

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



Л. Г. Соляник, Д.С. Букреєва

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2025

УДК 336 (075.8)
С 60

*Рекомендовано вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка»
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності
072 (D2) Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок
(протокол № 8 від 06.06.2025).*

Рецензенти:

О.В. Хаджинова – д-р екон. наук, проф. (Приазовський державний технічний університет);

В.В. Баранова – д-р екон. наук, проф. (Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна).

Соляник Л.Г.

С 60 Фінансова математика : навч. посіб. [Електронний ресурс] / Л. Г. Соляник, Д.С. Букреєва ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». - Дніпро : НТУ «ДП», 2025. – 140 с.

У посібнику викладено основні теоретико-методичні засади фінансової математики та практичні аспекти використання методів і моделей у дослідженні фінансово-економічних процесів.

До кожної теми подано питання для самоконтролю, тестові завдання для самостійної роботи й контрольні завдання, приклади аналітичних розрахунків і кількісного аналізу ефективності найбільш поширених фінансових операцій.

Зміст навчального посібника має на меті сприяти опануванню теоретичного матеріалу та формуванню критичного мислення, практичних умінь і навичок у доборі й застосуванні математичних моделей та інструментів, що можуть бути корисними в процесі управління фінансовими ресурсами й грошовими активами суб'єктів господарювання.

Рекомендовано для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 072 (D2) Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок, а також для фахівців, практична діяльність яких пов'язана із застосуванням фінансової математики.

УДК 330.4(075)

© Л. Г. Соляник, Д.С. Букреєва 2025
© НТУ «Дніпровська політехніка», 2025

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	5
I МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ МАТЕРІАЛУ.....	6
II ПЕРЕЛІК КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ, ЯКІ МАЄ ЗАСВОЇТИ ЗДОБУВАЧ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ.....	7
III ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛІНИ.....	9
IV МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ ОСНОВНИХ ТЕОРЕТИЧНИХ ПОЛОЖЕНЬ ОКРЕМИХ ТЕМ ДИСЦИПЛІНИ.....	11
ТЕМА 1. КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ.....	11
1.1. Поняття фінансової математики та сутність фінансових обчислень	11
1.2. Концепція вартості грошей у часі та ефект дисконтування.....	13
1.3. Теперішня та майбутня вартість грошей.....	19
Питання для самоконтролю.....	20
Тестові завдання.....	20
ТЕМА 2. МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗАСАДИ ТА МЕХАНІЗМ РОЗРАХУНКУ ПРОСТИХ ВІДСОТКІВ.....	23
2.1. Методика обчислень за правилом простих процентів. Темп зростання коштів за правилом простих процентів.....	23
2.2. Обчислення за правилом простих процентів в умовах зміни вихідних параметрів.....	36
2.3. Поняття часової бази розрахунків. Комерційні й точні прості проценти.....	40
2.4. Застосування програмного забезпечення MS Excel в обчисленнях за правилом простих процентів.....	43
Питання для самоконтролю.....	45
Тестові завдання.....	45
ТЕМА 3. МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗАСАДИ ТА МЕХАНІЗМ РОЗРАХУНКУ СКЛАДНИХ ВІДСОТКІВ.....	46
3.1. Методика обчислень за правилом складних процентів.....	47
3.2. Обчислення за правилом складних процентів в умовах зміни вихідних параметрів.....	53
3.3. Номінальна та ефективна ставка складних процентів. Поняття неперервного складного процента та сили зростання.....	54
3.4. Застосування довідкових фінансових таблиць і програмного забезпечення MS Excel в обчисленнях за правилом складних процентів.....	57
Питання для самоконтролю.....	59
Тестові завдання.....	60
ТЕМА 4. ФІНАНСОВА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ.....	61
4.1. Поняття фінансової еквівалентності.....	61
4.2. Основні рівняння еквівалентності.....	63
4.3. Середні величини в фінансових розрахунках.....	68

4.4.	Консолідація платежів.....	70
	Питання для самоконтролю.....	73
	Тестові завдання.....	74
ТЕМА 5.	ПОТОКИ ПЛАТЕЖІВ І ФІНАНСОВІ РЕНТИ.....	76
5.1.	Види потоків платежів: характеристика та основні параметри.....	76
5.2.	Основні поняття та класифікація фінансових рент.....	79
5.3.	Методика розрахунку окремих видів фінансових рент	81
5.4.	Застосування довідкових фінансових таблиць та програмного забезпечення MS Excel у фінансових обчисленнях параметрів фінансових рент.....	89
	Питання для самоконтролю.....	90
	Тестові завдання.....	91
ТЕМА 6.	ОЦІНЮВАННЯ ТА ПЛАНУВАННЯ СХЕМ ФІНАНСОВО-КРЕДИТНИХ РОЗРАХУНКІВ.....	92
6.1.	Застосування теорії рент у плануванні схем фінансово-кредитних розрахунків.....	92
6.2.	Поняття лізингу та методи розрахунку лізингових платежів.....	93
6.3.	Кредитні розрахунки суб'єктів господарювання.....	99
	Питання для самоконтролю.....	105
	Тестові завдання.....	106
V	ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО КОНТРОЛЮ ДИСЦИПЛІНАРНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ.....	108
VI	КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ.....	109
VII	СИСТЕМА ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ.....	112
VIII	ТЕХНІЧНЕ ОБЛАДНАННЯ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ.....	116
IX	ГЛОСАРІЙ.....	116
X	РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ.....	125
	ДОДАТОК А ДОВІДКОВІ ФІНАНСОВІ ТАБЛИЦІ.....	127
	ДОДАТОК Б ФІНАНСОВІ ФУНКЦІЇ У ПРОГРАМІ MS EXCEL.....	137

ПЕРЕДМОВА

Для ухвалення обґрунтованих фінансово-економічних рішень та аналізу параметрів фінансових операцій в контексті активізації процесів глобалізації та інтеграції України у світову фінансову систему необхідно володіти відповідними методами фінансових розрахунків, які і є предметом фінансової математики.

Основним об'єктом фінансового аналізу є гроші та цінні папери. Сучасні ринкові умови потребують від суб'єктів господарювання вміння оцінювати всі можливі варіанти фінансових наслідків здійснення будь-якої комерційної операції та практично використовувати методи фінансово-економічного аналізу, виконуючи кредитні, інвестиційні та інші комерційні операції. Науковий апарат сучасного фінансово-економічного аналізу складається з методів і моделей фінансової математики, які дозволяють описувати на кількісному та якісному рівнях явища й процеси фінансової сфери економічного життя суспільства.

Мета дисципліни – формування у здобувачів компетентностей стосовно пізнання науково-методичних основ фінансової математики; оволодіння методами, інструментами й математичним апаратом ведення фінансових розрахунків та кількісного аналізу ефективності фінансових операцій.

Фінансова математика є базовим компонентом технічного аналізу, який дозволяє виявляти і досліджувати взаємозв'язки між вартісними і часовими характеристиками фінансових операцій, на підставі чого виконувати різноманітні фінансові завдання, які стоять перед інвесторами.

Предметом навчальної дисципліни «Фінансова математика» є система фінансово-економічних відносин, що виникають у суб'єктів господарювання в процесі інвестиційної діяльності, виконання комерційних і кредитних операцій під впливом зміни вартості грошей у часі.

Завдання навчальної дисципліни полягає в опануванні здобувачами методів та інструментів проведення фінансових розрахунків, які ґрунтуються на використанні схем простих і складних відсотків, фінансової ренти та на застосуванні результатів цих розрахунків для ухвалення обґрунтованих фінансових рішень.

Навчальна дисципліна закладає необхідні знання та вміння, потрібні в процесі засвоєння таких навчальних дисциплін, як "Інвестування", "Фінанси підприємств", "Фінансова статистика", "Банківські операції".

I. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ МАТЕРІАЛУ

Самостійна робота здобувача (СРЗ) – це така форма організації навчального процесу, коли заплановані завдання мають бути виконані ним у будь-який зручний час під методичним керівництвом викладача.

Самостійно працювати над засвоєнням навчального матеріалу студент може в бібліотеці, навчальних кабінетах університету, а також у домашніх умовах.

Починаючи самостійне вивчення матеріалу, перш за все, треба уважно ознайомитись із інформаційними джерелами стосовно певної теми, розподілити питання за ступенем складності. Виконуючи самостійну роботу, здобувач повинен виокремлювати основні теоретичні положення й формули для розрахунку параметрів фінансових операцій, які подані в навчальному посібнику та в інших методичних джерелах інформації з дисципліни, запам'ятовувати ключові слова, спеціальні терміни й поняття.

Для самостійного опрацювання теоретичних положень дисципліни «Фінансова математика» необхідно використовувати лекційні матеріали, підручники, нормативно-правові акти, додаткову наукову літературу, довідники, ресурси мережі Інтернет.

Засвоєнню основних теоретичних аспектів навчальної дисципліни сприятиме розв'язування ситуаційних задач, для роботи над якими подано рекомендації.

У результаті вивчення матеріалу певної теми рекомендовано перевірити ступінь засвоєння інформації, відповідаючи на тестові завдання й контрольні питання, запропоновані до кожної теми дисципліни.

Отже, під час самостійної роботи здобувачу пропонуються такі види завдань, аби опанувати матеріал певної теми, осмислити й засвоїти теоретичні положення теми; скласти термінологічний словник; продумати відповіді на питання для самоконтролю; підготувати тези виступу під час аудиторного заняття й доповіді на рекомендовану тему; розв'язати ситуаційні задачі; дати відповіді на тестові та контрольні питання.

Час, відведений для самостійної роботи студентів денної форми навчання, визначено в навчальному плані. У ході самостійної роботи здобувач має перетворитися на активного учасника навчального процесу, набути здатність свідомого ставлення до оволодіння теоретичними знаннями й практичними навичками, вільно орієнтуватися в інформаційному просторі, нести індивідуальну відповідальність за якість власної професійної підготовки.

Самостійна робота здобувача, крім зазначених вище чинників, передбачає аналітичний розгляд наукових публікацій; підготовку до практичних занять; експрес-тестування та виконання індивідуальних й контрольних завдань за підсумком вивчених тем; систематизацію засвоєного матеріалу з метою підготовки до практичних робіт і комплексної контрольної роботи з дисципліни.

II. ПЕРЕЛІК КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ, ЯКІ МАЄ ЗАСВОЇТИ ЗДОБУВАЧ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Вивчаючи навчальну дисципліну «Фінансова математика» студент має набути таких компетентностей:

- використовувати математичний апарат та інструментарій для дослідження фінансово-економічних категорій і законів щодо концепції вартості грошей у часі, виявлення причинно-наслідкових й функціональних зв'язків між економічними категоріями вартості грошей, часу, ризику та інформації.

- оперувати понятійним апаратом та використовувати фундаментальні принципи й комплексний методичний інструментарій до вирішення певної фінансової операції й ситуації.

- розробляти і досліджувати математичні моделі фінансових процесів та фінансових операцій. Здійснювати підбір конкретних методів, інструментів та математичного апарату для здійснення фінансових розрахунків з метою ефективного управління фінансовими ресурсами й грошовими активами підприємства: розрахунку поточної та майбутньої вартості грошей за схемами простих і складних відсотків; визначення параметрів фінансових рент та результативності фінансових операцій із цінними паперами й операцій з погашення кредитної заборгованості за різними схемами.

- здійснювати постановку й формалізацію фінансових задач для їх вирішення з використанням математичного апарату та економіко-математичних методів

- застосовувати відповідні економіко-математичні методи, моделі та програмне забезпечення MS Excel для вирішення фінансових задач щодо розрахунку й аналізу основних параметрів фінансових операцій, грошових потоків, фінансової ренти за різними схемами її здійснення та умов реалізації кредитних контрактів.

- визначати параметри фінансових операцій у разі зміни певних їхніх умов, виконувати розрахунки щодо конверсії та консолідації боргів з використанням фінансових функцій в EXCEL.

- застосувати економіко-математичні методи до прогнозування схем фінансово-кредитних розрахунків та фінансових процесів у сфері управління на підприємствах і фінансових установах.

- організовувати та здійснювати процес опрацювання інформації щодо здійснення фінансових операцій суб'єктами підприємницької діяльності, вміти використовувати комп'ютерні технології з метою пошуку необхідної фінансової інформації та її опрацювання.

Перелічені компетентності забезпечено відповідними їм знаннями, вміннями та навичками.

Перелік знань, які становлять компетентність:

- визначення сутності вартості грошей у часі;

- розуміння сутності процесів нарощення й дисконтування капіталу суб'єктів підприємницької діяльності за правилом простих та складних відсотків;

- економічний зміст реінвестування (капіталізації) капіталу; особливості операцій з урахування векселів;

- розуміння механізму обчислень за правилом простих й складних процентів в умовах змін вихідних параметрів;
 - економічний зміст ефективної річної відсоткової й облікової ставок та особливості їх використання в фінансових операціях;
 - визначення змісту й сутності аналізу потоку платежів та його основних параметрів;
 - економічний зміст фінансової ренти й особливостей її нарахування та сплати за різними схемами;
 - нарощення первісного капіталу, враховуючи купівельну спроможність грошей;
 - оперування понятійним апаратом і використання фундаментальних принципів та комплексного методичного підходу до вирішення певної фінансової операції й ситуації.
- До переліку вмінь і навичок, які складають компетентність, належать такі:*
- здійснювати підбір конкретних методів, інструментів та математичного апарату для здійснення фінансових розрахунків з метою належного управління фінансовими ресурсами й грошовими активами підприємства, враховування в фінансовій діяльності суб'єктів господарювання концепції вартості грошей у часі та розрахунку поточної й майбутньої вартості грошей;
 - виконувати операції нарощення й дисконтування грошових активів підприємства за схемами простих і складних відсотків, розраховувати основні параметри й результативність операцій із цінними паперами, організовувати та здійснювати процес опрацювання інформації щодо здійснення фінансових операцій суб'єктами підприємницької діяльності, уміти використовувати комп'ютерні технології з метою пошуку необхідної інформації;
 - розраховувати основні параметри грошових потоків, визначати сучасну й майбутню вартість анuitетів, розрізняти пряме та зворотне завдання у процесі оцінювання грошових потоків, обчислювати параметри відстрочених, безстрокових, безперервних анuitетів та анuitетів зі зміною величини платежу;
 - уміти враховувати інфляцію в процесі визначення вартості капіталу за схемами простих і складних відсотків;
 - визначати параметри фінансових операцій у разі зміни певних їхніх умов, виконувати розрахунки щодо конверсії та консолідації боргів.

III. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛІНИ

Види та тематика навчальних занять
ЛЕКЦІЇ
1. Концептуальні засади фінансової математики. 1.1. Поняття фінансової математики та сутність фінансових обчислень. Концепція вартості грошей у часі та ефект дисконтування. 1.2. Теперішня та майбутня вартість грошей.
2. Методологічні засади та механізм розрахунку простих відсотків. 2.1. Методика фінансових розрахунків за правилом простих процентів. Темп росту коштів за правилом простих процентів. Обчислення за правилом простих процентів в умовах змін вихідних параметрів. 2.2. Поняття часової бази розрахунків. Комерційні та точні прості проценти. 2.3. Застосування програмного забезпечення MS Excel в обчисленнях за правилом простих процентів.
3. Методологічні засади та механізм розрахунку складних відсотків. 3.1. Методика фінансових розрахунків за правилом складних процентів. Обчислення за правилом складних процентів в умовах змін вихідних параметрів. 3.2. Номінальна та ефективна ставка складних процентів. Поняття 3.3. неперервного складного проценту та сили росту. Застосування довідкових фінансових таблиць та програмного 3.4. забезпечення MS Excel в обчисленнях за правилом складних процентів.
4. Фінансова еквівалентність. 4.1. Поняття фінансової еквівалентності. 4.2. Основні рівняння еквівалентності. 4.3. Визначення еквівалентної ставки дохідності фінансової операції при утриманні комісійних.
Тема 5. Потоки платежів і фінансові ренти. 5.1. Види потоків платежів і їх основні параметри. 5.2. Основні поняття та класифікація фінансових рент. 5.3. Методика розрахунку фінансових рент за окремими видами. 5.4. Застосування довідкових фінансових таблиць та програмного забезпечення MS Excel у фінансових обчисленнях для потоків платежів.
6. Оцінка та планування схем фінансово-кредитних розрахунків. 6.1. Застосування теорії рент у плануванні схем фінансово-кредитних розрахунків. 6.2. Поняття лізингу та методи розрахунку лізингових платежів. Кредитні розрахунки суб'єктів господарювання.

Види та тематика навчальних занять
ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ
ПЗ 1. Обчислення за правилом простих процентів. Нарощення капіталу з використанням простої відсоткової ставки та за дисконтною ставкою. Комерційні та точні прості проценти. Урахування інфляції в фінансових розрахунках з використанням схеми простих відсотків.
ПЗ 2. Обчислення за правилом простих процентів в умовах змін вихідних параметрів. Поняття змінної складної відсоткової ставки. «Плаваюча» складна відсоткова ставка. Визначення середньої складної відсоткової ставки. Дисконтування (математичне та банківське дисконтування) за схемою простих відсотків. Дисконтування (облік) векселів. Розрахунок дисконтованої величини векселя.
ПЗ 3. Фінансові розрахунки за правилом складних процентів. Нарощення капіталу за схемою складних відсотків та за змішаною схемою. Визначення параметрів фінансової операції (терміну позики та прибутковості) за умови використання схеми складних процентів. Дисконтування з використанням складної відсоткової ставки. Урахування інфляції в фінансових розрахунках з використанням схеми складних відсотків.
ПЗ 4. Обчислення за правилом складних процентів в умовах змін вихідних параметрів. Поняття змінної складної відсоткової ставки. «Плаваюча» складна відсоткова ставка. Визначення середньої складної відсоткової ставки. Розрахунок номінальної та ефективної ставки складних процентів. Співвідношення ефективної та номінальної річної ставки. Розрахунок неперервного складного проценту та сили росту.
ПЗ 5. Фінансова еквівалентність. Еквівалентність простих і складних відсоткових і облікових ставок. Еквівалентність номінальної ставки складних відсотків. Еквівалентність складної дисконтної і номінальної складної відсоткової ставки. Еквівалентність сили зростання і простої відсоткової та дисконтної ставок. Визначення змінених параметрів фінансових контрактів із використанням схем простих й складних відсотків. Консолідація платежів, визначення параметрів нових платежів.
ПЗ 6. Потоки платежів і фінансові ренти. Операції нарощення і дисконтування грошових потоків. Розрахунок нарощеної суми й сучасної величини звичайної ренти. Визначення параметрів фінансових рент. Конверсія фінансових рент. Розрахунок параметрів змінних потоків платежів.
ПЗ 7. Планування схем фінансово-кредитних розрахунків. Розрахунки щодо погашення кредитної заборгованості за різними схемами. Конверсія та консолідація позик.

IV. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ ОСНОВНИХ ТЕОРЕТИЧНИХ ПОЛОЖЕНЬ ОКРЕМИХ ТЕМ ДИСЦИПЛІНИ

ТЕМА 1. КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ

Питання до розгляду

- 1.1. Поняття фінансової математики та сутність фінансових обчислень.
- 1.2. Концепція вартості грошей у часі та ефект дисконтування.
- 1.3. Теперішня та майбутня вартість грошей.

1.1. Поняття фінансової математики та сутність фінансових обчислень

Прийняття ефективних фінансово-економічних рішень ґрунтується на значній кількості фінансових обчислень. Потреба в таких обчисленнях виникає майже в будь-якій комерційній угоді чи *фінансовій операції*, коли її умовами оговорюються конкретні значення трьох параметрів:

1. Вартісних характеристик (ринкова вартість фінансових та матеріальних активів, розміри витрат та надходжень за інвестиційними проектами, суми боргових зобов'язань та відсотки за кредитними угодами тощо);

2. Часових характеристик (строки до погашення, дати та строки виплат, тривалість та періодичність надходжень коштів, відстрочки платежів тощо);

3. Параметрів щодо ризику та дохідності (ринкові оцінки надійності та ліквідності капіталовкладень у певні активи, ринкові оцінки норм рентабельності та дохідності фінансових операцій, надбавки за ризику в ставках дохідності тощо).

Кількісне оцінювання та вивчення математичних залежностей між вищезазначеними параметрами (вартості, часу, дохідності) й становлять **сутність фінансових обчислень**.

Терміни «фінансова математика» та «фінансові обчислення» іноді вживають як синоніми, хоча, поняття фінансової математики є ширшим. Фінансові обчислення це лише методи та інструментарій фінансових розрахунків. Фінансова математика включає також моделі оцінки різних активів, тобто застосовує математичний апарат фінансових обчислень для розв'язання прикладних економічних задач.

Об'єктом фінансової математики є гроші, цінні папери та різні операції з ними, наприклад, видача кредиту, інвестиції грошей у різні активи.

Предметом дисципліни «Фінансова математика» є методологія та інструментарій фінансових розрахунків та кількісного аналізу ефективності фінансових операцій.

Метою дисципліни є задоволення потреб майбутніх фахівців економічних спеціальностей у знаннях в області фінансових обчислень, що виникають при розв'язанні практичних проблем у різних сферах економічної та підприємницької діяльності.

Завдання дисципліни полягає у вивченні та опануванні студентами основних понять, методів та математичного апарату фінансових обчислень, що є підґрунтям для кількісного аналізу інструментів фінансового ринку та інших об'єктів інвестування.

Фінансова математика має суто практичне спрямування, оскільки з її допомогою розв'язують багато задач, які присутні в будь-якій фінансовій операції чи комерційній угоді. До основних задач фінансової математики можна віднести наступні:

- оцінку кінцевих фінансових результатів операції (угоди, контракту) для кожного контрагенту;
- розробку платіжних схем виконання фінансових операцій (зокрема, планів погашення заборгованостей);
- розробку фінансових планів майбутніх капіталовкладень та аналіз ефективності інвестування (зокрема, розрахунок критеріїв оцінки ефективності інвестицій);
- аналіз залежності кінцевих результатів операції від її основних параметрів (зокрема, врахування факторів часу та ризику) тощо.

Теоретичною основою фінансової математики є методи фінансових обчислень, що стосуються взаємозалежності вартості, часу, ризику, та кількісний аналіз ефективності фінансових операцій.

1.2. Концепція вартості грошей у часі та ефект дисконтування

Гроші – це еквівалент вартості усіх інших товарів та послуг, бо саме за допомогою грошей у вигляді фіксованої кількості грошових одиниць вимірюється вартість будь-якого товару.

У фінансових розрахунках необхідно врахування чинника часу: **«поза часом грошей не існує»**.

Є принцип, який діє незалежно від зміни загального рівня цін: мати певну суму грошей сьогодні завжди краще, ніж мати її завтра. Певна сума грошей сьогодні завжди цінніша від такої самої суми в *майбутньому*. Причому, це твердження залишається справедливим, навіть якщо не брати до уваги інфляцію та ризик неповернення коштів. Принцип, який проголошує, що гроші повинні робити гроші, незважаючи на весь його примітивізм, дуже близький до істини.

В економічній теорії вважається, що в будь-який момент часу на ринку існують деякі *альтернативні варіанти інвестування*, які гіпотетично мають забезпечувати інвестору певну дохідність. Отже, вклавши кошти сьогодні, з урахуванням наявних на ринку ставок дохідності, в майбутньому інвестор може отримати вже більшу суму. Якщо ж час для інвестування був втрачений, то кажуть про *невикористані можливості* інвестора, які знаходять своє кількісне відображення у певному знеціненні номінальної суми коштів, що була в нього на початку цього періоду часу.

Теорія економічного ризику стверджує, що ризики, які відчуває інвестор, пов'язані не лише з імовірними втратами або збитками, але й з недоотриманням можливого прибутку. Особа, яка не інвестує кошти, знаходиться під впливом *ризиків невикористаних можливостей*, втрачаючи потенційні доходи.

Таким чином, **концепція вартості грошей у часі ґрунтується на тому**, що вартість грошей з плином часу змінюється за рахунок існування на фінансовому ринку певної норми дохідності інвестицій.

Наприклад, існування альтернативної можливості інвестування, котра забезпечує **дохід $r(i)$** відсотків за рік, означає, що одна грошова одиниця рівно через рік

коштуватиме $1(1+i)$. Відповідно одна грошова одиниця, яка буде отримана через рік, станом на сьогодні коштуватиме лише $1/(1+i)$.

Принцип нерівноцінності однакових за номіналом сум грошей, що належать до різних моментів часу, відомий у фінансових науках як **ефект дисконтування**.

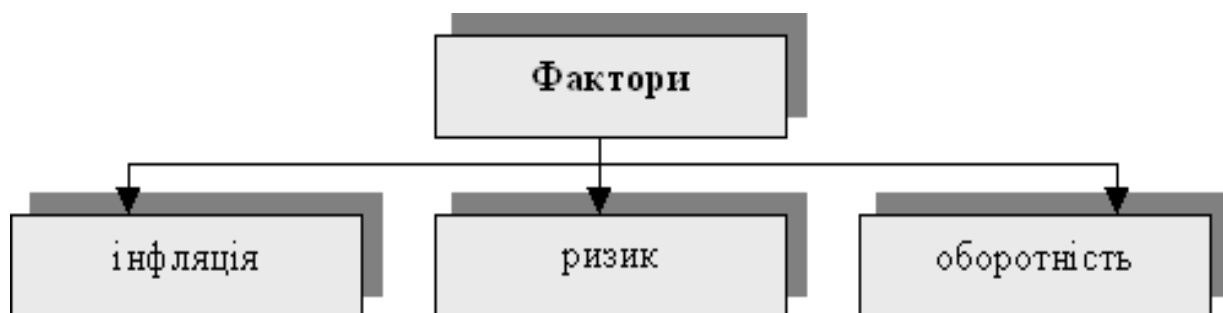


Рис. 1.1. Фактори, що визначають зміну вартості грошей у часі

Причинами «зміни цінності грошей з часом» є також *інфляція та ризик* (рис. 1.2).

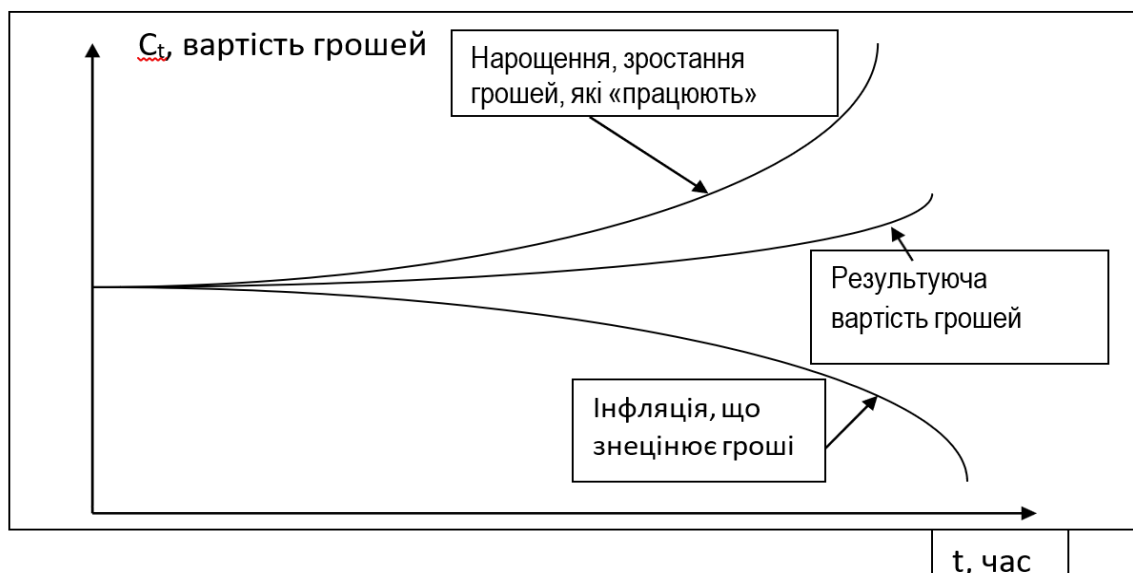


Рис. 1.2. Зміна вартості грошей у часі

Реальна цінність фінансових надходжень завжди залежить від моменту часу, в який вони будуть отримані. Фактор часу, особливо в довгострокових фінансових операціях, відіграє дуже важливу роль. Збільшення терміну кредиту призводить до збільшення суми, яку отримує кредитор. Таким чином гроші зростають у часі, або, як кажуть, «гроші роблять гроші».

Інфляція (inflation) – це знецінення грошей, що виявляється в зростанні цін на товари та послуги і, як наслідок, зниженні купівельної спроможності грошей.

Характеристиками інфляції є:

- *індекс цін J_p ;*
- *індекс купівельної спроможності грошей J_c ;*

➤ *темп інфляції h .*

Усі ці кількісні характеристики інфляції пов'язані між собою.

Індекс цін (prise index) I_p – це кількісна характеристика інфляції, яка показує, у скільки разів зросла вартість товару та послуг (наприклад, споживчого кошику) за певний період часу $[t_0, t]$, та визначається за формулою:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \quad (1.1)$$

де $p_{0,1}$ - ціна і товару в звітному й базисному періодах;

$q_{0,1}$ - кількість проданих товарів у звітному й базисному періодах;

T - загальна кількість товарів.

Темп інфляції h_i :

$$h_t = I_p - 1 \quad (1.2)$$

Коли відомі індекси цін за окремі інтервали часу (за умови змінних темпів інфляції), тоді індекс цін за весь період часу дорівнює добутку цих індексів цін за окремі інтервали часу. Індекс цін в загальному випадку (при змінному темпі інфляції h_t):

$$I_P = \prod_{T=1}^N (1 + H_T) = \prod_{T=1}^N I_{P(T)} \quad (1.3)$$

Індекс цін за термін фінансової операції за умови незмінних темпів інфляції в окремих періодах t :

$$I_p = (1 + h_t)^n \quad (1.4)$$

де h_t – темп приросту інфляції в періоді t .



Рис. 1.3. Причини ризику

Приклад 1.1. Темп інфляції за кожний місяць становить h_t – 5%. Знайти темп інфляції за рік.

$$I_p = (1 + 0,05)^{12} = 1,796;$$

$$h_i = I_p - 1 = 1,796 - 1 = 0,796 \text{ або } 79,6\%$$

Індекс купівельної спроможності грошей (cost index, index of purchasing power) J_c , який дорівнює оберненій величині індексу цін і показує, у скільки разів зменшилася купівельна спроможність грошей:

$$J_c = \frac{1}{I_p}$$

Ризик (risk) як невизначеність у процесі прийняття та реалізації рішення може призвести до того, що інвестор не отримає в майбутньому суму грошей, на яку розраховував на початок фінансової операції.

У широкому розумінні ризик - це невизначеність щодо настання тієї або іншої події в майбутньому. Ризик вимірюється ймовірністю того, що очікувана подія не відбудеться (чи відбудеться) і це призведе до небажаних наслідків.

Сутність ризику полягає в можливості відхилення отриманого результату від запланованого як у позитивний, так і в негативний бік.

Таблиця 1.1

Різновиди фінансових ризиків банку

Тип ризику	Підтип ризику
Кредитний	індивідуальний портфельний ризик країни трансфертний
Ризик ліквідності	ризик ліквідності ринку ризик ліквідності фінансування
Процентний ризик	ризик зміни вартості ресурсів ризик зміни кривої дохідності базисний ризик ризик вибору
Ринковий ризик	з іноземною валютою та металами з процентними інструментами з пайовими цінними паперами з товарними контрактами з похідними інструментами
Валютний ризик	ризик трансакції ризик трансляції економічний ризик

Банківські ризики, як і ризики в інших видах комерційної діяльності, перш за все пов'язують з фінансовими втратами, що виникають у випадку їх реалізації. Фінансові ризики визначаються ймовірністю фінансових втрат і пов'язуються з непередбаченими змінами обсягів, структури, дохідності та вартості активів і пасивів банку. До фінансових належать такі ризики, як кредитний, ризик ліквідності, валютний і ринковий ризики, відсотковий ризик, ризик зміни ресурсної бази ін. (табл. 1.1).

Кількісна міра ризику R є суб'єктивною величиною, яка може визначатися наступним чином:

$$R = \frac{P}{K} \quad (1.5)$$

де P - можливі втрати, які відбуваються при реалізації ризику;
 K - особистий капітал.

Приклад. 1.2. Оцінити ризик підприємця, який збирається інвестувати 100 000 грн., коли можливі втрати при реалізації проекту можуть скласти 20 000 грн.

Розв'язання.

Відповідно до (1.5) отримуємо коефіцієнт ризику $R = 0,2$, що відповідає зоні «допустимий ризик».

Експертна детермінована шкала чотирьох зон ризику приведена у табл. 1.2.

Для будь-яких економічних рішень взаємозв'язок між ризиком (R), вартістю (C), часом (T) та необхідною інформацією (I) можна виразити наступною якісною формулою:

$$\text{Ризик (R)} = \text{Вартість (C)} + \text{Час (T)} - \text{Інформація (I)}$$

Таблиця 1.2

Шкала зон ризику

Лінгвістична оцінка ризику(градації ризику)	Значення коефіцієнту ризику R
Мінімальний ризик	0 – 0,1
Допустимий ризик	0,1 – 0,3
Високий ризик	0,3 – 0,6
Недопустимий ризик	0,6 – 1

При цьому ризик R є величиною невизначеності, яка пов'язана з усіма складовими формули (1.5).

Всі ці явища і визначають дію економічного закону «часової вартості грошей», або, як ще кажуть, «зміни цінності грошей з часом».

Збільшення суми грошей внаслідок видачі грошей (в будь-якій формі) в кредит називається **нарощенням початкової суми грошей** (рис.1.4).

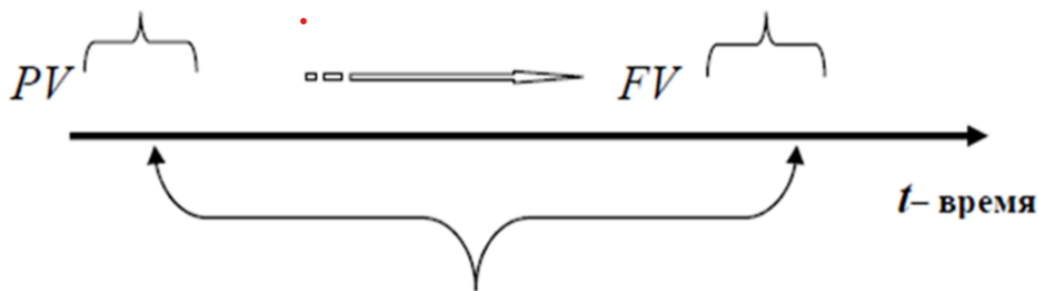


Рис. 1.4. Логічна схема операції нарахування

Згідно з принципом «зміни цінності грошей в часі» неправомірним є підсумовування, а також порівняння грошових сум, що належать до різних моментів часу. **Фактор часу у фінансових розрахунках враховується за допомогою відсоткових ставок (rate of interest)**, які дають можливість для кожної *теперішньої* вартості грошей (present value) або *основної суми* (principal value) знайти (на основі принципу фінансової еквівалентності) відповідну їй величину в майбутньому (future value) чи в минулому.

1.3. Теперішня та майбутня вартість грошей

Взагалі порівнюючи вартість грошових коштів у часі, можна знаходити їхню приведену вартість станом на будь-який момент часу. З цією метою у фінансових обчисленнях враховують ефект дисконтування й використовують два основні поняття – *теперішня (початкова, приведена) вартість грошей та майбутня (кінцева) вартість грошей*.

Майбутня вартість грошей (Future value, FV) – це вартість інвестованої у теперішньому часі суми грошей (**PV**), в яку вони перетворюються через певний період часу (**n**) з урахуванням певної процентної ставки дохідності.

$$S = P + P * i * n = P(1 + in) \quad (1.6)$$

де **S (FV)** - майбутня сума грошей після нарахування відсотків,

P (PV) - дійсна або поточна сума грошей;

i_n - проста процентна ставка,

n - кількість років, за які здійснюється нарахування відсотків.

Отже, майбутню вартість обчислюють через **операцію нарахування** відомої початкової суми за відомою нормою дохідності, яку в цьому разі називають **ставкою нарахування**.

Приклад 1.3. Поклавши сьогодні 10 тис. грн на депозит у надійний банк під 10 % річних, за умови відсутності проміжних надходжень або витрат на цьому депозитному рахунку через рік отримаємо

$$S = P \times (1 + i) = 10 \times (1 + 0,1) = 11 \text{ тис. грн.}$$

Отже, якщо вкласти кошти на один рік, у разі існування річної норми доходності 10%, теперішня сума 10 тис. грн буде еквівалентною майбутній сумі 11 тис. грн. Зі збільшенням середньоринкової ставки доходності різниця між теперішньою та майбутньою вартостями однієї суми грошей буде ще більшою.

Теперішня вартість грошей (Present value, PV) – це вартість майбутніх грошових надходжень, приведених з урахуванням певної процентної ставки доходності на ринку до теперішнього часу:

$$P = \frac{S}{1 + ni} \quad (1.7)$$

де $\frac{1}{1 + n \cdot i}$ - дисконтний множник

Отже, величину теперішньої вартості обчислюють через **операцію дисконтування (приведення)** відомої кінцевої суми за відомою нормою доходності, яку в цьому разі називають **ставкою дисконтування**.

Повертаючись до умов прикладу 1.3, маємо:

$$P = S / (1 + i) = 11 / 1,1 = 10 \text{ тис. грн.}$$

Отже, 11 тис. грн, які будуть отримані через рік за річної ставки доходності 10 %, станом на теперішній момент часу коштуватимуть 10 тис. грн.

Процес дисконтування — це обернена операція до **процесу нарощування вартості**. Ці два процеси є базисом усіх фінансових обчислень, оскільки вони забезпечують адекватне порівняння вартісних характеристик фінансових угод з урахуванням чинника часу.

Оскільки, зазвичай, усі фінансові потоки приводять до теперішнього часу, то оцінювання ефективності фінансових вкладень полягає в порівнянні витрат та прибутків через операцію математичного дисконтування.

Математичне дисконтування – приведення до одного моменту часу грошових сум, що належать до різних часових періодів, через обчислення їхньої теперішньої вартості.

Саме операція математичного дисконтування лежить в основі методів та моделей оцінки вартості цінних паперів, матеріальних активів та інших об'єктів інвестування.

Альтернативним варіантом розрахунку теперішньої вартості є **операція утримання коштів**. Вона є менш поширеною ніж операція дисконтування, проте іноді застосовується на практиці при розрахунку сум боргових зобов'язань. Операція утримання виконується за допомогою ставки доходності **d**, яку називають **обліковою ставкою (темпом зниження) d**.

Теперішню вартість відомої майбутньої суми грошей при операції утримання коштів розраховують за формулою:

$$P = S \cdot (1 - dn) \quad (1.8)$$

Приклад 1.4. За облікової ставки $d = 10\%$ по закінченні періоду боржник повинен повернути 1000 грн. Яку суму фактично позичає йому кредитор?

Використовуючи відповідну формулу, маємо

$$P = S (1 - d) = 1000 \cdot (1 - 0,1) = 900 \text{ грн.}$$

Отже, фактично позичальник отримує лише 900 грн, тобто кошти позичаються після утримання комісійної винагороди величиною 100 грн.

Зазначимо, що за операції дисконтування позичальник міг би розраховувати на кращий для себе результат, оскільки за тих самих вихідних умов дає більшу величину теперішньої вартості

$$P = S / (1 + i) = 1000 / (1 + 0,1) = 909,09 \text{ грн.}$$

Таким чином, при обчисленні теперішньої вартості боргових зобов'язань застосування операції утримання вигідніше кредитору, а операції дисконтування – боржнику. Це пояснюється тим, що за операції утримання кредитор отримує більшу фактичну дохідність, надаючи меншу суму грошей позичальнику ніж за операції дисконтування. З іншого боку, обчислення за ставкою дисконтування порівняно з обліковою ставкою збільшують величину отриманого кредиту (за рівних боргових зобов'язань), тобто, позичальник залучає кошти, сплативши меншу фактичну дохідність.

Відсоткова ставка (rate of interest) – це відносна величина, яка характеризує доходність кредитної операції для кредитора та вартість кредиту для боржника та є відношенням відсотків до суми боргу.

Існує два види відсоткових ставок: відсоткова ставка нарощення i та облікова відсоткова ставка d .

Ставка відсотка r (i) (англ. – *interest rate*) вимірює рівень доходності відношенням абсолютного приросту доходу за певний проміжок часу до початкової суми капіталовкладень.

$$i_{np} = \frac{S - P}{Pn}. \quad (1.9)$$

Облікова ставка d (англ. – *discount rate*) вимірює рівень доходності відношенням абсолютного приросту доходу за певний проміжок часу не до початкової, а до кінцевої суми.

$$d_{np} = \frac{S - P}{Sn}. \quad (1.10)$$

Порівнюючи останні два вирази (для i та d) бачимо, що за інших рівних умов обчислення облікової ставки d завжди даватиме нижчий результат щодо рівня доходності операції ніж обчислення ставки дисконтування i .

Іноді у фінансовій літературі **ставку дисконтування i** називають **декурсивною, а облікову ставку d - антисипативною**.

Питання для самоконтролю

1. Як порівняти різні суми грошей, які взяті в різні часи?
2. За якою формулою розраховується індекс цін?
3. За якою формулою розраховується темп інфляції?
4. За якою формулою розраховується індекс купівельної спроможності?
5. Як розраховується індекс цін за весь період, коли відомі індекси цін заокремі періоди, з яких складається великий період?
6. Як розраховується темп інфляції цін за весь період, коли відомі темпи інфляції за окремі періоди, з яких складається великий період?
7. Коли фактична інфляція менше тієї, яка очікувалася, хто виграє: кредитори чи боржники?
8. Назвати чотири основні економічні категорії, які характеризують фінансові операції.
9. Що таке ризик?
10. Який зв'язок між вартістю та часом?
11. Який зв'язок між вартістю та ризиком?
12. Який зв'язок між ризиком та часом?
13. Який зв'язок між інформацією та ризиком?
14. Який зв'язок між інформацією та часом?
15. Який зв'язок між інформацією та вартістю?



Тестові завдання

1. Фінансова математика – це:

а) наука, що вивчає методи і методики визначення вартісних і часових параметрів фінансових та інвестиційних операцій;

б) наука, що вивчає методи і методики прогнозування фінансових і інвестиційних операцій;

в) наука, що вивчає економічні процеси, їх вплив на економічні результати діяльності підприємства.

2. Відсоткова ставка – це відносна величина доходу за фіксований відрізок часу, тобто відношення доходу (відсоткових грошей) до суми боргу за одиницю часу:

а) ні;

б) так.

3. Доберіть пропущене слово, яке конкретизує економічну змістовність поняття процесу дисконтування: "полягає у ... впорядкуванні грошових потоків різних часових періодів":

а) тимчасовому;

б) постійному;

в) інтервальному.

4. Кількість товарів і послуг, що можуть бути придбані за одиницю грошей, величина, обернена до рівня цін – це:

- а) вартість грошей;
- б) дисконт;
- в) ліквідність.

5. Компаундинг – це:

а) процес, за допомогою якого розраховується теперішня вартість капіталу на основі значення очікуваної в майбутньому до отримання суми грошових коштів та визначеного коефіцієнта дисконтування;

б) процес зведення (переходу) теперішньої вартості грошей до їхньої вартості у майбутньому за заданого рівня відсоткової ставки;

в) процес визначення відносного рівня ефективності реалізації фінансової операції.

6. Відсотком (процентними грошима) називають величиною доходу від надання в борг певної грошової суми:

- а) ні;
- б) так.

7. Нарощування – це:

а) процес фінансових обчислень майбутньої вартості капіталу за визначеного рівня відсоткової ставки та терміну фінансової операції;

б) процес фінансових обчислень теперішньої за визначеного рівня облікової ставки та терміну фінансової операції;

в) процес фінансових обчислень відсоткового доходу за результатами здійснення фінансової операції.

8. Чи передбачає алгоритм простих відсотків незмінність бази, з якої здійснюється нарахування:

- а) ні;
- б) так.

9. Які відсоткові ставки розрізняють з урахуванням законодавчого забезпечення:

- а) регульовані та нерегульовані;
- б) фіксовані та плаваючі;
- в) дисконтні та відсоткові.

10. Чи припускає схема нарахування складних відсотків незмінність бази їх нарахування впродовж усього терміну реалізації фінансової операції:

- а) ні;
- б) так.

11. З урахуванням темпів інфляції розрізняються так відсоткові ставки:

- а) номінальні та реальні;
- б) базові та відсоткові;
- в) фіксовані та плаваючі.

12. Основними характеристиками, які використовуються під час кількісного аналізу фінансових операцій є:

- а) вексель, кредит, дисконт, ануїтет, компаундинг;
- б) маржа, дохід, дивізор, реінвестування; дисконтування;
- в) приведена вартість грошей, майбутня вартість грошей, період нарахування,

відсоток, відсоткова ставка.

13. Яка ставка використовується під час розрахунку відсотків принципом нарахування на суму боргу?

- а) відсоткова;
- б) дисконтна;
- в) облікова.

14. Які основні фактори впливають на вартість грошей у процесі здійснення операцій кредитування та фінансування:

- а) фактор множинності вибору;
- б) інфляція;
- в) фактор ризику неповернення грошових коштів;
- г) фактор страху;
- г) фактор часу.

15. Часовий інтервал, якому відповідає відсоткова ставка, називається:

- а) терміном фінансової операції;
- б) періодом нарахування;
- в) схемою нарахування відсотків;
- г) строком нарахування відсотків.

16. Принцип нерівнозначності грошей полягає у тому, що:

- а) гроші приносять дохід;
- б) вони втрачають свою собівартість у зв'язку з науково-технічним прогресом;
- в) рівні за абсолютною величиною грошові суми, які належать до різних моментів часу, оцінюються по-різному;
- г) гроші втрачають свою вартість з часом.

17. Відношення процентних грошей до суми боргу за одиницю часу – це:

- а) відсоткова ставка;
- б) інфляційна добавка;
- в) сума відсоткових грошей;
- г) відсоток.

18. Розмір відсоткової ставки залежить від таких факторів:

- а) строк кредиту;
- б) схема нарахування відсотків;
- в) стан грошово-кредитного ринку;
- г) фактор страху;
- д) фактор множинності вибору.

19. Вирішення прямої задачі з використанням процентної ставки має на меті визначення:

- а) майбутньої вартості грошових одиниць;
- б) теперішньої вартості грошових одиниць;
- в) відсоткової ставки;
- г) строку фінансової операції.

20. Розв'язання оберненої задачі з використанням облікової ставки має на меті визначення:

- а) сучасної вартості грошових одиниць;

- б) майбутньої вартості грошових одиниць;
- в) відсоткової ставки;
- г) терміну фінансової операції.

ТЕМА 2. МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗАСАДИ ТА МЕХАНІЗМ РОЗРАХУНКУ ПРОСТИХ ВІДСОТКІВ

Питання до розгляду

- 2.1. Методика обчислень за правилом простих процентів. Темп зростання коштів за правилом простих процентів.
- 2.2. Обчислення за правилом простих процентів в умовах змін вихідних параметрів.
- 2.3. Поняття часової бази розрахунків. Комерційні й точні прості проценти.
- 2.4. Застосування програмного забезпечення MS Excel в обчисленнях за правилом простих процентів.

2.1. Методика обчислень за правилом простих процентів. Темп зростання коштів за правилом простих процентів

Однією з основних фінансових операцій є кредитна угода. До кредитних угод належать: відкриття депозитного рахунку в банку, видача банком кредиту, облік векселя, продаж товарів у кредит, купівля облігації та ін. Умови кредитної угоди визначаються у фінансовому контракті (договорі), який є її юридичним забезпеченням.

Проста кредитна угода являє собою разову видачу кредиту (боргу, позики), що погашається одним платежем через точно визначений термін.

Відсоткові гроші можуть сплачуватися кредитує при їх нарахуванні в кожному періоді або приєднуватися до основної суми боргу при закінченні угоди. В останньому випадку говорять про *нарощену суму*, тобто **нарощена сума** – це основна сума боргу плюс відсоткові гроші.

Нарощування за простими відсотками, як правило, здійснюється при видачі короткострокових позик (термін позики до одного року) або у випадках, коли відсотки не приєднуються до суми боргу, а періодично виплачуються.

Для встановлення формули, що дозволяє описати просту кредитну угоду за простими відсотками, введемо позначення:

- P – сума кредиту (основна сума боргу);
- S – наращена сума, тобто сума боргу наприкінці угоди;
- I – плата за кредит, тобто сума відсоткових грошей за період угоди;
- n – термін кредитної угоди в роках.

Якщо нарахування відсотків здійснюється за дуже малі проміжки часу, то йдеться про **неперервні відсотки (continuous interest)**. На практиці наближенням до неперервних відсотків є відсотки з щоденним нарахуванням.

i – проста нормована відсоткова ставка угоди, яку ще називають базовою річною

ставкою.

Враховуючи наведені вище позначення, сума боргу на момент закінчення угоди (нарощена сума) обчислюється за формулами:

$$S = P + P * i * n = P(1 + ni) \quad (2.1)$$

$$S = P + I \quad (2.2)$$

де $I = P i n$ – відсоток, абсолютна величина доходів від грошей, наданих у борг у будь-якій їх формі (**декурсивний спосіб нарахування відсотків**).

Формула (2.1) називається формулою нарахування за простими відсотками, а **множник**

$(1 + in)$ – множителем нарахування простих відсотків. Він показує, у скільки разів наросла сума більша за початкову суму боргу.

Примітка: у фінансовому аналізі відсоткова ставка є відносним показником доходності (прибутковості) проведеної операції, тому за допомогою відсоткових ставок можна оцінювати ефективність фінансових операцій.

Графічно процес нарахування за простими відсотками має вигляд (рис. 2.1).

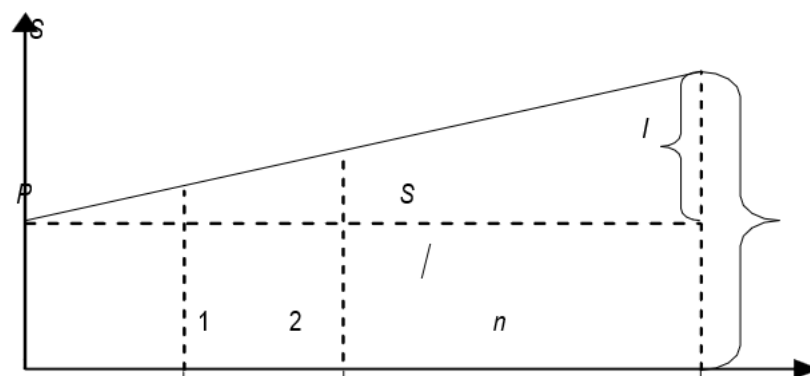


Рис. 2.1. Процес нарахування за простими відсотками

Різницю $S - P = D$ називають **дисконтом величини S**. Оскільки гроші втрачають свою вартість з часом, $D > 0$. Крім того, оскільки час у фінансових угодах враховується з допомогою відсоткових ставок, дисконт дорівнює відсотковим грошам, нарахованим на суму P.

$$D = I = S - P \quad (2.3)$$

Залежно від виду відсоткової ставки застосовують два види дисконтування: математичне дисконтування і банківський облік.

Зворотний процесу нарахування є процес дисконтування. Суму P, що отримана

шляхом дисконтування нарощеної суми S , називають сучасною, або приведеною сумою. За допомогою дисконтування у фінансових розрахунках ураховується фактор часу.

При математичному дисконтуванні вирішується задача, що є зворотною визначенню нарощеної суми. Задача формулюється так: яку суму треба дати в борг сьогодні (інвестувати) на n років, щоб при нарахуванні на неї відсотків за ставкою i одержати нарощену суму S ?

При використанні простої процентної ставки теперішня вартість, отримана шляхом математичного дисконтування, розраховується:

$$P = \frac{S}{1 + ni} \quad (2.4)$$

де $\frac{1}{1 + n \cdot i}$ - дисконтний множник.

Приклад 2.1. Визначити відсоткову суму i нарощену суму боргу, якщо позика дорівнює 800 тис. грн, термін позики - 5 років, відсоткова ставка – 15% річних за простими відсотками.

Розв'язання. Згідно з формулою (2.2) знаходимо розмір відсотків:

$$I = 800 \cdot 0,15 \cdot 5 = 600 \text{ тис. грн.}$$

Звідси, використовуючи формулу (2.1), нарощена сума дорівнює:

$$S = 800 \text{ тис.} + 600 \text{ тис.} = 1\,400 \text{ тис. грн.}$$

Розрахунок відсотків „зі 100”, „на 100”, „в 100”

Нарощене число – це число, яке дорівнює сумі початкового числа і нарахованих на нього відсотків.

Зменшене число – це число, яке дорівнює різниці початкового числа і нарахованих на нього відсотків.

- Відсотки відносно нарощеного числа називаються відсотками „на 100”.
- Відсотки щодо початкового числа – відсотки „зі 100”.
- Відсотки щодо зменшеного числа називаються відсотками „в 100”.

Відсотки „на 100” використовуються в задачах, коли відома ставка відсотків i та сума двох чисел, одне з яких – відсотки „зі 100” іншого.

Відсотки „в 100” використовуються в задачах, коли відома ставка відсотків i та різниця двох чисел, одне з яких – відсотки „зі 100” іншого.

Позначимо Q – початкове число, тоді

$$Q' = iQ \text{ – відсотки „зі 100”};$$

$$S' = iQ / (1 + i) \text{ – відсотки „на 100”};$$

$$K' = iQ / (1 - i) \text{ – відсотки „в 100”}.$$

Приклад 2.2. Знайти з 40 тис. грн. 20% а) „зі 100”; б) на 100”; в) „в 100”. Перевірити отримані результати.

Розв’язання.

а) $Q' = 0,2 \cdot 40 = 8$ тис. грн.;

б) $S' = 0,2 \cdot 40 / (1+0,2) = 6,67$ тис. грн.

в) $K' = 0,2 \cdot 40 / (1+0,2) = 10$ тис. грн.

Перевірка.

„На 100”: $40 - 6,67 = 33,33$ тис. грн.

$33,33 \cdot 0,2 = 6,67$ тис. грн.

„В 100”: $40 + 10 = 50$ тис. грн.

$50 \cdot 0,2 = 10$ тис. грн.

Для коректних обчислень методом простих процентів величини i та n мають бути взаємоузгодженні (зведені до одних величин часу – років, місяців, днів тощо). Наприклад, коли i – річна ставка доходності, то й величина n має бути в частках року. Строк користування грошима в роках n можна подати таким чином:

$$n = \frac{t}{K} \quad (2.5)$$

де t - кількість днів користування грошима протягом року;

K - кількість днів у році (база року 365 днів).

Для короткотермінових позичок нарахована сума боргу :

$$S = P \left(1 + \frac{t}{K} i \right) \quad (2.6)$$

Примітка. Для розрахунку числа днів позички найкраще ви користати таблицю порядкових днів у році.

Приклад 2.3. Вкладник поклав на банківський депозит 1000 грн під 12% річних строком на 6 місяців. Який капітал він матиме по закінченні депозитного договору за правилом простих процентів?

Розв’язання.

Обчислимо нараховану суму:

$$S = P + P * i * n = P(1 + ni)$$

$$S = 1000 * \left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0,12 \right) = 1060 \text{ грн.}$$

Отже, по закінченні депозитного договору вкладник отримає з банківського рахунку

1060 грн.

Формули простих процентів пов'язують функціональною залежністю 4 параметри, тому знаючи будь-які три з них, завжди можна знайти четверту, невідому величину. Наприклад, у практиці фінансових розрахунків досить часто виникає потреба оцінювання норми дохідності фінансової операції (i), коли відома початкова та кінцева вартість, а також строк угоди (n):

$$n = \frac{S-P}{Pi}; \quad i = \frac{S-P}{Pn} \quad (2.7)$$

Приклад 2.4. Банк у першому кварталі випустив депозитний сертифікат з терміном погашення наприкінці першого кварталу. Сертифікат викупується за 50 грн. Оголошена дохідність – 30% простих річних. $K = 365$. Знайти ціну продажу сертифікату і суму дисконту.

Розв'язання.

За умовою задачі $S = 50$ грн; $i = 0,3$; $K = 365$; t (кількість днів за січень, лютий, березень) = $31 + 28 + 31 = 90$ днів.

За формулами (2.3) і (2.4) знаходимо відповідно:

$$P = \frac{S}{1 + ni} = \frac{50}{1 + \left(\frac{90}{365}\right) 0,3} = 46,56 \text{ грн.}$$

$$D = 50 - 46,56 = 3,44 \text{ грн.}$$

Вкладення грошей у банк під відсотки

Вкладення може бути одноразовим і багаторазовим. Розглянемо ситуацію з багаторазовим вкладенням грошей.

Нехай внески (ВКЛ) у банк клієнт робить наприкінці кожного року.

Тоді загальна формула для визначення суми грошей, що клієнт матиме в банку через " n " років. Число внесків дорівнює " n ":

$$S = P_1 \left[1 + \frac{i_n}{100} (n-1) \right] + P_2 \left[1 + \frac{i_n}{100} (n-2) \right] + \dots + P_n * 1 \quad (2.8)$$

Якщо припустити, що $P_1 = P_2 = \dots = P_n = P$, то формула (2.8) матиме наступний вигляд:

$$S = P \left[n + \frac{i_n}{100} \sum_{n=1}^n (n-1) \right]$$

Враховуючи, що $\sum_{n=1}^n (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ одержимо остаточну формулу (2.9):

$$S = Pn(1 + \frac{i_n}{100} \frac{n-1}{2}) \quad (2.9)$$

Розглянемо тепер ситуацію, коли внески робляться *на початку кожного року*.

Складемо спочатку загальну формулу для суми внесків через “n” років; число внесків також дорівнює “n”:

$$S = P_1 \left[1 + \frac{i_n}{100} n \right] + P_2 \left[1 + \frac{i_n}{100} (n-1) \right] + \dots + P_n \left[1 + \frac{i_n}{100} \right] \quad (2.10)$$

Якщо припустити, що $P_1 = P_2 = \dots = P_n = P$, то формула (2.10) матиме наступний вигляд:

$$S = P \left[n + \frac{i_n}{100} \sum_{n=1}^n n \right]$$

Враховуючи, що $\sum_{n=1}^n n = \frac{n(n+1)}{2}$ одержимо остаточну формулу:

$$S = P * n \left[1 + \frac{i_n}{100} \frac{n+1}{2} \right] \quad (2.11)$$

Вкладення грошей у банк при щорічних виплатах

Необхідно визначити суму первісного внеску P, що забезпечить клієнту певні щорічні виплати H протягом “n” років. Використовуючи формулу (2.12) можна скласти наступне рівняння:

$$P = \frac{H_1}{1 + \frac{i_n}{100} * 1} + \frac{H_2}{1 + \frac{i_n}{100} * 2} + \dots + \frac{H_n}{1 + \frac{i_n}{100} * n} \quad (2.12)$$

Якщо припустити, що усі виплати однакові, $H_1 = H_2 = \dots = H_n = H$, тоді остаточна формула має наступний вигляд:

$$P = H * \sum_{n=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i_n}{100} * n} \quad (2.13)$$

Визначення нарощеної суми за простою обліковою ставкою (d)

$$S = \frac{P}{1 - nd} \quad (2.14)$$

де $\frac{1}{1-dn}$ - називають множителем нарощення за простою обліковою ставкою d .

Зауважимо, що нарощення за обліковою ставкою d йде швидше, ніж нарощення за простою відсотковою ставкою i .

Зазначимо, цей вираз економічний сенс має лише коли добуток $d \cdot n < 1$.

Для визначення строку позички n і рівня відсоткових ставок використовуються такі формули:

$$n = \frac{S-P}{Sd}; \quad d = \frac{S-P}{Sn} \quad (2.15)$$

Утримання коштів за правилом простих процентів

Іноді його застосовують у короткострокових банківських операціях (наприклад, банківський облік векселів), тому просту облікову ставку d називають ще банківським дисконтом (bank rate).

Банківський облік (або облік векселів) – це відшукання теперішньої суми боргу P за відомою величиною S у майбутньому, терміном позики n і обліковою ставкою d .

Банківський, або комерційний, облік полягає в тому, що банк до кінцевої дати платежу за векселем або іншим короткостроковим зобов'язанням купує його у власника і бере на себе весь ризик по отриманню грошей. При цьому ціна, за якою банк купує вексель, повинна бути менша за ціну, що вказана на векселі.

При банківському обліку відсоткові гроші за користування позикою у вигляді дисконту нараховуються на суму S , яку треба сплатити в майбутньому. При цьому застосовується облікова ставка d :

Враховуючи вищесказане, розмір дисконту при простих відсотках, дорівнює (**антисипативний (попередній) спосіб нарахування відсотків**):

$$D = Snd \quad (2.16)$$

де d – річна облікова ставка; n вимірюється в роках;

n – час від моменту обліку до дати погашення векселя.

Таким чином, *теперішню вартість із використанням облікової ставки d* обчислюють за формулою:

$$P = S - D = S - Sdn = S(1 - dn) \quad (2.17)$$

де $(1 - dn)$ – *множник утримання простих процентів* (дисконтний множник за простою обліковою ставкою);

d - *показник дохідності (облікова ставка d)*, отримала назву «проста ставка дисконту» або «проста дисконтна дохідність» (simple discount yield);

n – час моменту обліку до дати погашення векселя.

Якщо час від моменту обліку векселя до дати погашення векселя вимірюється в днях, то:

$$n = \frac{t}{K}$$

Причому часова база для дисконтування завжди $K = 360$.

Якщо вексель або інше грошове зобов'язання до настання терміну платежу по ньому можуть бути куплені банком за ціною, меншої суми, що повинна бути виплачена по них наприкінці терміну, чи то враховані банком з дисконтом, пред'явник зобов'язання при цьому одержує гроші раніше зазначеного терміну за винятком доходу банку у вигляді *дисконту*. Банк при настанні терміну оплати векселя або іншого зобов'язання одержує повністю зазначену в ньому суму.

Сума дисконту у подібних операціях визначається, виходячи із суми зобов'язання, терміну до погашення і дисконтної ставки.

Проста річна дисконтна ставка визначається як:

$$d = \frac{D}{S * n} * 100 \quad (2.18)$$

де D - сума дисконту, що утримана;

S - сума, що повинна бути виплачена за векселем;

n - термін від дати обліку до дати погашення, виражений у роках.

У розрахункових формулах звичайно використовують відносне значення дисконтної ставки:

$$d = \frac{D}{S} \quad (2.19)$$

Отже, *річний* дисконт буде дорівнює:

$$D = ndS = \frac{t}{K} dS \quad (2.20)$$

де n - термін від дати обліку до дати погашення, виражений у роках;

t - кількість днів від дати обліку до дати погашення;

K - кількість днів у році.

Сума, що видається пред'явнику врахованого векселя, буде дорівнювати:

$$P = S - D = S(1 - nd) = S \left(1 - \frac{t}{K} d\right) \quad (2.21)$$

Банк при обліку векселів чи інших грошових зобов'язань може визначати свій дохід з використанням ставки відсотків. Сума, видавана пред'явнику векселя, у цьому випадку буде визначатися по формулі дисконтування по простій ставці відсотків (i):

$$P = \frac{S}{1+ni} = \frac{S}{1+\frac{t}{K}i} \quad (2.22)$$

Якщо вексель, що враховується банком, (депозитний сертифікат та ін.) передбачає нарахування по ньому відсотків по простій ставці, сума, що повинна виплачуватися його пред'явнику при погашенні, буде визначатися формулою (2.23):

$$S = P_0(1 + n_0 i_0) = P_0 \left(1 + \frac{t_0}{K} i_0\right) \quad (2.23)$$

де P_0 - сума по зобов'язанню;

n_0 - термін зобов'язання в роках;

i_0 - ставка, по якій нараховуються відсотки;

t_0 - термін зобов'язання в днях;

K - розрахункова кількість днів у році при нарахуванні відсотків.

Отже, сума, виплачена пред'явнику такого грошового зобов'язання, буде дорівнювати:

$$P = P_0(1 + n_0 i_0)(1 - nd) = P_0(1 + \frac{t_0}{K_i} i_0)(1 - \frac{t}{K_d} d) \quad (2.24)$$

де t - термін у днях від дати обліку до дати погашення зобов'язання;

K_d - розрахункова кількість днів у році при обліку зобов'язання.

Сума доходу, отриманого банком при настанні терміну погашення зобов'язання, буде дорівнювати:

$$D = S - P = P_0(1 + n_0 i_0) - P = P_0(1 + n_0 i_0)nd = P_0 \left(1 + \frac{t_0}{K_i} i_0\right) \frac{t}{K_d} d \quad (2.25)$$

Якщо банк при дисконті векселя чи іншого грошового зобов'язання з нарахуванням відсотків використовує для визначення свого доходу ставку відсотків i , сума, виплачена пред'явнику зобов'язання, буде у відповідності з формулою (2.25) дорівнювати:

$$P = \frac{P(1 + n_0 i_0)}{1 + ni} = \frac{P(1 + \frac{t_0}{K} i_0)}{1 + \frac{t}{K} i} \quad (2.26)$$

Сума доходу банку буде дорівнювати:

$$D = P(1 + n_0 i_0) - P = P(1 + n_0 i_0) \frac{ni}{1 + ni} = P(1 + n_0 i_0) \frac{\frac{t}{K} i}{1 + \frac{t}{K} i} \quad (2.27)$$

З формул для суми, видаваної пред'явнику грошового зобов'язання, можна визначити значення дисконтної ставки чи ставки відсотків, використовуваних при

визначенні доходу банку. Якщо банк при визначенні свого доходу використовував дисконтну ставку, її значення буде дорівнювати:

$$d = \frac{S - P}{S * n} = \frac{S - P}{S * t} K \quad (2.28)$$

Якщо при обліку грошового зобов'язання банк визначав свій дохід з використанням ставки відсотків, її значення буде визначатися по формулі (2.29):

$$i = \frac{S - P}{P * n} = \frac{S - P}{P * t} K \quad (2.29)$$

Прибутковість операцій із грошовими зобов'язаннями

При проведенні операцій обліку грошових зобов'язань чи інших фінансових операцій необхідно визначати їхню порівняльну прибутковість (ефективність). Для цього за значеннями показників, що характеризують прибутковість різних фінансових операцій, визначаються еквівалентні значення ставок простих чи складних відсотків.

Формулу для визначення ефективної ставки простих відсотків можна вивести наступним чином. Якщо в результаті інвестування суми P протягом терміну n років отримана сума S :

$$S = P + I \quad (2.30)$$

де I - отриманий дохід.

Таку фінансову операцію можна представити у вигляді еквівалентної операції вкладення коштів по ефективній ставці простих відсотків i_e . При цьому по формулі ефективної річної ставки відсотків:

$$i_e = \frac{I}{P * n} = \frac{I * K}{P * t} \quad (2.31)$$

Сума вкладених коштів з відсотками буде дорівнювати:

$$S = P(1 + ni_e) \quad (2.32)$$

Дохід від фінансової операції складатиме:

$$I = S - P = ni_e P = \frac{t}{K} i_e P$$

Отже, **ефективна ставка простих відсотків** буде дорівнювати:

$$i_e = \frac{I}{P * n} = \frac{I * K}{P * t} \quad (2.33)$$

При обліку векселів та інших грошових зобов'язань з використанням дисконтної ставки, дисконт визначається формулою (3.3), а значення виплаченої суми Р - формулою (3.4). Отже, ефективна ставка простих відсотків відповідно до формули (3.14) буде дорівнювати:

$$i_e = \frac{d}{1 - nd} \quad (2.34)$$

Якщо термін до дати погашення зобов'язання виражений у днях, відповідне значення **ефективної ставки відсотків**, визначене аналогічним образом, буде дорівнювати:

$$i_e = \frac{K_i d}{K_d t d} \quad (2.35)$$

де t - кількість днів від дати обліку до дати погашення;

K_i - розрахункова кількість днів у році при нарахуванні відсотків;

K_d - розрахункова кількість днів у році при обліку грошового зобов'язання.

За значенням **ефективності у вигляді процентної ставки** з формул (2.34) і (2.35) можна одержати відповідне значення **дисконтної ставки**:

$$d = \frac{i}{1 + ni} \quad \text{або} \quad d = \frac{K_d i}{K_i + t * i} \quad (2.36)$$

Якщо термін до дати погашення зобов'язання виражений у днях, відповідне значення **ефективної ставки відсотків**, визначене аналогічним образом, буде дорівнювати:

$$i_e = \frac{K_i d}{K_d t d} \quad (2.37)$$

де t - кількість днів від дати обліку до дати погашення;

K_i - розрахункова кількість днів у році при нарахуванні відсотків;

K_d - розрахункова кількість днів у році при обліку грошового зобов'язання.

Доход від операцій із грошовими зобов'язаннями, що обертаються на грошовому ринку, визначається можливістю одержання відсотків, якщо їх нарахування передбачене, а також різницею цін купівлі-продажу, що, у свою чергу, буде визначатися термінами від моменту покупки та продажу до моменту погашення, а також рівнем процентних ставок при покупці та продажі.

Якщо відсотки на грошове зобов'язання не нараховується, ціна його покупки, обумовлена з використанням дисконтної ставки по формулі (2.38), буде дорівнювати:

$$P_1 = N(1 - n_1 d_1) = N \left(1 - \frac{t_1}{K} d_1 \right) \quad (2.38)$$

де N - сума зобов'язання;

t - термін у днях від моменту покупки до моменту погашення;

K - розрахункова кількість днів у році;

d_1 - дисконтна ставка при покупці.

Ціна продажу такого грошового зобов'язання буде дорівнювати:

$$P_2 = N(1 - n_2 d_2) = N \left(1 - \frac{t_2}{K} d_2 \right) \quad (2.39)$$

де n_2 - термін у днях від моменту продажу до моменту погашення;

d_2 - дисконтна ставка при продажі.

Доход від операції купівлі-продажу буде дорівнювати:

$$W = P_2 - P_1 \quad (2.40)$$

Прибутковість операції купівлі-продажу, виражена у вигляді **ефективної ставки простих відсотків**, відповідно до формули (2.41) складатиме:

$$i_e = \frac{W}{P_1(n_1 - n_2)} = \frac{P_2 - P_1}{P_1} * \frac{K}{t_1 - t_2} \quad (2.41)$$

Якщо на грошове зобов'язання терміном n_0 років нараховуються прості відсотки по ставці i_0 , ціна погашення складе:

$$S = N(1 + n_0 i_0) = N \left(1 + \frac{t_0}{K} i_0 \right) \quad (2.42)$$

Якщо дохід від покупки-продажу таких зобов'язань буде визначатися з використанням ставки відсотків, ціни покупки P_1 і продажу P_2 відповідно до формули (2.43) складуть:

$$P_1 = \frac{N \left(1 + \frac{m_0}{K} i_0\right)}{1 + \frac{m_1}{K} i_1} \quad P_2 = \frac{N \left(1 + \frac{m_0}{K} i_0\right)}{1 + \frac{m_2}{K} i_2} \quad (2.43)$$

де m_1, m_2 - термін у днях від моменту покупки і продажу до моменту погашення;
 i_1, i_2 - ставки простих відсотків на грошовому ринку в момент покупки і продажу.

Дохід від операції купівлі-продажу буде дорівнювати:

$$W = P_2 - P_1$$

Приклад 2.5. Кредит 10 000 гривень виданий на рік під облікову ставку $d = 15\%$. Знайти суму отриманих грошей і дисконт, узятий банком.

Розв'язання. За умовою задачі $S = 10\,000$ грн, $d = 15\%$, $n = 1$ рік.

Для того щоб знайти суму P , а також величину дисконту D , використаємо відповідно формули (2.7) і (2.8):

$$P = 10\,000(1 - 0,15) = 8\,500 \text{ грн};$$

$$D = 10\,000 - 8\,500 = 1\,500 \text{ грн}.$$

Приклад 2.6. Власник векселя номінальною вартістю 8 000 гривень терміном на півтора роки і відсотковою ставкою 9% дисконтує його у банку з відсотковою ставкою 8% за три місяці до терміну погашення. Який прибуток отримає:

а) власник векселя; б) банк?

Розв'язання. Номінальна вартість векселя – це сума, яка підлягає сплаті за векселем без урахування обумовлених у тексті векселя відсотків (P).

1. Знайдемо завершену вартість (S) векселя. Для цього скористаємося формулою (2.1) нарощення за простою відсотковою ставкою i , де $P = 8\,000$ грн, $i = 9\% = 0,09$, $n = 1,5$:

$$S = P + I = P(1 + ni);$$

$$S = 8\,000(1 + 0,09 \cdot 1,5) = 9\,080 \text{ грн}.$$

2. Знаходимо суму, яку отримає власник векселя після обліку його в банку за 3 місяці до терміну погашення. У цьому випадку скористаємося формулою дисконтування (2.17):

$$P = S - D = S\left(1 - nd\right) = S\left(1 - \frac{t}{K} d\right)$$

де $S = 9\,080$ грн, $n = 0,25$ (3/12) року, $d = 8\% = 0,08$:

$$P = 9\,080 (1 - 0,25 \cdot 0,08) = 8\,898,4 \text{ грн.}$$

Або другий спосіб розрахунку суми, яку отримає власник векселя після обліку його у банку за 3 місяці до терміну погашення (сума, виплачена пред'явнику векселя).

$$P = P_0 (1 + n_0 i_0) (1 - nd) = P_0 \left(1 + \frac{t_0}{K_i} i_0\right) \left(1 - \frac{t}{K_d} d\right)$$

$$P = 8000 * (1 + 1,5 * 0,09) (1 - 0,25 * 0,08) = 8898,4 \text{ грн}$$

3. Отже, прибуток власника векселя становить:

$$8\,898,4 - 8\,000 = 898,4 \text{ грн.}$$

4. Прибуток банку, в свою чергу, становить:

$$9\,080 - 8\,898,4 = 181,6 \text{ грн.})$$

Розглянувши сутність методики нарощування коштів за правилом простих процентів, перейдемо до аналізу ефективності застосування цієї методики. Для порівняння існуючих на ринку альтернативних варіантів інвестування, критерієм відбору часто виступає очікувана норма віддачі від вкладеного капіталу. Швидкість повернення інвестованих коштів та можливість максимізації прибутків залежить від темпу росту майбутньої вартості за правилом простих процентів. Оцінюючи темп росту майбутньої вартості відомої початкової суми коштів, необхідно усвідомлювати, що у формулі простих процентів $S = P(1 + ni)$ параметри часу n та доходності i є абсолютно рівноправними в межах фінансової угоди.

Зростання ставки доходності i або строку n у k разів однаково впливає на S - майбутню вартість коштів, яка при цьому збільшується у $\frac{1+kin}{1+in}$ разів.

Для того, щоб початкова сума зросла в N разів, потрібно виконати умову:

$$1 + i n = N, \quad \text{звідки} \quad n = \frac{N-1}{i}; \quad i = \frac{N-1}{n}$$

Приклад 2.7. Ставка доходності $i = 8\%$. Через скільки періодів нарахування за правилом простих процентів початкова сума збільшиться вдвічі?

$$\text{Маємо: } n = \frac{N-1}{i} = \frac{2-1}{0,08} = 12,5 \text{ років}$$

Темпи росту майбутньої вартості у часі відомої початкової суми ілюструє рис. 2.1.

Із графіка видно, що за простими процентами з плином часу майбутня вартість зростає за лінійним законом. Зазначимо, що кут нахилу прямої, що відображає зростання майбутньої вартості, визначається величиною ставки нарощування i . Збільшення цієї ставки доходності призведе до збільшення темпу росту майбутньої вартості.

2.2. Обчислення за правилом простих процентів в умовах змін вихідних параметрів

Розглядаючи методику нарощування коштів за правилом простих процентів, ми вважали, що у формулі $S = P(1 + ni)$ вихідні параметри розрахунків насамперед, початкова сума та ставка дохідності) є сталими величинами. Проте, в практиці фінансових обчислень можливі випадки, коли умовами угоди обумовлюється плаваюча ставка дохідності замість фіксованої, або змінною є база нарахування (сума, на яку нарощуються відсотки). Зрозуміло, що у таких випадках методика обчислень дещо ускладнюється.

Розглянемо операцію нарощування коштів за простими процентами у разі плаваючої (змінної) ставки дохідності. Для коректних обчислень необхідно повний термін дії угоди поділити на проміжки, протягом яких розмір цієї ставки не змінювався.

Тоді формулу нарощування простих процентів можна записати так:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \dots + n_m i_m)$$
$$S = P(1 + \sum_t n_t i_t) \quad (2.44)$$

де i_t - ставка простих відсотків для періоду t ;
 n_t - тривалість періоду t з постійною ставкою i_t $n = \sum_t n_t$

Приклад 2.8. Банк пропонує такі умови по термінових депозитах: перший квартал – 40% річних, кожний наступний квартал ставка зростає на 5%. Відсотки прості.

Знайти нарощену за рік суму, якщо початковий вклад - 1000 гривень.

Розв'язання. Враховуючи, що $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = \frac{1}{4} = 0,25$, використовуючи формулу (2.41), знаходимо нарощену суму за депозитом:

$$S = 1\,000 \cdot (1 + 0,4 \cdot 0,25 + 0,45 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 0,25 + 0,55 \cdot 0,25) = 1\,475 \text{ грн.}$$

Сума нарахованих за рік відсоткових грошей складе:

$$I = P(n_1 i_1 + n_2 i_2 + \dots + n_t i_t) = P \sum_{t=1}^n n_t i_t = 475 \text{ грн.}$$

Нарощена сума за плаваючою простою процентною ставкою за весь термін фінансової угоди - n

$$S = P(1 + n i_{\text{серед.}}) \quad \text{або} \quad S = P \left(1 + n \frac{\sum n_t i_t}{\sum n_t} \right) \quad (2.45)$$

Середня проста процентна ставка за весь термін фінансової угоди

$$i_{\text{серед.}} = \frac{\sum n_t i_t}{\sum n_t} = \frac{\sum n_t i_t}{n} \quad (2.46)$$

Нарахування відсотків при зміні депозиту в часі

Якщо сума, на яку нараховуються відсотки, змінюється в часі (наприклад, змінюється розмір вкладу на депозитному рахунку при періодичному його поповненні або знятті грошей), то відсоткові гроші нараховуються за формулою (2.47):

$$I = R_i \times i \times \frac{t}{K} \quad \text{або} \quad I = \sum_j I_j = \sum_j R_j n_j i \quad (2.47)$$

де R_j – залишок грошей на рахунку в момент часу j після чергової зміни рахунку;
 $n_j, (t)$ – термін зберігання грошей (в роках, днях, місяцях) до нової зміни рахунку;
 i – базова (річна) відсоткова ставка, яка вимірюється у коефіцієнтному вигляді

Приклад 2.9. При відкритті 11 листопада поточного року ощадного рахунку за простою ставкою 18% річних за умови виплати процентів по закінченні строку дії договору на рахунок внесена сума в розмірі 1 500 грн. Потім 16 січня наступного року на рахунок донесено 2 500 грн., 20 лютого цього року рівень процентної ставки був збільшений до 22% річних, а 10 квітня рахунок було закрито.

Визначити:

1. суму нарахованих процентів за ощадним рахунком по місяцях;
2. загальну суму нарахованих процентів за весь період;
3. суму, отриману власником рахунку при його закритті.

Кількість днів згідно з договором розраховується за методом точних процентів.

Розв'язання.

Сума відсотків за місяць – листопад:

$$I = R_i \times i \times \frac{t}{K}$$

$$I = 1500 \times 0,18 \times \frac{20}{365} = 14,79 \text{ грн.}$$

Сума, отримана власником ощадного рахунку при його закритті - S.

$$S = 4000 + 236 = 4236 \text{ грн}$$

Сума нарахованих процентів за ощадним рахунком по місяцях

Періоди зміни параметрів фінансової операції	Місяці	Період, роки $n = \frac{t}{K}$	Сума депозиту, грн. R_i	Річна проста процентна ставка, один. i	Сума відсотків за місяць, грн. $I = R_i \times i \times \frac{t}{K}$
11.11.22-	Листопад	20/365	1500	0,18	14,79
	Грудень	31/365	1500	0,18	22,93
15.01.23	Січень	15/365	1500	0,18	11,1
16.01.23		16/365	4000	0,18	31,56
	Лютий	19/365	4000	0,18	37,48
20.02.23		9/365	4000	0,22	21,7
	Березень	31/365	4000	0,22	74,74
10.04.23	Квітень	9/365	4000	0,22	21,7
	Всього	11.11. - 10.04.			236

Споживчий кредит – один з найбільш поширених способів кредитування населення. Банки і підприємства надають споживчий кредит для стимулювання попиту на товари, які населення не могло б купити тільки на зарплату. Відсотки у споживчому кредиті нараховуються на всю суму кредиту і приєднуються до основної суми в момент відкриття кредиту. Погашення боргу відбувається частинами: як правило, рівними сумами протягом усього терміну кредиту. Величина разового платежу визначається за формулою:

$$R = \frac{S}{nm} \quad (2.48)$$

де m – кількість платежів за рік;

n – термін кредиту (вимірюється в роках).

Приклад 2.10. Кредит на купівлю товару на суму 10 тис. грн відкрито на 3 роки. Відсоткова ставка – 15% річних. Виплати наприкінці кожного місяця. Яку суму грошей потрібно віддати наприкінці терміну і які будуть щомісячні виплати?

Розв'язання. Згідно з (2.3) знаходимо нарощену суму

$$S = P(1 + ni) = 10\,000 (1 + 3 \cdot 0,15) = 14\,500 \text{ грн.}$$

Величину разового платежу R обчислюємо за формулою (2.45).

$$R = \frac{14500}{3 * 12} = 402,77 \text{ грн.}$$

2.3. Поняття часової бази розрахунків. Комерційні й точні прості проценти

Розрахунки за методом простих процентів ускладнюються у випадках, коли строк угоди не дорівнює цілому числу періодів нарахування (років, кварталів, місяців тощо). Прикладом такої фінансової угоди є будь-яке короткострокове боргове зобов'язання зі строком погашення, меншим від одного року, за наявності лише річної ставки дохідності для цього зобов'язання. В такому разі, приведення параметрів фінансової операції до одних одиниць виміру передбачатиме вираження строку фінансової угоди n у частках року, де t – кількість днів, які залишилися до кінця фінансової операції; K – кількість днів у році (**часова база розрахунків**).

Тоді класичну формулу для нарахування вартості за правилом простих процентів, можна записати так:

$$S = P \left(1 + \frac{t}{K} i \right) \quad (2.49)$$

У фінансових обчисленнях застосовують два варіанти часової бази розрахунків:

1. $K = 360$ днів (тобто вважають, що у році 12 місяців по 30 днів – так званий «фінансовий рік») – комерційні проценти.

2. $K = 365$ або $K = 366$ днів (визначають точну кількість днів у році) – точні проценти.

Нарахуванням за точними процентами (точне врахування часової бази), за інших рівних умов, завжди зумовлює менше зростання теперішньої вартості, ніж за комерційними процентами.

У фінансових обчисленнях завжди обумовлюють методику розрахунку тривалості фінансової угоди, оскільки, при досить великих сумах коштів, навіть похибка в один день може призвести до значних збитків. Крім того, оцінюючи тривалість угоди t , можна розглядати як точну кількість днів, так і приблизну, припустивши, що в кожному місяці по 30 днів. Таким чином, мають економічний сенс та застосовуються на практиці три варіанти розрахунків за простими процентами:

1. **Математичний метод:**) точні відсотки з точною кількістю днів угоди, коли t точне, а $K = 365$ днів. У комерційних документах він позначається як **365/365** чи **АСТ/АСТ**. Використовують, зокрема, банки Англії та США, тому іноді його ще називають *англійським підходом*. Цей метод дає найточніші результати.

2 **Банківський метод:** комерційні проценти з точною кількістю днів угоди, а K дорівнює 360 днів. Він позначається як **365/360** чи **АСТ/360**. Поширений у Франції, Бельгії, Швейцарії, тому іноді його ще називають *французьким підходом*..

3 **Звичайні відсотки з наближеною кількістю днів позички**, коли t наближене (місяць – 30 днів), а $K = 360$ днів. Метод умовно позначається як **360/360**. Комерційні

проценти з наближеною кількістю днів угоди. Поширений у Німеччині, Швеції, Данії, тому іноді його ще називають *німецьким підходом*.

Приклад 2.11. Позика у розмірі 10 000 грн., видана з 7.03 по 5.10 (рік не високосний) під 18 % простих річних.

Яку суму повинен виплатити боржник за різними способами розрахунку?

$$1. \text{ АСТ/АСТ } 365/365: \quad S = 10000 \left(1 + \frac{278 - 66}{365} \cdot 0,18 \right) = 11045,48 \text{ (грн)}$$

$$2. \text{ АСТ/360. 365/360: } \quad S = 10000 \left(1 + \frac{212}{360} \cdot 0,18 \right) = 11060 \text{ (грн)}$$

$$3. \text{ 360/360} \quad 5.10 - 7.03 = -2.07 \quad t = 7 \cdot 30 - 2 = 208 \text{ (днів).}$$

$$S = 10000 \left(1 + \frac{208}{360} \cdot 0,18 \right) = 11040 \text{ (грн)}$$

Зауважимо, що у фінансовому аналізі *прибутковість операцій* завжди вимірюється у річній відсотковій ставці (простій або складній).

Якщо доходність знайдена в обліковій ставці, то результат перераховують у річну відсоткову ставку нарощення .

$$\begin{aligned} i &= \frac{S-P}{Pn} & i &= \frac{\frac{S}{P}-1}{n} \\ d &= \frac{S-P}{Sn} & d &= \frac{1-\frac{P}{S}}{n} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Пам'ятаємо, що при n , вираженому в днях, приймаємо $n = \frac{t}{K}$

де K для річної відсоткової ставки ($K = 360; 365; 366$); для річної облікової ставки ($K = 360$).

$$\begin{aligned} i &= \frac{S-P}{Pn} = \frac{S-P}{P_t} K \\ d &= \frac{S-P}{Sn} = \frac{S-P}{S_t} K \end{aligned} \quad (2.51)$$

Приклад 2.12. Початкова сума боргу 10 000 грн. Через 90 днів передбачається погасити 10 500 грн. Визначити доходність операції для кредитора у простій відсотковій і простій обліковій ставках. Рік не високосний.

Розв'язання. Оскільки термін кредитної угоди обраховується в днях ($t = 90$ днів), то для знаходження ставки нарощення i та облікової ставки d використовуємо формули (2.48), згідно з якими:

$$i = \frac{\frac{10500 - 10000}{10000} - 1}{\frac{90}{360}} = 0,20278$$

$$d = \frac{1 - \frac{10000}{10500}}{\frac{90}{360}} = 0,1905$$

Висновок. Отримані в даній задачі результати є підтвердженням вищезгаданого твердження, що нарощення за обліковою ставкою йде швидше, ніж за ставкою нарощення.

Урахування інфляції в фінансових розрахунках з простою процентною ставкою

В сучасних умовах інфляція у грошових відносинах є одним із основних макроекономічних чинників, що впливають на ефективність інвестування. Без урахування інфляції кінцевий результат часто можна вважати умовною величиною. Інфляцію необхідно враховувати принаймні при розрахунку нарощеної суми, при дисконтуванні та при визначенні реальної ефективності (доходності) фінансової операції.

Відсоткові ставки i , які не враховують непередбачених темпів інфляції, називаються **номінальними або звичайними (nominal interest rate) брутто-ставками**.

Реальна відсоткова ставка (real interest rate) r – це така відсоткова ставка, яка характеризує доходність операції за умов інфляції та з її врахуванням.

Для визначення **реальної річної простої відсоткової ставки r** , яка буде характеризувати доходність операції за умов інфляції, та номінальної річної простої процентної ставки i можна застосовувати формули (2.52):

$$r = \frac{1}{n} \left(\frac{1 + ni}{(1 + h)^n} - 1 \right) \quad i = \frac{(1 + nr)I_p - 1}{n} \quad (2.52)$$

З урахуванням інфляції нарощена сума на кінець терміну фінансової операції за простою процентною ставкою з урахуванням падіння купівельної спроможності грошей Ct , яка знецінилася за рік, буде дорівнювати:

$$Ct = \frac{P(1 + ni)}{I_p} \quad Ct = \frac{S}{I_p} \quad (2.53)$$

де i - номінальна або звичайна (nominal interest rate) брутто-ставка;

h - темп інфляції за період t ;
 n – кількість періодів часу (років)

Коли відомі індекси цін за окремі інтервали часу (за умови змінних темпів інфляції), тоді індекс цін за весь період часу дорівнює добутку цих індексів цін за окремі інтервали часу. Індекс цін в загальному випадку (при змінному темпі інфляції h_t):

$$I_p = \prod_{t=1}^n (1 + h_t) = \prod_{t=1}^n I_{p(t)} \quad (2.54)$$

Індекс цін за термін фінансової операції за умови незмінних темпів інфляції в окремих періодах t :

$$I_p = (1 + h_t)^n$$

2.4. Застосування програмного забезпечення MS EXCEL в обчисленнях за правилом простих процентів

Серед комп'ютерних програм з майже універсальною сферою застосування, яка дозволяє автоматизувати процес фінансових обчислень без прив'язки до конкретної предметної галузі, найпоширенішою та загальнодоступною програмою безумовно є табличний процесор MS Excel.

У середовищі MS Excel, залежно від версії програмного забезпечення, реалізовано близько 50 фінансових функцій. Для виклику майстра функцій,

який допомагає ними користуватися, необхідно в меню програми обрати пункт Вставка - Функція . Потім у діалоговому вікні, що з'явилося, серед списку категорій функцій обрати категорію «фінансові». Короткий опис усіх наявних у MS Excel фінансових функцій наведено в довідниках.

Самостійно розглянути фінансові функції в MS Excel, навести до кожної з них відповідний приклад.

Моделювання росту числової послідовності для простих процентів

Нехай у прикладі 2.1 нам необхідно отримати значення майбутньої вартості хоча б за 10 послідовних періодів. За умовами прикладу початкова вартість $PV = 1000$ грн, ставка дохідності $r = 10\%$. Для знаходження цього числового ряду значень майбутньої вартості використаємо MS Excel.

Нагадаємо, що послідовність нарощених за правилом простих процентів сум є арифметичною прогресією. Тому, для обчислення елементів цієї числової послідовності, побудуємо в електронній таблиці MS Excel арифметичну прогресію з першим елементом 1000 грн, кроком у 100 грн та з загальною кількістю елементів, що дорівнює 11 шт. (початкова величина, яка належить до теперішнього часу та 10 елементів після початкового періоду). Результати роботи ілюструє рис. 2.2. На рис. 2.2 шукана арифметична прогресія займає комірки B5 - B15 електронної таблиці. Для побудови цієї чисельної послідовності у MS Excel існує декілька способів, найпростіші з яких – використання функції автозаповнення або команди «Прогресія».

Для автозаповнення стовпчика значень майбутньої вартості, достатньо ввести перші два елементи стовпчику, виділити їх, та «протягти» виділену область за допомогою

комп'ютерної миші до комірки B15. При цьому програма автоматично розраховує різницю між першими двома елементами числової послідовності та використовує її як постійний крок для автоматичного заповнення стовпчика елементами арифметичної прогресії.

Альтернативний спосіб побудови арифметичної прогресії, з використанням команд меню MS Excel, наведено на рис. 2.2. Для появи вікна **«прогресія»** необхідно в меню програми обрати пункти **Правка - Заповнити - Прогресія**.

Потім, у вікні, що з'явилося, обрати розташування, тип прогресії та розмір кроку (у нашому прикладі – розташування, – «по стовпчиках», тип – «арифметична», шаг – 100).

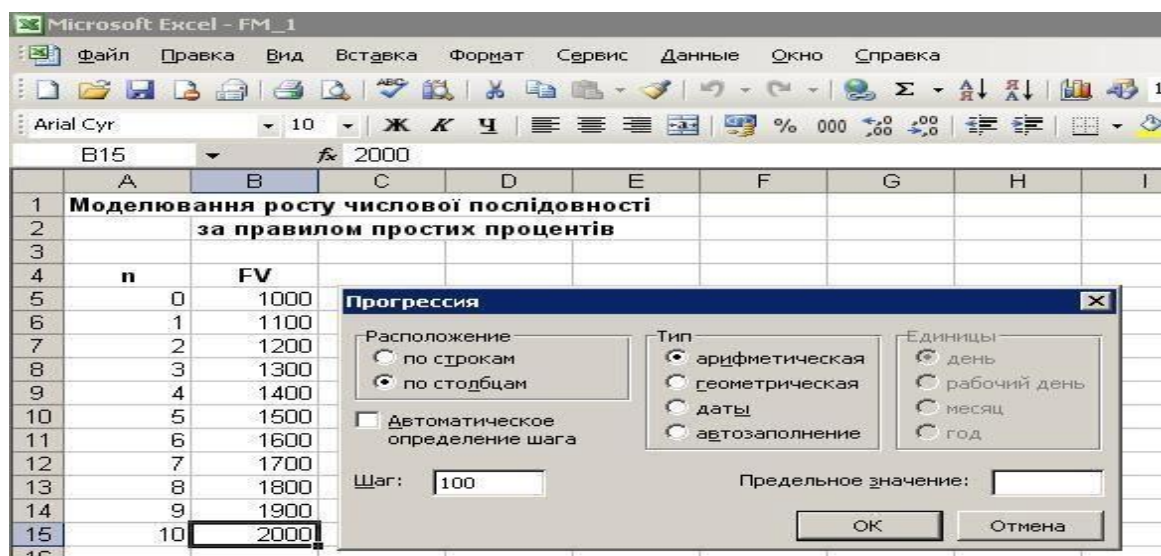


Рис. 2.2. Арифметична прогресія у MS Excel

Загальний графік зростання майбутньої вартості відомої початкової величини за правилом простих процентів був наведений на рис. 2.1. Для побудови такого графіку за даними отриманої арифметичної прогресії нам достатньо виділити значення комірок B5 - B15 та активізувати «майстер діаграм», обравши або відповідну піктограму або пункти **Вставка - Діаграма**. У вікні, що з'явилося, необхідно обрати тип діаграми – «Графік» (рис. 2.3).



Рис. 2.3. Графік зростання вартості за правилом простих процентів

Одержаний графік ще раз підтверджує зроблений раніше висновок про те, що за простими процентами вартість зростає за лінійним законом.

Питання для самоконтролю

1. Які види відсоткових ставок ви знаєте і чим вони відрізняються одна від одної?
2. Як обчислюється нарощена сума, коли відсотки нараховуються за простою відсотковою ставкою нарощення?
3. За якими формулами відбувається нарощення вкладу, якщо відсоткові ставки змінюються з часом та змінюється з часом сума депозиту?
4. У чому суть англійського, французького та німецького методів розрахунків за простими процентами:
5. Як відбувається погашення боргу при використанні споживчого кредиту?
6. Що називається дисконтуванням? Які існують види дисконтування?
7. У чому суть операції банківського обліку? Що називається дисконтом і як визначається дисконт за весь період кредитної угоди?
8. Записати і пояснити формули, за якими обчислюється прибутковість фінансових операцій.



Тестові завдання

1. Укажіть дві основних схеми дискретного нарахування відсотків:

- а) схема складних і змішаних відсотків;
- б) схема простих і змішаних відсотків;
- в) схема простих і точних відсотків;
- г) схема простих і складних відсотків.

2. Щодо моменту нарахування або виплати, відсотки поділяють на:

- а) декурсивні й антисипативні;
- б) прості та складні;
- в) складні та змішані;
- г) точні та звичайні.

3. Який формалізований вигляд має метод нарахування простих відсотків способом "точний відсоток із точною кількістю днів":

- а) АСТ/360;
- б) 360/360;
- в) АСТ/АСТ.

4. Розв'язання задачі, що є оберненою до процесу нарощення первісної суми, – це:

- а) математичне дисконтування;
- б) банківський облік векселів;
- в) компаундинг.

5. Відсоток, за якого отриману за певний проміжок часу суму (за зміни чи без змін відсоткової ставки) укладають під новий простий відсоток, називають:

- а) компаундинг;

- б) нарощення;
- в) реінвестування;
- г) дисконтування.

6. У чому сутність німецької практики нарахування простих відсотків:

- а) у використанні точних відсотків і приблизної кількості днів;
- б) у використанні точних відсотків і точної кількості днів;
- в) у використанні звичайних відсотків і точної кількості днів;
- г) у використанні звичайних відсотків і приблизної кількості днів.

7. Який спосіб розрахунку тривалості фінансової операції доцільно використовувати у процесі обліку векселів, якщо він не вказаний за умовами фінансового контракту:

- а) 360/360;
- б) АСТ/АСТ;
- в) АСТ/360;
- г) будь-який із трьох способів.

8. Частота нарахування відсотків у році за схемою нарахування простих відсотків впливає на:

- а) суму відсоткових грошей;
- б) нарощену суму;
- в) не впливає на нарощену суму;
- г) базу нарахування відсотків.

9. Показник, що вказує, яку первісну суму необхідно вкласти за умови різноманітних часових баз нарахування, щоб протягом усього строку фінансової операції отримувати 1 грн прибутку на день:

- а) облікова ставка;
- б) відсоткова ставка;
- в) мультиплікатор;
- г) дивізор.

10. Формулу розрахунку простих відсотків відображено:

- а) $S = P(1 + ni)$;
- б) $S = P(1 + i)$;
- в) $I = P \cdot i \cdot n$;
- г) $P = S/(1 + ni)$.

ТЕМА 3. МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗАСАДИ ТА МЕХАНІЗМ РОЗРАХУНКУ СКЛАДНИХ ВІДСОТКІВ

Питання до розгляду

3.1. Методика обчислень за правилом складних процентів.

3.2. Обчислення за правилом складних процентів в умовах змін вихідних параметрів.

3.3. Номінальна та ефективна ставка складних процентів. Поняття неперервного складного проценту та сили зростання.

3.4. Застосування довідкових фінансових таблиць та програмного забезпечення MS Excel в обчисленнях за правилом складних процентів.

3.1. Методика обчислень за правилом складних процентів

Серед існуючих методик нарахування коштів саме обчислення за правилом складних процентів є основою переважної більшості фінансових операцій.

Правило складних процентів (compound interest) зазвичай застосовують у середньо- та довгострокових фінансових угодах (строк існування більший від одного року), та у випадках, коли проценти не виплачують відразу після їх нарахування, а додають до основної суми боргу. Іншими словами, цей метод передбачає реінвестування коштів та капіталізацію процентів. **Реінвестування (англ. reinvestment)** - неодноразове повторення процесу інвестування суми депозиту разом з нарахованими на неї в попередньому періоді відсотками. Приєднання нарахованих відсотків до суми, яка служила базою для їх нарахування, **називають капіталізацією відсотків**, а спосіб обчислення процентних платежів по складних відсотках - обчисленням "відсотки на відсотки".

Сутність методу нарахування за складними процентами полягає в тому, що наприкінці кожного періоду до основної суми грошей додають нараховані проценти й отримана таким чином сума грошей є вихідною для нарахування процентів у наступному періоді.

Отже, складний відсоток – це потужний дієвий механізм нарощування капіталу, а процес «компаундування» багаторазово збільшує ефективність інвестування над банальним накопиченням, про що свідчить такий приклад.

При вкладенні \$ 1 тис в перші роки не відбувається дива — щорічний інвестиційний дохід стартує з \$101 і поступово зростає (за річну ставку прибутковості візьмемо історичну річну прибутковість фондового ринку США за індексом S & P500 Total return $i = 9,67\%$). Але на 8-му році капітал подвоюється і з цього моменту інвестиційний дохід на інвестиційний дохід (або відсотки на відсотки) починає перевищувати дохід безпосередньо на вкладений капітал. До 40-го року розмір капіталу збільшується в 47 разів і досягає \$47 111 з щорічним приростом в \$4326, враховуючи, що протягом всього цього періоду інвестор не робив додаткових вкладень, а гроші «розмножилися» самостійно.

Очевидно, що зміна первісної суми капіталу відповідно масштабує отриманий результат. Іншими словами, якщо вкласти не \$1 тис, а \$50 тис, то в результаті буде отримано в 50 разів більше або \$ 2,36 млн, що виглядає більш ніж привабливо.

Нарощення за складною процентною ставкою

У разі *нарощування* за складними процентами база для нарахування в кожному наступному періоді змінюється, оскільки кожна наступна сума зростає ще й на частку від попередньої.

Формула нароощування за складними процентам (формула складних відсотків - загальний спосіб):

$$S = P(1 + i)^n \quad (3.1)$$

де i – відсотки за весь термін позички;
 P – первісна (початкова) сума боргу;
 S – нароощена сума, тобто сума наприкінці терміну;
 i – річна ставка відсотків (у десятковому дробі);
 n – термін позички в роках.

$(1 + i)^n$ - множник нароощення складних відсотків. Він показує, у скільки разів нароощена сума більша від первісної.

У фінансових обчисленнях за правилом складних процентів, для врахування ефекту реінвестування, у випадках, коли протягом одного періоду часу відбувається декілька нарахувань процентів, вводять поняття *ефективної та номінальної ставки дохідності*.

Якщо відсотки нараховуються m разів на рік, формула нароощення за складними процентами матиме такий вигляд:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{nm} \quad (3.2)$$

де j - **номінальна процентна ставка**.

Введемо надалі позначення:

$j^{(m)}$ номінальна ставка j з m нарахуваннями на рік;
 m – число періодів нарахувань у році.

Приклад 3.1. Вкладник поклав на депозит у банк 1 тис. грн. під 16% річних. Умовами угоди передбачено, що на цю суму банк нараховує складні проценти щокварталу. Треба знайти суму, що акумулюється на депозитному рахунку через рік.

Розв'язання. За формулою (3.2) визначимо суму, що акумулюється на депозитному рахунку через рік.

Тобто, фактична річна дохідність банківського депозиту, завдяки щоквартальному нарахуванню коштів, становить близько 17%, що більше, ніж нарахування лише один раз на рік за річною ставкою в 16 % .

Нарахування відсотків при дробовому числі років

За умови терміну позички, вираженому не цілим числом, використовують **змішаний спосіб** визначення нароощеної суми за складними процентами:

$$S = P(1 + i)^n(1 + bi) \quad (3.3)$$

де $n = (a + b)$ – строк позики;
 a – ціле число років,
 b – дробова частина року.

При великих термінах він різко зростає навіть при невеликій ставці. Невелика зміна ставки при великому терміні зумовлює значне збільшення множника нарощення. Існують готові таблиці для значень цього множника. Капіталізація процентів можлива лише коли кількість періодів нарощування більша за один. Зростання за складними відсотками нагадує *геометричну прогресію*, для якої перший член $b_1 = P$, знаменник – $q = 1 + i$. Графічно зростання за складними відсотками показано на рис. 3.1.

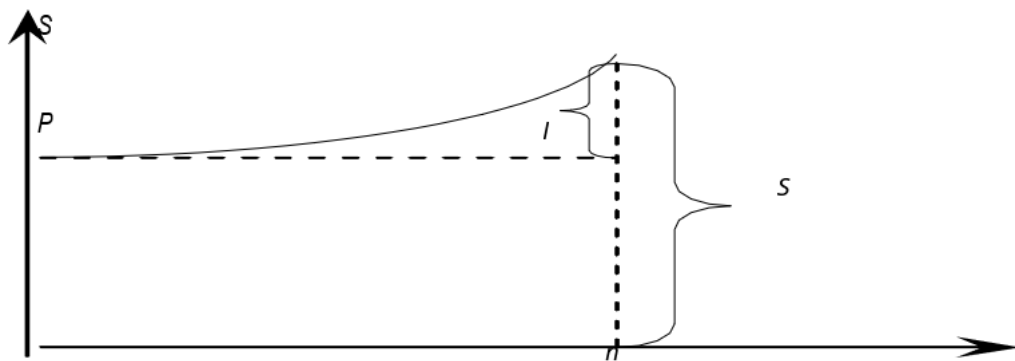


Рис. 3.1. Зростання за складними відсотками

Відсотки за весь термін позички становитимуть:

$$I = S - P = P[(1 + i)^n - 1]$$

Дисконт дорівнює:

$$D = S - P = S \left(1 - \frac{1}{(1 + i)^n} \right) \quad (3.4)$$

Відсотки, нараховані на відсотки:

$$I = P [(1 + i)^n - (1 + n i)]$$

Темп росту коштів за правилом складних процентів

Аналізуючи залежність $S = P(1 + i)^n$, що описує правило нарощення коштів за правилом складних процентів, варто зазначити, що, на відміну від правила простих процентів, зміна параметру часу n та параметру доходності i по різному впливатиме на темп росту майбутньої вартості S . Якщо час фінансової угоди n збільшити в k разів, то темп росту майбутньої вартості складатиме:

$$\frac{S_1}{S_0} = (1 + i)^{(k-1) \cdot n} \quad (3.5)$$

Коли ставку дохідності збільшите в k разів, то темп росту майбутньої вартості становитиме:

$$\frac{S_1}{S_0} = \left(\frac{1+ik}{1+i} \right)^n \quad (3.6)$$

Для того, щоб початкова сума збільшилась в N разів, потрібно визначити відповідно час n й ставку складних відсотків i , за яких відбудеться таке зростання:

$$n = \frac{\ln N}{\ln(1+i_c)} \quad i = \sqrt[n]{N-1} \quad (3.7)$$

Правило 72-х: Подвоєння капіталу за ставкою a (до 10 %) за складними процентами відбувається приблизно за $\frac{72}{i}$ років

Таким чином, оскільки зростання вартості за правилом складних процентів відбувається швидше, то для отримання визначеної кінцевої суми за правилом *складних процентів* знадобиться менше часу, ніж за правилом *простих процентів*!

Нарощення за складною обліковою ставкою

Якщо потрібно знайти нарощену суму за допомогою складної облікової ставки, то її розраховують за формулами:

$$S = \frac{P}{(1-d)^n} \quad S = \frac{P}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}} \quad (3.8)$$

де f - номінальна облікова ставка з m утриманнями на рік.

Якщо дисконтування відбувається m разів на рік, використовують *номінальну облікову ставку f* .

Порівняння методів нарощення відсотків

Приклад 3.2. Розрахуйте, яка сума буде на рахунку, якщо внесок 1000грн. покладений на 1рік (10 років) під 20 % річних. Відсотки складні і нараховуються раз у рік.

Порівнюючи результати обчислень за простими процентами (рис. 3.1) та за складними процентами (рис. 3.2), бачимо, що за однакових висхідних умов, ідентичний результат досягається лише після одиничного періоду, а потім нарощування за складними процентами дає більшу кінцеву величину. Причому, чим більша кількість періодів нарощування тим більша різниця у результатах розрахунків за цими двома методиками.

Формули складних процентів пов'язують функціонально залежністю чотири параметри:

- майбутня та теперішня вартість – $S(P)$;
- період часу – n ;
- ставка дохідності – i .

Тому знаючи будь-які три з них, завжди можна знайти четверту, невідому величину. Оцінимо **норму дохідності** за використання правила складних процентів із застосуванням процентної та облікової ставки:

$$i_{\text{скл}} = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1 \quad d_{\text{скл}} = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{S}} \quad (3.9)$$

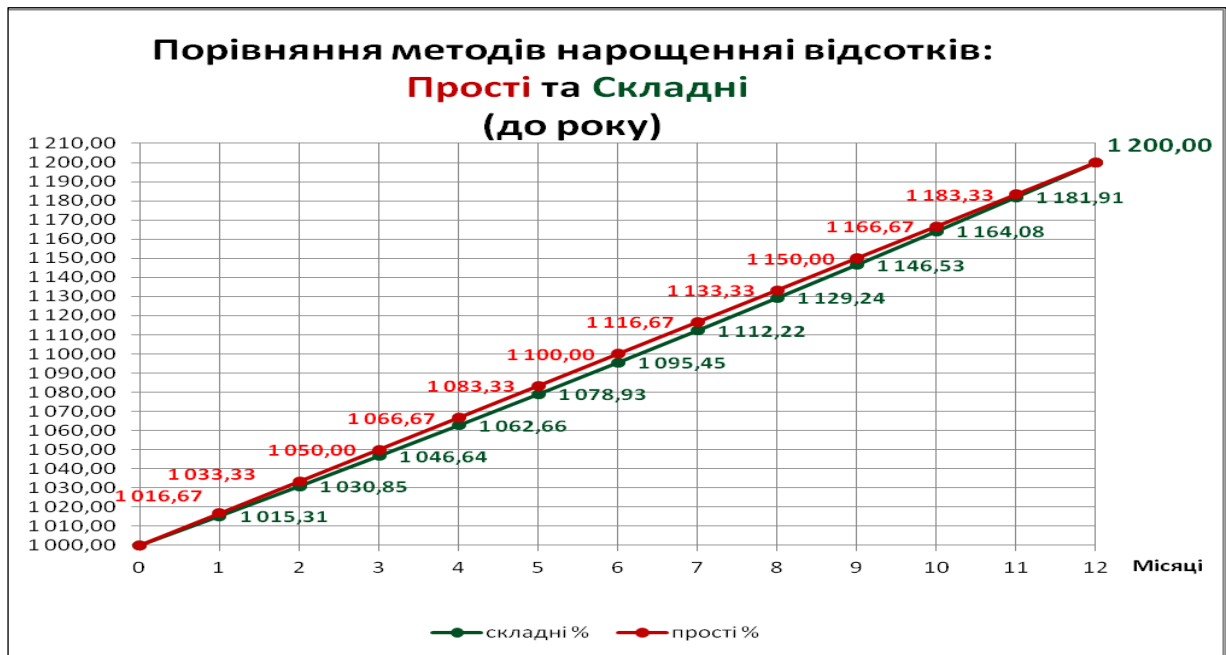


Рис. 3.2. Порівняння методів нарошення відсотків (прості, складні) до 1 року



Рис. 3.3. Порівняння методів нарошення відсотків (прості, складні) більш 1 року

Визначення строку позички

За складною процентною ставкою

$$n = \frac{\ln \frac{S}{P}}{\ln(1+i)} \quad (3.10)$$

При нарощуванні за номінальною ставкою відсотків $\frac{j}{m}$ разів на рік:

$$n = \frac{\ln \frac{S}{P}}{\ln \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m} = \frac{\ln \frac{S}{P}}{m \ln \left(1 + \frac{j}{m}\right)} \quad (3.11)$$

Дисконтування за складною процентною ставкою

За правилом складних процентів можна обчислити *приведену (теперішню) вартість*, виконавши операцію дисконтування за складною процентною ставкою:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = SV^n \quad (3.12)$$

де $V^n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$ - множник дисконтування складних процентів.

Якщо відсотки нараховуються m разів на рік, формула матиме такий вигляд:

$$P = \frac{S}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}} = SV^{mn} \quad (3.13)$$

де j - номінальна ставка з m нарахуваннями на рік.

Дисконтування за складною обліковою ставкою (банківське дисконтування)

Процес дисконтування при застосуванні складної облікової ставки відбувається сповільнено, так як кожен раз облікова ставка застосовується не до початкової суми, а до суми, дисконтованої на попередньому кроці в часі. Розраховується сучасна вартість за формулою:

$$P = S(1-d)^n \quad (3.14)$$

Якщо дисконтування відбувається m разів на рік, використовують номінальну облікову ставку f :

$$P = S \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn} \quad (3.15)$$

де f - номінальна облікова ставка з m дисконтуванням на рік

Дисконтування m разів на рік призводить до зниження величини дисконту.

3.2. Обчислення за правилом складних процентів в умовах змін вихідних параметрів

В умовах інфляції банк може змінювати розмір процентної ставки протягом терміну позички, особливо якщо цей термін носить тривалий характер.

У цьому випадку сума, що повертається, може бути визначена по наступній формулі:

$$S = P \left(1 + \frac{i_1}{100} \right)^{n_1} * P \left(1 + \frac{i_2}{100} \right)^{n_2} * \dots * P \left(1 + \frac{i_m}{100} \right)^{n_m} \quad (3.16)$$

$$n = \sum n_t,$$

де $n = n_1 + n_2 + \dots + n_t$ – термін позички;

n_1 – тривалість періоду терміну позички, на якому застосовується процентна ставка i_1 ,

n_2 – тривалість періоду терміну позички, на якому застосовується процентна ставка i_2 ,

m – число періодів.

Середня ставка дохідності складних процентів i за повний строк дії фінансової угоди N розраховується за формулою зваженої середньої геометричної величини (3.17):

$$i = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^T (1 + i_t)^{n_t}} - 1 \quad (3.17)$$

$$i_{\text{серед. скл.}} = \sqrt[n]{(1 + i_1)^{n_1} (1 + i_2)^{n_2} \dots (1 + i_t)^{n_t}} - 1$$

Окрім плаваючої ставки дохідності, іншим змінним вихідним параметром фінансової операції є загальна кількість періодів нарахування чи дисконтування.

У практиці фінансових розрахунків часто трапляються ситуації, коли за фіксованого загального строку n змінюється кількість періодів нарахувань коштів. Наприклад, за банківським депозитом вказується річна ставка складних процентів r , а нарахування здійснюють щомісяця чи щокварталу тощо.

Отже, у деяких фінансових угодах капіталізація (нарахування) процентів відбувається m разів однаковими частками через однакові проміжки часу протягом кожного періоду часу t ($t = 1, n$).

В такому разі класична формула для обчислення майбутньої вартості за правилом складних процентів, набуде вигляду:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{nm} \quad (3.18)$$

де n - загальний строк угоди (кількість років чи інших періодів часу);
 m - кількість нарахувань процентів протягом одного періоду часу.

Визначення майбутньої суми з урахуванням інфляції.

Позначимо через h темп інфляції за рік у відсотках.

Тоді формули для визначення майбутньої суми грошей з урахуванням їх інфляційного знецінювання (C) та реальної річної складної процентної ставки (r) матимуть вигляд (3.19):

$$C = S * I_{KC} = \frac{S}{I_p} \quad C = P(1 + i)^n(1 + h)^{-n} = P \left(\frac{1+i}{1+h} \right)^n \quad (3.19)$$

$$r = \frac{i - h}{1 + h} \quad i = r + h + rh - \text{формула Фішера}$$

де C - майбутня сума грошей з урахуванням їх інфляційного знецінювання;

S - нарощена сума за n років;

i - номінальна річна процентна ставка (брутто-ставка);

r - реальна складна річна процентна ставка;

h - темп інфляції;

n - кількість періодів часу (років);

I_{KC} - індекс купівельної спроможності;

I_p - індекс цін за період n .

Номінальна річна процентна ставка (брутто-ставка) – скорегована ставка, тобто збільшена на величину інфляційної премії.

- Індекс цін при незмінному темпі інфляції h :

$$I_p = (1 + h)^n$$

- Індекс цін в загальному випадку (при змінному темпі інфляції h):

$$I_p = \prod_{T=1}^N (1 + H_T) = \prod_{T=1}^N I_{P(T)}$$

3.3. Номінальна та ефективна ставка складних процентів. Поняття неперервного складного проценту та сили зростання

Уведемо поняття ефективного річного відсотка ie (ЕРВ). Під ЕРВ будемо розуміти приведену річну ставку при щорічному нарахуванні відсотків, еквівалентну за

фінансовими наслідками застосованій процентній ставці при нарахуванні відсотків за періоди менше року.

Ефективна відсоткова ставка визначає, яку річну ставку складних процентів належить встановити, щоб отримати такий самий фінансовий результат, як і за m -разового нарахування процентів за рік за ставкою.

Ефективна відсоткова ставка (англ. effective rate) – ставка, що відображає реальний дохід від комерційної угоди, тобто ставка, за якої фактично було нараховано відсотки на початкову суму. Розраховується за формулою (3.20):

$$i_e = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 \quad (3.20)$$

де j – номінальна ставка з m нарахуваннями на рік.

Ефективна облікова ставка ($d_{\text{еф}}$) – це складна річна облікова ставка, еквівалентна (за фінансовим результатом) номінальній річній обліковій ставці (f), яку застосовують при заданому числі дисконтувань на рік – (m). Тобто ефективна облікова ставка характеризує результат дисконтування за рік та знаходиться шляхом прирівнювання множників дисконтування по річній обліковій ставці й по номінальній обліковій ставці (m) раз на рік.

$$d_{\text{еф}} = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m \quad f = m(1 - \sqrt[m]{1 - d}) \quad (3.21)$$

де f – номінальна облікова ставка з (m) дисконтуванням на рік.

Ефективна облікова ставка в усіх випадках, коли $m > 1$, менше номінальної ставки (для однакових періодів).

Зауважимо, що коли $m > 1$, то ефективна ставка більша за номінальну, причому чим більша величина m (чим частіше нараховують проценти), тим вищою є ефективна ставка дохідності, отже й тим швидше відбувається процес нарощування.

Зрозуміло, що граничним випадком є ситуація, коли період нарахування складного процента вважають нескінченно малим. Якщо при нарощуванні коштів за формулою (3.16) часовий інтервал між виплатами процентів наближається до нуля, тобто проценти виплачують та реінвестують неперервно, то можна обчислити граничне значення ефективної ставки дохідності за відомої номінальної ставки дохідності. З метою таких обчислень вводять поняття неперервного складного проценту.

Неперервна складна ставка дохідності – це така ефективна ставка дохідності, за якою проценти виплачують та реінвестують безперервно, тобто кількість періодів нарахувань процентів прямує до нескінченності.

У деяких виданнях з фінансової математики в разі неперервного нарощування процентів застосовують інший термін для опису неперервних складних ставок дохідності – **силу росту (force of interest)**.

Сила росту (δ) характеризує відносний приріст нарощеної суми за нескінченно малий проміжок часу. Вона може бути постійною або змінюватись в часі.

При непевному нарахуванні процентів ($m \rightarrow \infty$) маємо:

$$S = P \lim_{M \rightarrow \infty} (1 + J/M)^{MN} = P (\lim_{M \rightarrow \infty} (1 + J/M)^M)^N$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + j/m)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} ((1 + j/m)^{m/j})^j = e^j$$

$$S_4 = P e^{\delta n} \qquad P = \frac{S}{e^{\delta n}} \qquad (3.22)$$

де e – основа натуральних логарифмів (CONST = 2,71828).

Розрахунок неперервної складної ставки дохідності (**сили росту**), (δ):

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{S}{P} \qquad (3.23)$$

Строк угоди (n) – при нарощуванні за постійної сили росту:

$$n = \frac{\ln \frac{S}{P}}{\delta} \qquad (3.24)$$

Безперервна і дискретна ставки зв'язані між собою (3.25):

$$i_e = e^{\delta} - 1 \qquad \delta = \ln(1 + i) \qquad (3.25)$$

При безперервному нарахуванні процентні та облікові ставки рівні. *Безперервна облікова ставка називається силою дисконту.*

Приклад 3.3. У банк покладено суму 150000 грн. строком на 6 років за складною ставкою 14% річних.

Визначити нарощену суму, величину отриманого процента й ефективну процентну ставку за різними схемами нарахування процентів: а) що півріччя; б) щомісячно; в) неперервного нарахування з силою росту 14%.

Розв'язання/

а) нарощена сума (при $m = 2$) S :

$$S_1 = P \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} = 150000 \left(1 + \frac{0.14}{2}\right)^{12} = 37828.7 \text{ грн.}$$

Сума отриманих процентів

$$I_1 = S - P = 37828.7 - 150000 = 187828.7 \text{ грн.}$$

Ефективна річна процентна ставка $i_e = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$

$$i_{e\phi 1} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0.14}{2}\right)^2 - 1 = 0.1449 = 14.49\%$$

б) нарощена сума (при $m=12$) S :

$$S_3 = 150000 \left(1 + \frac{0.14}{12}\right)^{72} = 344133 \text{ грн.}$$

Сума отриманих процентів

$$I_3 = 344133 - 150000 = 194133 \text{ грн.}$$

Ефективна процентна ставка

$$i_{e\phi 3} = \left(1 + \frac{0.14}{12}\right)^{12} - 1 = 0.1493 = 14.93\%$$

в) нарощена сума (при $m \rightarrow \infty$); $j = 14\%$) S :

$$S_4 = Pe^{\delta n} = 150000 * 2.72^{6*0.14} = 347455 \text{ грн.}$$

Сума отриманих процентів

$$I_4 = 347455 - 150000 = 197455 \text{ грн.}$$

Ефективна процентна ставка $i_e = e^{\delta} - 1$

$$i_{e\phi} = e^{\delta} - 1 = 2.72^{0.14} - 1 = 0.15 = 15\%$$

Максимальний відносний дохід від депозитної операції вкладник отримає за умови неперервного нарахування відсотків із силою росту 14%.

Отже, нарощена сума на кінець фінансової операції при використанні складної процентної ставки в значній мірі залежить від внутрішньорічної капіталізації.

3.4. Застосування довідкових фінансових таблиць та програмного забезпечення MS EXCEL в обчисленнях за правилом складних процентів

Для полегшення досить трудомістких розрахунків за правилом складних процентів за відсутності засобів комп'ютерної техніки використовують спеціальні **довідкові фінансові таблиці** мультиплікативних, дисконтувальних та дисконтних множників. Значення множників протабульовані за двома параметрами – величина ставки дохідності i та кількість періодів часу n .

Фінансові таблиці, які містять довідкові значення множників дисконтування (дисконтних множників) складних процентів (наведено в додатку).

Моделювання росту числової послідовності для складних процентів.

Основним методом оптимізації обчислень за складними процентами є використання спеціальних фінансових функцій табличного процесора *MS Excel*, які дозволяють, знаючи будь - які три з чотирьох величин, знайти четверту - невідому.

Таблиця 3.1

Функції MS EXCEL для обчислень за складними процентами

Невідомий параметр	Наші функції	Форма і функції
FV (S)	БС	<i>БС(СТАВКА; КПЕР; ПЛТ; ПС;ТИП)</i>
PV (P)	ПС	<i>ПС(СТАВКА; КПЕР; ПЛТ; БС;ТИП)</i>
i (r)	СТАВКА	<i>СТАВКА(КПЕР; ПЛТ; ПС; БС;ТИП)</i>
n	КПЕР	<i>КПЕР(СТАВКА; ПЛТ; ПС; БС;ТИП)</i>

Послідовність наращених за правилом складних процентів сум є геометричною прогресією.

Для знаходження елементів цієї числової послідовності, побудуємо в електронній таблиці *MS Excel* геометричну прогресію з першим елементом *P* грн, загальною кількістю елементів *N* (початкова величина, яка належить до теперішнього часу та *n* елементів після початкового періоду) та темпом приросту значень у 10 %. та у вікні, що з'явилося, визначаємо тип прогресії «геометрична» (рис.3.4).

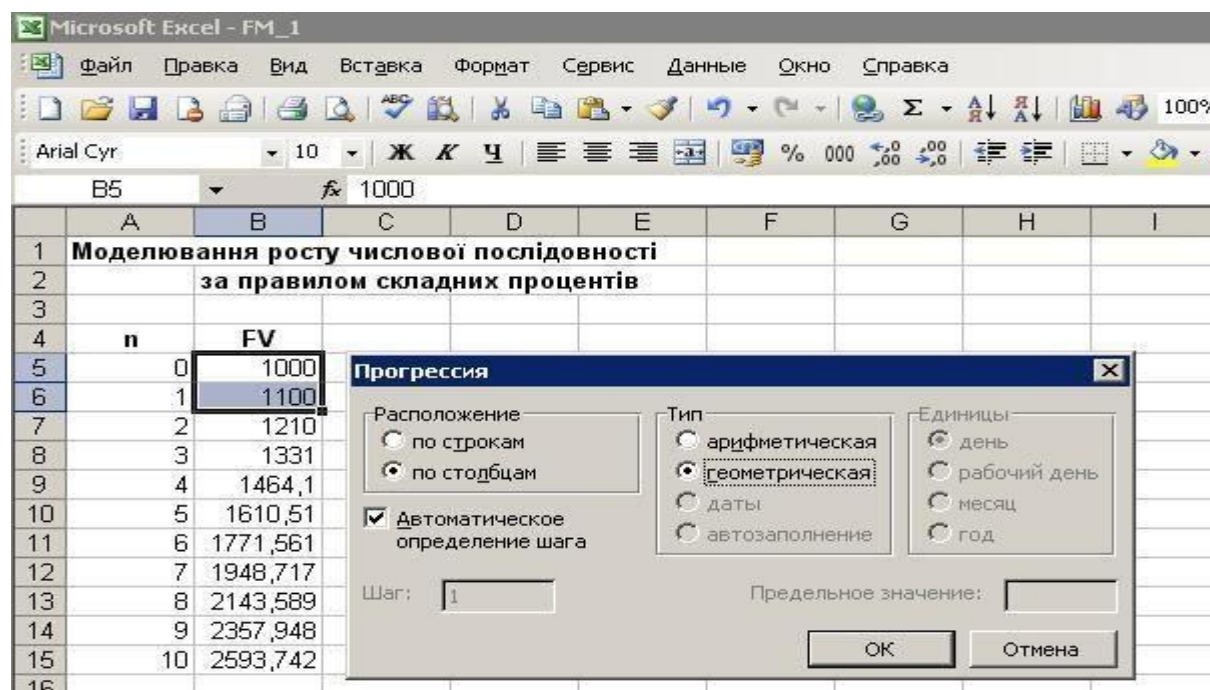


Рис. 3.4. Моделювання росту числової послідовності для складних процентів у *MS Excel* Для розв'язання цієї задачі, обираємо в меню програми пункти **Правка - Заповнити - Прогресія**. Варто зазначити про існування у *MS Excel* й інших фінансових функцій, які суттєво спрощують розрахунки за правилом складних процентів.

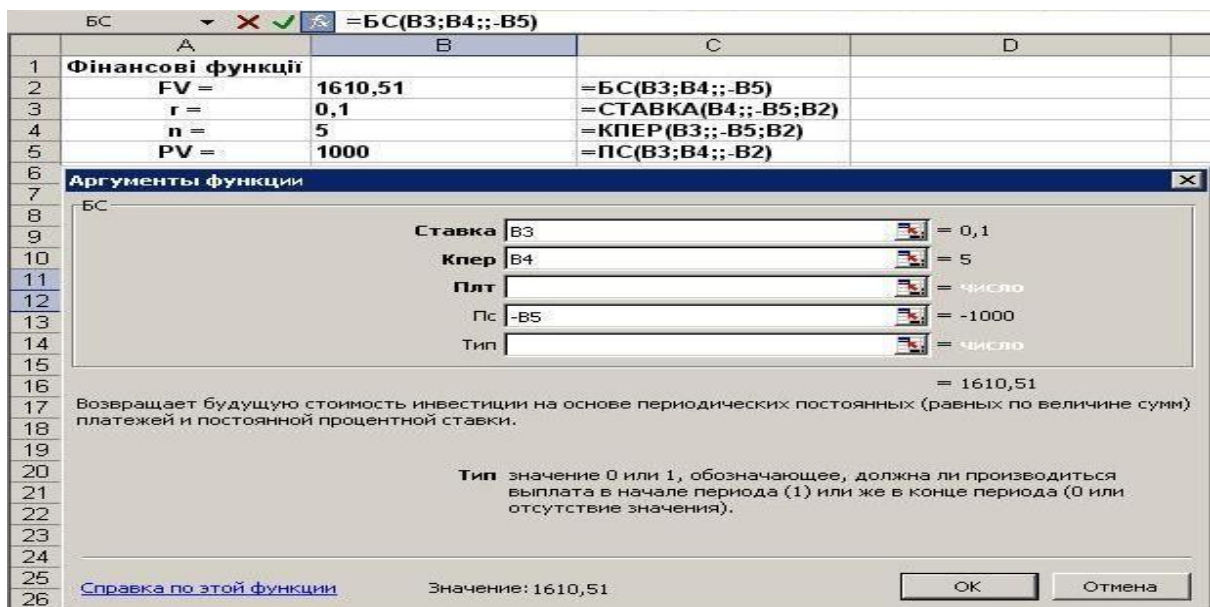


Рис. 3.4. Обчислення майбутньої вартості у MS Excel

Питання для самоконтролю

1. За яких умов відбувається нарощення за складною відсотковою ставкою?
2. Записати і пояснити формулу знаходження нарощеної суми, якщо нарахування складних відсотків відбувається один раз на рік і m разів на рік.
3. У чому полягають особливості мішаного методу нарахувань відсотків і коли його застосовують?
4. Як знайти нарощену суму, якщо в кредитній угоді використовується складна відсоткова ставка, яка змінюється з часом? Порівняйте з формулою нарощення за простою змінною відсотковою ставкою.
5. За яких умов для клієнта банку в депозитній угоді вигідніше застосовувати складну ставку відсотків, а за яких – просту?
6. У чому суть операції дисконтування? Які існують види дисконтування за складною ставкою?
7. Чим відрізняється математичне дисконтування від банківського обліку?
8. У чому різниця між обліковою складною ставкою й ефективною складною ставкою? Порівняти вплив даних ставок на темп дисконтування.
9. Вивести формулу для обчислення нарощеної і дисконтованої сум за неперервною відсотковою ставкою. Який зв'язок між силою росту і номінальною ставкою складних відсотків?



Тестові завдання

1. Який процес характеризується антисипативним нарахуванням відсотків:

- а) нарощення;
- б) дисконтування;
- в) ремісія;
- г) реінвестування.

2. Вид формули знаходження терміну фінансової операції за "правилом 72":

- а) $72 / i$;
- б) $r / 72$;
- в) $72 / k$.

3. Емпірично наближені формули для визначення терміну фінансової операції використовують за умови, якщо:

- а) не змінюється значення початкової суми;
- б) відбувається подвоєння початкової суми;
- в) відбувається зменшення початкової суми;
- г) відбувається потроєння початкової суми.

4. Назвіть схеми нарахування складних відсотків за умови, що термін фінансового контракту відрізняється від цілого числа років, – це:

- а) складна та змішана;
- б) складна та проста;
- в) безпосередня й опосередкована;
- г) проста та змішана;
- г') пряма та змішана.

5. Яку відсоткову ставку призначено для того, щоб допомогти позичальникам порівнювати різні умови кредитування:

- а) відсоткову;
- б) облікову;
- в) ефективну;
- г) номінальну.

6. Номінальна відсоткова ставка має такий недолік:

- а) ураховує всі витрати на кредит;
- б) ураховує всі прямі витрати;
- в) не відображає реальної ефективності угоди.

7. За умовами фінансового контракту передбачено t -кратне нарахування відсотків за рік. Визначте, чому дорівнює t , якщо відсотки нараховують за півріччями:

- а) 4;
- б) 12;
- в) 2;
- г) 0,5.

8. Визначте ціле число під періодів та дробову частину під періоду фінансової операції, якщо її термін дорівнює 27 місяців, а відсотки нараховують раз на півріччя:

- а) 2 та 1;
- б) 4 та $1/2$;

- в) 4 та 1;
- г) 2 та 1/2.

9. Як змінюється термін фінансової операції, необхідний для досягнення нарощення капіталу, за збільшення частоти нарахування відсотків упродовж року:

- а) не змінюється;
- б) зменшується;
- в) збільшується.

10. Яка схема нарахування відсотків є найбільш вигідною для банку, що надає позичку на термін, менший від одного року:

- а) схема простих відсотків;
- б) схема складних відсотків;
- в) завуальована схема нарахування відсотків;
- г) змішана схема нарахування відсотків.

ТЕМА 4. ФІНАНСОВА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ

Питання до розгляду

- 4.1. Поняття фінансової еквівалентності
- 4.2. Основні рівняння еквівалентності
- 4.3. Середні величини в фінансових розрахунках
- 4.4. Консолідація платежів

4.1. Поняття фінансової еквівалентності

У практиці фінансових операцій нерідко виникають ситуації, коли необхідно певні боргові зобов'язання замінити на інші з більш віддаленим строком платежу (процеси пролонгації, реструктуризації боргу та ін.); чи поєднати декілька платежів (процеси консолідації та ін.), або навпаки, один платіж поділити на декілька часток (процеси дроблення, «спліт» цінних паперів та ін.). Тому виникає питання коректного порівняння вартісних та часових характеристик таких фінансових угод.

Порівняльний аналіз та узгодження умов фінансових операцій ґрунтується на принципі фінансової еквівалентності.

Фінансова еквівалентність – паритет (рівність) різних за номіналом вартісних величин та / або норм дохідності фінансових угод, які належать до різних моментів часу. Вони залежать від наступних базових параметрів:

- розміру середньої ринкової ставки дохідності;
- методики нарахування процентів;
- строку та періодичності нарахування коштів;
- початкової та / або кінцевої суми коштів.

У разі необхідності зміни (коригування) будь-якого з базових параметрів фінансової угоди, виникає питання визначення еквівалентних грошових сум та / або ставок (норм) дохідності, котрі відповідають новим умовам фінансової угоди.

Еквівалентні вартісні величини – це суми коштів, які у разі зведення до одного моменту часу стають однаковими.

Еквівалентні норми дохідності — це ставки дохідності, які, незважаючи на різні способи та / або строки нарахування чи утримання коштів, у разі зведення до однакових часових одиниць виміру (зазвичай говорять про річну дохідність) стають однаковими.

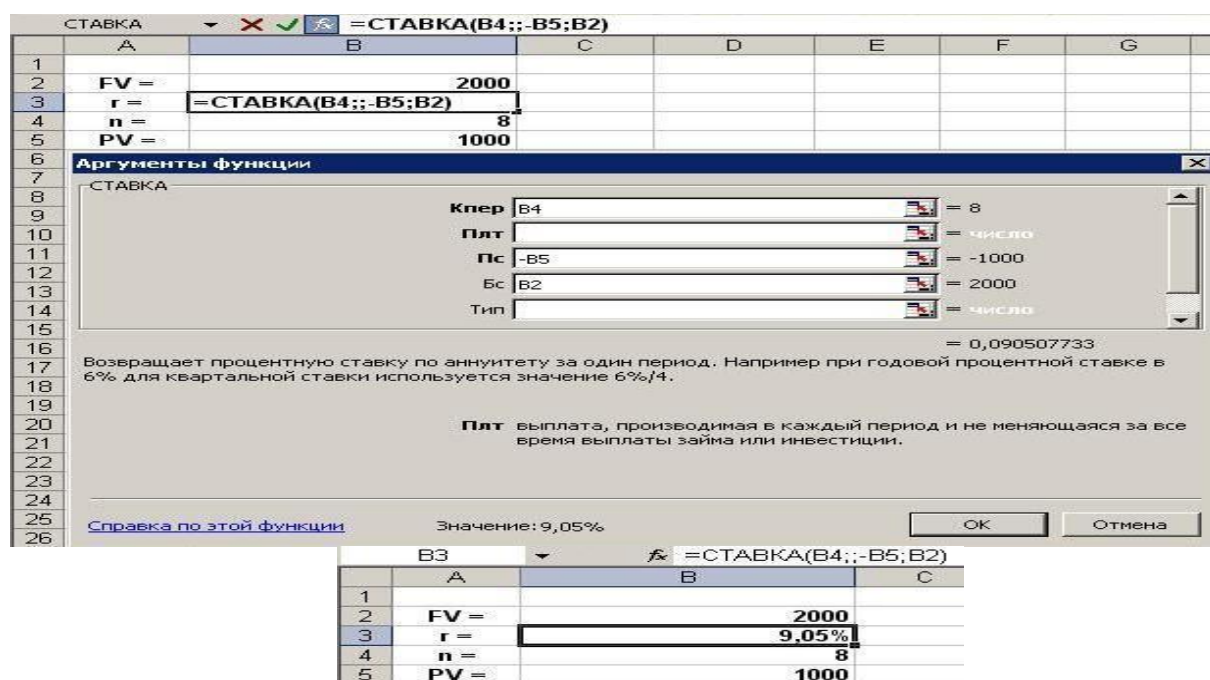


Рис. 4.1. Визначення норми дохідності за допомогою MS Excel

Змінюючи значення дохідності процентної ставки до 9,5%, ми виявимо тільки одне значення річної ставки дохідності, за якої 1000 грн. сьогодні та 2000 грн. через 8 років є еквівалентними величинами.

Для знаходження цього значення ставки дохідності скористаємось функцією СТАВКА()табличного процесора MS Excel (рис. 4.1)

$$= СТАВКА(8; ; -1000; 2000) = 9,05\%.$$

Таким чином, за річною ставкою доходності у 9,05%, грошові суми 1000 грн сьогодні та 2000 грн через 8 років є еквівалентними величинами.

Зазначимо, що ставку дохідності, із застосуванням якої вартісні величини, що належать до різних часових періодів, стають еквівалентними, називають **бар'єрною ставкою**.

4.2. Основні рівняння еквівалентності

Основоположним постулатом майже всіх сучасних економічних теорій є твердження, що головною ціллю будь-якої комерційної діяльності є отримання прибутку.

У фінансовій математиці, аналізуючи ефективність підприємницької діяльності, зазвичай говорять про норму (ставку) дохідності тієї чи іншої фінансової операції.

Завдяки відмінностям у методиках фінансових обчислень розрізняють такі основні види ставок дохідності:

- залежно від правила нарахування процентів — проста та складна ставки;
- залежно від операції (нарощування чи дисконтування процентів) — ставки відсотка (нарощування) та дисконтування (приведення);
- залежно від операції (дисконтування чи утримання процентів) — ставки дисконтування (декурсивна) та облікова (антисипативна);
- залежно від способу врахування часової бази розрахунків — комерційна та точна ставки;
- залежно від способу врахування ринкової дохідності — фіксована та плаваюча (змінна) ставки;
- залежно від кількості нарахувань протягом одного періоду часу за правилом складних процентів — номінальна та ефективна складні ставки;
- залежно від частоти нарахувань за правилом складних процентів — дискретна та неперервна складні ставки;
- з урахуванням або без урахування темпу інфляції — реальна та номінальна ставки;
- з урахуванням або без урахування ризику неплатежу — очікувана та обіцяна ставки дохідності.

Таким чином, у фінансових розрахунках для процедур нарощення та дисконтування використовують різні види відсоткових ставок. Якщо ці ставки у конкретних умовах угоди приводять до одного і того ж фінансового результату, **то вони називаються еквівалентними**. Зміна методики обчислення ставки дохідності може призвести до суттєвих змін вартісних та / або часових характеристик фінансових угод. З метою збереження необхідної норми дохідності фінансової операції, незалежно від методики та тривалості нарахувань процентів, використовують рівняння еквівалентності щодо множників нарощування, дисконтування, утримання.

Еквівалентність множників нарощування простих та складних процентів

Позначимо ставку дохідності за простими процентами i_n , за складними процентами — i_c , термін часу n . Формули (4.1)

Нарощення початкової суми (P) проводиться за формулами:

➤ для простої ставки:

$$S = P(1 + ni) \quad (4.1)$$

➤ для складної ставки

$$S = P(1 + i)^n \quad (4.2)$$

Якщо i_{Π} та $i_{\text{скл}}$ еквівалентні, то повинна виконуватись умова:

$$S_{\Pi} = S_{\text{скл}}$$

Звідси – рівність множників нарощення:

$$(1 + ni) = (1 + i)^n$$

Отже, зв'язок між еквівалентними ставками відсотків визначається за такими формулами.

Якщо еквівалентна простій ставці складна ставка нараховується m разів на рік, тоді:

$$i = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{n} \quad j = m \left[(1 + ni)^{\frac{1}{mn}} - 1 \right] \quad (4.3)$$

Еквівалентність складних відсоткових і складної облікової ставки:

$$i = \frac{d_c}{1 - d_c} \quad d_c = \frac{i_c}{1 + i_c}$$

$$i_n = \frac{(1 + i_c)^n - 1}{n} \quad i_{(c)} = \sqrt[n]{1 + ni_n} - 1$$

Порівнюючи *множники нарощування* простих та складних процентів можна зробити висновки.

Якщо взяти однакові за величиною, але різні за правилом нарощування процентів *річні* ставки нарощування, то:

- для строку *меншого* за *один рік* вартість нарощується швидше за правилом простих процентів, тобто:

$$(1 + i_{jc})^n < (1 + i_{js} \cdot n)$$

- для строку *більшого* ніж *один рік* вартість нарощується швидше за правилом складних процентів, тобто:

$$(1 + i_{ic})^n > (1 + i_{is} \cdot n)$$

- для строку *один рік* множники нарощування рівні:

$$(1 + i_{ic})^n = (1 + i_{is} \cdot n)$$

Оскільки у комерційних розрахунках тип множників нарощування зазвичай вибирають відповідно з принципами максимізації прибутку, то існує правило – у короткострокових фінансових угодах (строк менший за 1 рік) нарощування краще здійснювати за простими процентами, а у довгострокових – за складними процентами.

У реальних фінансових угодах, наприклад, у споживчому кредитуванні досить часто вказують лише певну «рекламну» ставку дохідності, але за наявності різноманітних «прихованих» платежів реальна (повна) ставка дохідності для кінцевого споживача кредиту є набагато вищою.

Визначення повної дохідності фінансової операції для кредитора у вигляді річної складної (ефективної) ставки процентів ґрунтується на принципі фінансової еквівалентності.

Нехай позика в розмірі C надається на строк n під складну річну процентну ставку i . При наданні позики утримуються комісійні у розмірі A , що збільшує дохідність операції для кредитора. В результаті боржник отримує суму, яка дорівнює $(C - A)$.

Для визначення повної дохідності фінансової операції припускають, що нарощення величини $(C - A)$ за ставкою y дасть той самий результат, що і нарощення величини C за ставкою i . Отже, відповідно до введених раніше позначень, рівняння еквівалентності матиме вигляд: $(C - A) \cdot (1 + y)^n = C \cdot (1 + i)^n$.

Від'ємне значення показує, що це величина боргу. Тепер розрахуємо суму, яку фактично отримує на руки позичальник із вирахуванням комісії.

Маємо:

	B7	$\text{fx} = \text{B5} - \text{B6} * \text{B5}$	
	A	B	C
1			
2	FV(C) =		=БС(В3;В4;;В5)
3	r =	0,14	
4	n =	5	
5	C =	5000	
6	Комісія	0,05	
7	C - A =	=B5-B6*B5	

$$C - A = 5000 - 5\% * 5000 = 4750 \text{ (клітина B7)}$$

СТАВКА ✖ ✓ fx =БС(В3;В4;;В5)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	FV(C) =		=БС(В3;В4;;В5)					
3	r =	14%						
4	n =	5						
5	C =	5000						

Аргументы функции

БС

Ставка: В3 = 0,14
 Кпер: В4 = 5
 Плт: = Число
 Пс: В5 = 5000
 Тип: = Число

= -9627,072912

Возвращает будущую стоимость инвестиции на основе периодических постоянных (равных по величине сумм) платежей и постоянной процентной ставки.

Плт: выплата, производимая в каждый период и не меняющаяся за все время выплаты.

[Справка по этой функции](#) Значение: -9 627,07 OK Отмена

	C2	A	=	B	A	=БС(В3;В4;;В5)
	FV(C)	=		14%		-9627,07
	n	=		5		
	C	=		5000		

Рис. 4.2. Визначення повної дохідності фінансової операції для кредитора

СТАВКА ✖ ✓ fx =СТАВКА(В4;;В7;С2)

	A	B	C	D	E	F	G
2	FV(C) =		-9 627,07				
3	r =	14%					
4	n =	5					
5	C =	5000					
6	Комісія	5%					
7	C - A =	4 750					
8	y		=СТАВКА(В4;;В7;С2)				

Аргументы функции

СТАВКА

Кпер: В4 = 5
 Плт: = Число
 Пс: В7 = 4750
 Бс: С2 = -9627,072912
 Тип: = Число

= 0,151755064

Возвращает процентную ставку по аннуитету за один период. Например при годовой процентной ставке в 6% для квартальной ставки используется значение 6%/4.

Бс: будущая стоимость, или баланс наличности, который нужно достичь после последней выплаты (при отсутствии значения Бс принимается равной 0).

[Справка по этой функции](#) Значение: 15,18% OK Отмена

	C8	A	=	B	A	=СТАВКА(В4;;В7;С2)
2	FV(C)	=		-9 627,07		
3	r	=		14%		
4	n	=		5		
5	C	=		5000		
6	Комісія	=		5%		
7	C - A	=		4 750		
8	y	=		15,18%		

Рис. 4.3. Розрахунок річної складної (ефективної) ставки процентів

Одержаний вираз унаочнює той факт, що приріст дохідності кредитора за наявності початкових комісійних виплат залежить лише від співвідношення між повною та реально виданою сумами боргу та строку, на який надано кредит.

$$FV_{5;14\%}(5000) = BC(14\%;5;;5000) = -9627,07 \text{ (клітинка C 2)}$$

Отже, маючи початкову (4750 грн) та кінцеву (- 9627,07 грн) величини, можемо обчислити норму дохідності цієї операції для банку, скориставшись функцією СТАВКА()

$$y = \text{СТАВКА}(5;;4750;-9627,07) = 15,18\% \text{ (клітинка C 8)}$$

Отже, повна дохідність цієї кредитної операції для банку становить 15,18% річних, хоча банком задекларована ставка на рівні 14%.

Еквівалентність простої відсоткової ставки нарощення і та простої облікової ставки

Формула простої ставки відсотків, що еквівалентна простій обліковій ставці, матиме такий вигляд:

$$i_n = \frac{d_n}{1 - nd_n} \quad (4.4)$$

Формула простої облікової ставки, що еквівалентна простій ставці відсотків, має такий вигляд:

$$d_n = \frac{i_n}{1 + ni_n} \quad (4.5)$$

У формулах (4.4-4.5) термін позик (***n***) визначається в роках. Якщо позика вимірюється у днях, то в залежності від бази року (***K***) маємо такі співвідношення між еквівалентними ставками.

Якщо ***K1 = K2 = 360***, де (***K1***) – часова база для нарахувань за ставкою нарощення (***i***), (***K2***) – часова база для нарахувань за обліковою ставкою (***d***), то:

$$i = \frac{360d}{360-dt} \quad d = \frac{360i}{360+it} \quad (4.6)$$

Якщо ***K1 = K2 = 365***, то:

$$i = \frac{365d}{365-dt} \quad d = \frac{365i}{365+it} \quad (4.7)$$

Якщо бази року для ставок будуть різними, тобто база року для ставки відсотків 365 днів, а для облікової ставки 360 днів (це особливість банківського обліку), тоді використовують такі формули, тобто $K1 = 365$ (366), а $K2 = 360$, то матимемо:

$$d = \frac{360i}{365+it} \qquad i = \frac{365d}{360-dt} \qquad (4.8)$$

Формули еквівалентності простої облікової ставки і ставки складних відсотків мають такий вигляд:

$$i_{\text{скл}} = (1 - nd)^{-\frac{1}{n}} - 1 \qquad d = \frac{1}{n} [1 - (1 + i_{\text{скл}})^{-n}] \qquad (4.9)$$

Еквівалентні складна ставка відсотків і складна облікова ставка розраховуються за формулами:

$$i_c = \frac{d_c}{1-d_c} \qquad d_c = \frac{i_c}{1+i_c} \qquad (4.10)$$

Якщо складні відсотки нараховуються m разів на рік, тоді при рівних часових базах нарахування відсотків формули еквівалентності будуть такими:

$$j = m(1 - nd)^{-\frac{1}{mn}} - 1 \qquad d = \frac{1}{n} \left[1 - \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{-mn} \right] \qquad (4.11)$$

Безперервна і дискретна ставки зв'язані між собою:

$$i_e = e^\delta - 1 \qquad \delta = \ln(1 + i) \qquad (4.12)$$

4.3. Середні величини в фінансових розрахунках

Для кількох фінансових операцій може виникати необхідність розрахунку середньої відсоткової ставки за всіма операціями. Така середня відсоткова ставка є еквівалентною величиною. Розглянемо основні формули розрахунку середніх відсоткових ставок для різних фінансових операцій.

У випадку, коли нараховується проста відсоткова ставка та суми позик однакові, середня відсоткова ставка визначається за формулою середньої арифметичної зваженої, де вагами слугують часові періоди, протягом яких діяла дана ставка:

$$1 + ni_0 = 1 + \sum_{t=1}^k n_t i_t, \quad n = \sum n_t \qquad (4.13)$$

отримаємо еквівалентну ставку:

$$i_{\text{серед.}} = \frac{\sum n_t i_t}{n} \qquad (4.14)$$

де (i_t) – середня відсоткова ставка в періоді (n_t) ;
 (n_t) – термін дії кожної ставки (i_t) .

Ставка (i_0) дає такий самий дохід за час (n) , що й сукупність ставок, які змінюються за відповідні періоди. Аналогічно для простих облікових ставок $(d_1), (d_2), \dots, (d_k)$ знаходимо їх середню (d_0) :

$$d_0 = \frac{\sum n_t d_t}{N} \quad (4.15)$$

Якщо нарахування відсотків робиться на основі послідовних фіксованих ставок складних відсотків $(i_1), (i_2), \dots, (i_k)$, які нараховуються в інтервалах, що дорівнюють $(n_1), (n_2), \dots, (n_k)$ одиниць часу, то:

$$i_{\text{скл.серед.}} = \sqrt[N]{(1 + i_1)^{n_1} (1 + i_2)^{n_2} \dots (1 + i_k)^{n_k}} - 1 \quad (4.16)$$

Варіанти заміни одного фінансового зобов'язання іншим можуть бути такими:

- 1) переноситься дата погашення боргу (відстрочка платежу або дострокове погашення);
- 2) один платіж замінюється кількома з різними термінами сплати;
- 3) кілька платежів замінюються одним, при цьому переносять кінцеву дату погашення.

Приклад 4.1. Нехай складний відсоток за позикою становить 15% річних плюс маржа 3% в перші два роки і 4% в наступні роки. Знайти величину накопиченого за шість років боргу, якщо позичальник займав 50 000 грн.

Розв'язання. Умовні позначення:

n – кількість років, за які здійснюється нарахування відсотків по кредиту;

P – початкова сума боргу, грн.;

I – складна річна процентна ставка, %;

S – майбутня сума грошей після нарахування відсотків, тобто сума накопиченого за шість років боргу, грн.;

I – сума відсоткових грошей за період, грн.;

$i_{\text{скл.сер}}$ – середня складна процентна ставка за період (6 років), %.

- 1) Сума накопиченого за шість років боргу (S) :

$$S = P(1 + i_1)^{n_1} (1 + i_2)^{n_2}$$

$$S = P(1 + i_1)^{n_1} (1 + i_2)^{n_2} = 50000(1 + 0.18)^2 * (1 + 0.19)^4 = 139500 \text{ грн.}$$

- 2) Сума нарахованих відсотків за 6 років (I) :

$$I = S - P = 139500 - 50000 = 89\,500 \text{ грн.}$$

3) Середня складна процентна ставка впродовж 6 років:

$$i_{\text{скл.сер.}} = \sqrt[n]{((1 + i_1)^{n_1}(1 + i_2)^{n_2} \dots)} - 1 = \sqrt[6]{(1 + 0.18)^2 (1 + 0.19)^4} - 1 = 0.186 \text{ або } 18,6\%$$

4) Сума накопиченого за шість років боргу (**S**) з використанням середньої складної процентної ставки:

$$S = P (1 + i_{\text{скл.сер.}})^{n_t}$$

$$S = 50000(1 + 0,186)^6 = 139\,500 \text{ грн.}$$

Отже, за угодою сторін фінансової операції можливо замінити всі складні відсоткові ставки еквівалентною до них середньою складною процентною ставкою, при цьому не змінивши фінансових відносин сторін.

4.4. Консолідація платежів

Консолідування заборгованості

Якщо виникає потреба в об'єднанні кількох фінансових операцій в одну (наприклад, якщо фірма взяла кілька кредитів у одному банку), сторони фінансової операції можуть домовитись про консолідацію платежів. З метою консолідації кілька фінансових операцій об'єднуються у одну. Звичайно, таке об'єднання має базуватись на еквівалентності.

Консолідуванням називається об'єднання кількох боргових зобов'язань в одне, а розмір об'єданого платежу називається консолідованим платежем.

У випадку консолідації платежів сторони фінансової операції повинні домовитись про термін консолідованого платежу, який може перевищувати встановлені раніше терміни платежів, або може встановлюватись будь-який термін. Для консолідації декількох платежів в один за умови, що термін нового консолідованого платежу більше раніше встановлених термінів (тобто) використовується проста відсоткова ставка і рівняння еквівалентності має вигляд:

$$S_0 = \sum S_j (1 + t_j i) \quad (4.17)$$

де – S_0 нарощена сума консолідованого платежу;

S_1, S_2, S_n - платежі, що підлягають консолідації, з термінами сплати $n_1, n_2, \dots, n_m$.

Приклад 4.2. Визначимо розмір консолідованого платежу для кожної фірми за умови, що нараховуються прості відсотки за ставкою 10 % річних, термін погашення консолідованого платежу – 12 міс.

Філія комерційного банку видала протягом року п'ять позик двом фірмам ("Альфа" та "Бета"). Необхідно визначити середній розмір позики, отриманої кожною фірмою, та всіх позик, виданих банком. Вихідні дані наведені в табл. 4.1.

Розмір консолідованого платежу для кожної фірми:

$$S_0 (A) = 262,50(1+(12-6)*0,1)+213,33(1+(12-8)*0,1)+512,50(1+(12-3)*0,1) = 1,047 \text{ тис. грн.}$$

$$S_0 (Б) = 610(1+10*0,1)+465(1+8*0,1) = 1156,8 \text{ тис. грн.}$$

Нехай платежі $S_1, S_2, \dots, S_n$ зі строками відповідно $n_1, n_2, \dots, n_m$ об'єднуються в один у сумі S_0 і строком n_0 .

Таблиця 4.1

Вихідні дані

Квартали	Розмір позики, тис. грн	Термін позики, місяців	Нарощена сума позики, тис. грн
Фірма "Альфа"			
I	250	6	262,50
II	200	8	213,33
IV	500	3	512,50
Фірма "Бета"			
II	600	2	610,00
III	450	4	465,00

Сума консолідованих платежів за умови, що $n_0 > n_1, n_2, \dots, n_m$, для простої ставки відсотків становить
де t_j - часовий інтервал між строками n_0 і n_j , $t_j = n_0 - n_j$.

Для простої облікової ставки:

$$S_0 = \sum S_j (1 - t_j d_j)^{-1} \quad (4.18)$$

Для складної ставки відсотків:

$$S_0 = \sum S_j (1 + i_j)^{t_j}$$

Для складної облікової ставки:

$$S_0 = \sum S_j (1 - d)^{-t_j}$$

У загальному випадку величину S_0 знаходимо як суму нарощених або дисконтованих платежів S_j

$$S_0 = \sum_j S_j (1 + t_j i) + \sum_k S_k (1 + t_k i)^{-1} \quad (4.19)$$

де S_j — сума об'єднаних платежів зі строками n_j , $n_j < n_0$;

S_k — сума платежів, які об'єднуються зі строками n_k , $n_k > n_0$.

Відповідно $t_j = n_0 - n_j$; $t_k = n_k - n_0$.

Якщо термін об'єданого платежу менший за терміни консолідованих платежів, тобто виконується умова, що $n_0 < n_1, n_2, \dots, n_k$, тоді для простої ставки відсотків:

$$S_0 = \sum S_k (1 + t_k i_k)^{-1} \quad (4.20)$$

де $t_k = n_k - n_0$.

для простої облікової ставки:

$$S_0 = \sum S_k (1 - t_k d_k) \quad (4.21)$$

для складної ставки відсотків:

$$S_0 = \sum S_k (1 + i_k)^{-t_k}$$

для складної облікової ставки

$$S_0 = \sum S_k (1 - d_k)^{t_k}$$

Визначення строку консолідованого платежу при заданій сумі $-n_0$.

Запишемо рівняння еквівалентності на початкову дату:

$$P_0 = S_0 (1 + n_0 i)^{-1} = \sum S_j (1 + n_j i)^{-1} \quad (4.22)$$

Позначимо сучасну величину консолідованих платежів як P_0 :

$$P_0 = \sum S_j (1 + n_j i)^{-1} \quad n_0 = \frac{1}{i} \left(\frac{S}{P_0} - 1 \right) \quad (4.23)$$

Приклад 4.3. Платежі в розмірі 10, 20, 15 тис. грн виплачуються через 50, 80, 150 днів після деякої дати. Вирішено замінити їх одним платежем, на суму 50 тис. грн. за умови що $i = 10\%$.

Звичайно, що таке розв'язання передбачає деяку відстрочку. Знайдемо строк консолідованого платежу за умови, . За умовами задачі:

$$P_0 = 10 \left(1 + \frac{50}{365} 0,1 \right)^{-1} + 20 \left(1 + \frac{80}{365} 0,1 \right)^{-1} + 15 \left(1 + \frac{150}{365} 0,1 \right)^{-1} = 46,19 \text{ тис. грн,}$$

$$n_0 = \frac{1}{0,1} \left(\frac{50}{46,19} - 1 \right) = 0,82485 \text{ року, або } 301 \text{ день.}$$

В умовах нестабільного економічного середовища одна зі сторін фінансової операції може потребувати зміни умов комерційного контракту. Найчастіше такі зміни пов'язані зі збільшенням терміну платежу або їх консолідацією, однак сторони можуть обговорювати зміну будь якого-пара-метру чи параметрів контракту. Такі зміни повинні бути беззбитковими для обох сторін фінансової операції, а отже, мають базуватись на принципі фінансової еквівалентності. Зі зміною умов комерційних угод далеко не завжди можна знайти рішення шляхом підсумовування наращених сум і дисконтованих платежів. Найчастіше для вирішення цього завдання немає готових формул. Розрахунок величини, що відображає результат зміни умов угоди, можна виконати, використовуючи принцип еквівалентності та його математичний вираз – рівняння еквівалентності.

Якщо приведення платежів здійснюється на деяку початкову дату, то отримаємо такі рівняння еквівалентності в загальному вигляді. З використанням простих відсотків:

$$\sum S_j(1 + n_j i) = \sum S_k(1 + n_k i) \quad (4.24)$$

де S_j, n_j - параметри платежів, що змінюються;

S_k, n_k - параметри нових платежів.

За момент приведення платежів можуть бути прийняті різні дати: початкова дата, тобто дата надання кредиту; дата, яка перебуває в середині терміну погашення кредиту тощо. Тому конкретний вид рівняння залежить від умов контрактів.

Питання для самоконтролю

1. У чому полягає сутність поняття еквівалентності в фінансових роз-рахунках?
2. Як скласти рівняння для визначення еквівалентних відсоткових ставок?
3. Назвіть основні види еквівалентних ставок.
4. Чи можна знайти співвідношення еквівалентності для будь-якої пари різних ставок?
5. Чи можна розрахувати еквівалентні ставки для фінансових операцій з різними часовими базами К?
6. Для аналізу яких фінансових операцій використовують середні показники?
7. Чи можна розрахувати середню відсоткову ставку, якщо суми позик різні?
8. Назвіть основні середні показники фінансових операцій та методи їх розрахунку.
9. Як визначається число оборотів окремих позик за умови їх без-перервної оборотності?
10. Як визначається річний оборот позики?
11. Середній залишок усіх позик з урахуванням кількості оборотів розраховується за даними щомісячної чи щоквартальної фінансової звітності?
12. Що показує середній термін користування позиками?



Тестові завдання

1. Формула для розрахунку еквівалентної простої ставки відсотків і простої облікової ставки має вигляд:

а) $i_n = \frac{d_n}{1 - nd_n}$

в) $i_c = \frac{d_c}{1 - dc}$

б) $d_n = \frac{i_n}{1 + ni_n}$

г) $dc = \frac{i_c}{1 + i_c}$

2. Забезпечення еквівалентності простої ставки відсотків і складної процентної ставки досягається дотриманням нерівності:

а) $i_e = e^{\delta} - 1$

в) $i_{(c)} = \sqrt[n]{1 + ni_n} - 1.$

б) $i = \frac{365 \cdot d}{365 - d \cdot t}$

г) $i_c = \frac{d_c}{1 - dc}$

3. Еквівалентність простої облікової ставки і ставки складних відсотків визначається за формулою:

а) $i_{скл} = (1 - nd)^{\frac{1}{n}} - 1;$

б) $d = \frac{1}{n} (1 - (1 + i_{скл})^{-n})$

в) обидві формули правильні

4. Середня відсоткова ставка для однакових сум позик визначається за формулою:

а) $i_{серед.} = \frac{\sum n_t i_t}{N}.$

б) $d_0 = \frac{\sum n_t d_t}{N}.$

в) $i_{скл.серед.} = \sqrt[N]{(1 + i_1)^{n_1} (1 + i_2)^{n_2} \dots (1 + i_k)^{n_k}} - 1.$

5. Якщо партнери заздалегідь обумовлюють суму консолідованого платежу, для забезпечення еквівалентності необхідно розрахувати:

- а) сучасну величину консолідованих платежів;
- б) термін сплати консолідованого платежу;
- в) відсоткову ставку, що використовується для консолідації;

г) усі відповіді правильні.

6. Середнє відсоткова ставка, якщо нарахування відсотків робиться на основі послідовних фіксованих ставок складних відсотків розраховується за формулою:

а) $d_0 = \frac{\sum n_t d_t}{N}$.

б) $i_{\text{скл.серед.}} = \sqrt[N]{(1+i_1)^{n_1} (1+i_2)^{n_2} \dots (1+i_k)^{n_k}} - 1$.

в) $i_{\text{серед.}} = \frac{\sum n_t i_t}{N}$.

г) усі відповіді правильні

7. У розрахунку еквівалентності слід враховувати, що необхідно обчислити свою еквівалентну ставку:

- а) для кожного періоду нарощення;
- б) для кожного терміну нарощення без урахування періоду;
- в) немає правильної відповіді.

8. Чи можна розрахувати еквівалентні ставки, якщо в фінансових операціях використовуються різні часові бази 360 і 365:

- а) так;
- б) ні.

9. Основним принципом зміни умов угоди (контракту) є:

- а) принцип фінансової еквівалентності;
- б) відсоткова ставка;
- в) вартість інвестиційних ресурсів;
- г) чиста поточна вартість.

10. Консолідація платежів – це:

- а) потік платежів, усі члени якого позитивні величини, а інтервали часу між платежами однакові;
- б) об'єднання кількох платежів або заміна разового платежу рядом послідовних платежів;
- в) частина платежу, витрачена за користування залученими коштами;
- г) сума поточних вартостей всіх грошових потоків.

11. Хто з учасників отримує збиток від консолідації платежу:

- а) кредитор;
- б) позичальник;
- в) кредитор, позичальник;
- г) немає правильної відповіді.

12. Ставки, що забезпечують рівноцінність фінансових наслідків, називають:

- а) рівнозначними;
- б) рівними;

в) еквівалентними.

13. У формулі показник означає:

- а) число днів позики;
- б) термін позики в роках;
- в) число днів у році;
- г) немає правильної відповіді.

14. Еквівалентними називають ставки, що забезпечують рівність:

- а) дисконтних множників;
- б) множників нарощення;
- в) фінансових наслідків;
- г) усі відповіді правильні.

ТЕМА 5. ПОТОКИ ПЛАТЕЖІВ І ФІНАНСОВІ РЕНТИ

Питання до розгляду

5.1. Види потоків платежів: характеристика та основні параметри

5.2. Основні поняття та класифікація фінансових рент.

5.3. Методика розрахунку фінансових рент за окремими видами.

5.4. Застосування довідкових фінансових таблиць та програмного забезпечення MS Excel у фінансових обчисленнях для потоків платежів

5.1. Види потоків платежів: характеристика та основні параметри

Сучасні фінансово-кредитні розрахунки часто передбачають не **окремі платежі**, а їхню певну послідовність, тобто – **потоки платежів** у часі. З погляду фінансової математики, всі потоки платежів (грошові потоки) умовно поділяють на **додатні** (приплив коштів – доходи та інші надходження) та **від'ємні** (вилучення коштів – витрати та інші виплати). Наприклад, погашення банківських кредитів та інших заборгованостей, орендні та комунальні виплати, операційні витрати тощо, з позиції суб'єкта господарської діяльності є **від'ємним** грошовим потоком. А, наприклад, виручка від реалізації товарів, робіт, послуг, надходження від інвестиційної діяльності, дивіденди по акціях тощо, є для нього **додатним** грошовим потоком.

Взагалі, поняття **грошового потоку (поток платежів)** є одним із основоположних у фінансовій математиці, оскільки описує будь-які послідовні в часі платежі.

Потік платежів (cash flows stream) – це послідовність (ряд) платежів у часі зі зазначенням їх величин та знаків, а також моментів часу, у які їх здійснюють. Окремий елемент такого ряду платежів – це **член потоку (cash flow)**. Якщо такий окремий платіж має знак «плюс» — це **приплив (надходження)** коштів, знак «мінус» — **вилучення (виплата)** коштів.

Таким чином, кожний грошовий потік задається двома параметрами:

- вартісними величинами (абсолютними розмірами послідовних платежів із зазначенням знаків «плюс» чи «мінус»);
- часовими характеристиками (послідовністю дат або термінів платежів).

Надалі, для математичного опису грошових потоків, використовуватимемо наступні позначення:

A - ($A_k ; tk$) - потік платежів;

A_k - платежі (члени потоку);

tk - моменти часу, в які здійснюють відповідні платежі **$tk = 1;n$** .

Кількісний аналіз внутрішньої (інвестиційної) вартості переважної більшості об'єктів оцінки, зокрема фінансових та матеріальних активів, передбачає застосування методу **дисконтування грошових потоків**, які очікують від володіння (використання) цим об'єктом оцінки. Причому, зазвичай дисконтування відбувається саме за методом **складних процентів**. Крім того, у фінансових обчисленнях щодо потоків платежів вважається, що ставка приведення (дисконтування) **i** відома та здебільшого **незмінна** протягом усієї тривалості потоку.

У відповідності із Законом України «Про оцінку майна, майнових прав та професійну оціночну діяльність в Україні», майном, яке може оцінюватися, вважаються об'єкти в матеріальній формі, будівлі та споруди(включаючи їх невід'ємні частини), машини, обладнання, транспортні засоби тощо; паї, цінні папери; нематеріальні активи, в тому числі об'єкти права інтелектуальної власності; цілісні майнові комплекси всіх форм власності.

В нашій державі існують Національні стандарти оцінки, які визначають основні дефініції оціночної діяльності, зокрема поняття ринкової вартості, принципи оцінки, методичні підходи та особливості проведення оцінки відповідного майна залежно від мети оцінки.

Основоположним поняттям практичної оціночної діяльності є поняття чистого грошового потоку (чистого операційного доходу). Надалі, у фінансових обчисленнях щодо потоків платежів, якщо не обумовлене інше, розглядаючи грошові потоки ми матимемо на увазі саме чистий операційний дохід.

Згідно Національного стандарту оцінки № 2, чистий операційний дохід – це дохід, що визначається як різниця між валовим доходом та операційними витратами. Валовий дохід – це сукупне надходження коштів, які планують отримати від реалізації прав, пов'язаних з об'єктом оцінки. І, відповідно, операційні витрати – це прогнозовані витрати власника, пов'язані з отриманням валового доходу. До операційних не належать витрати на обслуговування боргу та податків, що сплачуються від величини прибутку, отриманого від використання об'єкта оцінки, єдиного податку, фіксованого податку.

Крім того, у Національному стандарті оцінки № 1, зазначено, що грошовий потік — це сукупність прогнозованих або фактичних надходжень від діяльності (використання) об'єкта оцінки. Відповідно, чистий грошовий потік (чистий операційний дохід) – це сукупність прогнозованих або фактичних надходжень від використання об'єкта оцінки після вирахування усіх витрат, пов'язаних з отриманням цієї суми.

Таким чином, фінансові обчислення щодо потоків платежів (грошових потоків) часто стосуються не лише фактичних (детермінованих) сум коштів, але й прогнозованих, тобто

майбутніх надходжень, отримання яких носить імовірнісний характер. Зазвичай, оцінювання грошових потоків є спрощеним, без врахування ризику неотримання коштів. Проте, роблячи певні фінансові обчислення, необхідно чітко усвідомлювати, що визначені вартісні оцінки є лише орієнтовними, що спричинено невизначеністю щодо своєчасного надходження у повному обсязі майбутнього потоку платежів.

Основними вартісними оцінками потоку платежів, визначеної тривалості, є дві його характеристики:

- початкова (теперішня) величина грошового потоку;
- кінцева (майбутня) величина грошового потоку.

Зазначимо, що початкову вартість потоку можна знайти для будь-якого потоку платежів, а кінцеву вартість лише у разі, якщо потік скінчений щодо кількості платежів у часі. Користуючись формулами нарощення та дисконтування складних процентів, можна визначити вартість грошового потоку на довільний момент часу.

Величиною потоку в момент називають суму платежів T потоку, дисконтованих до цього моменту часу:

$$A(T) = \sum_{k=1}^T A_k (1+i)^{T-t_k}$$

Якщо відомо величину потоку в якийсь момент T , то завжди можна знайти величину потоку в будь-який інший момент часу T^1 :

$$A(T^1) = A(T) * (1+i)^{T^1-T}$$

Приклад 5.1.

Існує потік платежів $A\{(-2000,1);(1000,2);2000,3\}$. Знайти основні вартісні характеристики цього потоку, якщо ставка $i = 10\%$. За умовами задачі тривалість потоку – три періоди. Маємо виплату коштів після першого періоду та надходження коштів після другого та третього періоду.

Теперішня величина потоку за формулою

$$PVA = \frac{S_1}{1+i} + \frac{S_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{S_n}{(1+i)^n},$$

Тоді, кінцева величина потоку за формулою

$$PVA = \frac{-2000}{(1+0.01)} + \frac{1000}{(1+0.01)^2} + \frac{2000}{(1+0.01)^3} = 679,8$$

Отже, для цього потоку платежів приведена вартість надходжень перевищує приведену вартість виплат коштів.

5.2. Основні поняття та класифікація фінансових рент

У розглянутих фінансових операціях нарахування відсотків і дисконтування здійснювалося відносно разового внеску (депозиту або позики), коли погашення нарощеної суми здійснюється одним платежем в кінці терміну. Однак фінансова операція може передбачати і ряд платежів, роз-поділених у часі.

Ряд таких послідовних платежів називають *поток*ом платежів. Потоки платежів застосовують для погашення середньо- та довгострокових кредитів, в інвестуванні, страхуванні, створенні цільових грошових фондів та ін.

Ряд послідовних фіксованих платежів, здійснених через рівні проміжки часу, називають **фінансовою рентою**, або **ануїтетом**.

Фінансова рента (надалі – рента) може бути охарактеризована низкою параметрів:

Параметри фінансової ренти	Характеристика
Член ренти	Величина кожного окремого платежу
Період ренти	Часовий інтервал між двома платежами
Термін ренти	Час від початку реалізації ренти до моменту нарахування останнього платежу
Відсоткова ставка	Ставка, яка використовується для розрахунку нарощення та дисконтування платежів, що складають ренту.

Крім основних, рента може бути також охарактеризована такими параметрами, як: частота нарахування відсотків протягом року (два рази на рік, щоквартально, щомісячно), кількість платежів протягом року, момент здійснення платежу (на початку, в середині, або в кінці періоду).

Основними узагальнюючими показниками ренти, які використовують у фінансових розрахунках, є її нарощена та сучасна величини. Ці показники застосовують для аналізу та вибору оптимальних умов контракту.

Нарощена сума ренти – це сума всіх членів потоку платежів з нарахованими на них відсотками на кінець терміну, тобто на дату останньої виплати. Нарощена сума показує, яку величину становитиме капітал, внесений через рівні проміжки часу протягом усього терміну ренти разом з нарахованими відсотками [28].

Сучасна величина потоку платежів – сума всіх його членів, зменшена (дисконтована) на величину відсоткової ставки на певний момент часу, що співпадає з початком потоку платежів або передує йому. Сучасна величина показує, яку суму слід було б мати спочатку, щоб, розбивши її на рівні внески, на які б нараховувались установлені відсотки протягом терміну ренти, можна було забезпечити отримання нарощеної суми.

Використовуючи ці ознаки класифікації, можна виконати *якісний аналіз та дати характеристику певним потокам платежів*. Наприклад, виплата дивідендів за простими акціями – це умовна, вічна рента постнумерандо.

Залежно від параметрів використовують різні види фінансових рент.

Класифікація видів фінансових рент показана у табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Види фінансових рент

Класифікаційні ознаки	Класифікаційні ознаки
За кількістю платежів на рік	Річні – ренти, за якими платежі здійснюються раз на рік
	Р-термінові – ренти, за якими платежі здійснюються кілька разів на рік
	Ренти, у яких період між платежами може перевищувати рік
За частотою здійснення платежів	Дискретні – ренти, у яких заданий період між платежами
	Безперервні – ренти, у яких платежі здійснюються так часто, що їх можна розглядати як безперервні
Залежно від частоти нарахування відсотків	Ренти з нарахуванням відсотків один раз на рік
	Ренти з нарахуванням відсотків кілька разів на рік
	Ренти з безперервним нарахуванням відсотків
З точки зору стабільності розміру платежів	Постійні, у яких платежі – члени ренти рівні між собою
	Змінні, у яких платежі – члени ренти змінюються
За наявністю додаткових умов	Вірні – ренти, виплати яких не обмежені певними умовами
	Умовні – ренти, виплати яких обумовлені настанням якої-небудь події (наприклад, страхові внески, що вносяться до настання страхового випадку)
За кількістю членів ренти	Обмежені – ренти, що мають кінцеве число членів
	Вічні – ренти з нескінченним числом членів
За моментом початку реалізації рентних платежів	Негайні, коли платежі здійснюються відразу ж після укладення контракту
	Відкладені (відстрочені), термін реалізації яких відкладається на вказаний у контракті час
За моментом виплат членів ренти	Постнумерандо, в яких платежі здійснюються в кінці відповідних періодів (року, півріччя і т.д.)
	Пренумерандо, в яких платежі здійснюються на початку відповідних періодів
	Ренти, в яких передбачається надходження платежів в середині періоду

Основними вартісними оцінками будь-якої скінченої фінансової ренти є дві її характеристики:

1. **нарощена (кінцева) величина ренти $S(F)$** – це сума всіх членів ренти з нарахованими на них процентами на кінець її терміну існування (на дату останнього платежу).

2. **теперішня (початкова) величина ренти PVA** – це сума всіх членів ренти, дисконтованих на початок її терміну існування. Іноді цю величину називають *капіталізованою ціною ренти*.

Для фінансової ренти, як і для будь-якого іншого потоку платежів, можна знайти її вартісну оцінку на довільний момент часу з інтервалу існування цієї ренти. Однак, розповсюдження отримали лише дві оцінки – на початковий та на кінцевий момент часу. Вартісні характеристики ренти залежать, зокрема, від моменту платежу (на початку, всередині, наприкінці періоду тощо). *Найчастіше застосовують ренти постнумерандо.*

5.3. Методика розрахунку окремих видів фінансових рент

Майбутня вартість анuitету

Узагальнюючими показниками анuitету є його майбутня і теперішня вартість.

Майбутня вартість анuitету — це сума всіх членів потоку платежів з нарахованими на них процентами на кінець періоду, тобто на дату останньої виплати. Вона показує, яку величину представлятиме капітал, що вкладається через рівні проміжки часу впродовж всього терміну анuitету разом з нарахованими процентами.

Річна рента постнумерандо (звичайний анuitет)

Річна рента постнумерандо (звичайний анuitет) передбачає, що всі додатні, періодичні платежі цього грошового потоку здійснюються наприкінці року. Досить часто при цьому, ще й розміри періодичних платежів є однаковими (рівними), тобто рента є постійною.

Фінансові розрахунки за постійними платежами постнумерандо застосовують у більшості лізингових угод, схемах споживчого кредитування, купонних виплатах за облігаціями тощо. Саме такий вид фінансових рент є найрозповсюдженішим у практиці фінансово-кредитних операцій.

Річна рента

Коли платежі здійснюються щороку впродовж n років при процентній ставці i , майбутнє значення вартості анuitету дорівнюватиме:

$$F = A_1(1+i)^{n-1} + A_2(1+i)^{n-2} + \dots + A_n(1+i)^0 \quad (5.1)$$

де F - майбутня вартість анuitету;

$A_1, A_2, \dots, A_n$ - суми, що сплачуються в кінці кожного періоду в анuitет;

A - щорічний платіж;

i - процентна ставка;

n - кількість років.

Якщо платежі в кожен період дорівнюють $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$, то рівняння (5.1) може бути переписано ось яким чином:

$$F = A((1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \dots + (1+i)) \quad (5.2)$$

Перемножуючи обидві сторони рівняння (5.1) на $(1+i)$ й віднімаючи з нього рівняння (5.2), отримаємо майбутню вартість анuitету:

$$F_A = A \frac{(1+i)^n - 1}{i} = A * s_{n,i} \quad (5.3)$$

де $\frac{(1+i)^n - 1}{i} = s_{n,i}$ - коефіцієнт нарощення ренти

Річна рента з нарахуванням відсотків m раз на рік

$$F_A = A \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1} = A * s_{n, j/m} \quad (5.4)$$

де $\frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1} = s_{n, j/m}$ - коефіцієнт нарощення ренти

Рента p -термінова ($m = p$)

Нарощена сума ($F_A = S$) анuitету постнумерандо (платежі здійснюються p разів на рік) для випадку, коли момент нарахування процентів (відсотки нараховуються m раз на рік) і момент платежу збігаються ($p = m$), знаходиться за формулою:

$$F_A = A \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{j} = A * s_{mn, j/m} \quad (5.5)$$

де $\frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{j} = s_{mn, j/m}$ - коефіцієнт нарощення ренти

Рента p -термінова ($m = 1$)

Нехай рента виплачується p раз на рік рівними сумами, відсотки нараховуються раз в кінці року. Якщо A – виплата за рік, то кожен раз виплачується сума R/p . Загальна кількість платежів ренти дорівнює np .

$$F_A = A \frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} = A * s^{(p)}_{n,i} \quad (5.6)$$

де $\frac{(1+i)^n - 1}{[(1+i)^{1/p} - 1]} = s^{(p)}_{n,i}$ - коефіцієнт нарощення ренти

Рента р-термінова ($p \neq m$)

Нехай рента виплачується p раз на рік рівними сумами, відсотки нараховуються m раз у рік, а число виплат не дорівнює числу нарахування відсотків $p \neq m$.

$$F_A = A \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1 \right]} = A * s^{(p)}_{mn, j/m} \quad (5.7)$$

де $\frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{\left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1 \right]} = s^{(p)}_{mn, j/m}$ - коефіцієнт нарощення ренти

Розв'яжемо рівняння для F_{post} і PVA_{post} відносно величини **щорічного платежу A** .

$$A = \frac{F_A * i}{(1+i)^n - 1} \qquad A = \frac{PVA * i}{1 - (1+i)^{-n}} \quad (5.8)$$

Величина $((1+i)^n - 1)/i$ називається процентним фактором майбутньої вартості ануїтета (або множником нарощування звичайного ануїтету (*Future Value Interest Factor Annuities, FVIFA*), що може бути визначений шляхом прямого обчислення на комп'ютері, або його значення може бути знайдене зі спеціальних таблиць. Позначимо його як $PFFVA_{n,i}$.

Таким чином, користуючись рівнянням (5.3), знаючи *три параметри*: розмір щорічного платежу **A** , кількість років **n** та ставку дохідності **i** , завжди можна знайти теперішню та майбутню величини звичайного ануїтету.

Приклад 5.1. Майбутня вартість ануїтета

Інвестор планує вкладати \$3000 в ануїтет у кінці кожного року впродовж 10 років. Якщо проценти в розмірі 9% нараховуються щорічно, то яку суму через 10 років може одержати інвестор?

Розв'язання. Використовуємо формулу (5.3):

$$F = A \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \$3000 \frac{(1+0.09)^{10} - 1}{0.09} = \$45578.79.$$

У кінці 10 року інвестор одержить \$45578.79.

Річна рента пренумерандо (авансовий ануїтет)

Річна рента пренумерандо (авансовий ануїтет) передбачає, що всі додатні, періодичні платежі цього грошового потоку, на відміну від звичайних рент (постнумерандо), здійснюються не наприкінці, а на початку року (авансом).

Формула (5.3) — це формула майбутньої вартості звичайного ануїтету, бо всі платежі (надходження) грошових коштів відбуваються в кінці періодів. Коли платежі відбуваються на початку кожного періоду, то в цьому разі ми маємо справу з авансовим ануїтетом. Для авансового ануїтету, з погляду нарахування процентів, кожний член ренти «спрацьовує» на один раз більше, ніж для звичайного ануїтету. З врахуванням формули (5.3), майбутня (нарощена) **вартість авансового ануїтету визначається за формулою:**

$$F_A = F(1 + i) = A \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] (1 + i) \quad (5.9)$$

Приклад 5.2. Майбутня вартість авансового ануїтету

Інвестор планує вкладати \$2000 в ануїтет на початку кожного року впродовж 10 років. Визначте суму, яку отримає інвестор через 10 років за умови, що проценти нараховуються щорічно в розмірі 6%.

Розв'язання. Використовуємо формулу (5.3) для обчислення майбутньої вартості авансового ануїтету:

$$F_A = F(1 + i) = A \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] (1 + i) = \$2000 \left[\frac{(1 + 0.06)^{10} - 1}{0.06} \right] (1 + 0.06) = \$26361.597$$

У цілому ряді практичних задач використовується значення не процентного фактору майбутньої вартості ануїтету, а його зворотна величина, яку називають **процентним фактором фонду відшкодування**.

Припустимо, що величина F — це майбутня вартість боргових зобов'язань і для її погашення необхідно створити фонд відшкодування. Для його створення потрібно в кінці кожного періоду вносити певну суму коштів, рівну величині A . Таким чином, **величина щорічного внеску до фонду відшкодування** дорівнюватиме (див. 5.4):

$$A = \frac{F * i}{(1 + i)^n - 1}$$

Приклад 5.3. Фонд відшкодування

Корпорації через 15 років необхідно покрити витрати за випуск облігацій у сумі \$10000000. Вона створює для цього фонд відшкодування і сподівається отримувати 8% щорічно від використання коштів фонду. Яку суму щорічно корпорація повинна вкладати до фонду, щоб акумулювати повністю \$10000000, якщо щорічні платежі вносяться до фонду в кінці кожного року?

Розв'язання. Якщо щорічні платежі A до фонду вносяться в кінці кожного року, використовуємо формулу для визначення майбутньої вартості звичайного ануїтету:

$$A = F \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] = \$10000000 \left[\frac{0.08}{(1+0.08)^{15} - 1} \right] = \$368295.45.$$

Корпорація повинна щорічно вкладати до фонду \$368295.45 упродовж 15 років, щоб одержати \$10000000.

Багаторазові вкладення грошей

Нехай **внески (ВКЛ)** у банк клієнт робить **наприкінці кожного року**. Тоді загальна формула для визначення суми грошей, що клієнт матиме в банку через “n” років. Число внесків дорівнює “n”:

$$S = P_1 \left[1 + \frac{i_n}{100} (n-1) \right] + P_2 \left[1 + \frac{i_n}{100} (n-2) \right] + \dots + P_n * 1 \quad (5.10)$$

Якщо припустити, що $P_1=P_2=\dots=P_n=P$, то формула матиме наступний вигляд:

$$S = P \left[n + \frac{i_n}{100} \sum_{n=1}^n (n-1) \right].$$

Враховуючи, що $\sum_{n=1}^n (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ одержимо остаточну формулу:

$$S = P * n \left(1 + \frac{i_n}{100} \frac{n-1}{2} \right) \quad (5.11)$$

Розглянемо тепер ситуацію, коли внески робляться **на початку кожного року**. Складемо спочатку загальну формулу для суми внесків через “n” років; число внесків також дорівнює “n”:

$$S = P_1 \left[1 + \frac{i_n}{100} n \right] + P_2 \left[1 + \frac{i_n}{100} (n-1) \right] + \dots + P_n \left[1 + \frac{i_n}{100} \right] \quad (5.12)$$

Якщо припустити, що $P_1=P_2=\dots=P_n=P$, то формула (2.10) матиме наступний вигляд:

$$S = P \left[n + \frac{i_n}{100} \sum_{n=1}^n n \right]$$

Враховуючи, що $\sum_{n=1}^n n = \frac{n(n+1)}{2}$ одержимо остаточну формулу:

$$S = P * n \left[1 + \frac{i_n}{100} \frac{n+1}{2} \right] \quad (5.13)$$

Приклад 5.4. Багаторазові вкладення грошей

Фізична особа бажає розмістити на депозитний рахунок в банк кошти в сумі 100 000,00 грн. під 12 % річних терміном на 5 років. Потрібно визначити:

- 1) суму грошей, що клієнт матиме в банку через 5 років за умови одноразового вкладення грошей у сумі 100 000,00 на початку першого року розміщення.
- 2) суму грошей, що клієнт матиме в банку через 5 років за умови щорічного вкладення грошей у сумі 20 000,00 наприкінці кожного року.
- 3) суму грошей, що клієнт матиме в банку через 5 років за умови вкладення грошей у сумі 20 000,00 на початку кожного року.

Розв'язання:

- 1) $S = P * \left(1 + \frac{i_n}{100} n \right) = 100000 * \left(1 + \frac{12}{100} * 5 \right) = 160\,000,00$ грн.
- 2) $S = P * n * \left(1 + \frac{i_n}{100} \frac{n-1}{2} \right) = 20000 * 5 * \left(1 + \frac{12}{100} \frac{5-1}{2} \right) = 124\,000,00$ грн.
- 3) $S = P * n * \left(1 + \frac{i_n}{100} \frac{n+1}{2} \right) = 20000 * 5 * \left(1 + \frac{12}{100} \frac{5+1}{2} \right) = 136\,000,00$ грн.

Теперішня вартість анuitету

При використанні процедур дисконтування грошових потоків при оцінці інвестицій необхідно знати теперішню (інші назви — сучасну, наведену, поточну) вартість грошової суми, що може бути отримана в майбутньому. Якщо ми візьмемо формулу визначення майбутньої вартості грошей, то з неї ми можемо отримати вираз для розрахунку теперішньої вартості грошей:

$$S = P(1 + i)^n \quad (5.14)$$

Нехай для зручності $P = PV$. Тоді (PV) - це теперішня вартість суми (S_n) , яку можна отримати, якщо б сума (PV) була вкладена на (n) років за складною процентною ставкою (i) :

$$PV = S_n \frac{1}{(1 + i)^n}. \quad (5.15)$$

де $1 / (1+i)^n$ - процентний фактор теперішньої вартості грошей, що показує, скільки потрібно зараз вкласти коштів за складною процентною ставкою i , щоб через (n) років отримати 1 грошову одиницю.

В багатьох задачах, що постають на практиці, грошові кошти повинні надходити або вкладатися в кінці кожного року за певний проміжок часу. Теперішня вартість ряду

платежів (або надходжень) є сумою щорічних окремих платежів (надходжень). Дана сума виражається такою формулою:

$$PVA = \frac{S_1}{1+i} + \frac{S_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{S_n}{(1+i)^n} \quad (5.16)$$

де **PVA** - теперішня вартість грошей, що повинна бути отримана.

Приклад 5.5. Теперішня вартість анuitету

Корпорація розраховує отримати наступні грошові потоки від вкладення інвестицій: рік 1 — \$3000, рік 2 — \$4000, рік 3 — \$5000, рік 4 — \$6000. Необхідна ставка прибутковості інвестицій — 12%. Визначте теперішню вартість грошових потоків від інвестицій.

Розв'язання. Використовуємо формулу (5.12) для визначення теперішньої вартості грошових потоків:

$$PVA = \frac{\$3000}{(1+0.12)} + \frac{\$4000}{(1+0.12)^2} + \frac{\$5000}{(1+0.12)^3} + \frac{\$6000}{(1+0.12)^4} = \$13239.35.$$

Теперішня вартість грошових потоків від інвестицій дорівнює \$13239.35. (індекси: $S_1 = S_2 = \dots = S_n = S_1$)

Якщо ми припустимо, що $S_1 = S_2 = \dots = S_n = S$, то сума **PVA** є не чим іншим, як добутком величини S на суму n членів геометричної прогресії зі знаменником i першим членом $V = 1/(1+i)$ і n -им членом $V_n = 1/(1+i)^n$. Тоді **PVA** дорівнюватиме:

$$PVA = SV \frac{V_n - 1}{V - 1} \quad (5.17)$$

Здійснивши відповідні математичні перетворення, отримаємо формулу:

$$PVA = S \frac{1}{1+i} \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} = S \frac{1}{1+i} \frac{\frac{1 - (1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{1 - 1 - i}{1+i}} = S \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} \right]$$

Вираз $((1+i)^n - 1)/i(1+i)^n$ називається процентним фактором теперішньої вартості анuitету. Позначимо його як $PFPVA_{n,i}$.

Теперішня вартість анuitету постнумерандо:

$$PVA(1+i)^n = S \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} (1+i)^n = S \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (5.18)$$

Звідси виводяться дві важливі формули взаємозв'язку процентних факторів теперішньої і майбутньої вартості анuitетів:

$$PFPVA_{n,i} (1 + i)^n = PFFVA_{n,i} \quad (5.19)$$

$$F = PVA (1 + i)^n \quad (5.20)$$

Теперішня вартість ренти пренумерандо (авансового ануїтета) визначається як:

$$PVA_A = S \frac{(1 + i)^n - 1}{i \cdot (1 + i)^n} (1 + i) = S \frac{(1 + i)^n - 1}{i \cdot (1 + i)^{n-1}} \quad (5.21)$$

Приклад 5.5. Теперішня вартість ануїтета

Корпорація розраховує отримувати грошові надходження від впровадження нового проекту \$5000 щорічно упродовж 10 років. Знайдіть теперішню вартість грошей, яку отримає корпорація, якщо ставка дисконта 10%.

Розв'язання. Використовуємо формулу (5.16) для визначення теперішньої вартості грошових потоків:

$$PVA = \$5000 \left[\frac{(1+0.10)^{10}-1}{0.10(1+0.10)^{10}} \right] = \$30722.83.$$

Приклад 5.6. Відновлення капіталу

Позичальнику потрібні \$30000 для подальшого інвестування. Банк надає позичку на 20 років під 8% річних з рівними щорічними платежами в кінці року. Знайдіть суму, яку повинен сплачувати позичальник у кінці кожного року.

Розв'язання. Використовуємо формулу (2.25) для визначення суми S , яку повинен сплачувати позичальник у кінці кожного року:

$$S = PVA \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] = \$30000 \left[\frac{0.08(1+0.08)^{20}}{(1+0.08)^{20} - 1} \right] = \$3055.57.$$

Позичальник повинен сплачувати щорічно \$3055.57 упродовж 20 років, щоб повернути банку \$30000 і проценти.

Перпетуїтет — це ануїтет або серія періодичних платежів, що тривають нескінченно. Якщо n прагне до нескінченності, то з рівняння (5.22) отримаємо, що границя (PVA) дорівнює $(1/i)$. Тоді:

$$PV = \frac{P}{i} \quad (5.22)$$

де PV - теперішня вартість перпетуїтета;

P - річний платіж;

i - процентна ставка.

Приклад 5.7. Теперішня вартість перпетуїтета

Якщо річна процентна ставка дорівнює 10%, то якою буде теперішня вартість перпетуїтета \$1000?

Розв'язання. Використовуємо формулу (5.19) для визначення теперішньої вартості перпетуїтета PV :

$$PV = \frac{P}{i} = \$1000 / 0.10 = \$10000.$$

Теперішня вартість перпетуїтета дорівнює \$10000

5.4. Застосування довідкових фінансових таблиць та програмного забезпечення MS EXCEL у фінансових обчисленнях параметрів фінансових рент.

Застосування довідкових фінансових таблиць

Для полегшення обчислень вартісних характеристик фінансових рент за відсутності засобів комп'ютерної техніки використовують спеціальні довідкові фінансові таблиці.

Найчастіше зустрічаються довідкові таблиці складені для річних рент постнумерандо (звичайних ануїтетів). Вони полегшують розрахунки за спеціальними формулами. Для обчислення теперішньої та майбутньої вартості інших видів ануїтетів, отримані значення коригують з урахуванням відповідних властивостей.

Застосування MS Excel у фінансових обчисленнях

Описуючи основні функції MS Excel для обчислень за складними процентами, а саме функції БС(), ПС(), СТАВКА(), КПЕР(), ми вказували, що аргумент ПЛТ (величина щорічного платежу у потоці платежів) для одноразового нарахування коштів не задають. Розрахунки щодо потоків платежів у середовищі MS Excel здійснюють за допомогою тих самих функцій, але з введенням параметру ПЛТ().

Функції БС(), ПС(), СТАВКА(), КПЕР(), дозволяють обчислити майбутню вартість, теперішню вартість ренти, ставку нарахування та кількість періодів нарахування. Крім того, для знаходження розміру щорічного платежу існує функція ПЛТ.

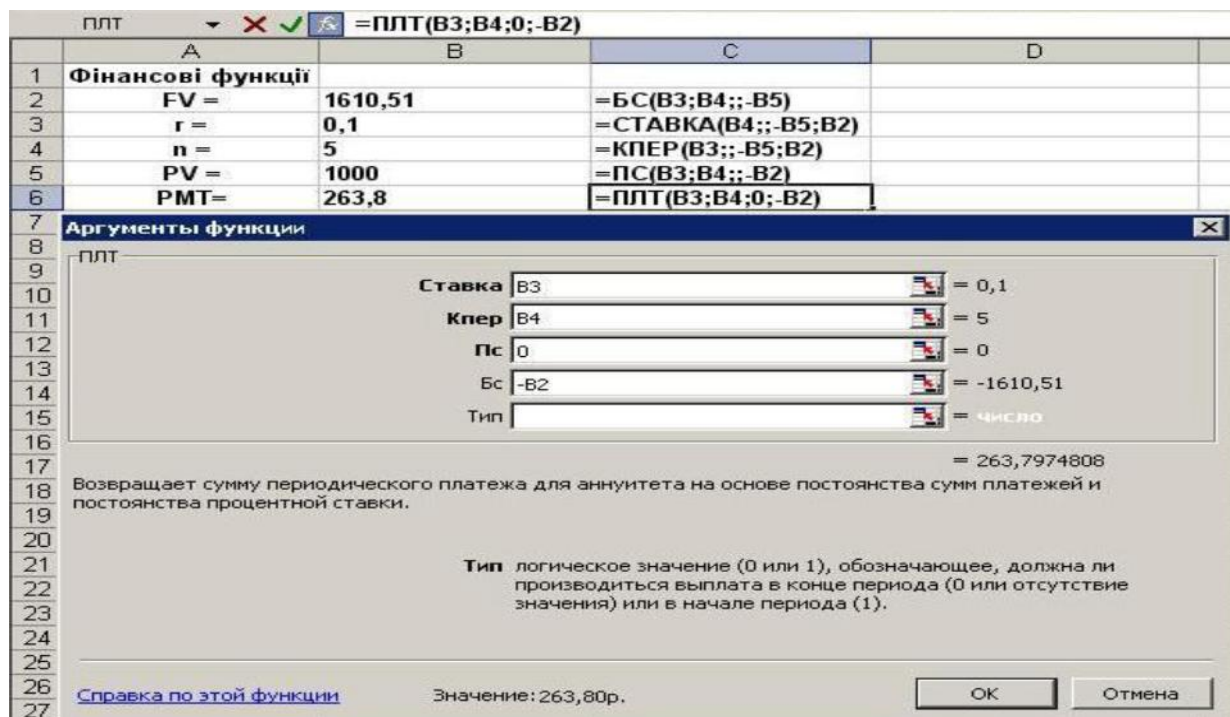


Рис. 5.1. Обчислення розміру щорічного платежу у MS Excel

Приклад 5.7. В нульовий момент часу сума коштів дорівнює 0, кінцева сума дорівнює 1610,51 грн, платежі здійснюють щорічно, наприкінці періодів, протягом п'яти років, ринкова ставка дохідності дорівнює 10 %. Користуючись функцією ПЛТ(), знайти щорічний платіж фінансової ренти.

Розв'язання Для проведення розрахунків розглянемо готовий шаблон з прикладу 5.7.

Маємо: $S = 1610,51$; $n = 5$; $r(i) = 10\%$. Застосуємо функцію ПЛТ() та у вікні, що з'явилося, введемо відомі значення аргументів: СТАВКА = 0,1; КПЕР = 5; ПС = 0; БС = -1610,51, користуючись посиланнями на відповідні клітинки (рис. 5.1).

Результат роботи функції ПЛТ() відображено у клітинці С6. Після натиснення клавіші "ОК" у цій клітинці має з'явитися значення $PMT = 263,8$.

Такий самий результат отримаємо за формулою $A = \frac{F_A \cdot i}{(1+i)^n - 1}$.

Для обчислення рент пренумерандо використовують ті самі функції, лише додатково задають аргумент ТИП=1, який вказуватиме, що платежі здійснюють на початку періоду.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Надайте характеристику грошовому потоку. Назвіть види грошових потоків
2. Що таке фінансова рента? Які основні параметри фінансових рент?
3. Дайте визначення нарощеної суми фінансової ренти. Яким чином вона може бути розрахована?

4. Дайте визначення сучасної вартості фінансової ренти. Яким чином вона може бути розрахована?
5. Наведіть приклади анuitету.
6. Чи відрізняються розрахунки вартості грошових потоків за умов постнумерандо та пренумерандо? Відповідь обґрунтуйте.
7. У чому полягає економічний зміст коефіцієнта нарощення ренти?
8. У чому полягає призначення фінансових таблиць? Яким чином їх використовують?
9. У яких випадках використовують відстрочений анuitет?
10. Поясніть принцип розрахунку безстрокового анuitету. Наведіть приклади безстрокового анuitету.
11. Яким є зміст прямого та зворотного завдання оцінювання грошового потоку?
12. Чи залежать дані у фінансових таблицях від виду грошового потоку?
13. Чи є доцільним розрахунок майбутньої вартості безстрокового анuitету?



Тестові завдання

1. Ряд послідовних фінансових платежів, що здійснюються через однакові проміжки часу, називають:

- а) фінансовою рентою;
- б) бруто-ставкою;
- в) страховим тарифом;
- г) обліковою ставкою.

2. За величиною своїх елементів анuitети розподіляють на:

- а) максимальні та мінімальні;
- б) постійні та змінні;
- в) великі та маленькі.

3. За безперервністю формування в досліджуваному періоді грошові потоки поділяють на регулярний та дискретний грошовий потік:

- а) так;
- б) ні.

4. Який із термінів, наведених далі, не є характеристикою анuitету:

- а) член ренти;
- б) термін ренти;
- в) період ренти;
- г) значущість анuitету.

5. Чим відрізняється рента постнумерандо від пренумерандо:

- а) рівнем відсоткової ставки;
- б) розміром нарощеної суми ренти;
- в) календарним терміном платежу.

6. Як називають анuitет, якщо перший платіж за ним починає надходити не одразу, а через h періодів:

- а) відстрочений;
- б) початковий;

- в) n -строковий;
- г) строковий.

7. За яких умов грошовий потік можна назвати анuitетом:

- а) за однакової тривалості часових періодів;
- б) за однакового розміру платежів;
- в) за однакового розміру відсоткової ставки.

8. Які параметри необхідно знати для визначення сучасної вартості безстрокового анuitету:

- а) відсоткову ставку та кількість виплат анuitету;
- б) термін анuitету та облікову ставку НБУ;
- в) відсоткову ставку та суму регулярного грошового надходження;
- г) відсоткову ставку та термін анuitету.

9. У r -строкового анuitету символом " r " позначають:

- а) кількість нарахування відсотків;
- б) тривалість одного періоду;
- в) кількість виплат анuitету на рік;
- г) розмір щорічного платежу.

10. Розв'язання яких задач передбачено в межах оцінювання грошового потоку:

- а) задач кредитування та страхування;
- б) прямої та зворотної задач;
- в) визначення облікової ставки.

ТЕМА 6. ОЦІНЮВАННЯ ТА ПЛАНУВАННЯ СХЕМ ФІНАНСОВО-КРЕДИТНИХ РОЗРАХУНКІВ

Питання до розгляду

- 6.1. Застосування теорії рент у плануванні схем фінансово-кредитних розрахунків.
- 6.2. Поняття лізингу та методи розрахунку лізингових платежів.
- 6.3. Кредитні розрахунки суб'єктів господарювання.

6.1. Застосування теорії рент у плануванні схем фінансово-кредитних розрахунків

Якщо фінансова операція передбачає не відокремлений (одноразовий) платіж, а певну послідовність платежів у часі, то для планування схеми таких розрахунків доцільно скористатися теорією фінансових рент.

Теорія фінансових рент – сучасна фінансова теорія, яка з'явилася порівняно недавно. Однак, можна стверджувати, що саме поява методології математичного дисконтування потоків платежів, значно розширило межі та можливості кількісного фінансового аналізу, зокрема дозволивши точніше враховувати вартість фінансових потоків у часі.

Фінансові обчислення щодо потоків платежів мають суто прикладний характер, визначаючи конкретні фінансові схеми розрахунків. Насамперед, у вигляді фінансових рент представляють різноманітні кредитні операції та відповідні схеми погашення заборгованостей.

Сучасні економічні відносини передбачають, що переважна більшість суб'єктів господарювання для свого розвитку застосовують ті чи інші варіанти кредитування. Оптимізацію кредитних розрахунків, що полягає у відшукуванні зручних схем кредитних виплат, провадять на основі аналізу відповідних потоків платежів.

Основні умови кредитування, які аналізують у теорії фінансових рент:

- термін кредиту (позики);
- метод (схема) погашення основної суми боргу та процентів;
- рівень процентів за кредитом та метод нарахування процентів;
- додаткові умови (пільговий період, можливості дострокового погашення, пролонгації, реструктуризації тощо).

Крім цього, фінансове навантаження щодо обслуговування боргу залежить від розміру та періодичності виплат, розміру першої виплати, принципів нарахування процентів на суму боргу і т.д.

Визначення оптимальних умов кредитних розрахунків передбачає опис кредитних виплат у вигляді певного потоку платежів з подальшою оцінкою його вартісних характеристик. Причому, залежно від розподілу платежів у часі, будуть відкориговані й інші параметри кредитної угоди. Таким чином, за допомогою операції математичного дисконтування можна знайти такий потік платежів, що забезпечуватиме оптимальне (прийнятне) фінансове навантаження для боржника відповідно до його виробничих циклів, оборотності коштів тощо.

Отже, кількісний аналіз фінансових потоків платежів – основа проведення більшості кредитно-фінансових операцій, зокрема: лізингових операцій; споживчих кредитів; іпотечних кредитів; орендних платежів з подальшим викупом майна; амортизаційних відрахувань; створення фондів нагромадження коштів; створення спеціальних фондів погашення боргу тощо.

Крім того, за допомогою теорії фінансових рент визначають вартісні характеристики різних видів цінних паперів. Наприклад, вартісна оцінка акцій ґрунтується на моделях дисконтування дивідендів, а оцінка процентних облігацій передбачає дисконтування процентних (купонних) виплат.

В цілому ж, сфера застосування теорії рент настільки широка й універсальна, що можна навіть стверджувати, що без її використання неможливо побудувати ефективну систему фінансового менеджменту суб'єкта господарювання незалежно від напрямку його діяльності.

6.2. Поняття лізингу та методи розрахунку лізингових платежів

До зручних фінансових механізмів залучення коштів можна віднести лізингові операції, які є розумною альтернативою борговим цінним паперам та банківському кредитуванню. Лізинг має наступну принципову схему, що передбачає одночасне укладання, як мінімум двох контрактів – договору лізингу між лізингодавцем (тобто

лізинговою компанією) і лізингоодержувачем і договору купівлі- продажу між лізингодавцем і продавцем (постачальником) майна (рис. 6.1).

Лізингові схеми залучення капіталовкладень у виробництво є одним з потужних джерел матеріально-технічного переоснащення підприємств, оскільки дозволяють отримати в експлуатацію основні засоби виробництва на умовах поступової сплати коштів.

Лізинг – це угода, за якою лізингодавець на основі договору лізингу за встановлену плату (лізингові платежі) надає лізингоодержувачу право на використання визначеного майна, відповідно до встановлених специфікацій, на визначений строк та на певних умовах, з правом викупу майна лізингоодержувачем.

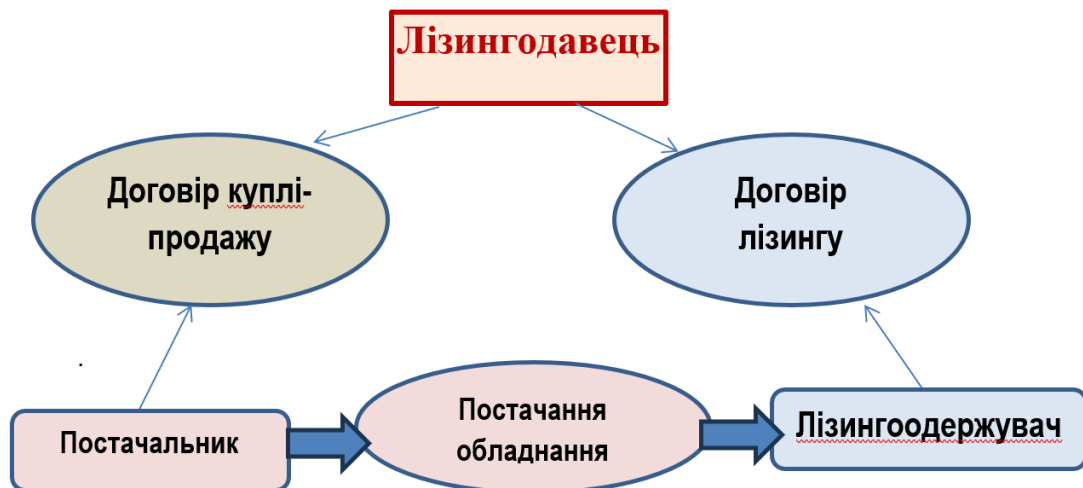


Рис. 6.1. Принципова схема лізингу

Механізм розрахунку лізингових платежів

Лізинг є специфічною формою кредиту, що надається підприємству для придбання необхідного йому майна. Як і в будь-якій іншій фінансово-кредитній угоді, ключовим питанням лізингової угоди є визначення розміру заборгованості та схеми її погашення.

Одним з основних етапів проектування лізингової угоди є визначення суми та графіку лізингових платежів. Ця задача є надзвичайно важливою як для лізингодавця, так і для лізингоодержувача, оскільки її результатом є оцінка кінцевої вартості лізингових послуг. Розмір лізингових платежів має бути економічно обґрунтованим, забезпечуючи лізингодавцю певний прийнятний рівень дохідності, а лізингоодержувачу – прийнятний рівень витрат. Для лізингодавця важливо врахувати та відобразити в лізингових платежах всі понесені ним витрати по лізинговій угоді, а також той прибуток, який він має отримати за надані лізингові послуги. З іншого боку, загальна сума лізингових платежів, по суті, являє собою вартість предмету лізингу для лізингоодержувача.

Фінансова схема лізингової угоди передбачає визначення дат та розмірів лізингових платежів, а також загального строку угоди. Причому строк лізингу будь-якого обладнання не може перевищувати терміну експлуатації цього майна. Розрахунки розмірів лізингових платежів можуть проводитися різними методами в залежності від виду лізингу, форми і способу виплат, предмету лізингу та різних додаткових договірних умов.

В Україні найчастіше розрахунок лізингових платежів здійснюють за двома методиками:

- методика з амортизацією боргу рівними частинами (традиційний метод);
- методика фінансових рент (сучасний фінансовий метод).

Методика розрахунку лізингових платежів з амортизацією боргу рівними частинами

Методика розрахунку лізингових платежів з амортизацією боргу (відшкодуванням вартості предмета лізингу) рівними частинами є простішою в аспекті фінансових обчислень і тому історично з'явилася раніше. Цей традиційний метод розрахунків боргових виплат є простим та зрозумілим для боржника, проте має суттєвий недолік – він не враховує вартість грошей у часі та ефект дисконтування.

Сутність цього методичного підходу полягає в тому, що величина лізингового платежу в кожному періоді визначається як сума відрахувань частини вартості предмета лізингу (виплати по основній сумі боргу) та величини процентів (лізингової винагороди) на невідшкодовану (залишкову) вартість цього майна. Математично це можна записати так:

$$R_i = A_i + B_i, \quad i = 1, n \quad (6.1)$$

де R_i - розмір лізингового платежу,

A_i - обсяг лізингової винагороди,

B_i - обсяг відшкодування вартості предмета лізингу в i -тому періоді.

При цьому, погашення вартості предмету лізингу відбувається рівними частинами, а величина процентів (лізингова винагорода) визначається послідовно в кожному періоді, виходячи із залишкової величини заборгованості за предмет лізингу на початок періоду.

Для зручності розглянемо широко розповсюджений випадок, коли відшкодування вартості предмету лізингу є періодичними і постійними та за строк дії угоди вартість майна повністю заміщується (залишкова вартість предмету лізингу по закінченню угоди дорівнює нулю). В такому разі **величина періодичного відшкодування вартості предмета лізингу** визначається діленням його повної вартості на кількість періодів:

$$B_i = \frac{C}{n} \quad (6.2)$$

де C - повна вартість предмета лізингу,

n - кількість періодів.

Залишкова вартість майна (U_i) на початку кожного наступного періоду залежить від попереднього:

$$U_i = U_{i-1} - B_i$$

Зрозуміло, що залишкова вартість на початку першого періоду, до здійснення лізингових платежів, дорівнює повній вартості предмету лізингу:

$U_1 = C$, а потім, з кожним наступним періодом, залишкова вартість зменшується. Числова послідовність залишкової вартості майна по періодах по суті є спадаючою арифметичною **прогресією, яка з кожним періодом зменшується на постійну величину (B)**.

Отже, згідно введених раніше позначень, рівняння $U_i = U_{i-1} - B_i$, залишкову вартість майна (U_i) можна подати в наступному вигляді:

$$U_i = C \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \quad (6.3)$$

Обсяг лізингової винагороди (A_i), знаходять за формулою:

$$A_i = U_i * r$$

де r - ставка дохідності за лізинговою угодою (лізингова ставка).

Зрозуміло, що обсяг лізингової винагороди, а отже й загальна величина лізингового платежу, у кожному наступному періоді зменшується пропорційно до зменшення залишкової вартості майна.

З урахуванням одержаних виразів, визначимо **розмір лізингового платежу**:

$$R_i = A_i + B_i = -Cr \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) + \frac{C}{n} \quad (6.4)$$

Отже, за методикою розрахунку лізингових платежів з відшкодуванням вартості майна рівними частинами **розмір лізингового платежу в кожному періоді є змінним** та залежить лише від загальної вартості майна (основної суми боргу), лізингової ставки, кількості періодів та порядкового номеру періоду.

Приклад 6.1. Згідно з договором фінансового лізингу вартість устаткування - 1200 тис. грн. За термін дії договору повністю відшкодовується за рахунок рівних періодичних амортизаційних відрахувань. Строк дії договору дорівнює строку експлуатації устаткування і становить 5 років. Лізингові платежі здійснюють два рази на рік, а річна лізингова ставка дохідності r - **20%**. Визначити розмір лізингових платежів у кожному періоді та загальну суму лізингових платежів.

Розв'язання. Вартість устаткування (лізингу) $C = 1200$ тис. грн.

1. Визначимо загальну кількість лізингових платежів $n = 5 * 2 = 10$ та лізингову ставку r за період (півроку) 10% (20/2).

2. За умовами задачі відшкодування вартості майна здійснюють рівними частинами, отже за один період амортизаційні відрахування становлять: 120 тис. грн.

$$B_i = \frac{C}{n} = \frac{1200}{10} = 120 \text{ тис. грн.}$$

3. Розмір лізингового платежу R_j в кожному періоді розраховують за формулою (6.4).

Графік погашення заборгованості за даним договором фінансового лізингу наведений в табл. 6.1.

На практиці послідовність лізингових платежів може бути задана довільно. Зазвичай порядок платежів змінюють на вимогу лізингоодержувача, що дозволяє в багатьох випадках оптимізувати боргове навантаження, не змінюючи загальних строків та розмірів платежів.

Наприклад, за чітко вираженого сезонного характеру виробництва, доцільно найбільші виплати відносити до періодів з максимальними обсягами реалізації продукції, а найменші – до періодів спаду виробництва та реалізації тощо.

Таблиця 6.1

Графік погашення заборгованості за договором фінансового лізингу

Номер платежу, i	Залишкова вартість майна, U_j	Відшкодування вартості майна, B_j	Лізингова винагорода, A_j	Лізингові платежі, R_j
1	1200	120	120	240
2	1080	120	108	228
3	960	120	96	216
4	840	120	84	204
5	720	120	72	192
6	600	120	60	180
7	480	120	48	168
8	360	120	36	156
9	240	120	24	144
10	120	120	12	132
Разом		1200	660	1860

На практиці послідовність лізингових платежів може бути задана довільно. Зазвичай порядок платежів змінюють на вимогу лізингоодержувача, що дозволяє в багатьох випадках оптимізувати боргове навантаження, не змінюючи загальних строків та розмірів платежів.

Наприклад, за чітко вираженого сезонного характеру виробництва, доцільно найбільші виплати відносити до періодів з максимальними обсягами реалізації продукції, а найменші – до періодів спаду виробництва та реалізації тощо.

Методика розрахунку лізингових платежів, заснована на теорії фінансових рент

Однією з найбільш математично обґрунтованих і точних є методика визначення розміру лізингових платежів заснована на теорії фінансових рент. В її основі є рівність теперішньої (приведеної) вартості потоку лізингових платежів та вартості майна з усіма

додатковими витратами по його придбанню. За цією методикою визначають єдину величину лізингового платежу по всіх періодах, яку надалі розподіляють на процентний платіж (лізингову винагороду) і величину відшкодування вартості майна.

Для розрахунків розміру лізингового платежу за цим методом виходять з наступних припущень:

- ◆ платежі однакові у всіх періодах;
- ◆ платежі здійснюються через рівні проміжки часу.

Крім того, розрахунок розміру лізингового платежу передбачає наявність заздалегідь визначеної лізингової ставки r . Якщо обумовити, що платежі здійснюються наприкінці періоду (рента постнумерандо), і майно повністю амортизується за термін договору лізингу, то відповідно до введених раніше позначень величину лізингового платежу розраховують так:

$$R = \frac{C * r}{1 - (1 + r)^{-n}} \quad (6.5)$$

Зазначимо, що даний вираз є одним із варіантів запису виведеного раніше рівняння (5.4)

$A = \frac{PVA * i}{1 - (1 + i)^{-n}}$, якщо в останньому покласти, що теперішня величина звичайного анuitету дорівнює повній вартості переданого в лізинг майна, а величина щорічного платежу звичайного анuitету дорівнює величині лізингового платежу.

Після того, як розмір лізингового платежу визначено, його розподіляють на лізингову винагороду та величину відшкодування вартості майна. Причому спочатку у кожному періоді, користуючись формулою (6.6), розраховують розмір лізингової винагороди.

$$A_i = U_i * r \quad (6.6)$$

З рівняння $R_i = A_i + B_i$, визначають величину заміщення вартості майна.

Залишкову (незаміщену) вартість майна для кожного наступного періоду визначають як різницю між залишковою вартістю майна і величиною відшкодування вартості майна у поточному періоді.

Приклад 6.2. За даними прикладу 6.1 побудувати графік лізингових платежів на основі розрахунків за фінансовими рентами.

Отже, за умовами прикладу маємо: вартість устаткування $C = 1200$ тис. грн; строк дії договору $n = 5$ років; періодичність платежів $m = 2$ рази на рік; річна лізингова ставка дохідності $r = 20\%$.

Розв'язання. Спочатку обчислимо величину періодичного лізингового платежу:

$$R = \frac{C * r}{1 - (1 + r)^{-n}} \quad R = \frac{1200 * 0,1}{1 - (1 + 0,1)^{-10}} = 195,3 \text{ тис. грн.}$$

Отже, за 10 періодів відбувається повне заміщення вартості майна, причому загальна сума лізингових платежів складає приблизно 1 953 тис. грн. Тобто порівняно з одноразовою повною виплатою, взяте у лізинг устаткування подорожчало у 1,6 рази (1953 / 1200).

Метод обчислень з використанням фінансових рент завдяки врахуванню ефекту дисконтування є більш реалістичним порівняно з традиційним методом. Розрахунки з використанням фінансових рент вигідні лізингодавцю та не вигідні лізингоотримувачу, оскільки збільшують загальну суму лізингових платежів. Наприклад, порівнюючи дані табл. 6.1 та 6.2, бачимо, що за традиційним методом загальний обсяг лізингових платежів склав 1 860 тис. грн, а за рентним методом – майже 1 953 тис. грн.

Таблиця 6.2

Графік погашення заборгованості за договором фінансового лізингу

Номер платежу, i	Залишкова вартість майна, U_i	Відшкодування вартості майна, B_i	Лізингова винагорода, A_i	Лізингові платежі, R_i
1	1200	75,3	120	195,3
2	1124,7	82,8	112,5	195,3
3	1041,9	91,1	104,2	195,3
4	950,8	100,2	95,1	195,3
5	850,6	110,2	85,1	195,3
6	740,3	121,3	74,0	195,3
7	619,1	133,4	61,9	195,3
8	485,7	146,7	48,6	195,3
9	338,9	161,4	33,9	195,3
10	177,5	177,5	17,8	195,3
Разом		1200	752,9	1953

На практиці методика розрахунків за фінансовими рентами нерідко ускладнюється, коли, наприклад, платежі здійснюють не наприкінці, а на початку періоду, майно не повністю амортизується за термін договору лізингу тощо.

6.3. Кредитні розрахунки суб'єктів господарювання

Споживчі кредити та аналіз схем споживчого кредитування

Останні роки в Україні активно розвивався ринок споживчого кредитування. Цей вид кредитування призначений для фізичних осіб, які використовують позичені кошти на купівлю побутової техніки, інших електронних пристроїв, автомобілів тощо. Кредиторами виступають комерційні банки, що спеціалізуються на роздрібному бізнесі, кредитні спілки, союзи та інші фінансові організації.

Зазвичай такі кредити є досить короткостроковими, а виплати за ними є щомісячними. Типова схема розрахунків за цією кредитною угодою ґрунтується на методиці фінансових рент.

Отже, *осовною відмінністю схем споживчого кредитування від схем лізингових платежів є наявність кількох виплат протягом кожного періоду.*

Якщо припустити, що за наявної річної кредитної ставки (*r*) виплати здійснюють (*m*) - **разів** протягом одного року, то канонічна формула

$$R = \frac{C * r}{1 - (1 + r)^{-n}}$$

для обчислення розміру періодичного платежу (*R*) набуде такого вигляду:

$$R = \frac{C * \frac{r}{m}}{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mn}} \quad (6.7)$$

Зрозуміло, що при проведенні розрахунків за допомогою функції ПЛТ() у MS Excel, для визначення розміру щомісячного платежу, необхідно спочатку перевести кредитну ставку та строк кредитування до місячних значень.

Аналізуючи схеми споживчого кредитування, маємо зазначити, що кредитні установи, при видачі споживчого кредиту, окрім кредитної ставки, застосовують до позичальника різноманітні комісії та інші початкові платежі. Всі ці скриті виплати призводять до значного «подорожчання» кредиту для позичальника. Тому ключовим питанням стає визначення не задекларованої кредитною установою, а реальної ставки дохідності за кредитною операцією.

Зазвичай, обчислення **розміру періодичного платежу (*R*)** на основі загальної величини позики (*C*) здійснюють за формулою:

$$R = \frac{C * \frac{r}{m}}{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mn}}$$

Однак, визначаючи реальну дохідність кредитора, необхідно враховувати, за наявності додаткових комісій у розмірі (*A*), позичальник насправді отримує суму у розмірі лише (*C-A*), позначивши *реальну ставку дохідності* як (*k*), запишемо таке рівняння фінансової еквівалентності:

$$R = \frac{C * \frac{r}{m}}{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mn}} = \frac{(C - A) * \frac{k}{m}}{1 - \left(1 + \frac{k}{m}\right)^{-mn}} \quad (6.8)$$

Розв'язок рівняння відносно *k* покаже реальну ставку дохідності кредитної операції.

Зрозуміло, що за великої кількості виплат одержане рівняння з невідомим у стає багаточленом високого ступеня, тому розв'язання такого рівняння передбачає

використання спеціальних обчислювальних засобів. Для оцінювання реальної норми дохідності у MS Excel можна застосувати вже відому нам функцію СТАВКА().

Приклад 6.3. Купуючи автомобіль вартістю 120 тис. грн, покупець половину коштів виплатив сам, а решту суми взяв у кредит у банку під 18% річних терміном на 2 роки. При видачі позики банк утримав комісію 5% за оформлення договору. Обчислити реальну дохідність кредитної операції, за умови що позичальник погашатиме борг за *методикою фінансових рент* з щомісячними виплатами.

Розв'язання. Для розв'язання задачі скористаємось можливостями MS Excel. За умовами прикладу основна сума боргу складає $C = 60000$ грн, а сума, яку фактично отримає боржник становить лише $C - A = 60000 - 60000 \cdot 0,05 = 57000$ грн.

Спочатку за допомогою функції ПЛТ () знайдемо величину щомісячного платежу.

Аргумент СТАВКА = 18% / 12; КПЕР = 24, а основна сума боргу ПС = 60000 (з від'ємним знаком, оскільки це величина заборгованості). Результат роботи функції ПЛТ () відображено на рис. 6.1 у комірці D4. Отже, щомісячний платіж $R = 2995,45$ грн.

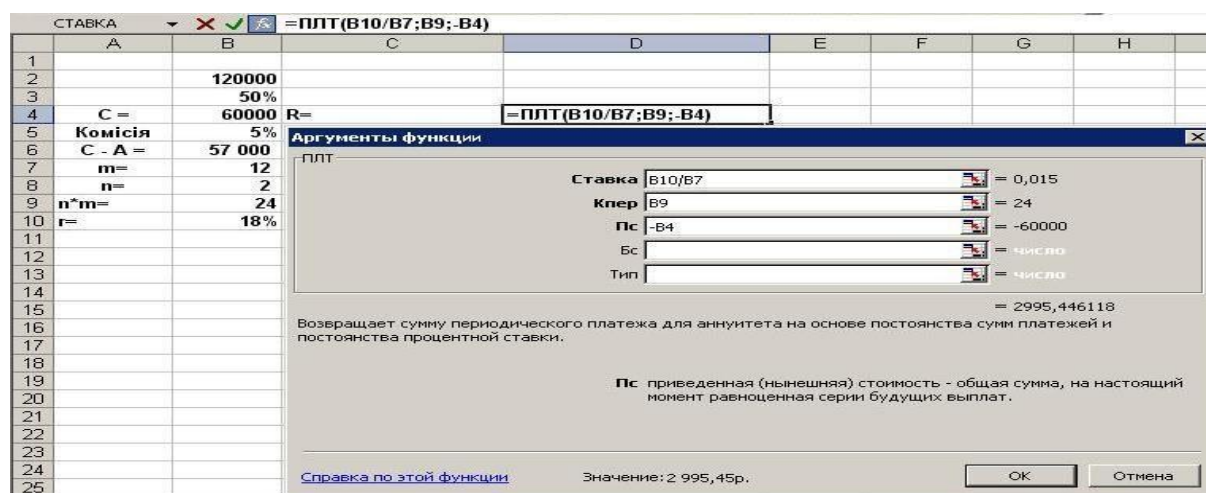


Рис. 6.1. Обчислення розміру щомісячного платежу у MS Excel

Аргументи функції ПЛТ () необхідно задавати як у формулі

$$R = \frac{C \cdot \frac{r}{m}}{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mn}}$$

Тепер за допомогою функції СТАВКА() розрахуємо реальну ставку дохідності цієї кредитної операції для банку (рис. 6.2). %.

На рис. 6.2 показано, як задаються аргументи функції СТАВКА(). Необхідно ввести КПЕР = 24; розраховану величину щомісячного платежу ПЛТ = 2995,45; а також фактичну початкову суму кредиту ПС = 57000 з від'ємним знаком, оскільки це величина заборгованості. Результат роботи функції СТАВКА() відображений на рис. 6.3 у комірці С6, отже реальна місячна ставка дохідності дорівнює 1,95.

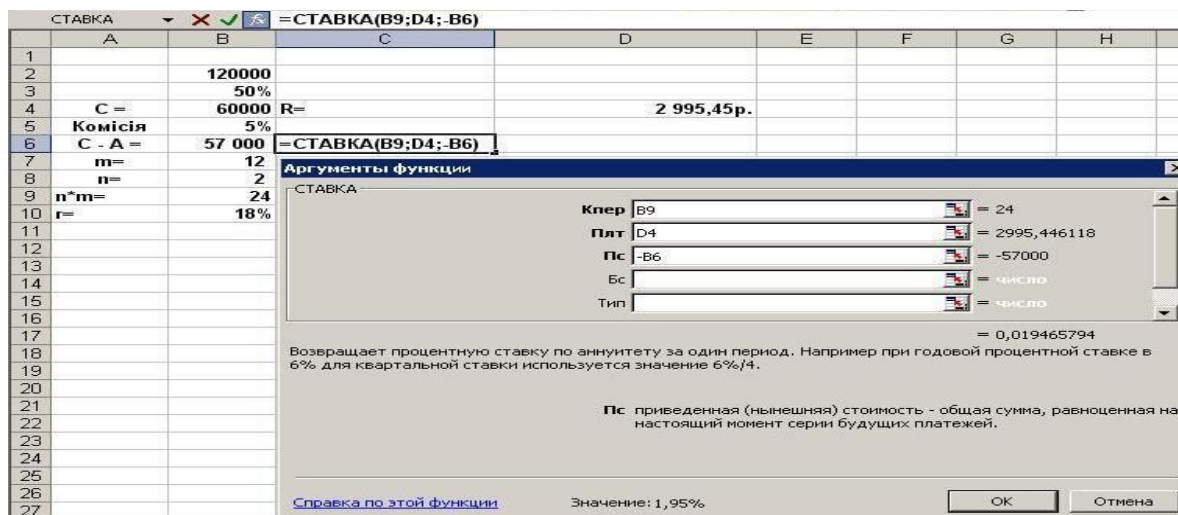


Рис. 6.2. Обчислення реальної норми дохідності у MS Excel

Останнім кроком є приведення цієї ставки до річного виразу за формулою ефективної ставки дохідності.

D10		fx =(1+C6)^B7-1			
	A	B	C	D	E
1					
2		120000			
3		50%			
4	C =	60000	R=	2 995,45р.	
5	Комісія	5%			
6	C - A =	57 000	1,95%		
7	m=	12			
8	n=	2			
9	n*m=	24			
10	г=	18%	y=	26,03%	
11					

Рис. 6.3. Обчислення ефективної ставки дохідності у MS Excel

Таким чином, за річної кредитної ставки $г = 18\%$, з урахуванням комісійних, реальна (фактична) кредитна ставка $у = 26,03\%$. Зрозуміло, що збільшення кількості періодичних виплат, призвело б до ще більшого зростання реальної норми дохідності цієї кредитної операції.

Фінансові розрахунки по іпотечних позиках

Під іпотекою (англ. mortgage, hypothec) розуміють грошову позику, яка надається під заставу нерухомого майна (землі, будинку, підприємства). Позики під заставу нерухомості отримали широке поширення в країнах із розвиненою ринковою економікою як одне з важливих джерел довгострокового фінансування.

В Україні відносини іпотеки регулюються законами України про іпотеку, про іпотечне кредитування, операції з консолідованим іпотечним боргом та іпотечні сертифікати, про

оцінку землі, про оцінку майна, про заставу (розділ II «Іпотека»), ЦКУ.Іпотечне кредитування сприяє економічному і соціальному розвитку країни. Підприємства використовують довгострокові кредитні ресурси, забезпечені нерухомістю для оновлення матеріально-технічної бази; населення – для побудови житла, започаткування власного бізнесу тощо.

Існують кілька видів іпотечних позик, які відрізняються в основному методами погашення заборгованості. Більшість видів є варіантами стандартної, або типової, іпотечної позики. Суть її полягає у тому, що позичальник отримує у заставодержателя (кредитора) деяку суму під заставу нерухомості (наприклад, при купівлі або будівництві будинку). Далі він погашає борг разом з процентами, рівними, звичайно, щомісячними внесками.

Модифікації стандартної схеми іпотеки направлені на підвищення її гнучкості для врахування потреб як боржника, так і кредитора. Деякі з них мають за мету знизити витрати боржника на початкових етапах погашення боргу перенесенням основних виплат на більш пізні етапи. Такі іпотеки притягують тих клієнтів, які очікують зростання своїх доходів у майбутньому, наприклад, підприємців-початківців.

Охарактеризуємо деякі модифікації стандартної схеми іпотек.

1. *Позики з ростом платежів* (англ. *graduated mortgage, GPM*). Цей вид позики передбачає постійне зростання витрат з обслуговування боргу у перші п'ять–десять років. Потім погашення здійснюється постійними внесками.

2. *Позики з періодичним збільшенням внесків* (англ. *step-rate mortgage, SRM*). Схема такої позики є варіантом GPM: за узгодженим графіком кожні три–п'ять років збільшується сума внесків.

3. *Позики з періодичною зміною процентної ставки* (англ. *rollover mortgage, RM*). Схема цієї позики передбачає, що сторони кожні три–п'ять років переглядають рівень процентної ставки. Тим самим створюється можливість для деякої адаптації до зміни умов ринку.

4. *Іпотеки зі змінною процентною ставкою* (англ. *variable-rate mortgage, VRM*). Рівень ставки тут прив'язується до якого-небудь поширеного фінансового показника або індексу, наприклад індексу інфляції.

Основним завданням під час аналізу іпотек є розробка планів погашення боргу. Важливо також вміти визначати суму погашеного боргу та залишку заборгованості на будь-який проміжний момент (необхідність у цьому виникає, наприклад, з припиненням кредитного договору або його перегляданням).

Методи розрахунків традиційної іпотечної позики та іпотечної позики з періодичним зростанням платежів

Завдання полягає у визначенні розміру щомісячних погашувальних платежів (внесків) R та залишку заборгованості на момент чергового її погашення впритул до повного погашення боргу. *Погашувальні платежі (внески) є постійною рентою – ануїтетом.*

Нарощена сума (S) анuitету постнумерандо (платежі здійснюються в кінці місяця) для випадку, коли момент нарахування процентів і момент платежу збігаються, знаходиться за формулою:

$$S = Rm \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{i} \quad (6.9)$$

де **R** - величина платежу за період;

i - річна складна процентна ставка, виражена у десятковому дробі;

n - строк анuitету в роках,

m - число нарахувань процентів на рік.

Поточна вартість (**PVA**) нарощеної суми – сума всіх платежів, дисконтованих на величину процентної ставки на початок періоду, дорівнює

$$PVA = Rm \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}}{i} \quad (6.10)$$

де **R** – величина платежу за період;

i – річна складна процентна ставка, виражена у десятковому дробі;

n – строк анuitету в роках;

m – число нарахувань процентів на рік.

З формули (6.9) може бути знайдена величина платежу за період (**R**):

$$R = PVA * i \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}}{m * \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1\right]} \quad (6.11)$$

Приклад 6.4. Під заставу квартири отримано позику 50 тис. грн. строком на один рік під процентну ставку 18 % річних. Погашення іпотечної позики та процентів здійснюється щомісяця рівними сумами. Визначити загальну суму витрат позичальника S, величину щомісячного платежу R. Скласти план погашення боргу.

Розв'язання. Платежі за процентами на основі періодичних постійних виплат і постійної процентної ставки розраховуються за допомогою функції Excel ПРПЛТ:

ПРПЛТ(18%. 12; 1; 12; -50000) = 750; ПРПЛТ(18%.12; 2; 12; -50000) = 692,4900053;
 ПРПЛТ(18%. 12; 3; 12; -50000) = 634,1173607; ПРПЛТ(18%.12; 4; 12; -50000) = 574,8691265;
 ПРПЛТ(18%. 12; 5; 12; -50000) = 514,7321687; ПРПЛТ(18%.12; 6; 12; -50000) = 453,6931565;
 ПРПЛТ(18%. 12; 7; 12; -50000) = 391,7385592; ПРПЛТ(18%.12; 8; 12; -50000) = 328,8546429;
 ПРПЛТ(18%. 12; 9; 12; -50000) = 265,0274679; ПРПЛТ(18%.12; 10; 12; -50000) = 200,2428852;
 ПРПЛТ(18%. 12; 11; 12; -50000) = 134,4865338; ПРПЛТ(18%.12; 12; 12; -50000) = 67,74383712.

Результати розрахунків наведено в табл. 6.2.

Сума основного платежу за позицію (виплата заборгованості), яка погашається рівними платежами в кінці розрахункового періоду, обчислюється за допомогою функції Excel ОСПЛТ:

ОСПЛТ(18%.12; 1; 12; -50000) = 3833,999645; ОСПЛТ(18%.12; 2; 12; -50000) = 3891,50964;
 ОСПЛТ(18%.12; 3; 12; -50000) = 3949,882285; ОСПЛТ(18%.12; 4; 12; -50000) = 4009,130519;
 ОСПЛТ(18%.12; 5; 12; -50000) = 4069,267477; ОСПЛТ(18%.12; 6; 12; -50000) = 4130,306489;
 ОСПЛТ(18%.12; 7; 12; -50000) = 4192,261086; ОСПЛТ(18%.12; 8; 12; -50000) = 4255,145002;
 ОСПЛТ(18%.12; 9; 12; -50000) = 4318,972177; ОСПЛТ(18%.12; 10; 12; -50000) = 4383,75676;
 ОСПЛТ(18%.12; 11; 12; -50000) = 4449,513112; ОСПЛТ(18%.12; 12; 12; -50000) = 4516,25808

Таблиця 6.2

План погашення боргу за стандартною іпотечною позицією

Місяць	Сума основного боргу на початок місяця, грн	Платежі за процентами, грн	Сума погашення основного боргу, грн	Загальна сума платежу, грн
1	50000	750	3833,999645	4583,999645
2	46166,00036	692,4900053	3891,50964	4583,999645
3	42274,49072	634,1173607	3949,882285	4583,999645
4	38324,60843	574,8691265	4009,130519	4583,999645
5	34315,47791	514,7321687	4069,267477	4583,999645
6	30246,21043	453,6931565	4130,306489	4583,999645
7	26115,90395	391,7385592	4192,261086	4583,999645
8	21923,64286	328,8546429	4255,145002	4583,999645
9	17668,49786	265,0274679	4318,972177	4583,999645
10	13349,52568	200,2428852	4383,75676	4583,999645
11	8965,76892	134,4865338	4449,513112	4583,999645
12	4516,255808	67,74383712	4516,25808	4583,999645
Усього	–	5007,995744	50000	55007,99574

Питання для самоконтролю

1. Якими є основні види заборгованості підприємства?
2. У чому полягає сутність класичного та анuitетного методу погашення боргу?
3. Охарактеризуйте призначення плану погашення боргу.
4. Що таке коефіцієнт погашення заборгованості?
5. Розкрийте технологію погашення боргу зі змінними виплатами для арифметичної прогресії (зростаючої та спадної).
6. У чому призначення та відмінність погашення боргу зі змінними виплатами для геометричної прогресії?



Тестові завдання

1. Як змінюється протягом терміну фінансової операції щорічний відсотковий платіж за кредитом:

- а) збільшується;
- б) зменшується;
- в) не змінюється.

2. Метод погашення боргу однаковими терміновими виплатами має назву:

- а) метод лінійної інтерполяції;
- б) метод кредитної книжки;
- в) метод депозитної книжки.

3. Від яких факторів залежить розмір термінових виплат із погашення кредитної заборгованості підприємства:

- а) облікової ставки НБУ;
- б) величини кредиту та його терміну;
- в) наявності та тривалості пільгового періоду; г) організаційно-правової форми підприємства.

4. Укажіть варіанти погашення кредитної заборгованості, за яких погашення основного боргу мають здійснювати платежами, кожен із яких:

- а) змінюється протягом року;
- б) більше попереднього;
- в) менше попереднього;
- г) дорівнює попередньому, але менше наступного.

5. Погашення основного боргу позички може змінюватися у:

- а) арифметичній прогресії;
- б) геометричній прогресії;
- в) спадній прогресії;
- г) зростаючій прогресії.

6. Як змінюються протягом терміну фінансової операції щорічна сума погашення основного боргу за кредитом:

- а) збільшується;
- б) зменшується;
- в) не змінюється.

7. Що належить до видатків, пов'язаних із погашенням боргу:

- а) погашення основного боргу та виплати дисконтного залишку;
- б) погашення основного боргу та виплати відсотків;
- в) виплата штрафних санкцій і відсоткових платежів?

8. Із чого складено розмір термінової сплати в разі погашення боргу однаковими частинами наприкінці періоду:

- а) річного видатку та суми боргу;
- б) річного видатку з погашення основної суми боргу та відсоткового платежу;
- в) відсоткового платежу та дисконтованої вартості боргу.

9. Чому має дорівнювати залишок боргу на кінець останнього року в разі використання методу депозитної книжки:

- а) сумі річного платежу;
- б) сумі кредиту;
- в) нулю.

10. Видатки, пов'язані з погашенням позички, – це:

- а) реінвестування позички;
- б) пролонгація позички;
- в) амортизація позички.

V. ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО КОНТРОЛЮ ДИСЦИПЛІНАРНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

1. Поясніть, який вплив має час у фінансових операціях.
2. Сформулюйте поняття відсотка і відсоткових грошей.
3. Дайте визначення відсоткової ставки.
4. Які є види відсоткових ставок?
5. Дайте визначення арифметичної прогресії та сформулюйте її властивості.
6. Дайте визначення геометричної прогресії та сформулюйте її властивості.
7. Виведіть формулу для обчислення нарощеної суми простих позичкових відсотків.
8. Які є способи нарахування короткотермінових кредитів?
9. Запишіть формулу нарощеної суми зі змінною відсотковою ставкою.
10. Запишіть формули для обчислення нарощеної суми за схемою простих облікових відсотків.
11. Що таке дисконтування за простими відсотками?
12. Якими є прямі та обернені задачі для відсоткових ставок i та d ?
13. Виведіть формулу нарощення за схемою складних позичкових відсотків.
14. Виведіть формули для обчислення теперішньої вартості майбутніх сум для складних позичкових і авансових відсотків.
15. Дайте визначення поняття «множник нарощення»? Що він показує?
16. Що таке номінальна відсоткова ставка?
17. Що таке ефективна відсоткова ставка?
18. Виведіть формулу зв'язку між номінальною та ефективною ставками для позичкових і авансових відсотків.
19. Виведіть формули для обчислення терміну позики і величини відсоткової ставки для позичкових і авансових відсотків.
20. Виведіть формули для обчислення неперервного нарощення і дисконтування.
21. Що означає поняття «еквівалентні відсоткові ставки»?
22. Виведіть формули еквівалентності між простими і складними відсотковими ставками.
23. Виведіть формули еквівалентності між силою зростання і складною відсотковою ставкою.
24. Визначте поняття рівня, темпу та індексу інфляції. Яка між ними різниця?
25. У яких одиницях вимірюється темп, рівень та індекс інфляції?
26. Дайте визначення фінансового потоку.
27. Якими параметрами характеризується фінансовий потік?
28. Що таке теперішня і нарощена суми фінансового потоку?
29. Виведіть формулу нарощеної суми для ануїтету.
30. Виведіть формулу теперішньої суми для ануїтету.
31. Виведіть формули для обчислення терміну річної ренти.
32. Який взаємозв'язок між нарощеними сумами для рент постнумерандо і пренумерандо?
33. Що таке річна рента та відстрочена рента?

VI. КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

6.1. Загальні вказівки

6.1.1 Мета виконання контрольної роботи – виробити у здобувачів навички визначення параметрів фінансових операцій з використанням математичного апарату та закріпити систему знань з методології та практичного здійснення фінансових розрахунків. Контрольні завдання розроблені згідно з робочою програмою дисципліни “Фінансова математика”.

6.1.2 Студент обирає номер варіанту, який відповідає його номеру у списку групи (за журналом) і проставляє вихідні дані в задачах, які відповідають цьому варіанту.

6.1.3 Контрольна робота виконується на стандартних аркушах паперу або у зошиті із зазначенням кафедри, найменуванням дисципліни, номера контрольної роботи, варіанта, групи, П.І.Б. студента і викладача, року виконання контрольної роботи.

6.1.4 Виконану контрольну роботу необхідно здати на кафедру за 2 тижні до початку сесії. Робота буде зарахована при правильному виконанні всіх завдань. У разі виникнення труднощів, під час рішення роботи, студент може отримати консультації у викладача, який приймає цю роботу.

6.1.5 Нижче наводяться практичні задачі, які повинні бути вирішені в процесі виконання контрольної роботи. Задачі представлено інваріантно стосовно числових даних, що в них використовуються. Перелік початкових даних наведений у п.7.3. - вихідні дані для вирішення задач.

При виконанні контрольної роботи здобувачу необхідно

- вказати свій варіант завдання;
- навести вихідні дані по кожній задачі;
- розв'язати задачу з наведенням формул, розрахунків з числовими даними за відповідним варіантом та висновків за результатами вирішення задачі.

6.2. Умови контрольної роботи

Завдання 1. Позика – A грн.; на термін B ; під $C\%$ простих річних. Знайти нарощену суму при різних методах визначення строку нарахування.

Завдання 2. Яку суму треба покласти на рахунок в банку, щоб через D роки мати E грн.? Нарахування відсотків в банку відбувається за схемою простих відсотків в кінці кожного кварталу за ставкою $F\%$ річних.

Завдання 3. Обчислити нарощену суму і отриманий дохід за простими і складними відсотками, якщо G тис. грн. інвестуються на H роки під $i\%$ річних. Визначити оптимальний варіант інвестування коштів для клієнта банку.

Завдання 4. Кредит у розмірі J млн. грн., виданий на K роки і L днів. Ставка – $M\%$ складних річних. Знайти суму боргу на кінець терміну за різними способами.

Завдання 5. Банк нараховує складні відсотки за номінальною ставкою $N\%$ річних. На рахунку O тис.грн. Розрахуйте, яка сума буде на рахунку через P роки, якщо нарахування виконуються: а) щорічно; б) по півріччях; в) щоквартально. г) за простою процентною ставкою. Встановити, за якою схемою нарахування відсотків клієнт банку отримає найкращий фінансовий результат.

Завдання 6. Сума в R млн. грн. виплачується через Q років. Необхідно визначити її сучасну величину за умови, що застосовується ставка складних відсотків, що дорівнює $S\%$ річних.

Завдання 7. Визначити термін платежу за векселем на суму T у.о.д., якщо при його обліку за простою обліковою ставкою $U\%$ річних отримана позика V у.о.д. При необхідності виконати корекцію дисконту так, щоб термін був з цілим кількістю днів (з розрахунку 365 днів у році).

Завдання 8. Визначити прибутковість операції для кредитора, якщо кредитором надана позика в розмірі W млн. грн. на X днів і контракт передбачає суму погашення боргу Y млн. грн. Прибутковість виразити у вигляді простої ставки відсотків i і простої облікової ставки d . Часову базу прийняти рівною $K = 360$ днів.

Завдання 9. Ощадний сертифікат куплений за A тис. грн., викупна його сума B тис. грн., термін C років. Який рівень прибутковості у вигляді річної ставки складних відсотків?

Завдання 10. Знайти розмір ефективної ставки, якщо номінальна ставка дорівнює $D\%$ при щомісячному нарахуванні відсотків.

Завдання 11. Фінансова компанія встановила щоденне збільшення вкладів E грн. на кожну тисячу. Визначити ефективну річну ставку відсотків при укладанні договору з компанією на F місяці, на півроку і на рік. (Рік не високосний)

Завдання 12. Ставка неперервного дисконтування дорівнює $G\%$. Обрати найбільш вигідний варіант вкладення грошей, обчисливши ефективні річні ставки, якщо банк пропонує варіанти:

- а) $H\%$ річних;
- б) $I\%$ – щоквартальне нарахування;
- в) $J\%$ – по півріччях;
- г) неперервне нарахування відсотків з силою росту $K\%$.

Завдання 13. На депозит зі ставкою $L\%$ річних поміщені грошові кошти строком на 2 роки. Темп інфляції становить $M\%$ на рік. Знайти реальну ставку відсотків для випадку простих і складних відсотків.

Завдання 14. Банк нараховує відсотки за вкладом за номінальною ставкою $N\%$ річних з щомісячною капіталізацією. Середньорічний темп інфляції $O\%$. Знайти реальну прибутковість операції.

Завдання 15. Для створення пенсійного фонду організація щорічно перераховує в банк ренту постнумерандо в розмірі P млн. грн. На надходження платежів нараховують складні відсотки по річній процентній ставці $Q\%$ річних. Визначити розмір фонду через R років. Приймавши, що банк нараховує відсотки щоквартально, визначити, який варіант нарахування відсотків вигідний кредитору.

Завдання 16. Припустимо, необхідно помістити на валютному депозиті суму в. S млн.грн.. Курс продажу на початок терміну депозиту T грн. за 1 доллар, курс купівлі долара в кінці операції U грн. Відсоткові ставки: $i = V\%$, $j = W\%$ (360/360). Строк депозиту – X місяці.

6.3. Вихідні дані для вирішення задач

Завдання 1-4

№	A	B	C	D	E	F	G	H	i	J	K	L	M
1	12000	9.03-1.10	15	4	13800	12	24	2	10	5	4	260	12,5
2	13500	7.01-17.09	18	3	12700	16	26	3	11,5	4	5	120	13
3	11000	9.03-18.11	16	4	11840	15	18	4	12	3	4	100	14
4	16200	11.09-4.04	20	5	15300	14,5	19	2	10	3	4	95	14
5	14750	12.03-6.07	11	2	12850	18	20	4	13	4	3	130	13,5
6	13800	3.02-22.04	15	3	15000	13	25	5	15	2	3	210	17
7	14000	10.05-4.11	13,5	6	9800	16	28	2	14,5	5	2	160	15,5
8	11900	2.02-8.08	18,5	4	10500	17,5	19	3	16	5	4	150	15
9	17400	10.03-5.09	14,5	6	17400	14,5	22	2	15,5	4	3	230	14
10	16200	10.03-9.09	18	7	12000	19,5	17	4	14	4	3	90	13
11	21500	9.04-16.11	16	5	14500	11,5	18	4	13	3	5	100	12,5
12	24200	3.05-14.08	14	3	18400	13,0	17	2	12	2	4	150	11,5
13	15750	14.05-8.12	13	2	9400	12,5	28	5	10	3	3	160	17
14	20400	2.05-11.11	12	4	10000	17	20	3	18	2	3	130	15,5
15	13700	16.06-9.12	17	7	14700	15	19	3	19	3	5	90	16,5

Завдання 5-8

№	N	O	P	R	Q	S	T	U	V	W	X	Y
1	10	12	3	6	5	11	1000	26	500	2	120	2,5
2	11	17	3	5	5	12,5	1200	34	600	2	160	3,0
3	14	12	3	6	4	12	1400	36	550	3	130	3,0
4	10	16	4	6	5	14	900	28	650	3	110	2,5
5	10	13	2	5	6	12	1000	26	450	3	100	4,5
6	16	15	5	6	6	15	1300	30	700	4	100	4,0
7	18	14	2	4	5	14,5	1200	32	600	2	90	3,5
8	15	16	2	4	5	11,5	1200	38	700	2	180	2,5
9	14	12	5	7	4	12	1000	28	600	4	180	3,5
10	13	10	5	3	7	14	1000	38	550	4	160	3,5
11	12	16	4	4	4	16	1400	40	600	4	160	4,5
12	10	18	3	4	6	11	1400	32	700	3	140	4,0
13	15	14	2	5	6	12,5	1000	36	700	2	90	3,5
14	14	15	3	5	5	16,5	1600	28	550	3	100	2,5
15	13	16	2	3	4	12,5	1300	30	800	3	130	1,5

Завдання 9-13

№	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	100	120	2,5	25	5	3	8	16	4	8	16	12	10
2	100	140	3	26	8	3	6,5	12	3	6	12	14	12
3	110	140	3	24	8	4	7,5	12	3	6	14	16	12
4	100	160	4	19	5	4	6,5	20	5	10	20	16	14
5	100	120	2,5	20	7	5	7	12	3	6	12	16	10
6	80	100	2,5	20	5	4	8	16	4	8	18	14	10
7	100	130	3,5	22	5	4	5,5	18	4,5	9	18	14	10
8	110	130	1,5	26	6	3	5,5	16	4	8	16	12	10
9	110	150	3	24	6	3	6	16	4	8	18	12	10
10	100	140	3	26	4	3	6	16	4	8	16	16	14
11	100	130	4,5	22	4	2	7	12	3	6	12	14	12
12	120	160	4	20	5	4	7,5	12	3	6	14	16	12
13	120	140	3,5	27	5	3	6,5	12	3	6	14	18	16
14	120	150	3,5	28	7	4	8	20	5	10	20	16	16
15	100	140	2,5	20	6	4	5,5	12	3	6	12	14	12

Завдання 14-16

№	N	O	P	R	Q	S	T	U	V	W	X
1	12	2	10	16	4	1	27,10	27,25	22	18	3
2	12	2	10	16	4	1	27,30	27,45	22	15	4
3	14	3	12	16	6	2	27,50	27,65	24	16	4
4	14	3	12	18	6	1,5	26,8	27,05	22	15	4
5	16	3	10	18	5	2	28,10	28,15	24	15	3
6	13	4	8	18	5	2	27,70	28,05	24	18	3
7	14	2	8	14	4	1	27,90	28,10	22	16	6
8	12	2	11	14	4	1	27,4	27,60	24	18	5
9	12	2	14	18	6	2,5	27,40	27,50	21	18	4
10	14	4	14	18	6	2,5	28,20	28,30	20	14	5
11	16	4	10	16	6	1,5	28,05	28,10	20	15	3
12	16	4	10	14	5	1,5	27,45	27,65	22	15	3
13	14	3	9	14	7	2	27,65	27,80	22	16	4
14	14	3	14	18	7	1	27,80	27,95	24	18	4
15	16	2	12	18	6	2	27,15	27,20	24	14	5

VII. СИСТЕМА ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

Сертифікація досягнень здобувачів здійснюється за допомогою прозорих процедур, що ґрунтуються на об'єктивних критеріях відповідно до Положення університету «Про оцінювання результатів навчання здобувачів вищої освіти» https://www.nmu.org.ua/ua/content/activity/us_documentsf

Досягнутий рівень компетентностей відносно очікуваних, що ідентифікований під час контрольних заходів, відображає реальний результат навчання студента за дисципліною. *Важливим критерієм оцінки є набуття вміння щодо вирішення фінансових*

задач з розрахунку й аналізу основних параметрів фінансових операцій, грошових потоків, фінансової ренти за різними схемами її здійснення та умов реалізації кредитних контрактів.

Оцінювання навчальних досягнень здобувачів НТУ «ДП» здійснюється за рейтинговою (100-бальною) та інституційною шкалами. Остання необхідна (за офіційною відсутністю національної шкали) для конвертації (переведення) оцінок мобільних здобувачів.

Шкали оцінювання навчальних досягнень здобувачів НТУ «ДП»

Рейтингова	Інституційна
90...100	відмінно / Excellent
74...89	добре / Good
60...73	задовільно / Satisfactory
0...59	незадовільно / Fail

Кредити навчальної дисципліни зараховуються, якщо здобувач отримав підсумкову оцінку не менше 60-ти балів. Нижча оцінка вважається академічною заборгованістю, що підлягає ліквідації відповідно до Положення про організацію освітнього процесу НТУ «ДП».

Під час поточного контролю лекційні заняття оцінюються шляхом визначення якості виконання контрольних конкретизованих тестових завдань.

Поточне оцінювання практичних занять відбувається на основі оцінок за виконання контрольних та індивідуальних завдань.

Поточна успішність складається: з успішності за підсумкову контрольну роботу (максимально оцінюється у 40 балів); оцінок за виконання контрольних та індивідуальних завдань під час самостійної роботи та на практичних заняттях (оцінюється 5 практичних робіт по 8 балів, максимально здобувач може отримати 40 балів); тестування на лекційних заняттях. Кожний тест являє собою кілька варіантів відповідей, одна з яких правильна. Правильна відповідь на одне тестове завдання дає здобувачеві 1 бал. Отже, 20 – це максимальна кількість набраних балів за тестові завдання.

Отримані бали за підсумкову контрольну роботу, тестування та за практичні роботи додаються. Максимально за поточною успішністю здобувач може набрати 100 балів

Здобувачі вищої освіти отримують підсумкову оцінку з навчальної дисципліни на підставі результатів поточного контролю або на підставі виконання ККР під час екзамену.

За наявності рівня результатів поточних контролів з усіх видів навчальних занять не менше 60 балів, підсумковий контроль здійснюється без участі здобувача шляхом визначення середньозваженого значення поточних оцінок.

Незалежно від результатів поточного контролю кожен здобувач вищої освіти під час іспиту має право виконувати ККР, яка містить завдання, що охоплюють ключові дисциплінарні результати навчання.

Зміст критеріїв спирається на компетентнісні характеристики, визначені НРК для першого (бакалаврського) рівня вищої освіти.

Критерії оцінювання практичного заняття

Поточне оцінювання практичних занять відбувається на основі оцінок за виконання контрольних та індивідуальних завдань, які передбачають самостійне опрацювання ситуаційних завдань з використанням сучасного інформаційного та програмного забезпечення.

Практичні роботи оцінюються максимально 8 балів за кожну практичну роботу як середньозважений результат усіх видів завдань практичної роботи (табл.6.1).

Таблиця 6.1

Критерії оцінювання рівня знань й навичок на практичних заняттях при розв'язанні задач та ситуаційних завдань

Рекомендована оцінка	Сутність оцінки
8 балів	Студент вміє здійснювати постановку й формалізацію фінансових задач для їх вирішення з використанням математичного апарату; відмінно володіє методичним інструментарієм та математичним апаратом для розрахунку й аналізу параметрів фінансових операцій. Всі фінансові розрахунки виконано правильно, у логічній послідовності відповідно до чинної методики, використано формули (алгоритми) з поясненням змісту окремих їх складових, зазначено одиниці виміру під час кожної дії. Розрахунки супроводжуються необхідними поясненнями. Змістовно інтерпретовано отримані результати фінансових розрахунків. Висновки до завдань теоретично й практично обґрунтовані, викладені науковою мовою, вірно використовується професійна термінологія. Студент виконує практичні завдання з глибоким аналізом і власними пропозиціями, що є основою для прийняття вірних управлінських рішень за фінансовими операціями, демонструє знання навчальної, методичної, наукової літератури, законодавчих і нормативних актів. Робота здана своєчасно. При захисті дана вірна відповідь на всі запитання.
6 - 7 балів	Студент вміє здійснювати постановку й формалізацію фінансових задач для їх вирішення з використанням математичного апарату; добре володіє методичним інструментарієм та математичним апаратом для розрахунку й аналізу параметрів фінансових операцій, але студентом допущені деякі прорахунки в рішенні практичних завдань та у фінансових розрахунках, коли за допомогою викладача студент швидко орієнтується і знаходить правильні відповіді. Не висвітлено деякі етапи виконання фінансових розрахунків. Допущено неточності в інтерпретації отриманих результатів розрахунків та аналізу фінансових операцій. Висновки до завдань теоретично й практично обґрунтовані, викладені науковою мовою, вірно використовується професійна термінологія. Але недостатньо обґрунтовано пропозиції щодо доцільності та вибору оптимального варіанту здійснення фінансових операцій. Робота здана своєчасно. При захисті дані вірні відповіді на 80% запитань.
4-5 балів	Студент з помилками здійснює постановку й формалізацію фінансових задач для їх вирішення з використанням математичного апарату; задовільно володіє методичним інструментарієм та математичним апаратом для розрахунку й аналізу параметрів фінансових операцій. В практичних завданнях надано відповіді не на всі поставлені питання, не дотримується логіка використання певної методики з виконання фінансових розрахунків; маютьсся суттєві методичні помилки в аналітичних розрахунках та тлумаченні термінів і понять, інтерпретації отриманих результатів фінансових

	розрахунків. Висновки до завдань теоретично й практично не обґрунтовані. Відсутні власні пропозиції щодо прийняття управлінських рішень за певними фінансовими операціями. Студент демонструє задовільне знання навчальної, методичної, наукової літератури, законодавчих і нормативних актів. Робота здана несвоєчасно. При захисті дана вірна відповідь на 60% запитань.
Менш 3 балів	Студент не володіє методичним інструментарієм та математичним апаратом для розрахунку й аналізу параметрів фінансових операцій. Розрахунки не відповідають завданню, допущено грубі помилки при використанні певної методики щодо виконання фінансових розрахунків, терміни використовуються невірно, кінцева відповідь невірна. Відсутня інтерпретація отриманих результатів розрахунків. Висновки до завдань теоретично й практично не обґрунтовано. Робота здана несвоєчасно

Критерії оцінювання письмової комплексної контрольної роботи з дисципліни «Фінансова математика»

Комплексна контрольна робота оцінюється за двома складовими: виконання тестових завдань та опрацювання ситуаційних задач з використанням сучасного інформаційного та програмного забезпечення.

ККР *максимально оцінюється в 100 балів* (виконання 20 тестів – 1 бал тест; 4 задачі – 20 балів задача).

Розв'язування кожної задачі ККР *максимально оцінюється в 20 балів за таких умов:*

19 – 20 балів – результат обчислень правильний, аналітичні розрахунки всіх параметрів фінансових операцій виконано правильно, з використанням відповідних методів і моделей, у логічній послідовності; розрахунки супроводжуються необхідними поясненнями; за результатами обчислень зроблено власний обґрунтований висновок; не помічено граматичних та орфографічних помилок;

16 – 18 балів – аналітичні розрахунки параметрів фінансових операцій виконано в цілому правильно, в логічній послідовності, з використанням відповідних методів і моделей, але мають місце незначні арифметичні помилки, розрахунки супроводжуються недостатніми поясненнями; за їхніми результатами зроблено власний обґрунтований висновок; немає граматичних та орфографічних помилок;

14 – 17 балів – аналітичні розрахунки параметрів фінансових операцій виконано з методичними помилками та порушеннями логічної послідовності виконання; обчислення не супроводжуються достатніми поясненнями; висновок за їхніми результатами не достатньо обґрунтований; є помилки граматичні та орфографічні;

10 – 13 балів - аналітичні розрахунки параметрів фінансових операцій виконано з грубими методичними і арифметичними помилками, порушеннями логічної послідовності виконання; не подано пояснень до розрахунків; немає висновків за їхніми результатами, багато граматичних та орфографічних помилок, які ускладнюють розуміння тексту або спотворюють його;

менш 10 балів – аналітичні розрахунки параметрів фінансових операцій не виконано.

VIII. ТЕХНІЧНЕ ОБЛАДНАННЯ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ

Під час навчальних занять кожен здобувач повинен мати гаджет з можливістю зв'язку з мережею Інтернету; налаштований доступ до застосунків Microsoft Office: Teams, Moodle; Zoom; інстальований на ПК та мобільному гаджеті пакет програм Microsoft Office (Word, Excel, Power Point); активований акаунт університетської пошти (student.i.p.@nmu.one) на ресурсі Office365.

X. ГЛОСАРІЙ

Англійська практика (точні відсотки з точною кількістю днів позики) (англ. English practice) – метод відсоткових розрахунків, за якого тривалість року вважають такою, що дорівнює 365 або 366 дням, а кількість днів між датами отримання та погашення кредиту розраховують точно за календарем.

Антисипативний (попередній) метод нарахування відсотків (англ. anticipating method of charging interest) – полягає в тому, що відсотки нараховують на початку розрахункового періоду, до того ж за основу (100 %) беруть суму боргу, що підлягає погашенню.

Ануїтет (фінансова рента) (англ. annuity) – односпрямований грошовий потік з однаковими інтервалами часу. Будь-який елемент грошового потоку називають членом ануїтету (членом ренти), а величину постійного часового інтервалу між двома його послідовними елементами – періодом ануїтету (періодом ренти); ряд послідовних платежів, здійснених через однакові проміжки часу.

Ануїтет безперервний (англ. continuous annuity) – ануїтет, у якому платежі здійснюють так часто, що їх можна розглядати як безперервні.

Ануїтет безстроковий (англ. perpetual annuity) – ануїтет, кількість елементів якого може бути необмежено великою.

Ануїтет відстрочений (англ. deferred annuity) – ануїтет, початок першого періоду якого зрушено вправо за часовою віссю від моменту часу, на який відбувається аналіз.

Ануїтет змінний (англ. variable annuity) – ануїтет із неоднаковими елементами.

Ануїтет постнумерандо (англ. ordinary annuity) – ануїтет, кожен елемент якого має місце в кінці відповідного періоду.

Ануїтет пренумерандо (англ. annuity due) – ануїтет, кожен елемент якого має місце на початку відповідного періоду.

Ануїтет терміновий (англ. term annuity) – ануїтет, кількість періодів якого обмежено.

Ануїтет умовний (англ. contingent annuity) – ануїтет, виплата якого є залежною від настання деякої події (наприклад, платежі з особистого страхування).

Банк (англ. bank) – установа, яка має ліцензію на здійснення операцій із фінансовими активами, включаючи приймання вкладів, здійснення розрахунків, кредитування, емісії грошей, операцій із золотом, іноземною валютою та ін.

Банківський кредит (англ. banking credit) – кредит, що надає один суб'єкт угоди (переважно фінансовий інститут) іншому у вигляді грошової суми.

Безперервні відсотки (англ. continuous compounding) – нарахування відсотків на суму, видану (отриману) у кредит, або дисконтування наращених сум, що відбувається з частотою, за якої їх можна розглядати як безперервні.

Вартість (англ. value) – грошова оцінка цінності певного об'єкта.

Вартість внутрішня, або теоретична (англ. intrinsic value) – вартість фінансового активу, розрахована шляхом дисконтування за прийнятною ставкою очікуваних надходжень, генерованих цим активом.

Вексель (англ. bill) – письмове боргове зобов'язання точно встановленої законом форми, що видає позичальник (векселедавець) кредитору (векселедержателю); надає останньому право вимагати від позичальника сплати до певного терміну суми грошей, вказаної у векселі.

Відкладена рента (англ. deferred annuity) – рента, термін реалізації якої відкладають на час, указаний у контракті.

Відсотки безперервні (англ. continuous compounding) – припускають безперервне нарахування відсотків у часі в теоретичних фінансових розрахунках – відсотки, що нараховують за нескінченно малі проміжки часу.

Відсотки дискретні (англ. discrete compounding) – припускають, що нарахування відсотків здійснюють дискретно, тобто в окремі (зазвичай рівновіддалені) моменти часу, причому періодом нарахування беруть рік, півріччя, квартал, місяць.

Відсотки звичайні (комерційні) (англ. ordinary interests) – відсотки, які визначають виходячи з наближеної кількості днів у році, кварталі та місяці (відповідно, 360, 90, 30).

Відсотки прості (англ. simple interest) – нарахування відсотків протягом усього терміну кредиту на одну і ту ж величину капіталу, наданого у кредит, тобто ставку відсотка застосовують до однієї й тієї ж початкової суми протягом усього терміну позики.

Відсотки складні (англ. compound interest) – нарахування відсотків, за якого нараховані відсотки на початкову суму додають до цієї суми, а в таких періодах відсотки нараховують на вже наращену суму. У разі використання цього методу база для нарахування відсотків постійно змінюється.

Відсотки точні (англ. exact interests) – відсотки, які визначають виходячи з точної кількості днів у році (365 або 366), кварталі (від 89 до 92), місяці (від 28 до 31).

Відсоткова (процентна) ставка (англ. interest rate) – величина, що характеризує прибутковість кредитної угоди. Вона показує, яку частку від суми виданого кредиту буде повернуто власнику капіталу у вигляді доходу.

Відсоток (процентні гроші) (англ. Interest) – величина доходу від надання в борг деякої грошової суми.

Грошовий потік (потік готівки) (англ. cash flow) – приплив або відплив капіталу як результат діяльності за певний період. Як елемент грошового потоку може виступати дохід, витрати, прибуток, платіж та ін.

Дата погашення (дата викупівлі) облігації (англ. put date) – день, коли має бути виплачено номінальну вартість облігації або ціну викупівлі. Дата погашення визначає термін облігації.

Девальвація (англ. devaluation) – офіційне зниження курсу національної валюти.

Девізи (англ. paper exchanges,) – платіжні засоби (частіше в іноземній валюті), за допомогою яких здійснюють міжнародні розрахунки; до девізів належать: перекази, чеки, акредитиви, векселі, іноземні банкноти й іноземні монети.

Декурсивний метод (декурсивне нарахування відсотків) (англ. decursive method,) – метод відсоткових розрахунків, за якого нарахування відсотків здійснюють в кінці розрахункового періоду.

Депозит (англ. deposit) – матеріальна цінність (зазвичай гроші або цінні папери), що вносять до державної чи комерційної установи (банку, ощадної каси, нотаріальної контори та ін.) та яка підлягає поверненню.

Депозитний сертифікат (англ. certificate of deposit) – письмове свідоцтво кредитної установи (банку-емітента) про депонування грошових коштів, яке засвідчує право власника на отримання після закінчення встановленого терміну суми депозиту та відсотків за ним.

Дефляція (англ. deflation,) – процес, що характеризується зниженням загального рівня цін в економіці.

Дивіденд (англ. dividend) – частина прибутку компанії, що припадає на одну акцію та яку розподіляють серед акціонерів компанії.

Дивізор (процентний ключ) (англ. interest divisor) – відношення взятої кількості днів у році до відсоткової ставки; чисельно дорівнює такій кількості грошових одиниць, з якої за цієї відсоткової ставки виходить 1 грошова одиниця доходу на день.

Дисконт (англ. discount) – а) дохід, отриманий за обліковою ставкою; б) відсоток, що стягує банк за обліку векселів; в) власне облікова ставка; г) знижка (наприклад, із ціни товару, кінцевої суми боргу тощо).

Дисконтний множник (англ. discount factor) – показник, що характеризує, у скільки разів початкова сума позики менша від наращеної суми. Коефіцієнт, що показує яку частку становить початкова сума позики в остаточній величині боргу (наращеній сумі).

Дисконтування (англ. discounting,) – процес, зворотний нарахуванню, в якому задані очікувана в майбутньому сума до отримання та ставка.

Дисконтування банківське (англ. bank discounting) – ґрунтується на використанні облікової ставки, тобто відсотки за користування позикою нараховують на суму, що підлягає сплаті в кінці терміну позики.

Дисконтування математичне (англ. mathematical discounting) – дисконтування, здійснюване за відсотковою ставкою. Математичне дисконтування – вид дисконтування, що становить розв'язання задачі, зворотної до нарахування початкової позики.

Дисконт-фактор (англ. discount-factor) – відношення початкової грошової суми до суми, отриманої в результаті фінансової операції з початковою грошовою сумою.

Дискретні ренти (англ. gale) – ренти, за якими платежі здійснюють у певні терміни (рік, кілька разів на рік або терміни, що перевищують рік).

Еквівалентна відсоткова ставка (англ. equivalent interest rate) – ставка, що забезпечує такий же фінансовий результат, як і під час використання альтернативної відсоткової ставки.

Ефективна відсоткова ставка (англ. effective rate) – ставка, що відображає реальний дохід від комерційної угоди, тобто ставка, за якої фактично було нараховано відсотки на початкову суму.

Інвестиційний проект (англ. investment project) – сукупність інвестицій і доходів, що генеруються ними.

Інвестиція (англ. investment, рос. инвестиция) – вкладення капіталу на довгостроковій основі.

Інвестор (англ. investor) – юридична або фізична особа, що робить інвестицію із метою отримання доходу в майбутньому.

Індекс (англ. index) – відносна величина, що характеризує співвідношення двох значень показника, який описує одне й те саме явище.

Індекс купівельної спроможності грошей (англ. purchasing power index) – величина, зворотна індексу цін.

Індекс рентабельності (англ. profitability index) – відношення величини чистого зведеного доходу до величини стартових інвестицій, що характеризує ефективність інвестиційних укладень.

Індекс цін (англ. price index) – відношення вартості певного набору товарів і послуг у цей період до вартості того ж набору в деякому базовому періоді.

Інфляційна премія (англ. inflation premium) – коригування ставки відсотків для компенсації знецінення грошей; додатковий дохід на цінні папери, установлений із метою компенсації їхнім власникам очікуваного збитку від інфляції.

Інфляція (англ. inflation) – процес, що характеризується підвищенням загального рівня цін в економіці; це, відповідно, є свідченням зниження купівельної спроможності грошей.

Іпотека (англ. mortgage) – застава підприємства, будови, будівлі, споруди, іншого об'єкта, безпосередньо пов'язаного із землею, разом із земельною ділянкою або правом користування ним. Під заставу нерухомості банк видає іпотечну позику, яку часто називають також іпотекою.

Коефіцієнт нарощення ренти (англ. future value annuity factor) – показує, у скільки разів нарощена сума ренти більша від першого члена ренти.

Коефіцієнт погашення заборгованості (англ. repayment factor) – показує, яку частку залишку боргу разом з нарахованими відсотками має бути сплачено в цей період.

Коефіцієнт зведення ренти (англ. present value annuity factor) – показує, скільки рентних платежів міститься в сучасній величині.

Конверсія валюти (англ. switching currency) – обмін однієї валюти на іншу за чинним валютним курсом.

Конверсія позики (англ. debt conversation) – зміна початкових умов позики (відсотків, терміну погашення, терміну купонних виплат).

Конверсія рент (англ. annuities conversion) – зміна умов виплати ренти, тобто часткова або повна зміна початкових параметрів ренти, що приводить до утворення нової ренти і, отже, до зміни фінансових результатів угоди.

Консолідація платежів (англ. payments consolidation) – об'єднання декількох платежів в один зі встановленням єдиного терміну погашення.

Консолідація рент (англ. annuities consolidation) – об'єднання декількох рент в одну, засноване на принципі фінансової еквівалентності.

Короткострокові позики (англ. short-term loan) – позики, що надають на термін до одного року з одноразовим нарахуванням відсотків.

Крос-курс (перехресний курс) (англ. cross rate) – співвідношення між двома валютами, яке визначають на основі курсу цих валют щодо будь-якої третьої валюти.

Купон (англ. coupon) – частина цінного паперу у вигляді відривного талона, що надає право на отримання суми відсотків після настання терміну, зазначеного в талоні.

Купонна прибутковість (англ. coupon yield) – процентний дохід від номіналу облігації, який указаний на цінному папері та який емітент зобов'язаний сплатити за кожним купоном.

Купонна процентна ставка (норма облігації) (англ. coupon rate) – відношення суми, що виплачують за рік (сума відсотків) до номіналу, виражене у відсотках.

Курс облігації (англ. bond rate) – купівельна ціна облігації в розрахунку на 100 грошових одиниць її номіналу.

Курсова вартість акції (курс акції) (англ. share price) – ціна акції, що складається на фондовому ринку під час її купівлі або продажу.

Лінія капіталу (англ. capital line) – співвідношення, яке пов'язує показники ефективності цінних паперів, що складають інвестиційний портфель, і ступінь ризику портфеля.

Ломбардний кредит (англ. collateral credit) – короткостроковий кредит під заставу легкореалізованого рухомого майна.

Майбутня вартість (англ. future value) – сума інвестованих у теперішній момент коштів, в яку вони мають перетворитись через певний проміжок часу з урахуванням певної ставки відсотка.

Майбутня вартість грошового потоку (англ. future value of cashflow) – сума всіх нарощених елементів цього потоку.

Маржа (англ. margin) – величина, що виражає різницю між двома певними показниками (наприклад, між ціною покупця та продавця). Зокрема, за допомогою маржі можна характеризувати змінну відсоткову ставку, коли фіксується сама ставка, а змінюється в часі її база та маржа – величина (постійна або змінна) надбавки до бази. Крім того, під маржею розуміють гарантійний внесок у терміновій біржовій торгівлі.

Маржинальна (гранична) вартість капіталу (англ. marginal cost of capital) – зміна в загальній сумі прибутку від величини інвестицій, необхідних для задовільнення вимоги інвестора, з урахуванням нових інвестицій і їх структури.

Множник нарощення (англ. accumulation factor) – величина, яка показує, у скільки разів зріс початковий капітал, характеризує майбутню вартість 1-ї грошової одиниці через кілька відсоткових періодів виходячи зі ставки нарощення за період.

Наведена (сучасна) величина ренти (англ. current value of the ren) – один з узагальнювальних показників ренти: сума всіх членів ренти, зменшених (дисконтованих) на величину відсоткової ставки на певний момент часу, що співпадає з початком потоку платежів або передує йому. Показує, яку суму треба мати спочатку, щоб, розбивши її на рівні внески, на які б нараховувались установлені відсотки протягом терміну ренти, можна було б забезпечити отримання нарощеної суми.

Наведена вартість (англ. current value) – величина, знайдена в результаті процесу дисконтування. Оцінює величину, очікувану до отримання в майбутньому, з позиції моменту, до якого здійснюється приведення (дисконтування).

Наведена вартість грошового потоку (англ. current value of cash flow) – сума всіх дисконтованих елементів цього потоку.

Нарощена сума (англ. accumulated value, amount) – сума початкового капіталу та нарахованих на нього відсотків; отримується в результаті здійснення процесу нарощення.

Нарощена сума ренти (нарощена сума потоку платежів) (англ. Future value annuity) – сума всіх членів потоку платежів з нарахованими на них відсотками на кінець терміну ренти, тобто на дату останньої виплати.

Нарощення (англ. accumulation, accretion) – фінансова операція, за якої відбувається розрахунок майбутньої вартості сьогоднішньої інвестиції із заданим терміном і відсотковою ставкою.

Німецька практика (звичайні відсотки з наближеним числом днів позики) (англ. German practice) – метод відсоткових розрахунків, за якого термін позики, не дорівнює цілому числу років, визначається в неповному році кількістю місяців по 30 днів в кожному, починаючи з моменту видачі позики та до моменту її погашення, та точним числом днів позики в неповному місяці; тривалість року приймається дорівнює 360 дням. Для звичайного відсотка тривалість визначають виходячи з приблизного числа днів у році – 360, кварталі – 90, місяці – 30.

Номінальна вартість акції (англ. face value of a stock) – зазначена на акції ціна, за якою вона продається під час первинного розміщення акціонерного капіталу.

Номінальна вартість облігації (англ. face value of a bond) – зазначена на облігації грошова сума, яку позичальник зобов'язується повернути її власникові після закінчення терміну облігації.

Номінальна відсоткова ставка (англ. nominal interest rate) – передбачена кредитною угодою річна відсоткова ставка за умови нарахування відсотків кілька разів на рік.

Норма прибутку (англ. rate of return) – відношення прибутку до вихідного капіталу, що становить джерело генерування цього прибутку (найчастіше вимірюється у відсотках). У фінансових обчисленнях норму прибутку нерідко називають дохідністю.

Облігація (англ. bond) – цінний папір, що засвідчує внесення її власником грошових коштів емітенту та зобов'язання останнього відшкодувати власнику номінальну вартість облігації в заздалегідь встановлений термін зі сплатою фіксованого відсотка.

Облік векселя (англ. bill discounting) – купівля векселя у власника до настання терміну оплати за ціною, меншою тієї суми, яка повинна бути виплачена за векселем в кінці терміну.

Облікова ставка (англ. bank-rate) – ставка, яка використовується для обліку векселів, в антисипативному методі нарахування відсотків і знаходженні сучасної величини, а також як відсоткова ставка Центрального банку.

Овердрафт (англ. overdraft) – форма короткострокового кредиту, надання якого здійснюється списанням коштів на рахунку клієнта банку (понад залишок на рахунку), в результаті чого утворюється дебетове сальдо. О. використовується, коли величина платежу перевищує залишок коштів на рахунку клієнта.

Операційний лізинг (англ. operating lease) – оренда машин і устаткування, термін якої менше амортизаційного періоду устаткування.

Перекладний вексель (тратта) (англ. bill of exchange (draft)) – письмовий наказ кредитора (трасанта) позичальнику (трасату) про сплату суми, визначеної у векселі, третій особі (ремітенту) або пред'явнику, якщо вексель на пред'явника.

Період нарахування відсотків (англ. interest-paying period) – інтервал часу, до якого належить (застосовується) відсоткова ставка.

Період ренти (англ. annuity period) – інтервал часу між двома сусідніми рентними платежами.

Підприємницький ризик (англ. business risk) – ризик, пов'язаний з діяльністю компанії; обумовлений характером бізнесу компанії.

Портфель цінних паперів (англ. investment portfolio) – набір цінних паперів, що знаходяться в розпорядженні інвестора.

Потік платежів (англ. cash flow) – ряд послідовних виплат і надходжень. Виплати є від'ємними величинами, а надходження – додатними.

Поточна вартість (англ. present value, PV) – вартість майбутніх надходжень грошей, віднесена до поточного моменту, або проекція планованих до отримання грошей, через певний проміжок часу і за певної відсоткової ставки, на даний момент часу.

Практика розрахунку простих відсотків (англ. practice the calculation of simple interest) – розрізняє три варіанти розрахунку: (1) точні відсотки з точним числом днів позички (англійська або британська практика); (2) звичайні відсотки з точним числом днів позички (французька практика); (3) звичайні відсотки з наближеним числом днів позики (німецька практика).

Приблизне число днів позики (англ. approximate number of days the loan) – тривалість періоду нарахування визначають приблизно, вважаючи, що в місяці 30 днів.

Прибутковість фінансового активу (англ. return on assets) – відносний показник, який розраховують відношенням деякого доходу, що генерується цим активом, до величини вихідної інвестиції в нього.

Прибуток чистий (англ. net profit) – прибуток, доступний до розподілу серед власників.

Принцип нерівноцінності грошей (англ. inequality of money principle) – гроші, які належать до різних моментів часу, мають різну поточну вартість.

Принцип ринкової рівноваги фондового ринку (англ. the principle of market equilibrium stock market) – поняття засноване на тому, що всі цінні папери, які обертаються на ринку, є в будь-який час у продажу і, крім того, адміністрація фондових бірж передбачає ряд заходів, спрямованих на зменшення розриву в цінах попиту та пропозиції.

Процентне число (англ. interest number) – чисельник показника, який використовують у фінансовій практиці для обчислення відсоткового доходу; дорівнює добутку суми, наданої у кредит, на термін кредиту у днях.

Процентний ключ (дільник) (англ. interest divisor) – відношення взятої кількості днів у році до відсоткової ставки; чисельно дорівнює такій кількості грошових одиниць, із якої за цієї відсоткової ставки виходить 1 грошова одиниця доходу на день.

Реальні інвестиції (англ. real investment) – фінансові вкладення в рухоме і нерухоме майно: будівлі і споруди, машини і обладнання, транспортні засоби, обчислювальну техніку, а також витрати на геологорозвідувальні роботи.

Реінвестування (англ. reinvestment) – неодноразове повторення процесу інвестування суми депозиту разом з нарахованими на неї в попередньому періоді відсотками. Вкладання доходів в певний проект виробничого або фінансового характеру з наміром надалі отримати на них додатковий дохід. Купівля додаткових цінних паперів на відсотки і дивіденди від уже наявних інвестицій в цінні папери або від нових цінних паперів на виручку від реалізації або погашення за настанням терміну цінних паперів, що раніше належали інвестору. Цей термін зазвичай застосовується щодо номінальної вартості облігацій, за якою здійснюється погашення боргу або відсотків, що нараховуються. Так як основний час погашення облігацій і відсоткових купонів по ним – 1 січня і 1 липня, то на ці ж дати, переважно, припадає і підвищений попит, пов'язаний з реінвестуванням капіталу.

Рента р-термінова (англ. p-terms annuity) – рента, що передбачає р рівних платежів у році.

Рента вірна (англ. absolute rent) – рента, члени якої підлягають безумовній виплаті.

Рента вічна (безстрокова, нескінченна рента) (англ. perpetual annuity) – рента з нескінченним числом членів, тобто ануїтет, що припускає постійну виплату доходу. Нарощена сума такої ренти наближається до нескінченності.

Рента змінна (англ. variable annuit) – потік послідовних платежів, члени якого не є постійними величинами.

Рента негайна (англ. immediate annuity) – рента, термін якої починається негайно.

Рента постійна (англ. permanent rent) – рента з рівними членами.

Рента постнумерандо (звичайна рента) (англ. ordinary annuity) – рента, в якій платежі здійснюються в кінці відповідних періодів (року, півріччя, кварталу і т. д.).

Рента пренумерандо (англ. annuity due) – рента, в якій платежі здійснюються на початку відповідних періодів (року, півріччя, кварталу і т. д.).

Рента умовна (англ. imputed rent) – рента, виплата членів якої ставиться в залежність від настання деякої випадкової події.

Ренти змішані (англ. hybrid annuity) – метод нарахування процентних платежів у фінансових рентах, який поєднує нарахування відсотків за цілі річні періоди за ставкою складних відсотків, а на платежі, що вносяться протягом року, – за ставкою простих відсотків.

Рівняння еквівалентності (англ. equivalence equation) – рівняння, в якому сума замінюваних платежів, приведених до якогось одного моменту часу, прирівнюється до суми платежів за новим зобов'язанням, приведених до тієї ж дати. Використовується зі зміною умов контракту.

Річна рента (англ. annual rent) – рента, за якою платежі здійснюються раз на рік.

Своп (англ. swap) – валютна операція, за якою відбувається одночасна купівля і продаж іноземної валюти на приблизно рівні суми за умови розрахунків по них на різні дати.

Сила росту (англ. increase force) – відносний приріст нарощеної суми до нарощеної суми за нескінченно малий проміжок часу.

Споживчий кредит (англ. consumer loan) – кредит, який надає банк, фінансова компанія або роздрібний торговець окремішій особі на споживчі цілі.

Ставка (англ. rate) – відношення процентних грошей, сплачених (отриманих) за одиницю часу (зазвичай за рік), до деякого базового капіталу, виражене в десяткових дробах або у відсотках.

Ставка відсоткова номінальна (англ. nominal interest rate) – вихідна базова (переважно, річна) відсоткова ставка, що вказується в угодах. Прибутковість, що виражається цією ставкою, не скоригована на інфляцію.

Ставка відсоткова плаваюча (англ. floating interest rate) – відсоткова ставка, розмір якої переглядається протягом періоду нарахування відсотків.

Ставка відсоткова позитивна (англ. positive interest rate) – будь-яка ставка, за якої буде відбуватись реальне збільшення вартості капіталу при даному індексі інфляції.

Ставка відсоткова реальна (англ. real interest rate) – відсоткова ставка, що нараховується в умовах елімінування впливу інфляції. Реальна відсоткова ставка завжди менше номінальної за рахунок негативного впливу інфляції.

Ставка дисконтування (англ. discount rate) – ставка, яка використовується для розрахунку приведеної вартості. В якості ставки дисконтування може використовуватись як облікова, так і відсоткова ставка.

Ставка ефективна (англ. effective rate) – річна ставка складних відсотків, що забезпечує той же фінансовий результат, що і нарахування відсотків кілька разів на рік за номінальною ставкою, поділеною на число періодів нарахування.

Ставка інвестування (інвестиційна прибутковість) (англ. Investment rate) – відсоткова ставка, що характеризує ефективність інвестування, тобто віддачу на вкладений капітал.

Ставка купонна (англ. coupon rate) – відсоткова ставка, що визначає періодичний дохід по облігації і оголошується під час емісії.

Ставка нарощення (англ. accrual rate) – ставка, яка використовується для розрахунку майбутньої вартості.

Ставка номінальна (англ. nominal rate) – річна ставка складних відсотків за числом періодів нарахування на рік. Тоді за кожен період відсотки нараховують за ставкою.

Ставка погашення боргу (англ. loan repayment rate) – показник, що характеризує величину частки виплати основного боргу в певний період.

Ставка порівняння (англ. comparison rate) – показник, який використовується для порівняння вигідності альтернативних комерційних контрактів.

Ставки еквівалентні (англ. equivalent rate) – ставки, що призводять до одного фінансового результату

Сучасна величина потоку платежів (англ. present value of cash flow) – сума всіх його членів, дисконтованих (приведених) на деякий момент часу, що співпадає з початком потоку платежів або передує йому.

Термін облігації (англ. term bond) – середньозважена величина, яка визначає середній термін усіх виплат за облігаціями.

Термін окупності інвестицій (період окупності) (англ. pay back period) – тривалість періоду, протягом якого сума чистих доходів, дисконтованих на момент завершення інвестицій, дорівнює сумі приведених на цей же момент інвестицій.

Термін ренти (англ. term annuity) – час від початку реалізації ренти до моменту нарахування останнього платежу.

Точне число днів позики (англ. exact day interest) – тривалість періоду нарахування процентів за позикоюю.

Точний відсоток (англ. exact interest) – тривалість визначають, виходячи з точного числа днів: для року беруть 365 або 366, для кварталу – від 89 до 92, для місяця від 28 до 31.

Фінансовий актив (англ. financial asset) – документ, що підтверджує право власника на частину власності або прибутку фірми, яка випустила документ; кошти.

Фінансовий лізинг (англ. financial leasing) – угода, яка передбачає протягом періоду своєї дії виплату сум, що покривають повну вартість амортизації взятого в оренду обладнання або більшу її частину, а також прибуток орендодавця.

Фінансовий ризик (англ. financial risk) – ймовірність фінансових втрат унаслідок непередбачених змін у доходах, витратах або ринкових умовах.

Французька практика (звичайні відсотки з точним числом днів позички) (англ. French practice) – метод відсоткових розрахунків, коли тривалістю року вважають 360 днів, а число днів між датами отримання та погашення кредиту розраховують як різницю календарних днів.

Ціна капіталу (англ. cost of capital) – відношення суми, сплаченої за використання позикових фінансових ресурсів, до загального обсягу цих ресурсів; виражається у відсотках.

Член ренти (англ. annuity member) – величина окремого рентного платежу.

Х. РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

1. Василевич Л.Ф., Семеняка С.О. Фінансова математика : навч. посіб. Київ : ун-т ім. Б. Грінченка, 2020. 228 с.
2. Гадецька С.В., Савченко Г.О. Фінансова математика : навч. посіб. Львів : Новий світ – 2000, 2014. 214 с.
3. Заболоцький М. В., Прокопишин І.А. Основи фінансової математики : навч. посіб. Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2016. 144с.
4. Іваненко Т.В. Основи фінансової математики : підручник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 200 с.
5. Панасенко О.В., Прокопович О.В. Фінансова математика : навч. посіб. [Електронний ресурс]. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. 264 с.
6. Соляник Л.Г. Фінансова математика. Практикум для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 072 Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок. Дніпро : НТУ «ДП», 2022. 101 с.
7. Соляник Л.Г. Фінансова математика. Методичні рекомендації до організації самостійної роботи для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 072 Фінанси, банківська справа та страхування. Дніпро : НТУ «ДП», 2022. 200 с.

Інформаційні Інтернет-ресурси

1. База даних «Законодавство України». URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws>.
2. Бюлетень Національного банку України: щомісячне аналітично-статистичне видання Національного банку України: офіц. сайт НБУ. URL: <https://bank.gov.ua/>.
3. Електронний ресурс «Фінансовий портал». URL: <https://index.minfin.com.ua/economy/gdp/>.
4. Закони України (чинне законодавство на 01.09.2019). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/main/index>.
5. Офіційний сайт Національного банку України. URL: <http://www.bank.gov.ua>.
6. Офіційний сайт Міністерства фінансів України. URL: <http://www.minfin.gov.ua>.
7. Про банки і банківську діяльність [Електронний ресурс] : Закон України № 2121-III від 07.12.2000 р. URL: <http://zakon2.rada.gov.ua>.
8. Про інформацію [Електронний ресурс] : Закон України від 02.10.1992 № 2657-XII [зі змін. та доп.]. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2657-12#Text> – Назва з екрана.
9. Статистичний бюлетень: матеріали Національного банку України. URL: <https://bank.gov.ua/ua/%2520Statist/Electronic%2520bulletin/data/stat.pdf>.
10. Статистичні дані Міністерства фінансів України : офіц. сайт Міністерства фінансів України. URL: <https://www.kmu.gov.ua/catalog/ministerstvo-finansiv-ukraini>.

ДОДАТОК А

ДОВІДКОВІ ФІНАНСОВІ ТАБЛИЦІ

Таблиця А.1

Множники нарощування складних процентів: $M(n; r) = (1 + r)^n$

rt	1 %	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%
1	1,0100000	1,0200000	1,0300000	1,0400000	1,0500000	1,0600000	1,0700000	1,0800000	1,0900000	1,1000000	1,1100000	1,1200000	1,1300000
2	1,0201000	1,0404000	1,0609000	1,0816000	1,1025000	1,1236000	1,1449000	1,1664000	1,1881000	1,2100000	1,2321000	1,2544000	1,2769000
3	1,0303010	1,0612080	1,0927270	1,1248640	1,1576250	1,1910160	1,2250430	1,2597120	1,2950290	1,3310000	1,3676310	1,4049280	1,4428970
4	1,0406040	1,0824322	1,1255088	1,1698586	1,2155063	1,2624770	1,3107960	1,3604890	1,4115816	1,4641000	1,5180704	1,5735194	1,6304736
5	1,0510101	1,1040808	1,1592741	1,2166529	1,2762816	1,3382256	1,4025517	1,4693281	1,5386240	1,6105100	1,6850582	1,7623417	1,8424352
6	1,0615202	1,1261624	1,1940523	1,2653190	1,3400956	1,4185191	1,5007304	1,5868743	1,6771001	1,7715610	1,8704146	1,9738227	2,0819518
7	1,0721354	1,1486857	1,2298739	1,3159318	1,4071004	1,5036303	1,6057815	1,7138243	1,8280391	1,9487171	2,0761602	2,2106814	2,3526055
8	1,0828567	1,1716594	1,2667701	1,3685691	1,4774554	1,5938481	1,7181862	1,8509302	1,9925626	2,1435888	2,3045378	2,4759632	2,6584442
9	1,0936853	1,1950926	1,3047732	1,4233118	1,5513282	1,6894790	1,8384592	1,9990046	2,1718933	2,3579477	2,5580369	2,7730788	3,0040419
10	1,1046221	1,2189944	1,3439164	1,4802443	1,6288946	1,7908477	1,9671514	2,1589250	2,3673637	2,5937425	2,8394210	3,1058482	3,3945674
11	1,1156683	1,2433743	1,3842339	1,5394541	1,7103394	1,8982986	2,1048520	2,3316390	2,5804264	2,8531167	3,1517573	3,4785500	3,8358612
12	1,1268250	1,2682418	1,4257609	1,6010322	1,7958563	2,0121965	2,2521916	2,5181701	2,8126648	3,1384284	3,4984506	3,8959760	4,3345231
13	1,1380933	1,2936066	1,4685337	1,6650735	1,8856491	2,1329283	2,4098450	2,7196237	3,0658046	3,4522712	3,8832802	4,3634931	4,8980111
14	1,1494742	1,3194788	1,5125897	1,7316764	1,9799316	2,2609040	2,5785342	2,9371936	3,3417270	3,7974983	4,3104410	4,8871123	5,5347525
15	1,1609690	1,3458683	1,5579674	1,8009435	2,0789282	2,3965582	2,7590315	3,1721691	3,6424825	4,1772482	4,7845895	5,4735658	6,2542704
16	1,1725786	1,3727857	1,6047064	1,8729812	2,1828746	2,5403517	2,9521637	3,4259426	3,9703059	4,5949730	5,3108943	6,1303937	7,0673255
17	1,1843044	1,4002414	1,6528476	1,9479005	2,2920183	2,6927728	3,1588152	3,7000181	4,3276334	5,0544703	5,8950927	6,8660409	7,9860778
18	1,1961475	1,4282462	1,7024331	2,0258165	2,4066192	2,8543392	3,3799323	3,9960195	4,7171204	5,5599173	6,5435529	7,6899658	9,0242680
19	1,2081090	1,4568112	1,7535061	2,1068492	2,5269502	3,0255995	3,6165275	4,3157011	5,1416613	6,1159090	7,2633437	8,6127617	10,1974228
20	1,2201900	1,4859474	1,8061112	2,1911231	2,6532977	3,2071355	3,8696845	4,6609571	5,6044108	6,7274999	8,0623115	9,6462931	11,5230878
21	1,2323919	1,5156663	1,8602946	2,2787681	2,7859626	3,3995636	4,1405624	5,0338337	6,1088077	7,4002499	8,9491658	10,8038483	13,0210892
22	1,2447159	1,5459797	1,9161034	2,3699188	2,9252607	3,6035374	4,4304017	5,4365404	6,6586004	8,1402749	9,9335740	12,1003101	14,7138308
23	1,2571630	1,5768993	1,9735865	2,4647155	3,0715238	3,8197497	4,7405299	5,8714636	7,2578745	8,9543024	11,0262672	13,5523473	16,6266288
24	1,2697346	1,6084372	2,0327941	2,5633042	3,2250999	4,0489346	5,0723670	6,3411807	7,9110832	9,8497327	12,2391566	15,1786289	18,7880905
25	1,2824320	1,6406060	2,0937779	2,6658363	3,3863549	4,2918707	5,4274326	6,8484752	8,6230807	10,8347059	13,5854638	17,0000644	21,2305423
26	1,2952563	1,6734181	2,1565913	2,7724698	3,5556727	4,5493830	5,8073529	7,3963532	9,3991579	11,9181765	15,0798648	19,0400721	23,9905128

Продовження таблиці А.1

rt	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%	21 %	22%	23%	24%	25%	26%
1	1,1400000	1,1500000	1,1600000	1,1700000	1,1800000	1,1900000	1,2000000	1,2100000	1,2200000	1,2300000	1,2400000	1,2500000	1,2600000
2	1,2996000	1,3225000	1,3456000	1,3689000	1,3924000	1,4161000	1,4400000	1,4641000	1,4884000	1,5129000	1,5376000	1,5625000	1,5876000
3	1,4815440	1,5208750	1,5608960	1,6016130	1,6430320	1,6851590	1,7280000	1,7715610	1,8158480	1,8608670	1,9066240	1,9531250	2,0003760
4	1,6889602	1,7490063	1,8106394	1,8738872	1,9387778	2,0053392	2,0736000	2,1435888	2,2153346	2,2888664	2,3642138	2,4414063	2,5204738
5	1,9254146	2,0113572	2,1003417	2,1924480	2,2877578	2,3863537	2,4883200	2,5937425	2,7027082	2,8153057	2,9316251	3,0517578	3,1757969
6	2,1949726	2,3130608	2,4363963	2,5651642	2,6995542	2,8397609	2,9859840	3,1384284	3,2973040	3,4628260	3,6352151	3,8146973	4,0015041
7	2,5022688	2,6600199	2,8262197	3,0012421	3,1854739	3,3793154	3,5831808	3,7974983	4,0227108	4,2592760	4,5076667	4,7683716	5,0418952
8	2,8525864	3,0590229	3,2784149	3,5114533	3,7588592	4,0213853	4,2998170	4,5949730	4,9077072	5,2389094	5,5895067	5,9604645	6,3527880
9	3,2519485	3,5178763	3,8029613	4,1084003	4,4354539	4,7854486	5,1597804	5,5599173	5,9874028	6,4438586	6,9309883	7,4505806	8,0045128
10	3,7072213	4,0455577	4,4114351	4,8068284	5,2338356	5,6946838	6,1917364	6,7274999	7,3046314	7,9259461	8,5944255	9,3132257	10,0856862
11	4,2262323	4,6523914	5,1172647	5,6239892	6,1759260	6,7766737	7,4300837	8,1402749	8,9116503	9,7489137	10,6570876	11,6415322	12,7079646
12	4,8179048	5,3502501	5,9360270	6,5800674	7,2875926	8,0642417	8,9161004	9,8497327	10,8722134	11,9911638	13,2147887	14,5519152	16,0120354
13	5,4924115	6,1527876	6,8857914	7,6986788	8,5993593	9,5964476	10,6993205	11,9181765	13,2641003	14,7491315	16,3863379	18,1898940	20,1751646
14	6,2613491	7,0757058	7,9875180	9,0074542	10,1472440	11,4197727	12,8391846	14,4209936	16,1822024	18,1414318	20,3190590	22,7373675	25,4207074
15	7,1379380	8,1370616	9,2655209	10,5387215	11,9737479	13,5895295	15,4070216	17,4494023	19,7422870	22,3139611	25,1956332	28,4217094	32,0300913
16	8,1372493	9,3576209	10,7480042	12,3303041	14,1290225	16,1715401	18,4884259	21,1137767	24,0855901	27,4461722	31,2425852	35,5271368	40,3579151
17	9,2764642	10,7612640	12,4676849	14,4264558	16,6722466	19,2441327	22,1861111	25,5476699	29,3844199	33,7587917	38,7408056	44,4089210	50,8509730
18	10,5751692	12,3754536	14,4625145	16,8789533	19,6732509	22,9005180	26,6233333	30,9126805	35,8489923	41,5233138	48,0385990	55,5111512	64,0722259
19	12,0556929	14,2317716	16,7765168	19,7483754	23,2144361	27,2516164	31,9479999	37,4043434	43,7357706	51,0736760	59,5678627	69,3889390	80,7310047
20	13,7434899	16,3665374	19,4607595	23,1055992	27,3930346	32,4294235	38,3375999	45,2592556	53,3576401	62,8206215	73,8641498	86,7361738	101,7210659
21	15,6675785	18,8215180	22,5744810	27,0335510	32,3237808	38,5910139	46,0051199	54,7636992	65,0963209	77,2693645	91,5915457	108,4202172	128,1685430
22	17,8610394	21,6447457	26,1863979	31,6292547	38,1420614	45,9233066	55,2061439	66,2640761	79,4175115	95,0413183	113,5735167	135,5252716	161,4923642
23	20,3615850	24,8914576	30,3762216	37,0062280	45,0076324	54,6487348	66,2473727	80,1795321	96,8893641	116,9008215	203,4803789	203,4803789	203,4803789
24	23,2122069	28,6251762	35,2364170	43,2972868	53,1090063	65,0319944	79,4968472	97,0172338	118,2050242	143,7880104	256,3852774	256,3852774	256,3852774
25	26,4619158	32,9189526	40,8742438	50,6578255	62,6686274	77,3880734	95,3962166	117,3908529	144,2101295	176,8592528	323,0454496	323,0454496	323,0454496
26	30,1665840	37,8567955	47,4141228	59,2696558	73,9489803	92,0918073	114,4754600	142,0429320	175,9363580	217,5368810	407,0372665	407,0372665	407,0372665
27	34,3899058	43,5353148	55,0003824	69,3454973	87,2597968	109,5892507	137,3705520	171,8719477	214,6423568	267,5703636	512,8669557	512,8669557	512,8669557
28	39,2044926	50,0656121	63,8004436	81,1342319	102,9665602	130,4112084	164,8446624	207,9650567	261,8636752	329,1115473	646,2123642	646,2123642	646,2123642
29	44,6931216	57,5754539	74,0085146	94,9270513	121,5005410	155,1893379	197,8135948	251,6377186	319,4736838	404,8072031	814,2275789	814,2275789	814,2275789
30	50,9501586	66,2117720	85,8498769	111,0646500	143,3706384	184,6753122	237,3763138	304,4816395	389,7578942	497,9128599	1025,9267495	1025,9267495	1025,9267495

Таблиця А.2

Множники дисконтування складних процентів: $D(n; r) = (1 + r)^{-n}$

rt	1 %	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%
1	0,9900990	0,9803922	0,9708738	0,9615385	0,9523810	0,9433962	0,9345794	0,9259259	0,9174312	0,9090909	0,9009009	0,8928571	0,8849558	0,8771930
2	0,9802960	0,9611688	0,9425959	0,9245562	0,9070295	0,8899964	0,8734387	0,8573388	0,8416800	0,8264463	0,8116224	0,7971939	0,7831467	0,7694675
3	0,9705901	0,9423223	0,9151417	0,8889964	0,8638376	0,8396193	0,8162979	0,7938322	0,7721835	0,7513148	0,7311914	0,7117802	0,6930502	0,6749715
4	0,9609803	0,9238454	0,8884870	0,8548042	0,8227025	0,7920937	0,7628952	0,7350299	0,7084252	0,6830135	0,6587310	0,6355181	0,6133187	0,5920803
5	0,9514657	0,9057308	0,8626088	0,8219271	0,7835262	0,7472582	0,7129862	0,6805832	0,6499314	0,6209213	0,5934513	0,5674269	0,5427599	0,5193687
6	0,9420452	0,8879714	0,8374843	0,7903145	0,7462154	0,7049605	0,6663422	0,6301696	0,5962673	0,5644739	0,5346408	0,5066311	0,4803185	0,4555865
7	0,9327181	0,8705602	0,8130915	0,7599178	0,7106813	0,6650571	0,6227497	0,5834904	0,5470342	0,5131581	0,4816584	0,4523492	0,4250606	0,3996373
8	0,9234832	0,8534904	0,7894092	0,7306902	0,6768394	0,6274124	0,5820091	0,5402689	0,5018663	0,4665074	0,4339265	0,4038832	0,3761599	0,3505591
9	0,9143398	0,8367553	0,7664167	0,7025867	0,6446089	0,5918985	0,5439337	0,5002490	0,4604278	0,4240976	0,3909248	0,3606100	0,3328848	0,3075079
10	0,9052870	0,8203483	0,7440939	0,6755642	0,6139133	0,5583948	0,5083493	0,4631935	0,4224108	0,3855433	0,3521845	0,3219732	0,2945883	0,2697438
11	0,8963237	0,8042630	0,7224213	0,6495809	0,5846793	0,5267875	0,4750928	0,4288829	0,3875329	0,3504939	0,3172833	0,2874761	0,2606977	0,2366174
12	0,8874492	0,7884932	0,7013799	0,6245970	0,5568374	0,4969694	0,4440120	0,3971138	0,3555347	0,3186308	0,2858408	0,2566751	0,2307059	0,2075591
13	0,8786626	0,7730325	0,6809513	0,6005741	0,5303214	0,4688390	0,4149644	0,3676979	0,3261786	0,2896644	0,2575143	0,2291742	0,2041645	0,1820694
14	0,8699630	0,7578750	0,6611178	0,5774751	0,5050680	0,4423010	0,3878172	0,3404610	0,2992465	0,2633313	0,2319948	0,2046198	0,1806766	0,1597100
15	0,8613495	0,7430147	0,6418619	0,5552645	0,4810171	0,4172651	0,3624460	0,3152417	0,2745380	0,2393920	0,2090043	0,1826963	0,1598908	0,1400965
16	0,8528213	0,7284458	0,6231669	0,5339082	0,4581115	0,3936463	0,3387346	0,2918905	0,2518698	0,2176291	0,1882922	0,1631217	0,1414962	0,1228917
17	0,8443775	0,7141626	0,6050164	0,5133732	0,4362967	0,3713644	0,3165744	0,2702690	0,2310732	0,1978447	0,1696326	0,1456443	0,1252179	0,1077997
18	0,8360173	0,7001594	0,5873946	0,4936281	0,4155207	0,3503438	0,2958639	0,2502490	0,2119937	0,1798588	0,1528222	0,1300396	0,1108123	0,0945611
19	0,8277399	0,6864308	0,5702860	0,4746424	0,3957340	0,3305130	0,2765083	0,2317121	0,1944897	0,1635080	0,1376776	0,1161068	0,0980640	0,0829484
20	0,8195445	0,6729713	0,5536758	0,4563869	0,3768895	0,3118047	0,2584190	0,2145482	0,1784309	0,1486436	0,1240339	0,1036668	0,0867823	0,0727617
21	0,8114302	0,6597758	0,5375493	0,4388336	0,3589424	0,2941554	0,2415131	0,1986557	0,1636981	0,1351306	0,1117423	0,0925596	0,0767985	0,0638261
22	0,8033962	0,6468390	0,5218925	0,4219554	0,3418499	0,2775051	0,2257132	0,1839405	0,1501817	0,1228460	0,1006687	0,0826425	0,0679633	0,0559878
23	0,7954418	0,6341559	0,5066917	0,4057263	0,3255713	0,2617973	0,2109469	0,1703153	0,1377814	0,1116782	0,0906925	0,0737880	0,0601445	0,0491121
24	0,7875661	0,6217215	0,4919337	0,3901215	0,3100679	0,2469785	0,1971466	0,1576993	0,1264049	0,1015256	0,0817050	0,0658821	0,0532252	0,0430808
25	0,7797684	0,6095309	0,4776056	0,3751168	0,2953028	0,2329986	0,1842492	0,1460179	0,1159678	0,0922960	0,0736081	0,0588233	0,0471020	0,0377902
26	0,7720480	0,5975793	0,4636947	0,3606892	0,2812407	0,2198100	0,1721955	0,1352018	0,1063925	0,0839055	0,0663136	0,0525208	0,0416831	0,0331493
27	0,7644039	0,5858620	0,4501891	0,3468166	0,2678483	0,2073680	0,1609304	0,1251868	0,0976078	0,0762777	0,0597420	0,0468936	0,0368877	0,0290783
28	0,7568356	0,5743746	0,4370768	0,3334775	0,2550936	0,1956301	0,1504022	0,1159137	0,0895484	0,0693433	0,0538216	0,0418693	0,0326440	0,0255073
29	0,7493421	0,5631123	0,4243464	0,3206514	0,2429463	0,1845567	0,1405628	0,1073275	0,0821545	0,0630394	0,0484879	0,0373833	0,0288885	0,0223748
30	0,7419229	0,5520709	0,4119868	0,3083187	0,2313774	0,1741101	0,1313671	0,0993773	0,0753711	0,0573086	0,0436828	0,0333779	0,0255651	0,0196270

Продовження таблиці А.2

rt	15%	16%	17%	18%	19%	20%	21 %	22%	23%	24%	25%	26%	27%	28%
1	0,8695652	0,8620690	0,8547009	0,8474576	0,8403361	0,8333333	0,8264463	0,8196721	0,8130081	0,8064516	0,8000000	0,7936508	0,7874016	0,7812500
2	0,7561437	0,7431629	0,7305136	0,7181844	0,7061648	0,6944444	0,6830135	0,6718624	0,6609822	0,6503642	0,6400000	0,6298816	0,6200012	0,6103516
3	0,6575162	0,6406577	0,6243706	0,6086309	0,5934158	0,5787037	0,5644739	0,5507069	0,5373839	0,5244873	0,5120000	0,4999060	0,4881900	0,4768372
4	0,5717532	0,5522911	0,5336500	0,5157889	0,4986688	0,4822531	0,4665074	0,4513991	0,4368975	0,4229736	0,4096000	0,3967508	0,3844015	0,3725290
5	0,4971767	0,4761130	0,4561112	0,4371092	0,4190494	0,4018776	0,3855433	0,3699993	0,3552012	0,3411077	0,3276800	0,3148816	0,3026784	0,2910383
6	0,4323276	0,4104423	0,3898386	0,3704315	0,3521423	0,3348980	0,3186308	0,3032781	0,2887815	0,2750869	0,2621440	0,2499060	0,2383294	0,2273737
7	0,3759370	0,3538295	0,3331954	0,3139250	0,2959179	0,2790816	0,2633313	0,2485886	0,2347817	0,2218443	0,2097152	0,1983381	0,1876610	0,1776357
8	0,3269018	0,3050255	0,2847824	0,2660382	0,2486705	0,2325680	0,2176291	0,2037611	0,1908794	0,1789067	0,1677722	0,1574112	0,1477645	0,1387779
9	0,2842624	0,2629530	0,2434037	0,2254561	0,2089668	0,1938067	0,1798588	0,1670173	0,1551865	0,1442796	0,1342177	0,1249295	0,1163500	0,1084202
10	0,2471847	0,2266836	0,2080374	0,1910645	0,1756024	0,1615056	0,1486436	0,1368994	0,1261679	0,1163545	0,1073742	0,0991504	0,0916142	0,0847033
11	0,2149432	0,1954169	0,1778097	0,1619190	0,1475650	0,1345880	0,1228460	0,1122127	0,1025755	0,0938343	0,0858993	0,0786908	0,0721372	0,0661744
12	0,1869072	0,1684628	0,1519741	0,1372195	0,1240042	0,1121567	0,1015256	0,0919776	0,0833947	0,0756728	0,0687195	0,0624530	0,0568009	0,0516988
13	0,1625280	0,1452266	0,1298924	0,1162877	0,1042052	0,0934639	0,0839055	0,0753915	0,0678006	0,0610264	0,0549756	0,0495659	0,0447251	0,0403897
14	0,1413287	0,1251953	0,1110192	0,0985489	0,0875674	0,0778866	0,0693433	0,0617963	0,0551224	0,0492149	0,0439805	0,0393380	0,0352166	0,0315544
15	0,1228945	0,1079270	0,0948882	0,0835160	0,0735861	0,0649055	0,0573086	0,0506527	0,0448150	0,0396894	0,0351844	0,0312206	0,0277296	0,0246519
16	0,1068648	0,0930405	0,0811010	0,0707763	0,0618370	0,0540879	0,0473624	0,0415186	0,0364350	0,0320076	0,0281475	0,0247783	0,0218344	0,0192593
17	0,0929259	0,0802074	0,0693171	0,0599799	0,0519639	0,0450732	0,0391425	0,0340316	0,0296219	0,0258126	0,0225180	0,0196653	0,0171924	0,0150463
18	0,0808051	0,0691443	0,0592454	0,0508304	0,0436671	0,0375610	0,0323492	0,0278948	0,0240829	0,0208166	0,0180144	0,0156074	0,0135373	0,0117549
19	0,0702653	0,0596071	0,0506371	0,0430766	0,0366951	0,0313009	0,0267349	0,0228646	0,0195796	0,0167876	0,0144115	0,0123868	0,0106593	0,0091835
20	0,0611003	0,0513855	0,0432796	0,0365056	0,0308362	0,0260841	0,0220949	0,0187415	0,0159183	0,0135384	0,0115292	0,0098308	0,0083932	0,0071746
21	0,0531307	0,0442978	0,0369911	0,0309370	0,0259128	0,0217367	0,0182603	0,0153619	0,0129417	0,0109180	0,0092234	0,0078022	0,0066088	0,0056052
22	0,0462006	0,0381878	0,0316163	0,0262178	0,0217754	0,0181139	0,0150911	0,0125917	0,0105217	0,0088049	0,0073787	0,0061922	0,0052038	0,0043791
23	0,0401744	0,0329205	0,0270225	0,0222185	0,0182987	0,0150949	0,0124720	0,0103211	0,0085543	0,0071007	0,0059030	0,0049145	0,0040975	0,0034211
24	0,0349343	0,0283797	0,0230961	0,0188292	0,0153770	0,0125791	0,0103074	0,0084599	0,0069547	0,0057264	0,0047224	0,0039004	0,0032263	0,0026728
25	0,0303776	0,0244653	0,0197403	0,0159569	0,0129219	0,0104826	0,0085186	0,0069343	0,0056542	0,0046180	0,0037779	0,0030955	0,0025404	0,0020881
26	0,0264153	0,0210908	0,0168720	0,0135228	0,0108587	0,0087355	0,0070401	0,0056839	0,0045969	0,0037242	0,0030223	0,0024568	0,0020003	0,0016313
27	0,0229699	0,0181817	0,0144205	0,0114600	0,0091250	0,0072796	0,0058183	0,0046589	0,0037373	0,0030034	0,0024179	0,0019498	0,0015751	0,0012745
28	0,0199738	0,0156739	0,0123253	0,0097119	0,0076681	0,0060663	0,0048085	0,0038188	0,0030385	0,0024221	0,0019343	0,0015475	0,0012402	0,0009957
29	0,0173685	0,0135120	0,0105344	0,0082304	0,0064437	0,0050553	0,0039740	0,0031301	0,0024703	0,0019533	0,0015474	0,0012282	0,0009765	0,0007779
30	0,0151031	0,0116482	0,0090038	0,0069749	0,0054149	0,0042127	0,0032843	0,0025657	0,0020084	0,0015752	0,0012379	0,0009747	0,0007689	0,0006077

Таблиця А.3

Множники утримання складних процентів $Dis(n; r) = (1 - d)^n$

rt	1 %	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%
1	0,9900000	0,9800000	0,9700000	0,9600000	0,9500000	0,9400000	0,9300000	0,9200000	0,9100000	0,9000000	0,8900000	0,8800000	0,8700000	0,8600000
2	0,9801000	0,9604000	0,9409000	0,9216000	0,9025000	0,8836000	0,8649000	0,8464000	0,8281000	0,8100000	0,7921000	0,7744000	0,7569000	0,7396000
3	0,9702990	0,9411920	0,9126730	0,8847360	0,8573750	0,8305840	0,8043570	0,7786880	0,7535710	0,7290000	0,7049690	0,6814720	0,6585030	0,6360560
4	0,9605960	0,9223682	0,8852928	0,8493466	0,8145063	0,7807490	0,7480520	0,7163930	0,6857496	0,6561000	0,6274224	0,5996954	0,5728976	0,5470082
5	0,9509900	0,9039208	0,8587340	0,8153727	0,7737809	0,7339040	0,6956884	0,6590815	0,6240321	0,5904900	0,5584059	0,5277319	0,4984209	0,4704270
6	0,9414801	0,8858424	0,8329720	0,7827578	0,7350919	0,6898698	0,6469902	0,6063550	0,5678693	0,5314410	0,4969813	0,4644041	0,4336262	0,4045672
7	0,9320653	0,8681255	0,8079828	0,7514475	0,6983373	0,6484776	0,6017009	0,5578466	0,5167610	0,4782969	0,4423133	0,4086756	0,3772548	0,3479278
8	0,9227447	0,8507630	0,7837434	0,7213896	0,6634204	0,6095689	0,5595818	0,5132189	0,4702525	0,4304672	0,3936589	0,3596345	0,3282117	0,2992179
9	0,9135172	0,8337478	0,7602311	0,6925340	0,6302494	0,5729948	0,5204111	0,4721614	0,4279298	0,3874205	0,3503564	0,3164784	0,2855442	0,2573274
10	0,9043821	0,8170728	0,7374241	0,6648326	0,5987369	0,5386151	0,4839823	0,4343885	0,3894161	0,3486784	0,3118172	0,2785010	0,2484234	0,2213016
11	0,8953383	0,8007314	0,7153014	0,6382393	0,5688001	0,5062982	0,4501035	0,3996374	0,3543687	0,3138106	0,2775173	0,2450809	0,2161284	0,1903194
12	0,8863849	0,7847167	0,6938424	0,6127098	0,5403601	0,4759203	0,4185963	0,3676664	0,3224755	0,2824295	0,2469904	0,2156712	0,1880317	0,1636746
13	0,8775210	0,7690224	0,6730271	0,5882014	0,5133421	0,4473651	0,3892946	0,3382531	0,2934527	0,2541866	0,2198215	0,1897906	0,1635876	0,1407602
14	0,8687458	0,7536419	0,6528363	0,5646733	0,4876750	0,4205232	0,3620439	0,3111928	0,2670420	0,2287679	0,1956411	0,1670157	0,1423212	0,1210538
15	0,8600584	0,7385691	0,6332512	0,5420864	0,4632912	0,3952918	0,3367009	0,2862974	0,2430082	0,2058911	0,1741206	0,1469739	0,1238194	0,1041062
16	0,8514578	0,7237977	0,6142537	0,5204029	0,4401267	0,3715743	0,3131318	0,2633936	0,2211374	0,1853020	0,1549673	0,1293370	0,1077229	0,0895314
17	0,8429432	0,7093218	0,5958260	0,4995868	0,4181203	0,3492798	0,2912126	0,2423221	0,2012351	0,1667718	0,1379209	0,1138166	0,0937189	0,0769970
18	0,8345138	0,6951353	0,5779513	0,4796033	0,3972143	0,3283230	0,2708277	0,2229364	0,1831239	0,1500946	0,1227496	0,1001586	0,0815355	0,0662174
19	0,8261686	0,6812326	0,5606127	0,4604192	0,3773536	0,3086237	0,2518698	0,2051014	0,1666428	0,1350852	0,1092472	0,0881395	0,0709359	0,0569470
20	0,8179069	0,6676080	0,5437943	0,4420024	0,3584859	0,2901062	0,2342389	0,1886933	0,1516449	0,1215767	0,0972300	0,0775628	0,0617142	0,0489744
21	0,8097279	0,6542558	0,5274805	0,4243223	0,3405616	0,2726999	0,2178422	0,1735979	0,1379969	0,1094190	0,0865347	0,0682553	0,0536913	0,0421180
22	0,8016306	0,6411707	0,5116561	0,4073494	0,3235335	0,2563379	0,2025932	0,1597100	0,1255772	0,0984771	0,0770159	0,0600646	0,0467115	0,0362215
23	0,7936143	0,6283473	0,4963064	0,3910555	0,3073569	0,2409576	0,1884117	0,1469332	0,1142752	0,0886294	0,0685441	0,0528569	0,0406390	0,0311505
24	0,7856781	0,6157803	0,4814172	0,3754132	0,2919890	0,2265001	0,1752229	0,1351786	0,1039904	0,0797664	0,0610043	0,0465140	0,0353559	0,0267894
25	0,7778214	0,6034647	0,4669747	0,3603967	0,2773896	0,2129101	0,1629573	0,1243643	0,0946313	0,0717898	0,0542938	0,0409324	0,0307596	0,0230389
26	0,7700431	0,5913954	0,4529655	0,3459808	0,2635201	0,2001355	0,1515503	0,1144151	0,0861145	0,0646108	0,0483215	0,0360205	0,0267609	0,0198134
27	0,7623427	0,5795675	0,4393765	0,3321416	0,2503441	0,1881274	0,1409417	0,1052619	0,0783642	0,0581497	0,0430061	0,0316980	0,0232820	0,0170396
28	0,7547193	0,5679762	0,4261952	0,3188559	0,2378269	0,1768398	0,1310758	0,0968410	0,0713114	0,0523348	0,0382754	0,0278943	0,0202553	0,0146540
29	0,7471721	0,5566167	0,4134093	0,3061017	0,2259355	0,1662294	0,1219005	0,0890937	0,0648934	0,0471013	0,0340651	0,0245469	0,0176221	0,0126025
30	0,7397004	0,5454843	0,4010071	0,2938576	0,2146388	0,1562556	0,1133675	0,0819662	0,0590530	0,0423912	0,0303180	0,0216013	0,0153313	0,0108381

Продовження таблиці А.3

rt	15%	16%	17%	18%	19%	20%	21 %	22%	23%	24%	25%	26%	27%	28%
1	0,8500000	0,8400000	0,8300000	0,8200000	0,8100000	0,8000000	0,7900000	0,7800000	0,7700000	0,7600000	0,7500000	0,7400000	0,7300000	0,7200000
2	0,7225000	0,7056000	0,6889000	0,6724000	0,6561000	0,6400000	0,6241000	0,6084000	0,5929000	0,5776000	0,5625000	0,5476000	0,5329000	0,5184000
3	0,6141250	0,5927040	0,5717870	0,5513680	0,5314410	0,5120000	0,4930390	0,4745520	0,4565330	0,4389760	0,4218750	0,4052240	0,3890170	0,3732480
4	0,5220063	0,4978714	0,4745832	0,4521218	0,4304672	0,4096000	0,3895008	0,3701506	0,3515304	0,3336218	0,3164063	0,2998658	0,2839824	0,2687386
5	0,4437053	0,4182119	0,3939041	0,3707398	0,3486784	0,3276800	0,3077056	0,2887174	0,2706784	0,2535525	0,2373047	0,2219007	0,2073072	0,1934918
6	0,3771495	0,3512980	0,3269404	0,3040067	0,2824295	0,2621440	0,2430875	0,2251996	0,2084224	0,1926999	0,1779785	0,1642065	0,1513342	0,1393141
7	0,3205771	0,2950903	0,2713605	0,2492855	0,2287679	0,2097152	0,1920391	0,1756557	0,1604852	0,1464519	0,1334839	0,1215128	0,1104740	0,1003061
8	0,2724905	0,2478759	0,2252292	0,2044141	0,1853020	0,1677722	0,1517109	0,1370114	0,1235736	0,1113035	0,1001129	0,0899195	0,0806460	0,0722204
9	0,2316169	0,2082157	0,1869403	0,1676196	0,1500946	0,1342177	0,1198516	0,1068689	0,0951517	0,0845906	0,0750847	0,0665404	0,0588716	0,0519987
10	0,1968744	0,1749012	0,1551604	0,1374480	0,1215767	0,1073742	0,0946828	0,0833578	0,0732668	0,0642889	0,0563135	0,0492399	0,0429763	0,0374391
11	0,1673432	0,1469170	0,1287831	0,1127074	0,0984771	0,0858993	0,0747994	0,0650191	0,0564154	0,0488596	0,0422351	0,0364375	0,0313727	0,0269561
12	0,1422418	0,1234103	0,1068900	0,0924201	0,0797664	0,0687195	0,0590915	0,0507149	0,0434399	0,0371333	0,0316764	0,0269638	0,0229020	0,0194084
13	0,1209055	0,1036647	0,0887187	0,0757844	0,0646108	0,0549756	0,0466823	0,0395576	0,0334487	0,0282213	0,0237573	0,0199532	0,0167185	0,0139741
14	0,1027697	0,0870783	0,0736365	0,0621432	0,0523348	0,0439805	0,0368790	0,0308549	0,0257555	0,0214482	0,0178179	0,0147654	0,0122045	0,0100613
15	0,0873542	0,0731458	0,0611183	0,0509575	0,0423912	0,0351844	0,0291344	0,0240668	0,0198317	0,0163006	0,0133635	0,0109264	0,0089093	0,0072442
16	0,0742511	0,0614425	0,0507282	0,0417851	0,0343368	0,0281475	0,0230162	0,0187721	0,0152704	0,0123885	0,0100226	0,0080855	0,0065038	0,0052158
17	0,0631134	0,0516117	0,0421044	0,0342638	0,0278128	0,0225180	0,0181828	0,0146423	0,0117582	0,0094152	0,0075169	0,0059833	0,0047478	0,0037554
18	0,0536464	0,0433538	0,0349467	0,0280963	0,0225284	0,0180144	0,0143644	0,0114210	0,0090538	0,0071556	0,0056377	0,0044276	0,0034659	0,0027039
19	0,0455994	0,0364172	0,0290057	0,0230390	0,0182480	0,0144115	0,0113479	0,0089084	0,0069715	0,0054382	0,0042283	0,0032764	0,0025301	0,0019468
20	0,0387595	0,0305904	0,0240748	0,0188920	0,0147809	0,0115292	0,0089648	0,0069485	0,0053680	0,0041331	0,0031712	0,0024246	0,0018470	0,0014017
21	0,0329456	0,0256960	0,0199820	0,0154914	0,0119725	0,0092234	0,0070822	0,0054198	0,0041334	0,0031411	0,0023784	0,0017942	0,0013483	0,0010092
22	0,0280038	0,0215846	0,0165851	0,0127030	0,0096977	0,0073787	0,0055949	0,0042275	0,0031827	0,0023873	0,0017838	0,0013277	0,0009842	0,0007266
23	0,0238032	0,0181311	0,0137656	0,0104164	0,0078552	0,0059030	0,0044200	0,0032974	0,0024507	0,0018143	0,0013379	0,0009825	0,0007185	0,0005232
24	0,0202327	0,0152301	0,0114255	0,0085415	0,0063627	0,0047224	0,0034918	0,0025720	0,0018870	0,0013789	0,0010034	0,0007270	0,0005245	0,0003767
25	0,0171978	0,0127933	0,0094831	0,0070040	0,0051538	0,0037779	0,0027585	0,0020062	0,0014530	0,0010479	0,0007525	0,0005380	0,0003829	0,0002712
26	0,0146181	0,0107464	0,0078710	0,0057433	0,0041746	0,0030223	0,0021792	0,0015648	0,0011188	0,0007964	0,0005644	0,0003981	0,0002795	0,0001953
27	0,0124254	0,0090269	0,0065329	0,0047095	0,0033814	0,0024179	0,0017216	0,0012205	0,0008615	0,0006053	0,0004233	0,0002946	0,0002040	0,0001406
28	0,0105616	0,0075826	0,0054223	0,0038618	0,0027389	0,0019343	0,0013601	0,0009520	0,0006633	0,0004600	0,0003175	0,0002180	0,0001489	0,0001012
29	0,0089774	0,0063694	0,0045005	0,0031667	0,0022185	0,0015474	0,0010744	0,0007426	0,0005108	0,0003496	0,0002381	0,0001613	0,0001087	0,0000729
30	0,0076308	0,0053503	0,0037354	0,0025967	0,0017970	0,0012379	0,0008488	0,0005792	0,0003933	0,0002657	0,0001786	0,0001194	0,0000794	0,0000525

Таблиця А.4

Множники нарощування анuitету: $FVIFA = S(n; r) = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = S_{n,i}$ - коефіцієнт нарощення ренти

rt	1 %	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,010000	2,020000	2,030000	2,040000	2,050000	2,060000	2,070000	2,080000	2,090000	2,100000	2,110000	2,120000	2,130000
3	3,030100	3,060400	3,090900	3,121600	3,152500	3,183600	3,214900	3,246400	3,278100	3,310000	3,342100	3,374400	3,406900
4	4,060401	4,121608	4,183627	4,246464	4,310125	4,374616	4,439943	4,506112	4,573129	4,641000	4,709731	4,779328	4,849797
5	5,101005	5,204040	5,309136	5,416323	5,525631	5,637093	5,750739	5,866601	5,984711	6,105100	6,227801	6,352847	6,480271
6	6,152015	6,308121	6,468410	6,632975	6,801913	6,975319	7,153291	7,335929	7,523335	7,715610	7,912860	8,115189	8,322706
7	7,213535	7,434283	7,662462	7,898294	8,142008	8,393838	8,654021	8,922803	9,200435	9,487171	9,783274	10,089012	10,404658
8	8,285671	8,582969	8,892336	9,214226	9,549109	9,897468	10,259803	10,636628	11,028474	11,435888	11,859434	12,299693	12,757263
9	9,368527	9,754628	10,159106	10,582795	11,026564	11,491316	11,977989	12,487558	13,021036	13,579477	14,163972	14,775656	15,415707
10	10,462213	10,949721	11,463879	12,006107	12,577893	13,180795	13,816448	14,486562	15,192930	15,937425	16,722009	17,548735	18,419749
11	11,566835	12,168715	12,807796	13,486351	14,206787	14,971643	15,783599	16,645487	17,560293	18,531167	19,561430	20,654583	21,814317
12	12,682503	13,412090	14,192030	15,025805	15,917127	16,869941	17,888451	18,977126	20,140720	21,384284	22,713187	24,133133	25,650178
13	13,809328	14,680332	15,617790	16,626838	17,712983	18,882138	20,140643	21,495297	22,953385	24,522712	26,211638	28,029109	29,984701
14	14,947421	15,973938	17,086324	18,291911	19,598632	21,015066	22,550488	24,214920	26,019189	27,974983	30,094918	32,392602	34,882712
15	16,096896	17,293417	18,598914	20,023588	21,578564	23,275970	25,129022	27,152114	29,360916	31,772482	34,405359	37,279715	40,417464
16	17,257864	18,639285	20,156881	21,824531	23,657492	25,672528	27,888054	30,324283	33,003399	35,949730	39,189948	42,753280	46,671735
17	18,430443	20,012071	21,761588	23,697512	25,840366	28,212880	30,840217	33,750226	36,973705	40,544703	44,500843	48,883674	53,739060
18	19,614748	21,412312	23,414435	25,645413	28,132385	30,905653	33,999033	37,450244	41,301338	45,599173	50,395936	55,749715	61,725138
19	20,810895	22,840559	25,116868	27,671229	30,539004	33,759992	37,378965	41,446263	46,018458	51,159090	56,939488	63,439681	70,749406
20	22,019004	24,297370	26,870374	29,778079	33,065954	36,785591	40,995492	45,761964	51,160120	57,274999	64,202832	72,052442	80,946829
21	23,239194	25,783317	28,676486	31,969202	35,719252	39,992727	44,865177	50,422921	56,764530	64,002499	72,265144	81,698736	92,469917
22	24,471586	27,298984	30,536780	34,247970	38,505214	43,392290	49,005739	55,456755	62,873338	71,402749	81,214309	92,502584	105,491006
23	25,716302	28,844963	32,452884	36,617889	41,430475	46,995828	53,436141	60,893296	69,531939	79,543024	91,147884	104,602894	120,204837
24	26,973465	30,421862	34,426470	39,082604	44,501999	50,815577	58,176671	66,764759	76,789813	88,497327	102,174151	118,155241	136,831465
25	28,243200	32,030300	36,459264	41,645908	47,727099	54,864512	63,249038	73,105940	84,700896	98,347059	114,413307	133,333870	155,619556
26	29,525631	33,670906	38,553042	44,311745	51,113454	59,156383	68,676470	79,954415	93,323977	109,181765	127,998771	150,333934	176,850098
27	30,820888	35,344324	40,709634	47,084214	54,669126	63,705766	74,483823	87,350768	102,723135	121,099942	143,078636	169,374007	200,840611
28	32,129097	37,051210	42,930923	49,967583	58,402583	68,528112	80,697691	95,338830	112,968217	134,209936	159,817286	190,698887	227,949890
29	33,450388	38,792235	45,218850	52,966286	62,322712	73,639798	87,346529	103,965936	124,135356	148,630930	178,397187	214,582754	258,583376
30	34,784892	40,568079	47,575416	56,084938	66,438848	79,058186	94,460786	113,283211	136,307539	164,494023	199,020878	241,332684	293,199215

Продовження таблиці А.4

rt	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%	21 %	22%	23%	24%	25%	26%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,140000	2,150000	2,160000	2,170000	2,180000	2,190000	2,200000	2,210000	2,220000	2,230000	2,240000	2,250000	2,260000
3	3,439600	3,472500	3,505600	3,538900	3,572400	3,606100	3,640000	3,674100	3,708400	3,742900	3,777600	3,812500	3,847600
4	4,921144	4,993375	5,066496	5,140513	5,215432	5,291259	5,368000	5,445661	5,524248	5,603767	5,684224	5,765625	5,847976
5	6,610104	6,742381	6,877135	7,014400	7,154210	7,296598	7,441600	7,589250	7,739583	7,892633	8,048438	8,207031	8,368450
6	8,535519	8,753738	8,977477	9,206848	9,441968	9,682952	9,929920	10,182992	10,442291	10,707939	10,980063	11,258789	11,544247
7	10,730491	11,066799	11,413873	11,772012	12,141522	12,522713	12,915904	13,321421	13,739595	14,170765	14,615278	15,073486	15,545751
8	13,232760	13,726819	14,240093	14,773255	15,326996	15,902028	16,499085	17,118919	17,762306	18,430041	19,122945	19,841858	20,587646
9	16,085347	16,785842	17,518508	18,284708	19,085855	19,923413	20,798902	21,713892	22,670013	23,668950	24,712451	25,802322	26,940434
10	19,337295	20,303718	21,321469	22,393108	23,521309	24,708862	25,958682	27,273809	28,657416	30,112809	31,643440	33,252903	34,944947
11	23,044516	24,349276	25,732904	27,199937	28,755144	30,403546	32,150419	34,001309	35,962047	38,038755	40,237865	42,566129	45,030633
12	27,270749	29,001667	30,850169	32,823926	34,931070	37,180220	39,580502	42,141584	44,873697	47,787669	50,894953	54,207661	57,738598
13	32,088654	34,351917	36,786196	39,403993	42,218663	45,244461	48,496603	51,991317	55,745911	59,778833	64,109741	68,759576	73,750633
14	37,581065	40,504705	43,671987	47,102672	50,818022	54,840909	59,195923	63,909493	69,010011	74,527964	80,496079	86,949470	93,925798
15	43,842414	47,580411	51,659505	56,110126	60,965266	66,260682	72,035108	78,330487	85,192213	92,669396	100,815138	109,686838	119,346505
16	50,980352	55,717472	60,925026	66,648848	72,939014	79,850211	87,442129	95,779889	104,934500	114,983357	126,010772	138,108547	151,376596
17	59,117601	65,075093	71,673030	78,979152	87,068036	96,021751	105,930555	116,893666	129,020090	142,429529	157,253357	173,635684	191,734511
18	68,394066	75,836357	84,140715	93,405608	103,740283	115,265884	128,116666	142,441336	158,404510	176,188321	195,994162	218,044605	242,585484
19	78,969235	88,211811	98,603230	110,284561	123,413534	138,166402	154,740000	173,354016	194,253503	217,711635	244,032761	273,555756	306,657710
20	91,024928	102,443583	115,379747	130,032936	146,627970	165,418018	186,688000	210,758360	237,989273	268,785311	303,600624	342,944695	387,388715
21	104,768418	118,810120	134,840506	153,138535	174,021005	197,847442	225,025600	256,017615	291,346913	331,605932	377,464774	429,680869	489,109781
22	120,435996	137,631638	157,414987	180,172086	206,344785	236,438456	271,030719	310,781315	356,443234	408,875297	469,056320	538,101086	617,278324
23	138,297035	159,276384	183,601385	211,801341	244,486847	282,361762	326,236863	377,045391	435,860746	503,916615	582,629836	673,626358	778,770688
24	158,658620	184,167841	213,977607	248,807569	289,494479	337,010497	392,484236	457,224923	532,750110	620,817437	723,460997	843,032947	982,251067
25	181,870827	212,793017	249,214024	292,104856	342,603486	402,042491	471,981083	554,242157	650,955134	764,605447	898,091636	1054,791184	1238,636345
26	208,332743	245,711970	290,088267	342,762681	405,272113	479,430565	567,377300	671,633009	795,165264	941,464700	1114,633629	1319,488980	1561,681794
27	238,499327	283,568766	337,502390	402,032337	479,221093	571,522372	681,852760	813,675941	971,101622	1159,001581	1383,145700	1650,361225	1968,719061
28	272,889233	327,104080	392,502773	471,377835	566,480890	681,111623	819,223312	985,547889	1185,743978	1426,571945	1716,100668	2063,951531	2481,586016
29	312,093725	377,169693	456,303216	552,512066	669,447450	811,522831	984,067974	1193,512946	1447,607654	1755,683492	2128,964828	2580,939414	3127,798381
30	356,786847	434,745146	530,311731	647,439118	790,947991	966,712169	1181,881569	1445,150664	1767,081337	2160,490695	2640,916387	3227,174268	3942,025959

Таблиця А.5

$$\text{Множники дисконтування анuitету: PVIFA } A(n; r) = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

rt	1 %	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%
1	0,990099	0,980392	0,970874	0,961538	0,952381	0,943396	0,934579	0,925926	0,917431	0,909091	0,900901	0,892857	0,884956	0,877193
2	1,970395	1,941561	1,913470	1,886095	1,859410	1,833393	1,808018	1,783265	1,759111	1,735537	1,712523	1,690051	1,668102	1,646661
3	2,940985	2,883883	2,828611	2,775091	2,723248	2,673012	2,624316	2,577097	2,531295	2,486852	2,443715	2,401831	2,361153	2,321632
4	3,901966	3,807729	3,717098	3,629895	3,545951	3,465106	3,387211	3,312127	3,239720	3,169865	3,102446	3,037349	2,974471	2,913712
5	4,853431	4,713460	4,579707	4,451822	4,329477	4,212364	4,100197	3,992710	3,889651	3,790787	3,695897	3,604776	3,517231	3,433081
6	5,795476	5,601431	5,417191	5,242137	5,075692	4,917324	4,766540	4,622880	4,485919	4,355261	4,230538	4,111407	3,997550	3,888668
7	6,728195	6,471991	6,230283	6,002055	5,786373	5,582381	5,389289	5,206370	5,032953	4,868419	4,712196	4,563757	4,422610	4,288305
8	7,651678	7,325481	7,019692	6,732745	6,463213	6,209794	5,971299	5,746639	5,534819	5,334926	5,146123	4,967640	4,798770	4,638864
9	8,566018	8,162237	7,786109	7,435332	7,107822	6,801692	6,515232	6,246888	5,995247	5,759024	5,537048	5,328250	5,131655	4,946372
10	9,471305	8,982585	8,530203	8,110896	7,721735	7,360087	7,023582	6,710081	6,417658	6,144567	5,889232	5,650223	5,426243	5,216116
11	10,367628	9,786848	9,252624	8,760477	8,306414	7,886875	7,498674	7,138964	6,805191	6,495061	6,206515	5,937699	5,686941	5,452733
12	11,255077	10,575341	9,954004	9,385074	8,863252	8,383844	7,942686	7,536078	7,160725	6,813692	6,492356	6,194374	5,917647	5,660292
13	12,133740	11,348374	10,634955	9,985648	9,393573	8,852683	8,357651	7,903776	7,486904	7,103356	6,749870	6,423548	6,121812	5,842362
14	13,003703	12,106249	11,296073	10,563123	9,898641	9,294984	8,745468	8,244237	7,786150	7,366687	6,981865	6,628168	6,302488	6,002072
15	13,865053	12,849264	11,937935	11,118387	10,379658	9,712249	9,107914	8,559479	8,060688	7,606080	7,190870	6,810864	6,462379	6,142168
16	14,717874	13,577709	12,561102	11,652296	10,837770	10,105895	9,446649	8,851369	8,312558	7,823709	7,379162	6,973986	6,603875	6,265060
17	15,562251	14,291872	13,166118	12,165669	11,274066	10,477260	9,763223	9,121638	8,543631	8,021553	7,548794	7,119630	6,729093	6,372859
18	16,398269	14,992031	13,753513	12,659297	11,689587	10,827603	10,059087	9,371887	8,755625	8,201412	7,701617	7,249670	6,839905	6,467420
19	17,226008	15,678462	14,323799	13,133939	12,085321	11,158116	10,335595	9,603599	8,950115	8,364920	7,839294	7,365777	6,937969	6,550369
20	18,045553	16,351433	14,877475	13,590326	12,462210	11,469921	10,594014	9,818147	9,128546	8,513564	7,963328	7,469444	7,024752	6,623131
21	18,856983	17,011209	15,415024	14,029160	12,821153	11,764077	10,835527	10,016803	9,292244	8,648694	8,075070	7,562003	7,101550	6,686957
22	19,660379	17,658048	15,936917	14,451115	13,163003	12,041582	11,061240	10,200744	9,442425	8,771540	8,175739	7,644646	7,169513	6,742944
23	20,455821	18,292204	16,443608	14,856842	13,488574	12,303379	11,272187	10,371059	9,580207	8,883218	8,266432	7,718434	7,229658	6,792056
24	21,243387	18,913926	16,935542	15,246963	13,798642	12,550358	11,469334	10,528758	9,706612	8,984744	8,348137	7,784316	7,282883	6,835137
25	22,023156	19,523456	17,413148	15,622080	14,093945	12,783356	11,653583	10,674776	9,822580	9,077040	8,421745	7,843139	7,329985	6,872927
26	22,795204	20,121036	17,876842	15,982769	14,375185	13,003166	11,825779	10,809978	9,928972	9,160945	8,488058	7,895660	7,371668	6,906077
27	23,559608	20,706898	18,327031	16,329586	14,643034	13,210534	11,986709	10,935165	10,026580	9,237223	8,547800	7,942554	7,408556	6,935155
28	24,316443	21,281272	18,764108	16,663063	14,898127	13,406164	12,137111	11,051078	10,116128	9,306567	8,601622	7,984423	7,441200	6,960662
29	25,065785	21,844385	19,188455	16,983715	15,141074	13,590721	12,277674	11,158406	10,198283	9,369606	8,650110	8,021806	7,470088	6,983037
30	25,807708	22,396456	19,600441	17,292033	15,372451	13,764831	12,409041	11,257783	10,273654	9,426914	8,693793	8,055184	7,495653	7,002664

Продовження таблиці А.5

rt	15%	16%	17%	18%	19%	20%	21 %	22%	23%	24%	25%	26%	27%	28%
1	0,869565	0,862069	0,854701	0,847458	0,840336	0,833333	0,826446	0,819672	0,813008	0,806452	0,800000	0,793651	0,787402	0,781250
2	1,625709	1,605232	1,585214	1,565642	1,546501	1,527778	1,509460	1,491535	1,473990	1,456816	1,440000	1,423532	1,407403	1,391602
3	2,283225	2,245890	2,209585	2,174273	2,139917	2,106481	2,073934	2,042241	2,011374	1,981303	1,952000	1,923438	1,895593	1,868439
4	2,854978	2,798181	2,743235	2,690062	2,638586	2,588735	2,540441	2,493641	2,448272	2,404277	2,361600	2,320189	2,279994	2,240968
5	3,352155	3,274294	3,199346	3,127171	3,057635	2,990612	2,925984	2,863640	2,803473	2,745384	2,689280	2,635071	2,582673	2,532006
6	3,784483	3,684736	3,589185	3,497603	3,409777	3,325510	3,244615	3,166918	3,092254	3,020471	2,951424	2,884977	2,821002	2,759380
7	4,160420	4,038565	3,922380	3,811528	3,705695	3,604592	3,507946	3,415506	3,327036	3,242316	3,161139	3,083315	3,008663	2,937015
8	4,487322	4,343591	4,207163	4,077566	3,954366	3,837160	3,725576	3,619268	3,517916	3,421222	3,328911	3,240726	3,156428	3,075793
9	4,771584	4,606544	4,450566	4,303022	4,163332	4,030967	3,905434	3,786285	3,673102	3,565502	3,463129	3,365656	3,272778	3,184214
10	5,018769	4,833227	4,658604	4,494086	4,338935	4,192472	4,054078	3,923184	3,799270	3,681856	3,570503	3,464806	3,364392	3,268917
11	5,233712	5,028644	4,836413	4,656005	4,486500	4,327060	4,176924	4,035397	3,901846	3,775691	3,656403	3,543497	3,436529	3,335091
12	5,420619	5,197107	4,988387	4,793225	4,610504	4,439217	4,278450	4,127375	3,985240	3,851363	3,725122	3,605950	3,493330	3,386790
13	5,583147	5,342334	5,118280	4,909513	4,714709	4,532681	4,362355	4,202766	4,053041	3,912390	3,780098	3,655516	3,538055	3,427180
14	5,724476	5,467529	5,229299	5,008062	4,802277	4,610567	4,431698	4,264562	4,108163	3,961605	3,824078	3,694854	3,573272	3,458734
15	5,847370	5,575456	5,324187	5,091578	4,875863	4,675473	4,489007	4,315215	4,152978	4,001294	3,859263	3,726074	3,601001	3,483386
16	5,954235	5,668497	5,405288	5,162354	4,937700	4,729561	4,536369	4,356734	4,189413	4,033302	3,887410	3,750853	3,622836	3,502645
17	6,047161	5,748704	5,474605	5,222334	4,989664	4,774634	4,575512	4,390765	4,219035	4,059114	3,909928	3,770518	3,640028	3,517692
18	6,127966	5,817848	5,533851	5,273164	5,033331	4,812195	4,607861	4,418660	4,243118	4,079931	3,927942	3,786125	3,653565	3,529447
19	6,198231	5,877455	5,584488	5,316241	5,070026	4,843496	4,634596	4,441525	4,262698	4,096718	3,942354	3,798512	3,664225	3,538630
20	6,259331	5,928841	5,627767	5,352746	5,100862	4,869580	4,656691	4,460266	4,278616	4,110257	3,953883	3,808343	3,672618	3,545805
21	6,312462	5,973139	5,664758	5,383683	5,126775	4,891316	4,674951	4,475628	4,291558	4,121175	3,963107	3,816145	3,679227	3,551410
22	6,358663	6,011326	5,696375	5,409901	5,148550	4,909430	4,690042	4,488220	4,302079	4,129980	3,970485	3,822338	3,684430	3,555789
23	6,398837	6,044247	5,723397	5,432120	5,166849	4,924525	4,702514	4,498541	4,310634	4,137080	3,976388	3,827252	3,688528	3,559210
24	6,433771	6,072627	5,746493	5,450949	5,182226	4,937104	4,712822	4,507001	4,317588	4,142807	3,981111	3,831152	3,691754	3,561883
25	6,464149	6,097092	5,766234	5,466906	5,195148	4,947587	4,721340	4,513935	4,323243	4,147425	3,984888	3,834248	3,694295	3,563971
26	6,490564	6,118183	5,783106	5,480429	5,206007	4,956323	4,728380	4,519619	4,327839	4,151149	3,987911	3,836705	3,696295	3,565602
27	6,513534	6,136364	5,797526	5,491889	5,215132	4,963602	4,734199	4,524278	4,331577	4,154152	3,990329	3,838655	3,697870	3,566877
28	6,533508	6,152038	5,809851	5,501601	5,222800	4,969668	4,739007	4,528096	4,334615	4,156575	3,992263	3,840202	3,699110	3,567873
29	6,550877	6,165550	5,820386	5,509831	5,229243	4,974724	4,742981	4,531227	4,337086	4,158528	3,993810	3,841430	3,700087	3,568650
30	6,565980	6,177198	5,829390	5,516806	5,234658	4,978936	4,746265	4,533792	4,339094	4,160103	3,995048	3,842405	3,700856	3,569258

ДОДАТОК Б

ФІНАНСОВІ ФУНКЦІЇ У ПРОГРАМІ MS EXCEL

Примітка. Порядкові номери функцій відповідають послідовності їх розташування у довідковій системі *MS Excel*, а їх назви – відповідають версії програмного забезпечення. В інших версіях *MS Excel* перелік та назви функцій можуть відрізнятись.

№ з/п	Назва функції	Короткий опис функції
1.	НАКОПДОХОД	Повертає накопичений дохід по цінних паперах з періодичною виплатою відсотків
2.	НАКОПДОХОДПОГАС	Повертає накопичений дохід по цінних паперах, відсоток по яких виплачується в строк вступу до сили
3.	АМОРУМ	Повертає величину амортизації для кожного періоду, використовуючи коефіцієнт амортизації
4.	АМОУВ	Повертає величину амортизації для кожного звітного періоду
5.	ДНЕЙКУПОНДО	Повертає кількість днів між початком періоду купона і датою угоди
6.	ДНЕЙКУПОН	Повертає число днів в періоді купона, який містить дату угоди
7.	ДНЕЙКУПОНГІОСЛЕ	Повертає число днів від дати угоди до терміну наступного купона
8.	ДАТАКУПОНПОСЛЕ	Повертає наступну дату купона після дати угоди
9.	ЧИСЛКУПОН	Повертає кількість купонів, які можуть бути сплачені між датою угоди і терміном вступу до сили
10.	ДАТАКУПОНДО	Повертає попередню дату купона перед датою угоди
11.	ОБЩПЛАТ	Повертає загальну виплату, проведену між двома періодичними виплатами
12.	ОБЩДОХОД	Повертає загальну виплату по позиції між двома періодами
13.	ФУО	Повертає амортизацію майна на заданий період, використовуючи метод постійного обліку амортизації
14.	ДДОБ	Повертає величину амортизації майна для вказаного періоду при використанні методу двократного обліку амортизації або іншого явно вказаного методу
15.	СКИДКА	Повертає норму знижки для цінних паперів дробу, в ціну в грн., виражену десятковим числом
16.	ДЛИТ	Повертає щорічну тривалість дії цінних паперів з періодичними виплатами по відсотках
17.	ЭФФЕКТ	Повертає щорічні процентні ставки, що діють

№ з/п	Назва функції	Короткий опис функції
18.	БС	Повертає майбутнє значення внеску
19.	БЗРАСПИС	Повертає майбутнє значення початкової пропозиції після обліку ряду складних процентних ставок
20.	ИНОРМА	Повертає ставку дохідності повністю забезпеченого цінного паперу
21.	ПРПЛТ	Повертає величину виплати доходу на вкладення за даний період
22.	ВСД	Повертає внутрішню ставку дохідності (віддачі) для серії потоків грошових коштів
23.	ПРОЦПЛАТ	Обчислює виплати за вказаний період інвестицій
24.	МДЛИТ	Повертає модифіковану тривалість Маколея для цінних паперів з передбачуваною номінальною вартістю 100 грошових одиниць
25.	МВСД	Повертає внутрішню ставку дохідності, при якій позитивні і негативні грошові потоки мають різну ставку
26.	НОМИНАЛ	Повертає номінальну річну процентну ставку
27.	КПЕР	Повертає загальну кількість періодів виплати для даного внеску
28.	ЧПС	Повертає чисту приведену вартість інвестиції, заснованої на серії періодичних грошових потоків і ставці дисконтування
29.	ЦЕНАПЕРВНЕРЕГ	Повертає ціну за 100 грошових одиниць номінальної вартості цінних паперів з нерегулярним першим періодом
30.	ДОХОДПЕРВНЕРЕГ	Повертає дохід по цінних паперах з нерегулярним першим періодом
31.	ЦЕНАПОСЛНЕРЕГ	Повертає ціну за 100 грошових одиниць номінальної вартості цінних паперів з нерегулярним останнім періодом
32.	ДОХОДПОСЛНЕРЕГ	Повертає дохід по цінних паперах з нерегулярним останнім періодом
33.	ПЛТ	Повертає величину виплати за один період річної ренти
34.	ОСПЛТ	Повертає величину виплат на основний капітал для внеску в заданий період
35.	ЦЕНА	Повертає ціну за 100 грошових одиниць номінальної вартості цінних паперів, по яких проводиться періодична виплата відсотків

№ з/п	Назва функції	Короткий опис функції
36.	ЦЕНАСКИДКА	Повертає ціну за 100 грошових одиниць номінальної вартості цінних паперів, на які зроблена знижка
37.	ЦЕНАПОГАСH	Повертає ціну за 100 грошових одиниць номінальної вартості цінних паперів, по яких виплачується дохід у момент вступу до сили
38.	ПС	Повертає приведену (до теперішнього моменту) вартість інвестиції
39.	СТАВКА	Повертає процентну ставку по анuitету за один період
40.	ПОЛУЧЕНО	Повертає суму, отриману в строк набуття чинності повністю забезпечених цінних паперів
41.	АПЛ	Повертає величину безпосередньої амортизації майна за один період
42.	АСЧ	Повертає величину амортизації активу за даний період, розраховану методом «суми (річних) чисел»
43.	РАВНОКЧЕК	Повертає еквівалентний облігації дохід по казначейському чеку
44.	ЦЕНАКЧЕК	Повертає ціну за 100 грошових одиниць номінальної вартості для казначейського чека
45.	ДОХОДКЧЕК	Повертає дохід по казначейському чеку
46.	ПУО	Повертає величину амортизації майна для явно вказаного або відповідного періоду при використанні методу разового обліку амортизації
47.	ЧИСТВНДОХ	Повертає внутрішню ставку прибутковості запланованих неперіодичних грошових потоків
48.	ЧИСТНЗ	Повертає чисту поточну вартість інвестиції, що обчислюється на основі ряду надходжень готівки, яка не обов'язково є періодичною
49.	ДОХОД	Повертає дохід від цінних паперів, по яких проводяться періодичні виплати відсотків
50.	ДОХОДСКИДКА	Повертає річний дохід по цінних паперах, на які зроблена знижка. Приклад — казначейські чеки
51.	ДОХОДПОГАСH	Повертає річний дохід від цінних паперів, відсоток по яких виплачується в строк погашення

Навчальне видання

Соляник Людмила Григорівна
Букресва Дар'я Сергіївна

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Видано в авторській редакції

Електронний ресурс
Підписано до видання 06.06 .2025. Авт. арк. 10,6...

Підготовлено до видання
в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.