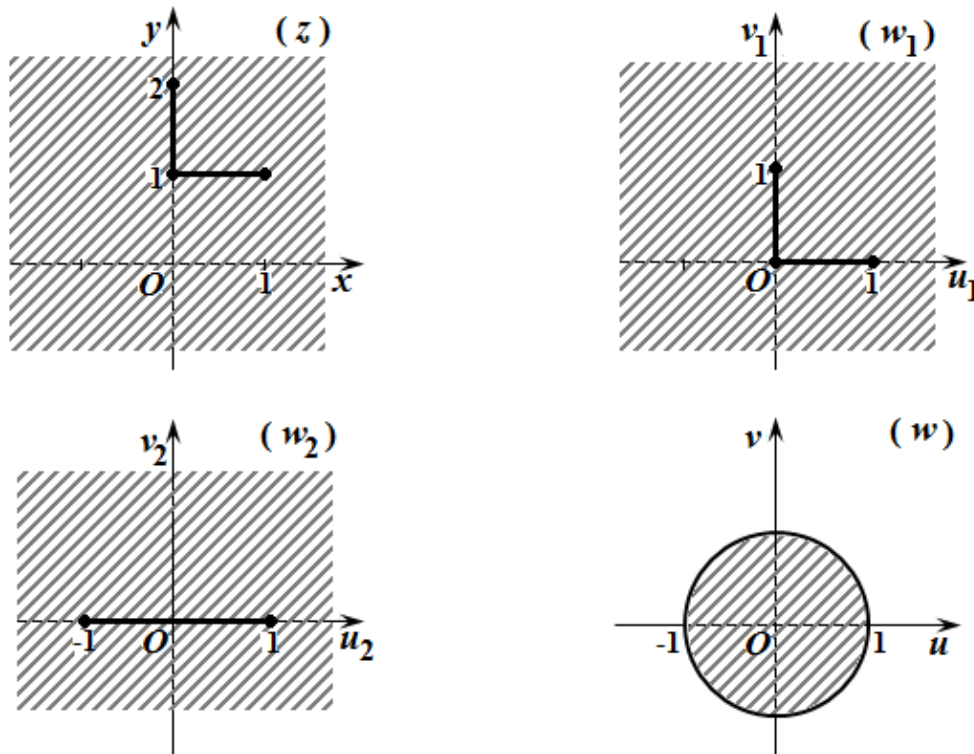


Рис.26

11.5. Показникова функція. Функція $w = e^z$ однолиста в будь-якій смузі шириною не менше 2π , що паралельна дійсній осі. Вона відображає смугу $-\infty < x < +\infty$, $-\pi \leq y \leq \pi$ у повну площину (w) з розрізом по дійсній від'ємній півосі.

Обернена функція $w = \text{Ln } z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$ ($n = 0, \pm 1, \dots$) є нескінченно багатозначною, її головне значення $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ визначає конформне відображення площини (z) з розрізом $(-\infty; 0]$ на полосу $-\pi < \text{Im } w < \pi$.

Приклад 1. Знайти образ смуги $0 < \text{Im } z < \frac{\pi}{2}$ при відображенні $w = e^z$.

Розв'язок. Позначимо $z = x + iy$. Запишемо функцію $w = u + iv$ в показниковій формі $w = |w|e^{i \arg w} = \rho e^{i\varphi}$. Тоді $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ або $|w|e^{i \arg w} = \rho e^{i\varphi} = e^x e^{iy}$. Звідси $|w| = \rho = e^x$; $\varphi = \arg w = y$.

Оскільки для смуги $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$, то в площині (w) отримуємо область $0 \leq |w| < \infty$, $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$ (рис. 27).

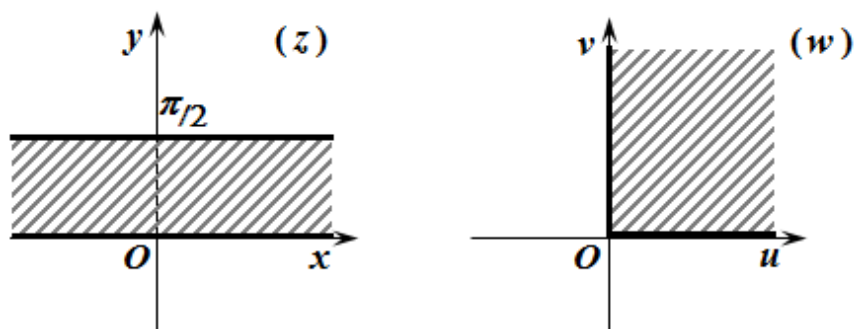


Рис.27

Приклад 2. За допомогою функції $w = e^z$ відобразити: а) квадрат $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$; б) півсмугу $0 < x < \infty, 0 \leq y \leq 2\pi$.

Розв'язок. а) знайдемо образи меж квадрата – прямих $x = -1; x = 1; y = -1; y = 1$.

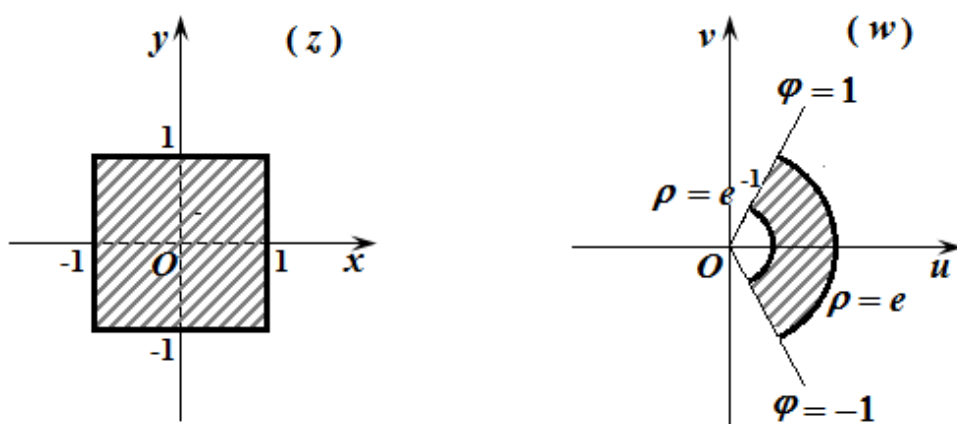


Рис. 28

При відображенні $w = e^z$ в площині (w) маємо область, обмежену дугами двох кіл $\rho = |w| = e^{-1}$ і $\rho = |w| = e$ і двома променями $\varphi = \arg w = -1$ і $\varphi = \arg w = 1$ (рис. 28);

б) при відображенні $w = e^z$ півсмуги $\begin{cases} 0 < x < \infty, \\ 0 \leq y \leq 2\pi \end{cases}$ маємо

$\begin{cases} e^0 < e^x < e^\infty, \\ 0 \leq \arg w \leq 2\pi, \end{cases}$ тобто зовнішність одиничного круга $\begin{cases} 1 < |w| < \infty, \\ 0 \leq \arg w \leq 2\pi \end{cases}$
(рис.29).

Приклад 3. Знайти функцію, що відображає на верхню півплощину область D , обмежену колами $|z| = 1$ і $|z - 3| = 2$.

Розв'язок. Подамо відображення у вигляді суперпозиції складових відображень.

На першому етапі здійснимо перенесення області D на величину (-1) вздовж дійсної осі за допомогою лінійної функції $w_1 = z - 1$. Рівняння кіл, що

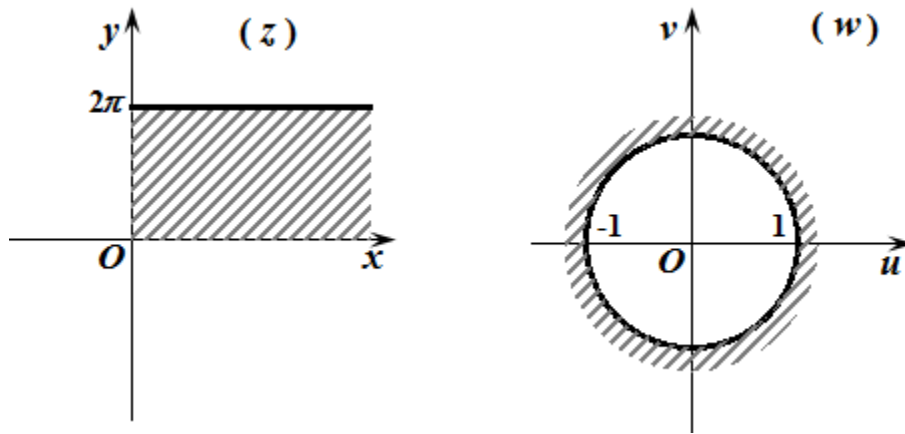


Рис. 29

обмежують область G_1 в площині (w_1) : $|w_1 + 1| = 1$, $|w_1 - 2| = 2$.

На другому етапі функція $w_2 = \frac{1}{w_1}$, внаслідок кругової властивості, переводить ці кола в прямі $\operatorname{Re} w_2 = -1/2$ і $\operatorname{Re} w_2 = 1/4$, які є границею області G_2 в площині (w_2) . Внутрішні точки області G_1 $w_1 = -3$ і $w_1 = 5$ відбиваються в точки $w_2 = -1/3$ і $w_2 = 1/5$ відповідно. Відтак, областю G_2 є смуга $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} w_2 < \frac{1}{4}$.

На третьому етапі за допомогою лінійної функції $w_3 = w_2 + \frac{1}{2}$ перенесемо границі області вздовж дійсної осі на $\frac{1}{2}$. Тоді образом G_2 в площині (w_3) буде область G_3 – смуга $0 < \operatorname{Re} w_3 < \frac{3}{4}$.

На четвертому етапі розтягнемо смугу, застосувавши перетворення $w_4 = \frac{4}{3} \pi w_3$. В площині (w_4) маємо область G_4 – смугу $0 < \operatorname{Re} w_4 < \pi$.

На п'ятому етапі здійснено поворот області G_4 на кут $\frac{\pi}{2}$ за допомогою функції $w_5 = e^{i\frac{\pi}{2}} w_4$. Отримуємо смугу $0 < \operatorname{Im} w_4 < \pi$ (область G_5).

Шостий етап. Відображення $w = e^{w_5}$ переводить смугу $0 < \operatorname{Im} w_4 < \pi$ у верхню півплощину. Дійсно, оскільки в області G_5 $\begin{cases} -\infty < \operatorname{Re} w_5 < \infty, \\ 0 < \operatorname{Im} w_5 < \pi, \end{cases}$ то в

області (w) маємо $\begin{cases} 0 < |w| < \infty, \\ 0 < \arg w < \pi \end{cases}$ (рис.30). Виразимо w_5 через змінну z :

$$w_5 = i \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi i}{3} \cdot \frac{z+1}{z-1}.$$

Отже, $w = e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot \frac{z+1}{z-1}}$.

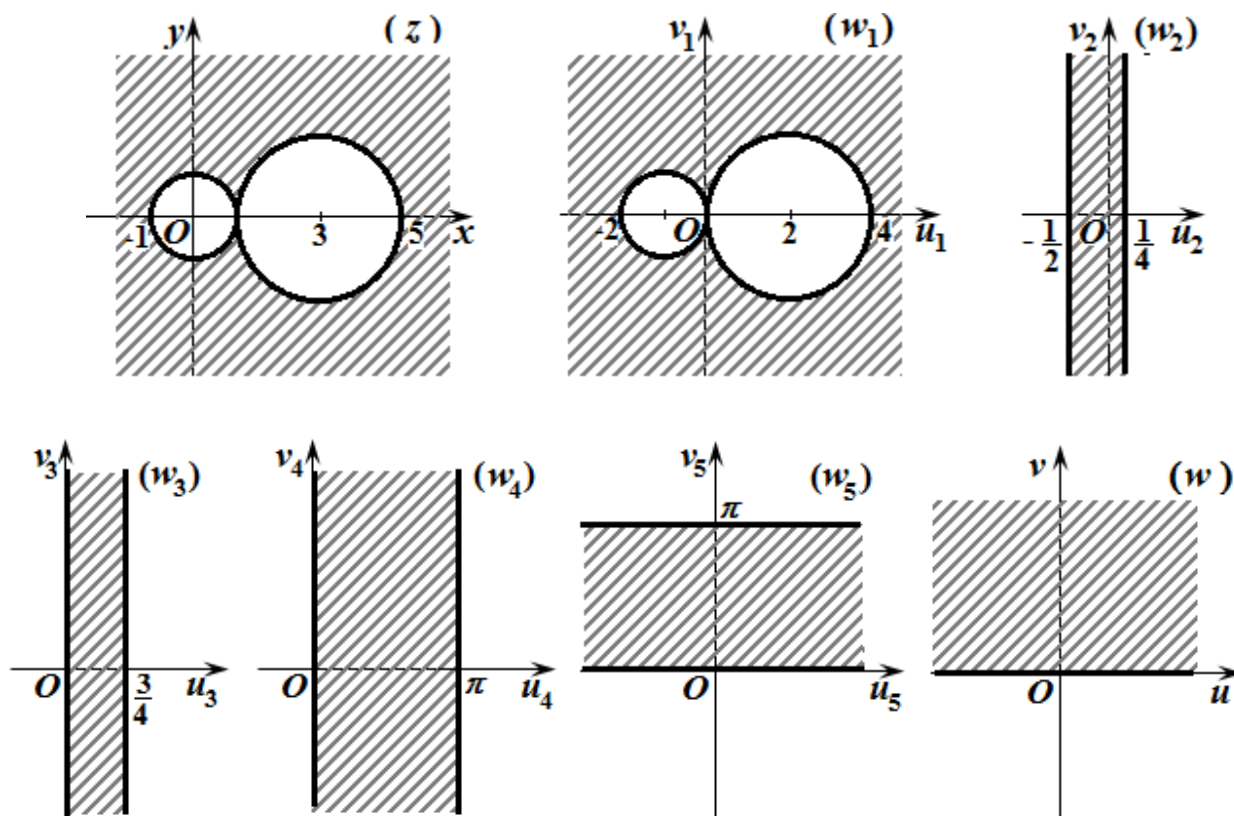


Рис.30

Вправи до розділу

1. Знайти лінійне відображення $w = az + b$, $a \neq 0$, що переводить точки $z_1 = 1$ і $z_2 = i$ відповідно у точки $w_1 = 2i$ і $w_2 = -1$.

Відповідь: $w = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right) z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

2. Знайти лінійне відображення, що відображає трикутник з вершинами i , $1 + 4i$, $2 + i$ на трикутник з вершинами $1 + 6i$, $7 + 4i$, $1 + 2i$.

Відповідь: $w = -2iz - 1 + 6i$.

3. Для відображення $w = 3z + i$ знайти образ кола $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Відповідь: коло $|w - 3 - i| = 3$.

4. Для відображення $w = 1/z$ знайти образи ліній: а) $x = 5$; б) $y = 2$; в) $|z - 1| = 1$; г) $\arg z = \pi/4$.

Відповідь: а) коло $u^2 + v^2 - u/5 = 0$; б) коло $u^2 + v^2 + v/2 = 0$; в) пряма $u = 1/2$; г) промінь $\arg w = -\pi/4$.

5. Знайти образ півкруга $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$ при відображенні $w = \frac{2z - i}{2 + zi}$.

Відповідь: Область, обмежена дугами кіл $|w| = 1$ і $\left|w + \frac{5}{4}i\right| = \frac{3}{4}$.

6. Знайти образ круга $|z - 1| < 2$ при наступних відображеннях: а) $w = 2 - 2iz$; б) $w = \frac{5iz}{z + 2}$; в) $w = \frac{z - 1}{2z - 6}$.

Відповіді: а) $|w - 2 + 2i| < 4$; б) $|w + i| < 4$; в) $|w - 2| > 2$.

7. Знайти образ півплощини $\operatorname{Re} z < 2$ при наступних відображеннях:

а) $w = (1 + i)z + 1$; б) $w = \frac{2z}{z - 1 + i}$.

Відповіді: а) $\operatorname{Re} w + \operatorname{Im} w < 5$; б) $\operatorname{Re} w - \operatorname{Im} w < 1$.

8. Знайти відображення площини (z) з розрізом вздовж відрізка $[-2; 1]$ при відображенні $w = \frac{z + 2}{1 - z}$.

Відповідь: $w \notin [0; \infty)$.

9. Знайти функцію $w(z)$, що конформно відображає область $D: \{\operatorname{Im} z > 0\}$ на область $D_1: \{\operatorname{Im} w > 0\}$ і задовольняє умовам $w(-1) = 0$, $w(0) = 2$, $w(1) = \infty$.

Відповідь: $w = \frac{2z + 2}{1 - z}$.

10. Відобразити на площину (w) півплощину $\operatorname{Im} z > c$ ($c = \text{const}, c > 0$) за допомогою функції $w = z^2$.

Відповідь: зовнішність параболи $u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2$.

11. Знайти функцію, що відображає на верхню півплощину (w) область

$$-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $w = e^{\frac{\pi i}{3}} \cdot z^{\frac{4}{3}}$.

12. Знайти функцію, що відображає площину з розрізом вздовж відрізка $[-i; i]$ на верхню півплощину (w).

Відповідь: $w = \sqrt{\frac{z + i}{i - z}}$.

13. Знайти відображення на верхню півплощину (w) комплексної площини з розрізом вздовж: а) прямолінійного відрізка $[i; 3i]$ уявної осі; б) прямолінійного відрізка, що з'єднує точки $1+i$ і $2+2i$.

Відповіді: а) $w = \sqrt{\frac{z-i}{3i-z}}$; б) $w = \sqrt{\frac{z-1-i}{2+2i-z}}$.

14. Для відображення $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ знайти образи наступних областей:

а) $|z| > 2$; б) $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$; в) $|z| > 1, z \notin [-2; -1], z \notin [1; +\infty)$.

Відповіді: а) $\frac{16}{25}u^2 + \frac{16}{9}v^2 > 1$; б) $u^2 - v^2 < \frac{1}{2}$ ($u = \operatorname{Re} w, v = \operatorname{Im} w$);

в) $w \notin \left[-\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

15. Знайти образи областей D при відображенні $w = e^z$: а) $D: \{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$;

б) $D: \{-\pi < \operatorname{Im} z < 0\}$; в) $D: \{|\operatorname{Im} z| < \pi\}$; г) $D: \left\{|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}\right\}$.

Відповіді: а) $\operatorname{Im} w > 0$; б) $\operatorname{Im} w < 0$; в) $w \notin (-\infty; 0]$; г) $\operatorname{Re} w > 0$.

16. Знайти образ півсмути $0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z < 0$ при відображенні $w = e^z$.

Відповідь: $|w| < 1, 0 < \arg w < \pi$.

17. Знайти образи областей D при вказаних відображеннях:

а) $D: \{0 < \operatorname{Im} z < \pi, 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$; $w = e^z$; б) $D: \left\{0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} z > 0\right\}$,

$w = e^{2z}$; в) $D: \{0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = e^{iz}$.

Відповіді: а) $1 < |w| < e, 0 < \arg w < \pi$; б) $|w| > 1, \operatorname{Im} w > 0$; в) $|w| < 1, \operatorname{Im} w > 0$.

18. Знайти функцію, що відображає на верхню півплощину область, обмежену колами $|z| = 2$ і $|z-3| = 1$.

Відповідь: $w = e^{\frac{\pi i}{3} \frac{z+3}{z-2}}$.

Самостійна робота

1. Для відображення $w = 3z + 4$ знайти образи ліній: а) $|z| = 4$; б) $y = x$.

2. Відшукати дробово-лінійну функцію $w(z)$, що задовольняє умови $w(0) = 4, w(1+i) = 2+2i, w(2i) = 0$. Знайти образ круга $|z-i| < 1$ при відображенні отриманою функцією.

3. Відшукати дробово-лінійну функцію $w(z)$, що задовольняє умови $w(i) = 0$, $w(\infty) = 1$, $w(-i) = \infty$. Знайти образ півплощини $\operatorname{Re} z > 0$ при відображенні отриманою функцією.

12. Інтегрування функцій комплексної змінної

Нехай функція комплексної змінної $w = f(z)$ визначена і неперервна в області D , а AB – деяка кусково-гладка крива, що належить D . Розіб'ємо криву AB точками $z_0 = A, z_1, \dots, z_n = B$ на n елементарних дуг і складемо суму $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k$, де $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$; ξ_k – довільна точка на дузі (z_{k-1}, z_k) (рис. 31).

Тоді інтеграл від функції $f(z)$ уздовж кривої AB визначається рівністю

$$\int_{AB} f(z) dz = \lim_{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k \quad (40)$$

за умови, що границя в правій частині (40) існує і не залежить ні від способу розбиття кривої AB на елементарні дуги, ні від вибору точок ξ_k .

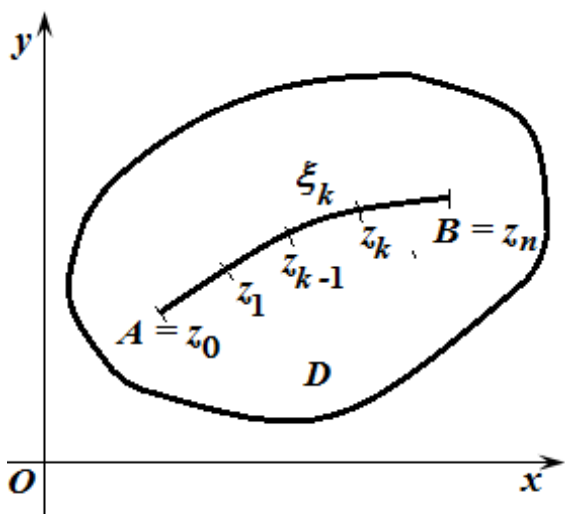


Рис.31

Якщо $z = x + iy$; $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то обчислення інтеграла функції комплексної змінної зводиться до обчислення криволінійних інтегралів другого роду:

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{AB} u dx - v dy + i \int_{AB} v dx + u dy. \quad (41)$$

Тим самим **властивості** дійсних криволінійних інтегралів переносяться

на комплексні інтеграли вздовж кривої AB :

1. При зміні напрямку руху вздовж лінії AB інтеграл змінює знак:

$$\int_{AB} f(z) dz = - \int_{BA} f(z) dz.$$

2.
$$\int_{AB} (af(z) + bg(z)) dz = a \int_{AB} f(z) dz + b \int_{AB} g(z) dz,$$

де a і b – будь-які комплексні числа (**лінійність** інтеграла).

3.
$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{AK} f(z) dz + \int_{KB} f(z) dz,$$

де K – проміжна точка кривої між точками A і B (**адитивність** інтеграла).

4. Якщо на кривій AB функція $f(z)$ обмежена і $|f(z)| \leq M = \text{const}$, то

$$\left| \int_{AB} f(z) dz \right| \leq Ms,$$

де s – довжина дуги AB (**оцінка інтеграла**).

У разі параметричного завдання кривої AB рівняннями $z(t) = x(t) + iy(t)$, з початковою і кінцевою точками дуги, що відповідають значенням параметра $t = \alpha$ і $t = \beta$, маємо

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt. \quad (42)$$

Зауваження. Інколи при інтегруванні функцій комплексної змінної вздовж дуги кола радіуса R з центром у точці $z = a$ зручно записувати рівняння цього кола у вигляді $|z - a| = R$; $z = a + Re^{i\varphi}$. Тоді $dz = iRe^{i\varphi} d\varphi$.

Первісною функції $f(z)$ називається функція $F(z)$, аналітична в області D і така, що рівність $F'(z) = f(z)$ виконується для усіх точок $z \in D$.

Якщо функція $w = f(z)$ аналітична в однозв'язній області D , то інтеграл не залежить від шляху інтегрування (тільки від початкової і кінцевої точок). Тоді для обчислення інтеграла використовують **формулу Ньютона-Лейбніца**

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1). \quad (43)$$

Таблиця первісних має такий самий вигляд, як і для функцій дійсної змінної.

Нехай функції $f(z)$ і $g(z)$ аналітичні в однозв'язній області D , а z_1 і z_2 – довільні точки цієї області, то має місце формула **інтегрування частинами**:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) g'(z) dz = f(z) g(z) \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} g(z) f'(z) dz.$$

Тоді, коли аналітична функція $z = g(w)$ взаємно-однозначно відображає криву L_1 , що лежить у площині (w) , на криву L у площині (z) , **заміна змінної** в інтегралах функцій комплексної змінної відбувається за формулою:

$$\int_L f(z) dz = \int_{L_1} f(g(w)) g'(w) dw.$$

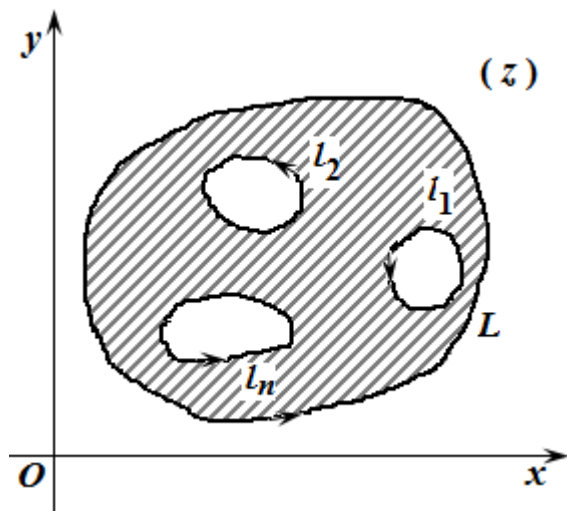
Якщо функція $w = f(z)$ аналітична в однозв'язній області D , обмеженій кусково-гладким контуром L , то інтеграл від $f(z)$ по будь-якому замкненому контуру l , що лежить в області D , дорівнює нулю

$$\oint_l f(z) dz = 0 \quad (\text{інтегральна теорема Коші}). \quad (44)$$

Якщо, додатково, функція $f(z)$ неперервна в замкнутій області \bar{D} , то

$$\oint_L f(z) dz = 0.$$

Теорема Коші (для багатозв'язної області). Нехай функція $f(z)$ аналітична в багатозв'язній області D і на її межі, тоді інтеграл від $f(z)$ по зовнішньому контуру дорівнює сумі інтегралів по всіх внутрішніх контурах з тим же напрямком обходу (рис.32).



$$\int_L f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{l_k} f(z) dz. \quad (45)$$

Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D , то для довільної точки $z_0 \in D$ і будь-якого замкненого контура l , що охоплює точку z_0 і цілком належить D , справедлива формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Рис.32

$$(\text{інтегральна формула Коші}). \quad (46)$$

При цьому функція $f(z)$ має всюди в D похідні будь-якого порядку, для яких справедливі формули

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, \dots \quad (47)$$

Формули (46) і (47) мають місце і тоді, коли D – багатозв'язна область.

Приклад 1. Використовуючи визначення інтеграла від функції комплексної змінної обчислити $\int_l z dz$, де l – радіус-вектор точки $3 - i$.

Розв'язок. Для складання інтегральної суми розіб'ємо радіус-вектор точки $3 - i$ на n рівних частин точками

$$z_k = \frac{k(3-i)}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

величина $\Delta z_k = \frac{3-i}{n}$. В якості довільної точки ξ_k на кожній елементарній k -й

ділянці візьмемо точку $\xi_k = z_k$. Утворимо інтегральну суму

$$\sum_{k=1}^n z_k \Delta z_k = \sum_{k=1}^n \frac{k(3-i)}{n} \cdot \frac{(3-i)}{n} = \frac{(3-i)^2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k = \frac{(3-i)^2}{n^2} \cdot \frac{(1+n)n}{2}.$$

Отже,

$$\int_l z dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-i)^2}{n^2} \cdot \frac{(1+n)n}{2} = \frac{(3-i)^2}{2}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_l (2-i-\bar{z}) dz$ уздовж ліній, що

з'єднують точки $z_1 = 0; z_2 = 1+i$:

а) уздовж прямої; б) уздовж параболи $y = x^2$; в) уздовж ламаної $z_1 z_3 z_2$, де $z_3 = 1$.

Розв'язок. Нехай $z = x + iy$; $f(z) = u + iv$. Перепишемо підінтегральну функцію $f(z) = 2 - i - \bar{z}$ у вигляді $f(z) = 2 - x - i(1 - y)$.

Тому $u = 2 - x$; $v = -(1 - y)$. Застосувавши формулу (41), маємо

$$\int_l (2 - i - \bar{z}) dz = \int_l (2 - x) dx + (1 - y) dy + i \int_l -(1 - y) dx + (2 - x) dy.$$

а). Рівняння прямої, що проходить через точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 1+i$ це $y = x$; $0 \leq x \leq 1$. Отже, $dy = dx$. Тому

$$\int_l (2 - i - \bar{z}) dz = \int_0^1 ((2 - x) + (1 - x)) dx + i \int_0^1 (-(1 - x) + (2 - x)) dx = 2 + i;$$

б). Для параболи $y = x^2$ маємо $dy = 2x dx$ ($0 \leq x \leq 1$). Тому

$$\int_l (2 - i - \bar{z}) dz = \int_0^1 ((2 - x) + (1 - x^2)2x) dx + i \int_0^1 (-(1 - x^2) + (2 - x)2x) dx = 2 + i2/3;$$

в). На відрізку $z_1 z_3$ $y = 0$; $dy = 0$; $0 \leq x \leq 1$. На відрізку $z_3 z_2$ $x = 1$; $dx = 0$; $0 \leq y \leq 1$. Тому

$$\int_l (2 - i - \bar{z}) dz = \int_{z_1 z_3} (2 - i - \bar{z}) dz + \int_{z_3 z_2} (2 - i - \bar{z}) dz = \int_0^1 (2 - x) dx + i \int_0^1 (-dx) +$$

$$+\int_0^1 (1-y)dy + i\int_0^1 dy = 2.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_L e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz$, де L – пряма $y = -x$, що з'єднує точки $z_1 = 0$; $z_2 = -1 + i$.

Розв'язок. Параметричне рівняння лінії L : $x = t$; $y = -t$ або в комплексній формі $z = t - it$, де t змінюється від 0 до -1 . Застосуємо формулу (42):

$$\int_L e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz = \int_0^{-1} e^{2t^2} t(1-i) dt = \frac{1}{4}(1-i)e^{2t^2} \Big|_0^{-1} = \frac{1}{4}(1-i)(e^2 - 1).$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int_L \bar{z} \operatorname{Re} z dz$, якщо L : $z = (2+i)t$ ($0 \leq t \leq 1$).

Розв'язок. Оскільки $z = (2+i)t$, то $\bar{z} = (2-i)t$, $\operatorname{Re} z = 2t$, $dz = (2+i)dt$. Тоді інтеграл запишеться

$$\int_L \bar{z} \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 (2-i)t \cdot 2t \cdot (2+i) dt = 2(4-i^2) \int_0^1 t^2 dt = 10 \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{10}{3}.$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int_L \bar{z} dz$, де L – верхня частина еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ з обходом проти годинникової стрілки.

Розв'язок. Перейдемо до параметричного рівняння еліпса $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$ або $z = 3 \cos t + i2 \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$. Отримаємо

$$\begin{aligned} \int_L \bar{z} dz &= \int_0^{\pi} (3 \cos t - i2 \sin t)(-3 \sin t + i2 \cos t) dt = \\ &= \int_0^{\pi} (-5 \sin t \cos t + 6i) dt = \left(-5 \frac{\sin^2 t}{2} + 6it \right) \Big|_0^{\pi} = 6\pi i \end{aligned}$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int_L z \bar{z} dz$, де L – півкола $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$.

Розв'язок. Нехай $z = e^{i\varphi}$, де $\varphi = \arg z$ – вважається параметром. Тоді $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$, а інтеграл запишеться

$$\int_L z \bar{z} dz = \int_0^\pi e^{i\varphi} e^{-i\varphi} i e^{i\varphi} d\varphi = \int_0^\pi i e^{i\varphi} d\varphi = e^{i\varphi} \Big|_0^\pi = e^{i\pi} - e^0 = \cos \pi + i \sin \pi - 1 = -2.$$

Приклад 7. Знайти $\oint_L (z-a)^n dz$, де L – коло радіуса R з центром в точці a з обходом контура проти годинникової стрілки.

Розв’язок. Параметричне рівняння кола має вигляд $z = a + R e^{i\varphi}$, де $\varphi = \arg(z-a)$. Враховуючи, що $-\pi < \varphi \leq \pi$, отримаємо

$$I = \oint_L (z-a)^n dz = \int_{-\pi}^\pi (R e^{i\varphi})^n R i e^{i\varphi} d\varphi = i R^{n+1} \int_{-\pi}^\pi e^{i(n+1)\varphi} d\varphi.$$

Якщо $n \neq -1$ маємо

$$\begin{aligned} I &= i R^{n+1} \int_{-\pi}^\pi \cos((n+1)\varphi) d\varphi - R^{n+1} \int_{-\pi}^\pi \sin((n+1)\varphi) d\varphi = \\ &= R^{n+1} \left(i \frac{\sin((n+1)\varphi)}{n+1} + \frac{\cos((n+1)\varphi)}{n+1} \right) \Big|_{-\pi}^\pi = 0. \end{aligned}$$

$$\text{При } n = -1 \quad I = i \int_{-\pi}^\pi d\varphi = 2\pi i.$$

Таким чином

$$\oint_L (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{при } n = -1. \end{cases}$$

Приклад 8. Обчислити інтеграл $\int_{-2}^{-2+i} (z+2)^2 dz$.

Розв’язок. Оскільки підінтегральна функція $f(z) = (z+2)^2$ аналітична на всій комплексній площині (z), то шуканий інтеграл не залежить від шляху інтегрування і його можна обчислити як визначений за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_{-2}^{-2+i} (z+2)^2 dz = \frac{(z+2)^3}{3} \Big|_{-2}^{-2+i} = \frac{i^3}{3} = -\frac{i}{3}.$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл $\int_0^i z \sin z dz$.

Розв’язок. Функції $f(z) = z$ і $g(z) = \sin z$ аналітичні на всій комплексній площині. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, отримуємо

$$\int_0^i z \sin z dz = \left\{ \begin{array}{l} u = z, \\ dv = \sin z dz \end{array} \right\} = -z \cos z \Big|_0^i + \int_0^i \cos z dz = -i \cos i + \sin z \Big|_0^i =$$

$$= -i \cos i + \sin i = -i \frac{e^{ii} + e^{-ii}}{2} - i \frac{e^{ii} - e^{-ii}}{2} = -e^{-1} i.$$

Приклад 10. Чи має функція $f(z) = \bar{z}$ первісну?

Розв'язок. Розглянемо функцію $f(z) = \bar{z} = x - iy$. Дійсна і уявна її частини $u = x$ і $v = -y$ є функціями гармонійними, але не задовольняють умови Коші-Рімана. Таким чином функція $f(z) = \bar{z}$ не є аналітичною і не має похідної в жодній точці площини (z) , а це означає, що вона не має первісну, бо тільки диференційовна в однозв'язній області функція має в цій області первісну.

Приклад 11. Обчислити інтеграл $\int_L \frac{dz}{\sqrt{z}}$, де L – частина верхньої дуги кола $|z| = 1$ $\left(0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\right)$. Для \sqrt{z} береться та вітка, для якої $\sqrt{1} = -1$.

Розв'язок. Функція $w = \sqrt{z}$ є многозначною функцією, бо корінь квадратний з комплексного числа знаходиться за формулою

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{2} \right) \quad (k = 0, 1).$$

Таким чином, функція \sqrt{z} має два значення:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{та}$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right) = \sqrt{|z|} \left(-\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} \right) = -\sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right).$$

Точки z є точками кола $|z| = 1$, тоді

$$\sqrt{z} = \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}$$

та

$$\sqrt{z} = -\left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right).$$

Інтеграл від многозначної функції обчислюється після вибору однієї з віток функції. В прикладі, що розглядається, з двох отриманих віток функції

обираємо ту, яка відповідає умові задачі $\sqrt{1} = -1$. Для $z = 1$ аргумент $\varphi = \arg 1 = 0$. Скориставшись віткою $\sqrt{z} = -\left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}\right)$, маємо $\sqrt{1} = -(\cos 0 + i \sin 0) = -1$.

Для обчислення інтеграла застосуємо формулу Ньютона-Лейбніца

$$\int_L \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} \Big|_1^0 = -2\sqrt{1}.$$

Враховуючи, що $\sqrt{1} = -1$ остаточно маємо $\int_L \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2$.

Приклад 12. Обчислити інтеграл $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2 + 9} dz$.

Розв'язок. Підінтегральна функція аналітична у крузі $|z| < 2$ і на границі $|z| = 2$. Тому за теоремою Коші $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2 + 9} dz = 0$.

Приклад 13. Обчислити інтеграл $\int_{|z|=4} \frac{\sin \frac{i\pi z}{2}}{z - 3i} dz$.

Розв'язок. Знаменник підінтегральної функції перетворюється на нуль в точці $z_0 = 3i$, яка знаходиться всередині круга, обмеженого колом $|z| = 4$ з центром в початку координат. Функція $f(z) = \sin \frac{i\pi z}{2}$ аналітична в цій області.

Застосувавши інтегральну формулу Коші, маємо

$$\int_{|z|=4} \frac{\sin \frac{i\pi z}{2}}{z - 3i} dz = 2\pi i f(3i) = 2\pi i \sin \frac{i\pi z}{2} \Big|_{z=3i} = 2\pi i \sin \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 2\pi i.$$

Приклад 14. Обчислити інтеграл $\int_{|z|=3} \frac{\sin z \sin(z-2)}{z^2 - 2z} dz$ за допомогою

інтегральної формули Коші.

Розв'язок. В області, обмеженій колом $|z| = 3$ знаходяться дві точки $z = 0$ і $z = 2$, в яких знаменник підінтегральної функції перетворюється на нуль. Безпосередньо інтегральну формулу Коші використовувати не можна.

Побудуємо два кола l_1 і l_2 з центрами в точках $z=0$, $z=2$ достатньо малих радіусів, таких, щоб кола не перетинались і цілком належали кругу $|z| \leq 3$. Тоді підінтегральна функція аналітична в замкненій області, обмеженій колами $|z|=3$, l_1 і l_2 , і за теоремою Коші для багатозв'язної області

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin z \sin(z-2)}{z^2 - 2z} dz = \int_{l_1} \frac{\sin z \sin(z-2)}{z^2 - 2z} dz + \int_{l_2} \frac{\sin z \sin(z-2)}{z^2 - 2z} dz.$$

До кожного інтеграла в правій частині застосуємо інтегральну теорему Коші

$$\begin{aligned} \int_{|z|=3} \frac{\sin z \sin(z-2)}{z(z-2)} dz &= \int_{l_1} \frac{\sin z \sin(z-2)}{z-2} dz + \int_{l_2} \frac{\sin z \sin(z-2)}{z} dz = \\ &= 2\pi i \frac{\sin z \sin(z-2)}{z-2} \Big|_{z=0} + 2\pi i \frac{\sin z \sin(z-2)}{z-2} \Big|_{z=2} = 0. \end{aligned}$$

Приклад 15. Обчислити інтеграл $\int_L \frac{e^{z^2}}{z^3 - 3z^2} dz$, де L – коло

а) $|z-1|=1,5$; б) $|z-1|=5$.

Розв'язок: а) усередині області, обмеженої колом радіуса 1,5 з центром у точці 1, міститься одна точка $z_0=0$, в якій знаменник підінтегральної функції обертається на нуль. Перепишемо інтеграл у вигляді

$$\int_L \frac{e^{z^2}}{z^3 - 3z^2} dz = \int_{|z-1|=1,5} \frac{e^{z^2}}{z^2} dz.$$

Функція $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-3}$ аналітична всередині кола L . Тому за формулою (47) ($z_0=0$) одержимо

$$\int_{|z-1|=1,5} \frac{e^{z^2}}{z^3 - 3z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(0) = 2\pi i \frac{e^{z^2} 2z(z-3) - e^{z^2}}{(z-3)^2} \Big|_{z=0} = -\frac{2\pi i}{9};$$

б) знаменник дробу $z^2(z-3)$ обертається на нуль у двох точках $z_0=0$ і $z_1=3$, що всередині кола $|z-1|=5$.

Побудуємо кола l_1 і l_2 досить малих радіусів з центрами у точках $z_0=0$ і $z_1=3$, які не перетинаються між собою і повністю лежать у крузі $|z-1| \leq 5$ (рис. 17).

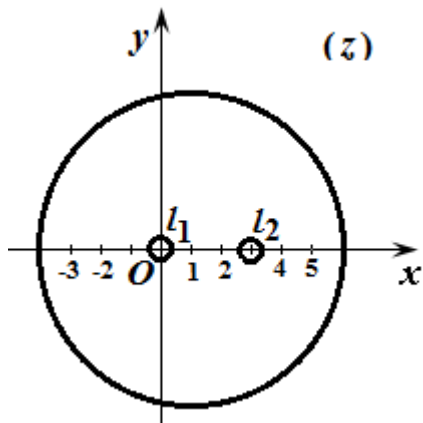


Рис.33

У тризв'язній області, обмеженій колами $|z-1|=5$, l_1 і l_2 , підінтегральна функція скрізь аналітична. За теоремою Коші для багатозв'язних областей

$$\int_{|z-1|=5} \frac{e^{z^2}}{z^3 - 3z^2} dz = \int_{l_1} \frac{e^{z^2}}{z^3 - 3z^2} dz + \int_{l_2} \frac{e^{z^2}}{z^3 - 3z^2} dz. \quad (48)$$

Оскільки функція $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-3}$ аналітична всередині кола l_1 , то перший інтеграл правої частини (48) обчислюється за формулою (47):

$$\int_{l_1} \frac{e^{z^2}}{z^3 - 3z^2} dz = \int_{l_1} \frac{e^{z^2}}{z^2(z-3)} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(0) = -\frac{2\pi i}{9}.$$

Другий інтеграл у правій частині (48) обчислюється за інтегральною формулою Коші. Функція $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2}$ аналітична всередині кола l_2 , тому

$$\int_{l_2} \frac{e^{z^2}}{z^3 - 3z^2} dz = \int_{l_2} \frac{e^{z^2}}{z^2(z-3)} dz = 2\pi i f(3) = 2\pi i \frac{e^9}{9}.$$

Отже, остаточно одержимо:

$$\int_{|z-1|=5} \frac{e^{z^2}}{z^3 - 3z^2} dz = -\frac{2\pi i}{9} + 2\pi i \frac{e^9}{9} = \frac{2\pi i}{9} (e^9 - 1).$$

Приклад 16. Обчислити інтеграл $\int_{|z|=4} \frac{e^z}{z^3 + z} dz$.

Розв'язок. В області обмеженій колом $|z|=4$ містяться три точки, в яких знаменник підінтегральної функції перетворюється на нуль $z=0$, $z=i$ та $z=-i$. Оскільки безпосередньо використати інтегральну формулу Коші не можна, то розглянемо два способи перетворення підінтегральної функції.

Спосіб 1. Розкладемо дріб $\frac{1}{z(z^2 + 1)}$ на суму найпростіших дробів.

Маємо

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z(z-i)(z+i)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{z+i}.$$

$$1 = A(z-i)(z+i) + Bz(z+i) + Cz(z-i).$$

Складемо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів, підставивши в отриманий вираз замість z корені знаменника:

$$\begin{array}{l|l} z=0 & 1=A, \\ z=i & 1=-2B, \quad A=1, \quad B=-\frac{1}{2}, \quad C=-\frac{1}{2}. \\ z=-i & 1=-2C. \end{array}$$

Тоді
$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-i} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+i}.$$

Використовуючи лінійність інтеграла, отримаємо

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz = \int_{|z|=4} \frac{e^z}{z} dz - \frac{1}{2} \int_{|z|=4} \frac{e^z}{z-i} dz - \frac{1}{2} \int_{|z|=4} \frac{e^z}{z+i} dz.$$

Застосувавши інтегральну формулу Коші до кожного інтеграла правої частини виразу, маємо

$$\begin{aligned} \int_{|z|=4} \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz &= 2\pi i e^z \Big|_{z=0} - \frac{2\pi i}{2} e^z \Big|_{z=i} - \frac{2\pi i}{2} e^z \Big|_{z=-i} = \\ &= 2\pi i - 2\pi i \left(\frac{e^i + e^{-i}}{2} \right) = 2\pi i (1 - \cos 1). \end{aligned}$$

Спосіб 2. В крузі $|z| \leq 4$ побудуємо три кола l_1, l_2, l_3 з центрами в точках $z=0, z=i, z=-i$ так, щоб вони не перетиналися між собою і з колом $|z|=4$.

В отриманій багатозв'язній області, обмеженій колом $|z|=4$ і внутрішніми контурами l_1, l_2, l_3 підінтегральна функція $f(z) = \frac{e^z}{z(z^2+1)}$ аналітична. Тоді, застосовуючи теорему Коші для багатозв'язної області і інтегральну формулу Коші, одержимо

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz = \int_{l_1} \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz + \int_{l_2} \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz + \int_{l_3} \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{l_1} \frac{e^z}{z^2+1} dz + \int_{l_2} \frac{e^z}{z(z+i)} dz + \int_{l_3} \frac{e^z}{z(z-i)} dz = \\
&= 2\pi i \frac{e^z}{z^2+1} \Big|_{z=0} + 2\pi i \frac{e^z}{z(z+i)} \Big|_{z=i} + 2\pi i \frac{e^z}{z(z-i)} \Big|_{z=-i} = \\
&= 2\pi i \left(1 + \frac{e^i}{-2} + \frac{e^{-i}}{-2} \right) = 2\pi i \left(1 - \frac{e^i + e^{-i}}{2} \right) = 2\pi i (1 - \cos 1).
\end{aligned}$$

Вправи до розділу

1. Користуючись визначенням обчислити інтеграл $\int_l \operatorname{Im} z dz$, де l – радіус-вектор точки $1+i$.

Обчислити інтеграли:

2. $\int_L |z| dz$ уздовж а) прямої, яка з'єднує точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 2-i$; б) півкола

$$|z|=1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}.$$

3. $\int_L \operatorname{Re} z dz$, якщо $z = (2+i)t$ ($0 \leq t \leq 1$).

4. $\int_L (z\bar{z} + z^2) dz$, де L – дуга кола $|z|=1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$.

5. $\int_0^{\pi+i} \sin z dz.$

6. $\int_{-i}^i z e^{z^2} dz.$

7. $\int_0^i z \cos z dz.$

8. $\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z^2+z} dz.$

9. $\int_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2-6z} dz.$

10. $\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)} dz.$

11. $\int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz.$

12. $\int_L \frac{e^{z\pi}}{(z^2+1)^2} dz$, де L – еліпс

$$9x^2 + y^2 - 2y = 0.$$

13. $\int_L \operatorname{Ln} z dz$, де L – коло $|z|=1$, а обхід контура починається з точки $z_0=1$.

14. $\int_{|z|=3} \frac{1}{(z^2+4)(z+4)} dz$.

Відповіді: 1. $\frac{1+i}{2}$; 2. а) $\sqrt{5}(1-i/2)$; б) $2i$; 3. $2+i$; 4. $-\frac{8}{3}$; 5. $\operatorname{ch}1+1$; 6. 0;
7. $\frac{1}{e}-1$; 8. 0; 9. $-\frac{\pi i}{3}$; 10. $-\frac{\pi i}{2e}$; 11. $-\frac{\pi}{\operatorname{ch}1}$; 12. $\frac{\pi(\pi i-1)}{2}$; 13. $2\pi i$; 14. $-\frac{\pi i}{10}$.

Самостійна робота

Обчислити інтеграли:

1. $\int_L (x^2 - y + ix) dz$ уздовж а) прямої, що з'єднує точки $z_1=0$ і $z_2=1+i$;

б) ламаної $z_1 z_3 z_2$, якщо $z_3=i$.

2. $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$.

3. $\int_{|z-1|=1} \frac{1}{z^2+9} dz$.

4. $\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{tg} z}{ze^{z+3}} dz$.

5. $\int_{|z+i|=2} \frac{ze^z}{(z+i)^3} dz$.

13. Функціональні ряди

Нехай в області D визначена нескінченна послідовність функцій $\{f_n(z)\}$ ($n \in N$) комплексної змінної.

Функціональним рядом називається вираз вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z). \quad (49)$$

Функціональний ряд (49) називається **збіжним** в області D , якщо для довільного $z \in D$ відповідний числовий ряд збігається.

Множина значень $z \in D$, за якими ряд (49) збігається, називається **областю збіжності** функціонального ряду. **Частинна сума** ряду

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z), \quad \text{сума ряду} \quad S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z), \quad \text{залишок ряду}$$

$R_n(z) = S(z) - S_n(z)$ є функціями z .

Існування в довільній точці z з області збіжності ряду D $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z)$ означає, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна підібрати

залежний від ε і z номер $N = N(\varepsilon, z)$ такий, що для всіх $n > N$ буде виконуватися нерівність

$$|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon. \quad (50)$$

Функціональний ряд (49) називається *рівномірно збіжним* в області D , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться незалежний від z номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що при $n > N$ нерівність (50) має місце для всіх точок z області D одночасно.

Критерій Коші. Для того, щоб функціональний ряд (38) рівномірно збігався в області D , необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існувало $N = N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ одночасно в усіх точках області виконувалась нерівність

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(z) \right| < \varepsilon, \quad m = 1, 2, \dots$$

Ознака Вейерштрасса. Якщо для всіх точок $z \in D$ ряд (38) мажорується збіжним знакододатним числовим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, тобто $|f_n(z)| \leq a_n$, $n = 1, 2, \dots$, то ряд (49) в області D збігається абсолютно і рівномірно.

Ознака Вейерштрасса є достатньою ознакою рівномірної збіжності ряду.

Властивості рівномірно збіжних рядів.

1. Якщо функції $f_n(z)$ неперервні в області D , а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ збігається в цій області рівномірно до функції $S(z)$, то функція $S(z)$ також є неперервною в області D .

2. Якщо ряд неперервних функцій $f_n(z)$ збігається рівномірно в області D до функції $S(z)$, то інтеграл від цієї функції уздовж будь-якої кусково-гладкої кривої L , яка повністю лежить в області D , можна обчислити шляхом почленного інтегрування ряду, тобто

$$\int_L S(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L f_n(z) dz.$$

3. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ збігається рівномірно в області D до функції $S(z)$, а функція $g(z)$ обмежена в області D , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g(z) f_n(z)$ збігається рівномірно в області D до функції $g(z)S(z)$.

Наведемо теореми, що стосуються рівномірно збіжних рядів аналітичних функцій.

Теорема 1 (перша теорема Вейєрштрасса). Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ є функціями аналітичними в однозв'язній області D і ряд збігається в D рівномірно, то його сума $S(z)$ також є функцією, аналітичною в D .

Теорема 2 (друга теорема Вейєрштрасса). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, члени якого є аналітичними в однозв'язній області D і неперервними в \bar{D} функціями і який збігається в \bar{D} рівномірно, можна почленно диференціювати в D довільне число разів

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^3}$ і показати, що в цій області ряд збігається рівномірно.

Розв'язок. Скористаємося ознакою Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{(n+1)z} n^3}{(n+1)^3 e^{nz}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^x n^3}{(n+1)^3} = e^x < 1.$$

Тобто, при $x = \operatorname{Re} z < 0$ ряд збігається. В точках межі області $x = 0$ отримуємо збіжний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{nz}}{n^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Це означає, що вихідний ряд збігається для $\operatorname{Re} z \leq 0$. Але оскільки для всіх $\operatorname{Re} z \leq 0$

$$|f_n(z)| = \frac{|e^{nz}|}{n^3} = \frac{e^{nx}}{n^3} \leq \frac{1}{n^3},$$

то ряд збігається абсолютно і рівномірно.

13.1. Степеневі ряди

Степеневий ряд є функціональним рядом виду

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (51)$$

де c_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) – задані комплексні числа, а z – комплексна змінна.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (51) збігається в точці $z = z_1 \neq 0$, то він абсолютно збігається для всіх z таких, що $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, причому збіжність буде рівномірною в будь-якому замкненому крузі $|z - z_0| \leq r < |z_1 - z_0|$. Якщо ж ряд (51) розбігається в точці $z = z_2$, то він розбігається і для всіх z таких, що $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.

Область збіжності ряду (39) – це круг $|z - z_0| < R$ радіуса R з центром в точці z_0 .

Властивості степеневих рядів

1. Сума степеневого ряду (51) в крузі збіжності $|z - z_0| < R$ є функцією аналітичною.

2. Якщо степеневі ряди $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ і $S^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ збігаються відповідно в кругах $|z - z_0| < R_1$ і $|z - z_0| < R_2$, то всередині спільного круга збіжності $|z - z_0| < r$, де $r = \min(R_1, R_2)$ справедливі операції додавання і множення

$\alpha S(z) + \beta S^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(z - z_0)^n$ (α, β – довільні комплексні числа),

$$S(z)S^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n,$$

де $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0$. (52)

3. Степеневий ряд (51) в крузі збіжності $|z - z_0| < R$ можна почленно диференціювати будь-яку кількість разів, причому продиференційовані ряди мають той самий круг збіжності $|z - z_0| < R$:

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} (z - z_0)^{n-k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

4. Степеневий ряд (51) можна почленно інтегрувати по будь-якій кривій, що лежить в крузі збіжності, причому отриманий в результаті інтегрування ряд має той же круг збіжності.

$$\int_{z_0}^z S(u) du = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{z_0}^z c_n (u - z_0)^n du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}.$$

Радіус збіжності степеневого ряду (51) знаходять за однією з формул:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad \text{або} \quad (53)$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}, \quad (54)$$

якщо ці границі існують.

Приклад 1. Знайти області збіжності і області рівномірної збіжності рядів: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{n^2 3^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n^3 \ln n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{n^n}$.

Розв'язок: а) для визначення радіуса збіжності застосуємо формулу (53).

Оскільки $c_n = \frac{1}{n^2 3^n}$, $c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 3^{n+1}}$, то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2 3^{n+1}}{n^2 3^n} \right| = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = 3.$$

Таким чином ряд збігається в крузі $|z-2| < 3$. На межі круга, тобто при $|z-2| = 3$, маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(z-2)^n}{n^2 3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

який збігається. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{n^2 3^n}$ збігається в замкнутому крузі $|z-2| \leq 3$, а в будь-якому замкнутому крузі $|z-2| \leq r < 3$ він збігається рівномірно;

б) при визначенні радіуса збіжності ряду за формулою (53) для розкриття невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$ скористаємося правилом Лопіталя:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 \ln(n+1)}{n^3 \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Отже, ряд збігається в крузі $|z| < 1$. В точках межі, на колі $|z| = 1$, маємо

числовий ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 \ln n}$. Цей ряд збігається за ознакою порівняння зі збіжним

рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, оскільки $\frac{1}{n^3 \ln n} < \frac{1}{n^3}$. Таким чином, ряд збігається при $|z| \leq 1$, причому збіжність в замкнутому крузі $|z| \leq r < 1$ рівномірна;

в) в цьому випадку, оскільки $c_n = \frac{1}{n^n}$, для визначення радіуса збіжності зручніше застосувати формулу (54):

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

Тобто, ряд збігається абсолютно на всій комплексній площині і рівномірно – в будь-якій обмеженій області.

Приклад 2. Знайти радіуси і круги збіжності степеневих рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} i^n z^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n} (z-3)^n$.

Розв'язок: а) для визначення R зручно скористатися формулою (53).
Маємо

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{i^n}{i^{n+1}} \right| = 1.$$

Таким чином, кругом збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} i^n z^n$ буде круг $|z| < 1$.

б) оскільки $c_n = \frac{1}{n!}$, то $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$, тобто ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$ збігається на всій комплексній площині;

в) за формулою (53)

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! 2^{n+1}}{2^n (n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! 2^n \cdot 2}{2^n (n+1)! (n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+2} = 0.$$

В цьому випадку ряд збігається в єдиній точці $z=3$. Це означає, що круг збіжності вироджується в точку.

Приклад 3. Визначити радіуси збіжності степеневих рядів:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} (2+i)^n z^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n \frac{\pi i}{\sqrt{n}} z^n$.

Розв'язок: а) знайдемо модуль коефіцієнта $c_n = (2+i)^n$:

$$|c_n| = |(2+i)^n| = (\sqrt{4+1})^n = (\sqrt{5})^n = 5^{\frac{n}{2}}.$$

Застосувавши формулу (54), визначимо радіус збіжності даного степеневому ряду:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

б) оскільки $\cos \frac{\pi i}{\sqrt{n}} = \frac{e^{-\frac{\pi}{\sqrt{n}}} + e^{\frac{\pi}{\sqrt{n}}}}{2}$, то за формулою (54) маємо:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left| \cos^n \frac{\pi i}{\sqrt{n}} \right|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{e^{-\frac{\pi}{\sqrt{n}}} + e^{\frac{\pi}{\sqrt{n}}}}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{e^{-\frac{\pi}{\sqrt{n}}} + e^{\frac{\pi}{\sqrt{n}}}} = 1.$$

Вправи до розділу

1. Знайти радіус збіжності наступних степеневих рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\ln in} \right)^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sin^n(1+in)}$

Відповіді: а) $R = 2$; б) $R = \sqrt{2}$; в) $R = \infty$; г) $R = \infty$; д) $R = \infty$.

2. Знайти круг збіжності степеневих рядів:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n^2(4+3i)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} i^n z^n$;
 г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+i}{1+ni} \right)^n (z+i)^n$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n (z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{n^2+i}$.

Відповіді: а) $|z| < 1$; б) $|z+1| < 5$; в) $|z| < 1$; г) $|z+i| < \frac{1}{3}$;

д) $|z+i| < \frac{1}{\sqrt{2}}$; е) $|z+2| < 1$.

13.2. Ряд Тейлора

Нехай функція $f(z)$ однозначна і аналітична в точці $z = z_0$, тоді вона може бути розвинена в околі цієї точки на степеневий **ряд Тейлора**:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (55)$$

де коефіцієнти c_n визначаються за формулами:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (56)$$

Тут L – коло з центром у точці z_0 , яке повністю лежить в околі точки z_0 , де аналітична функція $f(z)$.

Радіус збіжності ряду Тейлора визначається як відстань від центру z_0 до найближчої до нього особливої точки z^* функції $f(z)$: $R = |z^* - z_0|$.

Ряд Тейлора з центром в точці $z_0 = 0$ називається **рядом Маклорена**.

Розкладання основних елементарних функцій у ряд Тейлора в околі точки $z_0 = 0$ має вигляд:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (R = \infty); \quad (57)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (R = \infty); \quad (58)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (R = \infty); \quad (59)$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (R = \infty); \quad (60)$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (R = \infty); \quad (61)$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad (R=1); \quad (62)$$

$$\begin{aligned} (1+z)^\alpha &= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \quad (R=1); \quad (63) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (R=1). \quad (64)$$

Зауваження. Формула (61) дає розвинення в ряд Маклорена головного значення логарифмічної функції. Для того, щоб отримати розвинення для інших значень багатозначної функції $\operatorname{Ln}(1+z)$, з урахуванням формули (20) до ряду необхідно додавати $2k\pi i$ ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\operatorname{Ln}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 4. Розкласти функцію $f(z) = \operatorname{ch} 5z$ в ряд Маклорена, користуючись безпосередньо формулами (55), (56).

Розв'язок. а) визначимо функцію $f(z) = \operatorname{ch} 5z$ і її похідні в точці $z_0 = 0$:

$$\begin{array}{ll} f(z) = \operatorname{ch} 5z, & f(0) = \operatorname{ch} 0 = 1; \\ f'(z) = 5 \operatorname{sh} 5z, & f'(0) = 5 \operatorname{sh} 0 = 0; \\ f''(z) = 5^2 \operatorname{ch} 5z, & f''(0) = 5^2 \operatorname{ch} 0 = 5^2; \\ f'''(z) = 5^3 \operatorname{sh} 5z, & f'''(0) = 5^3 \operatorname{sh} 0 = 0; \\ f^{IV}(z) = 5^4 \operatorname{ch} 5z, & f^{IV}(0) = 5^4 \operatorname{ch} 0 = 5^4; \\ f^V(z) = 5^5 \operatorname{sh} 5z, & f^V(0) = 5^5 \operatorname{sh} 0 = 0; \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

Шукане розвинення має вигляд:

$$\operatorname{ch} 5z = 1 + \frac{5^2}{2!} z^2 + \frac{5^4}{4!} z^4 + \dots + \frac{5^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

Оскільки функція $\operatorname{ch} 5z = \frac{e^{5z} + e^{-5z}}{2}$ є аналітичною на всій комплексній площині, то отриманий ряд Маклорена збігається до неї на всій площині.

Слід зазначити, що для визначення коефіцієнтів розвинення не обов'язково використовувати безпосередньо формули (56). Іноді для розвинення функції в ряд доцільно використання відомих розвинень елементарних функцій (57–64) і застосування різних штучних методів, таких як розкладання раціонального дробу на найпростіші дроби, диференціювання або інтегрування відомих розвинень та інше.

Приклад 5. Розвинути у ряд за степенями $(z+2)$ функцію

$$f(z) = \frac{1}{3z+1}.$$

Розв'язок. *І спосіб.* Знайдемо коефіцієнти ряду (55) за формулами (56) ($z_0 = -2$):

$$\begin{array}{ll} f(z) = \frac{1}{3z+1}, & c_0 = f(-2) = -\frac{1}{5}; \\ f'(z) = -\frac{3}{(3z+1)^2}, & c_1 = \frac{f'(0)}{1!} = -\frac{3}{5^2}; \end{array}$$

$$\begin{aligned}
f''(z) &= \frac{3^2 \cdot 2}{(3z+1)^3}, & c_2 &= \frac{f''(0)}{2!} = -\frac{3^2}{5^3}; \\
f'''(z) &= -\frac{3^3 \cdot 2 \cdot 3}{(3z+1)^4}, & c_3 &= \frac{f'''(0)}{3!} = -\frac{3^3}{5^4}; \\
\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \\
f^{(n)}(z) &= (-1)^n \frac{3^n \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{(3z+1)^{n+1}} & c_n &= \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{3^n}{5^{n+1}}
\end{aligned}$$

Підставимо коефіцієнти розкладу в формулу (55):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3z+1} &= -\frac{1}{5} - \frac{3}{5^2}(z+2) - \frac{3^2}{5^3}(z+2)^2 - \frac{3^3}{5^4}(z+2)^3 - \dots - \frac{3^n}{5^{n+1}}(z+2)^n - \dots = \\
z &= -\frac{1}{5} \left(1 + \frac{3}{5}(z+2) + \frac{3^2}{5^2}(z+2)^2 + \dots \right) = -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n (z+2)^n.
\end{aligned}$$

II спосіб. Перетворимо аргумент функції $f(z)$ так, щоб виділився з деяким коефіцієнтом вираз $(z+2)$:

$$f(z) = \frac{1}{3(z+2-2)+1} = \frac{1}{3(z+2)-5} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{5}(z+2)}.$$

Замінивши в розвиненні (63) z на $\frac{3(z+2)}{5}$, отримаємо:

$$\frac{1}{3z+1} = -\frac{1}{5} \left(1 + \frac{3}{5}(z+2) + \frac{3^2}{5^2}(z+2)^2 + \dots \right) = -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n (z+2)^n$$

Цей ряд збігається за умови $\left| -\frac{3}{5}(z+2) \right| < 1$, тобто $|z+2| < \frac{5}{3}$. Радіус збіжності ряду можна також знайти як відстань від точки $z_0 = -2$ до найближчої особливої точки функції $z^* = -\frac{1}{3}$: $R = \left| z^* - z_0 \right| = \frac{5}{3}$.

Приклад 6. Використовуючи розвинення основних елементарних функцій, розкласти в ряд за степенями $(z-z_0)$ функції: а) $f(z) = \sqrt[3]{27-z}$, $z_0 = 0$; б) $f(z) = \text{sh}^2 z$, $z_0 = 0$; в) $f(z) = \sin(z^2 + 2z)$, $z_0 = -1$;

Розв'язок. а) Перетворимо функцію

$$f(z) = \sqrt[3]{27-z} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{1 + \left(-\frac{z}{27} \right)}.$$

Оскільки $\sqrt[3]{27} = 3$, то розглядається вітка функції

$$f(z) = 3 \left(1 + \left(-\frac{z}{27} \right) \right)^{1/3},$$

яка в області $\left| -\frac{z}{27} \right| < 1$, або $|z| < 27$ є функцією однозначною.

Скористаємося розвиненням (63) для $(1+z)^{1/3}$. Замінивши z на $-\frac{z}{27}$, отримаємо:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{27-z} = 3 & \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{z}{27} \right) + \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - 1 \right)}{2!} \left(-\frac{z}{27} \right)^2 + \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right)}{3!} \left(-\frac{z}{27} \right)^3 + \dots + \right. \\ & \left. + \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \dots \left(\frac{1}{3} - n + 1 \right)}{n!} \left(-\frac{z}{27} \right)^n + \dots \right) = 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \dots \left(\frac{1}{3} - n + 1 \right)}{n! 27^n} z^n. \end{aligned}$$

Ряд збігається в крузі $|z| < 27$;

б) за відомою тригонометричною формулою (19) маємо:

$$\operatorname{sh}^2 z = \frac{\operatorname{ch} 2z - 1}{2}.$$

Розкладемо в ряд Маклорена функцію $\operatorname{ch} 2z$, змінюючи в розвиненні (61) z на $2z$:

$$\operatorname{ch} 2z = 1 + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} + \dots + \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}.$$

Розвинення (61) справедливо при будь-якому значенні $z \in C$, тому ряд Маклорена для $\operatorname{ch} 2z$ збігається також на всій комплексній площині.

Помножимо отриманий ряд на $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} \operatorname{ch} 2z = \frac{1}{2} + \frac{2z^2}{2!} + \frac{2^3 z^4}{4!} + \dots + \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}.$$

Тоді

$$f(z) = \operatorname{sh}^2 z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}.$$

Очевидно, що отримане розкладання в ряд функції $f(z) = \operatorname{sh}^2 z$ справедливо для всіх точок комплексної площини;

в) оскільки $\sin(z^2 + 2z) = \sin((z+1)^2 - 1) = \sin(z+1)^2 \cos 1 - \sin 1 \cos(z+1)^2$, то можна скористатися розвиненнями (58) і (59), змінюючи z на $(z-1)^2$:

$$\begin{aligned} \sin(z^2 + 2z) &= \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+1)^{4n+2}}{(2n+1)!} - \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+1)^{4n}}{(2n)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\cos 1}{(2n+1)!} (z+1)^{4n+2} - \frac{\sin 1}{(2n)!} (z+1)^{4n} \right). \end{aligned}$$

Ряд збігається на всій комплексній площині, тому що функція $f(z) = \sin(z^2 + 2z)$ не має особливих точок.

Приклад 6. Розвинути у ряд Тейлора в околі точки $z_0 = 0$ функцію

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2 - 4z + 3},$$

і знайти радіус збіжності ряду.

Розв'язок. Розкладемо задану функцію на елементарні дробі:

$$\frac{z+1}{z^2 - 4z + 3} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-3}.$$

Помножимо обидві частини рівності на спільний знаменник

$$z+1 = A(z-3) + B(z-1),$$

або

$$z+1 = z(A+B) - 3A - B$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях z :

$$\begin{cases} z & | & A+B=1, \\ z^0 & | & -3A-B=1. \end{cases}$$

Звідси знаходимо $A = -1$, $B = 2$.

Отже,

$$\frac{z+1}{z^2 - 4z + 3} = -\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-3}.$$

За розвиненням (64) матимемо

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots, \quad |z| < 1.$$

Замінивши в рівнянні (45а) z на $z/3$, дістанемо

$$\frac{2}{z-3} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{2}{3} \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \dots + \frac{z^n}{3^n} + \dots \right), \quad \left| \frac{z}{3} \right| < 1, \text{ або } |z| < 3.$$

Тоді $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{3^{n+1}}\right) z^n$. Радіус збіжності даного ряду дорівнює 1 (відстані від точки $z_0 = 0$ до найближчої особливої точки функції $z^* = 1$).

Приклад 7. Розвинути у ряд Тейлора в околі точки $z_0 = 0$ функцію

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + z + 1},$$

і знайти область збіжності ряду.

Розв'язок. Для спрощення раціональної функції помножимо чисельник і знаменник дробу на $(1 - z)$

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + z + 1} = \frac{z(1 - z)}{(z^2 + z + 1)(1 - z)} = \frac{z - z^2}{1 - z^3} = \frac{z}{1 - z^3} - \frac{z^2}{1 - z^3}.$$

Змінивши в формулі (64) z на z^3 отримуємо ряд

$$\frac{z}{1 - z^3} - \frac{z^2}{1 - z^3} = z \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n} - z^2 \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{3n+1} - z^{3n+2}),$$

який збігається при $|z| < 1$.

Приклад 8. Розвинути у ряд Тейлора в околі точки $z_0 = i$ функцію

$$f(z) = \frac{2z + i}{z^2 + iz + 6},$$

і знайти область збіжності ряду.

Розв'язок. Розкладемо дріб на суму найпростіших дробів:

$$\frac{2z + i}{z^2 + iz + 6} = \frac{2z + i}{(z + 3i)(z - 2i)} = \frac{A}{z + 3i} + \frac{B}{z - 2i} = \frac{A(z - 2i) + B(z + 3i)}{(z + 3i)(z - 2i)},$$

$$2z + i = A(z - 2i) + B(z + 3i).$$

Запишемо систему для визначення невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} z = 2i & \left| \begin{array}{l} 5i = 5iB, \quad B = 1; \\ -5i = -4iA, \quad A = 1. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Таким чином функція $f(z)$ може бути подана у вигляді:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2z + i}{z^2 + iz + 6} = \frac{1}{z + 3i} + \frac{1}{z - 2i} = \frac{1}{(z - i) + i + 3i} + \frac{1}{(z - i) - i} = \frac{1}{(z - i) + 4i} + \\ &+ \frac{1}{(z - i) - i} = \frac{1}{4i \left(1 + \frac{z - i}{4i}\right)} - \frac{1}{i \left(1 - \frac{z - i}{i}\right)} = \frac{1}{4i \left(1 - \left(-\frac{z - i}{4i}\right)\right)} - \frac{1}{i \left(1 - \frac{z - i}{i}\right)}. \end{aligned}$$

Скористаємося формулою (64) замінивши для першого дробу z на $-\frac{z - i}{4i}$, а для другого – на $\frac{z - i}{i}$:

$$\frac{2z+i}{z^2+iz+6} = \frac{1}{4i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(4i)^n} - \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{i^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 4^{n+1}}{(4i)^{n+1}} (z-i)^n.$$

Функція $f(z)$ має дві особливі точки $z_1^* = -3i$ і $z_2^* = 2i$. Найменша відстань від $|z_0 - z_2^*| = 1$. Область збіжності ряду – круг $|z - i| < 1$.

У випадку, коли функція $f(z)$ являє собою комбінацію експоненціальної і тригонометричної функцій зручно переходити тільки до експоненціальних функцій.

Приклад 9. Розкласти функцію $f(z) = e^{2z+3} \cos 2z$ в ряд за степенями z .

Розв'язок. Перепишемо функцію $f(z)$ через експоненціальні функції

$$f(z) = e^{2z+3} \cos 2z = e^3 e^{2z} \cos 2z = e^3 e^{2z} \frac{e^{i2z} + e^{-i2z}}{2} = \frac{e^3}{2} (e^{2(1+i)z} + e^{2(1-i)z}).$$

Скористаємося формулою (57) для розвинення в ряд першого і другого доданків

$$e^{2z+3} \cos 2z = \frac{e^3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (1+i)^n + 2^n (1-i)^n}{n!} z^n.$$

Записавши комплексні числа в показниковій формі, піднесемо їх до n -го степеня:

$$(1+i)^n = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^n = 2^{n/2} e^{in\pi/4}, \quad (1-i)^n = (\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^n = 2^{n/2} e^{-in\pi/4}.$$

Тоді

$$e^{2z+3} \cos 2z = e^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n/2}}{n!} \frac{(e^{i\pi n/4} + e^{-i\pi n/4})}{2} z^n = e^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n/2} \cos \frac{n\pi}{4}}{n!} z^n.$$

Оскільки функція $f(z)$ не має особливих точок, то радіус збіжності отриманого ряду $R = \infty$, тобто розвинення справедливо на всій комплексній площині.

$$\text{Якщо степеневі ряди } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{і} \quad f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

$f^*(z_0) = b_0 \neq 0$ збігаються відповідно в кругах $|z - z_0| < R_1$ і $|z - z_0| < R_2$, то всередині спільного круга збіжності $|z - z_0| < r$, де $r = \min(R_1, R_2)$ **частку від ділення рядів** можна подати у вигляді степеневого ряду

$$g(z) = \frac{f(z)}{f^*(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Для визначення коефіцієнтів c_n запишемо цей вираз у вигляді

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

або

$$c_0 b_0 + (c_0 b_1 + c_1 b_0)(z - z_0) + (c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0)(z - z_0)^2 + \dots + (c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \dots + c_n b_0)(z - z_0)^n + \dots = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях $(z - z_0)$, отримаємо рекурентні співвідношення, які дозволяють послідовно знаходити невідомі коефіцієнти $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 b_0, \\ a_1 &= c_0 b_1 + c_1 b_0, \\ a_2 &= c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0, \\ &\dots \dots \dots \\ a_n &= c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \dots + c_n b_0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \tag{65}$$

Зауваження. Степеневі ряди можна поділити і як многочлени стовпчиком, розташовуючи члени ряду у порядку зростання ступеня.

Приклад 10. Розкласти в ряд за степенями z функцію $f(z) = \operatorname{tg} z$.

Розв'язок. Нехай функція $f(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ розвинена в ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Користуючись формулами (65), визначимо коефіцієнти c_n .

Оскільки

$$\begin{aligned} \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \end{aligned}$$

то $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, $b_{2n+1} = 0$, $b_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$.

Підставивши ці значення в систему (65), послідовно знайдемо:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{1}{3}, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = \frac{2}{15}, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = \frac{17}{315}, \dots$$

Отже, розкладання функції в ряд за степенями z має вид:

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots$$

Найближчою особливою точкою до точки $z_0 = 0$ є точка $z^* = \frac{\pi}{2}$. Тому

радіус збіжності отриманого ряду $R = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 11. Розкласти в ряд за степенями z функцію $f(z) = \operatorname{arctg} z$.

Розв'язок. Запишемо вираз даної функції у вигляді інтеграла:

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dt}{1+t^2}.$$

Розвинемо підінтегральну функцію $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ в ряд Маклорена. Для

цього в розвиненні (63) замінимо z на $-t^2$:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \dots$$

Цей ряд збігається на проміжку $|t| < 1$. Після почленного інтегрування отриманого ряду в межах від 0 до z маємо

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

Ряд збігається на тому ж проміжку $|z| < 1$, що й вихідний ряд.

Приклад 12. Розкласти в ряд за степенями z функцію $f(z) = \frac{z}{(1+z^2)^2}$.

Розв'язок. Зауважимо, що $\left(\frac{1}{1+z^2}\right)' = -\frac{2z}{(1+z^2)^2}$. Тому для розкладання

функції $f(z) = \frac{z}{(1+z^2)^2}$ скористаємося можливістю почленного диференціювання збіжних степеневих рядів.

За формулою (64) після заміни z на $(-z^2)$ маємо

$$\frac{1}{1-(-z^2)} = 1 + (-z^2) + (-z^2)^2 + \dots + (-z^2)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

Після диференціювання ряду і множення на $\left(-\frac{1}{2}\right)$ отримуємо

$$\frac{z}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2nz^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} nz^{2n-1}.$$

Оскільки почленне диференціювання не змінює область збіжності, то ряд збігається в крузі $|z| < 1$.

Вправи до розділу

1. Знайти чотири перших відмінних від нуля члена розвинення в ряд Тейлора за степенями z наступних функцій, а також радіуси збіжності отриманих рядів:

$$\text{а) } f(z) = \frac{\cos z}{e^z}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{1}{1+e^z}; \quad \text{в) } f(z) = \frac{1}{2+\sin z}.$$

Відповіді:

$$\text{а) } 1 - z + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{6} + \dots, \quad R = \infty; \quad \text{б) } \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}z + \frac{1}{3!2^3}z^3 + \frac{3}{5!2^5}z^5 + \dots, \quad R = \pi;$$

$$\text{в) } f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z + \frac{1}{2!2^2}z^2 - \frac{1}{3!2^3}z^3 + \dots, \quad R = \sqrt{\ln^2(1-\sqrt{3}) + \pi^2} / 4.$$

2. Розвинути в ряд за степенями z , використовуючи готові розвинення, і

знайти радіус збіжності рядів: а) $f(z) = \frac{z+1}{z^2+4z-5}$; б) $f(z) = \frac{1}{(z^3+1)^2}$.

Відповідь: а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{(-1)^n 2}{5^{n+1}} - 1 \right) z^n, \quad R=1$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{3n}, \quad R=1$.

4. Використовуючи розвинення основних елементарних функцій, розкласти

в ряд за степенями $(z - z_0)$ функції: а) $\cos^2 z, \quad z_0 = \frac{\pi}{4}$; б) $\frac{1}{1-z}, \quad z_0 = 2i$;

в) $f(z) = \ln(z^2 + 4z - 5), \quad z_0 = 4$; г) $f(z) = e^z$ за степенями $(2z - 1)$. Вказати область збіжності отриманих рядів.

Відповідь:

$$\text{а) } \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{n-1}}{(2n-1)!} \left(z - \frac{\pi}{4} \right)^{2n-1}, \quad |z| < \infty; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{(1-2i)^{n+1}}, \quad |z-2i| < \sqrt{5};$$

$$\text{в) } \ln 27 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1+3^n}{n9^n} (z-4)^n, \quad |z-4| < 3; \quad \text{г) } \sqrt{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z-1)^n}{2^n n!}, \quad |z| < \infty.$$

4. Записати у вигляді ряду за степенями z інтеграл $\int_0^z e^{-t^2} dt$.

Відповідь: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} z^{2n+1}, \quad R = \infty$.

13.3. Ряд Лорана

Нехай $0 \leq r < R \leq \infty$ і функція $f(z)$ – аналітична в кільці $r < |z - z_0| < R$. Тоді $f(z)$ однозначно зображується в цьому кільці у вигляді **ряду Лорана**:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (66)$$

коефіцієнти якого визначимо за формулою

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (67)$$

Тут L – довільне коло з центром в точці z_0 , яке лежить усередині даного кільця.

У формулі (66) ряди $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$ і $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ називаються

головною і правильною частинами ряду Лорана відповідно.

Областю збіжності ряду (66) є кільце $r < |z - z_0| < R$.

У разі виродження кільця в круг $|z - z_0| < R$ ряд Лорана перетворюється на ряд Тейлора.

На практиці для визначення коефіцієнтів c_n , якщо це можливо, використовують готові розвинення елементарних функцій у ряд Тейлора.

Приклад 13. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{1}{z^2 + z - 6}$ в околі точки $z_0 = 0$.

Розв'язок. Функція $f(z)$ з двома особливими точками $z_1 = 2$ і $z_2 = -3$ аналітична в областях 1) $0 < |z| < 2$; 2) $2 < |z| < 3$; 3) $3 < |z| < \infty$. Знайдемо розвинення в ряд Лорана у кожній з цих областей.

Зобразимо функцію $f(z)$ у вигляді суми елементарних дробів:

$$f(z) = \frac{1}{5(z-2)} - \frac{1}{5(z+3)}.$$

1. Розвинення у крузі $|z| < 2$. Перетворимо функцію $f(z)$ таким чином:

$$f(z) = -\frac{1}{10} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} - \frac{1}{15} \frac{1}{1 - \left(-\frac{z}{3}\right)}.$$

Використавши розвинення (63), запишемо:

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{2^n} + \dots \quad |z| < 2;$$

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)} = 1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} - \dots + (-1)^n \frac{z^n}{3^n} + \dots \quad |z| < 3.$$

Отже, $\frac{1}{z^2 + z - 6} = -\frac{1}{5} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}} \right)$ при $|z| < 2$.

2. Розвинення у кільці $2 < |z| < 3$. Для дробу $\frac{1}{z+3}$ ряд залишається збіжним у цьому кільці, а для функції $\frac{1}{z-2}$ – розходиться при $|z| > 2$.

Перетворимо функцію $f(z)$ до вигляду $f(z) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{z(1-2/z)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+z/3} \right)$. За

(63) для $\frac{1}{z-2}$ маємо:

$$\frac{1}{z(1-2/z)} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \dots + \frac{2^n}{z^n} + \dots \right) \quad |z| > 2.$$

Таким чином,

$$\frac{1}{z^2 + z - 6} = \frac{1}{5} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{3^{n+1}} \right) \quad 2 < |z| < 3.$$

3. Розвинення в області $|z| > 3$. Для функції $\frac{1}{z(1-2/z)}$ ряд збігається.

Функцію $f(z)$ перетворимо до вигляду

$$f(z) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{z(1-2/z)} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+3/z} \right).$$

Для функції $\frac{1}{z+3}$ маємо $\frac{1}{z(1-(-3/z))} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{3}{z} + \frac{3^2}{z^2} + \dots + (-1)^n \frac{3^n}{z^n} + \dots \right), |z| > 3$.

Звідси дістаємо:

$$\frac{1}{z^2 + z - 6} = \frac{1}{5} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{z^{n+1}} \right) \text{ при } |z| > 3.$$

Приклад 15. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{4z - i}{z^2 + iz + 2}$ в околі її особливих точок.

Розв'язок. Особливі точки функції $z_1 = i$, $z_2 = -2i$, тоді

$$f(z) = \frac{4z - i}{(z - i)(z + 2i)}.$$

Перетворимо функцію $f(z)$ на суму найпростіших дробів:

$$\frac{4z - i}{(z - i)(z + 2i)} = \frac{A}{z - i} + \frac{B}{z + 2i}.$$

Тоді $4z - i = A(z + 2i) + B(z - i)$. Невідомі коефіцієнти A і B знайдемо з системи рівнянь:

$$\begin{array}{l|l} z = i & 3i = 3iA, \quad A = 1, \\ z = -2i & -9i = -3iB, \quad B = 3. \end{array}$$

Отже, $f(z) = \frac{4z - i}{(z - i)(z + 2i)} = \frac{1}{z - i} + \frac{3}{z + 2i}$.

1. Околом точки $z_1 = i$ є кільце $0 < |z - i| < 3$, в якому функція аналітична і може бути розвинена в ряд Лорана за степенями $(z - i)$. Радіус цього околу дорівнює відстані від його центру $z_1 = i$ до особливої точки $z_2 = -2i$.

Перший доданок функції вже подано через різницю $(z - i)$. Другий доданок після перетворення запишемо у вигляді ряду Тейлора за допомогою формули (63):

$$\frac{3}{z + 2i} = \frac{3}{(z - i) + 3i} = \frac{1}{i \left(1 + \frac{z - i}{3i} \right)} = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - i)^n}{3^n i^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - i)^n}{3^n i^{n+1}}.$$

Отже, розвинення функції $f(z)$ в околі точки $z = i$ має вид:

$$\frac{4z - i}{z^2 + iz + 2} = \frac{1}{z - i} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - i)^n}{3^n i^{n+1}}.$$

2. Околом особливої точки $z_2 = -2i$ є кільце $0 < |z + 2i| < 3$, в якому функція аналітична і може бути розвинена в ряд Лорана за степенями $(z + 2i)$. Радіус цього околу дорівнює відстані від точки $z_2 = -2i$ до найближчої особливої точки $z_1 = i$.

Після тотожного перетворення першого доданку розкладемо його в ряд Лорана за степенями $(z + 2i)$ скориставшись розвиненням (63):

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{(z+2i)-3i} = -\frac{1}{3i\left(1-\frac{z+2i}{3i}\right)} = -\frac{1}{3i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{3^n i^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{3^{n+1} i^{n+1}}.$$

Таким чином, шуканий ряд має вигляд

$$\frac{4z-i}{(z-i)(z+2i)} = \frac{3}{z+2i} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{3^{n+1} i^{n+1}}.$$

Приклад 16. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{3z^2 - 15z + 19}{(z-2)(z-3)^2}$

в області $|z-2| < 1$.

Розв'язок. Особливі точки $f(z)$: $z_1 = 2$ і $z_2 = 3$.

Зобразимо $f(z)$ у вигляді суми елементарних дробів:

$$\frac{3z^2 - 15z + 19}{(z-2)(z-3)^2} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3} + \frac{C}{(z-3)^2}.$$

Помножимо ліву і праву частину на $(z-2)(z-3)^2$:

$$3z^2 - 15z + 19 = A(z-3)^2 + B(z-2)(z-3) + C(z-2).$$

Для визначення коефіцієнтів A , B і C покладемо $z=2$ та $z=3$ і прирівняємо коефіцієнти при z^2 . Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{array}{l|l} z=2 & A=1, \\ z=3 & C=1, \\ z^2 & 3=A+B, \quad B=2. \end{array}$$

Отже,

$$\frac{3z^2 - 15z + 19}{(z-2)(z-3)^2} = \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-3} + \frac{1}{(z-3)^2}.$$

Враховуючи розвинення (64), маємо

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{1-(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n.$$

Оскільки степеневі ряди в крузі збіжності можна диференціювати, то

$$\frac{1}{(z-3)^2} = -\left(\frac{1}{z-3}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n(z-2)^{n-1}.$$

Тоді розвинення функції в ряд Лорана в крузі $|z-2| < 1$ має вид:

$$\frac{3z^2 - 15z + 19}{(z-2)(z-3)^2} = \frac{1}{z-2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(z-2)^{n-1}.$$

Приклад 17. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \cos \frac{z}{z-2}$ в околі точки $z_0 = 2$.

Розв'язок. Зобразимо $f(z)$ у вигляді

$$f(z) = \cos \frac{z}{z-2} = \cos \frac{z-2+2}{z-2} = \cos \left(1 + \frac{2}{z-2} \right) = \cos 1 \cos \frac{2}{z-2} - \sin 1 \sin \frac{2}{z-2}.$$

Використавши розвинення $\cos z$ і $\sin z$ в ряди, отримаємо

$$\begin{aligned} \cos \frac{z}{z-2} &= \cos 1 \left(1 - \left(\frac{2}{z-2} \right)^2 \frac{1}{2!} + \left(\frac{2}{z-2} \right)^4 \frac{1}{4!} - \dots \right) - \sin 1 \left(\frac{2}{z-2} - \left(\frac{2}{z-2} \right)^3 \frac{1}{3!} + \dots \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \sin \left(1 + \frac{n\pi}{2} \right)}{(n-1)!(z-2)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Оскільки функція $f(z) = \cos \frac{z}{z-2}$ аналітична на всій комплексній площині, включаючи точку $z_0 = 2$, то цей розклад справедливий для всіх $0 < |z-2| < \infty$.

Приклад 18. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{e^{3z}}{(z+1)^2}$ в області $0 < |z+1| < \infty$.

Розв'язок. Перетворимо функцію $e^{3z} = e^{3(z+1)-3} = e^{-3} e^{3(z+1)}$ і застосуємо розвинення (57), замінивши z на $3(z+1)$:

$$e^{3z} = e^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (z+1)^n}{n!}.$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{3z}}{(z+1)^2} = \frac{e^{-3}}{(z+1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (z+1)^n}{n!} = e^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (z+1)^{n-2}}{n!} = \\ &= \frac{e^{-3}}{(z+1)^2} + \frac{3e^{-3}}{z+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-3} 3^n (z+1)^{n-2}}{n!}. \end{aligned}$$

Вправи до розділу

1. Розвинути в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 0$ функцію $f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z^2}$.

Відповідь: $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{n-1}}{(n+2)!}$.

2. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{1}{2z-3}$ в околі точки:

а) $z_0 = 0$; б) $z_0 = \infty$.

Відповіді: а) $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2}z - \frac{2^2}{3^3}z^2 - \frac{2^3}{3^4}z^3 - \dots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n}{3^{n+1}}$;

б) $\frac{1}{2z} + \frac{3}{2^2 z^2} + \frac{3^2}{2^3 z^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^n z^n}$.

3. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3}$ в околі точки $z_0 = 0$.

Відповідь: $0 < |z| < 1, \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n$; $1 < |z| < 3, -\frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{3^n} \right)$;

$|z| > 3, -\frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{z^n} \right)$.

4. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{z^2 - z + 4}{z^3 + z^2 - 5z + 3}$ у вказаних областях:

а) $|z| < 1$; б) $1 < |z| < 3$; в) $3 < |z| < \infty$.

Відповіді: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{(-1)^n}{3^n} \right) z^{n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} z^n$; в) $\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-2)^n}{z^{n+1}}$.

5. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2}$ в околі точки $z_0 = -1$.

Відповідь: $\frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2}$.

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{1}{(z+2)(1+z^2)}$ у вказаних областях:

а) $1 < |z| < 4$; б) $4 < |z| < \infty$.

Відповіді:

а) функція не розкладається; б) $\frac{1}{5} \left(\frac{2^2 + 1}{z^3} - \frac{2^3 + 2}{z^4} + \frac{2^4 - 1}{z^5} - \frac{2^5 - 2}{z^6} + \dots \right)$.

7. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^2}$ в кільці $0 < |z - 1| < 2$.

Відповідь: $\frac{1}{4} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{(z-1)} + \frac{3}{16} - \frac{1}{8}(z-1) + \frac{5}{64}(z-1)^2 - \frac{3}{64}(z-1)^3 + \dots$

Вказівка. Перетворити функцію: $\frac{1}{(z^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)^2$.

Самостійна робота

1. Знайти круг збіжності рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(z-i)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^n$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1+i)^{3n}}$.

2. Розвинути в ряд Тейлора функцію $\ln(2-z)$ за степенями z і знайти радіус збіжності ряду.

3. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{z+2}{z^2+z-2}$ в околі точки $z_0 = 0$.

4. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \sin \frac{1}{z-2}$ в околі точки $z_0 = 2$.

14. Ізольовані особливі точки однозначної аналітичної функції

Нехай функція $f(z)$ аналітична в точці z_0 . Точка z_0 називається **нулем функції $f(z)$ порядку n** при виконанні умов:

$$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

У випадку $n = 1$ точку z_0 називають **простим нулем**.

Для того, щоб точка z_0 була нулем n -го порядку аналітичної в точці z_0 функції $f(z)$, необхідно і достатньо, аби у деякому околі цієї точки виконувалася рівність

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

де функція $\varphi(z_0)$ – аналітична в точці z_0 і $\varphi(z_0) \neq 0$.

Точка z_0 називається **ізольованою особливою точкою** функції, якщо $f(z)$ – однозначна аналітична функція в кільці $0 < |z - z_0| < \delta$, окрім самої точки z_0 .

Існують три типи ізольованих особливих точок: усувна особлива, полюс та істотно особлива. Вони класифікуються за виглядом ряду Лорана або за поведінкою функції в околі особливої точки.

Для визначення характеру ізольованої особливої точки використовують такі твердження:

1. Для того, щоб точка z_0 була **усувною особливою точкою** аналітичної функції $w = f(z)$, необхідно і достатньо існування границі $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$ ($|c_0| < \infty$).

2. Аби точка z_0 була **полюсом** аналітичної функції $w = f(z)$, необхідно і достатнє існування границі $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

3. Нехай при $z \rightarrow z_0$ не існує ні кінцевої, ні нескінченної границі аналітичної функції. Ця умова – необхідна і достатня для того, щоб точка z_0 була **істотно особливою точкою** функції $w = f(z)$.

Для того, щоб ізольована особлива точка z_0 однозначної аналітичної функції $w = f(z)$ була полюсом n -го порядку **необхідно і достатньо**, щоб точка z_0 була нулем порядку n для функції $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

При цьому

а) щоб точка z_0 була **полюсом порядку n** аналітичної функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб функцію $f(z)$ можна було подати у вигляді

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}, \quad (68)$$

де функція $\varphi(z)$ – аналітична в точці z_0 і $\varphi(z_0) \neq 0$;

б) нехай z_0 – ізольована особлива точка функції $f(z) = \varphi(z) / \psi(z)$, де $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ – аналітичні функції в точці z_0 .

Якщо чисельник $\varphi(z)$ і всі похідні до $(k-1)$ -го порядку включно в точці z_0 дорівнюють нулю, $\varphi^k(z_0) \neq 0$, знаменник $\psi(z)$ і всі похідні до $(l-1)$ порядку включно також дорівнюють нулю в точці z_0 , $\psi^{(l)}(z_0) \neq 0$ (тобто, z_0 є нулем порядку k функції $\varphi(z)$ і нулем порядку l функції $\psi(z)$), то при $l > k$ точка z_0 – **полюс порядку $n = l - k$** аналітичної функції $f(z)$.

Якщо $l \leq k$, то точка z_0 називається **усувною особливою точкою** аналітичної функції $w = f(z)$.

В окремому випадку при $k = 0$, $l = 1$ маємо: коли $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то z_0 – **полюс першого порядку**.

Нескінченно віддалена точка $z = \infty$ називається **ізолюваною особливою точкою** функції $w = f(z)$, якщо в деякому околі цієї точки немає інших особливих точок функції $f(z)$.

Якщо розвинення функції в ряд Лорана в околі точки скінченної точки $z_0 \in \mathbb{C}$

1) не містить членів з від'ємними степенями різниці $(z - z_0)$, тобто

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

то z_0 називається **усувною особливою точкою**;

2) містить кінцеве число членів з від'ємними степенями різниці $(z - z_0)$, тобто

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (c_{-n} \neq 0, c_k = 0 \text{ при } k < -n),$$

то z_0 називається **полюсом порядку n** функції $w = f(z)$;

3) містить нескінченну кількість членів з від'ємними степенями різниці $(z - z_0)$, тобто

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

то z_0 називається **істотною особливою точкою** функції $w = f(z)$.

Дослідження характеру нескінченно віддаленої точки $z = \infty$ зручно проводити після заміни $z = \frac{1}{u}$. При цьому нескінченно віддалена точка переходить в точку $u = 0$, а функція $f(z)$ в точці $z = \infty$ буде мати ту ж особливість, що й отримана функція аргументу u в точці $u = 0$.

Ряд Лорана функції $w = f(z)$ в околі точки $z = \infty$ має той же вигляд, що й при розвиненні функції в околі точки $z = 0$:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k. \quad (69)$$

Тут ряди $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ і $c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k}$ називаються відповідно **головною** і

правильною частинами розкладу функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі нескінченної точки.

Точка $z = \infty$ буде

1) **усувною особливою точкою**, якщо розвинення в ряд Лорана не містить членів з додатними степенями z

$$f(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k};$$

2) **полюсом порядку n** , якщо ряд Лорана містить кінцеве число членів з додатними степенями z

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^n c_k z^k \quad (c_n \neq 0, c_k = 0 \text{ при } k > n);$$

3) **істотно особливою точкою**, якщо розвинення

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$$

містить нескінченну множину членів з додатними степенями z .

Точка $z = \infty$ є полюсом функції $f(z)$ тоді і тільки тоді, коли

$$f(z) = z^n \varphi(z), \quad \varphi(\infty) \neq 0, \quad (70)$$

де $\varphi(z)$ – функція, аналітична в точці $z = \infty$, $n \geq 1$ – ціле (n – порядок полюса $z = \infty$ функції $f(z)$).

Звідси випливає, що нескінченно віддалена ізольована особлива точка є полюсом порядку n тоді і тільки тоді, коли має місце асимптотична формула

$$f(z) \sim Az^n, \quad A \neq 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (71)$$

Аналогічна формула справедлива і у випадку, коли полюсом порядку n є ізольована особлива точка $z_0 \neq \infty$

$$f(z) \sim B(z - z_0)^{-n}, \quad B \neq 0, \quad z \rightarrow z_0. \quad (72)$$

Приклад 1. Знайти особливі точки функції $f(z) = \frac{\operatorname{sh} iz}{\sin \frac{1}{z}}$ і визначити їх

характер.

Розв'язок. Особливими точками функції є нулі знаменника $\sin \frac{1}{z} = 0$,

$\frac{1}{z_k} = k\pi$, або $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, а також особлива точка знаменника $z = 0$.

Точки z_k є полюсами, оскільки $\lim_{z \rightarrow z_k} f(z) = \infty$. Точка $z = 0$ не є ізольованою особливою точкою функції, оскільки в будь-якому її околі $|z| < \delta$ ($\delta > 0$) розташовано безліч особливих точок виду $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, тобто точка $z = 0$ є границею полюсів z_k : $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0$.

Приклад 2. Знайти скінченні особливі точки функції $f(z)$ та визначити їх характер: а) $\frac{1 + \cos z}{z - \pi}$; б) $\frac{\sin z}{z^4}$; в) $\sin \frac{1}{z + \pi}$.

Розв'язок: а) запишемо розвинення функції $f(z)$ у ряд Лорана в околі точки $z_0 = \pi$. Для цього попередньо перетворимо функцію $\cos z = -\cos(z - \pi)$, а потім скористаємося відомим розвиненням (48), замінивши в ньому z на $(z - \pi)$:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos z}{z - \pi} &= \frac{1 - \cos(z - \pi)}{z - \pi} = \frac{1}{z - \pi} \left(1 - 1 + \frac{(z - \pi)^2}{2!} - \frac{(z - \pi)^4}{4!} + \dots \right) = \\ &= \frac{(z - \pi)}{2!} - \frac{(z - \pi)^3}{4!} + \dots \end{aligned}$$

З вигляду на ряд Лорана можна зробити висновок, що $z_0 = \pi$ – усувна особлива точка (відсутні члени з від'ємними степенями $(z - \pi)$);

б) розвинемо функцію в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 0$, використавши ряд (58):

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \dots$$

Точка $z_0 = 0$ – полюс третього порядку, тому що розвинення $f(z)$ у ряд Лорана містить кінцеве число членів з від'ємними степенями z і найбільший показник степеня z в головній частині ряду дорівнює трьом;

в) використавши розвинення

$$\sin u = \frac{u}{1!} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots,$$

де $u = \frac{1}{z + \pi}$, отримаємо

$$\sin \frac{1}{z + \pi} = \frac{1}{z + \pi} - \frac{1}{3!(z + \pi)^3} + \frac{1}{5!(z + \pi)^5} - \dots$$

Отже, $z_0 = -\pi$ – істотно особлива точка функції $\sin \frac{1}{z + \pi}$, оскільки головна частина її лоранівського розвинення в околі цієї точки містить нескінченне число членів.

Приклад 3. Визначити характер особливої точки $z_0 = 1$ функції $f(z) = (z + 2)^2 e^{\frac{1}{z-1}}$.

Розв'язок: виділимо в першому множнику функції доданок $(z-1)$:

$$(z+2)^2 = ((z-1)+1+2)^2 = ((z-1)+3)^2 = (z-2)^2 + 6(z-1) + 9.$$

Розвинемо в ряд за степенями $(z-1)$ функцію $e^{\frac{1}{z-1}}$, скориставшись рядом (57):

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + \dots,$$

де $u = \frac{1}{z-1}$. Тоді за формулою (52) маємо

$$\begin{aligned} f(z) &= ((z-2)^2 + 6(z-1) + 9) \cdot \left(1 + \frac{1}{(z-1)1!} + \frac{1}{(z-1)^2 2!} + \frac{1}{(z-1)^3 3!} + \dots \right) = \\ &= \frac{31}{2} + \frac{73}{6(z-1)} + \frac{133}{24(z-1)^2} + \frac{211}{120(z-1)^3} + \dots \end{aligned}$$

Таким чином, точка $z_0 = 1$ є істотно особливою для функції $f(z)$ оскільки її розвинення в ряд Лорана за степенями $(z-1)$ містить нескінченне число членів з від'ємними показниками степеня.

Приклад 4. Знайти скінченні особливі точки функції $f(z)$ та визначити їх

характер: а) $\frac{\sin z^2}{z^3 - \pi z^2 / 3}$; б) $e^{\frac{1}{z^2}}$.

Розв'язок: а) особливі точки функції $\frac{\sin z^2}{z^3 - \pi z^2 / 3}$ – це точки $z_1 = 0$ і

$z_2 = \pi / 3$. У точці $z_1 = 0$ буде:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z^2}{z^2} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z - \pi / 3} = -3 / \pi,$$

тобто точка $z_1 = 0$ – усувна особлива точка функції $f(z)$.

У точці $z_2 = \pi / 3$ $\lim_{z \rightarrow \pi/3} f(z) = \infty$, тобто z_2 – це полюс функції $f(z)$.

Оскільки $f(z)$ може бути подана у вигляді $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - \pi / 3}$, де функція

$\varphi(z) = \sin z^2 / z^2$ – аналітична в точці $z_2 = \pi / 3$ і $\varphi(\pi / 3) \neq 0$, то точка z_2 є полюсом першого порядку;

б) для функції $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$ точка $z = 0$ – істотно особлива точка, тому що функція $f(z)$ аналітична при $z \neq 0$ і не має границі при $z \rightarrow 0$. Дійсно,

якщо $z = x$, то $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty$, а якщо $z = iy$, то

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{y \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{y^2}} = 0.$$

Приклад 5. Довести, що точка $z_0 = 0$ є усувною особливою точкою для функції $f(z) = \frac{(e^{z^3} - 1)^2}{z^4(1 - \cos z)}$.

Розв'язок. Оскільки при $z \rightarrow 0$

$$e^{z^3} - 1 \sim z^3, \quad (e^{z^3} - 1)^2 \sim z^6, \quad 1 - \cos z = 2 \sin^2 \frac{z}{2}, \quad 1 - \cos z \sim \frac{z^2}{2},$$

$$z^4(1 - \cos z) \sim \frac{z^6}{2},$$

то маємо

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(e^{z^3} - 1)^2}{z^4(1 - \cos z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^6}{z^6/2} = 2.$$

Тобто, $z_0 = 0$ – усувна особлива точка.

Приклад 6. Знайти усі скінченні особливі точки дробово-раціональної функції $f(z) = \frac{z^2 + iz + 2}{z(z^2 + 1)^3(z^2 + 4)^2}$ і з'ясувати їх характер.

Розв'язок. Знайдемо нулі чисельника і знаменника функції і визначимо їх порядок. Чисельник обертається на нуль в точках $z = i$ і $z = -2i$, які є простими нулями. Нулі знаменника: $z = 0$ (простий нуль), $z = \pm i$ (нулі третього порядку), $z = \pm 2i$ (нулі другого порядку). Тож маємо: точки $z = 0$, $z = -2i$ – полюси першого порядку; $z = i$, $z = 2i$ – полюси другого порядку; $z = -i$ – полюс третього порядку.

Приклад 7. Визначити характер особливої точки $z_0 = 0$ функції

$$f(z) = \frac{1}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}.$$

Розв'язок. Оскільки точка $z_0 = 0$ є нулем знаменника функції, то ця точка є полюсом функції $f(z)$. Визначимо порядок полюса. Для цього знайдемо значення функції $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ і її похідних в точці $z_0 = 0$:

$$\varphi(0) = \left(\cos z - 1 + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \varphi'(0) = (-\sin z + z) \Big|_{z=0} = 0,$$

$$\varphi''(0) = (-\cos z + 1) \Big|_{z=0} = 0, \quad \varphi'''(0) = \sin z \Big|_{z=0} = 0, \quad \varphi^{IV}(0) = \cos z \Big|_{z=0} = 1.$$

Оскільки $\varphi^{IV}(0) \neq 0$, то $z_0 = 0$ є нулем четвертого порядку функції $\varphi(z)$ і, відтак, полюсом четвертого порядку функції $f(z)$.

Приклад 8. Встановити характер особливої точки $z = \infty$ для функції

$$f(z) = \frac{z^5}{z^2 - 1}.$$

Розв'язок. Оскільки $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$, то точка $z = \infty$ є полюсом для функції $f(z) = \frac{z^5}{z^2 - 1}$. Визначимо порядок полюса.

Перший спосіб. Зробимо заміну $z = \frac{1}{u}$ і визначимо порядок полюса функції $f\left(\frac{1}{u}\right)$ в точці $u = 0$.

Функція $f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u^3(1-u^2)} = \frac{1}{u^3} = \frac{\varphi(u)}{u^3}$. Тут $\varphi(u) = \frac{1}{1-u^2}$ – аналітична в точці $u = 0$ і $\varphi(0) \neq 0$. За умовою (68) $u = 0$ – полюс третього порядку для функції $f\left(\frac{1}{u}\right)$, тоді $z = \infty$ є полюсом третього порядку для функції $f(z)$.

Другий спосіб. Скориставшись розвиненням (64), подамо функцію у вигляді ряду за степенями z

$$f(z) = \frac{z^5}{z^2 - 1} = z^5 \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z^2}} = z^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots \right) = z^3 + z + \frac{1}{z} + \dots, \quad |z| > 1.$$

Коефіцієнт $c_3 = 1 \neq 0$, тобто $z = \infty$ – полюс третього порядку.

Третій спосіб. Запишемо функцію $f(z)$ у вигляді (70)

$$f(z) = \frac{z^5}{z^2 - 1} = z^3 \frac{1}{1 - \frac{1}{z^2}} = z^3 \cdot \varphi(z), \quad \text{де } \varphi(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z^2}} \text{ – функція, аналітична в}$$

точці $z = \infty$, $n = 3$ – порядок полюса.

Четвертий спосіб. Для визначення порядку полюса скористаємося асимптотичною формулою (71): при $z \rightarrow \infty$ $z^2 - 1 \sim z^2$, $f(z) \sim z^3$, отже, особлива точка $z = \infty$ – полюс третього порядку.

Приклад 9. Встановити характер нескінченно віддаленої особливої точки $z = \infty$ функції: а) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$; б) $f(z) = \frac{z^2}{\sin \frac{1}{z+1}}$;

в) $f(z) = \frac{3z^6 + z^4 + z^3 + 1}{z^2 + 1}$.

Розв'язок: а) оскільки $\lim_{z \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{z^2}} = 1$, то нескінченно віддалена точка $z = \infty$ є усувною особливою точкою функції $f(z)$;

б) при $z \rightarrow \infty$ $\sin \frac{1}{z+1} \sim \frac{1}{z}$, тоді $f(z) \sim z^3$, а це означає, що точка $z = \infty$ – полюс третього порядку;

в) при $z \rightarrow \infty$ $3z^6 + z^4 + z^3 + 1 \sim 3z^6$; $z^2 + 1 \sim z^2$; $f(z) \sim 3z^4$, тобто $z = \infty$ – полюс четвертого порядку.

Приклад 10. Довести, що точка $z = \infty$ є істотно особливою точкою функції $f(z) = \cos 2z$.

Розв'язок. Оскільки розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки $z = \infty$

$$f(z) = \cos 2z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} z^{2n}}{(2n)!}$$

містить нескінченне число членів з додатними степенями z , то точка $z = \infty$ є істотно особливою точкою.

Приклад 11. З'ясувати характер особливих точок функції $f(z) = \frac{1}{1 + e^{z^2}}$.

Розв'язок. Розглянемо функцію $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = 1 + e^{z^2}$. Знайдемо точки, в яких ця функція обертається на нуль: $1 + e^{z^2} = 0$, $e^{z^2} = -1$, $e^{z^2} = e^{i(\pi + 2k\pi)}$. Тоді $z_k = \pm \sqrt{i(\pi + 2k\pi)}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Похідна функції $\varphi'(z) = (1 + e^{z^2})' = 2ze^{z^2}$ не дорівнює нулю в точках z_k , а це означає, що ці точки – прості нулі функції $\varphi(z)$ і є полюсами першого порядку для функції $f(z)$.

Точка $z = \infty$ не є ізольованою особливою точкою, оскільки в будь-якому околі цієї точки $|z| > R$ міститься нескінченна множина особливих точок z_k . Ця точка є граничною точкою полюсів.

Приклад 12. Знайти всі особливі точки функції $f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 9)^2}$ і встановити їх характер.

Розв'язок. Ізольованими особливими точками функції $f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 9)^2}$ є нулі знаменника $z_1 = 0$, $z_{2,3} = \pm 3i$ і нескінченно віддалена особлива точка $z = \infty$. Точка $z_1 = 0$ є нулем першого порядку, а $z_{2,3} = \pm 3i$ – нулями другого порядку. Тоді в точці $z_1 = 0$ функція $f(z)$ має полюс першого порядку, а в точках $z_{2,3} = \pm 3i$ – полюси другого порядку. Точка $z = \infty$ є усувною особливою точкою, бо $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$.

Вправи до розділу

Знайти скінченні особливі точки функції $f(z)$ і визначити їх характер.

$$1. f(z) = \frac{z}{(z+2)(z-1)^3}. \quad 2. f(z) = \frac{z^2 + 5z + 4}{z^2 + 2z + 1}. \quad 3. f(z) = \frac{\sin^2 z}{z}.$$

$$4. f(z) = \frac{\operatorname{tg}(z+1)}{z+1}. \quad 5. f(z) = \frac{(1 - \cos z) \sin^2 z}{z^4}. \quad 6. f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}.$$

$$7. f(z) = \frac{z+2}{\sin^2 z}. \quad 8. f(z) = \frac{1}{1 - \sin z}. \quad 9. f(z) = \frac{1}{e^z - 2}.$$

$$10. f(z) = e^{\frac{1}{z-2i}}. \quad 11. f(z) = \cos \frac{1}{z+3i}. \quad 12. f(z) = \sin \frac{1}{z+1}.$$

$$13. f(z) = \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-1)}. \quad 14. f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+4)^3}. \quad 15. f(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

Відповіді: 1. $z = -2$ – простий полюс; $z = 1$ – полюс третього порядку.

2. $z = -1$ – простий полюс. 3. $z = 0$ – усувна особлива точка. 4. $z = -1$ – усувна

особлива точка; $z_k = -1 + \frac{\pi}{2}(1 + 2k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – полюси першого

порядку. 5. $z = 0$ – усувна особлива точка. 6. $z = 0$ – усувна особлива точка;

$z_k = \pi k$, $k \neq 0$, $k \in Z$ – полюси першого порядку. **7.** $z_k = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – полюси другого порядку. **8.** $z_k = \frac{\pi}{2}(1 + 4k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – полюси другого порядку. **9.** $z_k = \ln 2 + 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – полюси першого порядку. **10.** $z = 2i$ – істотно особлива точка. **11.** $z = -3i$ – істотно особлива точка. **12.** $z = -1$ – істотно особлива точка. **13.** $z = -1$ – полюс другого порядку. **14.** $z = 1$ – простий полюс, $z = \pm 2i$ – полюси третього порядку. **15.** $z = 0$ – усувна особлива точка.

Визначити характер особливої точки z_0 для наступних функцій:

$$\begin{array}{ll}
 1. f(z) = \frac{z^2 + iz + 2}{z^2 - 3iz - 2}, z_0 = i. & 2. f(z) = \sin \frac{z}{z^2 + 1}, z_0 = i. \\
 3. f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z - \operatorname{sh} z}, z_0 = 0. & 4. f(z) = \frac{\sin z}{e^{-z} + z - 1}, z_0 = 0. \\
 5. f(z) = \frac{1 - \operatorname{ch} iz}{z^3}, z_0 = 0. & 6. f(z) = \frac{z^2 - 4iz - 3}{(z+1)^2(z^2 + 9)}, z_0 = 3i. \\
 7. f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}, z_0 = \infty. & 8. f(z) = \frac{z^6}{(1-z)^2}, z_0 = \infty. \\
 9. f(z) = e^{-z^2}, z_0 = \infty. & 10. f(z) = \frac{z^2}{4 - 3z^2}, z_0 = \infty.
 \end{array}$$

Відповіді: 1. Простий полюс. 2. Істотно особлива точка. 3. Полюс другого порядку. 4. Простий полюс. 5. Простий полюс. 6. Усувна особлива точка. 7. Простий полюс. 8. Полюс четвертого порядку. 9. Істотно особлива точка. 10. Усувна особлива точка.

Самостійна робота

1. Знайти скінченні особливі точки функції $f(z)$ та визначити їх характер:

$$\text{а) } \cos \frac{1}{z + 2i}; \quad \text{б) } \frac{z + 2}{z(z+1)(z-1)^3}; \quad \text{в) } \frac{1}{\sin z}; \quad \text{г) } \frac{\operatorname{sh} z}{z}.$$

15. Лишки функції

Нехай z_0 – ізольована скінченна особлива точка функції $f(z)$. **Лишком функції** $f(z)$ у точці z_0 називають число, що позначається символом $\operatorname{Res} f(z_0)$ і визначається рівністю

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l^+} f(z) dz, \quad (73)$$

де l^+ – контур, що не виходить за межі аналітичності функції $f(z)$ і містить всередині тільки одну особливу точку z_0 . Контур l^+ обходиться у додатному напрямку, тобто проти ходу годинникової стрілки.

Порівняння формул (67) і (73) показує, що лишок функції дорівнює коефіцієнту c_{-1} в розвиненні функції $f(z)$ в околі точки z_0 :

$$\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1}. \quad (74)$$

Лишок функції в усувній особливій точці $z = z_0$ дорівнює нулю.

Лишок функції в полюсі n -го порядку може бути знайдений без розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана за формулою

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f(z)(z-z_0)^n); \quad (75)$$

при $n = 1$

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)(z-z_0)). \quad (76)$$

Якщо функцію $w = f(z)$ в околі точки z_0 зображено як частку двох аналітичних функцій, тобто

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}; \quad \varphi(z_0) \neq 0; \quad \psi(z_0) = 0; \quad \psi'(z_0) \neq 0$$

(у цьому разі точка z_0 – полюс першого порядку функції $f(z)$), то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (77)$$

Коли z_0 – істотно особлива точка функції $w = f(z)$, то лишок функції знаходимо за формулою (74).

Якщо ізольованою особливою точкою функції $f(z)$ є нескінченно віддалена точка $z_0 = \infty$, то лишок функції

$$\operatorname{Res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l^-} f(z) dz.$$

Тут l^- – досить великий замкнений контур (це може бути коло $|z| = R$ достатньо великого радіуса R), який проходиться за ходом годинникової стрілки.

Таким чином, лишок функції в точці $z_0 = \infty$ дорівнює взятому з протилежним знаком коефіцієнту при z^{-1} в розвиненні функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі цієї точки:

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -c_{-1}. \quad (78)$$

Якщо точка $z = \infty$ є нулем порядку n функції $f(z)$, то в околі нескінченно віддаленої точки ряд Лорана для функції $f(z)$ записується у вигляді:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{z^n} + \frac{c_{-(n+1)}}{z^{n+1}} + \dots,$$

де $c_{-n} \neq 0$, і при $z \rightarrow \infty$ має місце асимптотична формула

$$f(z) \sim \frac{A}{z^n} \quad (A = c_{-n} \neq 0).$$

Звідси випливає, що якщо

$$f(z) \sim \frac{A}{z} \text{ при } z \rightarrow \infty, \text{ то } \operatorname{Res} f(\infty) = -A, \quad (79)$$

а коли

$$f(z) \sim \frac{A}{z^n} \text{ при } z \rightarrow \infty, \quad n \geq 2, \text{ то } \operatorname{Res} f(\infty) = 0. \quad (80)$$

Слід зауважити, що ряд Лорана у разі усувної особливої точки $z_0 = \infty$ може містити члени з z^{-1} , тому лишок функції в цьому випадку не обов'язково дорівнює нулю. Наприклад, розвинення в ряд Лорана функції

$$f(z) = \frac{z^2}{z^3 + 1} = \frac{1}{z \left(1 + \frac{1}{z^3}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-3n-1} \quad (|z| > 1)$$

не містить членів з додатними степенями z , тобто має усувну особливість в точці $z_0 = \infty$. Коефіцієнт $c_{-1} = 1$, отже $\operatorname{Res} f(\infty) = -1$.

Теорема (про повну суму лишків). Нехай функція $f(z)$ аналітична в усій розширеній комплексній площині, за виключенням кінцевого числа особливих точок. Тоді сума всіх лишків функції $f(z)$, включно з лишком у точці $z = \infty$, дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k) + \operatorname{Res} f(\infty) = 0. \quad (81)$$

Тут z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) – усі скінченні особливі точки функції $f(z)$, а точка $z = \infty$ є або особливою точкою, або точкою аналітичності.

Приклад 1. Знайти лишки функції $f(z) = \frac{z+3}{z^2+z-2}$ в її особливих точках.

Розв'язок. Особливими точками функції є точки $z_1 = 1$, $z_2 = -2$ і $z_3 = \infty$.

Розвинемо функцію в ряд Лорана в околі цих точок. Для цього розкладемо задану функцію на найпростіші дроби:

$$\frac{z+3}{z^2+z-2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2}.$$

Помноживши обидві частини рівності на спільний знаменник, отримаємо:

$$z+3 = A(z+2) + B(z-1).$$

Система рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів має вид:

$$\begin{array}{l|l} z = -2 & 1 = -3B, \\ z = 1 & 4 = 3A. \end{array}$$

Звідки $A = \frac{4}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$. Таким чином, $f(z) = \frac{z+3}{z^2+z-2} = \frac{4}{3(z-1)} - \frac{1}{3(z+2)}$.

1) Околом точки $z_1 = 1$ є кільце $0 < |z-1| < 3$, радіус якого дорівнює відстані від його центру до точки $z_2 = -2$. Перший доданок вже подано через різницю $(z-1)$. Перетворимо другий доданок $f(z)$ і за допомогою формули (64) запишемо розвинення функції в ряд в околі точки $z_1 = 1$:

$$\frac{4}{3(z-1)} - \frac{1}{3(z+2)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-1}{3}\right)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{3^{n+2}}.$$

З цього розвинення маємо $\text{Res } f(1) = c_{-1} = \frac{4}{3}$.

2) Околом точки $z_2 = -2$ є кільце $0 < |z+2| < 3$. Після перетворення першого доданку $f(z)$ за формулою (64) ряд Лорана за степенями $(z+2)$ набуває вигляду:

$$\frac{4}{3(z-1)} - \frac{1}{3(z+2)} = -\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+2}{3}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(z+2)^n}{3^{n+2}}.$$

Оскільки коефіцієнт $c_{-1} = -\frac{1}{3}$, то $\text{Res } f(-2) = -\frac{1}{3}$.

3) Знайдемо розвинення функції $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки $z = \infty$ – в області $|z| > 2$:

$$\frac{4}{3(z-1)} - \frac{1}{3(z+2)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{z \left(1 - \frac{1}{z}\right)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z \left(1 - \left(-\frac{2}{z}\right)\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 + (-1)^{n+1} 2^n}{3z^{n+1}}.$$

Тоді $\text{Res } f(\infty) = -c_{-1} = -1$.

Лишок функції в нескінченно віддаленій точці $z = \infty$ можна було також знайти за узагальненою теоремою про лишки:

$$\text{Res } f(\infty) = -(\text{Res } f(1) + \text{Res } f(-2)) = -1.$$

Приклад 2. Знайти лишки в особливих точках функцій: а) $\frac{1 - e^{-z}}{z}$;

б) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$.

Розв'язок: особливими точками функцій є точки $z_1 = 0$ і $z_2 = \infty$. Розкладемо дані функції в ряд Лорана в околі цих точок (в області $0 < |z| < \infty$).

$$\begin{aligned} \text{а) } f(z) &= \frac{1}{z}(1 - e^{-z}) = \frac{1}{z} \left(1 - \left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \right) = \\ &= \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \dots \right) = 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} - \dots \end{aligned}$$

Коефіцієнт $c_{-1} = 0$, тобто $\text{Res } f(0) = c_{-1} = 0$, $\text{Res } f(\infty) = -c_{-1} = 0$.

Зауважимо, що особлива точка $z_1 = 0$ є усувною особливою точкою для функції $f(z)$, а особлива точка $z_2 = \infty$ – істотно особливою;

$$\begin{aligned} \text{б) } f(z) &= z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 \left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \dots \right) = \\ &= z^2 + \frac{z}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \dots \end{aligned}$$

Тоді $\text{Res } f(0) = c_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$, $\text{Res } f(\infty) = -c_{-1} = \frac{1}{6}$. Точка $z_1 = 0$ є істотно особливою точкою для даної функції, а $z_2 = \infty$ – полюсом другого порядку.

Приклад 3. Знайти лишки функції $f(z) = (z-2)e^{\frac{1}{z-2}}$ в її особливих точках.

Розв'язок. Скориставшись розвиненням (63), розкладемо функцію $(z-2)e^{\frac{1}{z-2}}$ в околі точки $z_1 = 2$:

$$(z-2)e^{\frac{1}{z-2}} = (z-2) \left(1 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!(z-2)^2} + \frac{1}{3!(z-2)^3} + \dots \right) =$$

$$= 1 + (z-2) + \frac{1}{2!(z-2)} + \frac{1}{3!(z-2)^3} + \dots$$

Коефіцієнт $c_{-1} = \frac{1}{2!}$, тобто $\text{Res } f(2) = \frac{1}{2}$. Оскільки функція не має інших скінченних точок, крім $z_1 = 2$, то лишок в нескінченній особливій точці $z_2 = \infty$ за формулою (78) дорівнює $\text{Res } f(\infty) = -\frac{1}{2}$.

Для функції $f(z)$ точка $z_1 = 2$ є істотною особливою точкою, а $z_2 = \infty$ — полюсом першого порядку.

Приклад 4. Знайти лишок функції в нескінченно віддаленій точці:

а) $f(z) = \frac{1}{1-z}$; б) $f(z) = \frac{z^5 + z^3 + 2}{z^4 + 1}$.

Розв'язок: а) при $|z| > 1$ ряд Лорана для функції $f(z) = \frac{1}{1-z}$ має вигляд

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z^{n+1}}\right).$$

Тоді $\text{Res } f(\infty) = -c_{-1} = 1$;

б) розвинемо функцію в ряд Лорана, поділивши стовпчиком многочлени, які розташовані в чисельнику і знаменнику дроби. Члени многочленів розташовуємо в порядку зростання степеня:

$$\begin{array}{r} z^5 + z^3 + 2 \quad \left| \begin{array}{l} z^4 + 1 \\ z + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} + \dots \end{array} \right. \\ \underline{z^5 + z} \\ z^3 - z + 2 \\ \underline{z^3 + \frac{1}{z}} \\ -z + 2 - \frac{1}{z} \\ \underline{-z - \frac{1}{z^3}} \\ \dots \end{array}$$

Таким чином, $f(z) = z + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} + \dots$. Коефіцієнт $c_{-1} = 1$, $\text{Res } f(\infty) = -c_{-1} = -1$.

Приклад 5. Знайти лишки функцій в її скінченних особливих точках:

а) $\frac{e^z}{z^3(z-1)}$; б) $\frac{z}{1+z^4}$.

Розв'язок: а) особливі точки функції – точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 1$. Точка $z_1 = 0$ – полюс третього порядку. Для знаходження лишку в цій точці застосуємо формулу (75):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z_1) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \frac{e^z z^3}{z^3(z-1)} = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{e^z(z-1) - e^z}{(z-1)^2} = \\ &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{e^z(z-2)}{(z-1)^2} = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(e^z(z-2) + e^z)(z-1)^2 - 2(z-1)(z-2)e^z}{(z-1)^4} = \\ &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z(z^2 - 2z + 1 - 2z + 4)}{(z-1)^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(-1)^3} = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Точка $z_2 = 1$ – полюс першого порядку, тому за формулою (76) знайдемо

$$\operatorname{Res} f(z_2) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z}{z^3(z-1)}(z-1) = e;$$

б) функція має чотири полюси першого порядку: $1+z^4=0$; $z_1 = e^{i\pi/4}$; $z_2 = e^{i3\pi/4}$; $z_3 = e^{-i3\pi/4}$; $z_4 = e^{-i\pi/4}$. Для знаходження лишків застосуємо формулу (77):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z_1) &= \frac{1}{4z^2} \Big|_{z=e^{i\pi/4}} = \frac{1}{4} e^{-i\pi/2}; \\ \operatorname{Res} f(z_2) &= \frac{1}{4z^2} \Big|_{z=e^{i3\pi/4}} = \frac{1}{4} e^{-i3\pi/2}; \\ \operatorname{Res} f(z_3) &= \frac{1}{4z^2} \Big|_{z=e^{-i3\pi/4}} = \frac{1}{4} e^{i3\pi/2}; \\ \operatorname{Res} f(z_4) &= \frac{1}{4z^2} \Big|_{z=e^{-i\pi/4}} = \frac{1}{4} e^{i\pi/2}; \end{aligned}$$

Приклад 6. Знайти лишки функції $f(z) = \operatorname{tg} z$ в її особливих точках.

Розв'язок. Особливими точками функції $f(z) = \operatorname{tg} z$ є нулі знаменника:

$\cos z = 0$, $z_k = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Для визначення характеру

особливих точок розглянемо функцію $g(z) = \frac{1}{f(z)} = \operatorname{ctg} z$. Точки z_k є нулями

першого порядку для цієї функції, оскільки $g(z_k) = 0$, а перша похідна $g'(z) = (\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}$, обчислена в точках z_k , не дорівнює нулю:

$$g'(z_k) = -\frac{1}{\sin^2 z} \Big|_{z_k = \frac{\pi}{2}(2k+1)} = -1 \neq 0.$$

Тобто для функції $f(z) = \operatorname{tg} z$ точки z_k – прості полюси. За формулою (77) лишки функції в цих точках:

$$\operatorname{Res} f(z_k) = \frac{\sin z}{(\cos z)'} \Big|_{z_k = \frac{\pi}{2}(2k+1)} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}(2k+1)}{-\sin \frac{\pi}{2}(2k+1)} = -1.$$

Точка $z = \infty$ не є ізольованою точкою функції $f(z)$, оскільки вона є границею послідовності $z_k = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, тому поняття лишка в ній не має сенсу.

Приклад 7. Знайти лишок функції в нескінченно віддаленій точці:

а) $f(z) = \frac{z \cos \frac{1}{z}}{z^2 + 1}$; б) $f(z) = \frac{z \sin \frac{1}{z}}{z^4 + 2}$; в) $f(z) = z^2 + 2iz - 3$.

Розв'язок: а) точка $z = \infty$ є нулем першого порядку для функції

$f(z) = \frac{z \cos \frac{1}{z}}{z^2 + 1}$, тобто $f(z) \sim \frac{1}{z}$ при $z \rightarrow \infty$. Тоді за формулою (79) $\operatorname{Res} f(\infty) = -1$;

б) для функції $f(z) = \frac{z \sin \frac{1}{z}}{z^4 + 2}$ нескінченно віддалена точка $z = \infty$ є нулем четвертого порядку: $f(z) \sim \frac{1}{z^4}$ при $z \rightarrow \infty$. Лишок функції за формулою (80) дорівнює нулю: $\operatorname{Res} f(\infty) = 0$;

в) нескінченно віддалена точка $z = \infty$ є полюсом другого порядку функції $f(z) = z^2 + 2iz - 3$, яку можна розглядати як ряд Лорана, що не містить доданку з $\frac{1}{z}$. Це означає, що $\operatorname{Res} f(\infty) = 0$.

Вправи до розділу

1. Знайти лишки функції $f(z)$ в її скінченних особливих точках:

$$\text{а) } \frac{1 - \cos z}{z^2}; \quad \text{б) } \frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}; \quad \text{в) } e^{z-2}; \quad \text{г) } \sin \frac{1}{z}; \quad \text{д) } \frac{1}{z(1-z^2)}.$$

Відповідь: а) $\text{Res } f(0) = 0$; б) $\text{Res } f(-1) = 2/27$; $\text{Res } f(2) = -1/27$;
в) $\text{Res } f(2) = 3$; г) $\text{Res } f(0) = 1$; д) $\text{Res } f(0) = 1$; $\text{Res } f(1) = -1/2$;
 $\text{Res } f(-1) = -1/2$.

2. Знайти лишок функції $f(z)$ в особливій точці $z_0 = 0$:

$$\text{а) } f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}; \quad \text{б) } f(z) = \cos \frac{1}{z} + z^3; \quad \text{в) } f(z) = \frac{z^{n-1}}{\sin^n z}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$\text{г) } f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}; \quad \text{д) } f(z) = \sin \left(1 + \frac{1}{z} \right).$$

Відповідь: а) $\text{Res } f(0) = \frac{1}{24}$; б) $\text{Res } f(0) = 0$; в) $\text{Res } f(0) = 1$; г) $\text{Res } f(0) = -\frac{1}{6}$;
д) $\text{Res } f(0) = \cos 1$.

3. Знайти лишок функції $f(z)$ в нескінченно віддаленій точці $z_0 = \infty$:

$$\text{а) } f(z) = \frac{e^z}{z^2}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z^5 + z}{z^7 - 1}; \quad \text{в) } f(z) = \frac{z^2}{z-1} \sin \frac{1}{z}; \quad \text{г) } f(z) = \frac{z^3 - z^2 + z + 4}{z^2 - 1}.$$

Відповідь: а) $\text{Res } f(\infty) = -1$; б) $\text{Res } f(\infty) = 0$; в) $\text{Res } f(\infty) = -1$; г) $\text{Res } f(\infty) = -2$.

Самостійна робота

Знайти лишки функції $f(z)$ в її скінченних особливих точках:

$$\text{а) } f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 9}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^4}; \quad \text{в) } f(z) = \text{ctg } z;$$

$$\text{г) } f(z) = e^{\frac{1}{z}}; \quad \text{д) } f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)}; \quad \text{е) } \frac{\cos z}{z^3}.$$

16. Застосування лишків до обчислення інтегралів

Основна теорема Коші про лишки. Якщо функція $f(z)$ аналітична на межі C області D і всюди всередині області D , за винятком скінченного числа особливих точок z_1, z_2, \dots, z_n , то

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z_k). \quad (82)$$

Для обчислення інтегралів вигляду

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt, \quad (83)$$

де R – раціональна функція аргументів $\cos t$ і $\sin t$, неперервна всередині проміжку інтегрування, замінюють $z = e^{it}$. Тоді $dt = \frac{dz}{iz}$ і $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$, $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$. Очевидно, у цьому випадку $|z|=1$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Інтеграл (83) набирає вигляду

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \oint_{|z|=1} F(z) dz, \quad (84)$$

де шлях інтегрування – коло одиничного радіуса з центром на початку координат. За формулою (82)

$$\oint_{|z|=1} F(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} F(z_k), \quad (85)$$

де z_k – особливі точки в області $|z| < 1$.

Теорію лишків використовують також для обчислення невласних інтегралів. Нехай $R(x)$ – раціональна функція $R(x) = P_k(x) / Q_l(x)$, де $P_k(x)$, $Q_l(x)$ – многочлени степенів k і l відповідно. Якщо $R(x)$ – неперервна на всій дійсній осі та $l \geq k + 2$, тобто степінь знаменника принаймні на дві одиниці більший степеня чисельника, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} R(z_k), \quad (86)$$

де z_k ($k = \overline{1, n}$) – особливі точки функції $R(z)$, розташовані у верхній півплощині ($\operatorname{Im} z_k > 0$).

Для обчислення інтегралів вигляду $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \alpha x dx$ і $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \alpha x dx$,

де $R(x) = P_k(x) / Q_l(x)$ – правильний раціональний дріб ($l \geq k + 1$), $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, використовується *лема Жордана*.

Лема Жордана. Якщо $R(z)$ у верхній півплощині та на дійсній осі задовольняє умову $R(z) \rightarrow 0$ рівномірно при $z \rightarrow \infty$ і $\alpha > 0$, то при $R \rightarrow \infty$

$$\int_{C_k} R(z)e^{i\alpha z} dz \rightarrow 0,$$

де C_R – дуга кола радіуса R з центром у точці O , що лежить у верхній півплощині.

За лемою Жордана

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \alpha x dx = \operatorname{Re} \left(2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(R(z_k) e^{i\alpha z_k}) \right), \quad \alpha > 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \alpha x dx = \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(R(z_k) e^{i\alpha z_k}) \right), \quad \alpha > 0, \quad (87)$$

де сума лишків функції $R(z)e^{i\alpha z}$ береться по всіх полюсах z_k , розташованих у верхній півплощині $\operatorname{Im} z > 0$.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2(z-2)} dz$.

Розв'язок. В області $|z| < 3$ функція $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-2)}$ аналітична всюди, крім точок $z = 0$ та $z = 2$. За теоремою Коші про лишки

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z-2)} dz = 2\pi i (\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(2)).$$

Точка $z = 0$ – полюс другого порядку, $z = 2$ – простий полюс. Тому

$$\operatorname{Res} f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^z}{z^2(z-2)} z^2 \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z(z-3)}{(z-2)^2} = -\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{Res} f(2) = \lim_{z \rightarrow 2} \left(\frac{e^z}{z(z-2)} (z-2) \right) = \frac{e^2}{2}.$$

Таким чином,

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z-2)} dz = 2\pi i (-3/4 + e^2/2).$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_{|z-2|=2} \frac{\cos z}{(z+2)(z^3-1)} dz$.

Розв'язок. Функція $f(z) = \frac{\cos z}{(z+2)(z^3-1)}$ має чотири простих полюси:

$z = -2$ і $z = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$. Тільки один з них $z = 1$ належить області, обмеженій контуром $|z-2|=2$. Тому за формулою (82):

$$\int_{|z-2|=2} \frac{\cos z}{(z+2)(z^3-1)} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res} f(1) = 2\pi i \cdot \left. \frac{\cos z}{3z^2} \right|_{z=1} = \frac{2\pi i}{9} \cos 1.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_{|z|=1} \cos z \cdot \cos \frac{1}{z} dz$.

Розв'язок. Функція $f(z) = \cos z \cdot \cos \frac{1}{z}$ аналітична всюди всередині контура $|z|=1$ за виключенням особливої точки $z = 0$. Розглянемо розвинення функції в ряд Лорана в околі точки $z = 0$. Оскільки $\cos z$ і $\cos \frac{1}{z}$ – парні функції, то розвинення в ряд функції $f(z)$ містить тільки парні степені z , тобто $\operatorname{Res} f(0) = 0$. Тоді

$$\int_{|z|=1} \cos z \cdot \cos \frac{1}{z} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res} f(0) = 0.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{1}{(z^5-3z^4)(z-2)^2(z-1)^3} dz$.

Розв'язок. Функція має всередині області, обмеженої колом $|z| = \frac{5}{2}$, полюси $z = 2$, $z = 1$ і $z = 0$. Полюс $z = 3$ знаходиться поза межами області. За теоремою про повну суму лишків (81):

$$\operatorname{Res} f(2) + \operatorname{Res} f(1) + \operatorname{Res} f(0) = -(\operatorname{Res} f(3) + \operatorname{Res} f(\infty)).$$

Особлива точка $z = 3$ – простий полюс. Скориставшись формулою (76), маємо:

$$\operatorname{Res} f(3) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{(z-3)(z-2)^2(z-1)^3 z^4} \cdot (z-3) = \frac{1}{648}.$$

Оскільки $f(z) \sim \frac{1}{z^{10}}$ при $z \rightarrow \infty$, то лишок функції в нескінченно віддаленій точці $\operatorname{Res} f(\infty) = 0$ і

$$\int_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{1}{(z^5 - 3z^4)(z-2)^2(z-1)^3} dz = -2\pi i \cdot (\text{Res } f(3) + \text{Res } f(\infty)) = -\frac{2\pi i}{648} = -\frac{\pi i}{324}.$$

Приклад 5. Обчислити $I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5 + 4 \cos t} dt$.

Розв'язок. Замінімо $z = e^{it}$. Тому $\frac{dz}{iz} = dt$; $\cos t = \frac{1+z^2}{2z}$; $\sin t = \frac{z^2-1}{2iz}$.

$$I = \int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2 dz}{iz(2iz)^2(5+4\frac{1+z^2}{2z})} = \frac{i}{4} \int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2 dz}{z^2(2z^2+5z+1)}.$$

Полюси другого порядку $z_1 = 0$ і першого $z_2 = -1/2$ функції $f(z) = \frac{(z^2-1)^2}{z^2(2z^2+5z+2)}$ лежать в області $|z| < 1$, а полюс $z_3 = -2$ — зовні кола $|z|=1$.

Таким чином, за формулою (85):

$$I = \frac{i}{2} \cdot 2\pi i (\text{Res } f(z_1) + \text{Res } f(z_2)).$$

$$\begin{aligned} \text{Res } F(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z^2-1)^2}{z^2(2z^2+5z+2)} \cdot z^2 \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2(z^2-1)2z(2z^2+5z+2) - (z^2-1)^2(5+4z)}{(2z^2+5z+2)^2} = -\frac{5}{4}; \end{aligned}$$

$$\text{Res } F(-1/2) = \lim_{z \rightarrow -1/2} \frac{(z^2-1)^2}{(2z^4+5z^3+2z^2)'} = \lim_{z \rightarrow -1/2} \frac{(z^2-1)^2}{8z^3+15z^2+4z} = \frac{3}{4}.$$

Отже $I = \frac{i}{4} \cdot 2\pi i \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4} \right) = \frac{\pi}{4}$.

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5+3\cos t)^2}$.

Розв'язок. Зробимо заміну змінної $z = e^{it}$, $\frac{dz}{iz} = dt$, $\cos t = \frac{1+z^2}{2z}$. Тоді

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5+3\cos t)^2} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(5+3\frac{1+z^2}{2z}\right)^2} = \frac{4}{i} \int_{|z|=1} \frac{zdz}{(3z^2+10z+3)^2}.$$

Особливими точками підінтегральної функції є полюси другого порядку – точки $z_1 = -1/3$ і $z_2 = -3$. Точка z_1 належить області $|z| < 1$, точка z_2 знаходиться зовні цієї області. Знайдемо лишок в особливій точці z_1 :

$$\begin{aligned} \text{Res } F(-1/3) &= \lim_{z \rightarrow -1/3} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{9(z+1/3)^2(z+3)^2} (z+1/3)^2 \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1/3} \frac{(z+3)^2 - 2z(z+3)}{9(z+3)^3} = \frac{3-z}{9(z+3)^3} \Big|_{z=-1/3} = \frac{5}{256}. \end{aligned}$$

Застосовуючи формулу (85), маємо

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5+3\cos t)^2} = \frac{4}{i} \left(2\pi i \cdot \frac{5}{256} \right) = \frac{5}{32} \pi.$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi} \text{tg}(t+ia) dt$, $a > 0$ – дійсне число.

Розв'язок. Функція $\text{tg}t$ – періодична з періодом π , тому $\int_0^{\pi} \text{tg}(t+ia) dt =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{tg}(t+ia) dt. \text{ Позначимо } z = e^{i(t+ia)} = e^{it-a}, \text{ тоді } dz = ie^{it-a} dt, dt = \frac{dz}{iz}.$$

Заміна $z = e^{it-a}$ переводить відрізок $[0; 2\pi]$ у коло $|z| = e^{-a}$ ($e^{-a} < 1$). За формулами Ейлера:

$$\cos(t+ia) = \frac{e^{i(t+ia)} + e^{-i(t+ia)}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \sin(t+ia) = \frac{e^{i(t+ia)} - e^{-i(t+ia)}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}.$$

Тоді $\text{tg}(t+ia) = \frac{\sin(t+ia)}{\cos(t+ia)} = \frac{(z^2-1)}{i(z^2+1)}$. В результаті отримуємо:

$$\int_0^{\pi} \text{tg}(t+ia) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{tg}(t+ia) dt = \frac{1}{2} \int_{|z|=e^{-a}} \frac{z^2-1}{i(z^2+1)} \cdot \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{2} \int_{|z|=e^{-a}} \frac{z^2-1}{z(z^2+1)} dz.$$

Функція $F(z) = \frac{z^2 - 1}{z(z^2 + 1)}$ має три особливі точки $z = 0$, $z = \pm i$ (полюси першого порядку), але тільки одна з них $z = 0$ лежить всередині круга $|z| < e^{-a}$. Лишок функції в цій точці:

$$\operatorname{Res} F(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z^2 - 1}{z(z^2 + 1)} \cdot z \right) = -1.$$

Отже,

$$\int_0^{\pi} \operatorname{tg}(t + ia) dt = -\frac{1}{2} (2\pi i \cdot \operatorname{Res} F(0)) = i\pi.$$

Приклад 8. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$.

Розв'язок. Підінтегральна функція $R(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$ задовольняє всі умови, які дозволяють для обчислення невластного інтегралу від $R(x)$ застосовувати формулу (86).

Введемо до розгляду функцію $R(z) = \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1}$, де $z = x + iy$. Для цієї функції $z_k = e^{i \frac{\pi(1+2k)}{4}}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) – полюси першого порядку. Точки $z_1 = \frac{\pi}{4}$ і $z_2 = \frac{3\pi}{4}$ лежать у верхній півплощині $\operatorname{Im} z > 0$. За формулою (86)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = 2\pi i \cdot \left(\operatorname{Res} R\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{Res} R\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right).$$

Обчислимо лишки функції $R(z)$ відносно особливих точок z_1 і z_2 , застосувавши формулу (77):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} R\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left. \frac{z^2 + 1}{4z^3} \right|_{z = \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left(z^{-1} + z^{-3} \right) \Big|_{z = \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} i. \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res} R\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left. \frac{z^2 + 1}{4z^3} \right|_{z = \frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left(z^{-1} + z^{-3} \right) \Big|_{z = \frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{9\pi}{4}} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{9\pi}{4} - i \sin \frac{9\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} i.$$

Отже,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} i - \frac{\sqrt{2}}{4} i \right) = \sqrt{2}\pi.$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+2x+2)^{n+1}} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язок. Умови щодо використання формули (86) для обчислення невластного інтеграла від функції $R(x) = \frac{1}{(x^2+2x+2)^{n+1}}$ виконуються.

Розглянемо функцію $R(z) = \frac{1}{(z^2+2z+2)^{n+1}}$, яка має у верхній півплощині одну особливу точку $z = -1+i$ – полюс порядку $(n+1)$. Лишок функції $R(z)$ відносно цієї особливої точки знайдемо за формулою (75):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} R(-1+i) &= \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{(z+1-i)^{n+1}(z+1+i)^{n+1}} (z+1-i)^{n+1} = \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{(z+1+i)^{n+1}} \right) = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{-(n+1)}{(z+1+i)^{n+2}} \right) = \dots \\ &= \frac{(-1)^n (n+1)(n+2)\dots 2n}{n!} \cdot \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{1}{(z+1+i)^{2n+1}} = -\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}} i. \end{aligned}$$

Скориставшись основною теоремою про лишки, отримаємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+2x+2)^{n+1}} dx = 2\pi i \cdot \operatorname{Res} R(-1+i) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}} i \right) = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \pi.$$

Приклад 10. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+25} dx$.

Розв'язок. Оскільки раціональна функція $R(x) = \frac{x^2}{x^4+6x^2+25}$ неперервна на всій дійсній осі та має степінь знаменника на дві одиниці більший степеня чисельника, то для обчислення інтеграла можна скористатися формулою (86).

Застосувавши метод невизначених коефіцієнтів розкладемо знаменник функції $R(z) = \frac{z^2}{z^4 + 6z^2 + 25}$ на множники і визначимо її особливі точки:

$$(z^2 - 2z + 5)(z^2 + 2z + 5) = 0, \quad z = 1 \pm 2i, \quad z = -1 \pm 2i.$$

Прості полюси $z_1 = 1 + 2i$ і $z_2 = -1 + 2i$ розташовані вище дійсної осі, тому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 6x^2 + 25} dx = 2\pi i \cdot (\text{Res } R(1 + 2i) + \text{Res } R(-1 + 2i)).$$

Визначимо лишки функції $R(z)$:

$$\text{Res } R(1 + 2i) = \left. \frac{z^2}{4z^3 + 12z} \right|_{z=1+2i} = \frac{2-i}{16},$$

$$\text{Res } R(-1 + 2i) = \left. \frac{z^2}{4z^3 + 12z} \right|_{z=-1+2i} = \frac{-2-i}{16}.$$

Отже,
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 6x^2 + 25} dx = 2\pi i \cdot \left(\frac{2-i}{16} + \frac{-2-i}{16} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 11. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$.

Розв'язок. Оскільки функція $R(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$ – парна, то $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$. Функція $R(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$ у верхній півплощині має полюс другого порядку в точці $z = i$. Лишок функції $R(z)$ відносно цього полюса знаходимо за формулою (75)

$$\text{Res } R(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(R(z)(z-i)^2 \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{(z+i)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{2zi}{(z+i)^3} = \frac{1}{4i}.$$

За формулою (57)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 12. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x}{(x^2+1)^2(x^2+9)} dx$.

Розв'язок. Введемо до розгляду функцію $f(z) = \frac{e^{i4z}}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 9)}$. Тут

$\alpha = 4 > 0$, $R(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 9)}$. Функція $R(z)$ задовольняє умови леми

Жордана і при $z = x$ $\operatorname{Re} f(x) = \frac{\cos 4x}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 9)}$. Особливі точки функції $f(z)$

– $z = \pm i$ і $z = \pm 3i$.

Розглянемо точки, що лежать у верхній півплощині: $z = i$ – полюс другого порядку, $z = 3i$ – полюс першого порядку. Знайдемо лишки функції $f(z)$ в цих точках:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{i4z}}{(z-i)^2(z+i)^2(z^2+9)} (z-i)^2 \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{i4z} i 4(z+i)^2(z^2+9) - e^{i4z} (2(z+i)(z^2+9) + (z+i)^2 2z)}{(z+i)^4(z^2+9)^2} = -e^{-4} \frac{19}{128} i; \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res} f(3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{e^{i4z}}{(z^2+1)^2(z-3i)(z+3i)} (z-3i) = -\frac{e^{-12}}{384} i.$$

За формулою (87):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x}{(x^2+1)^2(x^2+9)} dx = \operatorname{Re} (2\pi i \cdot (\operatorname{Res} f(i) + \operatorname{Res} f(3i))) = \frac{2\pi e^{-4}}{384} (57 + e^{-8}).$$

Приклад 13. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{1+x^2} dx$.

Розв'язок. Оскільки підінтегральна функція – парна, то $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{1+x^2} dx$. Розглянемо функцію $f(z) = \frac{ze^{i2z}}{1+z^2}$, $\alpha = 2 > 0$.

При $z = x$ $\operatorname{Im} f(z) = \frac{x \sin 2x}{1+x^2}$. Функція $R(z) = \frac{z}{1+z^2}$ задовольняє умови

леми Жордана. Особливі точки функції $f(z)$ – полюси першого порядку $z_1 = i$, $z_2 = -i$. У верхній півплощині функція $f(z)$ має одну особливу точку

$z_1 = i$. Обчислимо відносно неї лишок функції $\frac{ze^{i2z}}{1+z^2}$:

$$\operatorname{Res}_{z=i} (e^{i2z} R(z)) = \left. \frac{ze^{i2z}}{(1+z^2)'} \right|_{z=i} = e^{-2} / 2.$$

Тобто $\operatorname{Im}\left(2\pi i \cdot \frac{1}{2}e^{-2}\right) = \pi e^{-2}$ і остаточно $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{1+x^2} dx = \pi \frac{e^{-2}}{2}$.

Вправи до розділу

Використовуючи теореми про лишки, обчислити інтеграли:

$$1. \int_{|z|=4} \frac{e^{z-1} dz}{z(z-1)}. \quad 2. \int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z-1)}. \quad 3. \int_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin \frac{1}{z} dz. \quad 4. \int_{|z|=4} \frac{(e^z - 1) dz}{z^2 + z}.$$

$$5. \int_{|z|=\frac{2}{3}} \left(\sin \frac{1}{z^2} + e^{z^2} \cos z \right) dz. \quad 6. \int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4 - 1} dz.$$

Відповідь: 1. $2\pi i(1 - e^{-1})$. 2. $2\pi i(e - 5/2)$. 3. $-\pi i/3$. 4. $2\pi i(1 - e^{-1})$. 5. 0.
6. $2\pi i$.

Обчислити інтеграли:

$$1. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \cos t)^2}. \quad 2. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + a \cos t} \quad (0 < a < 1). \quad 3. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2} \quad (0 < \rho < 1). \\ 4. \int_0^{\pi} \operatorname{tg}(t + ia) dt, \quad a < 0. \quad 5. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5 + 4 \cos t)^2}. \quad 6. \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sin t}.$$

Відповідь: 1. $\frac{4\pi}{3^{3/2}}$. 2. $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$. 3. $\frac{2\pi}{1-\rho^2}$. 4. $-i\pi$. 5. $\frac{10\pi}{27}$. 6. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Обчислити інтеграли з нескінченними границями:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}. \quad 2. \int_0^{\infty} \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1}. \quad 3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2+4x+20}. \quad 4. \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x dx}{1+x^2}. \quad 5. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx.$$

Відповідь: 1. $3\pi/8$. 2. $\pi/\sqrt{2}$. 3. $\frac{\pi}{2}e^{-4}(2\cos 2 + \sin 2)$. 4. $\frac{\pi}{4}(1 - e^{-2})$. 5. $\frac{4\pi}{3}$.

Індивідуальні домашні завдання

1. Знайти всі значення коренів:

1.1. $\sqrt[4]{-1}$;

1.2. $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$;

1.3. $\sqrt[3]{1}$;

1.4. $\sqrt[3]{i}$;

1.5. $\sqrt[4]{1}$;

1.6. $\sqrt[4]{-1/2 + i\sqrt{3}/2}$;

- 1.7. $\sqrt[3]{-1}$; 1.8. $\sqrt[3]{-i}$; 1.9. $\sqrt[4]{-16}$;
- 1.10. $\sqrt[4]{1/2+i\sqrt{3}/2}$; 1.11. $\sqrt[3]{8}$; 1.12. $\sqrt[3]{8i}$;
- 1.13. $\sqrt[4]{16}$; 1.14. $\sqrt[4]{1/2-i\sqrt{3}/2}$; 1.15. $\sqrt[3]{-8}$;
- 1.16. $\sqrt[3]{-8i}$; 1.17. $\sqrt[4]{-1/16}$; 1.18. $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$;
- 1.19. $\sqrt[3]{1/8}$; 1.20. $\sqrt[3]{i/8}$; 1.21. $\sqrt[4]{1/16}$;
- 1.22. $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$; 1.23. $\sqrt[3]{-1/8}$; 1.24. $\sqrt[3]{-i/8}$;
- 1.25. $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}$; 1.26. $\sqrt[3]{27}$; 1.27. $\sqrt[3]{1/256}$;
- 1.28. $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$; 1.29. $\sqrt[3]{i/27}$; 1.30. $\sqrt[4]{256}$.

2. Зобразити в алгебраїчній формі:

2.1. а) $e^{1+i\frac{\pi}{3}}$;	б) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+2i\right)$;	в) $\text{Ln}(1-i)$;	г) $(1-i)^i$;
2.2. а) $e^{-2+i\frac{\pi}{2}}$;	б) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+2i\right)$;	в) $\text{Ln}(1-\sqrt{3}i)$;	г) $(1+i)^{2i}$;
2.3. а) $e^{-3+i\pi}$;	б) $\text{sh}\left(2+\frac{\pi}{4}i\right)$;	в) $\text{Ln}(1+i)$;	г) $(1+i\sqrt{3})^i$;
2.4. а) $e^{-4+i\frac{\pi}{3}}$;	б) $\text{sh}\left(3-\frac{\pi}{3}i\right)$;	в) $\text{Ln}(-1-i)$;	г) $(1-i)^{3i}$;
2.5. а) $e^{-3-i\frac{\pi}{3}}$;	б) $\text{ch}\left(2+\frac{\pi}{2}i\right)$;	в) $\text{Ln}(\sqrt{3}-i)$;	г) $(\sqrt{3}-i)^i$;
2.6. а) $e^{-1+i\frac{\pi}{2}}$;	б) $\text{sh}\left(3-\frac{\pi}{6}i\right)$;	в) $\text{Ln}(1+\sqrt{3}i)$;	г) $(1+i)^i$;
2.7. а) $e^{-2+i\frac{\pi}{6}}$;	б) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+i\right)$;	в) $\text{Ln}(\sqrt{3}+i)$;	г) $(\sqrt{3}+i)^{2i}$;
2.8. а) $e^{1+i\frac{\pi}{2}}$;	б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$;	в) $\text{Ln}(2+2\sqrt{3}i)$;	г) $(2-2i)^i$;
2.9. а) $e^{\frac{1}{2}+i\pi}$;	б) $\text{sh}\left(2-\frac{\pi}{3}i\right)$;	в) $\text{Ln}(2\sqrt{3}-2i)$;	г) $(2i)^{i-1}$;

2.10. a) $e^{-\frac{3}{2}+i\frac{\pi}{2}}$;	б) $\operatorname{sh}\left(1+\frac{\pi}{2}i\right)$;	в) $\operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$;	г) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)^i$;
2.11. a) $e^{2-i\frac{\pi}{3}}$;	б) $\operatorname{ch}(1-\pi i)$;	в) $\operatorname{Ln}(2\sqrt{2}-\sqrt{2}i)$;	г) $(2+2i)^i$;
2.12. a) $e^{\frac{1}{2}-i\frac{\pi}{2}}$;	б) $\operatorname{sh}\left(1+\frac{\pi}{3}i\right)$;	в) $\operatorname{Ln}(2-i2\sqrt{3})$;	г) $(3i)^i$;
2.13. a) $e^{\frac{5-\pi i}{6}}$;	б) $\operatorname{ch}\left(1+\frac{\pi}{3}i\right)$;	в) $\operatorname{Ln}(-1+i)$;	г) $(2-2\sqrt{3}i)^i$;
2.14. a) $\frac{1}{i}e^{\frac{\pi i}{2}-1}$;	б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-2i\right)$;	в) $\operatorname{Ln}(3+\sqrt{3}i)$;	г) $(3i)^{1+i}$;
2.15. a) $\frac{1}{i}e^{\frac{\pi i}{4}}$;	б) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-5i\right)$;	в) $\operatorname{Ln}(-3i)$;	г) $(2i)^{-i}$;
2.16. a) $\frac{1}{1-i}e^{1-\frac{\pi i}{4}}$;	б) $\operatorname{sh}\left(3+\frac{\pi}{6}i\right)$;	в) $\operatorname{Ln}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$;	г) $(1+i)^{3i}$;
2.17. a) $2e^{2-i\frac{\pi}{2}}$;	б) $\operatorname{ch}\left(1+\frac{\pi}{3}i\right)$;	в) $\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}(2i)$;	г) 2^{3i} ;
2.18. a) e^{2-i} ;	б) $\sin\left(i\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$;	в) $\operatorname{Ln}(-1-i)$;	г) $(1-\sqrt{3}i)^i$;
2.19. a) $\frac{1}{1+i}e^{-i\frac{\pi}{3}}$;	б) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-3i\right)$;	в) $\operatorname{Ln}(i-\sqrt{3})$;	г) $(2i)^{\sqrt{2}+i}$;
2.20. a) $\frac{1}{2i}e^{-1+\frac{\pi i}{4}}$;	б) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+3i\right)$;	в) $\operatorname{Ln}(-4i)$;	г) $(3-\sqrt{3}i)^{-i}$;
2.21. a) $2ie^{2-i\frac{\pi}{6}}$;	б) $\operatorname{sh}\left(1+\frac{\pi}{3}i\right)$;	в) $\operatorname{Ln}(-4)$;	г) $(3+\sqrt{3}i)^{-2i}$;
2.22. a) $ie^{3+i\frac{\pi}{6}}$;	б) $\operatorname{sh}\left(1-\frac{\pi}{3}i\right)$;	в) $i\operatorname{Ln}(3i)$;	г) $(i)^{1+\sqrt{3}i}$;
2.23. a) $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$;	б) $\operatorname{ch}\left(2-\frac{\pi}{6}i\right)$;	в) $\operatorname{Ln}(-5)$;	г) $(i)^{\sqrt{3}-i}$;
2.24. a) $(3i+1)e^{-\frac{\pi i}{3}}$;	б) $\frac{\operatorname{ch}\left(i\frac{\pi}{4}\right)}{1+i}$;	в) $i\operatorname{Ln}(i-1)$;	г) 1^{2i} ;
2.25. a) $\frac{1}{1-i}e^{1+\frac{\pi i}{2}}$;	б) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2i\right)$;	в) $\operatorname{Ln}(2-i)$;	г) $(\sqrt{3}-i)^i$;

1.26. а) $(2i+1)e^{i\frac{\pi}{2}}$	б) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-i\right)$;	в) $\operatorname{Ln}\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$;	г) $(2i)^{\sqrt{2}+i}$;
2.27. а) $(i+1)e^{i\frac{\pi}{3}}$;	б) $\sin\left(i+\frac{\pi}{6}\right)$;	в) $\frac{1}{i}\operatorname{Ln}(2-2i)$;	г) i^{3i} ;
2.28. а) $e^{\frac{\pi}{3}i-3}$;	б) $\operatorname{sh}(2-\pi i)$;	в) $i\operatorname{Ln}(\sqrt{3}+i\sqrt{3})$;	г) $(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{-3i}$;
2.29. а) $(1+i)e^{\frac{\pi}{2}i-1}$;	б) $\operatorname{sh}\left(1+\frac{\pi}{6}i\right)$;	в) $\operatorname{Ln}(-5i)$;	г) $(-i)^{5i}$;
2.30. а) $ie^{2-\frac{\pi}{6}i}$;	б) $\operatorname{sh}\left(2-\frac{\pi}{3}i\right)$;	в) $\operatorname{Ln}(i+\sqrt{3})$;	г) $(-1)^{4i}$.

3. Зобразити область, задану нерівностями:

3.1. $|z-1|\leq 1, |z+1|> 2$;

3.2. $|z+i|\geq 1, |z|< 2$;

3.3. $|z-i|\leq 2, \operatorname{Re} z > 1$;

3.4. $|z+1|\geq 1, |z+i|< 1$;

3.5. $|z+1|< 1, |z-i|\leq 1$;

3.6. $|z+i|\leq 2, |z-i|> 2$;

3.7. $|z-1-i|\leq 1, \operatorname{Im} z > 1, \operatorname{Re} z \geq 1$;

3.8. $|z-1+i|\geq 1, \operatorname{Im} z \leq -1, \operatorname{Re} z < 1$;

3.9. $|z-2-i|\leq 2, \operatorname{Re} z \geq 3, \operatorname{Im} z < 1$;

3.10. $|z-1-i|\geq 1, 0 \leq \operatorname{Re} z < 2,$
 $0 < \operatorname{Im} z \leq 2$;

3.11. $|z+i|< 2, 0 < \operatorname{Re} z \leq 1$;

3.12. $|z-i|\leq 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$;

3.13. $|z-i|\leq 2, 0 < \operatorname{Im} z < 2$;

3.14. $|z+i|> 1, -\frac{\pi}{4} \leq \arg z < 0$;

3.15. $|z-1-i|< 1, |\arg z|\leq \frac{\pi}{4}$;

3.16. $|z|< 2, -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z-1) \leq \frac{\pi}{4}$;

3.17. $|z|\leq 1, \arg(z+i) > \frac{\pi}{4}$;

3.18. $1 < |z-1|\leq 2, \operatorname{Im} z \geq 0, \operatorname{Re} z > 1$;

3.19. $1 \leq |z-i| < 2, \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z > 1$;

3.20. $|z|< 2, \operatorname{Re} z \geq 1, \arg z < \frac{\pi}{4}$;

3.21. $|z|> 1, -1 < \operatorname{Im} z \leq 1,$
 $0 < \operatorname{Re} z \leq 2$;

3.22. $|z-1|> 1, -1 < \operatorname{Im} z < 0,$
 $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$;

3.23. $|z+i|< 1, -\frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq -\frac{\pi}{4}$;

3.24. $|z-i|\leq 1, -\frac{\pi}{2} < \arg(z-i) < \frac{\pi}{4}$;

$$3.25. z\bar{z} < 2, \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z > -1; \quad 3.26. z\bar{z} \leq 2, \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > -1;$$

$$3.27. 1 < z\bar{z} < 2 < ; \operatorname{Re} z > 0, \\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1;$$

$$3.28. |z - 2 - i| \geq 1, 1 \leq \operatorname{Re} z < 3, \\ 0 < \operatorname{Im} z \leq 3;$$

$$3.29. |z - i| < 1, \arg z \geq \frac{\pi}{4}, \\ \arg(z + 1 - i) \leq \frac{\pi}{4};$$

$$3.30. |z - 2 - i| \geq 1, 1 \leq \operatorname{Re} z < 3, \\ 0 < \operatorname{Im} z \leq 3.$$

4. Визначити тип кривої:

$$4.1. z = 3 \operatorname{sect} + i2 \operatorname{tgt};$$

$$4.2. z = 2 \operatorname{sect} - i3 \operatorname{tgt};$$

$$4.3. z = -\operatorname{sect} + i3 \operatorname{tgt};$$

$$4.4. z = 4 \operatorname{tgt} - i3 \operatorname{sect};$$

$$4.5. z = 3 \operatorname{tgt} + i4 \operatorname{sect};$$

$$4.6. z = -4 \operatorname{tgt} - i3 \operatorname{sect};$$

$$4.7. z = 3 \operatorname{cosect} + i3 \operatorname{ctgt};$$

$$4.8. z = 4 \operatorname{cosect} - i2 \operatorname{ctgt};$$

$$4.9. z = \operatorname{ctgt} - i2 \operatorname{cosect};$$

$$4.10. z = -\operatorname{ctgt} + i3 \operatorname{cosect};$$

$$4.11. z = 3 \operatorname{ch} 2t + i2 \operatorname{sh} 2t;$$

$$4.12. z = 2 \operatorname{ch} 3t - i3 \operatorname{sh} 3t;$$

$$4.13. z = 5 \operatorname{sh} 4t + i4 \operatorname{ch} 4t;$$

$$4.14. z = -4 \operatorname{sh} 5t - i5 \operatorname{ch} 5t;$$

$$4.15. z = 2 / \operatorname{ch} 2t + i4 \operatorname{th} 2t;$$

$$4.16. z = 4 / \operatorname{ch} 4t + i2 \operatorname{th} 4t;$$

$$4.17. z = \operatorname{th} 5t + i5 / \operatorname{ch} 5t;$$

$$4.18. z = 1 / \operatorname{ch} 4t + i2 \operatorname{th} 4t;$$

$$4.19. z = 2e^{it} + 1 / (2e^{it});$$

$$4.20. z = 3e^{it} - i / (2e^{it});$$

$$4.21. z = -2e^{it} + 1 / e^{it};$$

$$4.22. z = 2e^{2it} - i / e^{2it};$$

$$4.23. z = \frac{1+t}{1-t} + i \frac{2+t}{2-t};$$

$$4.24. z = \frac{t-1+it}{t(t-1)};$$

$$4.25. z = \frac{1+t}{1-t} + i \frac{5+t}{5-t};$$

$$4.26. z = \frac{2+t}{2-t} + i \frac{1+t}{1-t};$$

4.27. $z = t^2 + 4t + 20 - i(t^2 + 4t + 4)$; 4.28. $z = t^2 + 2t + 5 + i(t^2 + 2t + 1)$;

4.29. $z = 2t^2 + 2t + 1 - i(t^2 + t + 4)$; 4.30. $z = t - 2 + i(t^2 - 4t + 5)$.

5. Знайти аналітичну функцію $f(z) = u + iv$ за відомою її дійсною $u(x, y)$ і уявною $v(x, y)$ частинами та значенням $f(z_0)$:

5.1. $u = x^2 - y^2 + x$, $f(0) = 0$; 5.2. $u = e^{-y} \cos x$, $f(0) = 1$;

5.3. $u = x^3 - 3xy^2 + 1$, $f(0) = 1$; 5.4. $u = y - 2xy$, $f(0) = 0$;

5.5. $u = \frac{e^{2x} + 1}{e^x} \cos y$, $f(0) = 2$; 5.6. $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $f(1) = 1 + i$;

5.7. $v = e^{-y} \sin x + y$, $f(0) = 1$; 5.8. $v = e^x \cos y$, $f(0) = 1 + i$;

5.9. $v = -\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}$, $f(0) = 1$; 5.10. $v = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$, $f(1) = 2$;

5.11. $v = e^x (y \cos y + x \sin y)$, $f(0) = 0$; 5.12. $u = x^2 - y^2 - 2y$, $f(0) = 0$;

5.13. $v = x^2 - y^2 + 2x + 1$, $f(0) = i$; 5.14. $v = 2xy + y$, $f(0) = 0$;

5.15. $v = 3x^2 y - y^3 - y$, $f(0) = 0$; 5.16. $v = 3x^2 y - y^3$, $f(0) = 1$;

5.17. $u = x^2 - y^2 - 2x + 1$, $f(0) = 1$; 5.18. $v = 2xy + 2x$, $f(0) = 0$;

5.19. $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$, $f(0) = 0$; 5.20. $u = 1 - e^x \sin y$, $f(0) = 1 + i$;

5.21. $v = \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \sin y$, $f(0) = 2$; 5.22. $v = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}$, $f(1) = 1 + i$;

5.23. $u = e^{-y} \cos x + x$, $f(0) = 1$; 5.24. $v = e^{-y} \sin x$, $f(0) = 1$;

$$5.25. u = \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}, f(0) = 1; \quad 5.26. u = \frac{x}{x^2 + y^2} + x, f(1) = 2;$$

$$5.27. v = x^2 - y^2 - x, f(0) = 0; \quad 5.28. u = -2xy - 2y, f(0) = i;$$

$$5.29. v = 2xy - 2y, f(0) = 1; \quad 5.30. u = x^3 - 3xy^2 - x, f(0) = 0.$$

6. За допомогою функції $w = f(z)$ відобразити на площину (w) геометричну лінію:

$$6.1. w = z^2, \quad D: \{ \operatorname{Re} z + \operatorname{Im}(1 - i^2) = 0 \};$$

$$6.2. w = z\bar{z} + iz, \quad D: \{ \operatorname{Im}\bar{z} + \operatorname{Re} z = 0 \};$$

$$6.3. w = (1+i)z^2, \quad D: \{ \operatorname{Re} z + 2 = 0 \};$$

$$6.4. w = z + i, \quad D: \{ |z| = 1 \};$$

$$6.5. w = z - 2i, \quad D: \{ |z| = 2 \};$$

$$6.6. w = 3z - 1 + i, \quad D: \{ |z - (1 + 2i)| = 2 \};$$

$$6.7. w = \frac{2z-1}{1+i}, \quad D: \{ |z - i| = 1 \};$$

$$6.8. w = \frac{z-3}{1-i}, \quad D: \{ |z + 1| = 2 \};$$

$$6.9. w = \frac{z-1}{i}, \quad D: \{ |z| = 1 \};$$

$$6.10. w = \frac{2z-i}{2+i}, \quad D: \{ |z - 3| = 1 \};$$

$$6.11. w = \frac{z-2i}{i+1}, \quad D: \{ |z| = 2 \};$$

$$6.12. w = \frac{z-i}{i-1}, \quad D: \{ \operatorname{Im} z = 0 \};$$

$$6.13. w = \frac{2iz+1}{2+i}, \quad D: \{ |z| = 1 \};$$

$$6.14. w = \frac{1}{z}, \quad D: \{ |z| = 3 \};$$

$$6.15. w = \frac{1}{z}, \quad D: \{ \operatorname{Re} z = 3 \};$$

$$6.16. w = \frac{1}{z}, \quad D: \{ \operatorname{Im} z = 3 \};$$

$$6.17. w = \frac{1}{z}, \quad D: \{ |z|=1 \};$$

$$6.18. w = \frac{1}{z}, \quad D: \{ 2 \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1 \};$$

$$6.19. w = \frac{2}{z}, \quad D: \{ \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = 2 \};$$

$$6.20. w = \frac{1}{z}, \quad D: \{ \operatorname{Re} z - 2 \operatorname{Im} z = 3 \};$$

$$6.21. w = \frac{2z+1}{1-2i}, \quad D: \{ |z|=1 \};$$

$$6.22. w = z^2, \quad D: \left\{ \arg z = \frac{\pi}{4} \right\};$$

$$6.23. w = z^2, \quad D: \{ 2 \operatorname{Re} z - 2 \operatorname{Im} \bar{z} = 0 \};$$

$$6.24. w = z^2, \quad D: \{ \operatorname{Im} z = 1 \};$$

$$6.25. w = e^z, \quad D: \{ \operatorname{Re} z = 1 \};$$

$$6.26. w = \ln z, \quad D: \{ \arg z = 0 \};$$

$$6.27. w = \ln z, \quad D: \{ |z|=1 \};$$

$$6.28. w = \ln z, \quad D: \{ \arg z = \pi / 3 \};$$

$$6.29. w = \ln z, \quad D: \{ \arg z = 3\pi / 2 \};$$

$$6.30. w = \frac{2z-i}{1+i}, \quad D: \{ \operatorname{Re} z + 2 \operatorname{Im} z = 1 \}.$$

7. Обчислити інтеграл уздовж кривої:

$$7.1. \int_{AB} \bar{z}^2 dz, \quad AB: \{ y = x^2; z_A = 0, z_B = 1+i \};$$

$$7.2. \int_L (\bar{z}+1)e^z dz, \quad \{ |z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0 \};$$

$$7.3. \int_{AB} \operatorname{Im} z^3 dz, \quad AB - \text{відрізок прямої}; z_A = 0, z_B = 2+2i;$$

$$7.4. \int_{AB} (z^2 + 7\bar{z} + 1) dz, \quad AB - \text{відрізок прямої}; z_A = 1, z_B = 1-i;$$

$$7.5. \int_{ABC} |z| dz, \quad ABC - \text{ламана}; z_A = 0, z_B = -1+i, z_C = 1+i;$$

- 7.6. $\int_{AB} (12z^5 + 4\bar{z}^3 + 1)dz$, AB – відрізок прямої; $z_A = 1$, $z_B = i$;
- 7.7. $\int_{AB} \bar{z}^2 dz$, AB – відрізок прямої; $z_A = 1$, $z_B = 1 + i$;
- 7.8. $\int_{AB} \bar{z}^3 e^{z^4} dz$, ABC – ламана; $z_A = i$, $z_B = 1$, $z_C = 0$;
- 7.9. $\int_{ABC} \operatorname{Re}(\bar{z}/z) dz$, $AB: \{|z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$; BC – відрізок прямої; $z_B = 1$, $z_C = 2$;
- 7.10. $\int_{ABC} (\bar{z}^2 + \cos z) dz$, ABC – ламана; $z_A = 0$, $z_B = 1$, $z_C = i$;
- 7.11. $\int_L \frac{\bar{z}}{z} dz$, L – межа області: $\{1 < |z| < 2, \operatorname{Re} z \geq 0\}$;
- 7.12. $\int_{ABC} (\operatorname{ch} z + \cos iz) dz$, ABC – ламана; $z_A = 0$, $z_B = -1$, $z_C = i$;
- 7.13. $\int_L |z| \bar{z} dz$, $L: \{|z|=4, \operatorname{Re} z \geq 0\}$;
- 7.14. $\int_L (\operatorname{ch} z + \bar{z}) dz$, $L: \{|z|=1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$;
- 7.15. $\int_L |z| \operatorname{Re} z^2 dz$, $L: \{|z|=1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$;
- 7.16. $\int_{AB} (3z^2 + 2\bar{z}) dz$, $AB: \{y = x^2; z_A = 0, z_B = 1 + i\}$;
- 7.17. $\int_L \bar{z} \operatorname{Re} z^2 dz$, $L: \{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$;
- 7.18. $\int_{ABC} (\bar{z}^2 + 1) dz$, ABC – ламана; $z_A = 0$, $z_B = -1 + i$, $z_C = i$;
- 7.19. $\int_{AB} e^{|z|^2} \operatorname{Im} z dz$, AB – відрізок прямої; $z_A = 1 + i$, $z_B = 0$;
- 7.20. $\int_L (\sin iz + \bar{z}) dz$, $L: \{|z|=R, \operatorname{Re} z \geq 0\}$;
- 7.21. $\int_{AB} \bar{z} \operatorname{Re} z^2 dz$, AB – відрізок прямої; $z_A = 0$, $z_B = 1 + 2i$;
- 7.22. $\int_{AB} (2\bar{z} + 1) dz$, $AB: \{y = x^3; z_A = 0, z_B = 1 + i\}$;
- 7.23. $\int_{AB} z \bar{z} dz$, $AB: \{|z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$;
- 7.24. $\int_L (\cos iz + 3\bar{z}^2) dz$, $L: \{|z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$;

$$7.25. \int_L |z| dz, \quad L: \{ |z| = \sqrt{2}, \quad \frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{5\pi}{4} \};$$

$$7.26. \int_{ABC} (z^9 + 1) dz, \quad ABC - \text{ламана}; \quad z_A = 0, \quad z_B = 1 + i, \quad z_C = i;$$

$$7.27. \frac{1}{2i} \int_L \bar{z} dz, \quad L: \{ |z| = R \};$$

$$7.28. \int_{ABC} (\sin z + z^5) dz, \quad ABC - \text{ламана}; \quad z_A = 0, \quad z_B = 1, \quad z_C = 2i;$$

$$7.29. \int_{AB} z \operatorname{Im} z^2 dz, \quad AB - \text{відрізок прямої}; \quad z_A = 0, \quad z_B = 1 + i;$$

$$7.30. \int_L (z^3 + \sin z) dz, \quad L: \{ |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0 \}.$$

8. Знайти всі розвинення в ряд Лорана даної функції за степенями z :

$$8.1. \frac{z-2}{2z^3 + z^2 - z};$$

$$8.2. \frac{z-4}{z^4 + z^3 - 2z^2};$$

$$8.3. \frac{3z-18}{2z^3 + 3z^2 - 9z};$$

$$8.4. \frac{2z-16}{z^4 + 2z^3 - 8z^2};$$

$$8.5. \frac{5z-50}{2z^3 + 5z^2 - 25z};$$

$$8.6. \frac{3z-36}{z^4 + 3z^3 - 18z^2};$$

$$8.7. \frac{7z-98}{2z^3 + 7z^2 - 49z};$$

$$8.8. \frac{4z-64}{z^4 + 4z^3 - 32z^2};$$

$$8.9. \frac{9z-162}{2z^3 + 9z^2 - 81z};$$

$$8.10. \frac{5z-100}{z^4 + 5z^3 - 50z^2};$$

$$8.11. \frac{11z-242}{2z^3 + 11z^2 - 121z};$$

$$8.12. \frac{6z-144}{z^4 + 6z^3 - 72z^2};$$

$$8.13. \frac{13z-338}{2z^3 + 12z^2 - 169z};$$

$$8.14. \frac{7z-196}{z^4 + 7z^3 - 98z^2};$$

$$8.15. \frac{15z-450}{2z^3 + 15z^2 - 223z};$$

$$8.16. \frac{8z-256}{z^4 + 8z^3 - 128z^2};$$

$$8.17. \frac{z+2}{z+z^2-2z^3};$$

$$8.18. \frac{z+4}{2z^2 + z^3 - z^4};$$

$$8.19. \frac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3};$$

$$8.20. \frac{2z+16}{8z^2 + 2z^3 - z^4};$$

$$8.21. \frac{5z+50}{25z+5z^2-2z^3};$$

$$8.22. \frac{3z+36}{18z^2 + 3z^3 - z^4};$$

$$8.23. \frac{7z+98}{49z+7z^2-2z^3};$$

$$8.24. \frac{4z+64}{32z^2 + 4z^3 - z^4};$$

$$8.25. \frac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3};$$

$$8.26. \frac{5z+100}{50z^2 + 5z^3 - z^4};$$

$$8.27. \frac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3};$$

$$8.28. \frac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}; \quad 8.29. \frac{13z+338}{169z+13z^2-2z^3}; \quad 8.30. \frac{7z+196}{98z^2+7z^3-z^4}.$$

9. Знайти всі розвинення в ряд Лорана даної функції за степенями $z - z_0$:

$$9.1. \frac{z+1}{z(z-1)}, \quad z_0 = 1+2i;$$

$$9.2. \frac{z+1}{z(z-1)}, \quad z_0 = 2-3i;$$

$$9.3. \frac{z+1}{z(z-1)}, \quad z_0 = -3-2i;$$

$$9.4. \frac{z+1}{z(z-1)}, \quad z_0 = -2+i;$$

$$9.5. \frac{z-1}{z(z+1)}, \quad z_0 = 1+3i;$$

$$9.6. \frac{z-1}{z(z+1)}, \quad z_0 = 2-i;$$

$$9.7. \frac{z-1}{z(z+1)}, \quad z_0 = -1+2i;$$

$$9.8. \frac{z-1}{z(z+1)}, \quad z_0 = -2-3i;$$

$$9.9. \frac{z+3}{z^2-1}, \quad z_0 = 2+i;$$

$$9.10. \frac{z+3}{z^2-1}, \quad z_0 = 3-i;$$

$$9.11. \frac{z+3}{z^2-1}, \quad z_0 = -2+3i;$$

$$9.12. \frac{z+3}{z^2-3}, \quad z_0 = -2-2i;$$

$$9.13. \frac{z}{z^2+1}, \quad z_0 = 2+i;$$

$$9.14. \frac{z}{z^2+1}, \quad z_0 = 1-2i;$$

$$9.15. \frac{z}{z^2+1}, \quad z_0 = -3+i;$$

$$9.16. \frac{z}{z^2+1}, \quad z_0 = -3-2i;$$

$$9.17. 4 \frac{z+2}{(z-1)(z+3)}, \quad z_0 = -2+2i;$$

$$9.18. 4 \frac{z+2}{(z-1)(z+3)}, \quad z_0 = 1-3i;$$

$$9.19. 4 \frac{z+2}{(z-1)(z+3)}, \quad z_0 = -3-i;$$

$$9.20. 4 \frac{z+2}{(z-1)(z+3)}, \quad z_0 = -2+i;$$

$$9.21. z \exp\left(\frac{\pi}{(z-a)^2}\right), \quad z_0 = a;$$

$$9.22. z \exp\left(\frac{\pi z}{z-\pi}\right), \quad z_0 = \pi;$$

$$9.23. z \sin \frac{\pi(z+2)}{z}, \quad z_0 = 0;$$

$$9.24. z \cos \frac{\pi(z+3)}{z-1}, \quad z_0 = 1;$$

$$9.25. z^2 \sin \frac{z+3}{z}, \quad z_0 = 0;$$

$$9.26. z \sin \frac{z^2-2z}{(z-1)^2}, \quad z_0 = 1;$$

$$9.27. z \cos \frac{z}{z-3}, \quad z_0 = 3;$$

$$9.28. z \sin \frac{\pi(z-1)}{z-2}, \quad z_0 = 2;$$

$$9.29. z \cos \frac{z}{z-5}, \quad z_0 = 5;$$

$$9.30. z \exp\left(\frac{z}{z-4}\right), \quad z_0 = 4.$$

10. Визначити тип особливої точки $z = 0$ даної функції:

10.1. $\frac{e^{9z} - 1}{\sin z - z + z^3 / 6}$; 10.2. $z^3 \exp\left(\frac{7}{z^2}\right)$; 10.3. $\frac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + z^2 / 2}$;

10.4. $\frac{\cos 7z - 1}{\operatorname{sh} z - z - z^3 / 6}$; 10.5. $\frac{\operatorname{sh} 6z - 6z}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2 / 2}$; 10.6. $\frac{\operatorname{ch} 5z - 1}{e^z - 1 - z}$;

10.7. $z \sin \frac{6}{z^2}$; 10.8. $\frac{e^z - 1}{\sin z - z + z^3 / 6}$; 10.9. $\frac{\sin z^2 - z^2}{\cos z - 1 - z^2 / 2}$;

10.10. $\frac{\cos z^2 - 1}{\operatorname{sh} z - z - z^3 / 6}$; 10.11. $\frac{e^{5z} - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2 / 2}$; 10.12. $\frac{\sin 4z - 4z}{e^z - 1 - z}$;

10.13. $z^4 \cos \frac{5}{z^2}$; 10.14. $\frac{\cos 3z - 1}{\sin z - z + z^3 / 6}$; 10.15. $\frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{\cos z - 1 + z^2 / 2}$;

10.16. $\frac{\operatorname{ch} 2z - 1}{\operatorname{sh} z - z - z^3 / 6}$; 10.17. $\frac{e^{z^3}}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2 / 2}$; 10.18. $z \exp(4 / z^3)$;

10.19. $\frac{\sin z^3 - z^3}{e^z - 1 - z}$; 10.20. $\frac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z - z^3 / 6}$; 10.21. $\frac{e^{7z} - 1}{\cos z - 1 + z^2 / 2}$;

10.22. $\frac{\sin 6z - 6z}{\operatorname{sh} z - z - z^3 / 6}$; 10.23. $z \sin \frac{3}{z^3}$; 10.24. $\frac{\cos 5z - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2 / 2}$;

10.25. $\frac{\operatorname{sh} 4z - 4z}{e^z - 1 - z}$; 10.26. $\frac{\operatorname{ch} 3z - 1}{\sin z - z + z^3 / 6}$; 10.27. $\frac{e^{z^4} - 1}{\cos z - 1 + z^2 / 2}$;

10.28. $\frac{\sin z^4 - z^4}{\operatorname{sh} z - z - z^3 / 6}$; 10.29. $z \cos \frac{2}{z^3}$; 10.30. $\frac{\cos(z^4 / 2)}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2 / 2}$.

11. Обчислити інтеграл:

11.1. $\oint_{|z|=1/2} \frac{1}{z(z^2+1)} dz;$

11.2. $\oint_{|z-1-i|=5/4} \frac{2}{z^2(z-1)} dz;$

11.3. $\oint_{|z-i|=3/2} \frac{1}{z(z^2+4)} dz;$

11.4. $\oint_{|z|=1} \frac{2+\sin z}{z(z+2i)} dz;$

11.5. $\oint_{|z-3|=1/2} \frac{e^z}{\sin z} dz;$

11.6. $\oint_{|z-\frac{3}{2}|=2} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z} dz;$

11.7. $\oint_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z} dz;$

11.8. $\oint_{|z-\frac{3}{2}|=2} \frac{2z(z-1)}{\sin z} dz;$

11.9. $\oint_{|z-\frac{1}{4}|=\frac{1}{3}} \frac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z} dz;$

11.10. $\oint_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin \pi z} dz;$

11.11. $\oint_{|z-3|=1} \frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)} dz;$

11.12. $\oint_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{e^z+1}{z(z-1)} dz;$

11.13. $\oint_{|z|=1} \frac{e^{iz}+2}{\sin 3zi} dz;$

11.14. $\oint_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2} dz;$

11.15. $\oint_{|z-1|=1/2} \frac{\ln(z+2)}{\sin z} dz;$

11.16.

$$\oint_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2} dz$$

11.17.

$$\oint_{|z+1|=1/2} \frac{\operatorname{tg} z+2}{4z^2+\pi z} dz;$$

11.18.

$$\oint_{|z+\frac{3}{2}|=1} \frac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z} dz = 1;$$

11.19.

$$\oint_{|z+1|=2} \frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z} dz;$$

11.20.

$$\oint_{|z|=1/4} \frac{\ln(e+z)}{z \sin(z+\frac{\pi}{4})} dz;$$

11.21.

$$\oint_{|z|=1/2} \frac{z^2+z+3}{\sin z \cdot (\pi+z)} dz;$$

11.22.

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^3-i}{\sin 2z(z-\pi)} dz;$$

11.23.

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{z(z+\pi)}{\sin 2z} dz;$$

11.24.

$$\oint_{(z=2)} \frac{z^2+\sin z+2}{z^2+\pi z} dz;$$

11.25.

$$\oint_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=1} \frac{z(z+\pi)}{\sin 3z(z-\pi)} dz;$$

11.26.

$$\oint_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=2} \frac{\sin z}{z(z-\pi)\left(z+\frac{\pi}{3}\right)} dz;$$

11.27.

$$\oint_{|z-\pi|=1} \frac{(z^2+\pi)^2}{i \sin z} dz;$$

11.28.

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z \cos z} dz;$$

11.29.

$$\oint_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z}{z \sin z} dz;$$

11.30.

$$\oint_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=2} \frac{z^3 + \sin 2z}{\sin \frac{z}{2} (z-\pi)} dz.$$

12. Обчислити інтеграл:**12.1.**

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^3} dz;$$

12.2.

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{2-z^2+3z^3}{4z^3} dz;$$

12.3.

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^{\frac{1}{z}} + 1}{z} dz;$$

12.4.

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z} dz;$$

12.5.

$$\oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2} dz;$$

12.6.

$$\oint_{|z|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2} dz;$$

12.7.

$$\oint_{|z|=1} \frac{3z^4-2z^3+5}{z^4} dz;$$

12.8.

$$\oint_{|z|=3} \frac{1-\sin \frac{1}{z}}{z} dz;$$

12.9.

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{2z^2}-1}{z^3} dz;$$

12.10.

$$\oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{3-2z+4z^4}{z^3} dz;$$

12.11.

$$\oint_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{2z^4} dz;$$

12.12.

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^3-3z^2+1}{2z^4} dz;$$

12.13.

$$\oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{4z^5-3z^3+1}{z^6} dz;$$

12.14.

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2} dz;$$

12.15.

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos iz-1}{z^3} dz;$$

12.16.

$$\oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{1-2z^4+3z^5}{z^4} dz;$$

12.17.

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^2+\cos z}{z^3} dz;$$

12.18.

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^5-3z^3+5z}{z^4} dz;$$

12.19.

$$\oint_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{z^4} dz;$$

12.20.

$$\oint_{|z|=3} \frac{\cos z^2-1}{z^4} dz;$$

12.21.

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{2+3z^3-5z^4}{z^5} dz;$$

12.22.

$$\oint_{|z|=1} \frac{ze^{\frac{1}{z}}-z-1}{z^3} dz;$$

12.23.

$$\oint_{|z|=2} z^2 \sin \frac{i}{z^2} dz;$$

12.24.

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^4+2z^2+3}{2z^6} dz;$$

12.25.

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{iz}-1}{z^3} dz;$$

12.26.

$$\oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{1-z^4+3z^6}{2z^3} dz;$$

12.27.

$$\oint_{|z|=2} z^3 \cos \frac{2i}{z} dz;$$

12.28.

$$\oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{e^z-\sin z}{z^2} dz;$$

12.29.

$$\oint_{|z|=3} \frac{2z^3+3z^2-2}{2z^5} dz;$$

12.30.

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z} dz.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$13.1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx;$$

$$13.2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2} dx;$$

$$13.3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2};$$

$$13.4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)};$$

$$13.5. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-x+1)^2};$$

$$13.6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2};$$

$$13.7. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+10x^2+9};$$

$$13.8. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+9)};$$

$$13.9. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 3)^2};$$

$$13.11. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 1)^2};$$

$$13.13. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx;$$

$$13.15. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2 (x^2 + 4)};$$

$$13.17. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^3};$$

$$13.19. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 5)^2};$$

$$13.21. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 4}{(9 + x^2)^2};$$

$$13.23. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)^2 (x^2 + 10)^2};$$

$$13.25. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 10}{(x^2 + 4)^2} dx;$$

$$13.27. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 3)^2 (x^2 + 15)^2};$$

$$13.29. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 10x + 29)^2};$$

$$13.10. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)(x^2 + 3)^2};$$

$$13.12. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx;$$

$$13.14. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 5)^2};$$

$$13.16. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 5}{x^4 + 5x^2 + 6} dx;$$

$$13.18. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 3}{(x^2 - 10x + 29)^2} dx;$$

$$13.20. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 7x^2 + 12};$$

$$13.22. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2};$$

$$13.24. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 8x + 17)^2} dx;$$

$$13.26. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^4};$$

$$13.28. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 2}{x^4 + 7x^2 + 12} dx;$$

$$13.30. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 11)^2}.$$

14. Обчислити інтеграл:

$$14.1. \int_0^{\infty} \frac{x \sin 3x dx}{(x^2 + 4)^2};$$

$$14.3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x dx}{(x^2 + 1)^2};$$

$$14.5. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x + 1) \cos x dx}{x^4 + 5x^2 + 6};$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - 1) \sin x dx}{(x^2 + 9)^2};$$

$$14.4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x dx}{(x^2 + 1)^2};$$

$$14.6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \frac{x}{2} dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)};$$

$$14.7. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 3) \cos 2x dx}{x^4 + 3x^2 + 2};$$

$$14.8. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 - 2) \cos \frac{x}{2} dx}{(x^2 + 1)^2};$$

$$14.9. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 - x) \sin x dx}{x^4 + 9x^2 + 20};$$

$$14.10. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 17};$$

$$14.11. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x - \sin x}{(x^2 + 4)^2} dx;$$

$$14.12. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 4)};$$

$$14.13. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x dx}{x^4 + 5x^2 + 4};$$

$$14.14. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x dx}{x^2 + 2x + 2};$$

$$14.15. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{(x^2 + 1)^2};$$

$$14.16. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x dx}{(x^2 + \frac{1}{4})^2};$$

$$14.17. \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 1)^3};$$

$$14.18. \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 16)(x^2 + 9)};$$

$$14.19. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 - 2x + 10};$$

$$14.20. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10};$$

$$14.21. \int_0^{\infty} \frac{x \sin \frac{x}{2} dx}{x^2 + 4};$$

$$14.22. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x dx}{(x^2 - x + 1)^2};$$

$$14.23. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x dx}{(x^2 - x + 1)^2};$$

$$14.24. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 5x) \sin x dx}{x^4 + 10x^2 + 9};$$

$$14.25. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x dx}{x^4 + 10x^2 + 9};$$

$$14.26. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 1) \cos x dx}{x^4 + 5x^2 + 4};$$

$$14.27. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 1) \sin x dx}{x^4 + 5x^2 + 4};$$

$$14.28. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x - \cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx;$$

$$14.29. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + x) \sin x dx}{x^4 + 13x^2 + 36};$$

$$14.30. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + x) \cos x dx}{x^4 + 13x^2 + 36}.$$

Розв'язок типового варіанта

1. Знайти всі значення коренів $w = \sqrt[3]{-27 - 27i}$.

Розв'язок. Позначимо $z = -27 - 27i$. Подамо z у показниковій формі:
 $|z| = \sqrt{27^2 + 27^2} = 27\sqrt{2}$, $\text{Arg } z = \text{arctg}(-27 / (-27)) - \pi + 2\pi k = \pi / 4 - \pi + 2\pi k =$
 $= -3\pi / 4 + 2\pi k$. Тоді $w = \sqrt[3]{27\sqrt{2}e^{i(-3\pi/4+2\pi k)}}$; $k = 0, 1, 2$.

$$k = 0: \quad w_1 = 3\sqrt[6]{2}e^{-i3\pi/4} = 3\sqrt[6]{2}(\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4)) = \\ = 3\sqrt[6]{2}(\cos(3\pi/4) - i\sin(3\pi/4));$$

$$k = 1: \quad w_2 = 3\sqrt[6]{2}e^{i(-3\pi/4+2\pi/3)} = 3\sqrt[6]{2}(\cos(-\pi/12) + i\sin(-\pi/12)) = \\ = 3\sqrt[6]{2}(\cos(\pi/12) - i\sin(\pi/12));$$

$$k = 2: \quad w_3 = 3\sqrt[6]{2}e^{i(-3\pi/4+4\pi/3)} = 3\sqrt[6]{2}(\cos(7\pi/12) + i\sin(7\pi/12)).$$

Геометричне зображення коренів – на рис. 34.

2. Зобразити в алгебраїчній формі $\text{ch}\left(1 + i\frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язок. Скористаймося формулами $\text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ і

$e^{iz} = \cos z + i \sin z$. Тоді

$$\text{ch}\left(1 + i\frac{\pi}{3}\right) = \frac{e^{(1+i\pi/3)} + e^{-(1+i\pi/3)}}{2} = \\ = \frac{ee^{i\pi/3} + e^{-1}e^{-i\pi/3}}{2} = \\ = \frac{1}{2}\left(e\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) + e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right) = \\ = \frac{1}{4}(e + e^{-1}) + i\frac{\sqrt{3}}{4}(e - e^{-1}) = \frac{1}{2}\text{ch}1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sh}1.$$

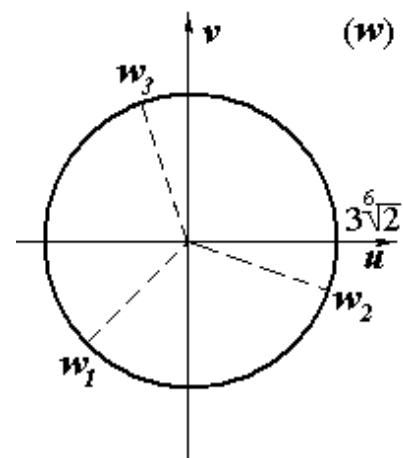


Рис. 34

2. Зобразити область, задану нерівностями $|z - i| < 1$, $-\pi / 2 < \arg(z - i) < \pi / 4$.

Розв'язок. Введемо нову змінну $z_1 = z - i$, тоді $x_1 + iy_1 = x + i(y - 1)$, тобто $x_1 = x$, $y_1 = y - 1$ – перетворення перенесення осей координат. Для змінної z_1 шукана область набере вигляду $|z_1| < 1$, $-\pi / 2 < \arg z_1 < \pi / 4$ або $x_1^2 + y_1^2 < 1$, $-\pi / 2 < \text{arctg}(y_1 / x_1) < \pi / 4$ (рис. 35).

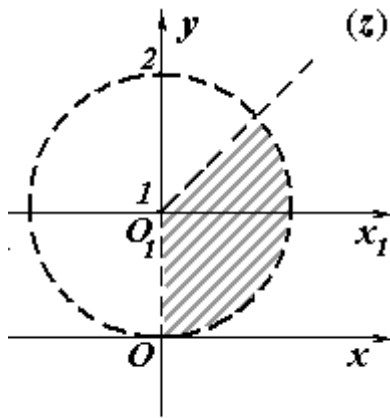


Рис. 35

4. Визначити вид кривих 1) $z = \operatorname{th} 5t + i \frac{5}{\operatorname{ch} 5t}$;

2) $z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1)$.

Розв'язок: 1) вилучимо з рівняння параметр t .

Запишемо $\begin{cases} x = \operatorname{th} 5t; \\ y = \frac{5}{\operatorname{ch} 5t} \end{cases}$ $y > 0$, тому що завжди $\operatorname{ch} 5t > 0$.

Використаємо основну гіперболічну тотожність $\operatorname{ch}^2 5t - \operatorname{sh}^2 5t = 1$, звідки $1 - \operatorname{th}^2 5t = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 5t}$. Тоді

$1 - x^2 = \frac{y^2}{25}$, $y > 0$, тобто $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$, $y > 0$ – верхня частина еліпса;

2) оскільки $z = x + iy$, маємо $\begin{cases} x = t^2 - 2t + 3; \\ y = t^2 - 2t + 1. \end{cases}$ В останніх рівняннях

$x \geq 2$ і $y \geq 0$, адже $x = (t-1)^2 + 2$ та $y = (t-1)^2$ відповідно.

Вилучимо t з рівнянь:

$$x = t^2 - 2t + 3 = t^2 - 2t + 1 + 2 = y + 2.$$

Тобто шукана лінія $x = y + 2$. Це – розріз, адже двом значенням t відповідає по одному значенню x і y . Наприклад, при $t_1 = 0$; $t_2 = 2$ маємо $x = 3$; $y = 1$ (рис. 36).

5. Знайти аналітичну в околі точки $z_0 = 0$ функцію $f(z)$ за відомою її уявною частиною $v = 2xy + x$, якщо $f(0) = 0$.

Розв'язок. За умов Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2).$$

Зінтегруємо (1) за змінною x :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad u(x, y) = \int 2x dx + \varphi(y) = x^2 + \varphi(y). \quad (3)$$

Для визначення функції $\varphi(y)$ продиференціюємо (3) за y і підставимо у (2):

$$\frac{d\varphi}{dy} = -2y - 1, \quad \varphi(y) = \int (-2y - 1) dy = -y^2 - y + C.$$

Отже, $u(x, y) = x^2 - y^2 - y + C$. Тому одержимо $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 - y + C + i(2xy + x) = (x^2 + 2ixy - y^2 + i(x + iy) + C = z^2 + iz + C$.

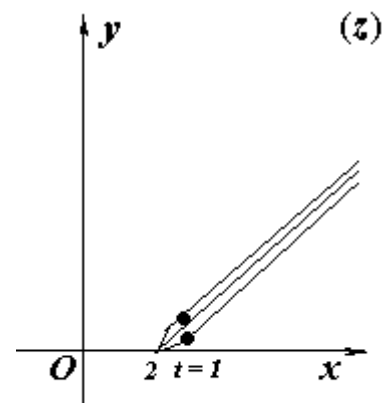


Рис. 36

Знайдемо C : $f(0) = C = 0$, тоді остаточно матимемо $f(z) = z^2 + iz$.

6. Відобразити на площину (w) смугу $2 < \text{Im } z < 3$ за допомогою функції $w = 1/z$.

Розв'язок. Область у площині (z) має вигляд (рис. 37). При відображенні за допомогою дробово-раціональної функції межі і внутрішні точки області-оригіналу перетворюються на межові й внутрішні точки області-зображення. Знайдемо межі в області (w), куди відображаються прямі AB ($y = 2, -\infty < x < \infty$) і CD ($y = 3, \infty > x > -\infty$). Позначимо $z = x + iy$,

$w = u(x, y) + iv(x, y)$. Тоді $w = u + iv = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$, звідки

$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$. На AB і CD $y = C_1$, де $C_1 = 2; 3$

відповідно, після чого $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$; $v(x, y) = -\frac{C_1}{x^2 + y^2}$. Вилучивши x ,

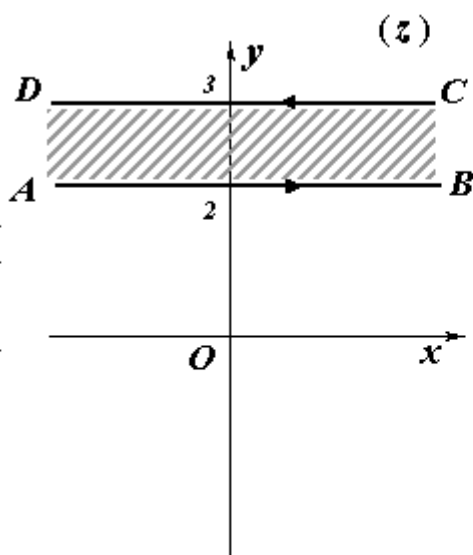


Рис. 37

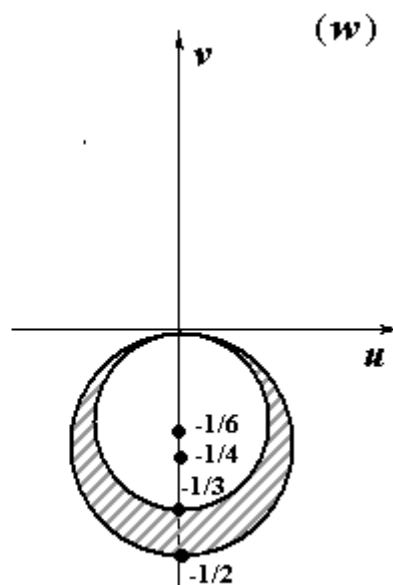


Рис. 38

зв'яжемо між собою u і v : $x = -\frac{C_1 u}{v}$; $v = -\frac{v^2}{C_1(u^2 + v^2)}$ або $u^2 + v^2 + \frac{v}{C_1} = 0$.

Отримане рівняння в канонічному вигляді запишеться $u^2 + \left(v + \frac{1}{2C_1}\right)^2 = \frac{1}{4C_1^2}$.

Тоді зображення прямої AB ($C_1 = 2$): $u^2 + \left(v + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$, а прямої CD

$$(C_1 = 3): u^2 + \left(v + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}.$$

Таким чином, смуга $2 < \text{Im } z < 3$ відображається в область, яка лежить між колом з центром у точці $(0; -1/6)$ і радіусом $1/6$ та колом з центром у точці $(0; -1/4)$ і радіусом $1/4$ (рис. 38).

7. Обчислити інтеграл $I = \int_{ABC} (\bar{z} + \cos z) dz$, де ABC – ламана $z_A = 0$;

$$z_B = 1 + i; \quad z_C = i.$$

Розв'язок. Запишемо $I = I_1 + I_2 = \int_{ABC} \bar{z} dz + \int_{ABC} \cos z dz$. Інтеграл I_1

залежить від шляху інтегрування, тому що \bar{z} – це не аналітична функція, а інтеграл I_2 не залежить від шляху інтегрування, тому що $\cos z$ – аналітична функція. Знайдемо

$$I_2 = \int_{ABC} \cos z dz = \int_0^i \cos z dz = \sin z \Big|_0^i = \sin i = i \text{sh} 1; \quad I_1 = \int_{ABC} \bar{z} dz = \int_{AB} \bar{z} dz + \int_{BC} \bar{z} dz.$$

Рівняння відрізка AB , який з'єднує точки z_A і z_B – це $y = x$; $dy = dx$; $0 \leq x \leq 1$, а рівняння відрізка BC : $y = 1$; $dy = 0$; $1 \geq x \geq 0$; $\bar{z} = x - iy$; $dz = dx + idy$

$$I_1 = \int_0^1 (x - ix)(dx + idx) + \int_1^0 (x - i) dx = 2 \int_0^1 x dx - \int_0^1 (x - i) dx =$$

$$= (x^2 - x^2/2 + ix) \Big|_0^1 = 1/2 + i. \quad \text{Остаточо одержимо: } I = 1/2 + i + i \text{sh} 1.$$

8. Знайти всі розвинення в ряд Лорана за степенями z функції $f(z) = \frac{15z + 450}{225z + 15z^2 - 2z^3}$.

Розв'язок. Знайдемо області, в яких $f(z)$ має різні розвинення. Для цього визначимо особливі точки. Прирівняємо знаменник до нуля $225z + 15z^2 - 2z^3 = 0$, отже $-2z(z + 7,5)(z - 15) = 0$. Корені рівняння $z_1 = 0$; $z_2 = -7,5$; $z_3 = 15$.

Отже, функція аналітична в областях: 1) $0 < |z| < 7,5$; 2) $7,5 < |z| < 15$; 3) $|z| > 15$ (рис. 39).

Зобразимо $f(z)$ у вигляді суми елементарних дробів:

$$f(z) = -\frac{1}{2z} \left(\frac{A}{z + 7,5} + \frac{B}{z - 15} \right) = -\frac{15z + 450}{2z(z + 7,5)(z - 15)}.$$

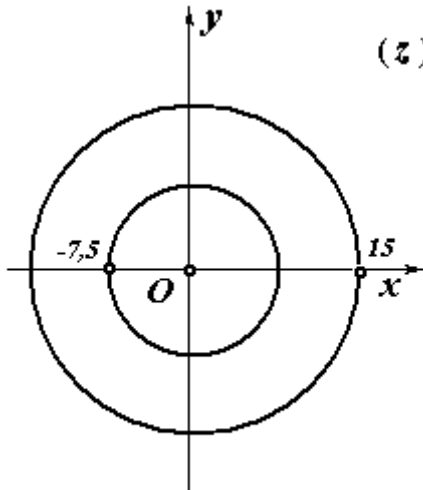


Рис. 39

(2) Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z , маємо :

$$\begin{cases} A + B = 15; \\ -15A + 7,5B = 450. \end{cases}$$

Розв'язок системи: $A = -15$; $B = 30$. Тоді

$$f(z) = \frac{7,5}{z(z+7,5)} - \frac{15}{z(z-15)} = \frac{7,5}{z} f_1(z) - \frac{15}{z} f_2(z)$$

Знайдемо розвинення функції $f_1(z)$ за степенями z в областях $0 < |z| < 7,5$ і $|z| > 7,5$, а функції $f_2(z)$ – в областях $|z| < 15$ і $|z| > 15$.

$$\begin{aligned} |z| < 7,5, \quad f_1(z) &= \frac{1}{z+7,5} = \frac{1}{7,5 \left(1 - \left(-\frac{z}{7,5} \right) \right)} = \frac{1}{7,5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{7,5^n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{7,5^{n+1}}; \end{aligned}$$

$$|z| > 7,5, \quad f_1(z) = \frac{1}{z+7,5} = \frac{1}{z \left(1 - \left(-\frac{7,5}{z} \right) \right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{7,5^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{7,5^n}{z^{n+1}};$$

$$|z| < 15, \quad f_2(z) = \frac{1}{z-15} = -\frac{1}{15 \left(1 - \frac{z}{15} \right)} = -\frac{1}{15} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^{n+1}};$$

$$|z| > 15, \quad f_2(z) = \frac{1}{z-15} = \frac{1}{z \left(1 - \frac{15}{z} \right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{15^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{15^n}{z^{n+1}}.$$

Знайдемо розвинення функції $f(z)$ у виявлених нижче областях.

1) $0 < |z| < 7,5$:

$$f(z) = \frac{7,5}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{7,5^{n+1}} + \frac{15}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{7,5^n} + \frac{1}{15^n} \right) z^{n-1};$$

2) $7,5 < |z| < 15$:

$$f(z) = \frac{7,5}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{7,5^n}{z^{n+1}} + \frac{15}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{15^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{7,5^{n+1}}{z^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{15^n};$$

3) $|z| > 15$:

$$f(z) = \frac{7,5}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{7,5^n}{z^{n+1}} - \frac{15}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{15^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n 7,5^{n+1} - 15^{n+1} \right) \frac{1}{z^{n+2}}.$$

9. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{2z}{(z-4)(z+1)}$ за степенями $(z-3+2i)$.

Розв'язок. Функція $f(z)$ має дві особливі точки: $z_1 = 4$ і $z_2 = -1$. Розвинення в ряд Лорана здійснимо в околі точки $z_0 = 3 - 2i$. Тому розглянемо три області, в яких функція аналітична:

1) круг $|z - 3 + 2i| < R_1$, де $R_1 = |4 - 3 + 2i| = |1 + 2i| = \sqrt{5}$;

2) кільце $R_1 < |z - 3 + 2i| < R_2$, де $R_2 = |-1 - 3 + 2i| = |-4 + 2i| = 2\sqrt{5}$;

3) область $|z - 3 + 2i| > 2\sqrt{5}$ (рис. 40).

Зобразимо $f(z)$ у вигляді суми елементарних дробів:

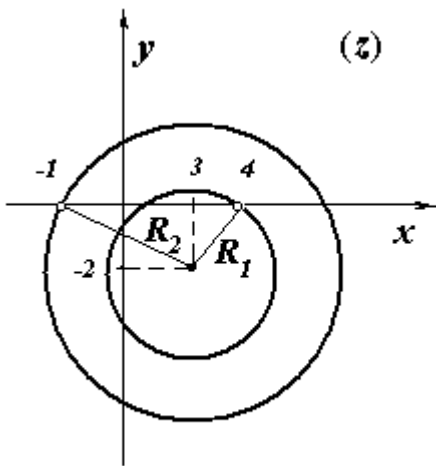


Рис. 40

$$f(z) = \frac{2z}{(z-4)(z+1)} = \frac{A}{z-4} + \frac{B}{z+1}.$$

$$A(z+1) + B(z-4) = 2z.$$

Порівнявши коефіцієнти при однакових степенях z , матимемо систему рівнянь

$$\begin{cases} A + B = 2; \\ A - 4B = 0. \end{cases} \quad A = 8/5, \quad B = 2/5. \quad \text{Тоді}$$

$$f(z) = \frac{8}{5(z-4)} + \frac{2}{5(z+1)} = \frac{8}{5} f_1(z) + \frac{2}{5} f_2(z).$$

Розвинемо в ряд Лорана функцію $f_1(z)$ в областях $|z - 3 + 2i| < \sqrt{5}$ і $|z - 3 + 2i| > \sqrt{5}$, а функцію $f_2(z)$ – в областях $|z - 3 + 2i| < 2\sqrt{5}$ і $|z - 3 + 2i| > 2\sqrt{5}$.

$$|z-3+2i| < \sqrt{5}:$$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{z-4} = \frac{1}{(z-3+2i)-(1+2i)} = \frac{-1}{1+2i} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{z-3+2i}{1+2i}\right)} = \\ &= -\frac{1}{1+2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3+2i)^n}{(1+2i)^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3+2i)^n}{(1+2i)^{n+1}}; \end{aligned}$$

$$|z-3+2i| < \sqrt{5}:$$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{z-4} = \frac{1}{(z-3+2i)-(1+2i)} = \frac{1}{z-3+2i} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1+2i}{z-3+2i}\right)} = \\ &= \frac{1}{z-3+2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{(z-3+2i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{(z-3+2i)^{n+1}}; \end{aligned}$$

$$|z-3+2i| < 2\sqrt{5}:$$

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-3+2i)+(4-2i)} = \frac{1}{4-2i} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-3+2i}{4-2i}\right)} = \\ &= \frac{1}{4-2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-3+2i)^n}{(4-2i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-3+2i)^n}{(4-2i)^{n+1}}; \end{aligned}$$

$$|z-3+2i| > 2\sqrt{5}:$$

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-3+2i)+(4-2i)} = \\ &= \frac{1}{z-3+2i} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{4-2i}{z-3+2i}\right)} = \frac{1}{z-3+2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4-2i)^n}{(z-3+2i)^n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4-2i)^n}{(z-3+2i)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$1) \text{ у крузі } |z-3+2i| < \sqrt{5}:$$

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{8}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3+2i)^n}{(1+2i)^{n+1}} + \frac{2}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-3+2i)^n}{(4-2i)^{n+1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{8}{5(1+2i)^{n+1}} + \frac{2(-1)^n}{5(4-2i)^{n+1}} \right) (z-3+2i)^n; \end{aligned}$$

2) у кільці $\sqrt{5} < |z - 3 + 2i| < 2\sqrt{5}$:

$$f(z) = \frac{8}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{(z-3+2i)^{n+1}} + \frac{2}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-3+2i)^n}{(4-2i)^{n+1}};$$

3) в області $|z - 3 + 2i| > 2\sqrt{5}$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{8}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{(z-3+2i)^{n+1}} + \frac{2}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4-2i)^n}{(z-3+2i)^{n+1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8(1+2i)^n}{5} + \frac{2(4-2i)^n(-1)^n}{5} \right) \cdot \frac{1}{(z-3+2i)^{n+1}}. \end{aligned}$$

10. Визначити тип особливої точки $z = 0$ функції $f(z) = \frac{e^{z^4} - 1}{\cos z - 1 + z^2/2}$.

Розв'язок. Розвинемо в ряди чисельник та знаменник функції $f(z)$ в околі точки $z = 0$:

$$e^{z^4} - 1 = \left(1 + \frac{z^4}{1!} + \frac{z^8}{2!} + \frac{z^{12}}{3!} + \dots \right) - 1 = z^4 \left(1 + \frac{z^4}{2} + \frac{z^8}{6} + \dots \right), \quad |z| < \infty;$$

$$\cos z - 1 + \frac{z^2}{2} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) - 1 + \frac{z^2}{2} = z^4 \left(\frac{1}{24} - \frac{z^2}{720} + \frac{z^4}{40320} - \dots \right), \quad |z| < \infty.$$

Тоді
$$f(z) = \frac{z^4 \left(1 + \frac{z^4}{2} + \frac{z^8}{6} + \dots \right)}{z^4 \left(\frac{1}{24} - \frac{z^2}{720} + \frac{z^4}{40320} - \dots \right)}.$$

Поділимо чисельник на знаменник:

$$f(z) = 24 \left(1 + \frac{1}{30} z^2 + \frac{37787}{37800} z^4 + \dots \right).$$

Оскільки границя функції $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 24$, то точка $z = 0$ — усувна особлива точка.

11. Обчислити інтеграл $\oint_{|z-1|=2} \frac{(z^3+1)dz}{\sin \frac{z}{3}(z^2+4)}$.

Розв'язок. Особливі точки підінтегральної функції:

$$z = 3k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots); \quad z = \pm 2i; \quad z = \infty.$$

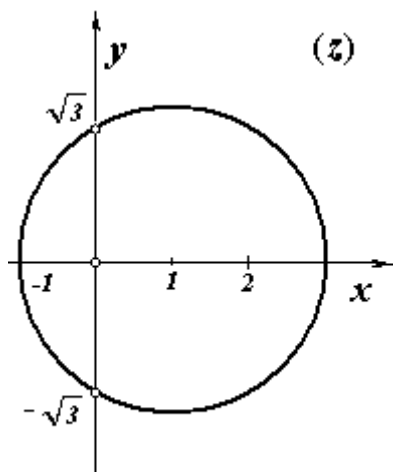


Рис. 41

Точка $z=0$ міститься всередині кола $|z-1|=2$ (рис.41). Використаємо основну теорему про лишки:

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{(z^3+1)dz}{\sin \frac{z}{3}(z^2+4)} = 2\pi i \operatorname{Res} f(0),$$

де $\operatorname{Res} f(0) = c_{-1}$ – коефіцієнт у розвиненні підінтегральної функції в ряд Лорана в околі точки $z=0$. Розкладемо функцію у ряд Лорана:

$$\begin{aligned} \frac{z^3+1}{\sin \frac{z}{3}(z^2+4)} &= \frac{z^3+1}{(z^2+4) \left(\frac{z}{3} - \frac{z^3}{3!3^3} + \frac{z^5}{5!5^5} - \dots \right)} = \\ &= \frac{z^3+1}{\frac{4}{3}z + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3!3^3} \right) z^3 + \left(\frac{4}{5!5^5} - \frac{1}{3!3^3} \right) z^5 + \dots} = \\ &= \frac{3}{4z} \cdot \frac{1+z^3}{1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3!3^2} \right) z^2 + \left(\frac{3}{5!5^5} - \frac{1}{3!3^2 4} \right) z^4 + \dots} = \\ &= \frac{3}{4z} \left(1 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3!3^2} \right) z^2 + \dots \right) = \frac{3}{4z} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3!3^2} \right) \frac{3z}{4} + \dots \end{aligned}$$

Із розвинення видно, що $c_{-1} = \frac{3}{4}$. Тоді

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{(z^3+1)dz}{\sin \frac{z}{3}(z^2+4)} = 2\pi i \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \pi i.$$

12. Обчислити інтеграл $\oint_{|z|=2} \frac{7+8z-2z^2+z^5}{z^3} dz$.

Розв'язок. 1-й спосіб. Запишемо $f(z) = \frac{7}{z^3} + \frac{8}{z^2} - \frac{2}{z} + z^2$. Всередині кола $|z|=2$ міститься одна особлива точка функції $z=0$ – полюс третього порядку. Коефіцієнт $c_{-1} = -2$ та інтеграл

$$\oint_{|z|=2} \frac{7+8z-2z^2+z^5}{z^3} dz = 2\pi i(-2) = -4\pi i.$$

2-й спосіб. Використаємо інтегральну формулу Коші :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-a)^n f(z) \right).$$

Тоді

$$I_1 = \oint_{|z|=2} \frac{7}{z^3} dz = 2\pi i \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left(z^3 \frac{7}{z^3} \right) = \pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} (7) = 0;$$

$$I_2 = \oint_{|z|=2} \frac{8}{z^2} dz = 2\pi i \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{8}{z^2} \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (8) = 0;$$

$$I_3 = - \oint_{|z|=2} \frac{2}{z} dz = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \left(z \left(-\frac{2}{z} \right) \right) = -4\pi i;$$

$$I_4 = \oint_{|z|=2} z^2 dz = 0, \text{ тому що } z^2 \text{ — аналітична функція всередині кола}$$

$$|z|=2. \text{ Таким чином, } \oint_{|z|=2} \frac{7+8z-2z^2+z^5}{z^3} dz = -4\pi i.$$

13. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$.

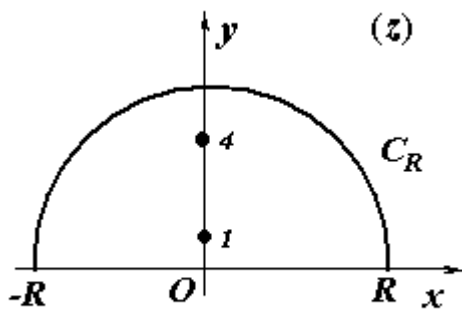


Рис. 42

Розв'язок. Введемо до розгляду функцію $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+16)}$, де $z = x + iy$. Для цієї

функції $z_1 = i$, $z_2 = -i$ — полюси другого порядку, $z_3 = 4i$ і $z_4 = -4i$ — полюси першого порядку. Особливі точки z_1 і z_3 лежать у верхній півплощині $\text{Im } z > 0$ (рис.42).

Розглянемо замкнений контур, що складається з відрізка $[-R, R]$ і півкола C_R радіуса R , яке з'єднує кінці відрізка $[-R, R]$.

Точки $z_1 = i$ і $z_3 = 4i$ розташовані всередині

цього контура. За основною теоремою про лишки:

$$\oint_L f(z) dz = 2\pi i (\text{Res } f(i) + \text{Res } f(4i)).$$

Перейдемо до границі в обох частинах останньої рівності при $R \rightarrow \infty$. Права частина рівності від R не залежить і залишається без змін. На контурі C_R

$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} f(z) dz = 0$, якщо $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ за умови, що $f(z)$ в околі $z = \infty$ поводить

себе принаймні як $O\left(\frac{1}{z^2}\right)$. У нашому випадку $f(z) \sim O\left(\frac{1}{z^6}\right)$. На відрізку $(-R, R)$

дійсної осі $z = x$, $dz = dx$. Тому $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 16)} = 2\pi i (\text{Res } f(i) + \text{Res } f(4i))$.

Лишок функції $f(z)$ відносно полюса $z = i$ знайдемо за формулою (51):

$$\begin{aligned} \text{Res } f(i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2(z^2+16)} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z+i)^2(z^2+16)} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{32 + 4z^2 + 2zi}{(z+i)^3(z^2+16)^2} = \frac{26}{1800i}; \end{aligned}$$

$$\text{Res } f(4i) = \lim_{z \rightarrow 4i} \frac{(z-4i)}{(z^2+1)^2(z^2+16)} = \lim_{z \rightarrow 4i} \frac{1}{(z^2+1)^2(z+4i)} = \frac{1}{1800i}.$$

$$\text{Остаточно } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)} = 2\pi i \left(\frac{26}{1800i} + \frac{1}{1800i} \right) = 0,03\pi.$$

$$14. \text{ Обчислити інтеграл } I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2+1)^2} dx.$$

Розв'язок. Введемо до розгляду функцію $f(z) = \frac{e^{3iz} - e^{2iz}}{(z^2+1)^2}$. Зазначимо,

що при $z = x$; $\text{Re } f(x) = \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2+1)^2}$. Точки $z_1 = i$ та $z_2 = -i$ — полюси

другого порядку функції $f(z)$. Полюс $z_1 = i$ лежить у верхній півплощині. Розглянемо замкнений контур L , що складається з відрізка $[-R, R]$ і півкола C_R радіуса R , яке з'єднує кінці відрізка $[-R, R]$ і лежить у верхній півплощині.

Згідно основної теореми про лишки $\oint_L \frac{e^{3iz} - e^{2iz}}{(z^2+1)^2} dz = 2\pi i \text{Res } f(i)$. Перейдемо до

границі в обох частинах останньої рівності при $R \rightarrow \infty$. На відрізку $(-R, R)$

$z = x$, $dz = dx$; на контурі C_R за лемою Жордана $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\lambda z} \varphi(z) dz = 0$, якщо

$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \varphi(z) = 0$, де λ – дійсне додатне число. У нашому випадку

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{(z^2 + 1)^2} = 0. \text{ Тому } I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3ix} - e^{2ix}}{(x^2 + 1)^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res} f(i).$$

Лишок $f(z)$ відносно полюса $z = i$ знайдемо за формулою (53):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left((z-i)^2 \frac{e^{3iz} - e^{2iz}}{(z^2 + 1)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{3iz} - e^{2iz}}{(z+i)^2} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{3iz}(3iz - 5) + 2e^{2iz}(2 - iz)}{(z+i)^3} = i \left(\frac{3}{4} e^{-2} - e^{-3} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } I = 2\pi i \cdot i \left(\frac{3}{4} e^{-2} - e^{-3} \right) = \left(2e^{-3} - \frac{3}{2} e^{-2} \right) \pi.$$

$$\text{Шуканий інтеграл } I_1 = \operatorname{Re} I = \left(2e^{-3} - \frac{3}{2} e^{-2} \right) \pi; I_2 = \operatorname{Im} I = 0.$$

Список літератури

1. Мельник Т.А. Комплексний аналіз : підручник. Київ: Київський університет, 2015. 192 с.
2. Коренков М.Є., Кальчук І.В., Харкевич Ю.І. Комплексний аналіз. Луцьк : Волиньполіграф, 2019. 469 с.
3. Тесленко Л.С., Чадаєв О.М., Менько Я.П. Комплексний аналіз. Миколаїв: МНУ, 2019. 121 с.
4. Слюсарчук П.В. Комплексний аналіз : навч. посібн. Ужгород : УжНУ, 2022. 244 с.
5. Н. М. Ясницька. Теорія функцій комплексної змінної та інтегральні перетворення : навч.-метод. посіб. / Ясницька Н. М., Ахієзер О. Б., Геляровська О. А., Боева А. А., Іглін С. П., Решетняк Ю. Б., Тевяшева О. А. Харків : Друкарня Мадрид, 2023. 246 с.
6. Верьовкіна Г.В. Ряди та інтеграли функцій комплексної змінної : навч. посіб. Київ : Видавець Кравченко Я.О. 2019. 51 с.
7. Крапива Н.В., Товстановська І.Б. Навчально-методичний посібник та розрахунково-графічна робота до розділу “Теорія функції комплексної змінної” з дисципліни “Вища математика”. – Одеса : Одеська політехніка. 2021. 83 с.
8. Уланова Н.П., Приходько В.В. Методичні рекомендації до опанування лекційних занять з розділу «Перетворення Лапласа» дисципліни «Операційне числення» для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 Прикладна

математика – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – 77 с. [Електронний ресурс]: сайт Нац. техн. ун-ту «Дніпровська політехніка» / кафедра прикладної математики – Текст. і граф. дані. Режим доступу:
<https://do.nmu.org.ua/course/view.php?id=6642#section-4>.

Навчальне видання

Уланова Наталія Петрівна
Приходько Віра Володимирівна

**Практикум з теорії функцій
комплексної змінної**

Навчальний посібник

Видано в авторській редакції.

Електронний ресурс.
Підписано до видання2025. Авт. арк.

Підготовлено до видання
в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.