

**Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»**



О.М. Долгов, Д.Л. Колосов, С.В. Онищенко

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА
Частина I. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

Навчальний наочний посібник

Дніпро
НТУ «ДПУ»
2023

Погоджено рішеннями науково-методичних комісій:

- спеціальності 131 «Прикладна механіка» (протокол №7 від 12.07.2023)
- спеціальності 132 «Матеріалознавство» (протокол №1 від 30.08.2023)
- спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» (протокол №1 від 29.08.2023)

Долгов О.М., Прикладна механіка. Ч.I.Теоретичні основи механіки. [Електронний ресурс]: Навчальний наочний посібник для бакалаврів спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 132 «Матеріалознавство», 133 «Галузеве машинобудування» / О.М. Долгов, Д.Л.Колосов, С.В.Онищенко; Міністерство освіти і науки України, Нац. техн. ун-т. «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2023. – 101 с.





Передмова

Прикладна механіка - це розділ фізико-механічних наук та їх практичного застосування. Вона усуває розрив між теорією та її використанням у техніці. Прикладна механіка застосовується у багатьох галузях, особливо у машинобудуванні та будівництві; у цьому контексті її зазвичай називають інженерною механікою. Більша частина сучасної прикладної механіки ґрунтується на базових положеннях теоретичної механіки і законах руху Ньютона, а сучасна практика їх застосування сходить до Степана Прокоповича Тимошенко, видатного українського вченого-механіка, який вважається батьком сучасної прикладної механіки.

Місце прикладної механіки у широкому спектрі механіки, як науки, може бути представлено таким чином:



Мета дисципліни – формування компетентностей щодо загальних методів використання основних законів та принципів прикладної механіки, необхідних для аналізу фізичних явищ, моделювання різноманітних процесів і пошуку оптимальних розв'язань задач матеріалознавства.

У першій частині посібника розглянуто теоретичні основи механіки: *статика, кінематика та динаміка*. У вступі в стислій формі наведено основні відомості з елементарної математики, таблиці похідних та невизначених інтегралів і базові поняття та закони загальної механіки.





ЗМІСТ

1. Вступ

- ❖ **Тема 1. Предмет теоретичної механіки. Основи математики у теоретичній механіці.**
Основні відомості з геометрії, тригонометрії та векторної алгебри. Таблиці похідних та невизначених інтегралів.
- ❖ **Тема 2. Фізичні основи механіки. Закони Ньютона.**
Основні поняття. Сила Приклади сил. Система зусиль. Рівнодійна сила. Проекція сили на вісь. Момент сили відносно точки. Пара сил, момент пари. Центр паралельних сил і центр ваги тіла. Маса тіла. Момент інерції механічної системи. Закони Ньютона. Системи одиниць фізичних величин. Міжнародна система одиниць (СІ). Система одиниць СГС. Технічна система одиниць МКГСС.
- ❖ **Контрольні завдання.**

2. Статика

- ❖ **Тема 1. Система збіжних сил.**
Основні визначення і поняття. Аксиоми статички. Види в'язей і їхні реакції. Методичні вказівки з визначення основних понять та аксіом статички. Зовнішні та внутрішні сили. Многокутник сил. Система збіжних сил і умови її рівноваги. Методика розв'язання задач на рівновагу. Приклади розрахунків.





❖ Тема 2. Довільна плоска система сил.

Головний вектор та головний момент. Умови рівноваги довільної просторової системи сил. Теорема Варіньйона. Рівновага за наявності сил тертя. Методика розв'язання задач на рівновагу. Прості механізми: важіль, блок, поліспаст, клин, гвинт. Приклади розрахунків.

❖ Тема 3. Довільна просторова система сил.

Умови рівноваги довільної просторової системи сил. Рівновага системи тіл. Методика розв'язання задач на рівновагу. Приклади розрахунків з використанням пакету Mathcad.

❖ Контрольні завдання.

3. Кінематика

❖ Тема 1. Кінематика точки.

Способи задання руху. Рівняння руху. Траєкторія. Закон руху точки. Зв'язок між трьома способами задання руху. Швидкість точки. Прискорення точки. Рівнозмінний рух точки. Класифікація руху точки. Приклади розв'язання завдань визначення кінематичних характеристик руху точки.

❖ Тема 2. Кінематика найпростіших рухів твердого тіла.

Поступальний рух. Обертальний рух. Кутова швидкість та кутове прискорення. Рівнозмінне обертання. Швидкість та прискорення точки тіла при обертальному русі.





❖ Тема 3. Плоскопаралельний рух твердого тіла.

Розкладання плоского руху на поступальний та обертальний рух. Рівняння руху. Теорема про складання швидкостей. Миттєвий центр швидкостей (МЦШ). Приклади використання МЦШ для визначення швидкостей. Теорема про складання прискорень. Приклади використання теореми про складання прискорень

❖ Тема 4. Складний рух точки.

Теорема про складання швидкостей точки при складному русі. Теорема про складання прискорень під час складного руху точки. Прискорення Коріоліса. Причини виникнення прискорення Коріоліса.

❖ Контрольні завдання.

4. Динаміка

❖ Тема 1. Вступ до динаміки.

Закони та аксіоми динаміки матеріальної точки. Диференціальні рівняння динаміки матеріальної точки. Дві основні задачі динаміки. Методика розв'язання задач. Приклади розв'язання задач динаміки точки.

❖ Тема 2. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки і механічної системи.

Робота сили, потужність. Кінетична енергія точки і системи. Теорема Кеніга. Теорема про зміну кінетичної енергії для матеріальної точки та системи. Приклад розв'язання задач на використання теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки і системи.





❖ Тема 3. Принцип Д'Аламбера.

Головний вектор і головний момент сил інерції твердого тіла. Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки. Принцип Д'Аламбера для системи.

❖ Тема 4. Принцип можливих переміщень.

Дійсні і можливі переміщення. Ідеальні в'язі. Застосування принципу можливих переміщень для виведення умов рівноваги. Приклади використання принципу можливих переміщень.

❖ Тема 5. Рівняння Лагранжа II роду.

Узагальнені координати, швидкості та прискорення. Узагальнені сили і способи їх обчислення. Методика застосування рівнянь Лагранжа II роду для розв'язання задач динаміки. Приклад розв'язання задач.

❖ Контрольні завдання.





Вступ. Предмет теоретичної механіки. Основи математики у теоретичній механіці.

Теоретична механіка – розділ механіки, у якому вивчаються закони механічного руху та механічної взаємодії матеріальних тіл. Механічним рухом називається зміна з часом взаємного положення у просторі матеріальних тіл, механічною взаємодією – така взаємодія, в результаті якої змінюється механічний рух або змінюється взаємне положення частин тіла.

У теоретичній механіці використовують безліч формул математики. Нагадаємо застосування деяких понять математики у теоретичній механіці.

ФОРМУЛИ З ГЕОМЕТРІЇ

Розв'язування трикутників



Теорема косинусів

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \text{ де } R - \text{ радіус описаного кола}$$

Вектори на площині



Координати вектора
 $\vec{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

Модуль вектора $\vec{a}(x; y)$:
 $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Додавання, віднімання векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$,
множення вектора $\vec{a}(x_1; y_1)$ на число λ .

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2);$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{d}(x_1 - x_2; y_1 - y_2);$$

$$\vec{m} = \lambda \vec{a}, \quad \vec{m}(\lambda x_1; \lambda y_1)$$

Декартові координати на площині



Координати середини відрізка $M(x_m; y_m)$

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Площа трикутника



$S = \frac{1}{2} ah, \quad S = \frac{1}{2} ab \sin C$

$S = \frac{abc}{4R}$, де R - радіус описаного кола

$S = pr$, r - радіус вписаного кола

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ - формула Герона,

де $p = \frac{a+b+c}{2}$ - півпериметр

Теорема Піфагора
 $a^2 + b^2 = c^2$



Тема 1 (продовження)



Правильний трикутник

$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$
 $a = b = c$
 $h_a = l_a = m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
 $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Прямокутний трикутник

$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c = R(r+c)$
 $a^2 + b^2 = c^2$ $R = \frac{c}{2}$ $m_c = \frac{c}{2}$
 $h_c = \frac{ab}{c}$ $r = \frac{a+b-c}{2}$
 $\alpha = c \sin \alpha = c \cos \beta = b \sin \alpha = b \cos \beta$
 $a^2 = ca_c$ $b^2 = cb_c$
 $h_c^2 = a_c b_c$

Довільний трикутник

$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
 $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
 $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$

ПЛАНІМЕТРІЯ

Позначення:
 $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ - кути
 d - діаметр
 R - радіус описаного кола
 r - радіус вписаного кола
 h - висота
 l - бісектриса
 m - медіана
 d - діагональ
 e - середня лінія
 S - площа

Квадрат

$S = a^2 = \frac{1}{2}d^2$ $d = a\sqrt{2}$
 $a = 2r = R\sqrt{2}$
Прямокутник
 $d^2 = a^2 + b^2$ $d = 2R$
 $S = ab = \frac{1}{2}d^2 \sin \varphi$

Паралелограм

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$
 $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin \varphi$
 $S = ab \sin \alpha = ab \sin \beta$

Ромб

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$
 $S = a^2 \sin \alpha = ab$

Трапеція

$a = \frac{a+b}{2}$
 $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ $h = ab$

Острівний трикутник

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin \varphi$

Коло

$C = 2\pi R$ $S = \pi R^2$
 $EP \cdot PF = KP \cdot PL$
 $S_{сек} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{1}{2}R^2 \alpha$
 $l = \frac{\pi R \alpha}{180} = R\alpha$
 $AB = AN \cdot AM$
 $AB \perp OB$ $AB = AC$

Куб

$V = a^3$ $S_{пов} = 6a^2$

Прямокутний паралелепіпед

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$
 $S_{пов} = PH + 2S$
 $V = abc$

Прямий паралелепіпед

$V = SH$ $S_{пов} = PH$
 $S_{пов} = S_{осн} + 2S$

Пряма призма

$V = SH$
 $S_{пов} = PH$
 $S_{пов} = S_{осн} + 2S$

Похила призма

$V = SH$ $S_{пов} = a \cdot P_{осн}$
 $S_{пов} = S_{осн} + 2S$

Піраміда

$V = \frac{1}{3}S_{осн} H$
 $S_{пов} = \frac{1}{3}PI$
 $S_{пов} = \frac{1}{3}PI + S_{осн}$

Зрізана правильна піраміда

$S_{пов} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)N$
 $V = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$

СТЕРЕОМЕТРІЯ

Позначення:
 a - бічне ребро
 P - периметр основи
 S - площа основи
 H - висота
 $P_{пер}$ - периметр перерізу
 $S_{біч}$ - площа бічної поверхні
 V - об'єм
 $S_{пов}$ - площа повної поверхні
 d - діагональ
 l - апофема
 L - твірна

Циліндр

$V = \pi R^2 H$
 $S_{біч} = 2\pi RH$
 $S_{пов} = 2\pi R(H + R)$

Конус

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$
 $S_{пов} = \pi RL$
 $S_{пов} = \pi RL + \pi R^2 = \pi R(L + R)$

Зрізаний конус

$S_{пов} = \pi(R_1 + R_2)L$
 $V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$

Куля, Сфера

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ $S = 4\pi R^2$
 $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$ - об'єм кульового сегмента
 H - висота сегмента





ТРИГОНОМЕТРІЯ

ОСНОВНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТОТОЖНОСТІ

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

ФОРМУЛИ ПОДВІЙНОГО КУТА

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

ФОРМУЛИ ПОЛОВИННОГО КУТА

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$





ФОРМУЛИ ДОБУТКУ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2}$$

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

$$\cos x = a$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x \in [-\pi; \pi]$$

$$\sin x = a$$

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\operatorname{tg} x = b$$

$$x = \operatorname{arctg} b + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

ФОРМУЛИ ПЕРЕХОДУ ДО ТАНГЕНСА ПОЛОВИННОГО КУТА

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$



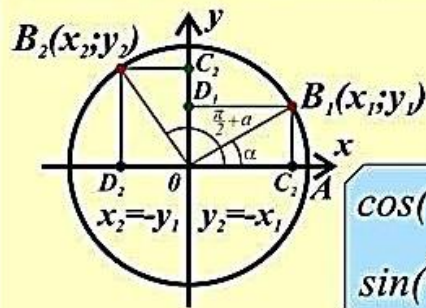


ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ

Формулами зведення називаються співвідношення, за допомогою яких значення тригонометричних функцій

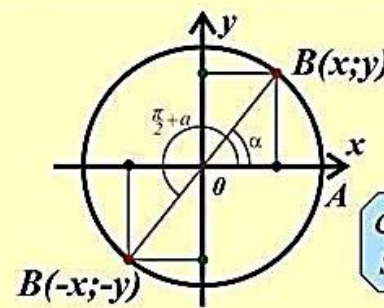
аргументів $\frac{\pi}{2} \pm a, \pi \pm a, \frac{3\pi}{2} \pm a, 2\pi \pm a$ виражаються через значення $\sin a, \cos a, \operatorname{tg} a, \operatorname{ctg} a$

β	$\frac{\pi}{2} - a$	$\frac{\pi}{2} + a$	$\pi - a$	$\pi + a$	$\frac{3\pi}{2} - a$	$\frac{3\pi}{2} + a$	$2\pi - a$	$2\pi + a$
$\sin \beta$	$\cos a$	$\cos a$	$\sin a$	$-\sin a$	$-\cos a$	$-\cos a$	$-\sin a$	$\sin a$
$\cos \beta$	$\sin a$	$-\sin a$	$-\cos a$	$-\cos a$	$-\sin a$	$\sin a$	$\cos a$	$\cos a$
$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{ctg} a$	$-\operatorname{ctg} a$	$-\operatorname{tg} a$	$\operatorname{tg} a$	$\operatorname{ctg} a$	$-\operatorname{ctg} a$	$-\operatorname{tg} a$	$\operatorname{tg} a$
$\operatorname{ctg} \beta$	$\operatorname{tg} a$	$-\operatorname{tg} a$	$-\operatorname{ctg} a$	$\operatorname{ctg} a$	$\operatorname{tg} a$	$-\operatorname{tg} a$	$-\operatorname{ctg} a$	$\operatorname{ctg} a$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$



$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$



**Векторна алгебра.**

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \equiv a_1 \cdot \bar{i} + a_2 \cdot \bar{j} + a_3 \cdot \bar{k}, \quad \text{де} \quad a_1 = \text{пр}_{OX} \bar{a}, \quad a_2 = \text{пр}_{OY} \bar{a}, \quad a_3 = \text{пр}_{OZ} \bar{a}.$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$(\cdot)A(x_A, y_A, z_A), \quad (\cdot)B(x_B, y_B, z_B). \quad \text{Тоді} \quad \overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Орт вектора \bar{a} – вектор $\bar{l}_{\bar{a}}$ одиничної довжини, що співпадає з \bar{a} за напрямом,

$$\bar{l}_{\bar{a}} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}.$$

Скалярний добуток векторів $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \quad \text{або} \quad (\bar{a}, \bar{b}).$$

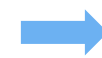
$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi, \quad \text{де } \varphi \text{ – кут між векторами.}$$

Формула для обчислення в ортонормованому базісі: $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|},$$

$$\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \bar{a} \cdot \bar{l}_{\bar{b}}$$





Векторний добуток векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

$\vec{a} \times \vec{b}$ або $[\vec{a}, \vec{b}]$.

$\vec{a} \times \vec{b}$ є вектор:

1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ и $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$;

2) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, де φ – кут між векторами.

3) $\vec{a}, \vec{b}, (\vec{a} \times \vec{b})$ утворюють праву трійку, и $(\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

Формула для обчислення в ортонормованому базісі: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

Геометричне значення: $|\vec{a} \times \vec{b}| = S$, де S – площа паралелограму, побудованого на

векторах, і, відповідно, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$.

Фізична інтерпретація: $\overline{OA} \times \vec{F} = \vec{m}$, де

\vec{F} – сила, прикладена у $(\cdot) A$, $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ – момент сили відносно $(\cdot) O$,

і, відповідно, m_1, m_2, m_3 – моменти сили відносно осей Ox, Oy, Oz .





Змішаний добуток векторів $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Визначення: $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$.

Формула для обчислення в ортонормованому базісі: $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Геометричне значення: $|\bar{a}\bar{b}\bar{c}| = V$, де V – об'єм паралелепіпеду, побудованого на векторах, і, відповідно, $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD}|$.

Умови колінеарності, ортогональності та компланарності векторів.

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} = \lambda \bar{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \Leftrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = 0$$

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$$

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ компланарні} \Leftrightarrow \bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$$





Таблиця похідних

1. $C' = 0$

2. $(C \cdot u)' = C \cdot u', \quad \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}.$

3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Де $u = u(x), v = v(x)$ – функції,

$m, n, C = const$ – константи

$x' = 1, \quad (C \cdot x)' = C$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$





← Тема 1 (продовження) →

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$(\arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$(\text{arcctg } u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(m\sqrt{x^n}\right)' = \frac{n}{m} \cdot m\sqrt{x^{n-m}}$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

$$\left(m\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{m \cdot m\sqrt{x^{m-1}}}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\left(m\sqrt{u^n}\right)' = \frac{n \cdot u'}{m} \cdot m\sqrt{u^{n-m}}$$

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n \cdot u'}{u^{n+1}}$$

$$\left(m\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{m \cdot m\sqrt{u^{m-1}}}$$





↑ ← **Тема 1 (продовження)** →

Таблиця інтегралів

n, a – числа, $U = U(x)$ – диференційована функція, C – константа.

$$\int dU = U + C$$

$$\int U^n \cdot dU = \frac{U^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{при } n \neq -1$$

$$\int \frac{dU}{U} = \ln|U| + C$$

$$\int a^U \cdot dU = \frac{a^U}{\ln a} + C$$

$$\int e^U \cdot dU = e^U + C$$

$$\int \sin U \cdot dU = -\cos U + C$$

$$\int \cos U \cdot dU = \sin U + C$$

$$\int \frac{dU}{\sin^2 U} = -\operatorname{ctg} U + C$$

$$\int \frac{dU}{\cos^2 U} = \operatorname{tg} U + C$$

$$\int \frac{dU}{\sin U} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{U}{2} \right) \right| + C$$

$$\int \frac{dU}{U^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{U}{a} + C = -\frac{1}{a} \cdot \operatorname{arcctg} \frac{U}{a} + C_1$$

$$\int \frac{dU}{U^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{U - a}{U + a} \right| + C = -\frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{U + a}{U - a} \right| + C$$

$$\int \frac{dU}{\sqrt{a^2 - U^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{U}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{U}{a} + C_1$$

$$\int \frac{dU}{\sqrt{U^2 \pm a^2}} = \ln \left| U + \sqrt{U^2 \pm a^2} \right| + C$$





↑ ← **Тема 1 (продовження)** →

Якщо $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$, то $F'(x) = f(x)$.

Якщо $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$, то $\int f(U) \cdot dU = F(U) + C$, $\int f(\xi) \cdot d\xi = F(\xi) + C$ і т.д.

$$\int \alpha \cdot f(x) \cdot dx = \alpha \cdot \int f(x) \cdot dx; \quad \int (f(x) \pm g(x)) \cdot dx = \int f(x) \cdot dx \pm \int g(x) \cdot dx$$

Відомо, що $d g(x) = g'(x) \cdot dx$. Тоді:

1) $dx = d(x+b)$, $dx = \frac{1}{a} \cdot d(a \cdot x + b)$ для $\forall a \neq 0$ і $\forall b$.

2) $g'(x) \cdot dx = d g(x)$;

3) якщо $\int f(x) \cdot dx = F(x)$, тоді $f(x) \cdot dx = dF(x)$.

Інтегрування за частинами: $\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU$

Формула Ньютона – Лейбниця.

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$





Фізичні основи механіки. Закони ньютонa

Основні поняття

Примітка: визначення і поняття, наведені у цьому розділі, будуть розглядатимуться докладніше у розділах Статика і Динаміка.

Сила — [фізична величина](#), що характеризує ступінь [взаємодії тіл](#). Якщо на певне тіло діють інші тіла, то ця дія (взаємодія) проявляється в збереженні стану відносної рівноваги тіла, у зміні форми та розмірів тіла (тіло [деформується](#)), або/та у зміні [швидкості](#) тіла (тіло рухається з [прискоренням](#)). У першому випадку маємо *статичний прояв сили*, у другому — *динамічний*. Виходячи з цього можливі два способи визначення сили: за деформацією тіла (наприклад, [пружини](#)) і за прискоренням, отриманим тілом.

Сила є [векторною](#) величиною — крім числа, що позначає більшу чи меншу дію, вона характеризується ще й точкою прикладання та напрямком дії. Властивості вектора сили можуть залежати від прийнятої моделі тіл. Так, в механіці абсолютно твердого тіла дія сили не залежить від точки прикладання. В цьому розділі механіки сила є ковзним вектором. Сили вивчаються в розділах [механіки](#), які називаються [динамікою](#) і [статикою](#). Динаміка вивчає питання, пов'язані з [рухом](#) тіл під впливом сил, а в статичі розглядаються умови [рівноваги](#) нерухомих тіл.

Сили в механіці — вага, сила пружності, сила тертя, [сила тяжіння](#), сила реакції опори, сила Архімеда та інші зумовлені двома фундаментальними взаємодіями — гравітаційними та електромагнітними. Проте, запис коректних формул для обчислення цих сил (особливо на основі законів електромагнетизму) є надзвичайно складною математичною задачею.

Вага — сила, з якою тіло, внаслідок притягання до Землі, діє на опору або розтягує підвіс. Якщо опора (підвіс) нерухома або рухається рівномірно і прямолінійно відносно Землі, то вага дорівнює силі тяжіння. Вплив обертання Землі на вагу тіла є несуттєвим.





↑ ← **Тема 2 (продовження)** →

Сила пружності — сила, що виникає всередині речовини при деформації твердого тіла, і яка намагається відновити початкову форму та/або розміри тіла (протидіє деформації).

Сила реакції — сила пружності, що діє на тіло з боку опори або підвісу. Якщо тіло знаходиться на нерухомій опорі, то сила реакції чисельно дорівнює вазі тіла. Якщо опора є похилою, то сила реакції — рівнодійна сил пружності (**сила нормальної реакції**) і сили тертя спокою, з якою площа діє на тіло.

Сила тертя — сила, що виникає між стичними поверхнями різних тіл, або між частинами одного і того ж суцільного тіла (рідина, газ). Іноді у поняття тертя включають і силу опору середовища (при русі тіл в рідинах і газах).

Сила опору середовища — сила, що діє на тіло, яке рухається в рідині або газі і обумовлюється дією сили **в'язкості** і **сили лобового опору**. Сумарну силу, яка діє на тіло, часто означають як силу опору середовища. Вона залежить від швидкості руху тіл, їх форми і розмірів. Проекція сили опору середовища на напрям переміщення — величина від'ємна.

Сила Архімеда — сила, з якою діє рідина або газ на занурене в неї тіло.

Сила інерції — сила, що діє на тіло при розгляді руху в **неінерційних системах відліку**.

Сила Коріоліса — одна з сил інерції, що існує в системі відліку, що обертається, і виявляється при русі в напрямі під кутом до осі обертання.





↑ ← **Тема 2 (продовження)** →

Якщо робота, що здійснюється силами, залежить тільки від початкового і кінцевого положень тіла і не залежить від траєкторії його переміщення, то такі сили називають консервативними, або потенціальними силами. При дії консервативних сил виконується закон збереження механічної енергії. Робота консервативних сил по будь-якій замкнутій траєкторії дорівнює 0. Системи в яких діють тільки консервативні сили називають консервативними.

Якщо робота, що здійснюється силою, залежить від траєкторії переміщення тіла, то така сила називається дисипативною. Системи в яких діють дисипативні сили називають неконсервативними.

Рівнодійна — сила, еквівалентна всім силам, що існують та діють на тіло.

Оскільки сили – векторні величини, для них справедливі всі дії, що розглядаються у векторній алгебрі: проектування, складання, розкладання.

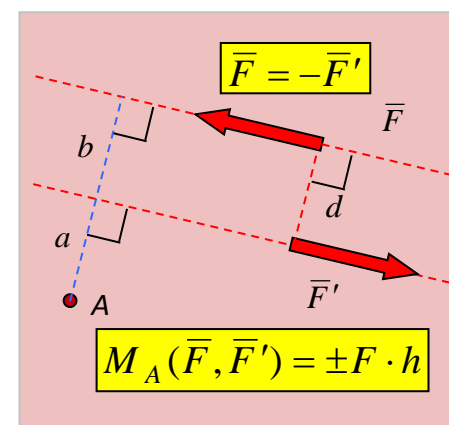
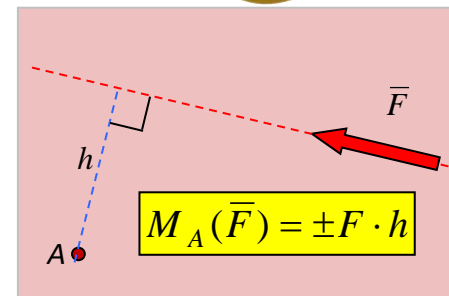
Проекція сили на вісь – це взята з відповідним знаком довжина відрізка, розташованого між проекціями початку і кінця вектору сили на цю вісь.

Маса — основна фізична величина, яка вважається однією з фундаментальних характеристик матерії, що визначає її інерційні, енергетичні та гравітаційні властивості.





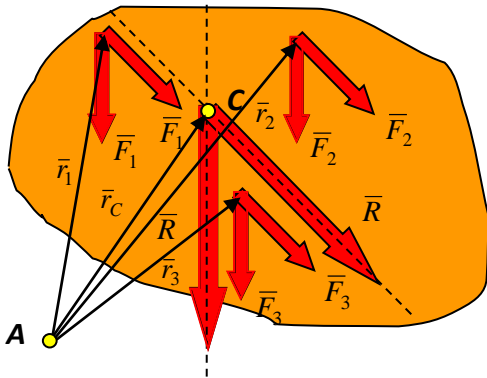
- ❖ **Момент сили відносно точки на площині** – алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на плече, взята зі знаком «+» (плюс), якщо обертання площини під дією сили відбувається проти годинникової стрілки, і зі знаком «-» (мінус) в протилежному випадку.
- ❖ **Плече сили** – довжина перпендикуляра, проведеного з точки на лінію дії сили.
- ❖ **Пара сил** – сукупність двох паралельних одна одній сил, рівних за величиною та спрямованих у протилежні сторони. Пара сил не може бути спрощена (не може бути замінена однією силою) і є новою силовою характеристикою механічної взаємодії.
- ❖ **Момент пари сил на площині (теорема про момент пари сил)** не залежить від вибору центру приведення (полюса) і дорівнює добутку модуля будь-якої з сил пари на плече пари, взятим зі знаком «+» (плюс), якщо обертання площини під дією пари сил відбувається проти годинникової стрілки, і зі знаком «-» (мінус) в протилежному випадку.
- ❖ **Плече пари сил** – довжина перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки на лінії дії однієї із сил пари на лінію дії іншої сили цієї пари.





❖ **Складання паралельних сил.**

Дві паралельні і спрямовані в один бік сили приводяться до однієї сили – рівнодіючої, прикладеної в точці, що ділить пряму на відстані, обернено пропорційні величинам сил. Послідовно складаючи попарно паралельні сили приходимо також до однієї сили – рівнодіючої \vec{R} :



Центр паралельних сил – точка прикладання рівнодіючої, яка не змінює свого положення за одночасного повороту всіх сил на однаковий кут.

З поняття центру паралельних сил випливає визначення центру ваги:

❖ **Центр ваги** – центр прикладання рівнодіючої сил тяжіння (ваги) матеріального тіла.

При визначенні положення центру тяжіння тіла застосовуються гіпотези:

1. Лінії дії сил тяжіння, прикладені до окремих частинок тіла, паралельні (розглянуті тіла мають розміри багато менші за радіус Землі і тоді кут між лініями дії сил тяжіння частинок тіл можна знехтувати);
2. Прискорення вільного падіння $\mathbf{g} = \mathbf{const}$ (висота розглянутих тіл набагато менше радіусу Землі та зміною величини прискорення вільного падіння за висотою тіла можна знехтувати);
3. – однорідні.

Положення центру ваги визначається за формулою:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{\sum F_i}$$

Проекції отриманого співвідношення для радіуса-вектора центру ваги на координатні вісі дають аналітичні формули визначення його координат:

$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}; \quad y_C = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}; \quad z_C = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}$$





❖ **Визначення положення центру тяжіння однорідних тіл.** Виділимо елементарний об'єм $dV = dx dy dz$. Сила тяжіння такого об'єму дорівнює $dG = \gamma dV$, де $\gamma = \text{const}$ - об'ємна вага. Якщо замінити підсумовування дискретних сил тяжіння ΔG , безперервним розподілом, це призведе до отримання інтегральних виразів за об'ємом тіла для визначення координат центрів тяжіння, наприклад, координати x_c :

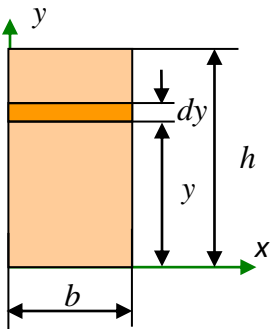
$$x_c = \frac{\int x dG}{\int_G dG} = \frac{\iiint x \gamma dx dy dz}{\iiint \gamma dx dy dz} = \frac{\int x dV}{\int_V dV}$$

Для всіх трьох координат отримуємо подібні вирази :

$x_c = \frac{\int x dV}{\int_V dV}$	$y_c = \frac{\int y dV}{\int_V dV}$	$z_c = \frac{\int z dV}{\int_V dV}$
-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

Визначення положення центру тяжіння найпростіших плоских тіл:

❖ **Прямокутник :** $dS = b dy$



$$y_c = \frac{\int y dS}{\int_S dS} = \frac{\int_0^h y b dy}{\int_0^h b dy} = \frac{b \int_0^h y dy}{b \int_0^h dy} = \frac{b \frac{y^2}{2} \Big|_0^h}{bh} = \frac{h}{2}$$

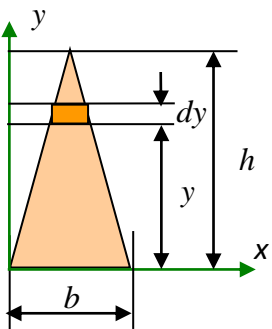
В окремому випадку плоского тіла (постійної товщини $H = \text{const}$), $dV = H dx dy = H dS$:

$x_c = \frac{\iint x H dx dy}{\iint H dx dy} = \frac{\int x dS}{\int_S dS}$	$x_c = \frac{\int x dS}{\int_S dS}$	$y_c = \frac{\int y dS}{\int_S dS}$
---	-------------------------------------	-------------------------------------

Для лінійного тіла (постійного поперечного перерізу $S = \text{const}$, вісь - плоска крива) $dV = S dL$:

$x_c = \frac{\int x S dL}{\int_S dL} = \frac{\int x dL}{\int_L dL}$	$x_c = \frac{\int x dL}{\int_L dL}$	$y_c = \frac{\int y dL}{\int_L dL}$
---	-------------------------------------	-------------------------------------

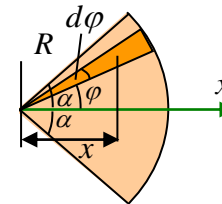
❖ **Трикутник:**



$$\frac{b_y}{b} = \frac{h-y}{h}; \quad b_y = \frac{h-y}{h} b; \quad dS = b_y dy = \frac{h-y}{h} b dy$$

$$y_c = \frac{\int y dS}{\int_S dS} = \frac{\int_0^h y \frac{h-y}{h} b dy}{\int_0^h \frac{h-y}{h} b dy} = \frac{\frac{b}{h} \int_0^h (hy - y^2) dy}{\frac{b}{h} \int_0^h (h-y) dy} = \frac{\frac{b}{h} \left(h \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^h}{\frac{b}{h} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^h} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{1}{2}bh} = \frac{h}{3}$$

❖ **Круговий сектор :** $dS = \frac{1}{2} R(R d\varphi) = \frac{1}{2} R^2 d\varphi$



$$x_c = \frac{\int x dS}{\int_S dS} = \frac{2 \int_0^\alpha \frac{2}{3} R \cos \varphi \frac{R^2}{2} d\varphi}{2 \int_0^\alpha \frac{R^2}{2} d\varphi} = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin \varphi \Big|_0^\alpha}{R^2 \varphi \Big|_0^\alpha} = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$

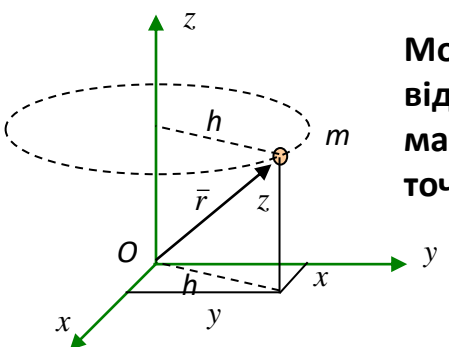




❖ **Елементи теорії моментів інерції.** При обертальному русі твердого тіла мірою інерції (опір зміни руху) є момент інерції відносно вісі обертання. Розглянемо основні поняття визначення та способи обчислення моментів інерції.

1. Момент інерції матеріальної точки відносно вісі:

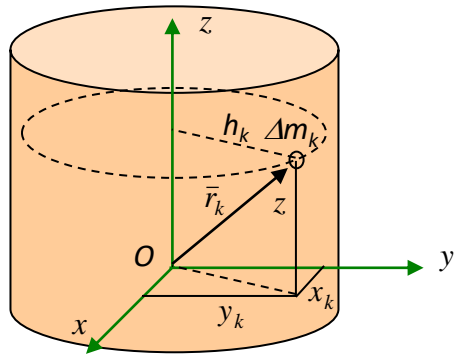
$$I_z = mh^2 = m(x^2 + y^2)$$



Момент інерції матеріальної точки відносно вісі дорівнює добутку маси точки на квадрат відстані точки до вісі.

Крім осьового моменту інерції твердого тіла існують інші види моментів інерції:

$$I_{xy} = \int xy dm$$
 - відцентровий момент інерції твердого тіла



$$I_z = \sum \Delta m_k h_k^2 = \sum \Delta m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

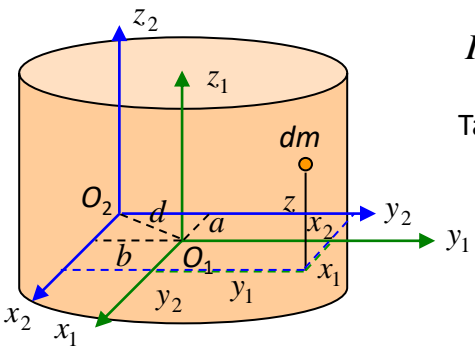
Момент інерції твердого тіла відносно вісі дорівнює сумі добутків маси кожної точки на квадрат відстані цієї точки до вісі.

За переходу від дискретної малої маси до нескінченно малої маси точки границя такої суми визначається інтегралом.

$$I_z = \int h^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$
 - осьовий момент інерції твердого тіла.

$$I_O = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm$$
 - полярний момент інерції твердого тіла.

3. Теорема про моменти інерції твердого тіла відносно паралельних вісей – формула переходу до паралельних вісей:

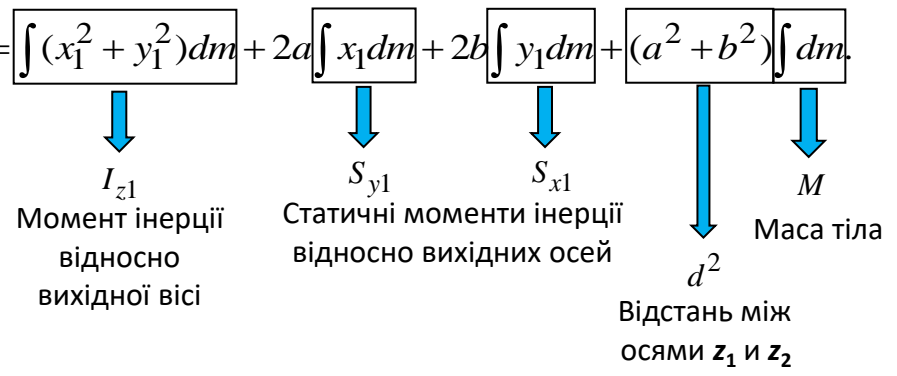


$$I_{z2} = \int (x_2^2 + y_2^2) dm = \int ((x_1 + a)^2 + (y_1 + b)^2) dm = \int (x_1^2 + y_1^2) dm + 2a \int x_1 dm + 2b \int y_1 dm + (a^2 + b^2) \int dm$$

Таким чином: $I_{z2} = I_{z1} + 2aS_{y1} + 2bS_{x1} + d^2M.$

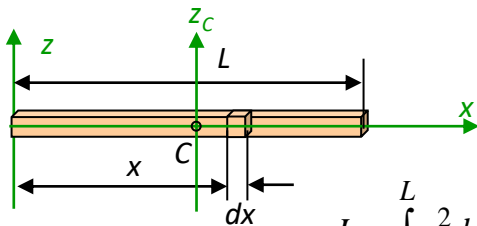
Якщо вісь z_1 проходить через центр мас, то статичні моменти дорівнюють нулю:

$$I_{z2} = I_{zC} + d^2M.$$





4. Момент інерції однорідного стрижня постійного перерізу відносно вісі :



Виділимо елементарний об'єм $dV = Adx$ на відстані x :

Елементарна маса: $dm = \rho Adx$

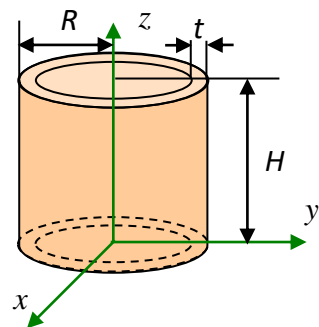
$$I_z = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \rho Adx = \rho A \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \rho A \frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

Для обчислення моменту інерції відносно центральної вісі (що проходить через центр тяжіння) достатньо змінити розташування вісі та задати межі інтегрування $(-L/2, L/2)$. Тут продемонструємо формулу переходу до паралельних осей:

$$I_z = I_{zC} + d^2M. \quad \Rightarrow \quad \frac{ML^2}{3} = I_{zC} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 M.$$

$$I_{zC} = \frac{ML^2}{3} - \left(\frac{L}{2}\right)^2 M = \frac{ML^2}{12}.$$

6. Момент інерції тонкого циліндра відносно вісі симетрії ($t \ll R$):



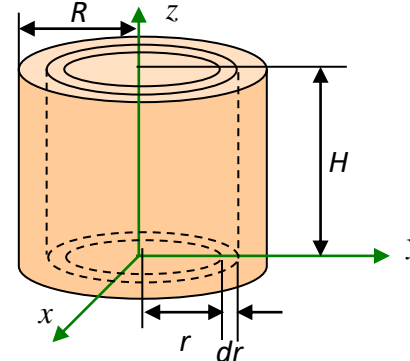
В силу малості товщини циліндра вважаємо, що всі точки знаходяться на однаковій відстані R до вісі та інтегрування не потрібно. Об'єм $V = 2\pi R t H$ (тонкий циліндр радіуса R із товщиною стінки t)

$$I_z = R^2 \rho 2\pi R t H = MR^2.$$

Те ж саме можна отримати з використанням формули для товстостінного циліндра, враховуючи малість t :

$$I_z = \frac{M((R^2 + (R-t)^2))}{2} = \frac{M(2R^2 - 2Rt + t^2)}{2} \ll 2R^2.$$

5. Момент інерції однорідного суцільного циліндра відносно вісі симетрії



Виділимо елементарний об'єм $dV = 2\pi r dr H$ (тонкий циліндр радіусу r):

Елементарна маса: $dm = \rho 2\pi r dr H$

$$I_z = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr H = \rho 2\pi H \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \rho 2\pi H \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Тут використано формулу об'єму циліндра $V = \pi R^2 H$.

Для обчислення моменту інерції порожнистого (товстого) циліндра достатньо задати границі інтегрування від R_1 до R_2 ($R_2 > R_1$):

$$I_z = \rho 2\pi H \frac{r^4}{4} \Big|_{R_1}^{R_2} = \rho 2\pi H \left(\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4} \right) = \frac{M(R_2^2 + R_1^2)}{2}.$$

Оскільки висота циліндрів в результаті не входить у формули моментів інерції, то вони залишаються справедливими для суцільного диска і обода колеса (тонкого кільця).





Закони Ньютона

Існують методологічно різні способи формулювання класичної механіки, тобто вибору її фундаментальних постулатів, на основі яких виводяться закони-наслідки і рівняння руху. Надання законам Ньютона статусу аксіом, що спираються на емпіричний матеріал, — тільки один з таких способів («ньютоніва механіка»).

Ньютон у своїй книзі «Математичні начала натуральної філософії» сформулював **перший закон механіки таким чином:**

всьяке тіло продовжує зберігати стан спокою або рівномірний і прямолінійний рух, допоки цей стан не змінять сили, прикладені до нього.

З сучасної точки зору, таке формулювання незадовільне. По-перше, термін «тіло» слід замінити терміном [«матеріальна точка»](#), оскільки тіло кінцевих розмірів за відсутності зовнішніх сил може здійснювати й [обертальний рух](#). По-друге, і це головне, Ньютон у своїй праці спирався на існування абсолютної нерухомої системи відліку, тобто абсолютного простору і часу, а ці уявлення сучасна фізика відкидає. З іншого боку, в довільній (наприклад, такій, що обертається) системі відліку закон інерції неправильний, тому ньютонівське формулювання було замінено постулатом існування інерційних систем відліку.





Другий закон Ньютона (основний закон динаміки):

в інерційній системі відліку прискорення матеріальної точки зі сталою масою прямо пропорційне рівнодійній всіх сил, що діють на неї, і обернено пропорційне її масі.

Це фактично означає, що чим більша за абсолютним значенням сила буде прикладена до тіла, тим більшим буде його прискорення. Маса характеризує інерційні властивості об'єкта.

Третій закон Ньютона: закон дії та протидії:

Сили, що виникають при взаємодії двох тіл, є рівними за модулем і протилежними за напрямом.

Система одиниць (фізичних величин) — сукупність одиниць певної системи фізичних величин.

Основна (фізична) величина — фізична величина, що прийнята за незалежну від інших величин певної системи.

Міжнародна система одиниць (СІ) — система одиниць фізичних величин, сучасний варіант метричної системи.

Щодо класичної механіки, основними величинами вважаються **одиниця маси (кг маси)**, **одиниця довжини (м)**, **одиниця часу (сек)**. З другого закону Ньютона – одиниця сили – ньютон (н) – сила, що прикладена до матеріальної точки масою один кілограм, надає їй прискорення $1 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$.





↑ ← Тема 2 (продовження) →

Система СГС — основними величинами вважаються одиниця маси (г маси), одиниця довжини (см), одиниця часу (сек). З другого закону Ньютона – одиниця сили – дина (дин).

Технічна система МКГСС — основними величинами вважаються одиниця сили (кгс), одиниця довжини (м), одиниця часу (сек). З другого закону Ньютона – одиниця маси – $\frac{\text{кгс}\cdot\text{м}}{\text{сек}^2}$.

Скорочені позначення метричних одиниць		
Скорочення, яке стоїть перед одиницею виміру, показує, на скільки слід помножити дану одиницю.		
Скорочення	Позначення	Одиниця множиться на
мікро-	μ	0,000001
мілі-	м	0,001
санти-	с	0,01
деци-	д	0,1
кіло-	к	1000
мега-	М	1 000 000

$1 \text{ см} = 10 \text{ мм}$	$1 \text{ см}^2 = 100 \text{ мм}^2$	$1 \text{ см}^3 = 1000 \text{ мм}^3$
$1 \text{ дм} = 10 \text{ см}$	$1 \text{ дм}^2 = 100 \text{ см}^2$	$1 \text{ дм}^3 = 1000 \text{ см}^3$
$1 \text{ м} = 10 \text{ дм}$	$1 \text{ а} = 100 \text{ м}^2$	$1 \text{ м}^3 = 1000 \text{ м}^3$
	$1 \text{ га} = 100 \text{ а}$	
	$1 \text{ км}^2 = 100 \text{ га}$	





Контрольні завдання

1. Що вивчає дисципліна «Прикладна механіка»?
2. Дати визначення сили.
3. Навести приклади сил.
4. Які сили називають консервативними?
5. Навести визначення проекції сили на вісь.
6. Дати визначення маси тіла.
7. Навести визначення моменту сили відносно точки.
8. Коли момент сили відносно точки дорівнює нулю?
9. Дати визначення пари сил.
10. Як визначається центр паралельних сил і центр ваги?
11. Навести визначення моменту інерції матеріальної точки та твердого тіла відносно осі.
12. Що характеризує момент інерції тіла відносно осі?
13. Записати формули для визначення осьового моменту інерції для однорідного стрижня постійного перерізу, однорідного суцільного і тонкого циліндру.
14. Сформулювати закони Ньютона.
15. Дати характеристику основних систем одиниць.





2. Статика

Вступ

Під назвою “механіка” об'єднується ряд наук, які **вивчають механічний рух та механічну взаємодію** твердих та деформованих тіл, а також рідких та газоподібних середовищ.

Механічний рух – один із видів руху матерії, що полягає у **зміні в часі взаємних положень тіл** або частин тіл.

Механічна взаємодія – одна із видів взаємодії матерії, який викликає зміну механічного руху тіл чи його частин, і навіть **перешкоджає зміні їхніх** взаємних положень.

Теоретична механіка вивчає **закони механічного руху та механічної взаємодії**, які є загальними для будь-яких тіл.

Спільність законів, придатність для будь-яких тіл і систем, досягається абстрагуванням від несуттєвих особливостей розглянутого тіла та виділенням найважливіших особливостей. Саме тому теоретична механіка є базовою наукою, на основі якої вивчаються інші прикладні технічні дисципліни.

Основні абстрактні образи (моделі) матеріальних тіл та систем:

Матеріальна точка (МТ) – об'єкт, який **не має розмірів**, але на відміну від геометричної точки **має масу**, рівну масі того тіла, яке зображується даною матеріальною точкою.

Абсолютно тверде тіло (АТТ) – система МТ, у якій **відстань між ними не змінюються** за жодних впливів.

Механічна система (МС) – **сукупність МТ чи АТТ**, пов'язаних між собою загальними законами руху чи взаємодії.

Залежно від умови задання та вибору об'єкта вивчення одне й те саме фізичне тіло може бути прийняте за МТ, АТТ або МС. Наприклад, Земля у випадку її руху навколо Сонця приймається за МТ, а під час її обертання навколо власної осі – за АТТ. При вивченні явищ, що відбуваються на Землі (припливи та відливи, переміщення кори тощо), Земля сприймається як МС.





Теоретична механіка складається з трьох розділів:



- ❖ **Статика** вивчає **умови відносної рівноваги** механічних систем. Для рівноваги необхідне певне співвідношення сил, тому у статистиці вивчаються загальні властивості сил, правила заміни сил іншими силами, еквівалентними з погляду рівноваги.
- ❖ **Кінематика** вивчає **механічний рух без урахування сил**, що викликають цей рух або впливають на нього. Таким чином, встановлюються деякі кількісні заходи з чисто геометричної точки зору.
- ❖ **Динаміка** вивчає **механічний рух у зв'язку з діючими силами на об'єкт руху**. Таким чином, вивчається зв'язок між рухом та діючими силами.

❖ Основні поняття теоретичної механіки

Сила – міра механічної взаємодії. Сила моделюється **вектором**, що характеризується **напрямом та величиною** (модулем).

Кінематичний стан тіла – стан спокою чи руху із постійними параметрами.

Система сил – сукупність сил, прикладених до об'єкта, який розглядається.

Рівнодіюча – сила, яка своєю дією замінює систему сил, тобто є еквівалентною системі сил.

Еквівалентна система сил – сила, яка замінює існуючу систему сил без зміни кінематичного стану об'єкта.

Взаємно врівноважена система сил – система сил, під дією якої об'єкт перебуває у рівновазі.

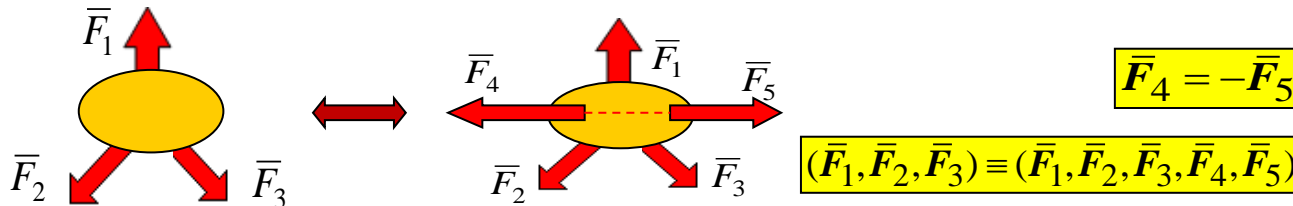
❖ Аксиоми статички

1. **Аксиома інерції** – Під дією взаємно врівноваженої системи сил тіло перебуває у стані спокою чи рівномірного прямолінійного руху.
2. **Аксиома двох сил** – Якщо тіло під дією двох сил знаходиться в рівновазі, то ці сили рівні за модулем і спрямовані вздовж однієї прямої у протилежні сторони. Такі дві сили є найпростішою взаємно врівноваженою системою сил.



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

3. **Аксиома приєднання** – Якщо до заданої системи сил приєднати (або видалити) взаємно врівноважену систему сил, то кінематичний стан тіла не зміниться.



$$\vec{F}_4 = -\vec{F}_5$$

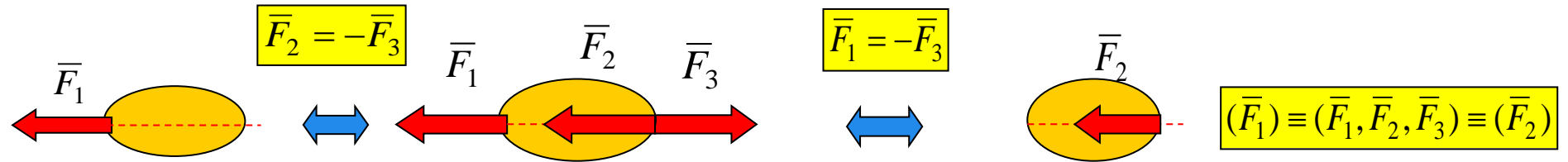
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5)$$



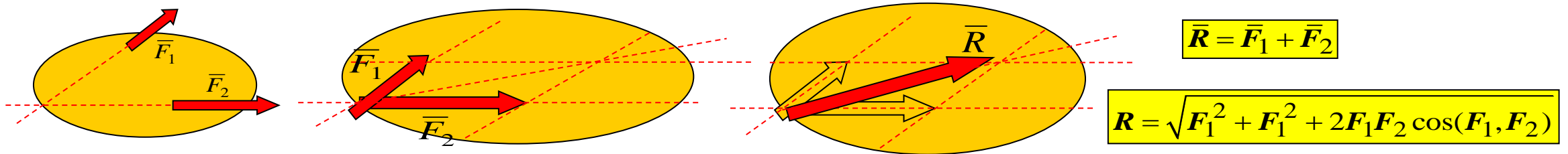


Аксиоми статки (продовження)

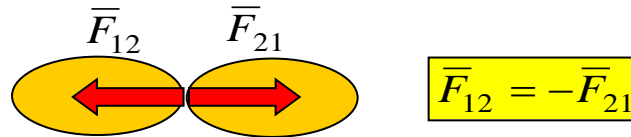
Наслідок із аксиоми приєднання – Кінематичний стан тіла не зміниться, якщо силу перенести вздовж лінії її дії.



4. **Аксиома про паралелограм сил** – рівнодіюча двох сил, що перетинаються, дорівнює діагоналі паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах.



5. **Аксиома дії та протидії** – Будь-якій дії відповідає рівна за величиною та протилежна за напрямком протидія (III закон Ньютона).



6. **Аксиома затвердіння** - Рівновага деформованого тіла зберігається у разі його затвердіння (обернене твердження справедливе не завжди).

В'язі та реакції в'язей

- ❖ **Вільне тіло** – це тіло, свобода переміщень якого не обмежується жодними іншими тілами.
- ❖ **Невільне тіло** – це тіло, рух якого обмежений іншими тілами.
- ❖ **В'язь** – тіло, що обмежує свободу переміщень об'єкта.
- ❖ **Реакція в'язі** – сила, що діє на об'єкт із боку в'язі.
- ❖ **Принцип звільнення від в'язей** – невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути в'язі і замінити їхню дію відповідними реакціями.

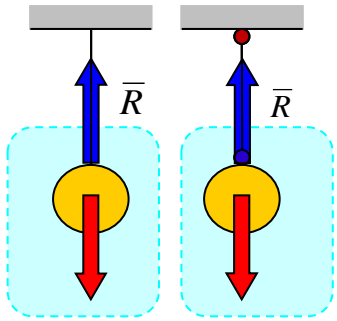




В'язі та реакції в'язей (продовження)

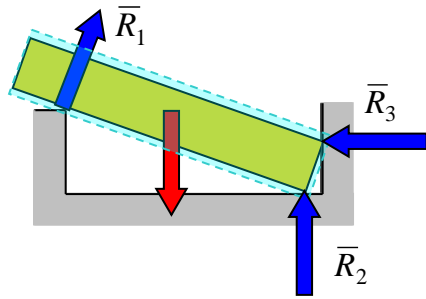
❖ Види в'язей та їхніх реакції:

1. Нитка, шарнірний стрижень:



Реакція нитки (стрижня) спрямована вздовж нитки (стрижня).

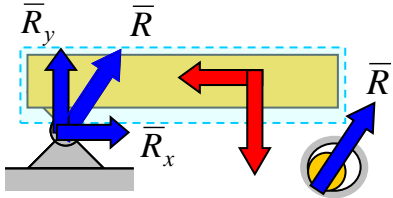
2. Абсолютно гладенька поверхня:



Реакція гладенької поверхні спрямована перпендикулярно загальній дотичній площині, проведеній до дотичних поверхонь тіла і в'язі.

Загальне правило для в'язей будь-якого виду: Якщо в'язь перешкоджає одному або декільком переміщенням (максимальна кількість переміщень – шість – три поступальні і три обертальні), то за напрямом цих і тільки цих переміщень виникають відповідні реакції (сили і моменти).

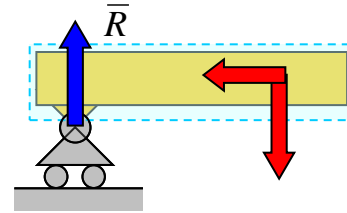
3. Нерухомий циліндричний шарнір:



Реакція нерухомого шарніра проходить через центр шарніра перпендикулярно до осі шарніра і має довільний напрямок.

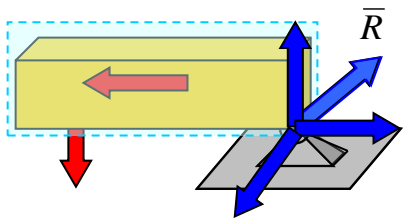
Реакцію нерухомого шарніра можна розкласти на дві складові, наприклад, R_x і R_y , які паралельні координатним осям.

4. Рухомий циліндричний шарнір:



Реакція рухомого шарніра проходить через центр шарніра перпендикулярно осі шарніра та площині опори.

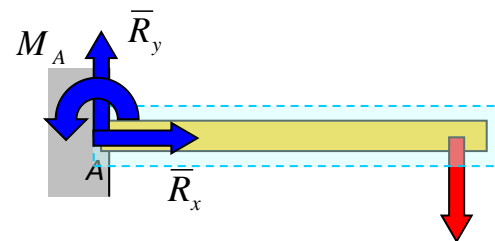
5. Нерухомий сферичний шарнір:



Реакція нерухомого сферичного шарніра проходить через центр шарніра і має довільний напрямок у просторі.

Реакцію нерухомого сферичного шарніра можна розкласти на три складові, наприклад, R_x , R_y , R_z , які паралельні координатним осям.

6. Жорстке плоске затиснення:



У жорсткому плоскому затисненні виникає три реактивні зусилля: дві складові реактивні сили R_x і R_y , а також реактивний момент (пара сил) M_A .





Система збіжних сил – система, у якій лінії дії сил перетинаються в одній точці.

План дослідження будь-якої системи сил відповідає послідовному розв'язанні трьох питань:

1. **Як спростити систему?**
2. **Який найпростіший вигляд системи?**
3. **Які умови рівноваги системи?**

1. **Перенесемо всі сили** вздовж лінії їхньої дії в точку перетину (кінематичний стан тіла за цього не зміниться - слідство з аксіоми приєднання).

Складемо перші дві сили F_1 і F_2 (аксіома про паралелограм сил).

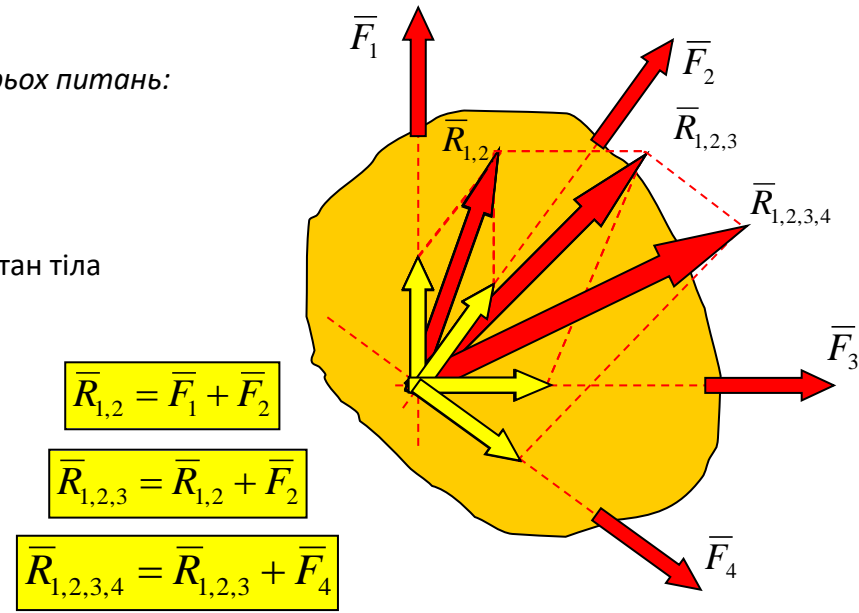
Кількість сил зменшилась на одиницю.

Складемо отриману рівнодіючу R_{12} з наступною силою F_3 .

Кількість сил знову зменшилась на одиницю.

Повторимо цю операцію з наступною силою F_4 .

Залишилась лише одна сила, еквівалентна вихідній системі сил.



Складання сил побудовою паралелограмів можна замінити побудовою **силового трикутника (багатокутника)** – обирається одна з сил або зображується паралельно самій собі з початком у будь-якій довільній точці, **всі інші сили зображуються паралельними самим собі з початком, що збігається з кінцем попередньої сили.**

Результатом такого складання є вектор, спрямований з початку першої сили до кінця останньої.

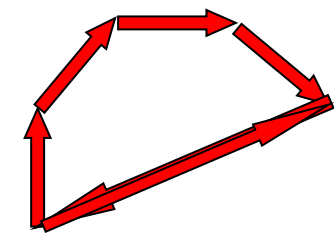
2. **Найпростіший вигляд системи** – сила, прикладена у точці перетину вихідних сил. Таким чином, схожа система сил приводиться до однієї сили – **рівнодіючої (сили, еквівалентної вихідній системі сил), що дорівнює геометричній сумі сил системи.**

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 + \dots = \sum \bar{F}_i$$

3. **Якщо рівнодіюча система виявляється не рівною нулю**, то під дією такої системи сил тіло буде рухатися в напрямку рівнодіючої (система сил не врівноважена). Для того, щоб урівноважити систему, достатньо прикласти силу, рівну отриманій рівнодіючій і спрямованій у протилежний бік (аксіома про дві сили). Таким чином, **умовою рівноваги збіжної системи сил є рівність рівнодіючої нулю.**

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = 0$$

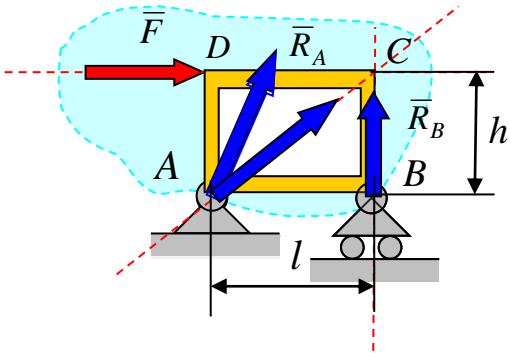
Ця умова є еквівалентною замкнутості силового багатокутника певним чином, а саме, **напрямок всіх сил при обході за контуром не змінюється за напрямком:**



❖ **Теорема про три сили** – Якщо під дією трьох непаралельних сил тіло знаходиться в рівновазі, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.

1. Перенесемо дві сили вздовж лінії їхньої дії в точку їх перетину (кінематичний стан тіла при цьому не зміниться - слідство з аксіоми приєднання).
2. Складемо ці сили (аксіома про паралелограм сил). Тепер система складається з двох сил. А така система перебуває у рівновазі, якщо ці сили рівні між собою і спрямовані вздовж однієї лінії у протилежні сторони. Таким чином, усі три сили перетинаються в одній точці.

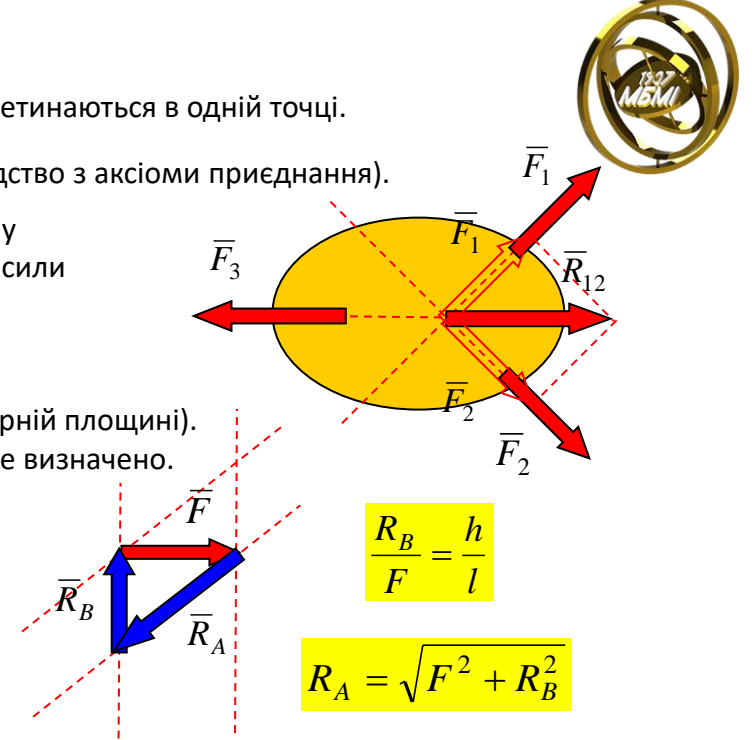
Теорема про три сили може ефективно застосовуватися для визначення напрямку однієї з двох реакцій тіл:



Реакція рухомого шарніра R_B спрямована вертикально (перпендикулярно опорній площині). Напрямок (кут нахилу до горизонту) реакції нерухомого шарніра R_A поки що не визначено.

Якщо тіло під дією трьох сил F , R_A і R_B знаходиться в рівновазі, то всі три сили повинні перетинатися в одній точці (у точці C):

Дійсні напрямки та величини реакцій легко визначаються побудовою силового трикутника та використанням подібності трикутників:



❖ **Аналітичне визначення рівнодіючої** – Кожна із сил, геометрична сума яких дає рівнодіючу, може бути представлена через її проекції на координатні вісі та одиничні вектори (орти):

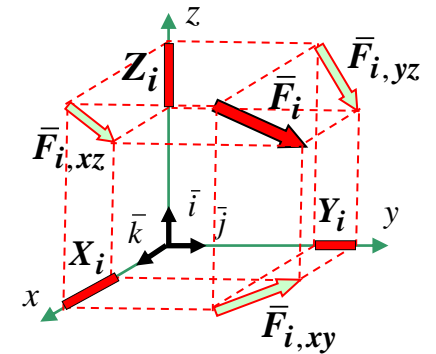
$$\vec{F}_i = X_i \vec{i} + Y_i \vec{j} + Z_i \vec{k}$$

Тоді рівнодіюча виражається через проекції сил наступним чином:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k} + X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k} + \dots$$

Групування за ортами дає вирази для проекцій рівнодіючої:

$$\vec{R} = (X_1 + X_2 + \dots) \vec{i} + (Y_1 + Y_2 + \dots) \vec{j} + (Z_1 + Z_2 + \dots) \vec{k} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$



Звідси проекції рівнодіючої:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum X_i; \\ R_y &= \sum Y_i; \\ R_z &= \sum Z_i; \end{aligned}$$

Напрявні косинуси рівнодіючої:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{R}, x) &= \frac{R_x}{R}; \\ \cos(\vec{R}, y) &= \frac{R_y}{R}; \\ \cos(\vec{R}, z) &= \frac{R_z}{R}. \end{aligned}$$

Модуль рівнодіючої:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Звідси рівняння рівноваги:

$$\vec{R} = 0$$

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ \sum Z_i &= 0. \end{aligned}$$





❖ **Плоска довільна система сил** – система, в якій сили лежать в одній площині та їхні лінії дії не перетинаються в одній точці.
 Для розгляду такої системи сил необхідно ввести нові поняття:

1. Момент сили відносно точки на площині.
2. Пара сил. Момент пари сил.

❖ **Момент сили відносно точки на площині** – алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на плече, взята зі знаком «+» (плюс), якщо обертання площини під дією сили відбувається проти годинникової стрілки, і зі знаком «-» (мінус) в протилежному випадку.

❖ **Плече сили** – довжина перпендикуляра, проведеного з точки на лінію дії сили.

❖ **Пара сил** – сукупність двох паралельних одна одній сил, рівних за величиною та спрямованих у протилежні сторони. Пара сил не може бути спрощена (не може бути замінена однією силою) і є новою силовою характеристикою механічної взаємодії.

❖ **Момент пари сил на площині (теорема про момент пари сил)** не залежить від вибору центру приведення (полюса) і дорівнює добутку модуля будь-якої з сил пари на плече пари, взятим зі знаком «+» (плюс), якщо обертання площини під дією пари сил відбувається проти годинникової стрілки, і зі знаком «-» (мінус) в протилежному випадку.

❖ **Плече пари сил** – довжина перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки на лінії дії однієї із сил пари на лінію дії іншої сили цієї пари.

У незалежності моменту пари та від вибору полюса можна переконатися обчисленням суми моментів від кожної з сил відносно будь-якого центру.

$$M_A(\vec{F}, \vec{F}') = F \cdot (a + b) - F'a = Fb = Fd$$

Теореми про пари :

❖ **Про перенесення пари сил у площині її дії** – Пару сил можна перенести у будь-яке місце у площині її дії.

Кінематичний стан тіла не зміниться.

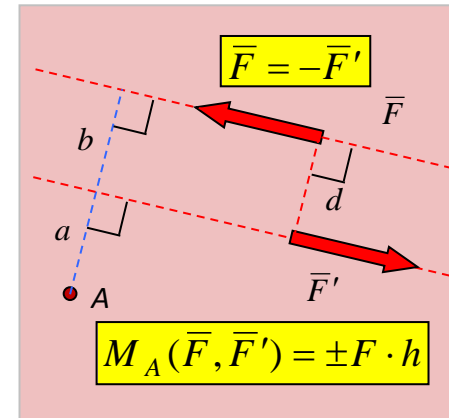
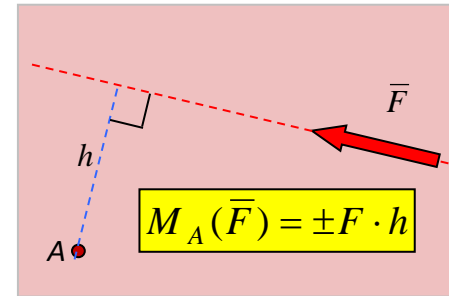
$$M(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) = F_1 d_1, \quad M(\vec{F}_2, \vec{F}'_2) = F_2 d_2; \quad F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}'_1) \equiv (\vec{F}_2, \vec{F}'_2)$$

❖ **Про еквівалентність пар сил** – Пару сил можна замінити іншою парою сил, якщо їхні моменти алгебраїчно рівні. Кінематичний стан тіла не зміниться.

❖ **Про складання пар сил на площині** – Систему пар сил на площині можна замінити однією парою, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів вихідних пар. Кінематичний стан тіла не зміниться.

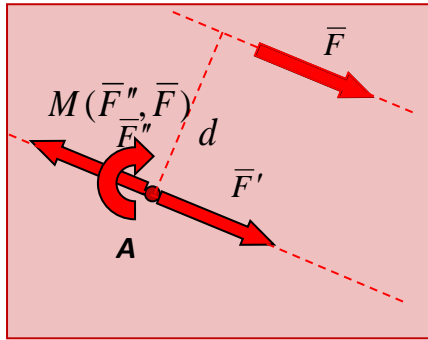
❖ **Умова рівноваги системи пар сил**

$$M = \sum M_i = 0$$





- ❖ **Приведення сили до заданого центру (метод Пуансо)** – силу можна перенести паралельно самій собі в будь-яку точку площини, якщо додати відповідну пару сил, момент якої дорівнює моменту цієї сили відносно точки, що розглядається.



Додамо до системи в **точці А** дві сили, рівні за величиною між собою та з величиною заданої сили, спрямовані вздовж однієї прямої у протилежні сторони та паралельні заданій силі: $\bar{F}'' = -\bar{F}' = -\bar{F}$
Кінематичний стан не змінився (аксіома про приєднання).

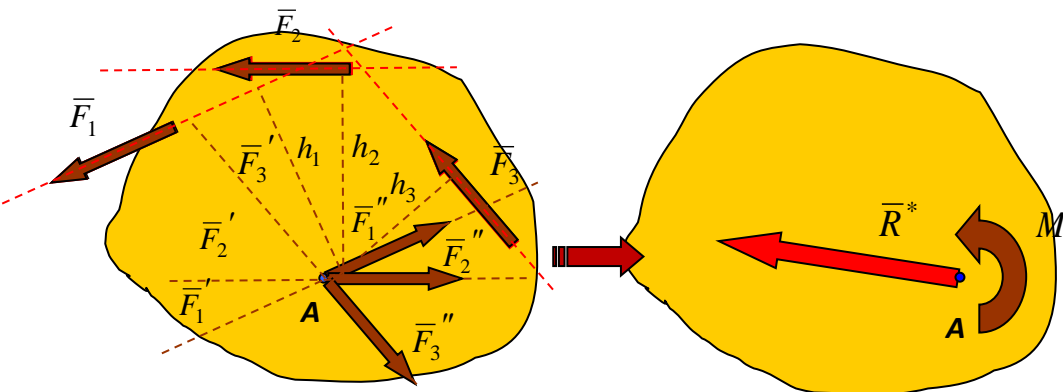
Вихідна сила та одна з доданих сил утворюють пару сил.

Момент цієї пари чисельно дорівнює моменту вихідної сили відносно центру приведення.

$$M(\bar{F}'', \bar{F}) - F \cdot d = -F \cdot h = M_A(\bar{F})$$

У багатьох випадках пару сил зручно зображати дуговою стрілкою.

- ❖ **Приведення плоскої довільної системи сил до заданого центру.** Вибираємо довільну точку на площині і кожен з сил переносимо методом Пуансо в цю точку. Замість вихідної довільної системи отримуємо схожу систему сил і систему пар.



Збіжна система сил приводиться до однієї сили, прикладеної в центрі приведення, яка раніше називалася рівнодіючою, але тепер ця сила не замінює вихідну систему сил, оскільки після приведення виникла система пар. Система пар приводиться до однієї пари (теорема про складання пар), момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів вихідних сил відносно центру приведення.

У загальному випадку плоска довільна система сил приводиться до однієї сили, яка називається головним вектором і до пари з моментом, рівним головному моменту всіх сил системи відносно центру приведення:

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i \quad \text{- головний вектор,}$$

$$M = M_A = \sum M_{iA} \quad \text{- головний момент.}$$

- ❖ **Умовою рівноваги плоскої довільної системи сил** є одночасна рівність головного вектора та головного момента системи нулю:

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i = 0$$

$$M = M_A = \sum M_{iA} = 0$$

Існують ще дві форми рівнянь рівноваги (II та III форми) :

- ❖ **Рівняння рівноваги (I форма)** маємо у вигляді системи трьох рівнянь із умов рівноваги з використанням виразів для проєкцій головного вектора:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ \sum M_{iA} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & x \\ \sum M_{iB} &= 0; & \perp \\ \sum M_{iA} &= 0 & AB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_{iC} &= 0; & C \\ \sum M_{iB} &= 0; & \notin \\ \sum M_{iA} &= 0 & AB \end{aligned}$$

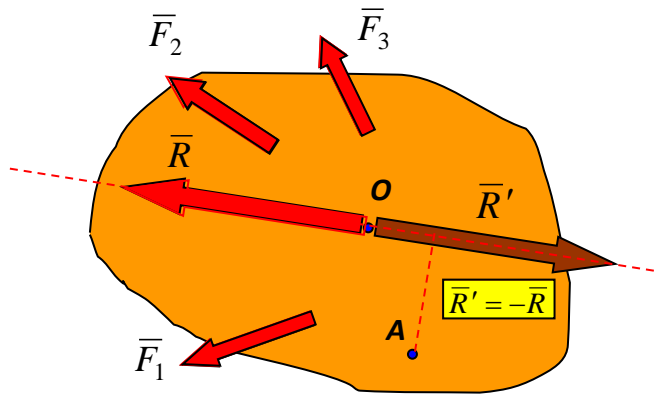


Слід звернути увагу на те, що II та III форми рівнянь рівноваги мають обмеження, пов'язані з вибором однієї з осей, наприклад, осі x і точки C відносно положення точок A і B .

Обмеження, що накладаються на вибір осі x (не перпендикулярно AB) та точки C (не лежить на AB), гарантують, що жодне з рівнянь не є тотожністю при виконанні двох інших рівнянь.

$\sum X_i = 0;$	x	$\sum M_{iC} = 0;$	C
$\sum M_{iB} = 0;$	\perp	$\sum M_{iB} = 0;$	\notin
$\sum M_{iA} = 0$	AB	$\sum M_{iA} = 0$	AB

❖ **Теорема Варіньона про момент рівнодіючої.** Якщо система сил має рівнодіючу, то момент цієї рівнодіючої відносно будь-якого центру дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил системи відносно того ж центру.



Доказ: Нехай система сил $F_1, F_2, F_3 \dots$ приводиться до рівнодіючої, прикладеної у точці O .

Така система не перебуває у рівновазі ($R \neq 0$). Урівноважимо цю систему силою R' , рівною рівнодіючій R , спрямованій вздовж лінії її дії у протилежний бік (аксіома про дві сили).

Таким чином, система вихідних сил $F_1, F_2, F_3 \dots$ та врівноважуюча сила R' знаходиться в рівновазі і повинна задовольняти рівнянням рівноваги, наприклад:

$$\sum M_{iA} + M_A(R') = 0$$

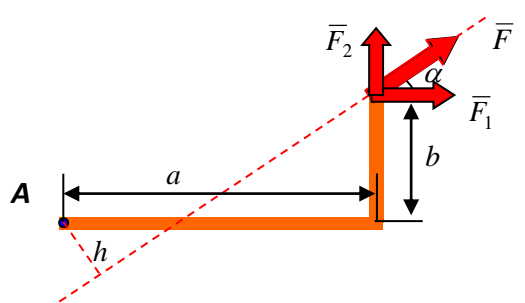
Оскільки сила R' , дорівнює рівнодіючій R та спрямована вздовж лінії її дії у протилежний бік, то $M_A(R') = -M_A(R)$. Підстановка цієї рівності до рівняння рівноваги дає :

$$\sum M_{iA} - M_A(R) = 0$$

$$M_A(R) = \sum M_{iA}$$

Приклади використання теореми про момент рівнодіючої:

1. Визначення моменту сили відносно точки, коли складно обчислювати плече сили. Наприклад:



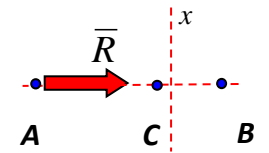
Силу F розкладемо на складові F_1 і F_2 . Тоді момент сили F відносно точки A можна обчислити як суму моментів кожної із сил відносно цієї точки: $M_A(F) = -F_1b + F_2a = -(F \cos \alpha)b + (F \sin \alpha)a$

2. Доказ необхідності обмежень для II та III форм рівнянь рівноваги:

Якщо $\sum M_{iA} = 0$, то система приводиться до рівнодіючої, при цьому вона проходить через точку A , через те, що її момент відносно цієї точки має дорівнювати нулю (теорема Варіньона).

Якщо при цьому $\sum M_{iB} = 0$, то рівнодіюча повинна також проходити через точку B .

Тоді проекція рівнодіючої на вісь, перпендикулярну AB , і момент рівнодіючої відносно точки, що лежить на AB , будуть тотожно рівні нулю за будь-якого значення рівнодіючої.





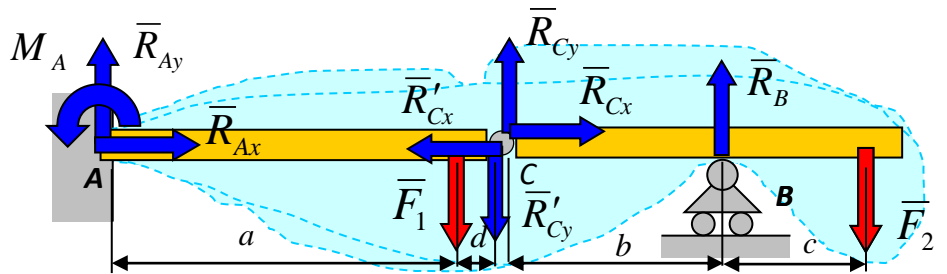
Рівновага зчленованих тіл. Залізничні та будівельні конструкції можуть складатися із зчленованих між собою тіл (балок, ферм). Кількість накладених в'язей може перевищувати кількість незалежних рівнянь рівноваги, які можна скласти для розглянутої конструкції. Такі задачі є **статично невизначуваними**. Ступінь статичної невизначуваності для плоских систем дорівнює:

$$n = 3Ж + 2Ш + C - 3Д$$

де $Д$ – кількість жорстких дисків, $Ж$ – кількість жорстких затиснень, $Ш$ – число нерухомих шарнірів (опорних та тих, що сполучають диски між собою), $С$ – число шарнірних стрижнів (опорних та тих, що сполучають диски між собою) або рухомих шарнірів

$$n = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 0$$

У теоретичній механіці можливе розв'язання лише статично визначуваних задач, у яких кількість в'язей дорівнює числу незалежних рівнянь рівноваги ($n = 0$).



1. Виберемо як об'єкт всю конструкцію.
2. Відкинемо в'язі та замінимо їхню дію реакціями.
3. Число невідомих реакцій – 4, а кількість незалежних рівнянь – 3. Це означає, що необхідно розчленувати конструкцію – відкинути шарнір C та замінити його дію на кожному з частин реакціями.

$$(CB): \sum X_i = 0; R_{Cx} = 0;$$

$$\sum M_{Ci} = 0; R_B b - F_2(b+c) = 0;$$

$$\sum M_{Bi} = 0; -R_{Cy} b - F_2 b = 0.$$

$$\bar{R}'_{Cx} = -\bar{R}_{Cx}, \text{ але } R'_{Cx} = R_{Cx};$$

$$\bar{R}'_{Cy} = -\bar{R}_{Cy}, \text{ але } R'_{Cy} = R_{Cy}.$$

4. Розв'язання отриманої системи рівнянь не представляє особливих труднощів у зазначеному порядку: спочатку **допоміжна** балка CB (не може залишатися у рівновазі без балки AC), потім **основна** балка AC (може бути у рівновазі без балки CB).

$$(AC): \sum X_i = 0; R_{Ax} - R'_{Cx} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; R_{Ay} - R'_{Cy} - F_1 = 0;$$

$$\sum M_{Ai} = 0; M_A - R'_{Cy}(a+d) - F_1 a = 0.$$

$$M_A^{\text{утрим}} > M_A^{\text{перекид}}$$

Рівновага важеля. Важіль – тверде тіло, що має одну нерухому точку. Важіль має один ступінь кінематичної рухливості ($w = -n = 3Д - 3Ж - 2Ш - C = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 0 = 1$) і в рівновазі може бути лише за певного співвідношення активних сил, що діють на важіль.

Рівняння рівноваги важеля. Застосовуючи загальний підхід до складання рівнянь рівноваги для важеля отримаємо:

$$\sum X_i = 0; R_{Ax} = 0;$$

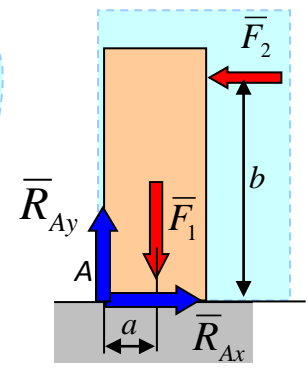
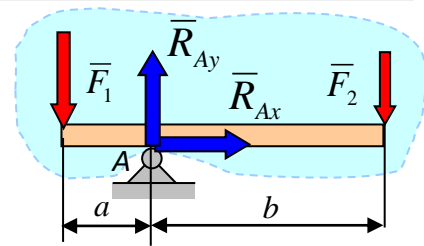
$$\sum Y_i = 0; R_{Ay} - F_1 - F_2 = 0;$$

$$\sum M_{Ai} = 0; F_1 a - F_2 b = 0.$$

У багатьох випадках значення опорних реакцій не є важливими і шукане співвідношення сил визначають з останнього моментного рівняння, яке і приймається за **рівняння рівноваги важеля**.

Рівняння рівноваги важеля використовується за **розрахунку підпірної стінки або вантажу на перекидання**:

Умова стійкості на перекидання: Утримуючий момент відносно нерухомої точки (від F_1) повинен бути більше перекидального моменту (від F_2) відносно цієї точки.





❖ **Тертя ковзання.** Під дією зсувної сили, прикладеної до тіла, що лежить на шорсткій поверхні, виникає сила, яка протидіє можливому зсуву тіла (**сила тертя зчеплення**) з положення рівноваги або його дійсному переміщенню (**сила тертя ковзання**) у випадку, коли рух справді відбувається.

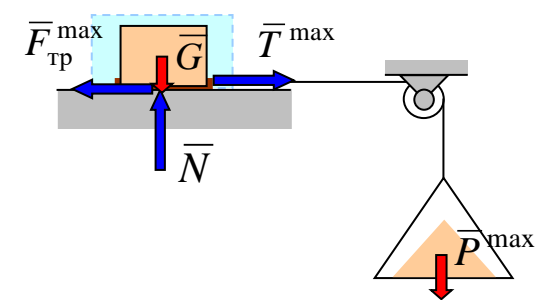
Основні закони тертя (Амонтона – Кулона) :

1. Сила тертя лежить у дотичній площині до контактуючих поверхонь і спрямована в бік, протилежний до напрямку, в якому прикладені до тіла сили, які прагнуть його зрушити або дійсно зрушують (реактивний характер).
2. Сила тертя змінюється від нуля до максимального значення $0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{тр}}^{\text{max}}$. Максимальна сила тертя пропорційна коефіцієнту тертя та силі нормального тиску.
3. Коефіцієнт тертя є величиною постійною для даного виду та стану контактуючих поверхонь ($f = \text{const}$).
4. Сила тертя в широких межах не залежить від площі контактуючих поверхонь. $F_{\text{тр}}^{\text{max}} = fN$.

❖ **Способи визначення коефіцієнта тертя.**

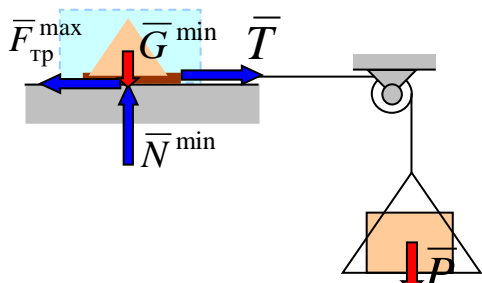
1. Зсувна сила змінюється від нуля до максимального значення – $0 \leq T \leq T^{\text{max}}$, ($0 \leq P \leq P^{\text{max}}$).

2. Сила нормального тиску змінюється від початкового значення до мінімального значення – $N_0 \geq N \geq N^{\text{min}}$ ($G_0 \geq G \geq G^{\text{min}}$).



$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ T^{\text{max}} - F_{\text{тр}}^{\text{max}} &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ N - G &= 0. \end{aligned}$$

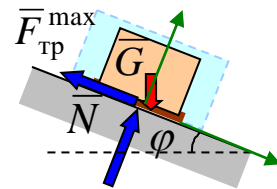
$$\begin{aligned} T^{\text{max}} &= fN; \\ N &= G; \\ f &= \frac{T^{\text{max}}}{N} = \frac{P^{\text{max}}}{G}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ T - F_{\text{тр}}^{\text{max}} &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ N^{\text{min}} - G^{\text{min}} &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= fN^{\text{min}}; \\ N^{\text{min}} &= G^{\text{min}}; \\ f &= \frac{T}{N^{\text{min}}} = \frac{P}{G^{\text{min}}}. \end{aligned}$$

3. Зсувна сила і сила нормального тиску змінюються при зміні кута нахилу площини ковзання від нуля до максимального значення – $0 \leq \varphi \leq \varphi^{\text{max}}$.

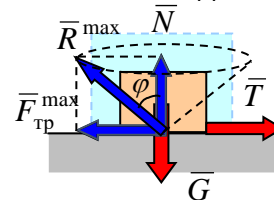


$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ G \sin \varphi^{\text{max}} - F_{\text{тр}}^{\text{max}} &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ N - G \cos \varphi^{\text{max}} &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G \sin \varphi^{\text{max}} &= fN; \\ N &= G \cos \varphi^{\text{max}}; \\ f &= \frac{G \sin \varphi^{\text{max}}}{N} = \\ &= \frac{G \sin \varphi^{\text{max}}}{G \cos \varphi^{\text{max}}} = \text{tg} \varphi^{\text{max}}. \end{aligned}$$

❖ **Кут тертя**

З урахуванням сили тертя, що виникає при контакті з шорсткою поверхнею повна реакція такої поверхні може розглядатися як геометрична сума нормальної реакції абсолютно гладенької поверхні та сили тертя:



Кут відхилення повної реакції шорсткої поверхні – це **кут тертя**, що дорівнює:

$$\bar{R}^{\text{max}} = \bar{N} + \bar{F}_{\text{тр}}^{\text{max}}$$

$$\varphi = \text{arctg} \left(\frac{F_{\text{тр}}^{\text{max}}}{N} \right) = \text{arctg} (f)$$

При зміні напрямку зсувної сили T на опорній поверхні поворотом відносно нормалі до площини повна максимальна реакція шорсткої поверхні описує **конус тертя**.

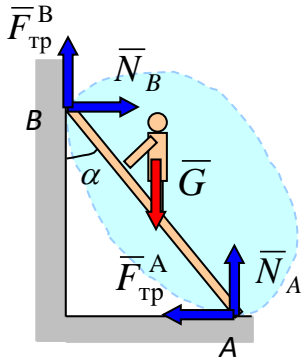
Активні сили (G , T та ін.) можна замінити рівнодіючою силою P , яка має кут відхилення від вертикалі α . Можна показати, що **рівновага можлива лише у тому випадку, коли ця сила залишається всередині простору конуса тертя:**

Умова рівноваги вздовж осі x : $P \cdot \sin \alpha \leq F_{\text{тр}}^{\text{max}}$.
 З рівняння рівноваги вздовж осі y : $N = P \cdot \cos \alpha$.
 Максимальна сила тертя $F_{\text{тр}}^{\text{max}} = f \cdot N = \text{tg} \varphi \cdot P \cdot \cos \alpha = \text{tg} \varphi \cdot P \cdot \cos \alpha$.
 Тоді $P \cdot \sin \alpha \leq \text{tg} \varphi \cdot P \cdot \cos \alpha$, звідки $\text{tg} \alpha \leq \text{tg} \varphi$ і $\alpha \leq \varphi$.





- ❖ **Урахування сил тертя під час розв'язання задач на рівновагу.** За наявності сил тертя:
 1. До діючих на об'єкт активних сил і реакцій абсолютно гладеньких поверхонь **додаються відповідні сили тертя**, спрямовані вздовж загальної дотичної до контактуючих поверхонь у бік, протилежний можливому зміщенню точки торкання об'єкта відносно опорної шорсткої площини.
 2. До рівнянь рівноваги, складених для об'єкта, **додаються вирази для максимальних сил тертя** в кількості, що дорівнює кількості сил тертя.
- ❖ **Приклад розв'язання задачі на рівновагу з урахуванням сил тертя.** Людина вагою G збирається встановити легку драбину під кутом α до вертикалі (стіни) і піднятися на половину довжини драбини для виконання роботи. Коефіцієнти тертя в точках контакту драбини із підлогою (A) та зі стіною (B) рівні f_A і f_B відповідно. Визначити граничне значення кута нахилу, у якому драбина з людиною можуть зберігати рівновагу. Вагою драбини знехтувати.



1. Вибираємо об'єкт (людина та драбина), відкидаємо в'язі та замінюємо їхню дію реакціями гладенької поверхні.
2. Додаємо активні сили (силу тяжіння G). Драбина легка, її вагою нехтуємо.
3. Додаємо сили тертя, спрямовані у бік, протилежний до можливого переміщення контактних точок A і B драбини під дією доданої активної сили.

4. Складаємо рівняння рівноваги :

$$\begin{cases}
 \sum X_i = 0; & N_B - F_{\text{тр}}^A = 0; \\
 \sum Y_i = 0; & F_{\text{тр}}^B - G + N_A = 0; \\
 \sum M_{iA} = 0; & G \frac{AB}{2} \sin \alpha - F_{\text{тр}}^B AB \sin \alpha - N_B AB \cos \alpha = 0.
 \end{cases}$$

5. Додаємо вирази для сил тертя:

$$\begin{cases}
 F_{\text{тр}}^A = f_A N_A; \\
 F_{\text{тр}}^B = f_B N_B;
 \end{cases}$$

6. Підстановка виразів з пункту 5 в рівняння рівноваги з простими перетвореннями третього рівняння дає:

$$\begin{cases}
 \sum X_i = 0; & N_B - f_A N_A = 0; \\
 \sum Y_i = 0; & f_B N_B - G + N_A = 0; \\
 \sum M_{iA} = 0; & G \frac{1}{2} \text{tg} \alpha - f_B N_B \text{tg} \alpha - N_B = 0.
 \end{cases}$$

7. Розв'язання перших двох рівнянь дає вирази для нормальних реакцій:

$$\begin{cases}
 N_A = \frac{G}{1 + f_A f_B}; \\
 N_B = \frac{f_A G}{1 + f_A f_B}.
 \end{cases}$$

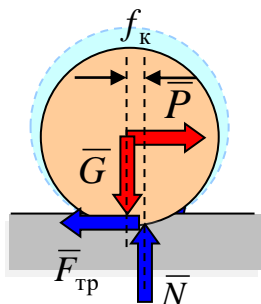
8. Підстановка виразів для нормальних реакцій у третє рівняння рівноваги призводить до можливості визначення граничного кута нахилу α :

$$\text{tg} \alpha = \frac{2f_A}{1 - f_A f_B}$$





❖ **Опір під час кочення.** Під дією сили зсуву, прикладеної до котка, що лежить на шорсткій поверхні, виникає сила, яка протидіє можливому зміщенню тіла (**сила тертя зчеплення**) з рівноважного положення або його дійсному переміщенню (**сила тертя ковзання**) за його руху і пара сил, момент якої перешкоджає повороту катка (**момент опору коченню**). Виникнення пари сил, яка перешкоджає коченню, пов'язано з деформацією опорної площини, внаслідок якої рівнодіюча нормальних реактивних сил вздовж площадки контакту зміщена від лінії дії сили тяжіння у бік можливого або дійсного руху.



Основні закони тертя кочення:

1. Момент опору коченню завжди спрямований у протилежний бік до того напрямку, в якому прикладені до тіла сили, що прагнуть його повернути, або дійсному повороту під дією цих сил (реактивний характер).
2. Момент опору коченню змінюється від нуля до максимального значення. Максимальний момент опору коченню пропорційний коефіцієнту тертя кочення та силі нормального тиску.
3. Коефіцієнт тертя кочення – це постійна величина для даного виду та стану контактуючих поверхонь ($f_k = \text{const}$).
4. Момент опору коченню у широких межах не залежить від радіуса котка.

$$0 \leq M_k \leq M_k^{\max}$$

$$M_k^{\max} = f_k N$$

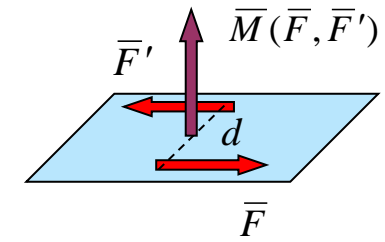
Якщо коефіцієнт тертя ковзання є безрозмірною величиною, то коефіцієнт тертя кочення вимірюється одиницями довжини та дорівнює за величиною зазначеному зміщенню рівнодіючої нормального тиску. Внаслідок деформації коефіцієнт тертя кочення має дуже малу величину і становить, наприклад, для сталевого колеса на сталевій рейці 0,0005 м.





❖ **Момент пари сил у просторі** – вектор, перпендикулярний площині дії пари, спрямований у той бік, звідки обертання площини під дією пари видно таким, що відбувається проти годинникової стрілки.

❖ Модуль вектора моменту пари дорівнює добутку однієї з сил пари на плече пари : $M = Fd = F'd$



❖ **Теореми про пари:** (Теореми наводяться без доказів)

❖ **Про перенесення пари сил у площину, паралельну площині її дії** – Пару сил можна перенести у будь-яку площину, паралельну площині її дії. Кінематичний стан тіла не зміниться.

❖ **Про еквівалентність пар сил** – Пару сил можна замінити іншою парою сил, якщо їхні моменти геометрично (векторно) рівні. Кінематичний стан тіла не зміниться.

❖ **Про складання пар сил на площині** – Систему пар сил на площині можна замінити однією парою, момент якої дорівнює геометричній (векторній) сумі моментів вихідних пар. Кінематичний стан тіла не зміниться.

❖ **Умова рівноваги системи пар сил**

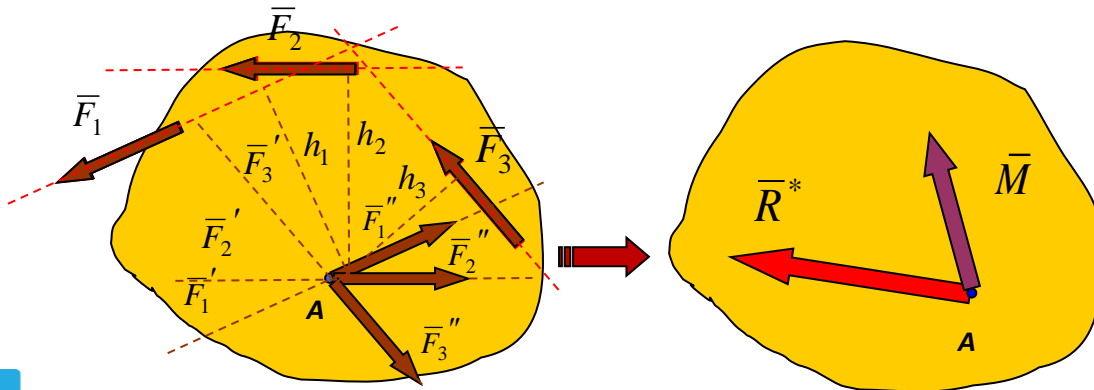
$$\bar{M} = \sum \bar{M}_i = 0$$

Далі будемо дотримуватися загального плану дослідження системи сил, послідовно вирішуючи три питання :

1. Як спростити систему?
2. Який найпростіший вигляд системи?
3. Які умови рівноваги системи?

❖ **Приведення плоскої довільної системи сил до заданого центру** – вибираємо довільну точку на площині і кожну з сил переносимо методом Пуансо в цю точку. Замість вихідної довільної системи отримуємо схожу систему сил і систему пар.

На відміну від раніше розглянутої плоскої довільної системи сил, тепер при використанні методу Пуансо приєднані пари сил характеризуються векторами.



Збіжна система сил приводиться до однієї сили, прикладеної в центрі приведення. Система пар приводиться до одної пари (теорема про складання пар), момент якої дорівнює векторній сумі моментів вихідних сил відносно центру приведення.

У загальному випадку плоска довільна система сил приводиться до однієї сили, яка називається головним вектором і до пари з моментом, рівним головному моменту всіх сил системи відносно центру приведення. :

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i \text{ - головний вектор,}$$

$$\bar{M} = \bar{M}_A = \sum \bar{M}_{iA} \text{ - головний момент.}$$

Тема 3 (продовження)



❖ **Аналітичне визначення головного вектора системи** – обчислюється так само, як і раніше визначалась рівнодіюча, через проєкції на координатні вісі та одиничні вектори (орти):

$$\vec{R}^* = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k} + X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k} + \dots$$

$$\vec{R}^* = (X_1 + X_2 + \dots) \vec{i} + (Y_1 + Y_2 + \dots) \vec{j} + (Z_1 + Z_2 + \dots) \vec{k} = R_x^* \vec{i} + R_y^* \vec{j} + R_z^* \vec{k}$$

Звідси проєкції головного вектора:

$$R_x^* = \sum X_i;$$

$$R_y^* = \sum Y_i;$$

$$R_z^* = \sum Z_i;$$

Напрямні косинуси головного вектора:

$$\cos(\vec{R}^*, x) = \frac{R_x^*}{R^*};$$

$$\cos(\vec{R}^*, y) = \frac{R_y^*}{R^*};$$

$$\cos(\vec{R}^*, z) = \frac{R_z^*}{R^*}.$$

Модуль головного вектора:

$$R^* = \sqrt{R_x^{*2} + R_y^{*2} + R_z^{*2}}$$

❖ **Аналітичне визначення головного моменту системи** – обчислюється аналогічно через проєкції на координатні вісі та одиничні вектори (орти):

$$\vec{M}_A = \sum \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots = M_{1x} \vec{i} + M_{1y} \vec{j} + M_{1z} \vec{k} + M_{2x} \vec{i} + M_{2y} \vec{j} + M_{2z} \vec{k} + \dots$$

Звідси проєкції головного моменту:

$$M_x = \sum M_{ix};$$

$$M_y = \sum M_{iy};$$

$$M_z = \sum M_{iz};$$

Напрямні косинуси головного моменту:

$$\cos(\vec{M}_A, x) = \frac{M_x}{M_A};$$

$$\cos(\vec{M}_A, y) = \frac{M_y}{M_A};$$

$$\cos(\vec{M}_A, z) = \frac{M_z}{M_A}.$$

Модуль головного моменту:

$$M_A = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

$$\vec{M}_A = (M_{1x} + M_{2x} + \dots) \vec{i} + (M_{1y} + M_{2y} + \dots) \vec{j} + (M_{1z} + M_{2z} + \dots) \vec{k} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

❖ **Умовою рівноваги просторової довільної системи сил** є одночасна рівність нулю головного вектора і головного моменту системи:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum M_{xi} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad \sum M_{yi} = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; \quad \sum M_{zi} = 0.$$

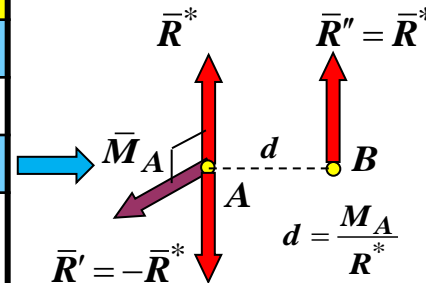
$$\vec{R}^* = \sum \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{M} = \vec{M}_A = \sum \vec{M}_{iA} = 0$$

❖ **Рівняння рівноваги** отримуємо у вигляді системи шести рівнянь із умов рівноваги з використанням виразів для проєкцій головного вектора та головного моменту системи сил:

❖ **Можливі випадки приведення просторової довільної системи сил:**

	\vec{R}^*	\vec{M}_A	Додаткова умова	Найпростіший вигляд системи
1	$\vec{R}^* = 0$	$\vec{M}_A = 0$		Умови рівноваги
2	$\vec{R}^* \neq 0$	$\vec{M}_A = 0$		Рівнодіюча
3	$\vec{R}^* = 0$	$\vec{M}_A \neq 0$		Пара сил
4	$\vec{R}^* \neq 0$	$\vec{M}_A \neq 0$	$\vec{R}^* \perp \vec{M}_A$	Рівнодіюча
			$\vec{R}^* \not\perp \vec{M}_A$	Силевий гвинт (сила та пара сил)



Умова приведення системи до рівнодіючої:

$$\vec{R}^* \cdot \vec{M}_A = R^* M_A \cos(\vec{R}^*, \vec{M}_A) = 0$$

$$\vec{M}_A = 0; \Rightarrow \vec{R}^* \cdot \vec{M}_A = 0$$

$$\vec{R}^* \perp \vec{M}_A; \Rightarrow \vec{R}^* \cdot \vec{M}_A = 0; (\cos(\vec{R}^*, \vec{M}_A) = 0)$$

В аналітичній (координатній) формі:

$$\vec{R}^* \cdot \vec{M}_A = R_x^* M_x + R_y^* M_y + R_z^* M_z = 0$$





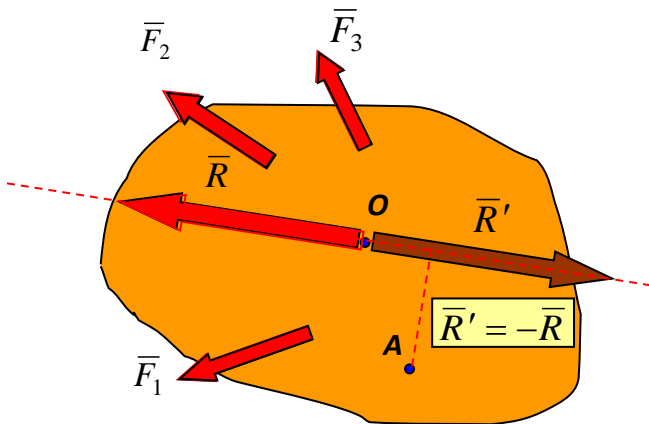
❖ **Теорема Варіньйона про моменти рівнодіючої для просторової системи сил :**

Якщо система сил має рівнодіючу, то

- **момент рівнодіючої** відносно будь-якого центру дорівнює **геометричній сумі моментів сил системи** відносно того ж центру;
- **момент рівнодіючої** відносно будь-якої вісі дорівнює **алгебраїчній сумі моментів сил системи** відносно тієї ж вісі.

Доказ: Нехай система сил $F_1, F_2, F_3 \dots$ приводиться до рівнодіючої, прикладеної в точці O . Така система не перебуває у рівновазі ($R \neq 0$).

Урівноважимо цю систему силою R' , рівною рівнодіючій R , направленій вздовж лінії її дії у протилежний бік (аксіома про дві сили).



Система вихідних сил $F_1, F_2, F_3 \dots$ та врівноважуючої сили R' знаходиться в рівновазі і має задовольняти умови рівноваги, наприклад :

$$\sum \bar{M}_{iA} + \bar{M}_A(\vec{R}') = 0$$

Оскільки сила R' дорівнює рівнодіючій R та спрямована вздовж лінії її дії у протилежний бік, то $M_A(R') = -M_A(R)$. Підстановка цієї рівності до рівняння рівноваги дає:

$$\sum \bar{M}_{iA} - \bar{M}_A(\vec{R}) = 0 \quad \text{або} \quad \bar{M}_A(\vec{R}) = \sum \bar{M}_{iA}$$

Спроектуємо цю векторну рівність на будь-яку вісь, наприклад, x :

$$M_x(\vec{R}) = \sum M_{ix}$$





Контрольні завдання

1. Що вивчає теоретична механіка?
2. Які механічні аспекти розглядає статика, кінематика і динаміка?
3. Дати визначення кінематичного стану тіла, системи сил, рівнодіючої, еквівалентної системи сил, врівноваженої системи сил.
4. Сформулювати аксіоми статички.
5. Дати визначення вільного і невільного тіла. Що таке в'язь?
6. Що називається силою реакції в'язі?
7. Навести приклади основних типів в'язей і їх реакцій.
10. Дати визначення активних сил, реакції в'язей, сил внутрішніх і зовнішніх.
11. При якій умові невільне тіло можна розглядати як вільне?
12. Яку властивість має сила, прикладена до абсолютно твердого тіла? Відповідь обґрунтувати.
13. Як задати силу аналітично?
14. Дати визначення системи збіжних сил..
15. Обґрунтувати існування рівнодійної систем.
16. В чому полягає геометричний і аналітичний способи додавання сил?
17. Сформулювати умову рівноваги системи збіжних сил в геометричній формі.
18. Сформулювати умову рівноваги системи збіжних сил в аналітичній формі.
19. Сформулювати теорему про рівновагу трьох непаралельних сил.
20. Дати визначення моменту сили відносно центра. В якому випадку він дорівнює нулю?
21. Що називається моментом сили відносно осі і як він обчислюється? В яких випадках він дорівнює нулю?





22. Що називається парою сил?
23. Чи має пара сил рівнодійну? Сформулювати основні властивості пар. В чому полягає умова рівноваги пар сил?
24. Чи зміниться дія сили на тверде тіло при паралельному переносі лінії дії сили? Відповідь обґрунтувати.
25. В чому полягає теорема Пуансо про зведення системи сил до центру?
26. Що називається головним вектором довільної системи сил? Яка різниця між головним вектором і рівнодійною? Як обчислюється головний вектор системи сил?
27. Що називається головним моментом довільної системи сил? Як він обчислюється?
28. Чи зміниться головний вектор даної системи сил від зміни центру зведення? Чому і як змінюється головний момент даної системи сил? Відповідь обґрунтувати.
29. В чому полягають механічні і геометричні умови рівноваги довільної просторової системи сил?
30. Сформулювати і записати аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил.
31. Як формулюються і записуються умови рівноваги довільної плоскої системи сил?
32. Сформулювати і записати умови рівноваги довільної плоскої системи сил в трьох формах.
33. В чому полягає метод розв'язування задач про рівновагу системи тіл? Скільки незалежних рівнянь рівноваги можна скласти в такій задачі?
34. Які задачі називаються статично визначеними і статично невизначеними?
35. Чи можна розв'язати статично невизначені задачі методами геометричної статички? Відповідь обґрунтувати.



3. Кінематика



Тема 1

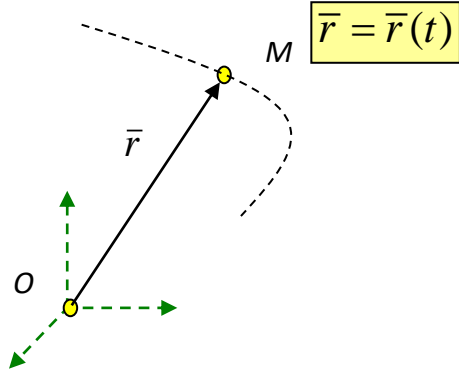
Кінематика – розділ теоретичної механіки, який вивчає механічний рух без урахування сил, які спричиняють цей рух, та складається з двох підрозділів:

- ❖ **Кінематика точки** – вивчає рух точки та є основою вивчення руху точок твердого тіла.
- ❖ **Задання руху точки** – необхідно мати можливість визначення положення точки у просторі у будь-який момент часу (завдяки рівнянню, геометрії механізму та відомому закону руху провідної ланки).
- ❖ **Траєкторія руху точки** – сукупність положень точки у просторі під час її руху.

Три способи задання руху точки:

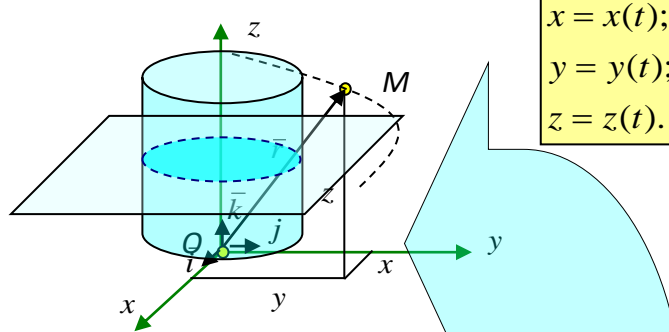
Векторний спосіб:

Задається величина та напрямок радіус-вектора.



Координатний спосіб:

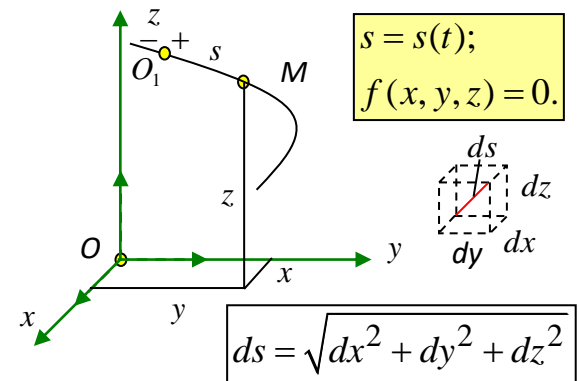
Визначаються координати положення точки.



$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t). \end{cases}$$

Природний спосіб:

Задаються закон руху точки та траєкторія



$$\begin{cases} s = s(t); \\ f(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Всі три способи задання еквівалентні та пов'язані між собою:

1. Векторний та координатний – співвідношенням:
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

3. Для отримання рівняння траєкторії руху необхідно із рівнянь руху координатного способу виключити час, через те, що траєкторія не залежить від часу:

$$\begin{cases} x = x(t) \Rightarrow t = t(x); \\ y = y(t) \Rightarrow y[t(x)] = y(x); \\ z = z(t) \Rightarrow z[t(x)] = z(x). \end{cases}$$

Наприклад:

$$\begin{cases} x = t \Rightarrow t = x \\ y = \sqrt{R^2 - t^2} \Rightarrow \sqrt{R^2 - x^2} \text{ або } x^2 + y^2 = R^2; \\ z = c. \end{cases}$$

Останні два рівняння є рівняннями лінійних поверхонь, лінія перетину яких є траєкторією руху точки

$$\begin{cases} y = y(x); \\ z = z(x). \end{cases}$$

Останні два рівняння є рівняннями **циліндричної поверхні** радіуса R з твірною, паралельною вісі z , та **плоскої поверхні**, паралельної координатній площині Oxy та зміщеної вздовж вісі z на величину c . Лінія перетину цих поверхонь (коло радіуса R) – траєкторія руху точки.





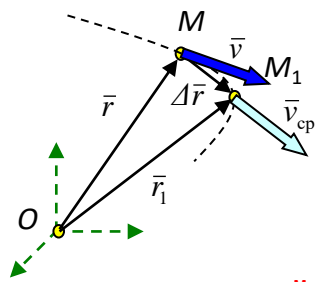
Тема 1 (продовження)



Швидкість точки – це величина, яка характеризує швидкість зміни положення точки у просторі.

Три способи задання руху точки визначають способи визначення швидкості точки :

Векторний спосіб: Порівняємо два положення точки в моменти часу t та $t_1 = t + \Delta t$:



$$\begin{aligned} t &\Rightarrow \vec{r}; \\ t_1 = t + \Delta t &\Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r}; \end{aligned} \quad \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_{cp}$$

- вектор середньої швидкості в інтервалі часу Δt , спрямований у напрямку вектора переміщення (хорда MM_1).

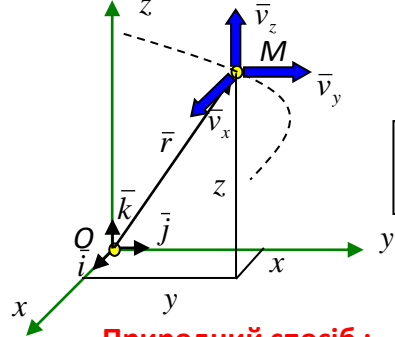
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

Призначимо $\Delta t \rightarrow 0$ і перейдемо до границі:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- вектор істинної швидкості точки в момент часу t , спрямований вздовж дотичної до траєкторії (при наближенні M_1 до M хорда займає положення дотичної).

Координатний спосіб : Зв'язок радіус-вектора з координатами визначається виразом : $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$



Використовуємо векторну форму визначення швидкості :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}] = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Компоненти (складові) вектора швидкості:

$$\begin{aligned} \vec{v}_x &= \dot{x}(t)\vec{i}; \\ \vec{v}_y &= \dot{y}(t)\vec{j}; \\ \vec{v}_z &= \dot{z}(t)\vec{k}. \end{aligned}$$

Проекції швидкості на вісі координат:

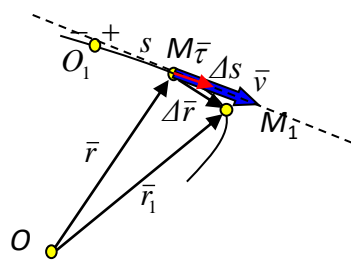
$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}; \\ v_y &= \dot{y}; \\ v_z &= \dot{z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \\ \cos(\vec{v}, x) &= \frac{\dot{x}}{v}; \\ \cos(\vec{v}, y) &= \frac{\dot{y}}{v}; \\ \cos(\vec{v}, z) &= \frac{\dot{z}}{v}. \end{aligned}$$

Природний спосіб : Представимо радіус-вектор як складну функцію : $\vec{r}(t) = \vec{r}[s(t)]$.

Використаємо векторну форму визначення швидкості:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \dot{s}$$



Представимо похідну радіус-вектора як границю: $\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$.

Вектор збільшення радіус-вектора, направлений вздовж хорди MM_1 і в границі займає дотичне положення.

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta \phi \rightarrow 0} \frac{2\rho \sin \frac{\Delta \phi}{2}}{\rho \Delta \phi} = 1.$$

Якщо $\Delta s \rightarrow 0$ радіус кривизни $\rho_1 \rightarrow \rho$, кут між радіусами кривизни $\Delta \phi \rightarrow 0$, чисельник – основа рівнобедреного трикутника, знаменник – довжина кругової дуги радіуса ρ .

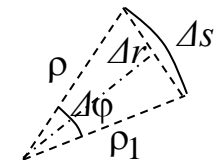
Величина похідної радіус-вектора по дуговій координаті дорівнює 1 :

Таким чином, похідна радіус-вектора по дуговій координаті є одиничним вектором, спрямованим по траєкторії.

Вектор швидкості дорівнює: $\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau}$.

Проекція швидкості на дотичну: $v_\tau = \dot{s}$.

За $\dot{s} > 0$ вектор швидкості спрямовано у бік збільшення дугової координати, інакше – у зворотний бік.





Тема 1 (продовження)



❖ **Прискорення точки** – це величина, яка характеризує швидкість зміни швидкості точки.

Три способи задання руху точки визначають способи визначення прискорення точки:

Векторний спосіб: Порівнюємо швидкості точки у двох її положеннях у моменти часу t та $t_1 = t + \Delta t$:

$$t \Rightarrow \vec{v};$$
$$t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta \vec{v};$$

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}_{\text{ср}}$$

- вектор середнього прискорення в інтервалі часу Δt , спрямований у бік увігнутості траєкторії.

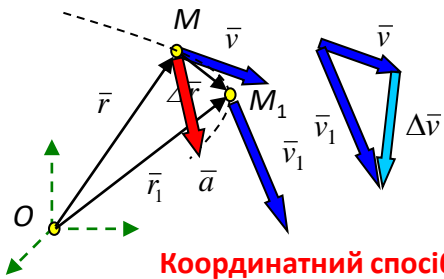
Переходячи до границі отримаємо:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}$$
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

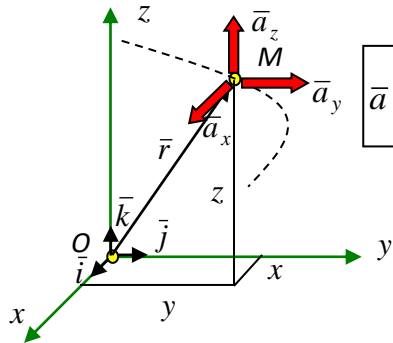
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

- **вектор істинного прискорення точки у момент часу t** , лежить у дотичній площині (граничне положення площини, проведеної через дотичну в точці M і пряму, паралельну дотичній у точці M_1 , при прагненні M_1 до M) і спрямований у бік увігнутості траєкторії.

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2};$$
$$\cos(\vec{a}, x) = \frac{\ddot{x}}{a};$$
$$\cos(\vec{a}, y) = \frac{\ddot{y}}{a};$$
$$\cos(\vec{a}, z) = \frac{\ddot{z}}{a}.$$



Координатний спосіб: Використаємо отриманий векторний вираз і зв'язок радіус-вектора з координатами $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$



$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} [x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}] = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Компоненти (складові) вектора прискорення:
 $\vec{a}_x = \ddot{x};$
 $\vec{a}_y = \ddot{y};$
 $\vec{a}_z = \ddot{z}.$

Проекції прискорення на вісі координат:
 $a_x = \ddot{x};$
 $a_y = \ddot{y};$
 $a_z = \ddot{z}.$

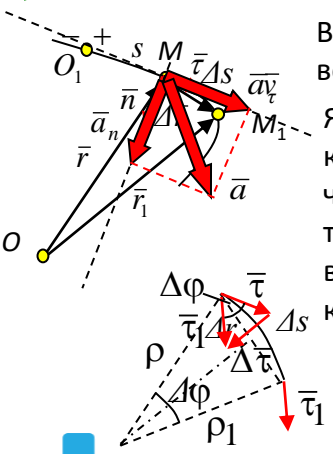
Природний спосіб: Використовуємо векторний вираз для прискорення та вираз для швидкості при природному способі задання руху: $\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau}$.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\vec{\tau}) = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Представимо одиничний дотичний вектор як складну функцію: $\vec{\tau}(t) = \vec{\tau}[s(t)].$

Похідна одиничного дотичного вектора:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\vec{\tau}}{ds}$$



Величина похідної одиничного дотичного вектора по дуговій координаті:

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{\tau}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\rho \Delta \varphi} = \frac{1}{\rho}$$

Якщо $\Delta s \rightarrow 0$, то радіус кривизни $\rho_1 \rightarrow \rho$, кут між радіусами кривизни $\Delta \varphi \rightarrow 0$, чисельник - основа рівнобедреного трикутника, побудованого одиничними векторами $\vec{\tau}_1$ і $\vec{\tau}$, знаменник - довжина кругової дуги радіуса ρ .

Таким чином, похідна одиничного дотичного вектора по дуговій координаті є вектор, спрямований перпендикулярно дотичній до траєкторії. Введемо одиничний вектор \vec{n} , нормальний (перпендикулярний) до дотичної, та спрямований до центру кривизни.

Компоненти (складові) вектора прискорення:
 $\vec{a}_\tau = \ddot{s};$
 $\vec{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n}.$

Проекції прискорення на вісі τ та n :
 $a_\tau = \ddot{s};$
 $a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}.$

Кут між збільшенням диничного вектора $\Delta \vec{\tau}$ та самого вектора $\vec{\tau}$ За $\Delta \varphi \rightarrow 0$, прагне до 90°

З використанням вектора \vec{n} і раніше визначених величин прискорення точки можна представити як суму векторів:

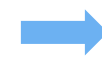
$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}.$$

Модуль повного прискорення:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$$




Тема 1 (продовження)



❖ **Рівнозмінний рух точки** - рух точки за траєкторією, під час якого дотичне прискорення не змінюється за величиною.

$$a_{\tau\tau} = \ddot{s} = const.$$

Запишемо вираз для дотичного прискорення через проекцію швидкості: $a_{\tau\tau} = \ddot{s} = \frac{d}{dt} \dot{s} = \frac{dv_{\tau}}{dt}$

Отриманий вираз є диференціальним рівнянням, яке легко розв'язується поділом змінних та інтегруванням лівої та правої частин:

$$dv_{\tau} = a_{\tau\tau} dt \quad \int_{v_{\tau 0}}^{v_{\tau}} dv_{\tau} = a_{\tau\tau} \int_0^t dt; \quad v_{\tau} \Big|_{v_{\tau 0}}^{v_{\tau}} = a_{\tau\tau} t \Big|_0^t; \quad v_{\tau} - v_{\tau 0} = a_{\tau\tau} t$$

$$v_{\tau} = v_{\tau 0} + a_{\tau\tau} t$$

- швидкість точки при рівнозмінному русі

У свою чергу швидкість точки також зв'язується із дуговою координатою диференціальною залежністю: $v_{\tau} = \frac{ds}{dt}$ або $ds = v_{\tau} dt$.

Після підстановки виразу для швидкості та інтегрування отримуємо: $\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_{\tau 0} + a_{\tau\tau} t) dt; \quad s \Big|_{s_0}^s = (v_{\tau 0} t + a_{\tau\tau} \frac{t^2}{2}) \Big|_0^t; \quad s - s_0 = v_{\tau 0} t + a_{\tau\tau} \frac{t^2}{2}$

$$s = s_0 + v_{\tau 0} t + a_{\tau\tau} \frac{t^2}{2}$$

- дугова координата точки при рівнозмінному русі

❖ **Класифікація рухів точки.**

№ з/п	\bar{a}_{τ}	\bar{a}_n	Вид руху	
			Закон руху	Траєкторія
1	= 0 [t, t ₁]	= 0 [t, t ₁]	рівномірний (v = const)	прямолінійна (ρ = ∞)
2	= 0 [t, t ₁]	≠ 0 [t, t ₁]	рівномірний (v = const)	криволінійна (ρ ≠ ∞)
2.1	= 0	= 0 [t, t ₁]	нерівномірний (v ≠ const), у момент часу t v = max	прямолінійна (ρ = ∞)
2.2	у момент часу t	≠ 0 [t, t ₁]		криволінійна (ρ ≠ ∞)
3	≠ 0 [t, t ₁]	= 0 [t, t ₁]	нерівномірний (v ≠ const)	прямолінійна (ρ = ∞)
3.1		= 0	зміна напрямку руху (v = 0 при t=t)	будь-яка траєкторія
3.2		в момент часу t	нерівномірний (v ≠ const)	перегин траєкторії (ρ = ∞ при t=t)
4	≠ 0 [t, t ₁]	≠ 0 [t, t ₁]	нерівномірний (v ≠ const)	криволінійна (ρ ≠ ∞)
5	= const [t, t ₁]	будь-яке	рівнозмінний	будь-яка траєкторія





❖ **Кінематика твердого тіла** вивчає рух твердого тіла та окремих його точок.

Існує п'ять видів руху твердого тіла:

1. **Поступальний** (повзун, поршень насоса, спарник коліс паровоза, що рухається прямолінійним шляхом, кабіна ліфта, двері купе, кабіна оглядового колеса).
2. **Обертальний** (маховик, кривошип, коромисло, оглядове колесо, звичайні двері).
3. **Плоскопаралельний або плоский** (шатун, колесо локомотива під час кочення по прямолінійній рейці, шліфувальне коло).
4. **Сферичний** (гіроскоп, кульова стійка).
5. **Загальний випадок руху** або вільний політ (куля, камінь, небесне тіло)

❖ **Поступальний рух твердого тіла** – такий рух, при якому будь-яка пряма, жорстко пов'язана з тілом, залишається паралельною до самої себе протягом усього руху. Зазвичай поступальний рух ототожнюється з прямолінійним рухом його точок, але це не так. Точки та саме тіло (центр мас тіла) можуть рухатися за криволінійними траєкторіями, як, наприклад, рух кабіни оглядового колеса.

❖ **Теорема про поступальний рух твердого тіла** – При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують тотожні траєкторії та мають у кожний момент часу геометрично рівні швидкості та прискорення.

Проведемо радіус-вектори до двох точок A і B , а також з'єднаємо ці точки вектором r_{BA} .

У будь-який момент часу виконується векторна рівність: $\bar{r}_A(t) = \bar{r}_B(t) + \bar{r}_{BA}$.

У будь-який момент часу вектор r_{BA} **залишається постійним за напрямком** (за визначенням поступального руху) **і за величиною** (відстань між точками не змінюється). Звідси:

$$\bar{r}_A(t) = \bar{r}_B(t) + \text{const},$$

Це означає, що в кожний момент часу положення точки A відрізняється від положення точки B на ту саму величину $r_{BA} = \text{const}$, тобто **траєкторії** цих двох точок **тотожні** (збігаються одна з одною при накладенні).

$$\frac{d\bar{r}_A(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}_B(t)}{dt}$$

Продиференціюємо за часом ліву та праву частину співвідношення: і це означає, що **у кожний момент часу швидкість точки A дорівнює геометрично** (тобто векторно) **швидкості точки B** .

$$\frac{d\bar{r}_A^2(t)}{dt^2} = \frac{d\bar{r}_B^2(t)}{dt^2}$$

Друге диференціювання за часом призводить до співвідношення: і це означає, що **у кожний момент часу прискорення точки A дорівнює геометрично** (тобто векторно) **прискоренню точки B** .

$$\bar{v}_A(t) = \bar{v}_B(t).$$

$$\bar{a}_A(t) = \bar{a}_B(t).$$

Таким чином, поступальний рух твердого тіла повністю визначається рухом однієї точки, що належить цьому тілу та обраної довільним чином.

Усі параметри руху цієї точки (траєкторія, швидкість та прискорення) описуються рівняннями та співвідношеннями кінематики точки.

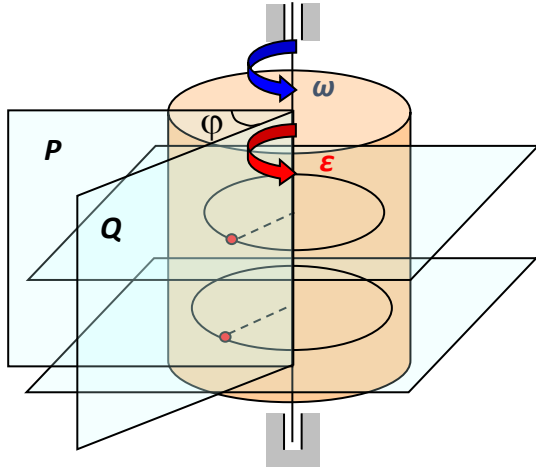




Тема 2 (продовження)



❖ **Обертальний рух твердого тіла** – рух, при якому всі його точки рухаються в площинах, перпендикулярних деякій нерухомій прямій, і описують коло з центрами, що лежать на цій прямій, що є **віссю обертання**.



❖ **Задання обертального руху** – рух визначається законом зміни двогранного кута ϕ (кута повороту), утвореного нерухомою площиною P , що проходить через вісь обертання, і площиною Q , жорстко пов'язаною з тілом:

$$\phi = \phi(t) \quad \text{- рівняння обертального руху}$$

❖ **Кутова швидкість** - величина, яка характеризує швидкість зміни кута повороту.

$$\begin{array}{l} t \Rightarrow \phi; \\ t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \phi_1 = \phi + \Delta\phi; \end{array} \quad \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \omega_{\text{cp}} \quad \text{- середня кутова швидкість в інтервалі часу } \Delta t,$$

Спрямуємо $\Delta t \rightarrow 0$ та перейдемо до границі:

$$\Delta t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \omega \quad \omega = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \quad \text{- істинна кутова швидкість у момент часу } t$$

Якщо $d\phi/dt > 0$, то обертання відбувається у бік збільшення кута повороту, якщо $d\phi/dt < 0$, то обертання відбувається у бік зменшення кута повороту.

Кутова швидкість зображується дуговою стрілкою у бік обертання.

❖ **Кутове прискорення** - величина, що характеризує швидкість зміни кутової швидкості.

$$\begin{array}{l} t \Rightarrow \omega; \\ t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \omega_1 = \omega + \Delta\omega; \end{array} \quad \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon_{\text{cp}} \quad \text{- середнє кутове прискорення в інтервалі часу } \Delta t,$$

Призначимо $\Delta t \rightarrow 0$ та перейдемо до границі:

$$\Delta t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\phi} \quad \text{- істинне кутове прискорення в момент часу } t$$

Кутове прискорення зображується дуговою стрілкою у бік збільшення кута повороту при $\ddot{\phi} > 0$

Якщо $d^2\phi/dt^2$ та $d\phi/dt$ одного знака, швидкість збільшується по модулю і обертання є прискореним (дугові стрілки кутової швидкості і кутового прискорення спрямовані в один бік),

якщо $d^2\phi/dt^2$ та $d\phi/dt$ різного знака, швидкість зменшується по модулю і обертання є уповільненим (дугові стрілки кутової швидкості і кутового прискорення спрямовані в протилежні сторони)

❖ **Рівномірне обертання** – кутова швидкість не змінюється за величиною.

$$\omega = \text{const.}$$

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}; \quad \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi = \omega \int_0^t dt;$$

$$\phi = \phi_0 + \omega t.$$

❖ **Рівнозмінне обертання** – кутове прискорення не змінюється за величиною

$$\varepsilon = \text{const.}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}; \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt;$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}; \quad \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t) dt;$$

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}.$$

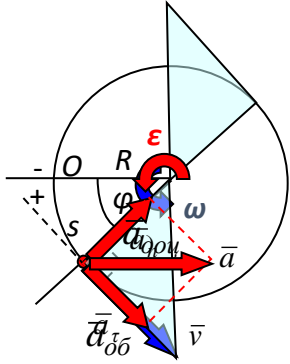




Тема 2 (продовження)



- ❖ Швидкість точки при обертальному русі твердого тіла - траєкторія точки відома (коло радіуса R - відстань точки до вісі обертання), можна застосувати формулу для визначення швидкості точки при природному заданні руху: $v_\tau = \dot{s}$.



Дугова координата пов'язана з радіусом кола: $s = \varphi R$.

Тоді проекція швидкості на дотичну до кола: $v_\tau = \frac{d}{dt}(\varphi R) = \frac{d\varphi}{dt} R = \omega R$.

Оскільки далі працюють із модулем кутової швидкості

після зображення її у вигляді дугової стрілки розрахунковою формулою є вираз для модуля швидкості: $v = \omega \cdot R$

Вектор швидкості спрямовують **перпендикулярно радіусу у бік дугової стрілки кутової швидкості**.

Як впливає з формули, швидкість точки пропорційна відстані її до вісі обертання (радіусу обертання).

Тоді проекції прискорення на дотичну до кола та нормаль:

$$a_\tau = \frac{d^2}{dt^2}(\varphi R) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} R = \varepsilon R. \quad a_n = \frac{1}{R} \left[\frac{d}{dt}(\varphi R) \right]^2 = \frac{1}{R} \left[\frac{d\varphi}{dt} R \right]^2 = \omega^2 R.$$

$$a_{\tau\tau} = \ddot{s}; \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}.$$

Оскільки далі працюють із модулем кутового прискорення

після зображення його у вигляді дугової стрілки розрахунковою формулою є вираз для дотичного прискорення: $a_{o\bar{o}} = \varepsilon \cdot R$

і вектор цього прискорення, що називається обертальним прискоренням, спрямовують перпендикулярно радіусу у бік дугової стрілки кутового прискорення.

Нормальне прискорення є **доцентровим прискоренням**, його спрямовують **вздовж радіуса до вісі обертання**

незалежно від напрямку стрілки дуги кутової швидкості, не кажучи вже про напрям дугової стрілки кутового прискорення.

$$a_{\text{доц}} = \omega^2 \cdot R$$

Як впливає з формул, обидва прискорення точки пропорційні відстані до вісі обертання (радіусу обертання).

Повне прискорення точки, як і раніше, є векторною сумою цих прискорень:

$$\bar{a} = \bar{a}_{o\bar{o}} + \bar{a}_{\text{доц}}.$$

$$\beta = \arctg \left(\frac{a_{o\bar{o}}}{a_{\text{доц}}} \right) = \arctg \left(\frac{\varepsilon}{\omega^2} \right).$$

- ❖ Швидкість та прискорення точки при обертальному русі як векторні добутки.

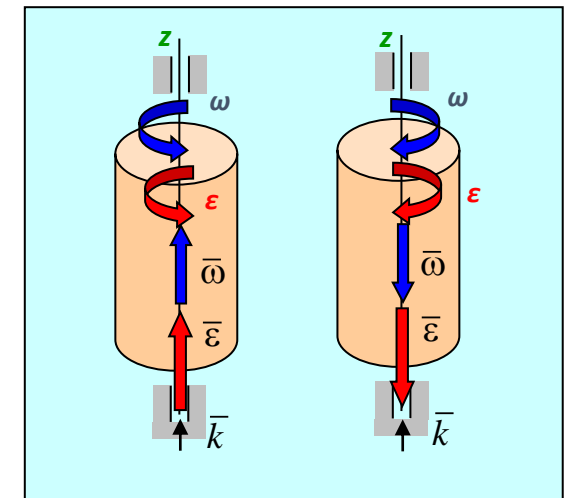
Представимо кутову швидкість і кутове прискорення як вектори, спрямовані на вісі обертання у той бік, звідки дугові стрілки цих величин вказують обертання проти годинникової стрілки.

Позитивний напрямок вісі z можна задати за допомогою одиничного вектора \bar{k} , тоді вектори кутової швидкості та кутового прискорення можна представити як:

$$\bar{\omega} = \omega_z \bar{k}$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_z \bar{k}$$

де ω_z, ε_z - проекції відповідних векторів на вісі z .

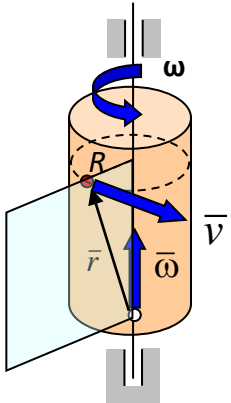




Тема 2 (продовження)



❖ Швидкість точки при обертальному русі як векторний добуток – визначається виразом $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, який описує і величину, і напрямок швидкості.



Величина (модуль) цього векторного добутку: $|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \sin(\vec{\omega}, \vec{r})$

Таким чином: $v = \omega \cdot R$

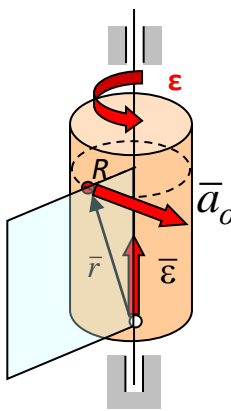
Напрямок вектора досліджуваного векторного добутку:

за визначенням векторного добутку – перпендикулярно площині, проведеної через вектори, що перемножуються, та спрямований у той бік, звідки поворот першого вектора до другого на найменший кут здається таким, що відбувається проти годинникової стрілки;

за правилом правої руки - при поєднанні великого пальця з першим вектором, решти – з другим вектором, поворот великого пальця перпендикулярно долоні вказує на напрямок вектора векторного добутку.

Таким чином, дійсно векторний добуток кутової швидкості та радіус-вектора повністю визначає величину та напрямок швидкості точки при обертальному русі відповідно до раніше отриманих результатів.

❖ Обертальне прискорення точки як векторний добуток – визначається виразом $\vec{a}_{об} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$, який описує і величину, і напрямок обертального прискорення.



Величина (модуль) цього векторного добутку: $|\vec{a}_{об}| = |\vec{\varepsilon}| \cdot |\vec{r}| \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r})$

Таким чином: $a_{об} = \varepsilon \cdot R$

Напрямок вектора розглянутого векторного добутку можна встановити за визначенням векторного добутку або за правилом правої руки.

Доцентрове прискорення точки як векторний добуток – визначається виразом $\vec{a}_{доц} = \vec{\omega} \times \vec{v}$, який описує і величину, і напрямок доцентрового прискорення.

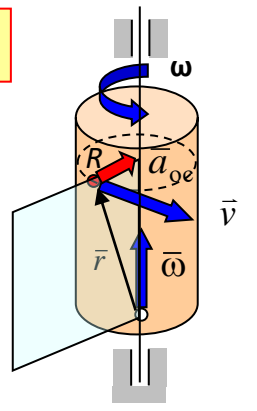
Величина (модуль) цього векторного добутку: $|\vec{a}_{доц}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{v}| \sin(\vec{\omega}, \vec{v})$

Таким чином: $a_{доц} = \omega \cdot v = \omega(\omega \cdot R) = \omega^2 R$

=1, через те, що вектор швидкості точки перпендикулярний площині, у якій лежить вектор кутової швидкості.

Таким чином, дійсно векторний добуток кутового прискорення та радіус-вектор повністю визначає величину та напрямок обертального прискорення точки відповідно до раніше отриманих результатів.

Цей векторний добуток може бути також записаний у вигляді: $\vec{a}_{об} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

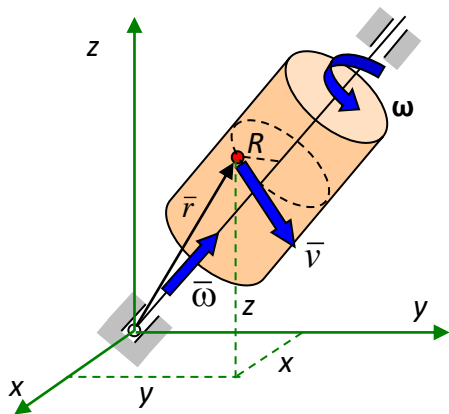




Тема 2 (продовження)



- ❖ **Формули Ейлера.** За допомогою розкриття векторного добутку для швидкості точки можна отримати загальні аналітичні вирази для цієї швидкості через координати точки, яка розглядається при довільному розташуванні вісі обертання у просторі:



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y)\vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\vec{k}$$

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y; \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z; \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned}$$

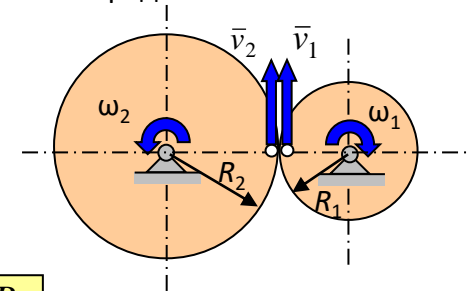
Звідси виходять аналітичні формули для проекцій швидкостей точки:

Перетворення обертельних рухів - зміна величини і напрямку кутових швидкостей обертових ланок в різних передавальних механізмах:

- ❖ **Фрикційне зачеплення:**

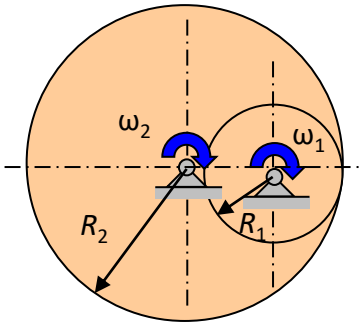
Швидкості точок коліс, які входять в контакт, за відсутності проковзування дорівнюють:

$$v_1 = v_2; \quad \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2. \quad \text{Звідси: } \boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$



Передатне число, яке характеризує зміну швидкості обертання під час передачі руху від однієї ланки до іншої – **це відношення кутової швидкості ведучого колеса до кутової швидкості веденого:**

$$\boxed{i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$



- ❖ **Зубчасте зачеплення.** Кількість зубів кожного з коліс прямо пропорційне радіусу колеса. Окружні швидкості точок поверхонь зубів, що входять в контакт, рівні.

Отримані співвідношення залишаються вірними, зокрема й у випадку внутрішнього зачеплення.

Радіуси ділительних кіл пов'язані з кроком зубів співвідношеннями:

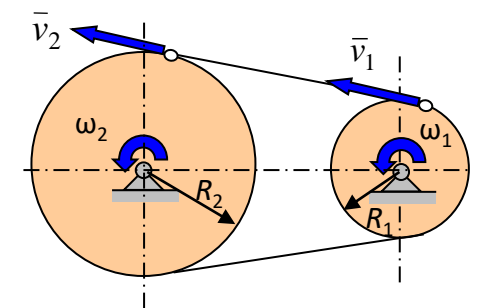
$$\boxed{2\pi R_1 = z_1 h} \quad \boxed{2\pi R_2 = z_2 h}$$

З використанням чисел зубів кожного з коліс маємо:

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}}$$

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}} \quad \boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}}$$

- ❖ **Ремінна та ланцюгова передачі.** Окружні швидкості точок поверхонь обох коліс або зубів, які входять в контакт з ремнем або ланцюгом, рівні (ремінь або ланцюг не розтягуються і не стискаються). Отримані співвідношення залишаються вірними.

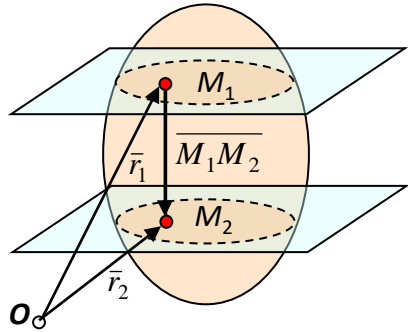




Тема 3



❖ **Плоскопаралельний рух твердого тіла** – рух, під час якого кожна точка тіла рухається в площині паралельній деякій нерухомій площині. Перетин тіла однією з таких площин є плоскою фігурою, що залишається в цій площині протягом руху тіла.



❖ **Теорема про плоскопаралельний рух твердого тіла** – плоскопаралельний рух твердого тіла однозначно визначається рухом плоскої фігури, утвореної перетином тіла однією з паралельних площин.

Виберемо дві точки на довільних двох перерізах тіла, що знаходяться на одному перпендикулярі до цих площин:

Проведемо до кожної точки радіус-вектори з нерухомої точки O і зв'яжемо їх між собою вектором M_1M_2 : $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \overline{M_1M_2}$

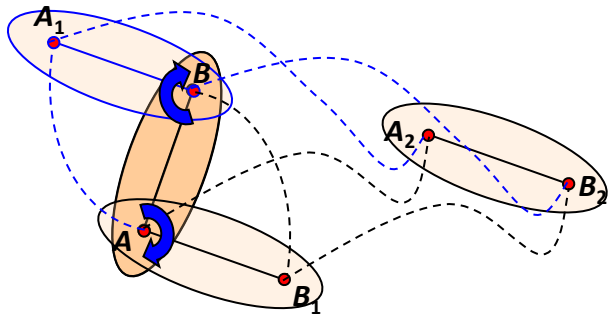
При плоскому русі тіла вектор M_1M_2 не змінюється за величиною, залишається паралельним самому собі (рухається поступально) і, отже, точки цього вектора описують тотожні траєкторії та мають у кожний момент часу однакові швидкості та прискорення:

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt}; \quad (\overline{M_1M_2} = \text{const}); \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_1, \quad \text{та} \quad \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}; \quad \vec{a}_2 = \vec{a}_1.$$

Таким чином, під час плоского руху тіла рух кожної точки однієї з плоских фігур визначає рух відповідних точок, що знаходяться у всіх інших суміжних паралельних площинах.

Наслідок: Оскільки положення плоскої фігури однозначно визначається положенням її двох точок або відрізка прямої, проведеної через ці точки, **то плоскопаралельний рух твердого тіла визначається рухом прямолінійного відрізка, що належить одному з перерізів тіла за допомогою паралельних площин.**

❖ **Розкладання плоскопаралельного руху плоскої фігури на поступальний та обертальний рухи** – Плоску фігуру або відрізок прямої можна перевести з одного положення в інше незліченною кількістю способів, змінюючи послідовність виконання поступального та обертального руху між собою, а також вибираючи різні траєкторії та точки як полюси:



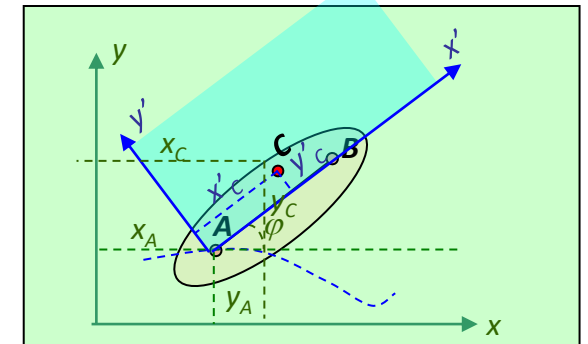
❖ Таким чином, **плоскопаралельний рух складається з двох рухів: поступальний та обертальний, і його завжди можна розкласти на ці два рухи.** При цьому поступальний рух залежить від вибору полюса та траєкторії руху, а обертальний, що характеризується поворотом навколо обраного полюса, не залежить від вибору полюса (для будь-якого полюса величина кута повороту та напрямок обертання – однакові).

❖ **Рівняння руху плоскої фігури:** Вибираючи як полюс будь-яку точку, наприклад, A , поступальна частина руху описуватиметься рівняннями руху цієї точки. Обертальна частина руху описується рівнянням зміни кута повороту навколо полюса:

$$\begin{aligned} x_A &= x_A(t); \\ y_A &= y_A(t); \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_C &= x_A(t) + x'_C \cos \varphi(t) - y'_C \sin \varphi(t); \\ y_C &= y_A(t) + x'_C \sin \varphi(t) + y'_C \cos \varphi(t). \end{aligned}$$

Рівняння руху будь-якої точки плоскої фігури, положення якої задається координатами локальної системи відліку, пов'язаної з фігурою:

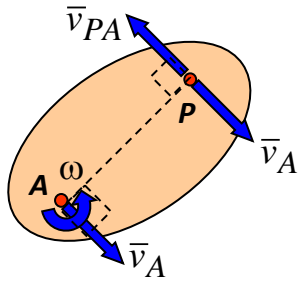




Тема 3 (продовження)



❖ **Миттєвий центр швидкостей (МЦШ)** – Під час руху плоскої фігури в кожний момент часу існує точка, яка жорстко пов'язана з плоскою фігурою, швидкість якої в цей момент дорівнює нулю.



Якщо відома швидкість однієї з точок фігури та кутова швидкість тіла навколо цієї точки:

Запишемо векторне співвідношення для швидкості деякої точки P відповідно до теореми про складання швидкостей:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP} = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}.$$

Задамо значення швидкості цієї точки P , що дорівнює нулю: $\vec{v}_P = 0.$

Тоді отримуємо :

$$\vec{v}_{PA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP} = -\vec{v}_A.$$

Тобто обертальна швидкість шуканої точки повинна дорівнювати модулю швидкості точки A , паралельна цій швидкості і спрямована в протилежний бік.

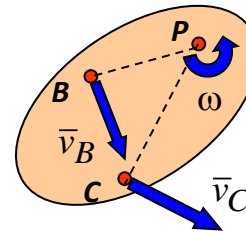
Це дозволяє знайти положення МЦШ (точки P), а саме: МЦШ повинен знаходитись на перпендикулярі до швидкості точки A , відкладеної у бік кутової швидкості, на відстані :

$$AP = \frac{v_A}{\omega}.$$

Якщо положення МЦШ знайдено, швидкість будь-якої точки плоскої фігури можна легко визначити за допомогою вибору полюса у МЦШ. В цьому випадку векторний вираз теореми про складання швидкостей вироджується у відому залежність швидкості від відстані до центру обертання :

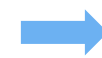
$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PB} = \vec{v}_{BP}; & (\vec{v}_P = 0); & & v_B &= \omega \cdot BP; \\ \vec{v}_C &= \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PC} = \vec{v}_{CP}; & (\vec{v}_P = 0); & & v_C &= \omega \cdot CP; \end{aligned}$$

Іншими словами, можна стверджувати, що **будь-якої миті часу тіло не здійснює жодного іншого руху, крім обертового руху навколо МЦШ.**



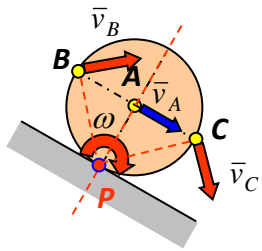


Тема 3 (продовження)



❖ **Приклади використання МЦШ для визначення швидкостей точок плоскої фігури.** Оскільки при русі плоскої фігури в кожний момент часу існує точка (МЦШ), жорстко пов'язана з плоскою фігурою, швидкість якої в цей момент дорівнює нулю, то при визначенні швидкостей цю точку слід вибирати як полюс, що грає роль центру обертання на даний момент часу. Нижче розглянемо процедуру визначення швидкостей на прикладах:

1) Дано: v_A , положення точок A, B, C , проковзування відсутнє.
Знайти: v_B, v_C



1) МЦШ знаходиться на перпендикулярі до вектора v_A (Немає проковзування і точка з нульовою швидкістю збігається з точкою контакту колеса та нерухомої поверхні кочення).

2) Визначаємо кутову швидкість :

$$\omega = \frac{v_A}{AP}$$

Дугова стрілка кутової швидкості спрямована у бік вектора лінійної швидкості v_A .

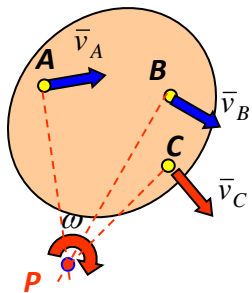
3) З'єднуємо точки B і C з МЦШ та визначаємо швидкості цих точок:

$$v_B = \omega \cdot BP;$$

$$v_C = \omega \cdot CP.$$

Вектори лінійних швидкостей v_B та v_C спрямовані у бік дугової стрілки кутової швидкості.

3) Дано: v_A, v_B , положення точок A, B, C .
Знайти: v_C



1) МЦШ знаходиться на перетині перпендикулярів до векторів v_A, v_B

2) Визначаємо кутову швидкість :

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}$$

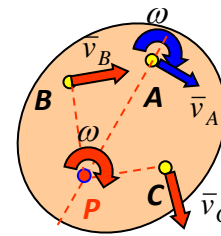
Дугова стрілка кутової швидкості спрямована у бік векторів лінійних швидкостей v_A, v_B .

3) З'єднуємо точку C з МЦШ та визначаємо швидкість цієї точки:

$$v_C = \omega \cdot CP.$$

Вектор лінійної швидкості v_C спрямований у бік дугової стрілки кутової швидкості.

2) Дано: v_A, ω , положення точок A, B, C .
Знайти: v_B, v_C



1) МЦШ знаходиться на перпендикулярі до вектора v_A

2) Визначаємо відстань до МЦШ: $AP = \frac{v_A}{\omega}$

Відстань AP відкладаємо у бік дугової стрілки кутової швидкості. Дугову стрілку кутової швидкості зображаємо навколо МЦШ.

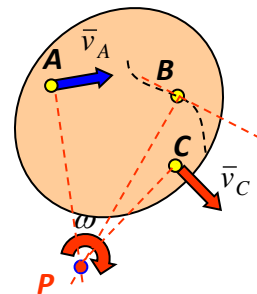
3) З'єднуємо точки B і C з МЦШ та визначаємо швидкості цих точок :

$$v_B = \omega \cdot BP;$$

$$v_C = \omega \cdot CP.$$

Вектори лінійних швидкостей v_B та v_C спрямовані у бік дугової стрілки кутової швидкості.

4) Дано: v_A , траєкторія точки B , положення точок A, B, C .
Знайти: v_C



1) МЦШ знаходиться на перетині перпендикуляра до вектора v_A і перпендикуляра до дотичної до траєкторії точки B .

2) Визначаємо кутову швидкість: $\omega = \frac{v_A}{AP}$

Дугова стрілка кутової швидкості спрямована у бік векторів лінійних швидкостей v_A .

3) З'єднуємо точку C з МЦШ та визначаємо швидкість цієї точки:

$$v_C = \omega \cdot CP.$$

Вектор лінійної швидкості v_C спрямований у бік дугової стрілки кутової швидкості.





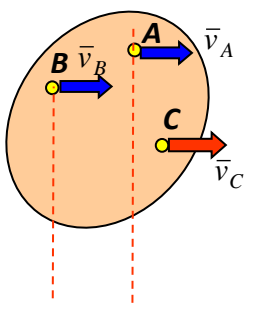
Тема 3 (продовження)



❖ Приклади використання МЦШ для визначення швидкостей точок плоскої фігури

5

Дано: $v_A, v_B, v_A \parallel v_B$, положення точок A, B, C .
Знайти: v_C



1) МЦШ знаходиться на перетині перпендикулярів до векторів v_A та v_B . Ця точка знаходиться в нескінченності.

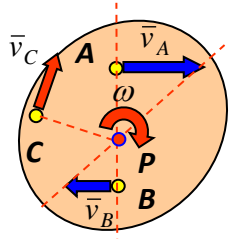
2) Кутова швидкість дорівнює нулю (миттєво поступальний рух):
$$\omega = \frac{v_A}{\infty} = \frac{v_B}{\infty} = 0.$$

3) Швидкість точки C дорівнює геометричним швидкостям точок A і B :
$$\bar{v}_C = \bar{v}_A = \bar{v}_B.$$

Вектор швидкості точки C спрямований паралельно до векторів швидкостей точок A і B (в той же бік).

7

Дано: $v_A, v_B, v_A \parallel v_B$, положення точок A, B, C .
Знайти: v_C

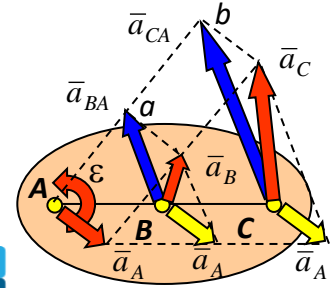


1) МЦШ знаходиться на перетині перпендикулярів до векторів v_A та v_B . Ці перпендикуляри зливаються в одну лінію.

2) Визначаємо положення МЦШ (проводимо лінію через кінці векторів v_A та v_B) та кутову швидкість:
$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A + v_B}{AB}.$$

Дугову стрілку кутової швидкості зображуємо у бік векторів лінійних швидкостей v_A, v_B .

3) З'єднуємо точку C з МЦШ та визначаємо швидкість цієї точки: $v_C = \omega \cdot CP$.
Вектор лінійної швидкості v_C спрямований у бік дугової стрілки кутової швидкості.

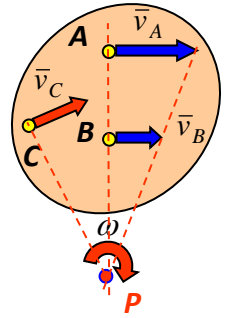


❖ **Наслідки.** Кінці векторів прискорень точок плоскої фігури, що лежать на одній прямій, також лежать на одній прямій і поділяють її на відрізки, пропорційні відстаням між точками.

Кінці векторів прискорень точок a_{BA} та a_{CA} лежать на одній прямій ABC та ділять її на відрізки, пропорційні відстаням між точками:
$$a_{BA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} AB; a_{CA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} AC.$$

6

Дано: $v_A, v_B, v_A \parallel v_B$, положення точок A, B, C .
Знайти: v_C



1) МЦШ знаходиться на перетині перпендикулярів до векторів v_A та v_B . Ці перпендикуляри зливаються одну лінію.

2) Визначаємо положення МЦШ (проводимо лінію через кінці векторів v_A та v_B) та кутову швидкість:
$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A - v_B}{AB}.$$

Дугову стрілку кутової швидкості зображуємо у бік векторів лінійних швидкостей v_A, v_B .

3) З'єднуємо точку C з МЦШ та визначаємо швидкість цієї точки: Вектор лінійної швидкості v_C спрямований у бік дугової стрілки кутової швидкості.
$$v_C = \omega \cdot CP.$$

❖ Теорема про складання прискорень. Прискорення будь-якої точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення полюса та прискорення цієї точки навколо полюса

Швидкості точок A та B пов'язані між собою співвідношенням:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}.$$

Продиференціюємо це співвідношення за часом: $\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{v}_{BA}}{dt} = \bar{a}_A + \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}).$

Другий доданок диференціюємо як добуток двох функцій: $\frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}_{AB} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}_{AB}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{AB} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{BA}.$

Отримали суму обертального та доцентрового прискорення розглянутої точки відносно полюса. Таким чином, прискорення точки плоскої фігури:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{об} + \bar{a}_{BA}^{доц} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}.$$

Кінці векторів прискорень полюса A , зображених у точках B і C , також лежать на одній прямій. Неважко довести з подоби трикутників, що кінці векторів сумарних прискорень точок B і C також лежать на одній прямій, і ділять цю пряму на частини, пропорційні до відстаней між точками.

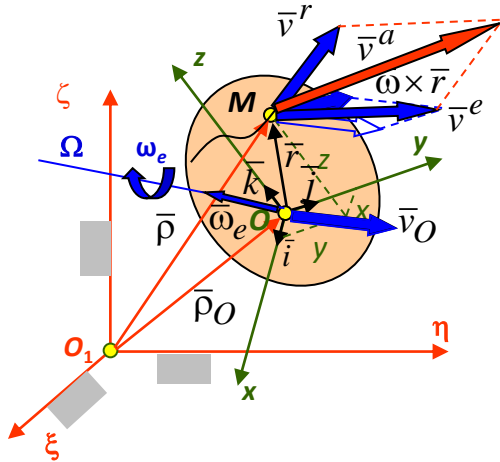




❖ **Складний рух точки – такий рух, у якому точка бере участь одночасно у двох чи кількох рухах.**

Приклади складного руху точки (тіла): човен, що перепливає річку; людина, що йде по рухомому ескалатору; камінь рухомої куліси, поршень хитаючого циліндра; кулі відцентрового регулятора Уатта.

Для опису складного руху точки або для подання руху у вигляді складного використовуються **нерухома система відліку $O_1\xi\eta\zeta$** , пов'язана з якимось умовно нерухомим тілом, наприклад, із Землею, і **рухлива система відліку $Oxyz$** , пов'язана з якимось тілом, що рухається.



Абсолютний рух (a) - рух точки, який розглядається відносно **нерухомої** системи відліку.

Відносний рух (r) - рух точки, який розглядається відносно рухомої системи відліку.

Переносний рух (e) - рух рухомої системи відліку, який розглядається відносно **нерухомої** системи відліку.

Абсолютна швидкість (прискорення) точки v^a (a^a) - швидкість (прискорення) точки, обчислена відносно нерухомої системи відліку.

Відносна швидкість (прискорення) точки v^r (a^r) - швидкість (прискорення) точки, **обчислена** відносно **рухомої** системи відліку.

Переносна швидкість (прискорення) точки v^e (a^e) - швидкість (прискорення) точки, **що належить** рухомій системі координат або твердому тілу, з яким жорстко пов'язана рухома система координат, та **збігається з рухомою точкою** в даний момент часу і обчислена відносно **нерухомої** системи відліку.

Теорема про складання швидкостей – абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі відносної та переносної швидкостей точки. У будь-який момент часу справедливе співвідношення:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_O + \bar{r} = \bar{\rho}_O + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Продиференціюємо це співвідношення за часом маючи на увазі, що орти i, j, k змінюють свій напрямок у загальному випадку руху вільного тіла, з яким пов'язана рухома система координат :

Тут перший доданок (v_O) - швидкість полюса O ; наступні три – **відносна швидкість точки (v^r)**.

Для останніх трьох доданків слід визначити похідні за часом від ортів i, j, k :

Тут використана векторна формула для лінійної швидкості точки відносно вісі обертання :

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e \times \bar{r}).$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{i}}{dt} &= (\bar{\omega}_e \times \bar{i}); \\ \frac{d\bar{j}}{dt} &= (\bar{\omega}_e \times \bar{j}); \\ \frac{d\bar{k}}{dt} &= (\bar{\omega}_e \times \bar{k}). \end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} + \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} + x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt}.$$

$$\downarrow$$

$$\bar{v}_O$$

$$\downarrow$$

$$\bar{v}^r$$

$$\downarrow$$

Підставимо векторні добутки в останні три доданки :

$$x(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + y(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + z(\bar{\omega}_e \times \bar{k}) = \bar{\omega}_e \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \bar{\omega}_e \times \bar{r}.$$

Сума першого та останнього доданку – швидкість точки вільного тіла і є **переносною швидкістю точки (v^e)**:

$$\bar{v}^e = \bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{r}.$$

Таким чином, з урахуванням того, що похідна за часом радіус-вектора ρ є абсолютною швидкістю, отримуємо :

$$\bar{v}^a = \bar{v}^r + \bar{v}^e.$$

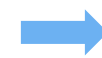
Модуль вектора абсолютної швидкості:

$$|\bar{v}^a| = \sqrt{|\bar{v}^r|^2 + |\bar{v}^e|^2 + 2|\bar{v}^r||\bar{v}^e|\sin(\bar{v}^r, \bar{v}^e)}.$$





Тема 4 (продовження)



❖ **Теорема про складання прискорень (теорема Коріоліса)** – абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного, переносного та коріолісового прискорень точки.

Співвідношення для швидкості було отримано раніше :

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} + \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} + x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt}.$$

Продиференціюємо це співвідношення за часом ще раз:

$$\frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{\rho}_O}{dt^2} + \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} + \dot{x}\frac{d\bar{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\bar{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\bar{k}}{dt} + \dot{x}\frac{d\bar{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\bar{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\bar{k}}{dt} + x\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}.$$

Тут перший доданок (\mathbf{a}_O) - прискорення полюса O ; наступні три – **відносне прискорення точки (\mathbf{a}^r)**.

$$\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{i} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{i});$$

$$\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{j} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{j});$$

$$\frac{d^2\bar{k}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e \times \bar{k}) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{k} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{k}).$$

Для останніх трьох доданків слід визначити другі похідні за часом від ортів рухомої системи координат i, j, k :

Підставимо ці вирази в останні три доданки і згрупуємо :

$$\frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times x\bar{i} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times x\bar{i}) + \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times y\bar{j} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times y\bar{j}) + \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times z\bar{k} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times z\bar{k}) = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{r}).$$

Сума першого та отриманих двох доданків – прискорення точки вільного тіла і є **переносне прискорення точки (\mathbf{a}^e)**:

$$\bar{a}^e = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{r}).$$

У інших шести доданках складемо однакові члени, підставимо векторні добутки для перших похідних за часом від ортів і згрупуємо :

$$2 \left[\dot{x}\frac{d\bar{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\bar{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\bar{k}}{dt} \right] = 2 \left[\dot{x}(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + \dot{y}(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + \dot{z}(\bar{\omega}_e \times \bar{k}) \right] = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}^r).$$

Отримана компонента прискорення є **коріолісовим прискоренням (\mathbf{a}^c)**:

$$\bar{a}^c = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}^r).$$

Таким чином, з урахуванням того, що друга похідна за часом радіус-вектора ρ є абсолютним прискоренням, отримаємо:

$$\bar{a}^a = \bar{a}^r + \bar{a}^e + \bar{a}^c.$$

Величина та напрямок прискорення Коріоліса:

Модуль вектора прискорення Коріоліса :

Прискорення Коріоліса дорівнює нулю у двох випадках:

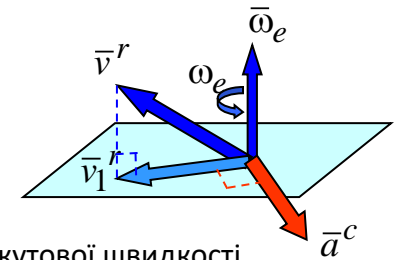
1. Кутова швидкість переносного руху дорівнює 0 (поступальний переносний рух).
2. Вектор кутової швидкості паралельний вектору відносної швидкості (синус кута між векторами дорівнює 0).

$$|\bar{a}^c| = 2\omega_e v^r \sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}^r).$$

Напрямок вектора прискорення Коріоліса:

Визначається по одному із трьох правил :

1. За визначенням векторного добутку (Лекція 3.2).
2. За правилом правої руки (Лекція 3.2).
3. **За правилом Жуковського:**



- а) Спроектувати вектор відносної швидкості на площину, перпендикулярну вектору кутової швидкості.
- б) Повернути проекцію вектора відносної швидкості на прямий кут у бік дугової стрілки кутової швидкості.



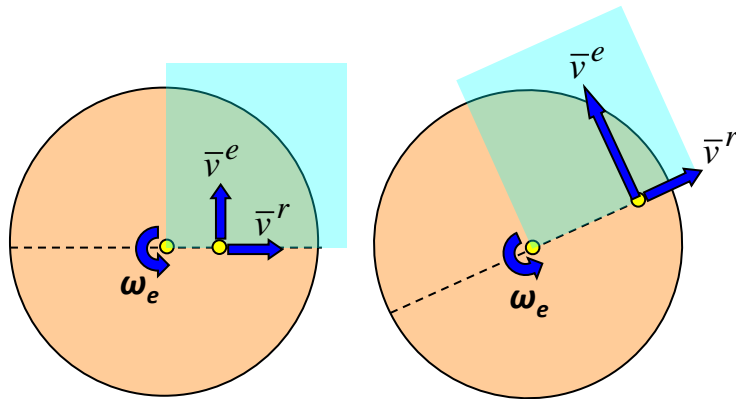


Тема 4 (продовження)



- ❖ **Причини виникнення прискорення Коріоліса:** Формально прискорення Коріоліса було виведено угрупованням доданків, що містять проекції відносної швидкості та похідні за часом від ортів рухомої системи координат. При цьому раніше було отримано подвоєне число таких доданків. Для прояснення фізичних причин виникнення прискорення Коріоліса розглянемо якісний приклад, у якому будемо спеціально вважати постійними вектор відносної швидкості (у рухомій системі координат) та вектор кутової переносної швидкості (обертання) рухомої системи координат відносно нерухомої вісі):

Нехай у певний момент часу положення точки та вектора відносної та переносної швидкостей такі, як вони зображені на рисунку (вид згори):



Через деякий час точка відійде від вісі обертання і тіло обернеться на деякий кут.

В результаті:

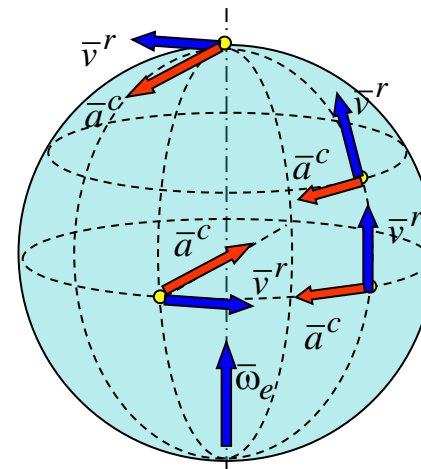
- 1) **відносна швидкість зміниться у напрямку** через наявність переносної кутової швидкості та
- 2) **переносна лінійна швидкість зміниться за величиною** через наявність відносної швидкості, що змінює відстань точки до вісі обертання.

Таким чином, можна вважати, що існує дві причини виникнення прискорення Коріоліса:

- 1) переносна кутова швидкість впливає на відносну швидкість, а
- 2) відносна швидкість в свою чергу впливає на переносну лінійну швидкість.

Можливо, це допоможе запам'ятати коефіцієнт, що дорівнює 2, у формулі для визначення прискорення Коріоліса.

- ❖ **Приклади визначення напрямку прискорення Коріоліса** зручно розглянути для випадків різного становища рухомих точок по поверхні Землі, що обертається відносно своєї вісі):



$$\vec{a}^c = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}^r).$$





Контрольні завдання

1. В чому полягає предмет кінематики? Основна задача кінематики?
2. Дати означення закону руху точки. Які способи задавання руху точки застосовуються в кінематиці і в чому вони полягають?
3. Що називається швидкістю руху точки? Чому дорівнює і як спрямований вектор швидкості?
4. Як визначається швидкість руху точки при координатному способі задавання руху?
5. Чому дорівнює швидкість руху точки при натуральному способі задавання руху?
6. В чому полягає властивість похідної векторної функції по скалярному аргументу?
7. Що називається прискоренням руху точки? Чому дорівнює і як напрямлений вектор прискорення?
8. Як визначається прискорення руху точки при координатному способі задавання руху?
9. Фізичний зміст дотичного і нормального прискорень.
10. У якому русі дотичне прискорення дорівнює нулеві? У якому нормальне прискорення дорівнює нулеві?
11. Який рух твердого тіла називається поступальним? Навести приклади. Сформулювати і довести теорему про основні властивості поступального руху.
12. Який рух твердого тіла називається обертальним рухом навколо нерухомої осі? Що таке кут повороту? Який закон обертального руху тіла навколо нерухомої осі?
13. Що називається кутовою швидкістю і кутовим прискоренням тіла? Як вони зображуються векторами? Відповідь обґрунтувати.
14. Який зв'язок між кутовою швидкістю обертального руху тіла і числом обертів за хвилину?





15. Як визначається лінійне прискорення точок твердого тіла, що обертається?
16. Який рух твердого тіла називається плоским або плоскопаралельним? Навести приклади. На які рухи мож- розкласти плоскопаралельний рух твердого тіла. Відповідь обґрунтувати.
17. Сформулювати теорему про визначення швидкостей точок тіла у плоскопаралельному русі.
18. Сформулювати і довести теорему про проєкції швидкостей двох точок плоскої фігури.
19. Що називається миттєвим центром швидкостей плоскої фігури?
20. Викласти суть визначення швидкостей точок плоскої фігури за допомогою миттєвого центра швидкостей.
21. Викласти картину розподілу швидкостей точок плоскої в даний момент часу.
22. Чому миттєвий центр швидкостей плоскої фігури називають миттєвим центром її обертання? Відповідь обґрунтувати.
23. Розповісти про окремі випадки знаходження положення миттєвого центра швидкостей.
24. Який рух точки називається абсолютним? Відносним? Переносним? Навести приклади.
25. Яка швидкість точки називається абсолютною? Відсноною? Переносною?
26. Яке прискорення називається абсолютним? Відносним? Переносним?
27. Сформулювати теорему про додавання швидкостей у складному русі точки.
28. Сформулювати теорему про додавання прискорень в складному русі точки.
29. Навести визначення прискорення Коріоліса: модуль, напрям.
30. Навести випадки рівності прискорення Коріоліса нулеві.



4. Динаміка

Тема 1



Динаміка – розділ теоретичної механіки, який вивчає механічний рух із найзагальнішої точки зору. Рух розглядається у зв'язку із діючими на об'єкт силами. Розділ складається із **трьох підрозділів** :

❖ **Динаміка точки** – вивчає рух матеріальної точки з урахуванням сил, які викликають цей рух.

Основний об'єкт – матеріальна точка – матеріальне тіло, яке має масу, та розмірами якого можна знехтувати.

❖ **Динаміка механічної системи** – вивчає рух сукупності матеріальних точок та твердих тіл, які об'єднуються загальними законами взаємодії, з урахуванням сил, що викликають цей рух.

❖ **Аналітична механіка** – вивчає рух невільних механічних систем за допомогою загальних аналітичних методів.

Основні припущення

- існує **абсолютний простір** (має суто геометричні властивості, які не залежать від матерії та її руху);
- існує **абсолютний час** (не залежить від матерії та її руху).

Звідси випливає:

- існує **абсолютно нерухома система відліку**;
- **час не залежить від руху системи відліку**;
- **маси точок, що рухаються, не залежать від руху системи відліку**.

Ці припущення використовуються у класичній механіці, створеній Галілеєм та Ньютоном. Вона має і донині широку область застосування, оскільки механічні системи, що розглядаються в прикладних науках, не мають таких великих мас і швидкостей руху, для яких необхідно враховувати їхній вплив на геометрію простору та часу, як це робиться в релятивістській механіці (теорії відносності).

❖ **Основні закони динаміки** – вперше відкриті Галілеєм і сформульовані Ньютоном та становлять основу всіх методів опису та аналізу руху механічних систем та їхньої динамічної взаємодії під дією різних сил.

❖ **Закон інерції (закон Галілея-Ньютона)** – **Ізольована матеріальна точка тіла зберігає свій стан спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, доки прикладені сили не змусять її змінити цей стан.** Звідси випливає еквівалентність стану спокою та руху за інерцією (закон відносності Галілея). Система відліку, відносно якої виконується закон інерції, називається **інерційною**. Властивість матеріальної точки прагнути зберегти незмінною швидкість свого руху (свій кінематичний стан) називається **інертністю**.

❖ **Закон пропорційності сили та прискорення (Основне рівняння динаміки - II закон Ньютона)** – Прискорення, що надається матеріальній точці силою, є прямо пропорційним силі та обернено пропорційним масі цієї точки :

$$\bar{a} = \frac{1}{m} \bar{F} \quad \text{або} \quad m\bar{a} = \bar{F}.$$

Тут m - маса точки (міра інертності), вимірюється в кг, та чисельно дорівнює вазі, поділеній на прискорення вільного падіння: $m = \frac{G}{g}$.
 F – діюча сила, що вимірюється в ньютонах. (1 Н надає точці масою 1 кг прискорення 1 м/с², 1 Н = 1/9.81 кг·с).





Тема 1 (продовження)



❖ **Закон рівності дії та протидії (III закон Ньютона)** – Будь-якій дії відповідає рівна за величиною та протилежно спрямована протидія:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \quad m_1 \quad \vec{F}_{1,2} \quad \vec{F}_{2,1} \quad m_2$$

Закон справедливий для будь-якого кінематичного стану тіл. Сили взаємодії, будучи прикладеними до різних точок (тіл), не врівноважуються.

❖ **Закон незалежності дії сил** – Прискорення матеріальної точки під дією кількох сил дорівнює геометричній сумі прискорень точки від дії кожної із сил окремо:

$$\vec{a}(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots) = \vec{a}_1(\vec{F}_1) + \vec{a}_2(\vec{F}_2) + \dots \quad \text{або} \quad \vec{a}(\vec{R}) = \vec{a}_1(\vec{F}_1) + \vec{a}_2(\vec{F}_2) + \dots$$

❖ **Основне рівняння динаміки** : $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$ - відповідає векторному способу задання руху точки

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки:

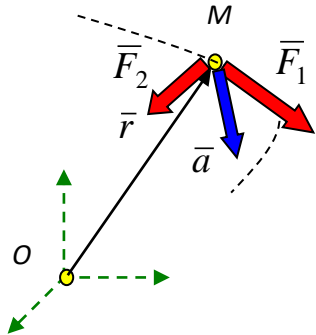
Підставимо прискорення точки за векторного задання руху

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

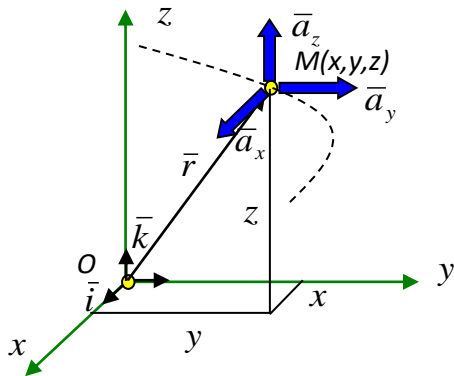
в основне рівняння динаміки:

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum \vec{F}_i \quad (1)$$

- диференціальне рівняння руху точки у векторному вигляді.



За координатного способу задання руху: Використовуємо зв'язок радіус-вектора з координатами та вектора сили з проекціями:



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{F}_i = X_i\vec{i} + Y_i\vec{j} + Z_i\vec{k}$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \sum (X_i\vec{i} + Y_i\vec{j} + Z_i\vec{k})$$

Після згрупування векторне співвідношення розпадається на три скалярні рівняння:

$$(x) : m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum X_i;$$

$$(y) : m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y_i;$$

$$(z) : m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z_i.$$

або:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum X_i; \\ m\ddot{y} &= \sum Y_i; \\ m\ddot{z} &= \sum Z_i. \end{aligned}$$

- диференціальні рівняння руху точки в координатному вигляді.

Цей результат може бути отриманий формальним проектуванням диференціального векторного рівняння (1).

❖ **Природні рівняння руху матеріальної точки**

можна отримати проектуванням векторного диференціального рівняння руху на природні (рухливі) осі координат:

$$(\tau) : ma_\tau = \sum F_{i\tau};$$

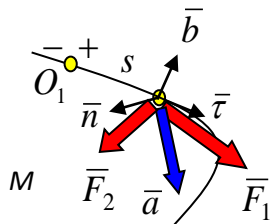
$$(n) : ma_n = \sum F_{in};$$

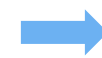
$$(b) : m \cdot 0 = \sum F_{ib}.$$

або

$$\begin{aligned} m\dot{s} &= \sum F_{i\tau}; \\ m \frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \sum F_{in}. \end{aligned}$$

- природні рівняння руху точки





❖ Дві основні задачі динаміки:

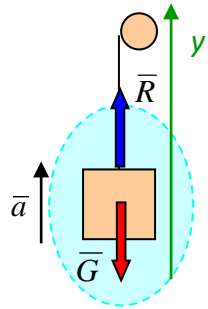
1. Пряма задача: Задано рух (рівняння руху, траєкторія). Потрібно визначити сили, під впливом яких відбувається заданий рух.

2. Обернена задача: Задано сили, під дією яких відбувається рух. Потрібно знайти параметри руху (рівняння руху, траєкторію руху).

Обидві задачі розв'язуються за допомогою **основного рівняння динаміки** та проекції його на координатні осі. Якщо розглядається рух невідомої точки, то як і в статичі, використовується **принцип звільнення від в'язей**. Внаслідок реакції в'язей включаються до складу сил, які діють на матеріальну точку. Розв'язання першої задачі пов'язане з операціями диференціювання. Розв'язання оберненої задачі вимагає інтегрування відповідних диференціальних рівнянь і це значно складніше, ніж диференціювання. Обернена задача складніше за пряму задачу.

❖ Розв'язання прямої задачі динаміки. Розглянемо на прикладах:

Приклад 1. Кабіна ліфта вагою G піднімається тросом із прискоренням a . Визначити натяг троса.



1. Вибираємо об'єкт (кабіна ліфта рухається поступально та її можна розглядати як матеріальну точку).

2. Відкидаємо зв'язок (трос) та замінюємо реакцією R .

3. Складаємо основне рівняння динаміки: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R}$.

4. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь y : $(y): ma_y = R - G$.

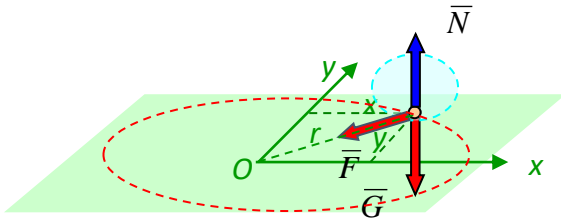
Визначаємо реакцію троса: $R = G + ma_y = G + \frac{G}{g}a_y = G(1 + \frac{a_y}{g})$.

Визначаємо натяг троса: $\bar{T} = -\bar{R}; T = R = G(1 + \frac{a_y}{g})$.

У випадку рівномірного руху кабіни $a_y = 0$ натяг троса дорівнює вазі кабіни: $T = G$.

У разі обрива троса $T = 0$, і прискорення кабіни дорівнює прискоренню вільного падіння: $a_y = -g$.

Приклад 2. Точка масою m рухається горизонтальною поверхнею (площина Oxy) відповідно до рівнянь: $x = a \cdot \cos kt, y = b \cdot \sin kt$. Визначити силу, яка діє на точку.



1. Вибираємо об'єкт (матеріальну точку).

2. Відкидаємо зв'язок (площину) та замінюємо реакцією N .

3. Додаємо до системи сил невідому силу F .

4. Складаємо основне рівняння динаміки: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}$.

5. Проектуємо основне рівняння динаміки на осі x, y : $(x): m\ddot{x} = F_x$;

$(y): m\ddot{y} = F_y$.

Визначаємо проекції сили:

$$F_x = m\ddot{x} = -mak^2 \cos kt = -mk^2 x;$$

$$F_y = m\ddot{y} = -mak^2 \sin kt = -mk^2 y.$$

Модуль сили: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2 \sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r$.

Напрявні косинуси:

$$\cos(\bar{F}, x) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}; \cos(\bar{F}, y) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$$

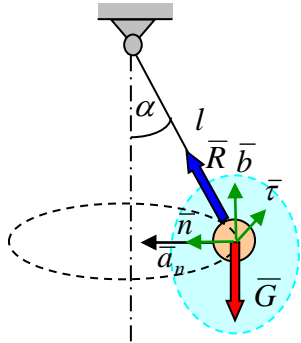
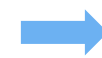
Таким чином, величина сили пропорційна відстані точки до центру координат і спрямована до центру лінії, що з'єднує точку з центром. Траєкторія руху точки є еліпс з центром у початку координат:

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 \cos^2 kt; \\ y^2 &= b^2 \sin^2 kt. \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$





Тема 1 (продовження)



Приклад 3: Вантаж вагою G підвішений на тросі довжиною l і рухається за круговою траєкторії в горизонтальній площині з певною швидкістю. Кут відхилення троса від вертикалі дорівнює α . Визначити натяг троса та швидкість вантажу.

1. Вибираємо об'єкт (вантаж).
2. Відкидаємо в'язь (трос) та замінюємо її реакцією R .
3. Складаємо основне рівняння динаміки : $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R}$.
4. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь τ, n, b : $(\tau): ma_\tau = 0;$

З третього рівняння визначаємо реакцію троса : $R = \frac{G}{\cos \alpha}$.

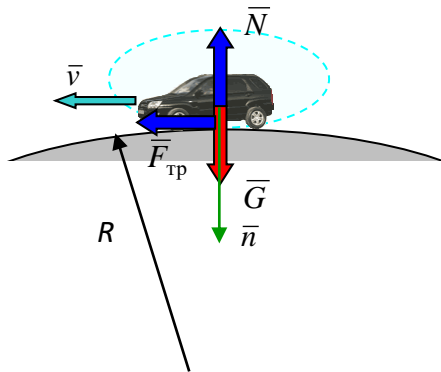
$$(n): ma_n = R \sin \alpha;$$

$$(b): 0 = R \cos \alpha - G.$$

Визначаємо натяг троса : $\bar{T} = -\bar{R}; T = R = \frac{G}{\cos \alpha}$. Підставляємо значення реакції троса, нормального прискорення у друге рівняння та визначаємо швидкість вантажу : $\frac{G}{g} \frac{v^2}{l \sin \alpha} = \frac{G}{\cos \alpha} \sin \alpha$.

$$v = \sqrt{\frac{gl \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}}.$$

Приклад 4: Автомобіль вагою G рухається опуклим мостом (радіус кривизни дорівнює R) зі швидкістю v . Визначити тиск автомобіля на міст.



1. Вибираємо об'єкт (автомобіль, розмірами нехтуємо та розглядаємо як точку).
2. Відкидаємо зв'язок (шорстку поверхню) і замінюємо реакціями N та силою тертя $F_{тр}$.
3. Складаємо основне рівняння динаміки : $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_{тр}$.
4. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь n : $(n): ma_n = G - N$.

Звідси визначаємо нормальну реакцію : $N = G - ma_n = G - m \frac{v^2}{R} = G(1 - \frac{v^2}{gR})$.

Визначаємо тиск автомобіля на міст : $\bar{Q} = -\bar{N}; Q = G(1 - \frac{v^2}{gR})$.

Звідси можна визначити швидкість, що відповідає нульовому тиску на міст ($Q = 0$): $v = \sqrt{gR}$.





Тема 1 (продовження)



❖ **Розв'язання оберненої задачі динаміки.** У загальному випадку рух точки сили, що діють на точку, є змінними, що залежать від часу, координат та швидкості. Рух точки описується системою трьох диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum X_i; \\ m\ddot{y} &= \sum Y_i; \\ m\ddot{z} &= \sum Z_i. \end{aligned}$$

Після інтегрування кожного з них буде **шість постійних** C_1, C_2, \dots, C_6 :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(t, C_1, C_2, C_3); \\ \dot{y} &= f_2(t, C_1, C_2, C_3); \\ \dot{z} &= f_3(t, C_1, C_2, C_3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= f_4(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ y &= f_5(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ z &= f_6(t, C_1, C_2, \dots, C_6). \end{aligned}$$

Значення постійних C_1, C_2, \dots, C_6 знаходяться з шести початкових умов при $t = 0$:

$$\begin{aligned} x &= x_0; & y &= y_0; & z &= z_0; \\ \dot{x} &= \dot{x}_0; & \dot{y} &= \dot{y}_0; & \dot{z} &= \dot{z}_0. \end{aligned}$$

Після підстановки знайдених значень постійних отримуємо :

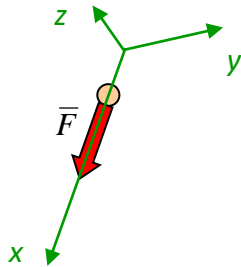
Таким чином, **під дією однієї і тієї ж системи сил матеріальна точка може здійснювати цілий клас рухів, що визначаються початковими умовами.**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ \dot{y} &= f_2(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ \dot{z} &= f_3(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= f_4(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0); \\ y &= f_5(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0); \\ z &= f_6(t, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Початкові координати враховують вихідне положення точки. Початкова швидкість, що задається проекціями, враховує вплив на її рух вздовж ділянки траєкторії тих сил, що діяли на точку до приходу на цю ділянку, тобто початковий кінематичний стан.

Приклад 1 розв'язання оберненої задачі : Вільна матеріальна точка масою m рухається під дією **сили F , постійною за модулем та напрямком.** У початковий момент швидкість точки становила v_0 і збігалася у напрямку із силою. Визначити рівняння руху точки.



1. Складаємо основне рівняння динаміки : $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} = \overline{const}$.

2. Виберемо декартову систему відліку, спрямовуючи вісь x уздовж напрямку сили і спроекуємо основне рівняння динаміки на цю вісь:

(x): $ma_x = F_x = F$. або $m\ddot{x} = F$.

3. Знижуємо порядок похідної : $m \frac{dv_x}{dt} = F$.

5. Обчислюємо інтеграли від обох частин рівняння : $\int dv_x = \int \frac{F}{m} dt$.

$$v_x = \frac{F}{m}t + C_1$$

6. Представимо проекцію швидкості як похідну координати за часом : $\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}t + C_1$.

7. Розділяємо змінні: $dx = \left(\frac{F}{m}t + C_1 \right) dt$.

8. Обчислюємо інтеграли від обох частин рівняння :

$$x = \frac{F}{m} \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

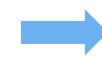
9. Для визначення значень постійних C_1 та C_2 використовуємо початкові умови $t = 0, v_x = v_0, x = x_0$:

$$v_x|_{t=0} = \frac{F}{m} \cdot 0 + C_1 = v_0. \quad x|_{t=0} = \frac{F}{m} \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 = x_0. \quad \Rightarrow \quad C_1 = v_0; \quad C_2 = x_0.$$

У результаті отримуємо рівняння рівнозмінного руху (вздовж вісі x):

$$x = \frac{F}{m} \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0.$$





❖ Загальні вказівки до розв'язання прямої та оберненої задачі. Порядок розв'язання:

1. Складання диференціального рівняння руху:

1.1. **Вибрати систему координат** - прямокутну (нерухому) за невідомої траєкторії руху, природну (рухливу) за відомої траєкторії, наприклад, коло або пряма лінія. У останньому випадку можна використовувати одну прямолінійну координату. Початок відліку поєднати з початковим положенням точки (при $t = 0$) або з рівноважним положенням точки, якщо воно існує, наприклад, коливання точки.

1.2. **Зобразити точку** в положенні, яке відповідає довільному моменту часу (при $t > 0$) так, щоб координати були позитивними ($s > 0, x > 0$). При цьому вважаємо також, що проекція швидкості у цьому положенні також позитивна. У разі коливань проекція швидкості змінює знак, наприклад, у випадку повернення до положення рівноваги. Тут слід прийняти, що в даний момент часу точка віддаляється від положення рівноваги. Виконання цієї рекомендації важливо в подальшому під час роботи з силами опору, що залежать від швидкості.

1.3. **Звільнити матеріальну точку від в'язей, замінити** їхню дію реакціями, **додати** активні сили.

1.4. **Записати основний закон динаміки** у векторному вигляді, **спроєктувати** на вибрані вісі, **виразити** сили або реактивні сили, що задаються через змінні: час, координати чи швидкості, якщо вони від них залежать.

2. Розв'язання диференціальних рівнянь:

2.1. **Зменшити похідну**, якщо рівняння не приводиться до канонічного (стандартного) вигляду.

Наприклад: $\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt}$, або $\ddot{s} = \frac{dv_\tau}{dt}$.

2.2 Розділити змінні, наприклад: $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{m}kv_x$, $\implies \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{1}{m}kdt$ або $\frac{dv_\tau}{dt} = g - \frac{k}{m}v_\tau^2$, $\implies \frac{dv_\tau}{g - \frac{k}{m}v_\tau^2} = dt$.

2.3. Якщо в рівнянні три змінні, то $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{m}cx$, $\implies \frac{dv_x dx}{dt dx} = \frac{v_x dv_x}{dx} = -\frac{1}{m}cx$ і потім розділити змінні.

2.4. **Обчислити невизначені інтеграли** в лівій та правій частинах рівняння, наприклад: $\int \frac{dv_x}{v_x} = -\int \frac{1}{m}kdt \implies \ln v_x = -\frac{1}{m}kt + C_1$

Використовуючи початкові умови, наприклад, $t = 0, v_x = v_{x0}$, **визначити постійні інтегрування**: $\ln v_x|_{v_{x0}} = -\frac{1}{m}kt|_0 + C_1; C_1 = \ln v_{x0}$.

Зауваження. Замість обчислення невизначених інтегралів можна **обчислити певні інтеграли зі змінною верхньою** межею. Нижні межі є початковими значеннями змінних (початкові умови). Тоді не потрібно окремого визначення постійної, яка автоматично включається до рішення, наприклад:

$$\int_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} \frac{dv_\tau}{v_\tau} = -\int_0^t \frac{1}{m}kdt. \implies \ln v_\tau|_{v_{\tau 0}} = -\frac{1}{m}kt|_0^t; \implies \ln v_\tau - \ln v_{\tau 0} = -\frac{1}{m}kt - 0; \ln v_\tau = -\frac{1}{m}kt + \ln v_{\tau 0}.$$

2.5. **Виразити швидкість** через похідну координати за часом, наприклад, $v_\tau = \frac{ds}{dt} = e^{-\frac{1}{m}kt + \ln v_{\tau 0}}$ та повторити пункти 2.2 - 2.4

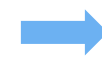
Зауваження. Якщо рівняння приводиться до канонічного вигляду, який має стандартне рішення, тоді використовується це готове рішення.

Постійні інтегрування визначаються як і раніше з початкових умов.

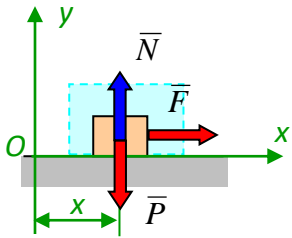




Тема 1 (продовження)



Приклад 2 розв'язання оберненої задачі: Сила залежить від часу. Вантаж вагою P починає рухатися вздовж гладенької горизонтальної поверхні під дією сили F , величина якої пропорційна часу ($F = kt$). Визначити відстань, пройдену вантажем за час t .



1. Вибираємо систему відліку (декартові координати) так, щоб тіло мало позитивну координату.
2. Приймаємо об'єкт руху за матеріальну точку (тіло рухається поступально), звільняємо від в'язей (опорної площини) та замінюємо реакцією (нормальною реакцією гладенької поверхні):

3. Складаємо основне рівняння динаміки : $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F} + \bar{P} + \bar{N}$.

4. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь x : (x) : $ma_x = F = kt$ або $\ddot{x} = \frac{k}{m}t$.

5. Знижуємо порядок похідної : $m \frac{dv_x}{dt} = kt$.

6. Розділяємо змінні: $dv_x = \frac{k}{m}t dt$.

7. Обчислюємо інтеграл від обох частин рівняння : $\int dv_x = \int \frac{k}{m}t dt$ \Rightarrow $v_x = \frac{k}{m} \frac{t^2}{2} + C_1$.

8. Визначимо постійну C_1 з початкової умови $t = 0, v_x = v_0 = 0$: $v_x|_{t=0} = \frac{k}{m} \cdot \frac{0^2}{2} + C_1 = v_0 = 0$ \Rightarrow $C_1 = 0$.

9. Представимо проекцію швидкості як похідну координати за часом: $\frac{dx}{dt} = \frac{k}{m} \frac{t^2}{2}$.

10. Розділяємо змінні : $dx = \frac{k}{m} \frac{t^2}{2} dt$.

11. Обчислюємо інтеграл від обох частин рівняння : $\int dx = \int \frac{k}{m} \frac{t^2}{2} dt$ \Rightarrow $x = \frac{k}{m} \frac{t^3}{6} + C_2$.

12. Визначимо постійну C_2 з початкової умови $t = 0, x = x_0 = 0$: $x|_{t=0} = \frac{k}{m} \frac{0^3}{6} + C_2 = x_0 = 0$ \Rightarrow $C_2 = 0$.

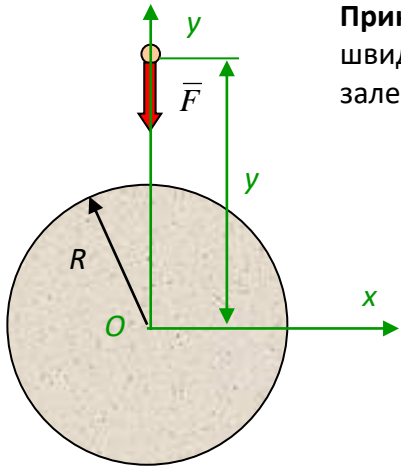
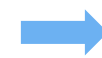
У результаті отримуємо рівняння руху (вздовж осі x), що дає значення пройденого шляху за час t :

$$x = S = \frac{k}{m} \frac{t^3}{6} = \frac{kg}{P} \frac{t^3}{6}$$





Тема 1 (продовження)



Приклад 3 розв'язання оберненої задачі : Сила залежить від координати. Матеріальна точка масою m кинута вгору із Землі зі швидкістю v_0 . Сила тяжіння Землі обернено пропорційна квадрату відстані від точки до центру тяжіння (центру Землі). Визначити залежність швидкості від відстані до центру Землі.

1. Вибираємо систему відліку (декартові координати) так, щоб тіло мало позитивну координату :

2. Складаємо основне рівняння динаміки : $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{F}$.

3. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь y : (y) : $ma_y = -F = -\frac{k}{y^2}$ або $m\ddot{y} = -\frac{k}{y^2}$.

Коефіцієнт пропорційності можна знайти, використовуючи вагу точки на поверхні Землі : $F = P$ коли $y = R$.

$$\frac{k}{R^2} = mg. \quad \Rightarrow \quad k = mgR^2. \quad \text{Звідси диференціальне рівняння має вигляд :} \quad m\ddot{y} = -\frac{mgR^2}{y^2} \quad \text{або} \quad \boxed{\ddot{y} = -\frac{gR^2}{y^2}}.$$

4. Знижуємо порядок похідної : $\frac{dv_y}{dt} = -\frac{gR^2}{y^2}$.

5. Робимо заміну змінної: $\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y dy}{dy dt} = \frac{v_y dv_y}{dy}$.

6. Розділяємо змінні : $\frac{v_y dv_y}{dy} = -\frac{gR^2}{y^2}. \quad \Rightarrow \quad v_y dv_y = -\frac{gR^2}{y^2} dy$.

7. Обчислюємо інтеграли від обох частин рівняння : $\int_{v_{y0}}^{v_y} v_y dv_y = -\int_R^y \frac{gR^2}{y^2} dy. \quad \Rightarrow \quad \frac{v_y^2}{2} \Big|_{v_{y0}}^{v_y} = -gR^2 \left(-\frac{1}{y}\right) \Big|_R^y$.

8. Підставляємо границі: $\frac{v_y^2}{2} - \frac{v_{y0}^2}{2} = gR^2 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right)$.

У результаті отримуємо вираз для швидкості функції від координати y :

$$v_y = \sqrt{v_{y0}^2 + 2gR^2 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right)}$$

Максимальну висоту польоту можна знайти прирівнюючи швидкість нулю :

$$\frac{v_{y0}^2}{2gR^2} = -\left(\frac{1}{H_{\max}} - \frac{1}{R}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{H_{\max}} = \frac{1}{R} - \frac{v_{y0}^2}{2gR^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_{\max} = \frac{2gR^2}{2gR - v_{y0}^2}}$$

Максимальна висота польоту $\rightarrow \infty$ коли знаменник дорівнює нулю:

$$\boxed{2gR = v_{y0}^2}$$

Звідси при постановці радіусу Землі та прискорення вільного падіння виходить II космічна швидкість:

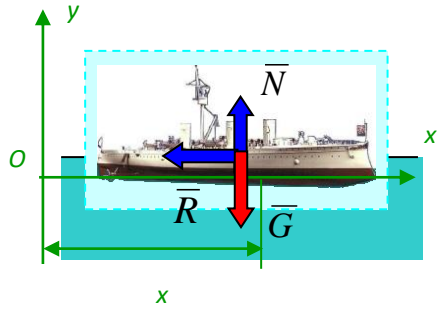
$$\boxed{v_{y0} = \sqrt{2gR} = 11.2 \text{ км/с}}$$



← Тема 1 (продовження) →



Приклад 4 розв'язання оберненої задачі : Сила залежить від швидкості. Судно масою m мало швидкість v_0 . Опір води руху судна пропорційний швидкості. Визначити час, за який швидкість судна зменшиться вдвічі після вимкнення двигуна, а також відстань, пройдену судном до повної зупинки.



1. Вибираємо систему відліку (декартові координати) так, щоб тіло мало позитивну координату :
2. Приймаємо об'єкт руху за матеріальну точку (судно рухається поступально), звільняємо від в'язей (води) та замінюємо реакцією (силою Архімеда), а також силою опору руху.
3. Додаємо активну силу (силу тяжіння).
4. Складаємо основне рівняння динаміки : $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R} + \bar{N}$.
5. Проектуємо основне рівняння динаміки на вісь x : (x) : $ma_x = -R = -\mu v_x$ або $\ddot{x} = -\frac{\mu}{m} v_x$.
6. Знижуємо порядок похідної : $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\mu}{m} v_x$.

7. Розділяємо змінні : $\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{\mu}{m} dt$.
8. Обчислюємо інтеграл від обох частин рівняння $\int_{v_{x0}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\int_0^t \frac{\mu}{m} dt$ $\Rightarrow \ln v_x \Big|_{v_{x0}}^{v_x} = -\frac{\mu}{m} t \Big|_0^t$.
9. Підставляємо границі : $\ln v_x - \ln v_{x0} = -\frac{\mu}{m} t$.

Отримано вираз, що зв'яже швидкість та час t , звідки можна визначити час руху:

$$t = \frac{m}{\mu} \ln \frac{v_{x0}}{v_x}$$

Час руху, за який швидкість впаде вдвічі:

$$t = \frac{m}{\mu} \ln 2$$

Цікаво зазначити, що за наближення швидкості до нуля час руху прагне нескінченності, тобто кінцева швидкість не може дорівнювати нулю. Чим не "вічний рух"? Однак при цьому пройдений шлях до зупинки є кінцевою величиною. Для визначення пройденого шляху звернемося до виразу, отриманого після зниження порядку похідної, та зробимо заміну змінної:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\mu}{m} v_x \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x dx}{dx dt} = \frac{v_x dv_x}{dx} \Rightarrow \frac{v_x dv_x}{dx} = -\frac{\mu}{m} v_x \Rightarrow dv_x = -\frac{\mu}{m} dx \Rightarrow \int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = -\int_0^x \frac{\mu}{m} dx$$

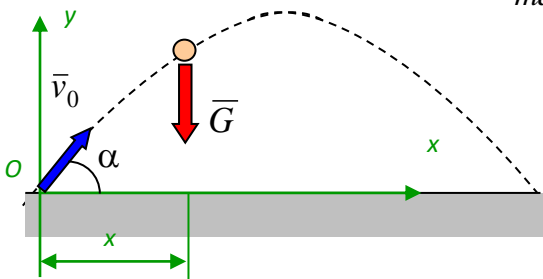
Після інтегрування та підстановки границь отримаємо :

$$x = \frac{m}{\mu} (v_{x0} - v_x)$$

Пройдений шлях до зупинки:

$$x = \frac{m}{\mu} v_{x0}$$

Рух точки, кинуті під кутом до горизонту, в однорідному полі сили тяжіння без урахування опору повітря



$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} \Rightarrow (x): m\ddot{x} = 0; \quad \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = 0; \quad \frac{dv_y}{dt} = -g; \quad \Rightarrow dv_x = 0; \quad dv_y = -g dt;$$

$$(y): m\ddot{y} = -G = -mg;$$

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = 0; \quad \int_{v_{y0}}^{v_y} dv_y = -\int_0^t g dt; \quad \Rightarrow v_x = v_{x0} = v_0 \cos \alpha; \quad v_y = v_{y0} - gt = v_0 \sin \alpha - gt;$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha; \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt; \quad \Rightarrow x = v_0 \cos \alpha \cdot t; \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2};$$

Виключивши час з рівняння руху отримуємо рівняння траєкторії:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Час польоту визначаємо прирівнюванням координати до нуля :

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot T - \frac{gT^2}{2} = 0; \quad T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Дальність польоту визначаємо підстановкою часу польоту:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot T = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = L;$$



Динаміка механічної системи

❖ **Система матеріальних точок або механічна система** – Сукупність матеріальних точок або матеріальних тіл, які об'єднуються загальними законами взаємодії (положення або рух кожної з точок або тіла залежить від положення та руху всіх інших)

❖ **Система вільних точок** – система точок, рух яких не обмежується жодними в'язями (наприклад, планетна система, у якій планети розглядаються як матеріальні точки).

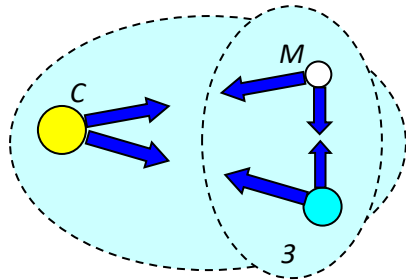
❖ **Система невольних точок або невольна механічна система** – система, рух матеріальних точок або тіл якої обмежується накладеними на систему в'язями (наприклад, механізм, машина тощо).

Сили, що діють на систему. На додаток до раніше існуючої класифікації сил (активні та реактивні сили) вводиться нова класифікація сил:

1. **Зовнішні сили (e)** – діють на точки та тіла системи з боку точок або тіл, що не входять до складу цієї системи.

2. **Внутрішні сили (i)** – сили взаємодії між матеріальними точками чи тілами, які входять у цю систему.

Одна і та сама сила може бути як зовнішньою, так і внутрішньою силою. Усе залежить від того, яка механічна система розглядається. Наприклад: У системі Сонце, Земля та Місяць всі сили тяжіння між ними є внутрішніми. При розгляді системи Земля та Місяць сили тяжіння, прикладені з боку Сонця – зовнішні:



На основі закону дії та протидії кожній внутрішній силі F_k відповідає інша внутрішня сила F_k' , рівна за модулем і протилежна за напрямом

З цього випливають **дві властивості внутрішніх сил:**

1. **Головний вектор усіх внутрішніх сил системи дорівнює нулю:**

$$\bar{R}^i = \sum \bar{F}_k^i = 0.$$

2. **Головний момент усіх внутрішніх сил системи відносно будь-якого центру дорівнює нулю:**

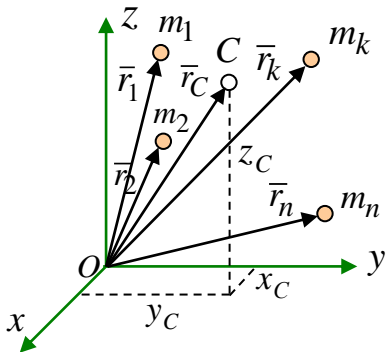
$$\bar{M}_O^i = \sum \bar{M}_{kO}^i = 0.$$

Або у проекціях на координатні вісі:

$$\sum X_k^i = 0; \quad \sum Y_k^i = 0; \quad \sum Z_k^i = 0.$$

$$\sum M_{kx}^i = 0; \quad \sum M_{ky}^i = 0; \quad \sum M_{kz}^i = 0.$$

Зауваження. Хоча ці рівняння схожі на рівняння рівноваги, вони не є такими, оскільки внутрішні сили є прикладеними до різних точок або тіл системи і можуть викликати рух цих точок (тіл) відносно один одного. З цих рівнянь випливає, що внутрішні сили не впливають на рух системи, що розглядається як одне ціле.



❖ **Центр мас системи матеріальних точок.** Для опису руху системи в цілому вводиться геометрична точка, яка називається **центром мас**, радіус-вектор якої визначається виразом

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M},$$

де M – маса всієї системи:

$$M = \sum m_k.$$

Або у проекціях на координатні вісі :

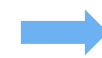
$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M}, \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}.$$

Формули для центру мас аналогічні формулам для центру тяжіння. Проте, поняття центру мас більш загальне, оскільки воно не пов'язане із силами тяжіння.





Тема 2 (продовження)



Робота, потужність сили. Кінетична та потенціальна енергія. Механічний рух може переноситися з однієї механічної системи на іншу внаслідок взаємодії механічних систем:

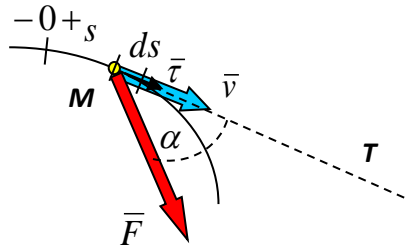
- без перетворень на іншу форму руху, тобто перехід у той самий механічний рух,
- з перетворенням на іншу форму руху матерії (потенціальну енергію, теплоту, електричну енергію та ін.)

Кожен з цих випадків має свої міри механічного руху та механічної взаємодії, які свого часу відстоювали Декарт та Лейбніц (див. таблицю):

	Міра механічного руху	Міра механічної взаємодії
Декарт	Кількість руху $\bar{Q} = m\bar{v}$	Імпульс сили $\bar{S} = \int \bar{F} dt$
Лейбніц	Кінетична енергія $T = \frac{mv^2}{2}$	Робота сили $A = \int F_\tau ds$

Імпульс сили є мірою дії сили при зміні механічного руху.
Робота є кількісною мірою перетворення механічного руху в будь-яку іншу форму руху матерії.

❖ **Робота сили, що прикладається до матеріальної точки.** Нехай точка прикладання сили, змінної за величиною та напрямком, переміщується за деякою довільною траєкторією. На малому (елементарному) переміщенні силу можна вважати постійною і **елементарна робота сили дорівнює проекції сили на напрямок переміщення (відносно траєкторії руху), помноженої на елементарне переміщення:**



$$dA = F_\tau ds = F \cos \alpha \cdot ds$$

Знак елементарної роботи визначається величиною кута α та знаком $\cos \alpha$:

Оскільки зазвичай зручніше працювати з гострими кутами, то в цьому випадку використовують гострий кут і знак надають за наступним простим правилом: **якщо сила та переміщення збігаються у напрямку, то надається знак «+», якщо протилежні за напрямком, то знак «-»** .

$\alpha < \frac{\pi}{2}$	$dA > 0;$
$\alpha > \frac{\pi}{2}$	$dA < 0.$

Елементарна робота може бути записана у вигляді **скалярного добутку:** $dA = \bar{F} \cdot d\bar{r}$ та в проекціях $dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$.

Роботу на скінченному переміщенні MM_1 можна отримати за допомогою підсумовування або інтегрування:

$$A = \sum dA \quad \boxed{A = \int_M^{M_1} F_\tau ds} \quad \boxed{A = \int_M^{M_1} \bar{F} \cdot d\bar{r}} \quad \boxed{A = \int_M^{M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz.}$$

Окремі випадки: 1. Сила постійна за величиною ($F = \text{const}$) і напрямком ($\alpha = \text{const}$):

$$A = \int_M^{M_1} F \cos \alpha \cdot ds = F \cos \alpha \int_M^{M_1} ds = Fs \cos \alpha.$$

2. Сила постійна за величиною ($F = \text{const}$) і паралельна переміщенню ($\alpha = 0$):

$$\boxed{A = \pm Fs.}$$

3. Сила перпендикулярна до переміщення:

$$\boxed{A = 0}$$





Тема 2 (продовження)



Можна довести такі теореми та твердження : $A = \int_M \bar{R} \cdot d\bar{r} = \int_M (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots) \cdot d\bar{r} = \int_M \bar{F}_1 \cdot d\bar{r} + \int_M \bar{F}_2 \cdot d\bar{r} + \dots = A_1 + A_2 + \dots = \sum A_i$

❖ Робота рівнодіючої на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил на тому ж переміщенні: $A = \sum A_i$

❖ Робота постійної сили за величиною та напрямком на складеному переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт цієї сили на кожному із складових переміщень :

$$A = \sum A_{si} \quad A = \bar{F} \cdot \bar{s} = \bar{F} \cdot (\bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \dots) = \bar{F} \cdot \bar{s}_1 + \bar{F} \cdot \bar{s}_2 + \dots = A_{s1} + A_{s2} + \dots = \sum A_{si}$$

❖ Робота внутрішніх сил незмінюваної системи дорівнює нулю : $A^i = 0$

$$A^i = \int_M (\bar{R} + \bar{R}') \cdot d\bar{r} = \int_M (\bar{R} - \bar{R}) \cdot d\bar{r} = 0; \quad (\bar{R}' = -\bar{R}).$$

❖ Робота сили тяжіння не залежить від виду траєкторії та дорівнює добутку сили тяжіння на різницю висот :

$$A = -G(z_1 - z) \quad A = \int_M G_x dx + G_y dy + G_z dz = \int_M (-G) dz = -Gz \Big|_z^{z_1} = -G(z_1 - z); \quad (G_x = G_y = 0, G_z = -G)$$

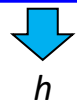
❖ Робота лінійної сили пружності (реакції пружини) за переміщення зі стану рівноваги:

$$A = -c \frac{\Delta x^2}{2} \quad A = \int_M R_x dx = \int_M (-cx) dx = -c \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x_1} = -c \frac{x_1^2}{2}; \quad (R_x = -cx)$$

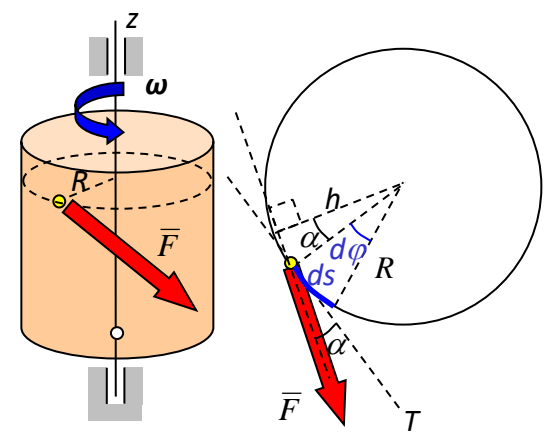
❖ **Робота сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі.**

Запишемо вираз для елементарної роботи сили, яка прикладена до точки, і виразимо елементарне переміщення через кут повороту тіла:

$$dA = F_\tau ds = F \cos \alpha \cdot ds = F \cos \alpha \cdot R \cdot d\varphi; \quad dA = Fh \cdot d\varphi = M_z(\bar{F}) d\varphi.$$



- робота сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається, виражається через момент сили відносно осі.



Робота сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається, для скінченного кута повороту:

$$A = \int_\varphi^{\varphi_1} M_z(\bar{F}) d\varphi.$$

В окремому випадку постійного значення моменту сили відносно осі робота дорівнює добутку моменту сили на кут повороту:

$$A = M_z(\bar{F})(\varphi_1 - \varphi).$$

Потужність – величина, яка характеризується кількістю роботи, виконаної в одиницю часу:

$$N = \frac{\delta A}{dt}.$$

Потужність сили, прикладеної до точки:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{F_\tau ds}{dt} = F_\tau v_\tau = \bar{F} \cdot \bar{v}.$$

Потужність сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \omega_z = \bar{M} \cdot \bar{\omega}.$$





Тема 2 (продовження)



❖ **Кінетична енергія** – величина, яка характеризує здатність механічного руху перетворюватися на еквівалентну кількість іншого руху

Кінетична енергія матеріальної точки:

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

Кінетична енергія твердого тіла за поступального руху:

$$T = \frac{Mv_C^2}{2}$$

Кінетична енергія твердого тіла за обертального руху:

$$T = \frac{I_z \omega_z^2}{2}$$

Кінетична енергія твердого тіла за плоского руху:

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_{zC} \omega_z^2}{2}$$

Кінетична енергія системи матеріальних точок:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}$$

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_k = \frac{v^2}{2} M = \frac{Mv_C^2}{2}; \quad (v_1 = v_2 = \dots = v = v_C)$$

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k (\omega_z h_k)^2}{2} = \frac{\omega_z^2}{2} \sum m_k h_k^2 = \frac{I_z \omega_z^2}{2}; \quad (I_z = \sum m_k h_k^2)$$

$$T = \sum \frac{m_k \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k}{2} = \sum \frac{m_k (\bar{v}_C + \bar{v}_{kC}) \cdot (\bar{v}_C + \bar{v}_{kC})}{2} = \frac{Mv_C^2}{2} + \bar{v}_C \cdot \sum m_k \bar{v}_{kC} + \sum \frac{m_k v_{kC}^2}{2}$$

$$\bar{v}_C \cdot \sum m_k \frac{d\bar{r}_{kC}}{dt} = \bar{v}_C \cdot \frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{r}_{kC}) = 0; \quad (\sum m_k \bar{r}_{kC} = 0) \quad \frac{I_{zC} \omega_z^2}{2}$$

❖ **Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки.** Зміна кінетичної енергії точки дорівнює роботі сил, які діють на точку на тому ж переміщенні:

Запишемо основний закон динаміки точки: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{R}$

Виразимо прискорення через швидкість і помножимо ліву та праву частини співвідношення скалярно на диференціал радіус-вектора:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot d\bar{r} = \bar{R} \cdot d\bar{r} \quad \text{або} \quad m\bar{v} \cdot d\bar{v} = \bar{R} \cdot d\bar{r}$$

Проінтегруємо отримане співвідношення:

$$\int d \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \int_{M_0}^M dA; \quad \left. \frac{mv^2}{2} \right|_{v_0}^v = A$$

Після підстановки границь отримаємо:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A$$

$$md \left(\frac{\bar{v} \cdot \bar{v}}{2} \right) = d \left(\frac{mv^2}{2} \right) \quad dA$$

❖ **Теорема про зміну кінетичної енергії систем.** Зміна кінетичної енергії системи дорівнює роботі сил, які діють на систему на відповідних переміщеннях точок системи:

Запишемо теорему про зміну кінетичної енергії для довільної точки системи, при цьому виділимо роботу зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до цієї точки:

$$\frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = A_k^i + A_k^e$$

$$\text{Підсумовуємо ліві та праві частини співвідношень:} \quad \sum \frac{m_k v_k^2}{2} - \sum \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = \sum A_k^i + \sum A_k^e$$

У лівій частині отримали різницю кінетичних енергій системи:

$$T - T_0 = \sum A_k^i + \sum A_k^e$$

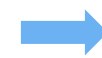
Для незмінюваної системи:

$$T - T_0 = \sum A_k^e; \quad \sum A_k^i = 0$$

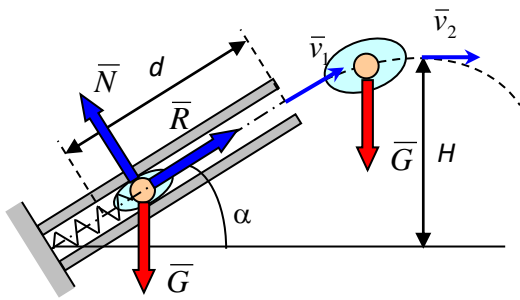




Тема 2 (продовження)



❖ **Приклад розв'язання задачі із застосуванням теореми про зміну кінетичної енергії для матеріальної точки** – Снаряд маси m викидається пружинним пристроєм із каналу під кутом α до горизонту. Довжина нерозтягнутої пружини з жорсткістю c дорівнює довжині каналу l_0 . Перед пострілом пружина стискається на величину d . Визначити швидкість снаряда при вильоті з каналу, а також максимальну висоту польоту.



Дано: α, c, d, m, l_0

Знайти: v_1, H

1. Вибираємо об'єкт – снаряд
2. Відкидаємо в'язі – канал ствола, пружину
3. Замінюємо в'язі реакціями – N, R
4. Додаємо активні сили – G
5. Записуємо теорему про зміну кінетичної енергії для точки:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A$$

Початкова швидкість снаряда дорівнює нулю: $v_0 = 0$.

Робота сил, прикладених до об'єкту, дорівнює: $A = A_N + A_G + A_R$.

Робота нормальної реакції дорівнює нулю (напрямок реакції перпендикулярний до переміщення): $A_N = 0$

Робота сили тяжіння: $A_G = -G\Delta h = -mgd \sin \alpha$.

Робота пружної реакції пружини (напрямок реакції збігається з переміщенням): $A_R = c \frac{d^2}{2}$.

Підставляємо визначені величини до теореми: $\frac{mv_1^2}{2} - 0 = -mgd \sin \alpha + c \frac{d^2}{2}$.

Визначаємо максимальну висоту польоту (повторюємо кроки 1-5):

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A$$

Звідси величина швидкості вильоту снаряда:

$$v_1 = \sqrt{\frac{cd^2}{m} - 2gd \sin \alpha}$$

Вертикальна швидкість снаряда в найвищій точці траєкторії дорівнює нулю: $v_{2y} = 0$.

Горизонтальна швидкість снаряда постійна (із закону збереження проекції на вісь x кількості руху точки) і дорівнює: $v_{2x} = v_{1x} = \sqrt{\frac{cd^2}{m} - 2gd \sin \alpha} \cos \alpha$.

Робота сили тяжіння: $A_G = -G\Delta h = -mg(H - l_0 \sin \alpha)$.

Підставляємо визначені величини до теореми:

$$\frac{m \left(\frac{cd^2}{m} - 2gd \sin \alpha \right) \cos^2 \alpha}{2} - \frac{m \left(\frac{cd^2}{m} - 2gd \sin \alpha \right)}{2} = -mg(H - l_0 \sin \alpha)$$

Після скорочень та перетворень $\left(\frac{cd^2}{2m} - gd \sin \alpha \right) \sin^2 \alpha = g(H - l_0 \sin \alpha)$. Звідси максимальна висота польоту

$$H = \left(\frac{cd^2}{2mg} - d \sin \alpha \right) \sin^2 \alpha + l_0 \sin \alpha$$

Зауважимо, що попередній вираз можна швидше отримати, записуючи теорему про зміну кінетичної енергії тільки для вертикальної швидкості руху точки, оскільки горизонтальні сили відсутні і горизонтальна швидкість не змінюється.

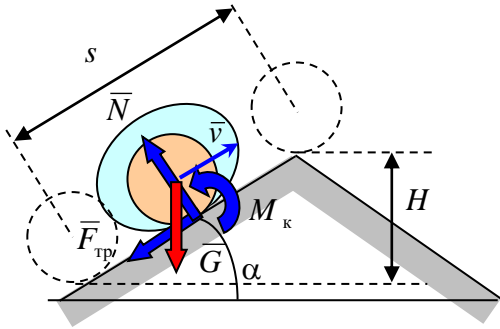




Тема 2 (продовження)



❖ **Приклад розв'язання задачі на застосування теореми про зміну кінетичної енергії системи.** Масивний паперовий рулон радіуса R , який почав рух від поштовху, котиться вгору без прослизання за інерцією вздовж похилої шорсткої площини під кутом α до горизонту із деякою початковою швидкістю. Коефіцієнт тертя ковзання f_k . Визначити початкову швидкість рулона, необхідну для того, щоб він міг перекотитись через вершину на висоті H від початкового положення.



Підставляємо визначені величини в теорему:

$$-\frac{3Mv_{C0}^2}{4} = -MgH - f_k Mg \cos \alpha \frac{H}{R \sin \alpha},$$

Після скорочень та перетворень отримуємо:

$$v_{C0} = \sqrt{\frac{4}{3} gH \left(1 + f_k \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R}\right)}.$$

Зауважимо, що вираз для початкової швидкості не залежить від маси рулону. Маса рулону, як міра інертності, буде впливати на величину зусилля, яке має бути прикладене до тіла, щоб надати йому вказану початкову швидкість

❖ Потенціальне силове поле

Силове поле – простір, в кожній точці якого на матеріальну точку діють сили, залежні від координат точки.

Стаціонарне силове поле – поле, діючі сили якого не залежать від часу, $F = F(x, y, z)$ (поле сили тяжіння, поле сили пружності).

Нестаціонарне силове поле – поле, діючі сили якого залежать від часу, $F = F(x, y, z, t)$ (електромагнітне поле).

Дано: α, f_k, H, R

Знайти: v_0

1. Обираємо об'єкт – рулон
2. Відкидаємо в'язь – опорну площину
3. Замінюємо в'язі реакціями – $N, F_{\text{тр}}, M_K$
4. Додаємо активні сили – G
5. Записуємо теорему про зміну кінетичної енергії для твердого тіла:

$$T - T_0 = A^e$$

Робота сил, прикладених до об'єкта, дорівнює: $A^e = A_N + A_{F_{\text{тр}}} + A_G + A_{M_K}$.

Робота нормальної реакції дорівнює нулю: $A_N = 0$.

Робота сили тертя ковзання дорівнює нулю (прикладена у МЦШ): $A_{F_{\text{тр}}} = 0$.

Робота сили тяжіння: $A_G = -G\Delta h = -MgH$.

Робота моменту опору ковзання: $A_{M_K} = -M_K \cdot (\varphi - \varphi_0)$.

Момент опору ковзання та різниця кутів обертання рулону $M_K = f_k N = f_k G \cos \alpha = f_k Mg \cos \alpha$. $\varphi - \varphi_0 = \frac{s}{R} = \frac{H}{R \sin \alpha}$.

Кінетична енергія на вершині дорівнює нулю: $T = 0$.

Кінетична енергія в початковий момент часу дорівнює

$$T_0 = \frac{Mv_{C0}^2}{2} + \frac{I_{zC}\omega_{z0}^2}{2}$$

Момент інерції маси суцільного циліндра дорівнює: $I_{zC} = \frac{MR^2}{2}$

Кутова швидкість дорівнює: $\omega_{z0} = \frac{v_{C0}}{R}$

Тоді кінетична енергія у початковий момент часу: $T_0 = \frac{Mv_{C0}^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \left(\frac{v_{C0}}{R}\right)^2 = \frac{3Mv_{C0}^2}{4}$.





❖ **Принцип Д'аламбера** (Германа, Ейлера) - загальний метод, за допомогою якого рівнянням динаміки за формою надається вигляд рівнянь статички. Завдяки своїй простоті цей метод набув широкого застосування у багатьох прикладних дисциплінах.

❖ **Принцип Д'аламбера для матеріальної точки.** Основне рівняння динаміки точки:

$$m\bar{a} = \sum \bar{P}_i.$$

Перенесемо добуток маси на прискорення у праву частину : $0 = \sum \bar{P}_i - m\bar{a}.$

Цей додатковий доданок має розмірність сили та приймається за силу інерції, спрямовану у бік, протилежний прискоренню:

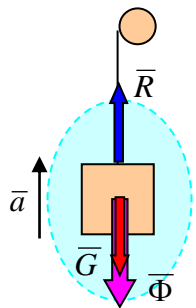
$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}.$$

З введенням сили інерції рівняння динаміки точки набуває вигляду рівняння рівноваги:

$$\sum \bar{P}_i + \bar{\Phi} = 0.$$

Таким чином, **геометрична сума прикладених до точки сил і сили інерції цієї точки дорівнює нулю.** Сила інерції умовно додається до сил, що діють на точку, утворюючи взаємно врівноважену систему сил.

Приклад 1: **Кабіна ліфта вагою G піднімається тросом із прискоренням a . Визначити натяг троса.**



1. Вибираємо об'єкт (кабіна ліфта)
2. Відкидаємо в'язь (трос) та замінюємо її реакцією R .
3. Додаємо до діючих сил силу інерції : $\bar{\Phi} = -m\bar{a}.$
4. Складаємо рівняння рівноваги :

$$\sum Y_i = 0; \quad R - G - \Phi = 0.$$

Визначаємо реакцію троса: $R = G + \Phi = G + \frac{G}{g}a_y = G(1 + \frac{a_y}{g}).$

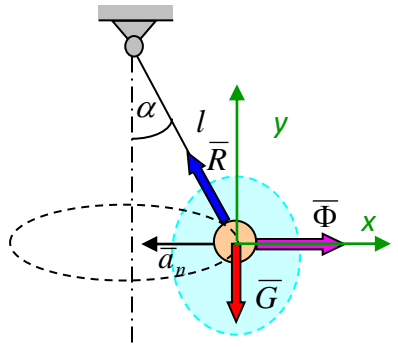
Визначаємо натяг троса:

$$\bar{T} = -\bar{R}; \quad T = R = G(1 + \frac{a_y}{g}).$$





Тема 3 (продовження)



Приклад 2: Вантаж вагою G підвішений на тросі довжиною l рухається за круговою траєкторією в горизонтальній площині з певною швидкістю. Кут відхилення троса від вертикалі дорівнює α . Визначити натяг троса та швидкість вантажу.

1. Вибираємо об'єкт (вантаж).
2. Відкидаємо в'язь (трос) та замінюємо її реакцією R .
3. Додаємо до діючих сил силу інерції: $\bar{\Phi}_n = -m\bar{a}_n$; $\Phi_n = m \frac{v^2}{\rho} = m \frac{v^2}{l \sin \alpha}$.
4. Складаємо рівняння рівноваги: $\sum X_i = 0$; $-R \sin \alpha + \Phi = 0$; $\sum Y_i = 0$; $R \cos \alpha - G = 0$.

З першого рівняння визначаємо реакцію троса: $R = \frac{G}{\cos \alpha}$. Визначаємо натяг троса: $\bar{T} = -\bar{R}$; $T = R = \frac{G}{\cos \alpha}$.

Підставляємо значення реакції троса і сили інерції у друге рівняння та визначаємо швидкість вантажу: $-\frac{G}{\cos \alpha} \sin \alpha + \frac{G}{g} \frac{v^2}{l \sin \alpha} = 0$.

$$v = \sqrt{\frac{gl \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}}$$

Можна порівняти хід розв'язання та результат з прикладом 3 у лекції 1.4.

❖ **Принцип Д'аламбера для невіЛЬНОЇ механічної системи.**

Принцип Д'аламбера для k -тої точки: $\bar{P}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0$.

Складемо усі n рівнянь: $\sum \bar{P}_k + \sum \bar{R}_k + \sum \bar{\Phi}_k = 0$.

Таким чином, **геометрична сума головних векторів заданих сил, реакцій в'язей та сил інерції матеріальних точок дорівнює нулю.** $\bar{P}^* + \bar{R}^* + \bar{\Phi}^* = 0$.

Помножимо рівняння, що виражає принцип Д'аламбера на радіус-вектор, проведений з центру O до точки

Складемо усі n рівнянь: $\sum \bar{r}_k \times \bar{P}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{R}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0$.

$$\bar{r}_k \times \bar{P}_k + \bar{r}_k \times \bar{R}_k + \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0$$

Таким чином, **геометрична сума головних моментів заданих сил, реакцій в'язей та сил інерції матеріальних точок відносно будь-якого центру дорівнює нулю.** $\bar{M}_O^P + \bar{M}_O^R + \bar{M}_O^\Phi = 0$.

Тут P_k – рівнодіюча заданих сил, прикладених до точки, R_k – рівнодіюча реакцій в'язей, прикладених до точки, $\Phi_k = -ma_k$ – сила інерції точки.

Тут P^* – головний вектор заданих сил, прикладених до точки, R^* – головний вектор реакцій в'язей, прикладених до точки, Φ^* – головний вектор сил інерції точок системи.

Тут M_O^P – головний момент заданих сил відносно центру O , M_O^R – головний момент реакцій в'язей відносно центру O , M_O^Φ – головний момент сил інерції точок системи відносно центру O .

❖ **Приведення сил інерції точок твердого тіла до найпростішого вигляду.** У динаміці за центр приведення зазвичай приймається центр мас системи. В результаті приведення сил інерції у загальному випадку отримують **головний вектор сил інерції та головний момент сил інерції відносно центру мас:**

$$\bar{\Phi}^* = \sum \bar{\Phi}_k = -\sum m_k \bar{a}_k;$$

$$\bar{M}_C^\Phi = \sum \bar{M}_{iC}^\Phi = -\sum \bar{r}_k \times m_k \bar{a}_k.$$





Тема 3 (продовження)



❖ Головний вектор сил інерції твердого тіла не залежить від вибору центру приведення і для всіх типів руху дорівнює:

$$\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_C.$$

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M} \quad \text{або} \quad M\bar{r}_C = \sum m_k \bar{r}_k; \quad \Rightarrow \quad M \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2} = \sum m \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} \quad \text{або} \quad M\bar{a}_C = \sum m_k \bar{a}_k; \quad \Rightarrow \quad \bar{\Phi}^* = \sum \bar{\Phi}_k = -\sum m_k \bar{a}_k = -M\bar{a}_C;$$

❖ Приведення сил інерції точок твердого тіла при поступальному русі. У разі поступального руху прискорення всіх точок однакові і головний

момент сил інерції відносно центру мас дорівнює нулю $\bar{M}_C^\Phi = \sum \bar{M}_{iC}^\Phi = -\sum \bar{r}_k \times m_k \bar{a}_C = -\sum m_k \bar{r}_k \times \bar{a}_C = -M\bar{r}_C \times \bar{a}_C = 0;$

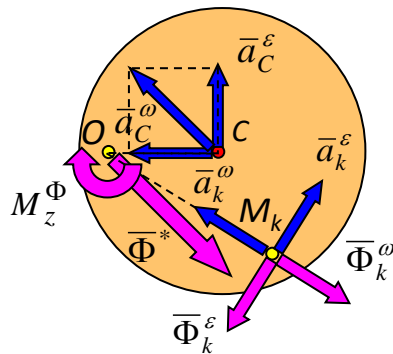
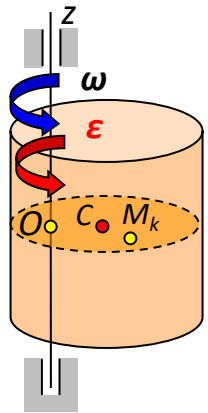
через те, що радіус-вектор центру мас дорівнює нулю, якщо центр приведення збігається з центром мас.

Таким чином, сили інерції приводяться до рівнодіючої сили, прикладеної в центрі мас, яка дорівнює за модулем добутку маси тіла на модуль прискорення його центру мас і спрямованої у протилежному напрямку до цього прискорення.

Приведення сил інерції точок твердого тіла під час обертального руху навколо нерухомої осі. Розглянемо тіло, що має площину матеріальної симетрії, яка перпендикулярна осі обертання. В цьому випадку вісь обертання є головною віссю інерції тіла в точці O . Прискорення всіх точок, що лежать на одній прямій, паралельній осі обертання, геометрично рівні. Тому сили інерції точок, симетричних відносно площини матеріальної симетрії, також рівні, та їхня рівнодіюча лежатиме в цій площині (у точці M_k)

Головний вектор сил інерції дорівнює: $\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_C.$ Прискорення центру мас: $\bar{a}_C = \bar{a}_C^\varepsilon + \bar{a}_C^\omega; \quad a_C = OC\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

У разі вибору центру приведення в точці O головний вектор сил інерції повинен бути прикладений у цій точці паралельно вектору прискорення центру мас у протилежний бік:



У довільній точці M_k прискорення дорівнює: $\bar{a}_k = \bar{a}_k^\varepsilon + \bar{a}_k^\omega; \quad a_k^\varepsilon = \varepsilon OM_k; \quad a_k^\omega = \omega^2 OM_k$

Оскільки лінії дії відцентрових сил інерції проходять через центр обертання, то головний момент сил інерції обчислюється як сума моментів обертальних сил інерції

$$M_O^\Phi = -\sum \Phi_k^\varepsilon OM_k = -\sum m_k \varepsilon OM_k^2 = -\varepsilon \sum m_k OM_k^2 = -I_z \varepsilon.$$

Головний момент сил інерції дорівнює добутку кутового прискорення на момент інерції тіла відносно осі обертання та спрямований у бік, протилежний кутовому прискоренню:

$$M_z^\Phi = -I_z \varepsilon.$$

Таким чином, сили інерції приводяться до головного вектору та головного моменту сил інерції.

Як і в статиці, силу і пару сил можна замінити однією силою - рівнодіючою, прикладеною в новому центрі приведення. Можна показати, що рівнодіюча сил інерції буде прикладена у центрі коливальності. В окремому випадку, якщо центр мас лежить на осі обертання, головний вектор сил інерції дорівнює нулю і сили інерції приводяться до пари

$$\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_C = 0.$$

$$M_z^\Phi = -I_{zC} \varepsilon.$$

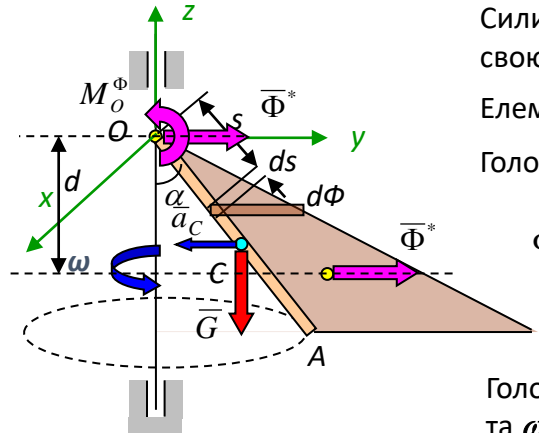




Тема 3 (продовження)



Приклад: Однорідний стрижень **OA** масою **M** довжиною **l**, шарнірно підвішений у точці **O** до осі, що обертається з кутовою швидкістю **ω**, знаходиться у відносній рівновазі під кутом **α** до осі обертання. Визначити сили інерції та кут **α**.



Сили інерції у кожній точці стрижня є пропорційними прискоренню, яке спрямоване до осі, та величина якого у свою чергу пропорційна відстані від точки до осі обертання (трикутна еюра розподілу).

Елементарна сила інерції, прикладена до елементарної маси довжиною **ds**, розташованої на відстані **s** від точки **O**, дорівнює:

Головний вектор сил інерції визначається інтегруванням **dΦ** за довжиною стрижня :

$$d\Phi = a^\omega dm = \omega^2 s \cdot \sin \alpha \cdot \rho A ds$$

$$\Phi^* = \int d\Phi = \int_0^l \omega^2 s \cdot \sin \alpha \cdot \rho A ds = \omega^2 \sin \alpha \cdot \rho A \int_0^l s ds = \omega^2 \sin \alpha \cdot \rho A \frac{s^2}{2} \Big|_0^l = \frac{1}{2} \omega^2 \sin \alpha \cdot \rho A l^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 l \sin \alpha.$$

$$\Phi^* = Ma_C = M \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha.$$

Той самий результат можна набагато простіше отримати використовуючи прискорення центру мас

Головний момент сил інерції не можна визначити за формулою $M_{O}^{\Phi} = I_x \varepsilon_x$, через те, що стрижень **OA** знаходиться у відносній рівновазі та $\omega_x = \varepsilon_x = 0$. Проте сили інерції від обертання стрижня відносно осі **z** створюють момент сил інерції:

$$M_O^{\Phi} = \int z d\Phi = \int_0^l s \cos \alpha \cdot \omega^2 s \cdot \sin \alpha \cdot \rho A ds = \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \cdot \rho A \int_0^l s^2 ds = \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \cdot \rho A \frac{s^3}{3} \Big|_0^l = \frac{1}{3} \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \cdot M l^2 = \Phi^* \frac{2}{3} l \cos \alpha.$$

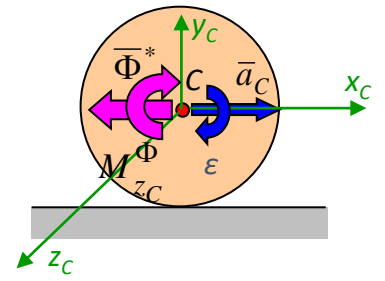
Таким чином, сили інерції приводяться до головного вектора, прикладеного в центрі приведення **O**, та головного моменту відносно цього центру.

Отриману систему із сили та пари можна замінити однією силою - рівнодіючою сил інерції, прикладеною в точці, віддаленій від центру приведення вздовж перпендикуляру до напрямку сили на відстані:

$$d = \frac{M_O^{\Phi}}{\Phi^*} = \frac{2}{3} l \cos \alpha.$$

Кут **α** можна визначити з рівняння відносної рівноваги:

$$\sum M_{iO} = 0; \quad \Phi \cdot \frac{2}{3} l \cos \alpha - Mg \frac{l}{2} \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad M \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha \cdot \frac{2}{3} l \cos \alpha - Mg \frac{l}{2} \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{3g}{2\omega^2 l}.$$



Приведення сил інерції точок твердого тіла при плоскому русі. Розглянемо тіло, що здійснює плоский рух і має площину матеріальної симетрії паралельну площині руху. Цей рух може бути розкладено на поступальний рух з центром мас тіла **C** і обертальний рух навколо рухомої осі **z_c**, що проходить через центр мас тіла перпендикулярно до площини руху.

Відповідно до цього сили інерції поступального руху приводяться до головного вектора сил інерції, прикладеного в центрі мас, та головного моменту сил інерції (пари сил, що лежить у площині руху):

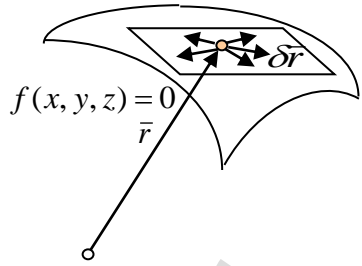
$$\Phi^* = -M \bar{a}_C.$$

$$M_{z_c}^{\Phi} = -I_{z_c} \varepsilon.$$





Можливі переміщення – нескінченно малі переміщення, які допускаються накладеними на систему в'язями.



Можливі переміщення лежать у дотичній площині до поверхні в'язі і є збільшеннями радіус-вектора з точністю до нескінченно малих. У разі нестационарної голономної в'язі $f(x, y, z, t) = 0$ можливі переміщення розглядаються для положення та форми поверхні в'язі, що відповідають даному моменту часу. **Можливі переміщення не залежать від прикладених до системи сил.**

Дійсні переміщення – це нескінченно малі (елементарні) переміщення, які дійсно (фактично) відбуваються за час dt , що допускаються накладеними на систему в'язями. Дійсні переміщення залежать від сил, прикладених до системи, від виду в'язей (стационарних, нестационарних, голономних, неголономних) та початкових умов. Таким чином, можливі переміщення є більш загальним поняттям, ніж дійсні переміщення.

Оскільки вектор положення точки системи можна виразити через узагальнені координати, $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n)$ то можливі переміщення виражаються через збільшення узагальнених координат як повний диференціал:

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n} \delta q_n \quad \text{або}$$

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Наприклад, для похилого стрижня:

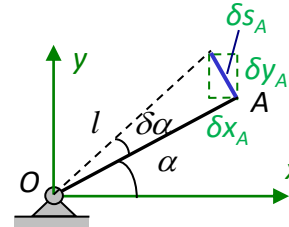
$$\delta x_A = l - l \cos \delta \alpha;$$

$$\delta y_A = l \sin \delta \alpha.$$

Для малих кутів $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \alpha$, тоді

$$\delta x_A \approx 0;$$

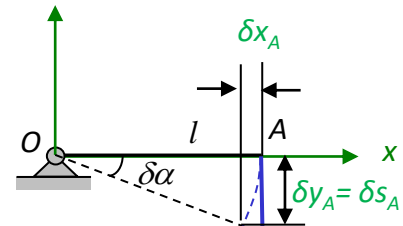
$$\delta y_A \approx \delta s_A = l \delta \alpha.$$



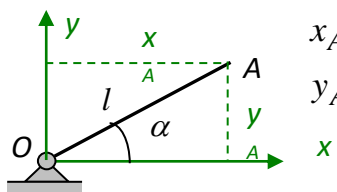
$$\delta s_A = l \delta \alpha.$$

$$\delta x_A = \delta s_A \sin \alpha = l \sin \alpha \delta \alpha;$$

$$\delta y_A \approx \delta s_A \cos \alpha = l \cos \alpha \delta \alpha.$$



Аналитичний спосіб - обчислюється варіація від координат:



$$x_A = l \cos \alpha; \quad \delta x_A = \frac{\partial}{\partial \alpha} (l \cos \alpha) \delta \alpha = -l \sin \alpha \delta \alpha;$$

$$y_A = l \sin \alpha \quad \delta y_A = \frac{\partial}{\partial \alpha} (l \sin \alpha) \delta \alpha = l \cos \alpha \delta \alpha.$$

На відміну від геометричного способу, знаки можливого збільшення координат отримуються автоматично. У разі використання геометричного способу в подальших обчисленнях, наприклад, роботи, необхідно враховувати напрямки отриманого збільшення (переміщення).

Можлива робота сили – елементарна робота сили на тому чи іншому можливому переміщенні:

$$\delta A = \bar{F} \delta \bar{r}.$$

У координатному вигляді:

$$\delta A = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z.$$

У природному вигляді:

$$\delta A = F \delta s \cos(\bar{F}, \delta \bar{r}).$$



Ідеальні в'язі – в'язі, за яких сума елементарних робіт сил реакцій в'язей на будь-якому можливому переміщенні дорівнює нулю:

$$\delta A^R = \sum_{k=1}^n \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

Приклади ідеальних в'язей - абсолютно гладенька поверхня (під час ковзання), абсолютно тверда поверхня (під час кочення без ковзання). Будь-яку неідеальну в'язь можна розглядати як ідеальну, якщо відповідні реакції в'язей (що здійснюють роботу на можливих переміщеннях) зарахувати до заданих (активних) сил.

Принцип можливих переміщень. Для рівноваги матеріальної системи, підпорядкованої голономним, стаціонарним, двостороннім та ідеальним в'язям, необхідно й достатньо, щоб сума елементарних робіт усіх активних сил на будь-якому можливому переміщенні з передбачуваного положення рівноваги дорівнювала нулю:

Доказ необхідності: Система знаходиться у рівновазі та для кожної точки задовольняється рівняння рівноваги:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0.$$

$$\sum \bar{F}_k \delta \bar{r}_k + \sum \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0 \Rightarrow \delta A^F = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

Доказ достатності: Дано: Припустимо, що рівноваги немає.

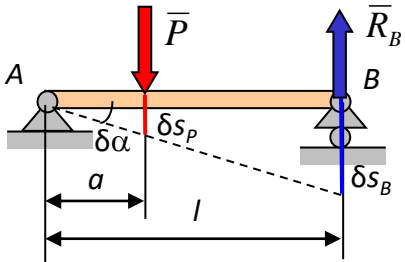
$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

$$\delta A^F = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

$$(\bar{F}_k + \bar{R}_k) d\bar{r}_k = (\bar{F}_k + \bar{R}_k) \delta \bar{r}_k > 0 \Rightarrow \sum (\bar{F}_k + \bar{R}_k) \delta \bar{r}_k = \sum \bar{F}_k \delta \bar{r}_k + \sum \bar{R}_k \delta \bar{r}_k > 0.$$

Приклади використання принципу можливих переміщень для визначення реакцій в'язей :

Приклад 1. Визначити реакцію балки у правій опорі:



Балка нерухома і немає ні можливих, ні дійсних переміщень. Відкинемо в'язь, реакцію якої необхідно визначити, і замінимо її реакцією:

Без правої опори балка може повертатися під дією активних сил, реакцію R_B зараховуємо до активних сил.

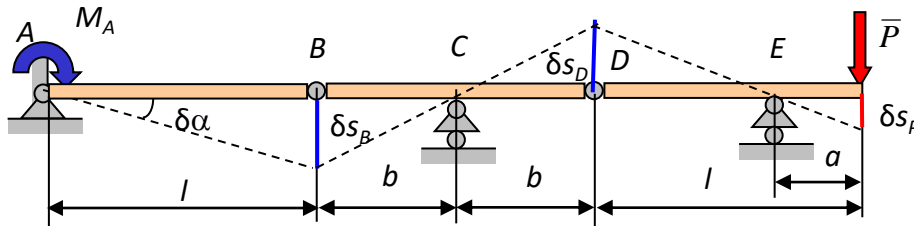
Задаємо мале можливе переміщення:

Обчислимо можливі переміщення: $\delta s_P = a \delta \alpha; \delta s_B = l \delta \alpha.$

Запишемо суму робіт: $\delta A^{P+R} = P \delta s_P - R_B \delta s_B = 0 \Rightarrow Pa \delta \alpha - R_B l \delta \alpha = 0 \Rightarrow R_B = \frac{Pa \delta \alpha}{l \delta \alpha} = \frac{Pa}{l}.$

Приклад 2. Визначити опорний момент багатопрогової складеної балки у лівій опорі:

Відкинемо в'язь у жорсткому затисненні, що перешкоджає повороту балки, і замінимо її парою сил M_A :



Обчислимо можливі переміщення:

$$\delta s_B = l \delta \alpha;$$

$$\delta s_D = \delta s_B = l \delta \alpha;$$

$$\delta s_F = \frac{a}{l-a} \delta s_D = \frac{a}{l-a} l \delta \alpha.$$

Запишемо суму робіт:

$$\delta A = M_A \delta \alpha + F \delta s_F = 0.$$

$$M_A \delta \alpha + F \frac{a}{l-a} l \delta \alpha = 0.$$

$$M_A = -F \frac{a}{l-a} l.$$





Тема 5



Аналітична механіка встановлює загальні, єдині методи вивчення руху та рівноваги будь-яких найскладніших матеріальних систем засобами математичного аналізу. Для цього вводяться нові поняття та узагальнюються старі, вже відомі.

В'язі тепер розглядаються як деякі умови, що накладаються на систему, які повинні задовольнятися в процесі руху системи. Вони містять співвідношення (рівняння чи нерівності) між координатами, компонентами швидкостей та прискорень та, можливо, часу.

Класифікація в'язей за інтегрованістю :

Голономні (геометричні) – виражаються кінцевими рівняннями відносно координат або інтегрованими диференціальними рівняннями відносно координат:

$$\varphi(x_k, y_k, z_k, t) = 0$$

Неголономні (кінематичні) – виражаються неінтегрованими диференціальними рівняннями відносно координат, тобто рівняннями, які містять не тільки координати точок системи, але й їхні похідні за часом:

$$\varphi(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0$$

Класифікація в'язей у залежності від часу :

Стационарні (склерономні) – незалежні від часу: $\varphi(x_k, y_k, z_k) = 0$

Наприклад, рівняння траєкторії, отримане для деякої точки шатуна кривошипно-шатунного механізму розглядається як рівняння склерономної голономної в'язі:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Нестационарні (реономні) – залежні від часу. Наприклад, кінематичне збурення коливачів

Класифікація в'язей у залежності від обмеження руху :

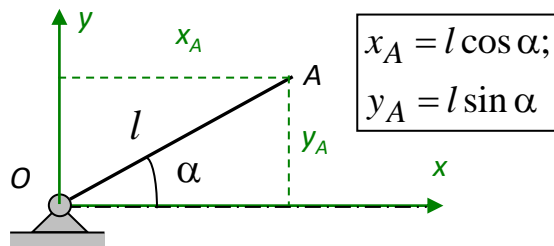
Утримуючі (двобічні) – описуються рівнянням, що виключає можливість покидання точкою траєкторії або поверхні, що описується рівнянням.

Цьому відповідає, наприклад, жорсткий зв'язок у вигляді шарнірного стрижня.

Неутримуючі (однобічні) – виражаються нерівністю, що регламентує в'язь лише в одному напрямку, наприклад, гнучка нитка або гладенька поверхня.

Узагальнені координати – незалежні параметри, які однозначно визначають положення механічної системи при її русі. Узагальненість полягає у тому, що вони можуть мати різну природу (лінійні чи кутові переміщення відносно деякого початкового положення чи будь-які інші величини). Загальне позначення - q_i ($i = 1, \dots, n$).

Число ступенів свободи – число незалежних узагальнених координат, якими можна виразити декартові координати всіх точок системи. Наприклад:



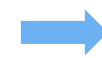
Тут положення будь-якої точки стрижня (наприклад, точки **A**) однозначно задається значенням лише однієї величини – кута α , який є узагальненою координатою ($q = \alpha$).

Число ступенів свободи дорівнює $n = 1$. Рівняння в'язі для цієї точки **A**:

$$x^2 + y^2 = l^2$$



Тема 5 (продовження)



Узагальнені сили є наступним кроком до узагальнення, а саме, механічної дії заданих сил на систему після введення узагальнених координат (узагальнення завдання руху системи).

Нехай механічна система має s ступенів свободи, її положення визначається s узагальненими координатами q_1, q_2, \dots, q_s .

Надаємо деякій узагальненій координаті q_j нескінченно мале збільшення, залишаючи інші узагальнені координати незмінними, тобто

$\delta q_1 = \delta q_2 = \dots = \delta q_{j-1} = 0; \delta q_j \neq 0, \delta q_{j+1} = \dots = \delta q_s = 0$. В результаті всі N точок системи отримують деякі нескінченно малі переміщення:

$\delta \bar{s}_{1,j}, \delta \bar{s}_{2,j}, \dots, \delta \bar{s}_{N,j}$ - сукупність цих переміщень є одним із можливих переміщень системи.

Елементарна робота всіх заданих сил системи на цих переміщеннях дорівнює:
$$\delta A_{qj} = \sum_{k=1}^N F_k \delta s_{kj} \cos(\bar{F}_k, \delta \bar{s}_{kj}).$$

Поставимо у відповідність до всіх заданих сил системи деяку одну уявну силу, яка здійснює таку ж роботу на даному можливому (узагальненому) переміщенні δq_j , що і всі сили системи:

$$Q_j \delta q_j = \sum_{k=1}^N F_k \delta s_{kj} \cos(\bar{F}_k, \delta \bar{s}_{kj}).$$

Звідси визначається величина цієї сили :

$$Q_j = \frac{\sum_{k=1}^N F_k \delta s_{kj} \cos(\bar{F}_k, \delta \bar{s}_{kj})}{\delta q_j} = \frac{\delta A_{qj}}{\delta q_j}.$$

узагальнена сила Q_j , що відповідає узагальненій координаті q_j – це скалярна величина, що дорівнює відношенню елементарної роботи заданих сил на всіх переміщеннях системи, викликаних елементарним приростом $\delta q_j \neq 0$ координати q_j , до величини цього приросту.

1. Розмірність цієї сили визначається розмірністю узагальненої координати. Наприклад, якщо q_j є лінійною узагальненою координатою, то розмірність узагальненої сили Q_j відповідає силі (Н). Якщо q_j є кутовою узагальненою координатою, то розмірність узагальненої сили Q_j відповідає парі сил чи моменту (Н·м).
2. Число узагальнених сил дорівнює числу узагальнених координат. Розмірність кожної з узагальнених сил визначається відповідною розмірністю узагальненої координати.

Інші формули для обчислення узагальненої сили:

У векторній формі

$$\delta A_{qj} = \sum_{k=1}^N F_k \delta s_{kj} \cos(\bar{F}_k, \delta \bar{s}_{kj}) = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \delta \bar{r}_{kj}.$$

Радіус-вектор k -тої точки є функцією всіх узагальнених координат: $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s)$

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \delta q_s = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Варіація радіус-вектора за узагальненими координатами при $\delta q_1 = \delta q_2 = \dots = \delta q_{j-1} = 0; \delta q_j \neq 0, \delta q_{j+1} = \dots = \delta q_s = 0$:

Звідси:
$$\delta A_{qj} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \delta \bar{r}_{kj} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j \implies Q_j = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}.$$

У координатній формі:

$$Q_j = \sum_{k=1}^N \left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right).$$

У випадку потенціальних сил: $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s)$.

$$T + \Pi = \text{const.}$$

$$\implies \delta T + \delta \Pi = 0.$$

$$\delta T = \delta A.$$

$$\implies \delta A = \delta T = -\delta \Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \delta q_j.$$

$$\implies Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

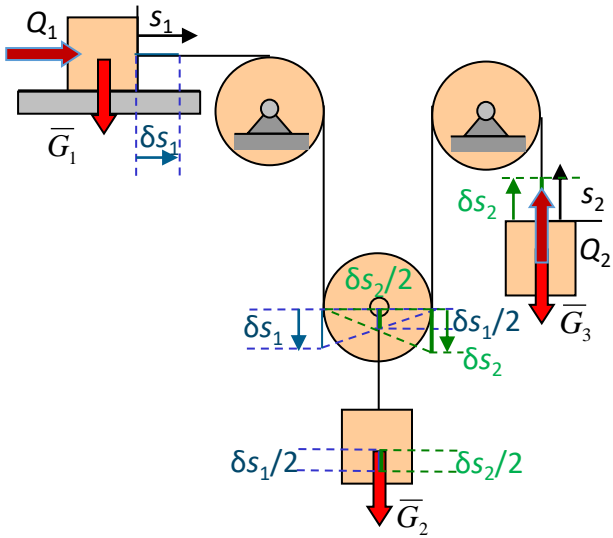




Тема 5 (продовження)



Приклад обчислення узагальнених сил. Для механічної системи трьох вантажів із двома нерухомими та одним рухомих блоками визначити узагальнені сили Q_j .



1. Число узагальнених сил дорівнює числу узагальнених координат. Число узагальнених координат дорівнює кількості ступенів свободи, яку можна визначити послідовним накладенням в'язей. Обмежимо горизонтальне переміщення вантажу 1, вантажі 2 та 3 можуть переміщуватися вертикально.

Обмежимо додатково вертикальне переміщення, наприклад, вантажу 3.

Вантаж 2 переміщуватися не може (в'язі вважаємо двосторонніми).

Отже $n = 2$. Обираємо узагальнені координати $q_1 = s_1$ та $q_2 = s_2$:

2. Для визначення Q_1 задаємо довільне мале переміщення $\delta q_1 = \delta s_1$ ($\delta q_2 = \delta s_2 = 0$).

Обчислюємо можливу роботу заданих сил: $\delta A_{q1} = G_2 \frac{\delta s_1}{2} \Rightarrow Q_1 = \frac{\delta A_{q1}}{\delta q_1} = \frac{G_2}{2}$.

3. Для визначення Q_2 задаємо довільне мале переміщення $\delta q_2 = \delta s_2$ ($\delta q_1 = \delta s_1 = 0$).

Обчислюємо можливу роботу заданих сил: $\delta A_{q2} = G_2 \frac{\delta s_2}{2} - G_3 \delta s_2 \Rightarrow Q_2 = \frac{\delta A_{q2}}{\delta q_2} = \frac{G_2}{2} - G_3$.

Рівняння рівноваги в узагальнених силах. Відповідно до принципу можливих переміщень за рівноваги системи: $\delta A = 0$.

Задаємо можливі переміщення точок системи, спричинені нескінченно малими приростами всіх узагальнених координат: $\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \delta q_s = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j$.

Обчислимо можливу роботу заданих сил: $\delta A = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j$. Перегрупуємо суми добутків

$$\delta A = \sum_{j=1}^s \delta q_j \cdot \left[\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right] \Rightarrow \delta A = \sum_{j=1}^s \delta q_j \cdot Q_j = 0$$

\downarrow
 Q_j

Збільшення узагальнених координат довільні та незалежні один від одного. Тому в отриманому рівнянні всі коефіцієнти поруч із ними (узагальнені сили) повинні дорівнювати нулю:

$Q_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, s)$ - умови рівноваги в узагальнених силах.

У розглянутому вище прикладі для рівноваги системи необхідно, щоб Q_1 і Q_2 дорівнювали нулю. Видно, що $Q_1 \neq 0$ та рівноваги немає.

Рівновага цієї системи можлива лише за наявності сили тертя певної величини між вантажем 1 і опорною площиною. Тоді ця сила увійде у вираз для Q_1 :

$$Q_1 = \frac{\delta A_{q1}}{\delta q_1} = \frac{G_2}{2} - F_{\text{тр}} = \frac{G_2}{2} - fN = \frac{G_2}{2} - fG_1$$

Тепер рівняння рівноваги для даної системи визначають співвідношення між силами та мають вигляд:

$$\frac{G_2}{2} - fG_1 = 0; \quad \frac{G_2}{2} - G_3 = 0$$





Тема 5 (продовження)



Рівняння Лагранжа II роду. Рівняння є диференціальними рівняннями руху системи відносно узагальнених координат системи. Скористаємося загальним рівнянням динаміки: $\delta A = 0$, де δA – можлива робота всіх заданих сил та сил інерції на будь-якому можливому переміщенні.

1. Задаємо можливі переміщення точок системи, спричинені нескінченно малими збільшеннями всіх узагальнених координат:

$$\text{Обчислимо можливу роботу заданих сил та сил інерції: } \delta A = \sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = \sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j. \quad \delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \delta q_s = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j.$$

$$\text{Перегрупуємо суми добутків } \delta A = \sum_{j=1}^s \delta q_j \cdot \sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \text{ або } \delta A = \sum_{j=1}^s \delta q_j \cdot \left(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) \Rightarrow \delta A = \sum_{j=1}^s \delta q_j \cdot (Q_j + Q_j^\Phi) = 0.$$

Збільшення узагальнених координат довільні та незалежні один від одного, тому в отриманому рівнянні всі коефіцієнти поруч із ними (**узагальнені сили**) повинні

дорівнювати нулю:

$$Q_j + Q_j^\Phi = 0, \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

- **рівняння руху системи, еквівалентні загальному рівнянню динаміки.**

2. До узагальнених сил інерції Q_j^Φ входять маси та прискорення точок системи. Спробуємо виразити ці сили через швидкості точок і в результаті через кінетичну енергію:

$$Q_j^\Phi = \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = - \sum_{k=1}^N m_k \bar{a}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = - \sum_{k=1}^N m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}.$$

Додаємо до цього виразу два однакових доданки різного знаку та наступного вигляду:

$$\sum_{k=1}^N m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_j}.$$

Обчислимо часткову похідну кінетичної енергії системи за узагальненою координатою:

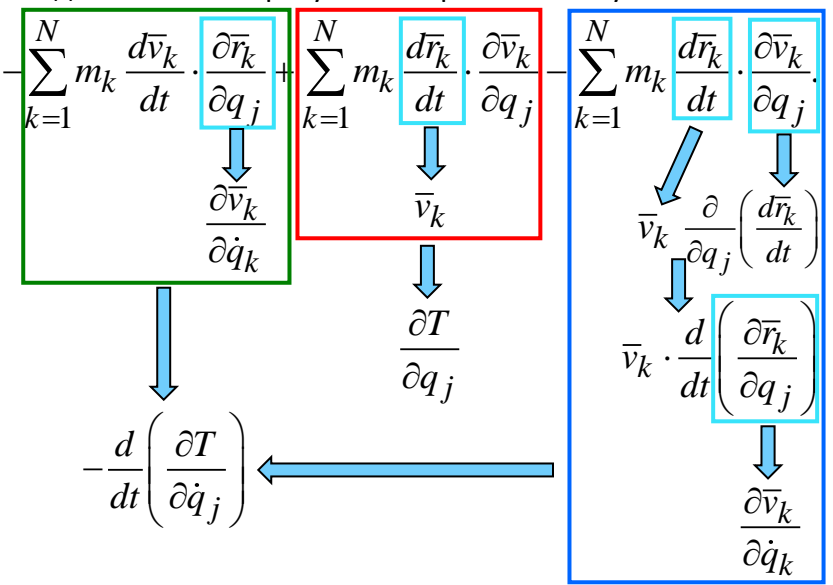
$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{k=1}^N m_k \frac{\bar{v}_k \cdot \bar{v}_k}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_j} \cdot \bar{v}_k + \bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_j} \right) = \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_j}.$$

Похідна за узагальненою швидкістю має аналогічний вираз:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_j}.$$

Обчислимо похідну за часом від часткової похідної кінетичної енергії системи за узагальненою швидкістю:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{k=1}^N m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_j} \right).$$



Тема 5 (продовження)

Рівняння Лагранжа II роду - продовження.

Таким чином:
$$Q_j^\Phi = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Підставимо в рівняння руху:
$$Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0.$$
 Звідси:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1,2,\dots,s).$$

Для консервативних (потенціальних) сил:

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j=1,2,\dots,s).$$

рівняння Лагранжа II роду.

Кінетичний потенціал – функція, що визначається виразом: $L = T - \Pi$ - **функція Лагранжа**, де $T = T(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$ та $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$.

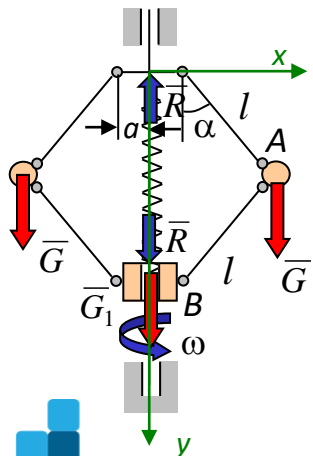
Кінетичний потенціал L буде також функцією узагальнених координат, узагальнених швидкостей та часу: $L = L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$.

Визначимо кінетичну енергію через кінетичний потенціал як $T = L + \Pi$ та обчислимо необхідні часткові похідні, що присутні у рівнянні Лагранжа II роду:

$= 0$, тому що не залежить від \dot{q}_j

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1,2,\dots,s) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j=1,2,\dots,s).$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}; \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}; \quad \text{або} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1,2,\dots,s).$$



Приклад 1. Відцентровий регулятор обертається навколо вертикальної осі з постійною швидкістю ω . За $\alpha = 0$ пружина не деформована. Жорсткість пружини c . Довжина кожного із стрижнів l . Плечі підвіски a . Вага кожної з куль G , вага муфти G_1 . Визначити кутову швидкість обертання для даного кута α .

1. Система має 2 ступені свободи (поворот навколо осі та зміна кута нахилу стрижнів підвіски). При встановленому обертанні розглядаємо тільки зміну кута нахилу α вибираємо його як узагальнену координату $q = \alpha$.

2. Покажемо задані сили: 3. Пружну в'язь (пружину) замінюємо реакцією і додаємо її до заданих сил: $R = c\Delta l = c(2l - 2l \cos \alpha) = 2cl(1 - \cos \alpha)$.

4. Визначимо проєкції можливих переміщень (варіації координат) точок докладання сил:

$$\begin{aligned} x_A &= a + l \sin \alpha; & \delta x_A &= l \cos \alpha \delta \alpha; \\ y_A &= l \cos \alpha; & \delta y_A &= -l \sin \alpha \delta \alpha; \end{aligned}$$

5. Визначимо узагальнену силу Q :

$$y_B = 2l \cos \alpha. \quad \delta y_B = -2l \sin \alpha \delta \alpha.$$

$$\delta A = 2G\delta y_A + (G_1 + R)\delta y_B = -2Gl \sin \alpha \delta \alpha - (G_1 + R)2l \sin \alpha \delta \alpha = -2(G + G_1 + R)l \sin \alpha \delta \alpha$$

$$Q = \frac{\delta A}{\delta \alpha} = -2(G + G_1 + R)l \sin \alpha.$$



Тема 5 (продовження)



Приклад 1 – продовження

6. Обчислимо кінетичну енергію: $T = 2 \frac{G}{g} \frac{v^2}{2} = \frac{G}{g} [\omega(a + l \sin \alpha)]^2 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{G}{g} \omega^2 2(a + l \sin \alpha) l \cos \alpha \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = 0; \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) = 0.$

Складаємо рівняння Лагранжа II роду: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q \Rightarrow 0 - \frac{G}{g} 2\omega^2 (a + l \sin \alpha) l \cos \alpha = -2(G + G_1 + R) l \sin \alpha.$ Після підстановки R знаходимо ω : $\omega = \sqrt{\frac{(G + G_1 + 2cl(1 - \cos \alpha))g \cdot \operatorname{tg} \alpha}{G(a + l \sin \alpha)}}$

Приклад 2. Для механічної системи трьох вантажів з двома нерухомими та одним рухомими блоками визначити прискорення вантажів.

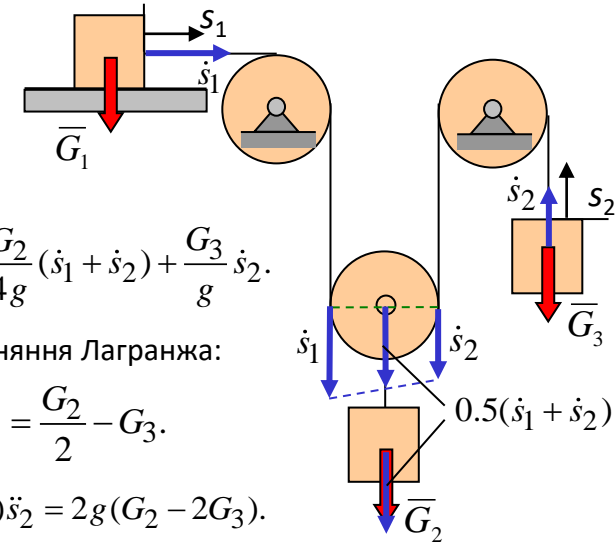
1. Система має два ступені свободи (див. приклад обчислення узагальнених сил - **Лекція 11.3**).

Рівняння Лагранжа мають такий вигляд при виборі узагальнених координат $q_1 = s_1$ і $q_2 = s_2$:

3. Обчислимо кінетичну енергію: $T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{G_1 \dot{s}_1^2}{2g} + \frac{G_2 [0.5(\dot{s}_1 + \dot{s}_2)]^2}{2g} + \frac{G_3 \dot{s}_2^2}{2g}.$

4. Обчислимо часткові похідні кінетичної енергії: $\frac{\partial T}{\partial s_1} = 0; \frac{\partial T}{\partial s_2} = 0. \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} = \frac{G_1}{g} \dot{s}_1 + \frac{G_2}{4g} (\dot{s}_1 + \dot{s}_2). \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} = \frac{G_2}{4g} (\dot{s}_1 + \dot{s}_2) + \frac{G_3}{g} \dot{s}_2.$

2. Узагальнені сили Q_1, Q_2 були обчислені: $Q_1 = \frac{\delta A_{s1}}{\delta s_1} = \frac{G_2}{2}, Q_2 = \frac{\delta A_{s2}}{\delta s_2} = \frac{G_2}{2} - G_3.$



5. Обчислимо похідні за часом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} \right) = \frac{G_1}{g} \ddot{s}_1 + \frac{G_2}{4g} (\ddot{s}_1 + \ddot{s}_2). \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} \right) = \frac{G_2}{4g} (\ddot{s}_1 + \ddot{s}_2) + \frac{G_3}{g} \ddot{s}_2.$$

Невідомі (незалежні) прискорення:

$$\ddot{s}_1 = \frac{D_1}{D}; \quad \ddot{s}_2 = \frac{D_2}{D}; \quad D = \begin{vmatrix} 4G_1 + G_2 & G_2 \\ G_2 & G_2 + 4G_3 \end{vmatrix} = (4G_1 + G_2)(G_2 + 4G_3) - G_2^2.$$

У випадку рівності мас $M_1 = M_3 = M$:

$$D = 8G(2G + G_2).$$

$$D_1 = 12G_2 G g.$$

$$D_2 = 4G(G_2 - 4G)g.$$

$$\ddot{s}_1 = a_1 = \frac{3G_2 g}{2(2G + G_2)}.$$

$$\ddot{s}_2 = a_2 = \frac{(G_2 - 4G)g}{2(2G + G_2)}.$$

$$\frac{\ddot{s}_1 + \ddot{s}_2}{2} = a_3 = \frac{(G_2 - G)g}{2G + G_2}.$$

Або: $(4G_1 + G_2)\ddot{s}_1 + G_2\ddot{s}_2 = 2gG_2. \quad G_2\ddot{s}_1 + (G_2 + 4G_3)\ddot{s}_2 = 2g(G_2 - 2G_3).$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2gG_2 & G_2 \\ 2g(G_2 - 2G_3) & G_2 + 4G_3 \end{vmatrix} = 2gG_2(G_2 + 4G_3) - 2g(G_2 - 2G_3)G_2 = 12G_2G_3g.$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4G_1 + G_2 & 2gG_2 \\ G_2 & 2g(G_2 - 2G_3) \end{vmatrix} = (4G_1 + G_2)(2g(G_2 - 2G_3)) - 2gG_2^2 = 2(4G_1G_2 - 8G_1G_3 - 2G_2G_3)g.$$





Тема 5 (продовження)



Рівняння рівноваги в узагальнених координатах (в узагальнених силах):

$$Q_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

За визначенням узагальненої сили для консервативної системи:

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0.$$

Звідси випливає, що **положення рівноваги (спокою) консервативної системи відповідають екстремальним значенням потенціальної енергії системи**. При цьому за рівністю нулю часткової похідної потенціальної енергії не можна судити про стійкість стану спокою (рівноваги) у цих положеннях системи. Умова стійкості стану спокою встановлюється критерієм Лагранжа-Діріхле:

Ті **положення спокою консервативної системи, в яких потенціальна енергія досягає мінімуму, є її стійкими станами спокою**:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j^2} > 0. \quad \text{- умова мінімуму потенціальної енергії.}$$

Якщо **друга похідна потенціальної енергії менше нуля**, це відповідає випадку **нестійкого положення рівноваги**.

Якщо друга похідна потенціальної енергії дорівнює нулю, то вона не може бути критерієм мінімуму потенціальної енергії та для розв'язання питання про стійкість положення рівноваги необхідно послідовно досліджувати знаки похідних вищого порядку.

Якщо **перша за порядком, ненульова похідна потенціальної енергії має парний порядок і більше нуля**, то це відповідає мінімуму потенціальної енергії (**стан рівноваги стійкий**).

Якщо **перша за порядком, ненульова похідна потенціальної енергії має непарний порядок**, то потенціальна енергія не має екстремуму (немає ні мінімуму, ні максимуму), відповідає **байдужому стану рівноваги**.

Приклад. Метроном є маятником з двома вантажами: A – нерухомий, вагою G_A , B – здатний до переміщення, вагою G_B . Визначити умови стійкого та нестійкого положення рівноваги.

Виберемо як узагальнену координату кут відхилення стрижня метронома від вертикалі φ :

$$\text{Потенціальна енергія вантажів системи} \quad \Pi = G_A y_A + G_B y_B = G_A (-L_A \cos \varphi) + G_B L_B \cos \varphi = (G_B L_B - G_A L_A) \cos \varphi.$$

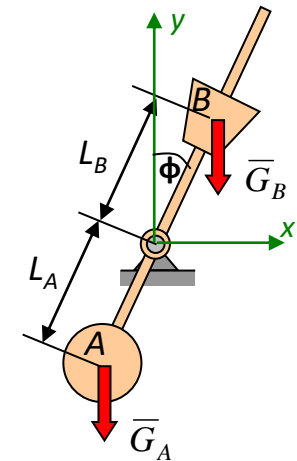
$$\text{Умова рівноваги системи вантажів:} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = (G_B L_B - G_A L_A) \sin \varphi = 0. \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} G_B L_B - G_A L_A &= 0. \quad (a) \\ \sin \varphi &= 0. \quad (b) \end{aligned}$$

$$\text{Досліджуємо стійкість рівноваги системи вантажів при виконанні умов (a) та (b):} \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -(G_B L_B - G_A L_A) \cos \varphi.$$

При виконанні умови (a) ($G_A L_A = G_B L_B$) друга похідна, як і всі наступні, дорівнює нулю. Це відповідає **байдужому стану рівноваги**.

Якщо $G_A L_A > G_B L_B$ та $\varphi = 0$, друга похідна виявляється більшою за нуль - це відповідає **стійкому стану рівноваги**

Якщо $G_A L_A > G_B L_B$ та $\varphi = 180^\circ$, друга похідна виявляється меншою за нуль - це відповідає **нестійкому стану рівноваги**.





Контрольні завдання

1. В чому полягає предмет динаміки?
2. Сформулювати основні закони динаміки.
3. Навести зв'язок маси та ваги тіла.
4. Записати основне рівняння динаміки точки.
5. Сформулювати принцип незалежності дії сил.
6. Записати диференціальні рівняння руху матеріальної точки при трьох способах задавання руху.
7. Сформулювати пряму та обернену задачі динаміки.
8. При якій умові матеріальна точка при дії на неї декількох сил буде рухатися прямолінійно і рівномірно?
9. Який вигляд мають диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки?
10. Навести загальну схему розв'язання оберненої задачі динаміки точки шляхом прямого інтегрування диференціальних рівнянь руху.
11. Дати визначення механічної системи.
12. Класифікувати сили в динаміці системи. Які сили називаються зовнішніми і внутрішніми?
13. Сформулювати властивість внутрішніх сил механічної системи.
14. Дати визначення маси і центру мас системи.
15. Навести міри механічної взаємодії.
16. Навести міри механічного руху.
17. Як виражається величина елементарної роботи сили?
18. Навести формули для визначення роботи сили при трьох способах задавання руху точки її прикладання.
19. Чому дорівнює робота сили ваги?
20. Чому дорівнює робота пружної сили?
21. Визначити роботу сили, прикладеної до тіла, що обертається навколо нерухомої осі.
22. Дати визначення потужності.





23. Дати визначення кінетичної енергії матеріальної точки.
24. Сформулювати і записати теорему про зміну кінетичної енергії точки.
25. Чому дорівнює кінетична енергія механічної системи?
26. Як виражається кінетична енергія твердого тіла при поступальному, обертальному та плоскопаралельному русі?
27. Сформулювати і довести теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи.
28. В чому полягає закон збереження механічної енергії системи?
29. Дати визначення сили інерції матеріальної точки.
30. Сформулювати принцип Даламбера для матеріальної точки і механічної системи.
31. До чого зводяться сили інерції тіла при поступальному, обертальному та плоскопаралельному русі?
32. Дати визначення можливими переміщеннями системи.
33. Дати визначення ідеальних в'язей. Навести приклади.
34. Сформулювати і довести принцип можливих переміщень.
35. Дати визначення стаціонарних, нестаціонарних, голономних, неголономних, стримуючих і нестримуючих в'язей
36. Дати визначення узагальнених координат системи.
37. Чому дорівнює кількість ступенів вільності механічної системи? Як вона визначається?
38. Дати визначення узагальнених сил.
39. Викласти способи визначення узагальнених сил.
40. Записати умови рівноваги системи в узагальнених координатах.
41. Навести загальний вигляд диференціальних рівнянь руху механічної системи в узагальнених координатах.
42. Записати рівняння Лагранжа другого роду.
43. Дати визначення кінетичного потенціалу системи.
44. Записати рівняння Лагранжа другого роду для консервативних систем.
45. Від чого залежить кількість рівнянь Лагранжа другого роду?





РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Прикладна механіка / [Булгаков В.М, Адамчук В.В., Чернш О.М., Березовий М.Г., Калетнік Г.М., Яременко В.В. - К.: Центр учбової літератури, 2020.- 906 с.
2. В.Т. Павлице, Є.В. Харченко, А.Ф. Барвінський, Ю.Г. Гаршнев. Прикладна механіка. Навчальний посібник. /За ред. В.Т. Павлице. - Львів: "Інтелект-Захід", 2004. - 368 с.
3. Теоретична механіка [Текст] : підруч. для студ. вищ. навч. закл. / М. А. Павловський. - К. : Техніка, 2002. - 512 с. ISBN 966-575-184-0
4. Теоретична механіка [Текст] : збірник задач: навч. посібник для студ. вищих навч. закл. / О. С. Апостолук [та ін.] ; ред. М. А. Павловський. - К. : Техніка, 2007. - 400 с. ISBN 966-575-059-3
5. Методика розв'язування і збірник задач з теоретичної механіки [Текст] : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В. В. Божидарнік, Л. Д. Величко ; Луцький держ. технічний ун-т, Львівський держ. ун-т безпеки життєдіяльності. - Вид. 2-е, допов., переробл. - Луцьк : Надстир'я, 2007. - 504 с. - Бібліогр.: с. 500-501. ISBN 978-966-517-585-8
6. Онищенко С.В. Конспект лекцій з дисципліни «Теоретична та прикладна механіка» для здобувачів першого рівня вищої освіти спеціальності 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології [Електронний ресурс] / С.В. Онищенко, Д.Л. Колосов, О.М. Долгов ; Міністерство освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2022. – 81 с.



7. Долгов О.М. Теоретична механіка. Модуль I. Фізичні основи механіки [Електронний ресурс]: презентація лекцій для бакалаврів спеціальності 132 Матеріалознавство / О.М. Долгов, Д.Л. Колосов, С.В. Онищенко ; Нац. техн. ун-т. «Дніпровська політехніка». - Дніпро : НТУ «ДП», 2023. - 27 с.
8. Долгов О.М. Теоретична механіка. Модуль II. СТАТИКА [Електронний ресурс]: презентація лекцій для бакалаврів спеціальності 132 Матеріалознавство / О.М. Долгов, Д.Л. Колосов, С.В. Онищенко ; Нац. техн. ун-т. «Дніпровська політехніка». - Дніпро : НТУ «ДП», 2023. - 21с.
9. Долгов О.М. Теоретична механіка. Модуль III. Кінематика [Електронний ресурс] : презентація лекцій для бакалаврів спеціальності 132 Матеріалознавство / О.М. Долгов, Д.Л. Колосов, С.В. Онищенко ; Нац. техн. ун-т. «Дніпровська політехніка». - Дніпро : НТУ «ДП», 2023.-19 с.
10. Долгов О.М. Теоретична механіка. Модуль IV. Динаміка [Електронний ресурс] : презентація лекцій для бакалаврів спеціальності 132 Матеріалознавство / О.М. Долгов, Д.Л. Колосов, С.В. Онищенко ; Нац. техн. ун-т. «Дніпровська політехніка». - Дніпро : НТУ «ДП», 2023.-31с.



Навчальне видання

Долгов Олександр Михайлович

Колосов Дмитро Леонідович

Онищенко Сергій Валерійович

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

Частина I. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

Навчальний наочний посібник

Редактор Є.М. Ільченко

Електронний ресурс

Підготовлено до виходу в світ

у Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004

49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19

