МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНИЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНИКА»

С.Є. Тимченко, Д.В. Клименко

ЕЛЕМЕНТИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2025

УДК 517.972/974(075)
Т 41

Рекомендовано вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка»
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 113 (F1) Прикладна математика
(протокол № 15 від 24.09.2025)

Рецензенти:

К.Є. Золотько – канд. техн. наук, доц. (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара);

Н.В. Парфінович – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара).

Тимченко С. Є.

Т 41 Елементи варіаційного числення [Електронний ресурс] : навч. посіб. / С. Є. Тимченко, Д. В. Клименко; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2025. – 78 с.

Подано теоретичні основи дисципліни «Варіаційне числення». Розглянуто методи розв’язування різноманітних варіаційних задач. Містить велику кількість задач для самоконтролю, завдань для самостійного виконання та індивідуальне завдання для перевірки засвоєння матеріалу дисципліни.

Призначено для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 (F1) Прикладна математика. Може стати в пригоді здобувачам вищої освіти інших спеціальностей галузі знань F Інформаційні технології.

УДК 517.972/974(075)

Зміст

Передмова

Дистанційна форма навчання в закладах вищої освіти має певні складнощі, що зумовлені технічними і психологічними факторами. У зв'язку з цим студенти не завжди мають можливість правильно засвоїти зміст тих положень, понять та термінів, які вони спостерігають на екрані комп'ютера або чують упродовж заняття. Мета цього навчального посібника – забезпечити формування досягнень високого рівня математичної підготовки студентів у частині розв'язування оптимізаційних задач про дослідження екстремуму функціоналів. Набутий досвід розв'язування таких задач широко застосовується в різних галузях науково-природничих досліджень. Дисципліна «Елементи варіаційного числення» дає здобувачам уявлення про основи математичного моделювання й методи розв'язування задач про дослідження екстремуму функціоналів (за наявності обмежень і без них). У майбутньому такі знання і вміння можуть бути корисними в інших спеціальних розділах математики, а також застосовані в наукових дослідженнях різних наукових галузей і напрямів.

Кожна з розглянутих у посібнику тем містить теоретичну і практичну частини. Уся теоретична інформація має додаткові пояснення і супроводжується характерними прикладами. Практична частина орієнтована на розгляд тих випадків, що є ключовими для розуміння того чи іншого алгоритму розв'язування. Спеціальні навички, набуті студентами в процесі виконання самостійної роботи, стануть базовими для застосування методів досліджень та аналізу отриманих у практичній діяльності результатів.

Зміст навчального посібника відповідає системі підготовки здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 (F1) Прикладна математика, які опановують дисципліну «Елементи варіаційного числення». Також це видання може бути рекомендоване здобувачам вищої освіти інших спеціальностей галузі знань F Інформаційні технології.

1. Елементи варіаційного числення. Основні поняття і терміни

Варіаційне числення – це галузь математичного аналізу, яку започаткували у XVIII столітті Л. Ейлер та Ж-Л. Лагранж, а сьогодні вона є одним з найважливіших розділів теоретичної та прикладної математики. Математичний апарат варіаційного числення тією чи іншою мірою буває корисним у розв’язуванні широкого кола інженерних задач. Варіаційні принципи завдяки своєму глибокому ідейному значенню створюють можливості уніфікованого трактування різних фізичних і прикладних задач, формують загальні підходи до їхнього дослідження. Варіаційні методи розв’язування задач виявляються чи не найбільш ефективними в якісному та кількісному відношеннях. Отже, засвоєння основ цього розділу математики входить в освітній мінімум сучасного інженера. Уміння формулювати задачі мовою варіаційного числення відкриває, враховуючи можливості сучасної обчислювальної техніки, надзвичайно широкі перспективи числового розв’язування інженерних питань практично необмеженої складності з певною точністю. При цьому зводяться до мінімуму або виключаються дуже дорогі натурні експерименти, до того ж треба взяти до уваги можливості уведення різних значень параметрів і їхніх замін. Варіаційне числення можна віднести безпосередньо до елементарної теорії екстремумів.

Зміст цього навчального посібника являє собою вивчення розділів математики, у яких основним поняттям виступає функціонал. Функціонал – це змінна величина, залежна від вибору однієї або кількох функцій, що відіграють для нього роль аргументів. Варіаційне числення, зокрема метод пошуку екстремумів функціоналів, широко використовують у різних галузях фізики. Фактично всі закони природи, сформульовані зазвичай мовою диференціальних рівнянь, являють собою висновок з так званих «варіаційних принципів», відповідно до яких справжній рух фізичної системи можна виділити серед усіх допустимих як такий, що мінімізує деякі функціонали.

Історично першою відомою з давнини і віднесеною згодом до задач варіаційного числення є так звана задача Дідони (Софокл «Дідона і Еней»). Дідона – сестра царя фінікійського міста Тіра – переселилася на південний берег Середземного моря, де попросила у місцевого племені ділянку землі, яку можна охопити шкірою бика. Місцеві мешканці дали їй цю шкуру, яку Дідона розрізала на вузькі ремені та зв'язала їх між собою. Утвореним канатом вона охопила територію біля узбережжя. Згідно з легендою, так було засновано місто Карфаген. Виникає питання, як охопити максимальну площу канатом заданої довжини?

Задача зводиться до максимізації площі охопленої території, тобто до максимізації такого інтеграла: $S = \int_a^b y(x)dx$, де *y(x)* – це функція сухопутної межі ділянки. Довжину нитки можна обчислити за допомогою наступного інтеграла: $L = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx$, при цьому крайові значення функції $y(a) = 0, \quad y(b) = 0$. Вже в давнину було виявлено, що шуканою формою нитки є дуга кола.

2. Поняття про функціонал

У задачах на визначення екстремуму математична теорія проявляє себе дуже переконливим чином. Її перехід до практичного змісту негайний, а користь очевидна. Пошук екстремальних значень важливий під час аналізу функцій та залежностей інших типів, зокрема функціоналів. Дослідженню функціоналів на екстремум присвячений спеціальний розділ математики, так зване варіаційне числення, де вивчаються умови, за яких функціонал досягає екстремуму, і розробляються способи, що ведуть до реалізації цього екстремуму. Функціонали набувають широкого застосування в таких науках, що активно користуються математичними методами.

Функціонал як математичне поняття спочатку виникло у варіаційному численні і визначається як змінна величина, що залежить від функції (лінії) або від кількох функцій. Прикладами функціонала є площа, обмежена замкненою кривою заданої довжини, робота силового поля вздовж тієї чи іншої дороги тощо.

Нехай існує безліч функцій, що відповідають певним умовам. Закон або правило, за яким кожній функції з певної множини ставиться у відповідність цілком певне числове значення, називається функціоналом, визначеним на цій множині функцій.

Якщо X та Y – це дві множини дійсних чисел і заданий закон f, за яким кожному числу $x \in X$ відповідає єдине число $y \in Y$, то говорять, що на множині X існує однозначна **функція** $y = f(x)$, що відображає X у Y (або X на Y, коли в Y немає інших елементів, окрім отриманих за законом f). Пишуть тоді $f: X \to Y$. Така відповідність **«число → число»** поширюється на випадок, коли Y – множина чисел, а елементами множини X є упорядковані набори дійсних чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, тобто точки або вектори n-вимірного простору. Тоді закон відображення $f: X \to Y$ визначає функцію з n змінними, що має вигляд $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Відображення $f: X \to Y$, де X – множина чисел, а Y – множина числових підпорядкованих наборів $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ з відомими залежностями $y_i = f_i(x)$, де i = 1, 2,…n, породжує поняття вектор-функції $\vec{y} = \{f_1(x), f_{2(x)}, \dots, f_n(x)\}$. Коли $n = 2$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ і $X = N$ (множина натуральних чисел) значенням x = 1, x = 2, x = 3 відповідають вектори $\vec{y}(x) = y(1) = \{1,1\}$, $\vec{y}(x) = y(2) = \{2,4\}$, $\vec{y}(x) = y(3) = \{3,9\}$.

Нехай тепер X – множина функцій $x = x(t)$, а Y – множина чисел y. На множині X визначений **функціонал** $y = J\{y\}$, якщо заданий закон J, за яким кожній функції $x = x(t) \in X$ відповідає єдине число $y \in Y$. Пишуть $J: X \to Y$ або $y = J\{y\}$. Також можливо позначення $y = J[y]$ **. Функціонал** надає відповідність **«функція → число»**.

Функціонали широко застосовуються в математиці і науках, що використовують її методи. Площа криволінійної трапеції $S=\int_a^b y(x)dx$, об'єм тіла обертання $V=\pi\int_a^b y^2(x)dx$, довжина дуги кривої $L=\int_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$, площа поверхні обертання $P=2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$ – це числові величини, що залежать від вибору функції $y(x)$, математично – це не що інше, як функціонали $S = S\{y\}$, $V = V\{y\}$, $L = L\{y\}$, $P = P\{y\}$. Ці функціонали визначені на деякій допустимій множині функцій. Якщо цю множину обмежити певними умовами, наприклад, вимагати, щоб криві $y = y(x)$ проходили через дві задані точки і мали фіксовану довжину, тоді пошук функції $y(x)$, що доставляє екстремум функціоналу $S\{y\}$ або $V\{y\}$, $P\{y\}$, складає варіаційну задачу. При розв'язувані варіаційних задач виводяться закони руху механічних систем, встановлюються фундаментальні положення термодинаміки, оптики, квантової механіки та інших галузей фізики.

Нехай на множині M функцій $y(x)$ заданий функціонал $J=J\{y\}$, якщо кожному елементу $y(x) \in M$ за деяким законом відповідає певне число J, тоді функціонал $J=J\{y\}$ є змінною скалярною величиною, що має своїм аргументом функцію $y(x) \in M$.

Наприклад, $J\{y\}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=y'(1)$ і $G\{y\}=\int_0^1 (y'(x))^2dx$ – це функціонали, перший з яких визначений на множині функцій $y(x)$, що диференційовані у точці $x = 1$, а другий – на множині функцій, що неперервно диференційовані на відрізку [0,1]. Функціям $y_1=x^2,\quad y_2=e^x,\quad y_3=\ln(x+1)$ відповідають числа

$$J_1=J_1\left\{x^2\right\}=2,\quad J_2=J_2\left\{e^x\right\}=e,\quad J_3=J_3\left\{\ln(x+1)\right\}=\frac{1}{2}$$

та

$$G_1 = G_1\left\{x^2\right\} = \frac{4}{3}, \quad G_2 = G_2\left\{e^x\right\} = \frac{1}{2}(e^2 - 1), \quad G_3 = G_3\left\{\ln(x+1)\right\} = \frac{1}{2}.$$

Зверніть увагу на те, що $y = J\left\{y\right\}$ – це аж ніяк не те, що раніше розумілося під складною функцією, скажемо, $F(y(x)) = [y(x)]^2$ і так далі. Така функція при підстановці кожної $y(x)$ дає нову функцію, значення якої при кожному $x = x_0$, тобто $F(y(x_0))$, повністю визначається значенням $y(x_0)$. На відміну від цього, функціонал $J = J\left\{y\right\}$ при кожній конкретній функції $y(x)$ є число, що визначається, взагалі кажучи, не якимось одним її значенням, а усією залежністю $y(x)$. Можна сміливо сказати, що функціонал – це функція, у якій значеннями незалежної змінної служать звичайні функції, а значеннями залежної змінної служать числа. Оскільки функцію $y(x)$ можна представити кривою $y = y(x)$, то можна сказати: функціонал $J = J\left\{y\right\}$ визначений на сукупності M ліній $y = y(x)$.

Наближаючи термінологію до функцій, що використовується, умовно говорять також, що функціонал $J = J\left\{y\right\}$ заданий на множині «точок $y(x)$».

Функціонал $J = J\left\{y\right\}$ буде лінійним, якщо мають місто властивості:

1) однорідності: $J\left\{\lambda y\right\} = \lambda J\left\{y\right\}, \quad \lambda - const$;

2) адитивності: $J\left\{y_1 + y_2\right\} = J\left\{y_1\right\} + J\left\{y_2\right\}$.

Наприклад, функціонал $S = \int\limits_a^b y(x)dx$ є лінійним, $L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx$ не є лінійним.

Приклад 1. Обчислити функціонал $J\{y\} = \int\limits_0^1 y^2(x)dx$, якщо $y_1(x) = x, \quad y_2(x) = e^x, \quad y_3(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Розв'язування. Маємо функціонал заданий як визначений інтеграл $J\{y\} = \int\limits_0^1 y^2(x)dx$. Підставляємо зазначені функції, отримуємо числові значення функціонала.

Отже, якщо $y_1(x)=x \Rightarrow J\{y\}=\int\limits_0^1 x^2 dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$;

Якщо $y_2(x)=e^x \Rightarrow$ $J\{y\}=\int\limits_0^1 e^{2x}dx=\left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}(e^2-1)$; коли $y_3(x)=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow$

$$J\{y\}=\int\limits_0^1(\sqrt{1+x^2})^2 dx=\int\limits_0^1(1+x^2)dx=x+\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.$$

Відповідь: $J\{y_1\}=\frac{1}{3}$, $J\{y_2\}=\frac{1}{2}\cdot\left(e^2-1\right)$, $J\{y_3\}=\frac{4}{3}$.

Приклад 2. Обчислити функціонали $J\{y\}=\int\limits_0^1 xy(x)dx$ і $H\{y\}=y(1)$, якщо $y_1(x)=x$, $y_2(x)=x^2$, $y_3(x)=e^x$.

Розв'язування. Маємо функціонал $J\{y\}=\int\limits_0^1 xy(x)dx$ заданий як визначений інтеграл, а функціонал $H\{y\}=y(1)$ заданий як значення функції $y(x)$ в точці x = 1. Підставляємо зазначені функції, отримуємо числові значення функціоналів. Отже,

якщо $y_1(x)=x \quad \Rightarrow J\{y_1\}=\int\limits_0^1 xy_1(x)dx=\int\limits_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$, $H\{y_1\}=y(1)=1$;

якщо $y_2(x)=x^2 \quad \Rightarrow J\{y_2\}=\int\limits_0^1 xy_2(x)dx=\int\limits_0^1 x\cdot x^2dx=\int\limits_0^1 x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}$; $H\{y_2\}=y_2(1)=1$;

якщо $y_3(x)=e^x$, $J\{y_3\}=\int\limits_0^1 xe^x dx=\left.xe^x\right|_0^1-\int\limits_0^1 e^x dx=\left.xe^x\right|_0^1-\left.e^x\right|_0^1=1$, $H\{y_3\}=e.$

Відповідь: $J\{y_1\}=\frac{1}{3}$, $H\{y_1\}=1$, $J\{y_2\}=\frac{1}{4}$, $H\{y_2\}=1$, $J\{y_3\}=1$, $H\{y_3\}=e$.

Завдання для самостійного виконання

Варіант 1.

1. Обчислити функціонал $J\{y\}=\int_0^2 y^3(x)dx$, якщо $y_1(x)=x,\quad y_2(x)=e^x,\quad y_3(x)=\sqrt{x^2+1}$.

2. Обчислити функціонали $J\{y\}=\int_0^1 xy^2(x)dx$ і $H\{y\}=y(5)$, якщо $y_1\left(x\right)=x$, $y_2\left(x\right)=x^2$, $y_3\left(x\right)=e^x$.

Варіант 2.

1. Обчислити функціонал $J\{y\}=\int_0^2 y^3(x)dx$, якщо $y_1(x)=x^2,\ y_2(x)=\sqrt{x},\ y_3(x)=\sqrt[3]{\ln x}$.

2. Обчислити функціонали $J\{y\}=\int_0^1 xy^2(x)dx$ і $H\{y\}=y(5)$, якщо $y_1(x)=x^3,\ y_2(x)=\sqrt{x+1},\ y_3(x)=e^{2x}$.

Варіант 3.

1. Обчислити функціонал $J\{y\}=\int_0^1 y^2(x)dx$, якщо $y_1(x)=x^2,\ y_2(x)=\sqrt{x},\ y_3(x)=\sqrt{\ln(x+1)}$.

2. Обчислити функціонали $J\{y\}=\int_0^1 xy(x)dx$ і $H\{y\}=y(1)$, якщо $y_1(x)=x^3,\ y_2(x)=\sqrt{x+1},\ y_3(x)=e^{2x}$.

Варіант 4.

1. Обчислити функціонал $J\{y\}=\int_0^2 y^4(x)dx$, якщо $y_1(x)=x^3,\ y_2(x)=x,\ y_3(x)=\sqrt[4]{\ln x}$.

2. Обчислити функціонали $J\{y\}=\int_0^3 x^2y^2(x)dx$ і $H\{y\}=y(2{,}5)$, якщо $y_1(x)=x^3,\ y_2(x)=\sqrt{x+1},\ y_3(x)=e^{2x}$.

Варіант 5.

1. Обчислити функціонал $J\{y\}=\int_0^1 y^2(x)dx$, якщо $y_1(x)=\sqrt[3]{x},\ y_2(x)=\sin x,\ y_3(x)=\sqrt{\ln(x-1)}$.

2. Обчислити функціонали $J\{y\}=\int_0^1 xy(x)dx$ і $H\{y\}=y(1)$, якщо $y_1(x)=x^5,\ y_2(x)=\sqrt{x^2+1},\ y_3(x)=e^{-x}$.

Варіант 6.

1. Обчислити функціонал $J\{y\}=\int_0^{1,5} y^{-4}(x)dx$, якщо $y_1(x)=x^3,\ y_2(x)=\cos x,\ y_3(x)=\sqrt[4]{x^2+1}$.

2. Обчислити функціонали $J\{y\}=\int_0^1 x^3y(x)dx$ і $H\{y\}=y(0{,}5)$, якщо $y_1(x)=x^3,\ y_2(x)=\sqrt{x+1},\ y_3(x)=e^{2x}$.

3. Функціональні простори

При розгляді функціоналів та його екстремумів буває корисно уточнити **область визначення функціонала**, тобто сукупність функцій, для яких він розглядається. Зазвичай ця сукупність є деяким лінійним простором або його частиною, що складається з функцій, над якими лінійні дії виконуються за найпростішими правилами. Такі простори називаються **функціональними просторами**, вони найчастіше нескінченномірні. Функціональні простори зазвичай є **нормованими***,* тобто в них є поняття **норми***,* що характеризує відхилення функції від тотожного нуля. Норма функції f позначається $\|f\|$, вона є кінцевим дійсним числом и повинна задовольняти наступним вимогам (**аксіомам норми**):

1. $\| f \| \geq 0$, причому $\| f \| = 0$ тільки для тотожної нульової функції f.

2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|, \quad \lambda - const$

3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Відмітимо, що всі функції, що складають лінійний функціональний простір, повинні бути заданими на одному й тому ж інтервалі, оскільки в іншому випадку їх не можна додавати один до одного.

Приклади лінійних функціональних просторів.

1. **Простір** $C_{[a,\ b]}$ функцій, що є заданими і неперервними на кінцевому інтервалі $a \leq x \leq b$. Норма елементу в цьому просторі має вигляд

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Ця норма відповідає рівномірному відхиленню функцій однієї від іншої.

2. **Простір** $C^{1}_{[a,b]}$ функцій, що задані і неперервні при $a \leq x \leq b$, разом зі своєю похідною. Норма елементу в цьому просторі має вигляд

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

В якості норми в C^{1} можна взяти також не суму, а найбільший з доданків, що стоять в правій частині; ця відмінність виявляється несуттєвою.

Аналогічно вводиться **простір** $C^{n}_{[a,b]}$, якщо $n = 2, 3, 4, \ldots$

В нормованому просторі вводиться поняття відстані ρ між будь-якими елементами f та g за формулою $\rho(f, g) = \|f - g\|$; для функціональних просторів така відстань є як раз відхилення функцій f та g одна від іншої.

Будемо казати, що функціонал $J\{y\}$ досягає, коли $y = y_0(x)$ екстремуму, якщо різниця $J(y) - J(y_0)$ зберігає сталий знак для всіх y з заданого класу функцій, що визначені на інтервалі [a,b] і “достатньо близькі” до функції y_0. Поняття близькості двох функцій: будь-які дві неперервні функції $y(x)$ і $y_0(x)$, що визначені на проміжку [a,b], близькі в сенсі близькості нульового порядка, якщо модуль різниці цих функцій є малою величиною, тобто якщо $|y - y_0| < \varepsilon$, де ε – мале додатне число. Екстремум функціонала, який досягається на множині неперервних функцій, близьких в сенсі близькості нульового порядка, називається сильним (Рис.1).

Пошук екстремуму функціонала $J\{y\}$ передбачає порівняння числа

$$J_0\{y\} = J\{y_0\},$$

що відповідає фіксованій функції (лінії, точці) $y_0(x)$, зі значеннями $J\{y\}$ для однотипних з $y_0(x)$ функцій (ліній, точок) $y(x)$ з близького околу $y_0(x)$. Однотипність функцій забезпечується їх належністю одному й тому ж нормованому простору. Зокрема, застосовують простір $C_{[a,\ b]}$ неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $y(x)$ з нормою

$$\|y(x)\| = \max_{a \le x \le b} |y(x)|, \tag{1}$$

простори $C^n_{[a,b]}$, якщо n = 2, 3, 4,… неперервних на відрізку $[a,b]$ разом з їх похідними до порядка n включно з нормою

$$\|y(x)\| = \max_{a \le x \le b} |y(x)| + \max_{a \le x \le b} |y'(x)| + \max_{a \le x \le b} |y''(x)| + \ldots + \max_{a \le x \le b} \left|y^{(n)}(x)\right|. \tag{2}$$

Залежно від простору, що розглядається, по-різному розуміється близькість функцій (ліній, точок), розрізняються і властивості функціонала. Зміну аргументу функціонала, що спричинена переходом від кривої $y = y_0(x)$ до кривої $y = y(x)$, тобто різницю

$$\delta y = y(x) - y_0(x) \tag{3}$$

називають **варіацією аргумента (функції) $y_0(x)$.** Разом з функцією змінюються і її похідні. Варіація похідної $y_0'(x)$ має вигляд $\delta y' = y'(x) - y_0'(x) = [y(x) - y_0(x)]' = (\delta y)'$, за аналогією $\delta y'' = (\delta y)''$ і так далі. Множина неперервних на $[a, b]$ функцій $y(x)$ утворює для функції $y_0(x)$ її **ε-окіл нульового порядку,** інакше кажучи, **сильний окіл**, якщо при фіксованому числі ε > 0

$$\max_{a \le x \le b} |\delta y(x)| = \max_{a \le x \le b} |y(x) - y_0(x)| < \varepsilon \tag{4}$$

Цьому околу належать всі можливі неперервні криві $y = y(x)$ (графіки неперервних функцій), які від кривої такого ж типу $y = y_0(x)$ відрізняються за ординатою не більш, чім на ε, в межах $[a,b]$ вони повністю лежать всередині смуги шириною 2ε, прилеглі до лінії $y = y_0(x)$ (Рис. 1).

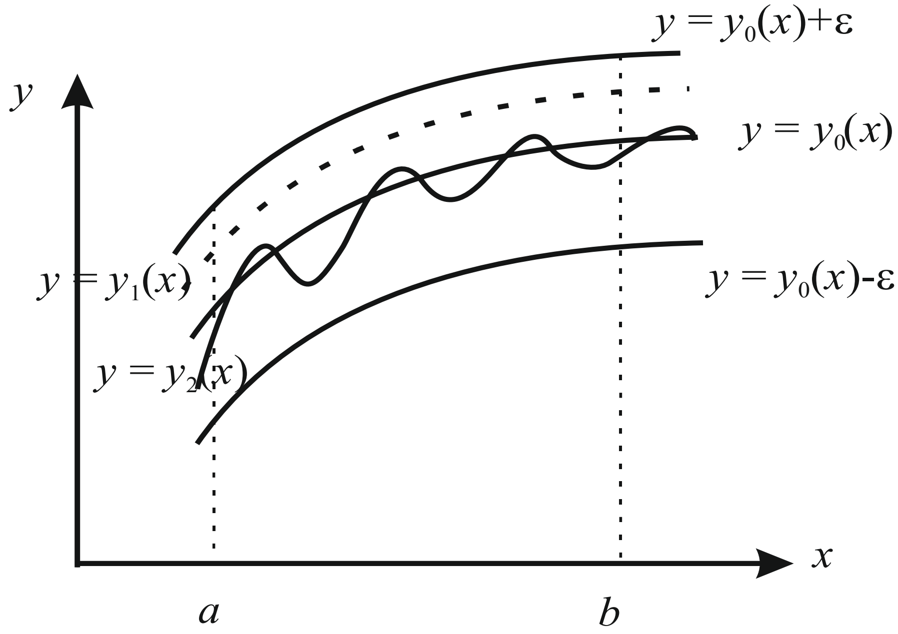

Рисунок 1. ε-окіл нульового порядку функції $y_0(x)$

Нехай функціонал $J\{y\}$ має при $y = \bar{y}(x)$ локальний максимум. Це означає, що для всіх функцій $y(x)$, не тотожно рівних $\bar{y}(x)$ і достатньо близьких до $\bar{y}(x)$, буде $J\{y\} < J\{\bar{y}\}$. В подальшому будемо досліджувати, як правило, функціонали, що природньо розглядати в просторах C^1 або C. Якщо $J\{y\} < J\{\bar{y}\}$ для всіх y, близьких до $\bar{y}$ в просторі C, то кажуть, що на функції $y(x)$ досягається **сильний максимум функціонала** $J\{y\}$. Якщо $J\{y\} < J\{\bar{y}\}$ для всіх y, близьких до $\bar{y}$ в просторі C^1, то кажуть за **слабкий максимум функціонала** $J\{y\}$. При цьому сильний екстремум функціонала завжди буде також і слабким, але зворотне не обов'язково.

Скажемо, що неперервно диференційовані на відрізку $[a, b]$ функції $y(x)$ складають **ε-окіл 1-го порядка** або **слабкий окіл** функції $y_0(x)$, якщо

$$\max_{a\le x\le b}|\delta y| + \max_{a\le x\le b}|\delta y'| = \max_{a\le x\le b}|y(x) - y_0(x)| + \max_{a\le x\le b}|y'(x) - y_0'(x)| < \varepsilon \qquad (5)$$

За аналогією вводиться поняття ε-окіл порядка n = 2, 3, ...

Лінії $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ (Рис. 1) входять в сильний окіл кривої $y = y_0(x)$, оскільки для кожної з них зберігається умова (4). Слабкому околу з таких ліній належить тільки $y = y_1(x)$, тоді як лінія $y = y_2(x)$ в неї не потрапляє через велику розбіжність з лінією $y = y_0(x)$ по значенням похідних $y'_2(x)$ і $y'_0(x)$, що при невеликому ε приводить до порушення нерівності (5). Всі криві з слабкого околу входять також в сильний окіл $y_0(x)$, протилежне твердження місця не має.

Визначення (4), (5) з довільно малим ε дозволяють характеризувати степінь близькості функцій (кривих, точок) $y(x)$ до $y_0(x)$. **Близькість нульового порядку** означає як завгодно мале відхилення кривих за її ординатами. **Близькість 1-го порядку** накладає на функцію $y(x)$ ще більше обмежень: криві $y = y(x)$ повинні зараз як завгодно мало відрізняться від лінії $y = y_0(x)$ і за ординатами, і за нахилом дотичних. В нормованому просторі відстань між його елементами $y(x)$ і $y_0(x)$ має вигляд

$$\rho = \rho(y, y_0) = \|y(x) - y_0(x)\| = \|\delta y\| \tag{6}$$

З урахуванням (1), (2) і (6), коли n = 1, нерівності (4) та (5) допускають такий запис

$$\rho = \rho(y, y_0) < \varepsilon \tag{7}$$

Якщо умову (7) можна здійснити у просторі функцій $C_{[a,\ b]}$ для довільно малого ε > 0, тобто відстань ρ може бути зробленою як завгодно малою, то близькість функцій $y(x)$ і $y_0(x)$ буде нульового порядку. Виконання умови (7) при як завгодно малому ε в просторі $C^{1}_{[a,b]}$ означає, що близькість функцій $y(x)$ і $y_0(x)$ 1-го порядку. За визначеннями (1) і (2) функції з 1-м порядком близькості мають також нульовий порядок близькості.

Приклад 3. Дослідити близькість функцій $y_1(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2}$ і $y_2(x) = \dfrac{\cos nx}{n}$ на відрізку $[0,\pi]$.

Розв'язування. Відстань функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ від функції $y_0(x)$ = 0 з урахуванням (1), (2) і (6) можемо записати в просторі $C_{[0,\ \pi]}$

$$\rho(y_1,y_0)=\|y_1-y_0\|=\max_{0\le x\le\pi}\left|\frac{\cos nx}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2},$$

$$\rho(y_2,y_0)=\|y_2-y_0\|=\max_{0\le x\le\pi}\left|\frac{\cos nx}{n}-0\right|=\frac{1}{n},$$

в просторі $C^1_{[0,\pi]}$

$$\rho(y_1,y_0)=\|y_1-y_0\|_{C_1}=\max_{0\le x\le\pi}\left|\frac{\cos nx}{n^2}-0\right|+\max_{0\le x\le\pi}\left|\frac{-\sin nx}{n}\right|=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n},$$

$$\rho(y_2,y_0)=\|y_2-y_0\|_{C_1}=\max_{0\le x\le\pi}\left|\frac{\cos nx}{n}-0\right|+\max_{0\le x\le\pi}\left|-\sin nx\right|=\frac{1}{n}+1.$$

Зі збільшенням n відстані функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ від функції $y_0(x)=0$ відповідно в просторі $C_{[0,\ \pi]}$ стають доволі малими. В просторі $C^1_{[0,\pi]}$ це справедливо тільки для відстані $\rho(y_1,y_0)$, тоді як відстань $\rho(y_2,y_0)>1$ для $n\to\infty$, тобто відстань $\rho(y_2,y_0)$ не є малою величиною. Отже, близькість функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ до функції $y_0(x)$ нульового порядка, а близькість 1-го порядка має тільки функція $y_1(x)$.

Відповідь: близькість функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ до функції $y_0(x)$ нульового порядка в просторі $C_{[0,\ \pi]}$, а близькість 1-го порядка має тільки функція $y_1(x)$ в просторі $C^1_{[0,\pi]}$.

Приклад 4. Знайти відстані в C и C^1 між функціями $y_1(x)=x$ і $y_2(x)=\ln(x)$ на відрізку $x\in[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}]$.

Розв’язування. Для обчислення відстані в класі C використовуємо формулу $\rho(y_1,y_2)=\|y_1-y_2\|=\max\limits_{\frac{1}{e}\le x\le e}|x-\ln x|$. Щоб обчислити максимальну за модулем різницю між двома функціями, скористаємося звичайними прийомами пошуку найбільшого значення функції на відрізку. Знайдемо всі екстремуми функції $y_1(x)-y_2(x)$ в інтервалі $x\in(e^{-1},e)$, потім обчислимо значення цієї функції на кінцях інтервалу, і виберемо найбільше за модулем значення − це і буде відстань між $y_1(x)$ і $y_2(x)$ в класі C. Досліджуємо на екстремум функцію $y_1(x) - y_2(x)$, маємо

$$y_1'(x) - y_2'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} = 0; \quad \Rightarrow \quad x = 1; \quad y_1(x) - y_2(x) = 1.$$

Значення функції $y_1(x) - y_2(x)$ на кінцях інтервалу $x \in (\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e})$:

$$y_1(e^{-1}) - y_2(e^{-1}) = \frac{1}{e} + 1 = 1{,}36787944117144,$$

$$y_1(e) - y_2(e) = e - 1 = 1{,}7182812845905.$$

З трьох обчислених значень функції (вони всі додатні) вибираємо максимальну – це і є відстань між функціями в класі C:

$$\rho(y_1, y_2) = \|y_1(x) - y_2(x)\|_C = e - 1 \approx 1{,}71828182845905.$$

Відповідь: $\rho(y_1, y_2) \approx 1{,}72$ в класі C на відрізку $[\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}]$.

Приклад 5. Знайти відстань ρ_0 між функціями $y = x^2$ і $y = x$ в класі $C_{[0,\,1]}$.

Розв'язування. За визначенням $\rho(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\| = \max\limits_{0 \le x \le 1} \left| x^2 - x \right|$. На кінцях відрізка [0, 1] функція $y = x^2 - x$ приймає значення, що дорівнюють нулю. Дослідимо її на екстремум в інтервалі (0, 1). Маємо $y' = 2x - 1$, $y' = 0$, якщо $x = 1/2$. Оскільки $y''(1/2) = 2 > 0$, то в точці $x = 1/2$ дослідна функція досягає мінімума, що дорівнює 1/4. Тому вираз $|x^2 - x|$ приймає в точці $x = 1/2$ найбільше на відрізку [0, 1] значення, що дорівнює 1/4. Отже, відстань між функціями $y = x^2$ і $y = x$ в класі $C_{[0,\,1]}$ дорівнює $\rho_0 = 1/4$.

Відповідь: $\rho(y_1, y_2) = \dfrac{1}{4}$ в класі C на відрізку [0, 1].

Завдання для самостійного виконання

Варіант 1.

1. Дослідити близькість функцій $y_1(x) = \dfrac{\sin nx}{(n+1)^2}$ і $y_2(x) = \dfrac{\sin nx}{n(n+1)}$ на відрізку $[0, \pi]$.

2. Знайти відстань ρ_0 між функціями $y_1 = xe^{-x}, \quad y_2 = 0$ на відрізку [0, 2].

Варіант 2.

1. Дослідити близькість функцій $y_1(x) = \frac{\sin nx}{(n+1)^2}$ і $y_2(x) = \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ на відрізку $[\pi, 2\pi]$.

2. Знайти відстань ρ_1 між функціями $y_1(x) = 1$ і $y_2(x) = 1nx$ в класі $C^1_{\left[\frac{1}{e},\, e\right]}$.

Варіант 3.

1. Дослідити близькість функцій $y_1(x) = \frac{\cos nx}{(n+1)^2}$ і $y_2(x) = \frac{\cos nx}{n(n+1)}$ на відрізку $[0,\pi]$.

2. Знайти відстань ρ_0 між функціями $y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = x$ на відрізку [0, 2].

Варіант 4.

1. Дослідити близькість функцій $y_1(x) = \frac{\cos nx}{(n+1)^2}$ і $y_2(x) = \frac{\cos nx}{n(n+1)}$ на відрізку $[6\pi, 7\pi]$.

2. Знайти відстань ρ_1 між функціями $y_1(x)= x^2$ і $y_2(x) = x^3$ в класі $C^1_{\left[\frac{1}{e},\, e\right]}$.

Варіант 5.

1. Дослідити близькість функцій $y_1(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$ і $y_2(x) = \frac{\cos nx}{n}$ на відрізку $[\pi, 2\pi]$.

2. Знайти відстань ρ_0 між функціями $y(x) = (x+1)^2$ і $y(x) = (x-1)^2$ в класі $C_{[0,\, 1]}$.

Варіант 6.

1. Дослідити близькість функцій $y_1(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$ і $y_2(x) = \frac{\cos nx}{n}$ на відрізку $[3\pi, 4\pi]$.

2. Знайти відстань ρ_1 між функціями $y_1(x) = 2$ і $y(x) = \ln(x-1)$ в класі $C^1_{[e+1,\ e+2]}$.

4. Приріст та неперервність функціонала

Варіація – це одне з центральних понять щодо нелінійних функціоналів, воно грає таку ж роль, що поняття диференціала щодо нелінійних функцій.

Для визначення поняття варіації функціонала, передусім необхідно розглянути поняття приросту функціонала.

При переході від функції $y_0(x)$ до близької функції $y(x) = y_0(x) + \delta y$ функціонал $J\{y\}$ отримує приріст

$$\Delta J = J\{y + \delta y\} - J\{y\} \tag{8}$$

Розглянемо, наприклад, функціонал $J = \int_0^2 y^2(x)dx$. Нехай функція $y(x)$, від якої залежить його значення, спочатку співпадала з деякою функцією $\bar{y}(x)$, а потім переходить до деякої іншої, близької функції $\bar{y}(x) + \delta y(x)$ (Рис.2). Тут $\delta y(x)$ (символ δy слід розуміти як єдиний) – це **варіація аргументу (функції)** $y(x)$, тобто довільна функція, що мало відхиляється від нуля і додається до початкової функції $y(x)$ для отримання нової, **проварійованої (диференційованої)** функції $\bar{y}(x) + \delta y(x)$. Наприклад, розглянемо вираз $\bar{y}(x) + \delta y(x)$, функціонал $J = \int_0^2 y^2(x)dx$ при переході від $y(x)$ до $\bar{y}(x) + \delta y(x)$ отримує приріст

$$\Delta J = J\{\bar{y} + \delta y\} - J\{\bar{y}\} = \int_0^2 (\bar{y}(x) + \delta y(x))^2 dx - \int_0^2 \bar{y}(x)^2 dx = 2\int_0^2 \delta y(x)dx + \int_0^2 (\delta y(x))^2 dx.$$

Позначимо

$$\Delta J = 2\int_0^2 \delta y(x)dx + \int_0^2 (\delta y(x))^2 dx \tag{8'}$$

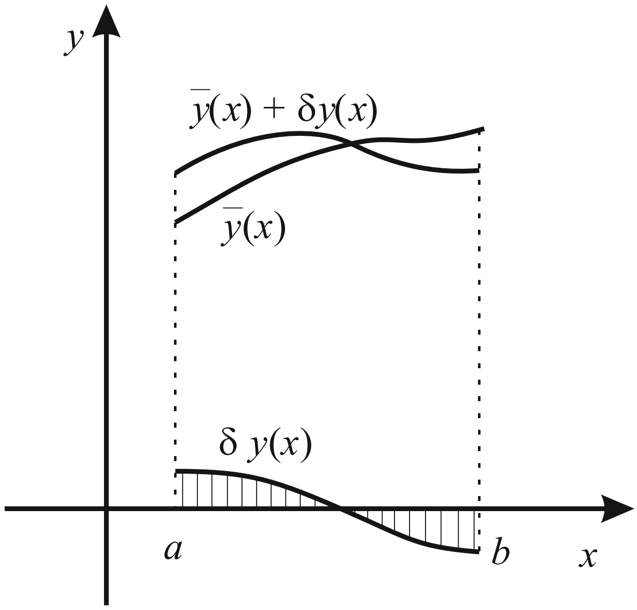

Рисунок 2. Варіація функціонала

Нехай зараз функція $\bar{y}(x)$ зафіксована, а функцію $\delta y(x)$ можна вибирати довільно. Бачимо, що тоді приріст функціонала ΔJ складається з двох частин, кожна з яких є функціонал щодо $\delta y(x) = y(x) - \bar{y}(x)$. Перша частина приросту $2\int_0^2 \delta y(x)dx$ має властивість лінійності, тобто це лінійний функціонал, тоді як друга частина $\int_0^2 (\delta y(x))^2 dx$ при малих δy має вищий порядок малості. Таким чином, перша частина є головною (тобто з точністю до члену вищого порядку малості) лінійною частиною приросту даного функціонала. При переході від $\bar{y}(x)$ до $\bar{y}(x) + \delta y(x)$ вираз $2\int_0^2 \delta y(x)dx$ називається **(першою) варіацією** δJ **функціонала** $J = \int_0^2 y^2(x)dx$; можна написати

$$\delta J = \delta \int_0^2 y(x)^2 dx = 2\int_0^2 y(x)\delta y(x)dx. \tag{9}$$

Оскільки функція $\bar{y}(x)$ довільна , то в (9) замінили її позначення на функцію $y(x)$.

Розібраний приклад є типовим. Якщо заданий довільний функціонал $J = J\{y\}$ і переходимо від функції $y(x)$ до функції $y(x) + \delta y(x)$, то, як правило, приріст функціонала можна подати у вигляді суми двох доданків

$$\Delta J = J_1\{y, \delta y\} + R_1\{y, \delta y\}. \tag{10}$$

Перший з яких при фіксованій функції $y(x)$ являє собою лінійний функціонал щодо $\delta y(x)$, а другий доданок має відносно $\delta y(x)$ вищий порядок малості. Тоді перший доданок у правій частині і називається **варіацією функціонала** J, тобто $\delta J = J_1\{y, \delta y\}$.

У випадках, коли доданком вищого порядку малості можна знехтувати, можна сказати просто, що варіація функціонала – це його нескінченно мала зміна, тобто зміна, що отримана за рахунок нескінченно малої варіації функції, від якої залежить цей функціонал. Заміна приросту функціонала на його варіацію означає лінеаризацію цього функціонала, аналогічно поняттю диференціала функції.

Говорять, що функціонал $J\{y\}$ **неперервний** в точці $y_0(x)$, якщо будь-якої нескінченно малої за нормою варіації його аргумента в цієї точці відповідає нескінченно малий приріст функціонала: $\Delta J \to 0$, коли $\rho = \|\delta y\| \to 0$.

Для $J = \int_0^2 y^2(x)dx$ в просторі $C_{[0,2]}$ маємо

$$|y_0(x)| \le \|y_0(x)\|; \ |\delta y| \le \|\delta y\| = \rho,$$

$$\left|\int_0^2 2y_0(x)\delta y dx\right| \le 2\int_0^2 |y_0(x)||\delta y| dx \le 2\|y_0\| \cdot \|\delta y\| \int_0^2 dx = 4\|y_0\| \cdot \rho,$$

$$\left|\int_0^2 (\delta y)^2 dx\right| \le 2\int_0^2 |\delta y|^2 dx \le \|\delta y\|^2 \cdot \int_0^2 dx = 2\rho^2.$$

При $\rho \to 0$ через обмеженість $\|y_0\|$ і отриманих оцінок доданки з правої частини (8') спадають до нулю, отже, приріст функціонала $\Delta J \to 0$ також. Це означає, що функціонал $J = \int_0^2 y^2(x)dx$ неперервний в будь-якій точці $y_0(x) \in C_{[0,2]}$.

В різних функціональних просторах норма елементу простора вводиться по-різному, що позначається на властивості неперервності: функціонал, неперервний в одному просторі, може бути розривним в іншому.

Приклад 6. Функціонал $J = \int_0^\pi (y')^2(x)dx$ визначений на множині неперервно диференційованих на відрізку [0, π] функцій $y(x)$. На кривій $y_0 \equiv 0$ він неперервний в просторі $C^1_{[0,\pi]}$ та розривний в просторі $C_{[0,\pi]}$. Переконатися в цьому твердженні.

Розв'язування. Справді, при $y_0 \equiv 0$ згідно (8) маємо

$$\Delta J = J(y_0+\delta y) - J(y_0) = \int_0^\pi (y_0+\delta y_0)'^2 dx - \int_0^\pi y_0'^2 dx = \int_0^\pi (\delta y_0')^2 dx,$$

$$|\Delta J| \le \max_{0\le x\le\pi} |\delta y_0'|^2 \int_0^\pi dx = \pi \max_{0\le x\le\pi} |\delta y_0'|^2 .$$

В просторі $C^1_{[0,\pi]}$ відстань має вигляд

$$\rho = \rho(y, y_0) = \|y - y_0\|_{C_1} = \|\delta y_0\|_{C_1} = \max_{0\le x\le\pi} |\delta y| + \max_{0\le x\le\pi} |\delta y'|.$$

Якщо $\rho \to 0$, тоді $\max_{0\le x\le\pi} |\delta y'| \to 0$ також, при цьому $\Delta J \to 0$. Отже, в просторі $C^1_{[0,\pi]}$ на лінії $y_0 \equiv 0$ функціонал J неперервний.

Щоб переконатися у розривності функціонала $J\{y\}$, достатньо це показати хоча б на одній функції $y(x)$ з області визначення функціонала. Нехай $y(x) = \frac{\sin nx}{n}$. Тоді, коли $y_0 \equiv 0$, то в просторі $C_{[0,\pi]}$ відстань має вигляд

$$\rho = \rho(y, y_0) = \|y - y_0\| = \max_{0\le x\le\pi} \left|\frac{\sin nx}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \to 0, \text{ якщо } n \to \infty.$$

Одночасно маємо $\delta y' = y'(x) - y_0'(x) = \cos nx - 0 = \cos nx$,

$$\Delta J = \int_0^\pi (\delta y')^2 dx = \int_0^\pi \cos^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\cos 2nx)dx = \frac{\pi}{2}.$$

Якщо $n \to \infty$, то $\rho \to 0$, а приріст функціонала ΔJ не прямує до 0 , це означає розривність функціонала в просторі $C[_{0,\,\pi]}$. Що й треба було показати.

Приклад 7. Знайти приріст функціонала $\Delta J\{y(x)\} = \int\limits_0^3 y^2 y' dx$, якщо маємо функції $y(x) = x^2$, $y_1(x) = x^3$.

Розв'язування. Приріст аргументу функціонала $\delta y(x) = y_1(x) - y(x) = x^3 - x^2$, а відповідний приріст функціонала

$$\Delta J = J\{y(x) + \delta y(x)\} - J\{y(x)\} = J\{y_1(x)\} - J\{y(x)\} =$$

$$= \int\limits_0^3 x^6 \cdot 3x^2 dx - \int\limits_0^3 x^4 \cdot 2x dx = 3\frac{x^9}{9} - 2\frac{x^6}{6}\bigg|_0^3 = 6318.$$

Відповідь: $\Delta J = 6318$.

5. Варіація функціонала

Варіація – одно з центральних понять при вивченні нелінійних функціоналів, воно грає ту ж роль, що поняття диференціала при вивченні нелінійних функцій.

Диференціал нелінійної функції дорівнює головній лінійній частині її приросту, заміна приросту на диференціал означає лінеаризацію функції при малій зміні аргумента; **варіація нелінійного функціонала** дорівнює головній лінійній частині його приросту, заміна приросту на варіацію означає лінеаризацію функціонала при переході від однієї функції (від якої залежить значення функціонала) до другої, близької функції.

В деяких випадках варіація функціоналів обчислюється за допомогою формули Тейлора. Нехай, наприклад, розглядається функціонал виду $J\{y\} = \int\limits_a^b F(x, y) dx$, де $y = y(x)$. Тоді з (8) приріст функціонала $\Delta J = J\{y + \delta y\} - J\{y\}$ має вигляд

$$\Delta J = \int_a^b [F(x, y + \delta y)dx - F(x, y)]dx\,. \tag{11}$$

$F(x, y + \delta y) = F(x, y) + F'_y(x, y)\delta y$, підставляємо в (11), отримуємо

$$\delta J = \delta \int_a^b F(x, y)dx = \int_a^b F'_y(x, y)\delta y dx \tag{12}$$

Розглянемо функціонал $J\{y\} = \int_0^1 y^2(x)dx$, згідно (8') його приріст $\Delta \boldsymbol{J}$ можна записати у вигляді двох доданків – функціоналів відносно δy**.** Перший доданок є лінійний функціонал $L\{\delta y\}$, а другий доданок – нелінійний функціонал. Якщо $\rho = \|\delta y\| \to 0$ обидва доданки прямують до нуля: лінійний функціонал як мала величина 1-го порядка, нелінійний – як мала величина більш вищого порядку щодо величини ρ. На цієї підставі кажуть, що $L\{\delta y\}$ є головною частиною приросту функціонала $\Delta \boldsymbol{J}$. Отже, вираз (8') має форму

$$J = L\{\delta y\} + o(\rho), \quad \rho = \|\delta y\|\,. \tag{13}$$

Вираз (13) справедливий для багатьох неперервних функціоналів.

Головну частину приросту функціонала $\Delta \boldsymbol{J}$, що є лінійною відносно варіації δy, називають **варіацією функціонала** $J\{y\}$ та позначають $\Delta \boldsymbol{J}$. Маємо

$$\Delta J = \delta J + o(\delta y), \text{ де } \delta J = L\{\delta y\}. \tag{14}$$

У випадку $J\{y\} = \int_0^1 y^2(x)dx$ варіація $\delta J = L\{\delta y\} = 2\int_0^1 y_0 \delta y dx$.

Порівняв (13) та (14) з формулами для приросту Δy функції $y(x)$, побачимо велику схожість варіації δJ з диференціалом $dy = y'(x)dx$. Обидва поняття виникають у результаті лінеаризації, тобто виділення лінійної щодо зміни аргументу частини приросту функціонала або функції відповідно. Функцію $y(x)$, для якої $\Delta y = y'(x)\Delta x + o(\Delta x)$, називають диференційованою в точці x, функціонал $J\{y\}$, що має форму з (14), називають **варійованим (диференційованим)** в точці $y_0(x)$.

Широко поширені функціонали, що мають вигляд

$$J\{y\}=\int_a^b F(x,y,y')dx \qquad (15)$$

з функцією *F(x, y, z),* що неперервна разом з її частинними похідними до 2-го порядку включно. При цьому варіацію δ*J* можна знайти за допомогою формули повного приросту для функції *F* (*x,y,z*)

$$\Delta F=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\Delta z+o(\rho)\text{, де } \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}. \qquad (16)$$

Оскільки при заміні функції $y_0(x)$ на $y(x)=y_0(x)+\delta y$ змінюється похідна $y'(x)=y'_0(x)+\delta y'$, а змінна x зберігає свої попередні значення, маємо згідно з (12), (15), (16)

$$\Delta J=J\{y_0+\delta y\}-J\{y_0\}=\int_a^b F(x,y_0+\delta y,y_0'+\delta y')dx-\int_a^b F(x,y_0,y_0')dx=$$
$$=\int_a^b \Delta F dx=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+o(\rho)\right]dx.$$

Не беручи до уваги $o(\rho)$ як малу величину вищого порядку відносно ρ $\rho=\sqrt{(\delta y)^2+(\delta y')^2}$, шукаємо варіацію функціонала, тобто частину приросту функціонала Δ***J***, що лінійна для величин δy та $\delta y'$

$$\delta J=\int_a^b[F'_y(x,y,y')\delta y+F'_{y'}(x,y,y')\delta y']dx \qquad (17)$$

Маємо $F'_y=\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $F'_{y'}=\dfrac{\partial F}{\partial y'}$, а індекс функції y_0 опущений, оскільки результат справедливий для будь-якої функції $y(x)$ з області визначення функціонала.

Приклад 8. Знайти варіацію функціонала $J\{y\}=\int_{x_0}^{x_1} y\cdot y'dx$, якщо $y(x)$ і $\delta y(x)\in C^1_{[x_0,\,x_1]}$.

Розв'язування. За визначенням приросту функціонала маємо

$$\Delta J=J\{y(x)+\delta y(x)\}-J\{y(x)\}=\int_{x_0}^{x_1}(y+\delta y)\cdot(y'+\delta y')dx-\int_{x_0}^{x_1} y\cdot y'dx=$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (y'\delta y + y'\delta y')dx + \int_{x_0}^{x_1} \delta y \cdot \delta y' dx,$$

звідки шукана варіація дорівнює $\delta J\{y(x)\} = \int_{x_0}^{x_1} (y'\delta y + y\delta y')dx.$

Відповідь: Варіація функціонала $\delta J\{y(x)\} = \int_{x_0}^{x_1} (y'\delta y + y\delta y')dx.$

Завдання для самостійного виконання

Варіант 1

1. Порівняти приріст та варіацію наступного функціонала

$$J\{y(x)\} = \int_1^e (yy' + x(y')^2)dx, \text{ якщо } y = \ln x, \quad \delta y = \frac{a(x-1)}{e-1}.$$

Варіант 2

1. Порівняти приріст та варіацію наступного функціонала

$$J\{y(x)\} = \int_0^{\pi} (y')^2 \sin x dx, \text{ якщо } y = \sin x, \quad \delta y = a\cos x.$$

Варіант 3

1. Порівняти приріст та варіацію наступного функціонала

$$J\{y(x)\} = \int_0^{\pi/2} y' \cos x dx, \text{ якщо } y = \cos x, \quad \delta y = 2\sin x.$$

Варіант 4

1. Порівняти приріст та варіацію наступного функціонала

$$J\{y(x)\} = \int_1^e (yy' + x^2 y')dx, \text{ якщо } y = \ln x, \quad \delta y = ex.$$

Варіант 5

1. Порівняти приріст та варіацію наступного функціонала

$$J\{y(x)\} = \int_1^e (yy' + x(y')^2)dx, \text{ якщо } y = \ln(2x), \quad \delta y = \frac{a \cdot (x-2)}{e-2}.$$

Варіант 6

1. Порівняти приріст та варіацію наступного функціонала

$$J\{y(x)\} = \int_0^{\pi} (y')^2 \sin x dx, \text{ якщо } y = \cos x, \quad \delta y = a \cdot \sin x.$$

6. Необхідна умова екстремуму функціонала

Ця умова абсолютно аналогічна до необхідної умови екстремуму функції однієї або декількох змінних.

Припустимо, що деяка функція $y(x)$ реалізує локальний максимум або мінімум функціонала $J\{y\}$ у вибраному функціональному просторі (R), причому цей функціонал має варіацію δJ, тобто допускає поблизу цієї функції $y(x)$ лінеаризацію. Крім того, вважатимемо, що розглядається внутрішній (не межовий) екстремум, тобто функціонал $J\{y\}$ визначений для **всіх** y, достатньо близьких до $\bar{y}$ у сенсі обраної норми; це буде передбачатися всюди далі, якщо не обумовлено протилежне.

Функціонал $J\{y\}$ досягає на кривій $y = y_0(x)$ максимуму, якщо для всіх близьких кривих $y = y(x)$ з деякого околу елементу $y = y_0(x)$ виконується нерівність $J\{y\} < J\{y_0\}$ або, що те ж саме, $\Delta \boldsymbol{J} = J\{y\} - J\{y_0\}$. При зворотній нерівності функціонал $J\{y\}$ на кривій $y = y_0(x)$ має мінімум. Отже, за наявності екстремуму в точці $y_0(x)$ приріст $\Delta \boldsymbol{J} = J\{y\} - J\{y_0\}$ в достатньо малому околі цієї точки зберігає свій знак.

У випадку **максимуму функціонала** маємо $\Delta \boldsymbol{J} < \mathbf{0}$ **,** у випадку **мінімуму функціонала** маємо $\Delta \boldsymbol{J} > \mathbf{0}$**.** Припустимо, функціонал $\Delta \boldsymbol{J}$ досягає в точці $y_0(x)$ екстремуму і в цій точці має місце вигляд (14), причому $\delta J \neq 0$. При малому ρ доданок $o(\rho)$, як величина більш вищого порядку малості, ніж δJ, не може впливати на знак $\Delta \boldsymbol{J}$, його визначає головна частина $\Delta \boldsymbol{J}$, тобто варіація δJ. Оскільки варіація $\delta J = L\{\delta J\}$ є лінійним функціоналом від аргумента δy, то маємо $L\{-\delta y\} = -L\{\delta y\}$. З цього виходить, що в будь-якому малому околі функції $y_0(x)$ зі зміною знака δy буде змінювати свій знак й варіація δJ, а разом з нею – приріст $\Delta \boldsymbol{J}$. Але тоді неможливий екстремум функціонала в точці $y_0(x)$, що суперечить початковому посиланню. Отже, припущення $\delta J\ \{y_0\} \neq 0$ має бути відкинуто. Таким чином, **якщо варійований функціонал $J\{y\}$ досягає екстремуму**, коли $y = y_0(x)$, де $y_0(x)$ – внутрішня точка області визначення функціонала, то в цій точці його варіація δJ **перетворюється на нуль**

$$\delta J \Big|_{y=y_0(x)} = 0 \tag{18}$$

Точку, в якій виконується необхідна умова екстремуму (18), називають **стаціонарною.**

Достатні умови екстремуму тут не розглядаються. Факт існування екстремуму часто вже зрозумілий за змістом самої задачі.

Різні ставлення до близькості функцій позначаються на понятті екстремуму. Для сильного околу значення функціонала порівнюються на широкій множині функцій, відповідно і **екстремум**, якщо він існує на цьому околі, називають **сильним**. У разі слабкого околу безліч ліній порівняння вужче, **екстремум** на такій множині називають **слабким**. Сильний екстремум, що встановлюється на повнішій сукупності ліній, одночасно і слабкий. Зворотне твердження в загальному випадку не є правильним. **Екстремум абсолютний**, якщо функціонал досягає його на всій множині функцій даного класу. **Екстремум відносний**, якщо він реалізується лише на множині досить близьких функцій; цьому типу належать сильні та слабкі екстремуми. Оскільки близькість функцій означає, що відстань ρ між ними задовольняє умові (7), де для сильного околу ρ вимірюється у метриці простору $C_{[a,b]}$, а для слабкого – в метриці простору $C^1_{[a,\,b]}$, то екстремум буде сильним, якщо він досягається на множині функцій, близьких в $C_{[a,b]}$, і слабким, коли функції порівняння близькі відносно метриці простору $C^1_{[a,\,b]}$.

Приклад 9. Функціонал $J\{y\} = \int\limits_0^{\pi} 2y^2(1-4(y')^2)dx$ визначений на множині функцій $y(x) \in C^1_{[0,\,\pi]}$, одночасно такі функції $y(x) \in C[0,\pi]$. Будемо розглядати тільки ті функції $y(x)$, для яких виконується умова $y(0) = y(\pi) = 0$. Таким умовам задовольняє саме функція $y_0(x) \equiv 0$, причому $J\{y_0\} = J\{0\} = 0$. Для функцій $y(x) \neq y_0(x) \equiv 0$ з ε-околу елемента $y_0(x)$, де $\varepsilon = \frac{1}{2}$, в просторі $C^1_{[0,\ \pi]}$ відстань $\rho = \rho(y, y_0) = \max|y - 0| + \max|y' - 0| < \frac{1}{2} \Rightarrow |y'| < \frac{1}{2}$, отже, як інтеграл від додатної функції $J\{y\} > 0$. Отже, $J\{y\} > J\{y_0\} = 0$ для всіх функцій $y(x)$ з вказаного околу точки y_0 отже, в цій точці має місце мінімум функціонала. Оскільки відстань між функціями відповідала метриці простору C^1, то мінімум є слабким. Покажемо, що сильний мінімум в точці $y_0 = 0$ не досягається.

Розв'язування. Для цього розглянемо функціонал при $y = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$:

$$J\{y\} = \int_0^{\pi} \frac{2}{n} \sin^2 nx(1 - 4ncos^2 nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin^2 nxdx - 2\int_0^{\pi} \sin^2 nxdx = \pi(\frac{1}{n} - 1).$$

Якщо $n > 1$, то $J\{y\} < 0$, тобто $J\{y\} < J\{y_0\} = 0$. В той же час функції $y = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ при достатньо великому n в просторі $C_{[0,\pi]}$ близькі до $y_0(x) \equiv 0$:

$\rho(y, y_0) = \max\limits_{[0,\pi]}|y - y_0| = \max\limits_{[0,\pi]}\left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. Оскільки $J\{y\} < J\{y_0\}$, то значення $J\{y_0\}$ не є мінімальним в просторі $C_{[0,\pi]}$; сильний мінімум в точці $y_0(x) \equiv 0$ відсутній. Що й треба було показати. [Синайський Є.С., 2006].

В деяких задачах часто розглядається екстремум функціонала не серед всіх функцій, що належать вказаному функціональному простору, а тільки серед функцій, що задовольняють деяким додатковим лінійним неоднорідним умовам, наприклад, $y\ (a) = y_a$, $y\ (b) = y_b$. В цьому випадку умова $\delta J = 0$ має виконуватися для будь-якої варіації δy, що задовольняє відповідним однорідним умовам $\delta y(a) = 0, \quad \delta y(b) = 0$.

7. Задача із закріпленими кінцями

Основна лема варіаційного числення. Найпростіша варіаційна задача полягає у пошуку екстремуму функціонала

$$J\{y\} = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

на множині ліній $y = y_0(x)$, що проходять через дві задані точки $P(a, A)$ і $Q(b, B)$ (Рис. 3).

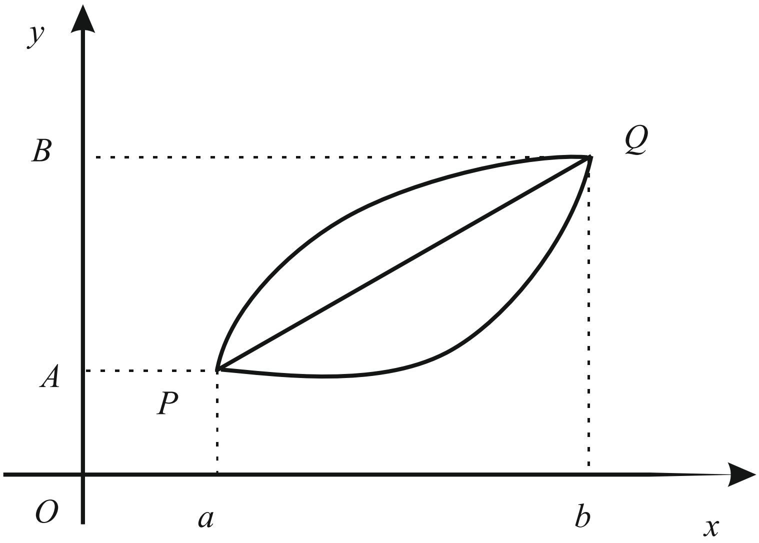

Рисунок 3. Множина ліній $y = y_0(x)$, що проходять через дві задані точки $P(a, A)$ та $Q(b, B)$

Лема. Нехай $\alpha(x)$ – деяка неперервна на відрізку $[a,b]$ функція. Якщо для будь-якої функції $h(x) \in C^1_{[a,\, b]}$ такої, що $h(a) = h(b) = 0$**,** виконується рівність

$$\int_a^b \alpha(x)h(x)dx = 0 \tag{19}$$

то на проміжку (a,b) функція $\alpha(x) \equiv 0$.

Доведення. Припустимо протилежне: $\alpha(x) \neq 0$, тобто в інтервалі (a,b) існує точка $\boldsymbol{c}$, де $\alpha(c) \neq 0$. Для визначеності вважатимемо, що $\alpha(c) > 0$. Оскільки функція $\alpha(x)$ неперервна, то існує інтервал $(x_1, x_2) \subset (a, b)$, де $\alpha(x) > 0$. Виберемо зараз $h(x)$ у формі

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} (x - x_1)^2 (x - x_2)^2, & x \in (x_1, x_2), \\ 0, & x \notin (x_1, x_2). \end{cases}$$

Тоді за властивістю інтеграла від додатної функції маємо $\int_a^b \alpha(x)\bar{h}(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x)(x-x_1)^2(x-x_2)^2 dx > 0$, що суперечить рівності (19). Отже, $\alpha(x) \equiv 0 \quad \forall \quad x \in (a,b)$. Що й треба було довести.

8. Рівняння Ейлера

Як зазначалося вище (тема 6), необхідна умова екстремуму функціонала має вигляд $\delta J \Big|_{y=y_0(x)} = 0$, умова виконується для функціонала $J\{y\} = \int_a^b F(x,y,y')dx$, де $y(x) \in C^1_{[a,\,b]}$, причому

$$y(a) = A, y(b) = B. \tag{20}$$

Функція $F(x, y, z)$ на відрізку $[a, b]$ двічі неперервно диференційована за своїми аргументами. За умовою (17) варіацію функціонала можна подати у вигляді

$$\delta J = \int_a^b [F'_y(x,y,y')\delta y + F'_{y'}(x,y,y')\delta y']dx.$$

За умовою (20) в точках *P(a,A)* та *Q(b,B)* варіація аргументу $y(x)$ дорівнює 0, тобто $\delta y(a) = 0$, $\delta y(b) = 0$. Тому, проінтегрував другий доданок в (17) за частинами, отримуємо

$$\int_a^b F'_{y'}\delta y' dx = \begin{Bmatrix} u = F'_{y'} & du = \dfrac{d}{dx}F'_{y'}dx \\ dv = \delta y' dx & v = \delta y \end{Bmatrix} = F'_{y'}\delta y\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}F'_{y'}\delta y dx =$$

$$= -\int_a^b \frac{d}{dx}F'_{y'}\delta y dx.$$

Умова (17) буде мати вигляд

$$\int_a^b (F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'})\delta y dx = 0. \tag{21}$$

В рівності (21) вираз в дужках під знаком інтегралу є неперервною функцією від аргумента x, а варіація $\delta y \in C^1_{[a,\,b]}$ є будь-якою функцією. Тоді в силу основної леми варіаційного числення випливає, що при будь-якому $x \in (a,b)$ має виконуватися рівність

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0, \tag{22}$$

її називають **рівняння Ейлера.**

Отже, функція $y(x) \in C^1_{[a,\, b]}$, що відповідає умовам (20), може доставити екстремум функціоналу (15) тільки в тому випадку, якщо виявиться розв'язком рівняння Ейлера (22).

Інтегральні криві диференціального рівняння (22) називають **екстремалями** (кривими Лагранжа). Саме на таких лініях можливий екстремум функціонала (15). Рівність (22) є необхідною умовою слабкого екстремуму.

Оскільки сильний екстремум одночасно є і слабким, то будь-яка необхідна умова слабкого екстремуму необхідна й для сильного. Сукупність екстремалей, як загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння другого порядку, створює двопараметричну сім'ю функцій. Двох граничних умов (8) в принципі як раз достатньо для пошуку необхідних частинних розв'язків. Істина така, що рівняння Ейлера рідко інтегрується в квадратурах, і тому доводиться користуватися числовим інтегруванням відповідних крайових задач для пошуку частинного розв'язку цього рівняння [Мишкіс А.Д., 1971; Синайський Є.С., 2006].

Приклад 10. Для функціонала $J\{y\} = \int\limits_0^1 [(y')^2 + 12xy]dx$ знайти екстремаль $y = y(x)$, що задовольняє умовам $y(0) = 0$, $y(1)=1$.

Розв'язування. Маємо

$$F = (y')^2 + 12xy, \quad F'_y = 12x, \quad F'_{y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx} F'_{y'} = 2y''.$$

З рівності (22) отримуємо $12x - 2y'' = 0$ або y'' = $6x$. Розв'язуємо це диференціальне рівняння при заданих граничних умовах, маємо

$$y' = \int 6x dx = 3x^2 + C_1, \quad y = \int (3x^2 + C_1)dx = x^3 + C_1 x + C_2, \quad C_2 = y(0) = 0,$$
$$C_1 + 1 = y(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.$$

Шукана екстремаль є $y = x^3$. Безпосередньою підстановкою отримуємо $J\{x^3\} = \int_0^1 (9x^4 + 12x^4)dx = 4.2$. Можливі екстремалі для функціонала зображені на рисунку 4.

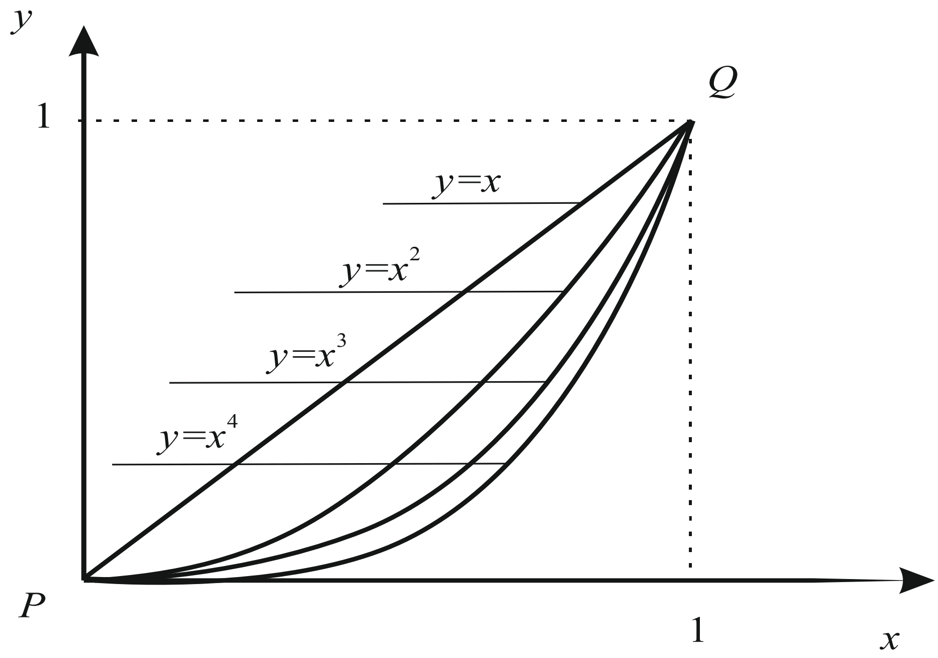

Рисунок 4. Можливі екстремалі для функціоналу в прикладі 10.

На інших кривих, що проходить через точки P і Q (Рис. 4), значення функціонала більше $J\{x\} = 5, \quad J\{x^2\} = \dfrac{13}{3}, \quad J\{x^4\} = \dfrac{30}{7}$.

Відповідь: функціонал J досягає мінімума на кривій $y = x^3$.

Приклад 11. Знайти екстремаль функціонала

$$J\{y\} = \int_0^1 (x \sin y + \cos y)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Розв'язування. Маємо $F = x \sin y + \cos y, \quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = x \cos y - \sin y$. Рівняння Ейлера має вигляд $x \cos y - \sin y = 0$, звідки $y = arctgx$. Цей розв'язок задовольняє даним граничним умовам. Отже, отримана крива є екстремаллю.

Відповідь: екстремаль функціонала має вигляд $y = arctgx$.

Приклад 12. Знайти екстремаль функціонала

$$J\{y\}=\int_0^e (xe^y - ye^x)dx, \quad y(1)=1, \quad y(e)=1.$$

Розв'язування. Маємо $F = xe^y - ye^x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = xe^y - e^x$. Рівняння Ейлера має вигляд $xe^y - e^x = 0$, звідки $y = x - \ln x$. Отримана функція $y = x - \ln x$ не задовольняє другій граничній умові. Отримана крива не є екстремаллю.

Відповідь: дана варіаційна задача не має розв'язків.

9. Деякі окремі випадки рівняння Ейлера

Розглядаємо рівняння Ейлера (22).

1. Нехай підінтегральна функція $F = F(y, y')$ в рівнянні (22) не залежить явно від змінної x. Після множення обох частин рівняння (22) на змінну y' отримуємо

$$y' \cdot F'_y - y' \cdot \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0. \tag{22'}$$

Якщо шукати повну похідну від функції, то маємо

$$\frac{d}{dx}\left(F - y' \cdot F'_{y'}\right) = F'_y y' + F'_{y'} y'' - \left(y'' F'_{y'} + y' \frac{d}{dx} F'_{y'}\right) = y' \cdot F'_y - y' \cdot \frac{d}{dx} F'_{y'},$$

що співпадає з лівою частиною рівності (22'). Отже, рівняння (22') можна записати таким чином $[F(y, y') - y' F'_{y'}(y, y')]'_x = 0$. Інтегруючи, отримаємо диференціальне рівняння 1-ого порядку

$$F(y, y') - y' F'_{y'}(y, y') = C_1, \tag{23}$$

де C_1 – довільна стала. Рівняння (22) є диференціальним рівнянням 2-ого порядку. Таким чином, спеціальна форма функції $F = F(y, y')$ забезпечує зниження порядку рівняння Ейлера (22).

2. Нехай підінтегральна функція в рівнянні Ейлера (22) не залежить від змінної y.

Тоді рівняння Ейлера має вигляд $\frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y')=0$, звідки отримуємо перший інтеграл

$$F'_{y'}(x,y')=C_1, \text{ де } C_1 \text{ – довільна стала.} \qquad (22'')$$

Рівняння (22") є диференціальним першого порядку. Якщо його можна записати у вигляді $y'=f(x,C_1)$, то отримуємо загальний розв'язок $y(x)=\int f(x,C_1)\cdot dx+C_2$.

3. Нехай підінтегральна функція F в рівнянні Ейлера (22) не залежить від змінної y'. Тоді рівняння Ейлера (22) має вигляд

$$F'_y(x,y)=0. \qquad (24)$$

Рівняння (24) визначає одну або декілька екстремалей, а не сім'ю ліній [Мишкіс А.Д., 1971; Синайський Є.С., 2006].

Розглянемо приклади, що ілюструють ці окремі випадки.

Приклад 13. Для функціонала $I\{y\}=\int_1^2 \frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}{x}\cdot dx$ знайти екстремаль $y(x)$, що задовольняє умовам $y(1)=0, \quad y(2)=1$.

Розв'язування. Підінтегральна функція $F(x,y')=\frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}{x}$ не залежить від змінної y, тому рівняння Ейлера зводиться до наступного, $F'_{y'}=C_1 \Rightarrow \frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}}=C_1$, де C_1 – довільна стала. Виразимо y' з останньої рівності, після перетворень отримуємо рівняння $y'=\pm\frac{C_1x}{\sqrt{1-C_1^2\cdot x^2}}$. Маємо диференціальне рівняння 1-ого порядку з відокремлюваними змінними. Після інтегрування отримуємо $y(x)=\pm\int\frac{C_1x}{\sqrt{1-C_1^2\cdot x^2}}\cdot dx$. Отже,

$$y(x)=\mp\frac{1}{C_1}\cdot\sqrt{1-C_1^2\cdot x^2}+C_2,$$

$$y(x) - C_2 = \mp \frac{1}{C_1} \cdot \sqrt{1 - C_1^{\,2} \cdot x^2}\,,$$

$$\left(y(x) - C_2\right)^2 = \frac{1}{C_1^{\,2}} \cdot \left(1 - C_1^{\,2} \cdot x^2\right),$$

$$\left(y(x) - C_2\right)^2 = \frac{1}{C_1^{\,2}} - x^2 \text{ або } \left(y - C_2\right)^2 + x^2 = \frac{1}{C_1^{\,2}}.$$

Рівняння $\left(y - C_2\right)^2 + x^2 = \dfrac{1}{C_1^{\,2}}$ є сім'єю кіл з центрами на прямій $x = 0$. З граничних умов $y(1) = 0, \quad y(2) = 1$ визначаємо сталі C_1, C_2. Маємо

$$C_2^{\,2} + 1 = \frac{1}{C_1^{\,2}} \text{ та } \left(1 - C_2\right)^2 + 4 = \frac{1}{C_1^{\,2}}.$$

Далі маємо $\left(1 - C_2\right)^2 + 4 = C_2^{\,2} + 1$, $-2C_2 + 4 = 0$, $C_2 = 2$. Отже, $4 + 1 = \dfrac{1}{C_1^{\,2}}$, звідки $\dfrac{1}{C_1^{\,2}} = 5$.

Шуканою екстремаллю функціонала є дуга кола $\left(y - 2\right)^2 + x^2 = 5$. Якщо функціонал має екстремум, то досягається він на дузі записаного вище кола.

Відповідь: екстремаль для функціонала $I\{y\} = \int\limits_1^2 \dfrac{\sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}}{x} \cdot dx$ при заданих граничних умовах має вигляд $\left(y - 2\right)^2 + x^2 = 5$. Це дуга кола з центром в точці (0, 2), радіус кола дорівнює $\sqrt{5}$.

Приклад 14. Для функціонала $I = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2} \cdot dx$ знайти екстремаль $y(x)$, що задовольняє умовам $y(0) = 0, \quad y(1) = 1$.

Розв'язування. Рівняння Ейлера має вигляд $F'_{y'} = C_1 \Rightarrow \dfrac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1$, де C_1 – довільна стала. Звідси $y' = C_1 \cdot \sqrt{1 + \left(y'\right)^2}$, $\left(y'\right)^2 = C_1^{\,2} \cdot \left(1 + \left(y'\right)^2\right)$,

$(y')^2 \cdot \left(1 - C_1^{\,2}\right) = C_1^{\,2}$, $y' = \pm \dfrac{C_1}{\sqrt{1 - C_1^{\,2}}}$, $y(x) = \pm \dfrac{C_1}{\sqrt{1 - C_1^{\,2}}} \cdot x + C_2$ або

$y(x) - C_2 = \pm \dfrac{C_1}{\sqrt{1 - C_1^{\,2}}} \cdot x$ – сім'я прямих, що перетинаються у точках $(0, C_2)$, де C_2 – довільна стала.

З граничних умов $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ визначаємо сталі C_1, C_2. Маємо $C_2 = 0$, $\pm \dfrac{C_1}{\sqrt{1 - C_1^{\,2}}} = 1$, $\dfrac{C_1}{\sqrt{1 - C_1^{\,2}}} = \pm 1$. При таких C_1 та C_2 дві прямі, що перетинаються в точці $(0, 0)$ мають вигляд $y(x) = \pm x$. Другій граничній умові задовольняє лише пряма $y(x) = x$.

Відповідь: функціонал $I = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \cdot dx$ має екстремаль $y(x) = x$, що задовольняє зазначеним умовам.

Приклад 15. Серед ліній, що з'єднують дві точки $M_1(a, A)$ і $M_2(b, B)$ площини XOY, знайти таку лінію, яка при обертанні навколо осі OX утворює поверхню найменшої площі (Рис. 5).

Розв'язування. Якщо функція $y(x) \in C^1_{[a,\, b]}$ та її дуга, що відповідає відрізку $[a, b]$, обертається навколо осі OX, то площа поверхні обертання дорівнює $P_x = 2\pi \cdot \int\limits_a^b y(x) \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \cdot dx$. Отже, в цій задачі треба знайти мінімум функціонала $I\{y\} = 2\pi \cdot \int\limits_a^b y(x) \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \cdot dx$. Підінтегральна функція не містить змінної x, тоді можна використати рівняння (23) для пошуку мінімуму функціонала. Отримуємо

$$2\pi \cdot y(x) \cdot \sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2} - 2\pi \cdot y'(x) \cdot y(x) \cdot \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}} = C,$$

де C – довільна стала. Нехай $C_1 = \dfrac{C}{2\pi}$.

Маємо $y(x)\cdot\left(\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}-\frac{\left[y'(x)\right]^2}{\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}}\right)=C_1$. Звідки $y'=\frac{\left(y^2-(C_1)^2\right)^{1/2}}{C_1}$.

Відокремлюємо змінні, тоді $\frac{C_1\cdot dy}{\left(y^2-(C_1)^2\right)^{1/2}}=dx$. Інтегруємо $\int\frac{C_1\cdot dy}{\left(y^2-(C_1)^2\right)^{1/2}}=\int dx+C_2$, зліва зробимо заміну змінної $y=C_1\cdot\cosh t$, тоді маємо $\int\frac{C_1\cdot\sinh t dt}{\sinh t}=x+C_2$ (приймаємо до уваги, що $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$). Отже, $C_1\cdot t=x+C_2$, $t=\frac{x+C_2}{C_1}$. Саме на лінії $y(x)=C_1\cdot\cosh t$, де $t=\frac{x+C_2}{C_1}$, можливий мінімум функціонала $I\{y\}=2\pi\cdot\int\limits_a^b y(x)\cdot\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\cdot dx$. Граничні умови $y(a)=A,\ y(b)=B$ дають змогу знайти сталі C_1, C_2.

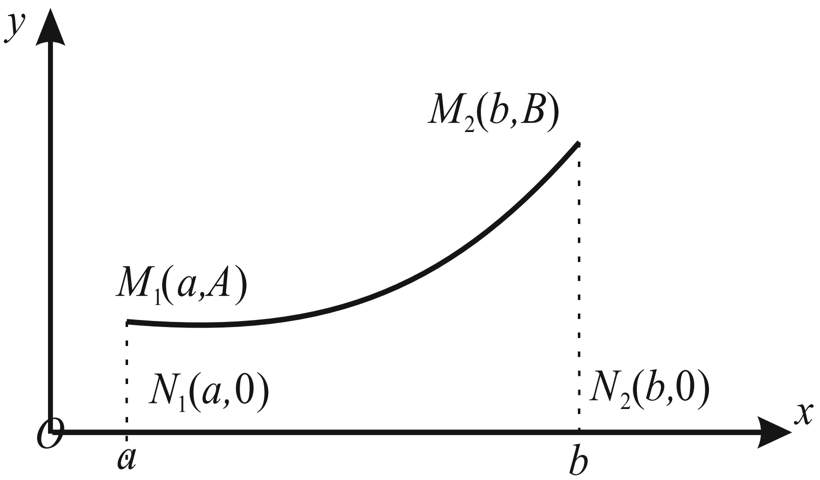

Рисунок 5. Ілюстрація до прикладу 15

Відповідь: Шукана екстремаль при таких умовах $y(x)=C_1\cdot\cosh\frac{x+C_2}{C_1}$.

Мінімум функціонала можна визначити, якщо скористатися умовами $y(a)=A,\ y(b)=B$ для пошуку сталих C_1, C_2.

Приклад 16. Матеріальна точка із положення $O(0,0)$ переміщується в положення $B(1,1)$ зі швидкістю $v = x+1$. Знайти екстремаль, на якій час руху мінімальний.

Розв'язування. Швидкість руху $v = \frac{dl}{dt}$, а диференціал довжини дуги кривої $y(x)$ дорівнює $dl = \sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$, тоді $\frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx}{dt} = x+1$, $dt = \frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx}{x+1}$. Повний час руху визначимо інтегруванням $T = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx}{x+1}$. Отримаємо функціонал $T\{y\}$, де $F = \frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}{x+1}$ в явній формі від змінної y не залежить. Маємо $F'_y = \frac{y'}{(x+1)\sqrt{1+[y'(x)]^2}}$ та.

$\frac{y'}{(x+1)\cdot\sqrt{1+[y'(x)]^2}} = C$, де C – довільна стала.

Далі $(y')^2 = C^2(x+1)^2\left[1+(y'(x))^2\right]$, $y' = \pm C\cdot\frac{x+1}{\sqrt{1-C^2(x+1)^2}}$,

$y - C_2 = \pm\frac{\sqrt{1-C^2(x+1)^2}}{C}$, $(y-C_2)^2 = \frac{1}{C^2} - (x+1)^2$ або $(x+1)^2 + (y-C_2)^2 = C_1^2$ – сім'я кіл з центрами на прямій $x = -1$.

Виберемо з таких кривих ту, що задовольняє граничним умовам $1 + {C_2}^2 = C_1^2$, $4 + (1-C_2)^2 = C_1^2 \Rightarrow 4 - 2C_2 = 0$, $C_2 = 2$, $C_1 = \pm\sqrt{5}$. Отже, шуканою екстремаллю є дуга кола $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$ (Рис. 6). Якщо функціонал $T\{y\}$ має екстремум, то за змістом задачі це може бути тільки мінімум і досягається він на дузі знайденого вище кола.

Відповідь: шуканою екстремаллю є дуга кола $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$, на ній час руху зазначеної матеріальної точки мінімальний.

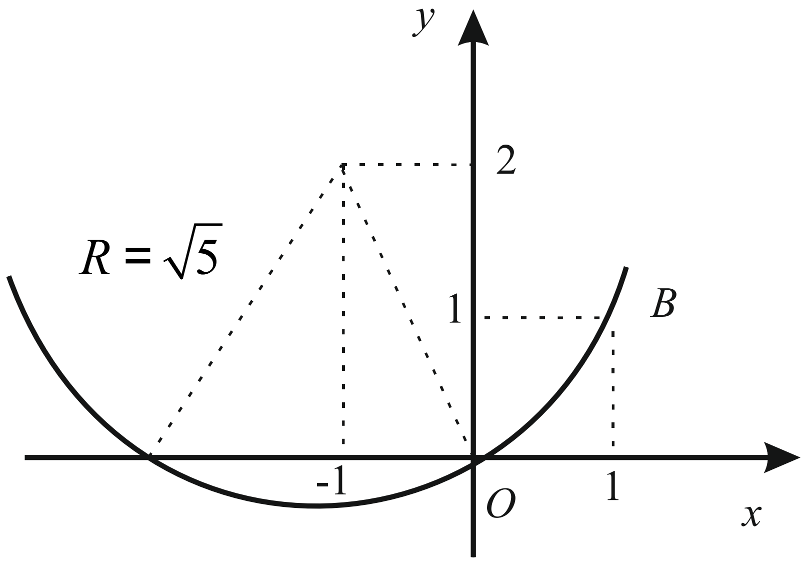

Рисунок 6. Ілюстрація до прикладу 16

Приклад 17. Для функціонала $J\{y\} = \int\limits_{-1}^{0} y(y')^2 dx$ знайти екстремаль, що проходить через точки (-1,0) та (0,1).

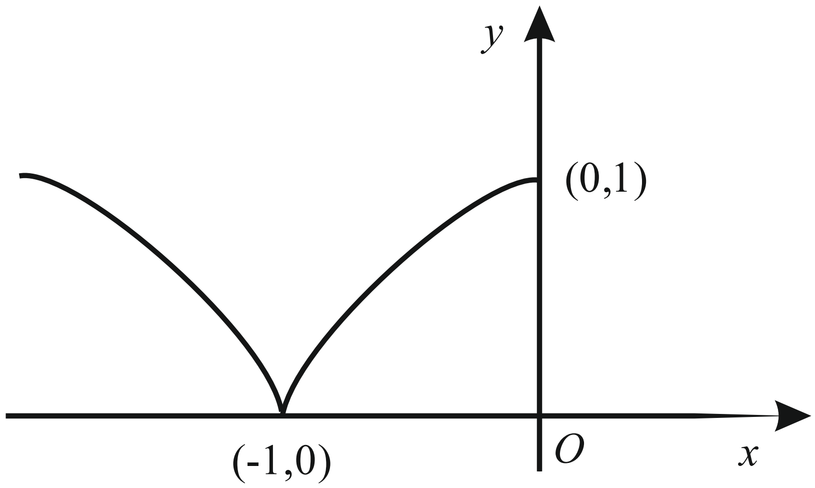

Рисунок 7. Ілюстрація до прикладу 17

Розв'язування. Підінтегральна функція не містить змінну x, отже, маємо $F = y(y')^2$. Згідно з рівністю (23) $y(y')^2 - y'2yy' = const$ або $y(y')^2 = C^2$. Звідси $y' = \dfrac{C}{\sqrt{y}}$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{C}{\sqrt{y}}$, $\sqrt{y}dy = Cdx$, $\int\sqrt{y}dy = C\int dx$, $\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = Cx + C_0$, $y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2$. За рахунок граничних умов отримаємо сталі C_1 та C_2

$$-C_1 + C_2 = 0, \quad C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1.$$

Шукана екстремаль функціонала має вигляд $y^{\frac{3}{2}} = x + 1$ (Рис. 7).

Відповідь: Шукана екстремаль функціонала має вигляд $y^{\frac{3}{2}} = x + 1$.

Приклад 18 (задача про брахістохрону).

Брахістохрона – лінія (крива) якнайшвидшого спуску, по якій матеріальна точка під впливом власної ваги скочується з одного положення до іншого (ці положення не перебувають на одній вертикалі) за найменший час.

Серед всіх ліній, що сполучають точки *A* і *B*, знайти ту, по якій матеріальна точка, рухаючись під дією сили тяжіння з точки *A* без початкової швидкості, досягне точки B за найкоротший час.

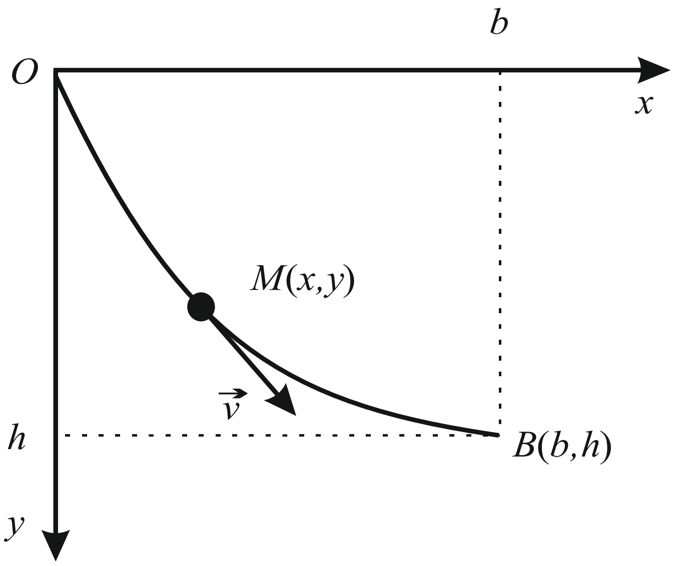

Рисунок 8. Ілюстрація до прикладу 18 (про брахістохрону)

Розв'язування. Проведемо через точки $A(0;\ 0)$ і $B\ (x_1;\ y_1)$ вертикальну площину (Рис. 8) і візьмемо довільну лінію $y = f(x)$, $0 \le x \le x_1$, де f – неперервно диференційована функція, причому $f(0) = 0$ та $f(x_1) = y_1$. Для довільної точки *M* за законом збереження кінетичної енергії маємо $\frac{mv^2}{2} = mgy$, де m – маса точки, а v – її швидкість. Звідси $v = \sqrt{2gy}$.

З іншого боку, $v = \frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{dt}$ (ds – елемент дуги лінії). Звідси $dt = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx$, тобто $T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx}{\sqrt{y}}$.

Рівняння Ейлера в такому випадку приводить до наступного диференціального рівняння першого порядку

$$\frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}{\sqrt{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{1+[y'(x)]^2}\cdot\sqrt{y}} = C_1, \text{ тобто } y = \frac{1}{C_1^2(1+[y'(x)]^2)}.$$

Нехай $y' = ctg\left(\frac{t}{2}\right)$, тоді $y = \frac{1}{2C_1^2}(1-\cos t)$, а

$$dx = \frac{dy}{y} = \frac{\sin t dt}{2C_1^2 ctg\frac{t}{2}} = \frac{1}{C_1^2}\sin^2\frac{t}{2}dt = \frac{1}{2C_1^2}(1-\cos t)dt,$$

$$dx = \frac{1}{2C_1^2}(t-\sin t) + C_2.$$

Отримуємо параметричне рівняння циклоїди $\begin{cases} x = \frac{1}{C_1^2}(t-\sin t) + C_2, \\ y = \frac{1}{C_1^2}(1-\cos t). \end{cases}$

Тобто лінією якнайшвидшого спуску (брахістохроной) є циклоїда. Стала $C_2 = 0$ (оскільки $x = 0$ при $t = 0$), а стала C_1 визначається з умов, що крива проходить через точку B (x_1; y_1). За змістом задачі функціонал $T\{y\}$ досягає на цій кривій мінімуму.

Відповідь: лінією якнайшвидшого спуску (брахістохроной) є циклоїда і має наступне параметричне рівняння $\begin{cases} x = \frac{1}{C_1^2}(t-\sin t) + C_2, \\ y = \frac{1}{C_1^2}(1-\cos t). \end{cases}$, де стала $C_2 = 0$, а стала C_1 визначається з умов, за яких крива проходить через точку B (x_1; y_1).

Приклад 19. Знайти екстремалі функціонала $J\{y\}=\int\limits_0^2(2xy-y^2)dx$, якщо $y(0)=0$, $y(2)=4$.

Розв'язування. $F=2xy-y^2$, $F'_y=2x-2y$. З умови (24) маємо $2x-2y=0$, $y=x$. Екстремаллю буде пряма $y=x$, але другій граничній умові вона не задовольняє. Отже, ця варіаційна задача не має розв'язків.

Відповідь: ця варіаційна задача не має розв'язків.

Приклад 20. Знайти екстремаль функціонала за таких умов

$$J\{y\}=\int\limits_\alpha^\beta[(xy'+1)e^y+x^2-y^2y']dx,\ y(\alpha)=a,\quad y(\beta)=b.$$

Розв'язування. Маємо, що підінтегральна функція F лінійно залежить від змінної y'

$$F=(xy'+1)e^y+x^2-y^2y'=x^2+e^y+(xe^y-y^2)y', \text{ тобто}$$

$$P(x,y)=x^2+e^y,\quad Q(x,y)=xe^y-y^2 \text{ та } \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Вираз $(x^2+e^y)dx+(xe^y-y^2)dy$ є повним диференціалом, отже, інтеграл не залежить від шляху інтегрування, маємо

$$J\{y\}=\int\limits_{(\alpha;a)}^{(\beta;b)}[(x^2+e^y)dx+(xe^y-y^2)dy]=\int\limits_{(\alpha;a)}^{(\beta;b)}d\left(xe^y-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{3}x^3\right)=$$

$$=xe^y-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{3}x^3\Bigg|_{(\alpha,a)}^{(\beta,b)}=\beta e^b-\alpha e^a+\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}+\frac{a^3-b^3}{3}.$$

Значення функціонала J стале для всіх кривих $y(x)$, що проходять через точки $(\alpha;a)$ та $(\beta;b)$, і варіаційна задача не має сенсу.

Відповідь: ця варіаційна задача не має сенсу.

Приклад 21. Знайти екстремаль функціонала за таких умов

$$J\{y\}=\int\limits_0^1[(y')^2+y'+1]dx,\ y(0)=1,\ y(1)=2.$$

Розв'язування. Маємо $F = F(y, y')$ – підінтегральна функція, що не залежить явно від змінної x

$$F = (y')^2 + y' + 1,\ F_{y'} = 2y' + 1,\quad F_{y'y'} = 2\,.$$

Рівняння Ейлера має вигляд $2y'' = 0$, звідси $y = C_1x + C_2$. Значення сталих C_1 і C_2 шукаємо з умови задачі, що екстремалі проходять через точки M (0; 1) та N (1; 2): $C_2 = 1$, $C_1 + C_2 = 2$, тобто $C_1 = C_2 = 1$. Таким чином, екстремаллю є пряма $y = x + 1$.

Відповідь: екстремаллю функціонала є пряма $y = x + 1$.

Пример 22. Знайти екстремаль функціонала за таких умов

$$J\{y\} = \int_0^1 [x(y')^2 - 2y']dx,\ y(1) = 1,\ y(e) = 2.$$

Розв'язування. Маємо випадок 1 (тема 9).

$$F = x(y')^2 - 2y';\quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2xy' - 2;\quad 2xy' - 2 = C_1\,.$$

$$\text{Звідси } y' = \frac{C_1 + 2}{2x};\quad y = \frac{1}{2}(C_1 + 2)\ln x + C_2\,.$$

Використовуємо граничні умови та отримуємо

$$C_2 = 1;\quad \frac{1}{2}C_1 + C_2 + 1 = 2;\quad \Rightarrow\quad C_1 = 0,\quad C_2 = 1.$$

Екстремаллю є крива $y = \ln x + 1$.

Відповідь: екстремаллю функціонала є пряма $y = \ln x + 1$.

Пример 23. Знайти екстремаль функціонала за таких умов

$$J\{y\} = \int_0^1 (2e^y - y^2)dx,\ y(0) = 1,\ y(1) = e.$$

Розв'язування. Функція F залежить тільки від змінної y, тобто $F = F(y)$. В такому випадку рівняння Ейлера має вигляд $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Маємо $F = 2e^y — y^2$, тоді

$F = 2e^y - y^2,\quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2e^y - 2y,\quad 2e^y - 2y = 0\quad \Rightarrow\quad y = e^y$. Останнє рівняння не має числових розв'язків. Отже, варіаційна задача не має розв'язків.

Відповідь: ця варіаційна задача не має розв’язків.

Пример 24. Знайти екстремаль функціонала за таких умов

$$J\{y\}=\int\limits_0^{\ln 2}((y')^2+2y^2+2ye^{-x})dx\,,\; y(0)=y(ln2)=0.$$

Розв’язування. Функція F має вигляд

$$F(x,y,y')=p(x)(y')^2+q(x)y^2+2yf(x),$$

де вказані функції $p(x)>0$, $p'(x)$, $q(x)\geq 0$, $f(x)$ неперервні на відрізку $[x_0,x_1]$. В такому випадку екстремаль $y = y(x)$ функціонала $J\{y\}=\int\limits_{x_0}^{x_1}[p(x)(y')^2+q(x)y^2+2yf(x)]dx$ проходить через дві задані точки (x_0, y_0) і (x_1, y_1) та задовольняє наступному рівнянню Ейлера

$$\frac{d}{dx}(p(x)y')-q(x)y-f(x)=0\,.$$

Маємо $F=(y')^2+2y^2+2ye^{-x},\quad p(x)=e^{-x},\quad q(x)=2e^{-x},\quad f(x)=e^{-x}.$

Рівняння Ейлера приймає вигляд

$\frac{d}{dx}(e^{-x}y')-2e^{-x}y-e^{-x}=0$ або $y''-y'-2y=1$ – лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною. Загальний розв’язок такого рівняння має вигляд $y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}$. З урахуванням граничних умов отримуємо

$$C_1+C_2=\frac{1}{2},\quad 4C_1+\frac{1}{2}C_2=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad C_1=\frac{1}{14},\quad C_2=\frac{3}{7}.$$

Отже, екстремаллю є крива $y=\frac{1}{14}e^{2x}+\frac{3}{7}e^{-x}-\frac{1}{2}$.

Відповідь: екстремаллю функціонала є крива $y=\frac{1}{14}e^{2x}+\frac{3}{7}e^{-x}-\frac{1}{2}$.

Задачі для самоконтролю

1. Знайти екстремалі функціонала $J\{y\}=\int\limits_{x_1}^{x_2} y dx$, що задовольняють граничним умовам $y(x_1)=y_1, \quad y(x_2)=y_2$.

Відповідь: екстремаль не існує (рівняння Ейлера вироджується в неправильну тотожність).

2. Знайти екстремалі функціонала $J\{y\}=\int\limits_{0}^{\pi} \left(y^2+y'^2-2y\cdot\sin x\right)\cdot dx$, що задовольняють граничним умовам $y(0)=0, \quad y(\pi)=1$.

Вказівки: загальний розв'язок рівняння $y''-y=-\sin x$ зручно шукати як суму загального розв'язку однорідного рівняння $y''-y=0$ та частинного розв'язку неоднорідного рівняння, якій шукаємо у вигляді $y(x)=A\sin x+B\cos x$.

3. Знайти екстремалі функціонала $J\{y\}=\int\limits_{0}^{1} \left(y'^2-4y(y')^3+2x\cdot(y')^4\right)\cdot dx$, що задовольняють граничним умовам $y(0)=0, \quad y(1)=0$.

Відповідь: $y(x)=0$.

4. Знайти екстремалі функціонала $J\{y\}=\int\limits_{0}^{3/2} \left((y')^3+2y\right)\cdot dx$, що задовольняють граничним умовам $y(0)=0, \quad y\left(\frac{3}{2}\right)=1$.

Відповідь: $y(x)=\left(\frac{2x}{3}\right)^{3/2}$.

5. Знайти екстремалі функціонала $J\{y\}=\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$, що задовольняють граничним умовам $y(x_1)=y_1, \quad y(x_2)=y_2$.

Вказівки: Серед усіх кривих з простору $C^1_{[x_1, x_2]}$, що з'єднують задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ найменшу довжину має пряма $y(x) = y_1 + \frac{x - x_1}{x - x_2} \cdot \left(y_2 - y_1\right)$.

6. Знайти екстремалі функціонала $J\{y\} = \int\limits_0^2 x \cdot y \cdot y' \cdot dx$, що задовольняють граничним умовам $y(0) = 0, \quad y(2) = 1$.

Відповідь: екстремаль не існує (рівняння Ейлера зводиться до функції $y(x) = 0$, друга гранична умова не виконується для цієї функції).

Завдання для самостійного виконання

Варіант 1.

1. Знайти екстремалі заданих функціоналів, що задовольняють граничним умовам $J\{y\} = \int\limits_0^1 yshx - y^2chxdx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1$.

2. Знайти екстремалі заданих функціоналів, що задовольняють граничним умовам $J\{y\} = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y^2 + 1)dx, \quad y(x_0) == y(x_1) = 0$.

Варіант 2.

1. Знайти екстремалі заданих функціоналів, що задовольняють граничним умовам $J\{y\} = \int\limits_{x_0}^{x_1} e^y(1 + xy')dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$.

2. Знайти екстремалі заданих функціоналів, що задовольняють граничним умовам $J\{y\} = \int\limits_1^2 [x^2(y')^2 + 12y^2]dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 8$.

Варіант 3.

1. Знайти екстремалі заданих функціоналів, що задовольняють граничним

умовам $J\{y\}=\int\limits_0^1 (y')^2 dx, \quad y(0)=0, \quad y(1)=1$.

2. Знайти екстремалі заданих функціоналів, що задовольняють граничним умовам $J\{y\}=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} [y^2-2(y')^2]e^{-x}dx, \quad y(0)=0, \quad y(\frac{3\pi}{2})=e^{\frac{3\pi}{2}}$.

Варіант 4.

1. Знайти екстремалі заданих функціоналів, що задовольняють граничним умовам $J\{y\}=\int\limits_0^1 xy'-(y')^2 dx, \quad y(0)=1, \quad y(1)=\frac{1}{4}$.

2. Знайти екстремалі заданих функціоналів, що задовольняють граничним умовам $J\{y\}=\int\limits_4^8 (x-4y)^2 dx, \quad y(4)=1, \quad y(8)=2$.

Варіант 5.

1. Знайти екстремалі заданих функціоналів, що задовольняють граничним умовам $J\{y\}=\int\limits_{-1}^2 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y} dx, \quad y(-1)=1, \quad y(2)=4$.

2. Знайти криву $y(x)$, по якій матеріальна точка переміщується з точки $M(0;\,1)$ в точку $N(1;\,2)$ зі швидкістю $v=x$ за мінімальний час.

Варіант 6.

1. Знайти екстремалі заданих функціоналів $J\{y\}=\int\limits_4^6 (x-2y)^2 dx$, що задовольняють граничним умовам $y(4)=1$ та $y(6)=2$.

2. Знайти криву $y(x)$, по якій матеріальна точка переміщується з точки $P(0;\,1)$ в точку $Q(1;\,3)$ зі швидкістю $v=3x$ за мінімальний час.

10. Рівняння Ейлера–Пуассона

Нехай маємо функціонал

$$J\{y\}=\int_a^b F(x,y,y',y'')dx \tag{25}$$

з підінтегральною функцією $F(x,y,z,u)$, що має неперервні частинні похідні за всіма її аргументами до 3-го порядку включно. На множині функцій $y(x)\in C^2_{[a,b]}$ шукаємо екстремум $J\{y\}$, що задовольняє граничним умовам

$$y(a) = A,\ y(b) = B,\ y'(a)= A_1\ ,\ y'(b) = B_1\ . \tag{26}$$

Варіація функціонала має вигляд

$$\delta J=\int_a^b [F'_y\delta y+F'_{y'}\delta y'+F'_{y''}\delta y'']dx \tag{27}$$

Необхідна умова екстремуму функціонала (25) полягає в тому, що функція $y(x)$, яка задовольняє умовам (26) і доставляє екстремум, повинна бути на відрізку $[a, b]$ розв'язком рівняння Ейлера-Пуассона

$$F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F'_{y''}\equiv 0\,. \tag{28}$$

Покажемо це. Знайдемо варіацію функціонала

$$\delta J=\int_a^b [F'_y\delta y+F'_{y'}\delta y'+F'_{y''}\delta y'']dx\,.$$

За рахунок граничних умов (26) на кінцях відрізка $[a,b]$ маємо $\delta y(a)= 0$, $\delta y(b) = 0$. Далі інтегруємо за частинами другий і третій доданки в виразі (27), тоді маємо

$$\int_a^b F'_{y'}\delta y'dx=-\int_a^b \frac{d}{dx}F'_{y'}\delta y dx\,,$$

$$\int_a^b F'_{y''}\delta y''dx=-\int_a^b \frac{d}{dx}F'_{y''}\delta y'dx=\int_a^b \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''}\delta y dx\,.$$

Отже, замість виразу (27) отримуємо вираз для варіації функціонала

$$\delta J=\int_a^b\left(F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F'_{y''}\right)\delta y dx\,. \tag{29}$$

Підінтегральний вираз в (29) є неперервною функцією аргумента *x,* варіація δy є довільною, причому $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. Тоді за основною лемою та умовою (18) з рівності $\delta J = 0$ отримуємо рівність (28). Рівність (28) є звичайним диференціальним рівнянням четвертого порядку; чотирьох граничних умов (26) в принципі як раз достатньо, щоб отримати шуканий частинний розв'язок $y(x)$, що реалізує екстремум. Функціонали з похідними порядку $k > 2$ розглядаються аналогічно. Рівняння Ейлера для такого функціонала має порядок $2k$.

Приклад 25. Знайти екстремаль функціонала

$$J\{y\} = \int_0^{\pi} [(y'')^2 + 3(y')^2 - 4y^2 + x^2]dx$$

за таких умов $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$, $y'(0) = 1$, $y'(\pi) = -1$.

Розв'язування. Маємо підінтегральну функцію

$$F = (y'')^2 + 3(y')^2 - 4y^2 + x^2, \quad F'_y = -8y,$$

$$F'_{y'} = 6y', \quad F'_{y''} = 2y'', \quad \frac{d}{dx}F'_{y'} = 6y'', \quad \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''} = 2y^{IV}.$$

За умовою (28) отримуємо $-8y - 6y'' + 2y^{IV} = 0$ або $y^{IV} - 3y'' - 4y = 0$ – це лінійне однорідне диференціальне рівняння 4-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Запишемо відповідне до такого диференціального рівняння характеристичне рівняння та знайдемо його корені

$$k^4 - 3k^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k^2 = 4 \\ k^2 = -1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = -2 \\ k_2 = 2 \\ k_3 = -i \\ k_4 = i \end{array}\right. .$$

Загальний розв'язок зазначеного диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x .$$

Використовуємо граничні умови і отримуємо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 e^{2\pi} + C_2 e^{-2\pi} - C_3 = 0 \\ 2C_1 - 2C_2 + C_4 = 1 \\ 2C_1 e^{2\pi} - 2C_2 e^{-2\pi} - C_4 = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 0 \\ C_4 = 1 \end{cases}.$$

Отже, шукана екстремаль функціонала має вигляд $y(x) = \sin x$.

Відповідь: шукана екстремаль функціонала має вигляд $y(x) = \sin x$.

Приклад 26. Серед всіх функцій $y(x)$ з класу $C^2_{[a,b]}$, що задовольняють граничним умовам $y(0) = y(\pi) = 0$, $y'(0) = y'(\pi) = 1$, знайти таку, що реалізує екстремум функціонала $J\{y\} = \int\limits_0^{\pi} (16y^2 - (y'')^2 + x^2)dx$.

Розв'язування. Для такої задачі рівняння Ейлера-Пуассона має вигляд

$$32y + (-1)^2 \frac{d^2}{dx^2}(-2y'') = 0, \text{ или } y^{IV} - 16y = 0.$$

Запишемо відповідне характеристичне рівняння до диференціального рівняння і знайдемо його корені $k^4 - 16 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k^2 = 4 \\ k^2 = -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = -2 \\ k_2 = 2 \\ k_3 = -2i \\ k_4 = 2i \end{array}\right.$.

Загальний розв'язок має вигляд $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$. Використовуємо граничні умови, отримуємо $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = 0{,}5$. Отже, $y(x) = 0{,}5 \cdot \sin 2x$ є шуканою функцією.

Відповідь: шукана екстремаль функціонала має вигляд $y(x) = 0{,}5 \cdot \sin 2x$.

Завдання для самостійного виконання

Варіант 1.

1. Знайти екстремалі наступного функціонала, що задовольняють граничним умовам

$$J\{y\} = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_1} (y'')^2 dx, \quad y(x_0) = y(x_1) = 0, \quad y'(x_0) = y'(x_1) = 0.$$

Варіант 2.

1. Знайти екстремалі наступного функціонала, що задовольняють граничним умовам

$$J\{y\} = \int\limits_0^1 [(y'')^2 + 2(y')^2 + y^2]dx, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y'(1) = -sh1.$$

Варіант 3.

1. Знайти екстремалі наступного функціонала, що задовольняють граничним умовам

$$J\{y\}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}[(y'')^2-y^2+x^2]dx,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

Варіант 4.

1. Знайти екстремалі наступного функціонала, що задовольняють граничним умовам

$$J\{y\}=\int\limits_0^{3\pi}\left[(y'')^2+3(y')^2-4y^2+x^2\right]\cdot dx,\quad y(0)=y(3\pi)=0,\, y'(0)=1,\, y'(3\pi)=-1\,.$$

Варіант 5.

1. Знайти екстремалі наступного функціонала, що задовольняють граничним умовам

$$J\{y\}=\int\limits_0^{3\pi}\left[16y^2-(y'')^2+x^2\right]\cdot dx,\quad y(0)=y(3\pi)=0,\, y'(0)=y'(3\pi)=1\,.$$

Варіант 6.

1. Знайти екстремалі наступного функціонала, що задовольняють граничним умовам

$$J\{y\}=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_1^2(y'')^2dx,\quad y(1)=y(2)=0,\quad y'(1)=y'(2)=0\,.$$

11. Функціонали від декількох функцій

Функціонал може залежати не від однієї, а від декількох функцій одного змінного. Так буде, зокрема, у таких задачах на екстремум, де шукається не плоска, а просторова лінія; втім, такі завдання виникають і незалежно від їхнього геометричного тлумачення.

Розглянемо функціонал, що залежить від двох функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$,

$$J\{y_1,y_2\}=\int\limits_a^b F(x,y_1,y_1',y_2,y_2')dx\,, \tag{30}$$

якщо $a \le x \le b$, причому ніякого зв'язку між такими функціями не передбачається. Одну з них можна зафіксувати, а іншу довільно варіювати. Фіксуючи $y_2(x)$ і варіюючи $y_1(x)$, отримаємо **частинну варіацію** $\delta_{y_1} J$, аналогічну частинному диференціалу

$$\delta_{y_1} J\{y_1, y_2, \delta y_1\} = \int_a^b (F'_{y_1}\delta y_1 + F'_{y'_1}\delta y'_1)dx \qquad (31)$$

Аналогічно виражається частинна варіація за y_2

$$\delta_{y_2} J\{y_1, y_2, \delta y_2\} = \int_a^b (F'_{y_2}\delta y_2 + F'_{y'_2}\delta y'_2)dx\,. \qquad (32)$$

Якщо ставиться задача про екстремум функціонала (23) при найпростіших граничних умовах

$$y_1(a) = y_{1a}, \quad y_1(b) = y_{1b}, \quad y_2(a) = y_{2a}, \quad y_2(b) = y_{2b}, \qquad (33)$$

то для функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, що реалізують екстремум, обидві частинні варіації повинні дорівнювати нулю. Таким чином приходимо до системи рівнянь Ейлера

$$\begin{cases} F'_{y_1} - \dfrac{d}{dx}F'_{y'_1} = 0 \\ F'_{y_2} - \dfrac{d}{dx}F'_{y'_2} = 0 \end{cases}. \qquad (34)$$

Загальний розв'язок такої системи двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку містить чотири довільних сталих, які визначаються з чотирьох граничних умов.

Аналогічно розглядаються функціонали, що залежать від великого числа функцій, а також функціонали, що залежать від декількох функцій та виражаються через похідні більш вищого порядку.

Приклад 27. Знайти екстремалі функціонала $J\{y_1, y_2\} = \int_0^{\pi} [(y'_1)^2 - 2y_1^2 + 2y_1y_2 - (y'_2)^2]dx$ за таких граничних умов $y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi) = y_2(\pi) = 1$.

Розв'язування. Система диференціальних рівнянь для такого функціоналу має вигляд $\begin{cases} y_1'' + 2y_1 - y_2 = 0 \\ y_2'' + y_1 = 0 \end{cases}$. Виключаємо y_2, отримуємо рівняння

$$y_1^{IV} + 2y_1'' + y_1 = 0.$$

Запишемо відповідне до нього характеристичне рівняння і знайдемо його корені

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k^2 + 2k + 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k+1)^4 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = -i \\ k_2 = i \\ k_3 = -i \\ k_4 = i \end{array}\right.$$

Загальний розв'язок такого диференціального рівняння має вигляд

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(C_3 \cos x + C_4 \sin x).$$

З граничних умов $C_1 = 0, C_3 = -\frac{1}{\pi}$, тобто $y_1 = C_2 \sin x - \frac{x}{\pi}\cos x + C_4 x \sin x$. Далі маємо $y_2 = C_2 \sin x + C_4(2\cos x + x\sin x) + \frac{1}{\pi}(2\sin x - x\cos x)$. Сталі C_2 і C_4 шукаємо, використовуючи граничні умови для y_2. Отримуємо $C_4 = 0$, C_2 є довільною сталою. Отже, $y_2 = C_2 \sin x + \frac{1}{\pi}(2\sin x - x\cos x)$. Сім'я екстремалей має вигляд $\begin{cases} y_1 = C_2 \sin x - \frac{x}{\pi}\cos x + C_4 x \sin x \\ y_2 = C_2 \sin x + \frac{1}{\pi}(2\sin x - x\cos x) \end{cases}$.

Відповідь: екстремалі функціонала при таких граничних умовах мають вигляд $\begin{cases} y_1 = C_2 \sin x - \frac{x}{\pi}\cos x + C_4 x \sin x \\ y_2 = C_2 \sin x + \frac{1}{\pi}(2\sin x - x\cos x) \end{cases}$.

Завдання для самостійного виконання

Варіант 1.

1. Знайти сім'ю екстремалей наступних функціоналів при таких граничних умовах

$$J\{y_1, y_2\} = \int_{0,5}^{1} [(y_1')^2 - 2xy_1 y_2]dx, \; y_1(0,5) = 2, \quad y_2(0,5) = 15, \quad y_1(1) = y_2(1) = 1.$$

Варіант 2.

1. Знайти сім'ю екстремалей наступних функціоналів при таких граничних умовах

$$J\{y_1, y_2\} = \int_{1}^{2} \left[(y_2')^2 - xy_1'\right] \cdot dx, \; y_1(1) = 2, \quad y_2(1) = 1, \quad y_1(2) = -\frac{1}{6}, \quad y_2(2) = \frac{1}{2}.$$

Варіант 3.

1. Знайти сім'ю екстремалей наступних функціоналів при таких граничних умовах

$$J\{y_1, y_2\} = \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}(y_1')^3 - (y_2')^2 + 2xy_1\right] \cdot dx, \; y_1(-1) = 2, y_2(-1) = -1, y_1(1) = 0, y_2(1) = 1.$$

Варіант 4.

1. Знайти сім'ю екстремалей наступних функціоналів при таких граничних умовах

$$J\{y_1, y_2\} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left((y_1')^2 - 2y_1 y_2 + (y_2')^2\right) dx \;\; y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Варіант 5.

1. Знайти сім'ю екстремалей наступних функціоналів при таких граничних умовах

$$J\{y_1, y_2\} = \int_{0}^{5\pi} \left((y_1')^2 - 2y_1^{\,2} + 2y_1 y_2 - (y_2')^2\right) dx, \; y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(5\pi) = y_2(5\pi) = 1.$$

Варіант 6.

1. Знайти сім'ю екстремалей наступних функціоналів при таких граничних умовах

$$J\{y_1, y_2\} = \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 \left(y_1' + y_2^2\right) dx, \quad y_1(1) = y_2(1) = 0, \quad y_1(2) = y_2(2) = 0.$$

12. Функціонали, що залежать від функцій двох незалежних змінних

Розглянемо функціонал

$$J = \iint_D F\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot dxdy. \qquad (35)$$

Позначимо $\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$. Нехай $F(x, y, z, p, q)$ – функція неперервна разом зі своїми похідними до другого порядку включно в деякій просторовій області R значень змінних x, y, z при всіх кінцевих p та q. Далі, нехай Γ – замкнена просторова крива, проекція якій на площині xOy є простим замкненим контуром C, що обмежує область D.

Рівняння поверхні S, що розташована в області R та проходить через криву Γ, має вигляд $z = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ неперервна разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial f}{\partial x}$ та $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Поставимо задачу пошуку поверхні $z = f(x, y)$, на якій інтеграл (35) має найменше значення в порівнянні з інтегралами, що розглядаються з близьких допустимих поверхонь.

Нехай на контурі C, що обмежує область D, функція $z = f(x, y)$ приймає задані значення $f(x, y) = v(x, y), \quad (x, y) \in C$. Норма елемента в просторовій області R має вигляд

$$\|f(x, y)\| = \max\left\{\max_{(x,y)\in C}|f(x, y)|, \max_{(x,y)\in C}\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|, \max_{(x,y)\in C}\left|\frac{\partial f(x, y}{\partial y})\right|\right\}.$$

Нехай H – підпростір простору $C^2(R^2)$ – складається з функцій $h(x, y)$, таких, що $h(x, y) = 0$ при $(x, y) \in C$. Можна ще казати, що підпростір H породжується функціями $h(x, y)$.

Якщо функція $z = f(x, y)$ задовольняє задачі пошуку мінімальної поверхні для функціонала (35), то й функція $f(x,y)+h(x,y), \quad h \in H$, також задовольняє цій задачі.

Обчислимо першу варіацію функціонала (35). Розглянемо одночасно функцію $\varphi(\lambda) = J\{f(x,y)+\lambda \cdot h(x,y)\}, \quad h \in H$. Очевидно, що $\delta J\{f,h\} = \varphi'(0)$. Обчислимо $\varphi'(0)$, маємо

$$\delta J\{f,h\} = \varphi'(0) = \iint\limits_D \left[F'_f \cdot h(x,y) + F'_p \cdot \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} + F'_q \cdot \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} \right] \cdot dxdy .$$

Якщо екстремум функціонала (35) існує, то за умовою (18) маємо $\delta J = 0$.

Перетворимо наступні вирази $F'_p \cdot \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \left(F'_p \cdot h(x,y) \right)}{\partial x} - \frac{\partial F'_p}{\partial x} \cdot h(x,y)$, $F'_q \cdot \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \left(F'_q \cdot h(x,y) \right)}{\partial y} - \frac{\partial F'_q}{\partial y} \cdot h(x,y)$, де $\frac{\partial F'_p}{\partial x}$ є повною частинною похідною за змінною x і має вигляд

$$\frac{\partial F'_p}{\partial x} = F''_{px} + F''_{pf} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + F''_{pp} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + F''_{pq} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} .$$

Аналогічно $\frac{\partial F'_q}{\partial y} = F''_{qy} + F''_{qf} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + F''_{qp} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + F''_{qq} \cdot \frac{\partial q}{\partial y}$.

Отримуємо

$$\begin{aligned} \delta J = \iint\limits_D (F'_f \cdot h(x,y) + \frac{\partial \left(F'_p \cdot h(x,y) \right)}{\partial x} - \frac{\partial F'_p}{\partial x} \cdot h(x,y) + \\ + \frac{\partial \left(F'_q \cdot h(x,y) \right)}{\partial y} - \frac{\partial F'_q}{\partial y} \cdot h(x,y)) \cdot dxdy = \\ = \iint\limits_D \left(F'_f \cdot h(x,y) - \frac{\partial F'_p}{\partial x} \cdot h(x,y) - \frac{\partial F'_q}{\partial y} \cdot h(x,y) \right) \cdot dxdy + \\ + \iint\limits_D \left(\frac{\partial \left(F'_p \cdot h(x,y) \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(F'_q \cdot h(x,y) \right)}{\partial y} \right) \cdot dxdy = \end{aligned}$$

$$= \iint_D \left(F'_f - \frac{\partial F'_p}{\partial x} - \frac{\partial F'_q}{\partial y} \right) \cdot h(x,y) dxdy +$$
$$+ \iint_D \left(\frac{\partial \left(F'_p \cdot h(x,y) \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(F'_q \cdot h(x,y) \right)}{\partial y} \right) \cdot dxdy \, .$$

Використовуємо формулу Гріна

$$\iint_D \left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \right] \cdot dxdy = \int_C N \cdot dy - M \cdot dx \, .$$

Тоді

$$\iint_D \left(\frac{\partial \left(F'_p \cdot h(x,y) \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(F'_q \cdot h(x,y) \right)}{\partial y} \right) \cdot dxdy = \int_C F'_p \cdot h(x,y) \cdot dy - F'_q \cdot h(x,y) \cdot dx = 0,$$

оскільки $h(x,y) \in H$, $h(x,y) = 0$ при $(x,y) \in C$. Отже, необхідна умова існування екстремуму функціонала має вигляд

$$\delta J = \iint_D \left(F'_f - \frac{\partial F'_p}{\partial x} - \frac{\partial F'_q}{\partial y} \right) \cdot h(x,y) dxdy = 0 \text{ для усіх } h(x,y) \in H \, .$$

За основною лемою варіаційного числення маємо $F'_f - \frac{\partial F'_p}{\partial x} - \frac{\partial F'_q}{\partial y} = 0$. Це рівняння другого порядку з частинними похідними називається **рівнянням Ейлера-Остроградського**.

Якщо існує така поверхня *S*, що розташована в області *R* та проходить через криву *Г*, на якій інтеграл (35) має найменше значення, то рівняння поверхні $z = f(x, y)$ є розв’язком **рівняння Ейлера-Остроградського**

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) = 0 \, . \qquad (36)$$

Приклад 28. Знайти поверхню з найменшою (або мінімальною) площею, що проходить через криву *Г*.

Задача Плато: питання про існування мінімальної поверхні з заданою межею – довести існування поверхні найменшою площі з межею, що створена заданою жордановою кривою в просторі. Вперше сформульована Жозефом

Лагранжем у 1760 році; названа на честь Жозефа Плато, що проводив експерименти з мильними плівками.

Розв’язування. Задача зводиться до пошуку мінімуму інтеграла $J=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$, де область *D* обмежена контуром *C*. Проекція замкненої просторової кривої *Г* на площину *xOy* є простим замкненим контуром *C*, що обмежує область *D*. Маємо $F=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+p^2+q^2}$.

Рівняння Ейлера-Остроградського (36) для такого випадку приймає вигляд $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0$. Обчислимо відповідні частинні похідні та перетворимо ліву частину рівняння Ейлера-Остроградського

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\sqrt{1+p^2+q^2}-p\cdot\frac{p\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+q\cdot\frac{\partial q}{\partial x}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{1+p^2+q^2}+\frac{\frac{\partial q}{\partial y}\cdot\sqrt{1+p^2+q^2}-q\cdot\frac{q\cdot\frac{\partial q}{\partial y}+p\cdot\frac{\partial p}{\partial y}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{1+p^2+q^2}=0,$$

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\left(1+p^2+q^2\right)-p\cdot\left(p\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+q\cdot\frac{\partial q}{\partial x}\right)}{\left(1+p^2+q^2\right)^{3/2}}+\frac{\frac{\partial q}{\partial y}\cdot\left(1+p^2+q^2\right)-q\cdot\left(q\cdot\frac{\partial q}{\partial y}+p\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\right)}{\left(1+p^2+q^2\right)^{3/2}}=0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\left(1+p^2+q^2\right)-p^2\cdot\frac{\partial p}{\partial x}-pq\cdot\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}\cdot\left(1+p^2+q^2\right)-q^2\cdot\frac{\partial q}{\partial y}-pq\cdot\frac{\partial p}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\left(1+q^2\right)-pq\cdot\left(\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial q}{\partial y}\cdot\left(1+p^2\right)=0.$$

Отримуємо $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\left(1+q^2\right)-2pq\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\left(1+p^2\right)=0$. Позначимо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t,$$

тоді можемо записати $r\left(1+p^2\right)+t\left(1+p^2\right)-2pqs=0$.

Це рівняння з частинними похідними визначає мінімальні поверхні, для яких середня кривизна поверхні в кожній точці дорівнює нулю. Фізичною реалізацією мінімальних поверхонь є мильні плівки, що натягнуті на просторовий контур *Г*.

Відповідь: шуканими мінімальними поверхнями є поверхні, для яких середня кривизна таких поверхонь в кожній точці дорівнює нулю.

Завдання для самостійного виконання

Варіант 1.

1. Записати рівняння Ейлера-Остроградського для функціонала

$$J=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy.$$

Варіант 2.

1. Записати рівняння Ейлера-Остроградського для функціонала

$J=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2z\varphi(x,y)\right]dxdy$, де $\varphi(x,y)$ – функція, що визначена і двічі неперервно диференційована в області *D*.

Варіант 3.

1. Записати рівняння Ейлера-Остроградського для функціонала

$$J=\iint\limits_D\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Варіант 4.

1. Записати рівняння Ейлера-Остроградського для функціонала

$$J=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right]dxdy.$$

Варіант 5.

1. Записати рівняння Ейлера-Остроградського для функціонала

$$J = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2z \right] dxdy .$$

Варіант 6.

1. Записати рівняння Ейлера-Остроградського для функціонала

$$J = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \right] \cdot dxdy .$$

13. Параметрична форма варіаційних задач

Розглянемо функціонал

$$J = J_C = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, \text{[illegible]} \quad , \tag{37}$$

де $\dot{x}, \dot{y}$ – похідні від функцій $x(t)$ та $y(t)$ за параметром t, $[t_0, t_1]$ – відрізок, на якому задана параметрична крива $x = x(t)$, $y = y(t)$. Підінтегральна функція F в (37) є однорідною першого порядку за $\dot{x}, \dot{y}$, тобто $F(x, y, k$ [illegible] . Диференціюємо останню рівність по k і беремо $k = 1$, маємо

$$\dot{x} F_{\dot{x}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + \dot{y} F_{\dot{y}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) .$$

Диференціюємо далі за змінними $x, y, \dot{x}, \dot{y}$, отримаємо

$F_x(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} F_{x\dot{x}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + \dot{y} F_{x\dot{y}}(x, y, \dot{x}, \dot{y})$,

$F_y(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} F_{y\dot{x}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + \dot{y} F_{y\dot{y}}(x, y, \dot{x}, \dot{y})$,

$F_{\dot{x}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = F_{\dot{x}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + \dot{x} F_{\dot{x}\dot{x}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + \dot{y} F_{\dot{x}\dot{y}}(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ або після спрощення

$0 = \dot{x} F_{\dot{x}\dot{x}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + \dot{y} F_{\dot{x}\dot{y}}(x, y, \dot{x}, \dot{y})$,

$F_{\dot{y}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} F_{\dot{x}\dot{y}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + F_{\dot{y}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + \dot{y} F_{\dot{y}\dot{y}}(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ або після спрощення

$0 = \dot{x} F_{\dot{x}\dot{y}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + \dot{y} F_{\dot{y}\dot{y}}(x, y, \dot{x}, \dot{y})$.

Розглянемо такі отримані рівності

$$\begin{cases} \dot{x}F_{\dot{x}\dot{x}}(x,y,\dot{x},\dot{y}) + \dot{y}F_{\dot{x}\dot{y}}(x,y,\dot{x},\dot{y}) = 0, \\ \dot{x}F_{\dot{x}\dot{y}}(x,y,\dot{x},\dot{y}) + \dot{y}F_{\dot{y}\dot{y}}(x,y,\dot{x},\dot{y}) = 0 \end{cases}. \qquad (37^*)$$

Множимо перше рівняння системи рівнянь (37*) на $\dot{x}$, друге рівняння – на $\dot{y}$ відповідно, маємо

$$\begin{cases} (\dot{x})^2 F_{\dot{x}\dot{x}}(x,y,\dot{x},\dot{y}) + \dot{x}\dot{y}F_{\dot{x}\dot{y}}(x,y,\dot{x},\dot{y}) = 0, \\ \dot{x}\dot{y}F_{\dot{x}\dot{y}}(x,y,\dot{x},\dot{y}) + (\dot{y})^2 F_{\dot{y}\dot{y}}(x,y,\dot{x},\dot{y}) = 0 \end{cases}. \qquad (37^{**})$$

Віднімаємо перше рівняння від другого в (37**), після перетворень отримуємо

$$\frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{(\dot{y})^2} = \frac{F_{\dot{y}\dot{y}}}{(\dot{x})^2}.$$

Далі ділимо перше і друге рівнянні в системі рівнянь (37**) на $(\dot{x}\cdot\dot{y})^2$, маємо

$$\begin{cases} \dfrac{F_{\dot{x}\dot{x}}(x,y,\dot{x},\dot{y})}{(\dot{y})^2} + \dfrac{F_{\dot{x}\dot{y}}(x,y,\dot{x},\dot{y})}{\dot{x}\dot{y}} = 0, \\ \dfrac{F_{\dot{x}\dot{y}}(x,y,\dot{x},\dot{y})}{\dot{x}\dot{y}} + \dfrac{F_{\dot{y}\dot{y}}(x,y,\dot{x},\dot{y})}{(\dot{x})^2} = 0 \end{cases}.$$

Отже, з останньої системи рівнянь маємо $\dfrac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{(\dot{y})^2} = -\dfrac{F_{\dot{x}\dot{y}}}{\dot{x}\dot{y}}$, $\dfrac{F_{\dot{y}\dot{y}}}{(\dot{x})^2} = -\dfrac{F_{\dot{x}\dot{y}}}{\dot{x}\dot{y}}$. Остаточно отримуємо $F_1(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \dfrac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{(\dot{y})^2} = -\dfrac{F_{\dot{x}\dot{y}}}{\dot{x}\dot{y}} = \dfrac{F_{\dot{y}\dot{y}}}{(\dot{x})^2}$, де через функцію $F_1(x,y,\dot{x},\dot{y})$ позначена величина всіх трьох відношень. Ці відношення можна записати у вигляді $F_{\dot{x}\dot{x}} = F_1\cdot(\dot{y})^2$, $F_{\dot{x}\dot{y}} = -F_1\cdot\dot{x}\dot{y}$, $F_{\dot{y}\dot{y}} = F_1\cdot(\dot{x})^2$.

Слід додати до вищесказаного: функції $x(t)$ і $y(t)$, що реалізують екстремум функціонала J в (37), при будь-якому виборі параметра t повинні задовольняти системі рівнянь Ейлера

$$\begin{cases} F_x - \dfrac{d}{dt}F_{\dot{x}} = 0 \\ F_y - \dfrac{d}{dt}F_{\dot{y}} = 0 \end{cases}. \qquad (38)$$

Використовуємо отримані вище рівності

$$F_x(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \dot{x}F_{x\dot{x}}(x,y,\dot{x},\dot{y}) + \dot{y}F_{x\dot{y}}(x,y,\dot{x},\dot{y}),$$

$$F_y(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \dot{x}F_{y\dot{x}}(x,y,\dot{x},\dot{y}) + \dot{y}F_{y\dot{y}}(x,y,\dot{x},\dot{y}),$$

$$F_{\dot{x}\dot{x}} = F_1 \cdot (\dot{y})^2, F_{\dot{x}\dot{y}} = -F_1 \cdot \dot{x}\dot{y}, \quad F_{\dot{y}\dot{y}} = F_1 \cdot (\dot{x})^2$$

для аналізу системи рівнянь Ейлера (38). Маємо

$$F_y - \frac{d}{dt}F_{\dot{y}} = \dot{x}F_{y\dot{x}} + \dot{y}F_{y\dot{y}} - \left(\dot{x}F_{\dot{y}x} + \dot{y}F_{\dot{y}y} + \ddot{y}F_{\dot{y}\dot{y}} + \ddot{x}F_{\dot{y}\dot{x}}\right) =$$

$$= \dot{x}F_{y\dot{x}} - \dot{x}F_{\dot{y}x} - \left(\ddot{y} \cdot F_1 \cdot (\dot{x})^2 + \ddot{x}\left(-F_1 \cdot \dot{x}\dot{y}\right)\right) =$$

$$= \dot{x}\left(F_{y\dot{x}} - F_{\dot{y}x}\right) - F_1 \cdot \dot{x}\left(\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}\right) =$$

$$= \dot{x}\left(\left(F_{y\dot{x}} - F_{\dot{y}x}\right) - F_1 \cdot \left(\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}\right)\right),$$

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = \dot{x}F_{x\dot{x}} + \dot{y}F_{x\dot{y}} - \left(\dot{x}F_{\dot{x}x} + \dot{y}F_{\dot{x}y} + \ddot{x}F_{\dot{x}\dot{x}} + \ddot{y}F_{\dot{x}\dot{y}}\right) =$$

$$= \dot{y}F_{x\dot{y}} - \dot{y}F_{\dot{x}y} - \left(\ddot{x}F_{\dot{x}\dot{x}} + \ddot{y}F_{\dot{x}\dot{y}}\right) =$$

$$= \dot{y}\left(F_{x\dot{y}} - F_{\dot{x}y}\right) - \left(\ddot{x} \cdot F_1 \cdot (\dot{y})^2 - \ddot{y} \cdot F_1 \cdot \dot{x}\dot{y}\right) =$$

$$= \dot{y}\left(F_{x\dot{y}} - F_{\dot{x}y}\right) - \dot{y}F_1\left(\ddot{x} \cdot \dot{y} - \ddot{y} \cdot \dot{x}\right) =$$

$$= \dot{y}\left(\left(F_{x\dot{y}} - F_{\dot{x}y}\right) + F_1\left(\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}\right)\right).$$

Отже, якщо $\dot{x}, \dot{y}$ не дорівнюють 0 одночасно $\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0\right)$, то два рівняння з системи рівнянь (38) можна звести до одного рівняння

$$F_1\left(\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}\right) + F_{x\dot{y}} - F_{\dot{x}y} = 0. \qquad (38^*)$$

Рівняння (38*) – це так звана форма Вейєрштрасса рівнянь Ейлера. Із (38*) можна розглянути ще одне рівняння, що характеризує вибір параметру *t*. Якщо, наприклад, за параметр беремо довжину дуги S шуканої екстремалі, то додаткове рівняння буде $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$.

Якщо врахувати, що радіус кривизни R плоскої кривої, заданої в параметричній формі $x = x(t), \quad y = y(t)$, обчислюється за формулою

$\frac{1}{R} = \frac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}$, то форму Вейєрштрасса рівнянь Ейлера, використовуючи рівняння (38*), можна записати у вигляді

$$\frac{1}{R} = \frac{F_{x\dot{y}} - F_{\dot{x}y}}{F_1 \cdot \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}. \tag{39}$$

Ця форма інваріантна до параметру t [Мишкіс, 1971].

Приклад 29. Знайти екстремалі функціонала $J = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + a^2 \cdot (x\dot{y} - y\dot{x})\right] \cdot dt$, де a – деяке додатне число.

Розв'язування. Маємо $F = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + a^2 \cdot (x\dot{y} - y\dot{x})$ – додатна однорідна функція першого порядку від змінних $\dot{x}$ та $\dot{y}$. Використовуємо форму Вейєрштрасса рівнянь Ейлера (39) для пошуку екстремалі функціонала J. Шукаємо частинні похідні для цієї функції

$$F_{\dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + a^2 \cdot (-y), \quad F_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \dot{x} \cdot \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\dot{y}^2}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}.$$

$F_y = a^2 \cdot \dot{x} \cdot (-1), \quad F_{y\dot{x}} = -a^2$. $F_x = a^2 \cdot \dot{y}, \quad F_{x\dot{y}} = a^2$.

Остаточно маємо $F_{x\dot{y}} = a^2$, $F_{y\dot{x}} = -a^2$, $F_1 = \frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = \frac{1}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}$. Тому рівняння (39) приймає вигляд $\frac{1}{R} = 2a^2$. Таким чином, екстремалями будуть дуги кіл з радіусом $\frac{1}{2a^2}$.

Відповідь: екстремалями функціонала будуть дуги кіл з радіусом $\frac{1}{2a^2}$.

Приклад 30. Знайти екстремалі функціонала $J = \int\limits_0^{x_1} y^2 \cdot y'^2 \cdot dx$ при таких граничних умовах $y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1$.

Розв'язування. Якщо криву *y(x)* задати в параметричній формі у вигляді $x = x(t), \quad y = y(t)$, то підінтегральна функція $F = y^2 \cdot \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 \cdot \dot{x}$ буде однорідною функцією 1-ого порядку: $F(y, t\dot{x}, t\dot{y}) = y^2 \cdot \left(\frac{t\dot{y}}{t\dot{x}}\right)^2 \cdot t\dot{x} = t \cdot y^2 \cdot \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 \cdot \dot{x} = t \cdot F(y, \dot{x}, \dot{y})$.

Рівняння Ейлера $F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0$ має вигляд $\frac{d}{dt}\left(y^2 \cdot \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 \cdot \dot{x} \right) = 0$. Звідси $\frac{d}{dt}\left(y^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right) = 0 \Rightarrow y^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = C^2$, де C – довільна стала. Далі маємо $y \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) = C_1 \Rightarrow y dy = C_1 dx, \quad \frac{y^2}{2} = C_1 x + \frac{C_2}{2}, \quad y^2 = 2 \cdot C_1 x + C_2$. Використовуємо першу граничну умову і отримаємо, що $C_2 = 0$. Тоді функція має вигляд $y^2 = 2 \cdot C_1 x$.

Відповідь: шукані екстремалі функціонала мають вигляд $y^2 = 2 \cdot C_1 x$. Це параболи з вершиною в початку координат. За допомогою другої граничної умови $y(x_1) = y_1$ можна знайти сталу C_1.

14. Поняття про достатні умови екстремуму функціонала

Досі під час розгляду задачі про екстремальне значення функціонала $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ ми обмежувалися пошуком лише необхідних умов екстремуму.

Одним з типів достатніх умов екстремуму є **посилені умови Лежандра**: якщо на екстремалі $y = y(x)$ виконується нерівність $F_{y'y'} > 0$ ($F_{y'y'} < 0$), то в сукупності з деякими іншими умовами ця умова забезпечує слабкий мінімум (слабкий максимум) заданого функціонала. Якщо ж $F_{y'y'} \geq 0$ ($F_{y'y'} \leq 0$) при довільних значеннях y', тоді така екстремаль реалізує сильний мінімум (сильний максимум).

Приклад 31. Дослідити на екстремум функціонал $J = \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} dx$ при наступних граничних умовах $y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1$.

Розв'язування. В прикладі 18 (тема 9) було показано, що екстремалями є циклоїди $\begin{cases} x = C_1(t - \sin t) + C_2, \\ y = C_1(1 - \cos t). \end{cases}$. Пучок циклоїд $\begin{cases} x = C_1(t - \sin t), \\ y = C_1(1 - \cos t). \end{cases}$ з центром в початку координат образує центральне поле, що включає екстремаль $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, де параметр a визначається з умов проходження циклоїди через другу граничну точку $B(x_1, y_1)$. Якщо $x_1 < 2\pi a$, то частинна похідна першого порядку за змінною y' функції F має вигляд $F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}}$. Обчислюємо частинну похідну другого порядку від функції F за змінною y' і порівнюємо її з 0, маємо $F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}(1+(y')^2)^{3/2}} > 0$ при будь-яких y'. Отже, при $x_1 < 2\pi a$ на циклоїді реалізується сильний мінімум.

Відповідь: екстремум функціонала при $x_1 < 2\pi a$ буде сильний мінімум, що реалізується на циклоїді $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, де параметр a визначається з умов проходження циклоїди через другу граничну точку $B(x_1, y_1)$.

15. Поняття про прямі методи розв'язування варіаційних задач. Метод Ріца

Точний розв'язок рівняння Ейлера в елементарних функціях можливий лише в виняткових випадках. Існують різноманітні числові методи розв'язування крайових задач, але вони складні. Частіше використовують ефективні методи, що не потребують переходу до рівняння Ейлера. Їх називають **прямими методами розв'язування варіаційних задач**. Розглянемо **метод Ріца.**

Припустимо, що шукана екстремаль $y\,(x)$ допускає розвинення в ряд

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x) \tag{40}$$

де $\varphi_k(x)$ – відомі функції, що задовольняють певним вимогам; α_k – числа. В якості ряду в (40) може бути ряд Фур'є, степеневий або якій-небудь інший ряд. Питання полягає в тому, як вибрати функції $\varphi_k(x)$ і знайти відповідні цьому вибору числа α_k**.** Якщо розвинення в ряд (40) підставити в функціонал $J\{y\}$, то останній буде функцією величин $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...$, тобто $J\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)\right) = \Phi(\alpha_0, \alpha_1, ...)$. Таким чином, пошук екстремуму функціонала зводиться до пошуку екстремуму функції $\Phi(\alpha_0, \alpha_1, ...)$. Способи розв'язування такої задачи відомі, але їх практична реалізація складна внаслідок великого числа змінних. У припущенні збіжності ряд (40) можна замінити його частковою сумою

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x), \tag{41}$$

яка наближає функцію $y(x)$ так, що залишок ряду при $n \to \infty$ спадає за нормою до нуля: $\|y(x) - y_n(\mathrm{x})\| \to 0$. Тоді відповідна функція Φ вже буде мати кінцеве число аргументів $\Phi(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$, необхідні умови існування екстремуму для неї виражаються рівностями

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} = 0, ... \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_n} = 0. \tag{42}$$

Числа $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$, що знайдені з системи рівнянь (42), дозволяють отримати наближений розв'язок варіаційної задачи у формі (41).

Функції $\varphi_k(x)$ з виразу (41) називають **координатними.** Вони повинні:

1) належати тому ж класу функцій, що функція $y(x)$,

2) бути лінійно незалежними при будь-якому n,

3) покращувати якість наближення (хоча б мати таку можливість) за рахунок прямування $\|y(x) - y_n(x)\| \to 0$, коли $n \to \infty$.

Водночас вибір координатних функцій $\varphi_k(x)$ неоднозначний: значною мірою він диктується міркуваннями зручності та формою граничних умов, яким має задовольняти шукана екстремаль $y(x)$. Нехай $y(a) = A$, $y(b) = B$, покладемо $\alpha_0 = 1$, замість виразу (41) зручніше користуватися уявленням

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x). \tag{43}$$

Підбираємо $\varphi_0(x)$ таким чином, щоб $\varphi_0(a) = A$, $\varphi_0(b) = B$, інші координатні функції достатньо підпорядкувати умовам $\varphi_k(a) = 0, \quad \varphi_k(b) = 0 \quad \forall \quad k = 1,2,3,...,n$.

Приклад 32. Наближено за методом Ріца знайти мінімум функціонала $J\{y\} = \int_0^1 \left[y'^2 + 12xy\right] \cdot dx$, якщо $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Розв'язування. Будемо шукати наближення $y_n(x)$ до невідомої екстремалі $y(x)$ у формі (43) з $\varphi_0(x) = x$. Обидві граничні умови для такої функції $\varphi_0(x)$ виконуються: $\varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_0(1) = 1$. Координатні функції $\varphi_k(x)$, $k = 1,2,...$ виберемо таким чином, щоб вони задовольняли однорідним, тобто нульовим граничним умовам, для чого скористуємося многочленами. Нехай $\varphi_k(x) = (1-x)x^k, \quad k = 1,2,3,...,n$. Разом з функцією $\varphi_0(x)$ функції $\varphi_k(x)$ належать простору $C^1_{[0,1]}$, на якому визначений функціонал $J\{y\}$. Існує доказ того, що многочлени вказаного виду при відповідному виборі n та α_k в уявленні (43) можуть добре наблизити будь-яку функцію $y(x) \in C^1_{[0,1]}$.

Нехай $n = 1$, тоді $y_1(x) = x + \alpha_1(1-x)x$. Підставимо $y_1(x)$ в функціонал

$$J\{y_1\} = \int_0^1 [(1 + \alpha_1(1-2x))^2 + 12x(x + \alpha_1(x - x^2)]dx =$$

$$= \int_0^1 [(1+2\alpha_1(1-2x)+\alpha_1^2(1-2x)^2+12(x^2+\alpha_1 x^2-\alpha_1 x^3)]dx = \frac{\alpha_1^2}{3}+\alpha_1+5.$$

Знайдемо стаціонарну точку функції

$$\Phi(\alpha_1)=\frac{\alpha_1^{2}}{3}+\alpha_1+5: \quad \frac{d\Phi}{d\alpha_1}=0, \quad \frac{2\alpha_1}{3}+1=0, \quad \alpha_1=-\frac{3}{2}.$$

Отже, $y_1(x)=x-\frac{3}{2}\cdot\left(x-x^2\right)=\frac{3x^2-x}{2}$. Порівняємо наближений розв'язок $y_1(x)$ з точним $y = x^3$ (приклад 10, тема 8). Щодо розбіжності можна судити за наведеними нижче даними в таблиці 1 та рисунком 8.

Таблиця 1. Порівняння наближених і точних значень

x	$y=x^3$	$y_1=(3x^2-x)/2$	$\delta y=y_1-y$
0	0	0	0
1/4	1/64	-1/32	-3/64
1/2	1/8	1/8	0
3/4	27/64	15/32	3/64
1	1	1	0

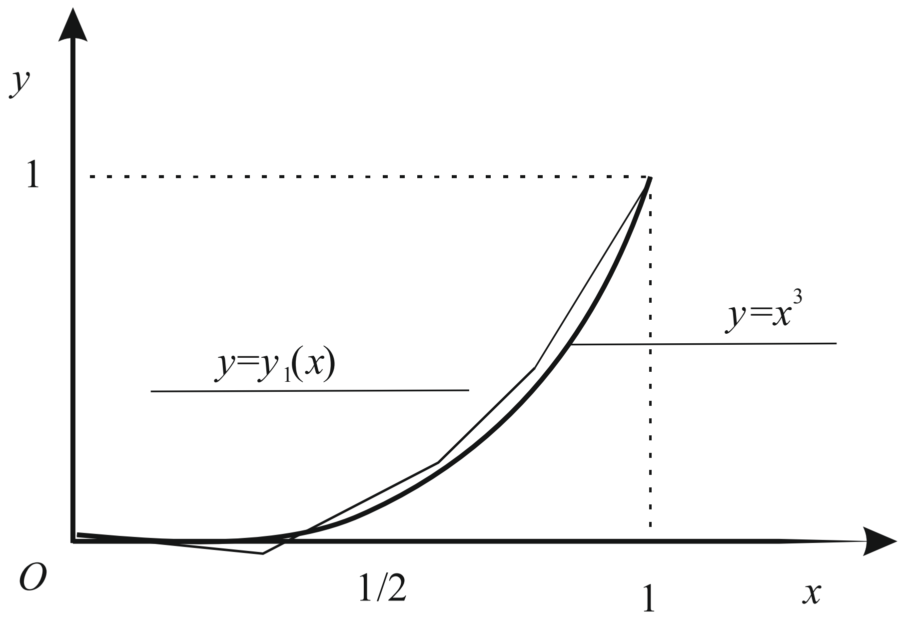

Рисунок 8. Ілюстрація до прикладу 31

Збільшимо зараз порядок наближення, покладемо при цьому $n = 2$. Тоді

$$y_2(x) = x + \alpha_1(1-x)x + \alpha_2(1-x)x^2, \quad y_2'(x) = 1 + \alpha_1(1-2x) + \alpha_2(2x-3x^2),$$

$$J\{y_2\} = \int_0^1 \left[(1+\alpha_1(1-2x)+\alpha_2(2x-3x^2))^2 + 12(x^2+\alpha_1(x^2-x^3)+\alpha_2(x^3-x^4) \right] \cdot dx =$$

$$= \frac{\alpha_1^2}{3} + \frac{2\alpha_2^2}{15} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{3} + \alpha_1 + \frac{3\alpha_2}{5} + 5 = \Phi(\alpha_1, \alpha_2).$$

Необхідні умови екстремуму $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} = 0$ приводять до системи рівнянь $\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = -3 \\ 5\alpha_1 + 4\alpha_2 = -9 \end{cases}$. Звідси $\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = -1$. Маємо $y_2(x) = x - (x - x^2) - (x^2 - x^3)$, тобто $y_2(x) = x^3$. Отже, при $n = 2$ наближений розв'язок співпав з точним.

Відповідь: наближення $y_1(x) = \frac{3x^2 - x}{2}$, а наближення $y_2(x) = x^3$ повністю співпадає з точним розв'язком $y = x^3$, що є мінімумом функціонала.

Індивідуальні завдання

Варіант 1

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\} = \int_1^e (y^2 + e^y)dx, \quad y = 2x^2, \quad \delta y = x$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\} = \int_0^1 (xy' + \cos y)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(3,4)$.

Варіант 2

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\} = \int_0^1 (y^2 + e^y)dx, \quad y = x^2, \quad \delta y = x$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\} = \int_0^1 (xy' + (y')^2)dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 4$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(1,4)$.

Варіант 3

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\}=\int_0^1 (y^2+e^y)dx, \quad y=x, \quad \delta y=0.5x$

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\}=\int_0^2 \left((y')^2+\dfrac{y'}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx, \quad y(0)=1, \quad y(2)=2$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(1,2)$.

Варіант 4

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\}=\int_0^1 (xy^2+\ln)dx, \quad y=x, \quad \delta y=0.1x$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\}=\int_0^1 \left((y')^2+\dfrac{y'}{\sqrt{2+x^2}}\right)dx, \quad y(0)=0, \quad y(1)=1$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(3,4)$.

Варіант 5

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\}=\int_0^1 (e^{xy}+y^2)dx, \quad y=-3x, \quad \delta y=\dfrac{0.1}{x}$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\}=\int_0^1 \left((y')^2+\dfrac{2y'}{1+x^2}\right)dx, \quad y(0)=0, \quad y(1)=1$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(5,4)$.

Варіант 6

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\}=\int_0^1 (2^{xy}+y^2)dx, \quad y=-2x, \quad \delta y=\dfrac{1}{x}$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\}=\int_0^1 ((y')^2+e^y)dx, \quad y(0)=1, \quad y(1)=e$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(2,3)$.

Варіант 7

1. Обчислити варіацію функціонала

$$J\{y(x)\}=\int_0^1 (\cos xy+y^2)dx, \quad y=6x, \quad \delta y=-0.1x$$

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\}=\int_0^1 \left((y')^2+\dfrac{y'}{4-x^2}\right)dx, \quad y(0)=1, \quad y(1)=2$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(3,3)$.

Варіант 8

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\}=\int\limits_{-1}^{0}(\cos xy+y^2)dx,\quad y=6x,\quad \delta y=-0.1x$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\}=\int\limits_{2}^{4}((y')^2+e^x+y')dx,\quad y(2)=1,\quad y(4)=2$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(8,4)$.

Варіант 9

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\}=\int\limits_{-1}^{0}(tgxy+y^2)dx,\quad y=x^3,\quad \delta y=0.1x$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\}=\int\limits_{0}^{4}((y')^2+2xy')dx,\quad y(0)=0,\quad y(4)=2$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(7,4)$.

Варіант 10

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\}=\int\limits_{1}^{2}(ctgxy+y^2)dx,\quad y=x^2,\quad \delta y=x$

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\}=\int\limits_{0}^{2}(2xy'-(y')^2+e^x)dx$, если $y(0)=0$, $y(2)=4$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(2,6)$.

Варіант 11

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\}=\int\limits_{0}^{1}(y^2+5^y)dx,\quad y=x^2,\quad \delta y=x$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\}=\int\limits_{0}^{1}[(y')^2+xy'+1]dx$, якщо $y(0)=1$, $y(1)=2$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(4,7)$.

Варіант 12

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\}=\int\limits_{0}^{1}(y^2+e^{xy})dx,\quad y=x^3,\quad \delta y=0.01x$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\}=\int\limits_{0}^{1}\left((y')^2+\dfrac{2y'}{x^2+1}\right)dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=2$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(5,4)$.

Варіант 13

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\}=\int_0^1 (y^2+3^{xy})dx, \quad y=2x, \quad \delta y=0.1x$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\}=\int_0^1 [2(y')^2+2y']dx$, $y(0)=1$, $y(1)=2$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(2,7)$.

Варіант 14

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\}=\int_0^1 (y^2+\ln)dx, \quad y=x, \quad \delta y=0.1x$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\}=\int_0^2 (y'-2(y')^2+xe^x)dx$, якщо $y(0)=0$, $y(2)=1$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(10,4)$.

Варіант 15

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\}=\int_0^1 (7^{xy}+y^2)dx, \quad y=-2x, \quad \delta y=\dfrac{1}{x}$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\}=\int_0^1 (y'-(y')^2-8x)dx, \quad y(0)=1, \quad y(1)=e$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(9,4)$.

Варіант 16

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\}=\int_0^1 (xy+y^2)dx, \quad y=4x, \quad \delta y=x^3$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\}=\int_0^1 ((y')^2+y')dx$, $y(0)=0$, $y(1)=e$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(7,4)$.

Варіант 17

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\}=\int_0^1 (\sin xy+2y^2)dx, \quad y=6x, \quad \delta y=-0.1x$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\}=\int_0^1 ((y')^2+2y'-x)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=e$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(5,4)$.

Варіант 18

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\} = \int\limits_{-1}^{0} (ye^x + y^2)dx, \quad y = -2x, \quad \delta y = -0.1x^4$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\} = \int\limits_{0}^{1} (y^2 - 2(y')^2 + xy)dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(3,5)$.

Варіант 19

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\} = \int\limits_{0}^{1} (tgxy + y^2)dx, \quad y = 2x^3, \quad \delta y = 0.1x$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\} = \int\limits_{0}^{1} (y^2 - 2(y')^2 + y)dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(10,3)$.

Варіант 20

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\} = \int\limits_{1}^{2} (2 + y)^3 dx, \quad y = -2x^2, \quad \delta y = 0.1x^3$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\} = \int\limits_{0}^{1} (2y^2 - (y')^2 + x)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(9,3)$.

Варіант 21

1. Обчислити варіацію функціонала $J\{y(x)\} = \int\limits_{0}^{1} (2y^2 - e^y)dx, \quad y = x^2, \quad \delta y = x$.

2. Знайти екстремаль функціонала $J\{y\} = \int\limits_{0}^{\pi/2} ((y')^2 - y^2)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi / 2) = 1$.

3. Розв'язати задачу про брахістохрону при $M_1(0,0)$ і $M_2(8,3)$.

Література

1. Грудкіна Н.С. Варіаційне числення: методичні вказівки до практичних занять і самостійної роботи з дисципліни : [Електронний ресурс]. Краматорськ : ДДМА, 2021. 28 с. Режим доступу: http://www.dgma.donetsk.ua/docs/kafedry/vm/rp_mp2021/Основи%20варіаційного%20числення.pdf.

2. Захарчук В.І. Методи оптимізації та комп'ютерні технології : навч. посіб. для студ. вищих навч. закл. Луцьк : ЛНТУ, 2017. 144 с.

3. Вайсфельд Н.Д., Реут В.В. Рівняння математичної фізики [Електронний ресурс] : навч.-метод. посіб. для студ. спец. «Прикладна математика». Одеса : ОНУ ім. І.І. Мечникова, 2018. 194 с. Режим доступу: https://dspace.onu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/9a14005e-36f5-4844-a54b-7ee2833d9a02/content.

4. Диференціальні рівняння : теорія, приклади, розв'язання [Електронний ресурс] : навч. посіб. / Т.С. Кагадій, Л.Ф. Сушко, І.В. Щербина, О.Д. Оноприєнко, А.Г. Шпорта. Дніпро : ДДАЕУ, 2022. 190 с. Режим доступу: https://dspace.dsau.dp.ua/handle/123456789/7936.

5. Функція. Границя. Обчислення границь функції: методичні рекомендації до практичних занять з дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 «Прикладна математика» : [Електронний ресурс] / О.О. Сдвижкова, Д.В. Бабець, С.Є. Тимченко, Д.В. Клименко. Дніпро : НТУ «ДП», 2024. 42 с. Режим доступу: https://vm.nmu.org.ua/libr/metod/113-funkcja,%20granycja.pdf.

6. Гренджа В.І., Брила А.Ю., Ломага М.М. Методичні вказівки до практичних занять з курсів «Методи оптимізації» та «Варіаційне числення і методи оптимізації». Ч. І. Задачі класичного варіаційного числення. Метод варіацій для задач з нерухомими границями : [Електронний ресурс]. Ужгород, 2015. 55 с. Режим доступу: https://dspace.uzhnu.edu.ua/items/c287f4d1-225e-45a2-bad7-0ab61fdd3bb6/full.

7. Клименко М.І., Панасенко Є.В., Ткаченко І.Г. Оптимальне керування : конспект лекцій для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика» : [Електронний ресурс]. Запоріжжя : ЗНУ, 2023. 77 с. Режим доступу: https://dspace.znu.edu.ua/jspui/bitstream/12345/12258/1/0052627.pdf.

Навчальне видання

Тимченко Світлана Євгенівна
Клименко Діна Володимирівна

ЕЛЕМЕНТИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник

Видано в авторській редакції.

Електронний ресурс.
Підписано до видання 24.09.2025. Авт. арк. 5,9.

Підготовлено до видання
в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.