МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра системного аналізу та управління

Л.С. Коряшкіна, М.М. Udновол

МАТЕМАТИЧНА ЕКОНОМІКА

Конспект лекцій
для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 124 Системний аналіз
(F4 Системний аналіз та наука про дані)

Дніпро
НТУ «ДП»
2025

Математична економіка [Електронний ресурс]: конспект лекцій для здобувачів в ступеня бакалавра спеціальності 124 Системний аналіз (F4 Системний аналіз та наука про дані) / уклад.: Л.С. Коряшкіна, М.М. Одновол ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2025. – 148 с.

Укладачі:
Л.С. Коряшкіна, д-р техн. наук, доц.;
М.М. Одновол.

Затверджено науково-методичною комісією зі спеціальності F4 Системний аналіз та наука про дані (протокол № 3 від 07.05.2025) за поданням кафедри системного аналізу та управління (протокол № 7 від 07.05.2025).

Наведено матеріал лекційних занять відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалаврів зі спеціальності 124 Системний аналіз.

Орієнтовано на активізацію навчальної діяльності здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 124 Системний аналіз та закріплення практичних навичок у засвоєнні дисципліни «Математична економіка».

Відповідальний за випуск завідувач кафедри системного аналізу та управління Т.А. Желдак, канд. техн. наук, доц.

ЗМІСТ

ВСТУП

Математична економіка є сферою наукової діяльності, теоретичної та прикладної, яка вивчає економічні об'єкти, процеси та явища за допомогою методів інтегрального та диференціального числення, матричної алгебри, диференціальних рівнянь, оптимізації. Мовою математики аналітики формулюють та перевіряють змістовні гіпотези про складні виробничі і логістичні процеси.

Дисципліна «Математична економіка» є однією з основних компонент освітньо-професійної програми вищої освіти «Системний аналіз» першого (бакалаврського) рівня, акцент якої спрямований на використання методів системного аналізу, математичного моделювання, оптимізації і прогнозування для прийняття рішень, здатність критично оцінювати умови і ризики функціонування систем різної природи для забезпечення їх сталого розвитку. Вивчення дисципліни дозволяє оволодіти засобами обґрунтування економічних рішень та оцінювання їх можливих наслідків.

Для аналізу фінансово-економічних ринків сьогодні все активніше використовуються методи та моделі фундаментальних наук у поєднанні з сучасними досягненнями в галузі інформаційних технологій та досить ємними базами даних (мільйони записів навіть в базах некомерційного призначення). Це забезпечує значний прогрес у розумінні та квантифікації природи економічних систем.

Метою дисципліни є формування у студентів систематичних знань з основ теорії моделювання, сучасної методології побудови економіко-математичних моделей для проведення системного аналізу соціально-економічних систем, явищ та процесів на мікро- та макроекономічному рівнях.

В межах дисципліни розглядаються моделі економіки, що базуються на аксіомах, висновки з яких виводяться за допомогою методів дедукції. Теоретичну основу дисципліни складають математичний апарат, економіко-математичні моделі, сучасні концепції та парадигми, які визначають підходи до вивчення характеристик економічних систем. Дисципліна базується на знаннях, одержаних при вивченні дисциплін математичного циклу, диференціальних рівнянь, основ теорії систем та системного аналізу.

Завдання дисципліни – оволодіння теоретичними знаннями та інструментарієм моделювання економічних процесів вивчення підходів до дослідження й аналізу, методів моделювання складних економічних систем, методів прогнозування їхнього розвитку, управління розвитком та функціонуванням економічних систем у різних умовах.

Предметом є сукупність теоретичних, методичних і практичних питань щодо використання неперервних та дискретних економіко-математичних моделей для аналізу поведінки динамічних траєкторій економічного розвитку, пояснення моделей соціально-економічних явищ з погляду фундаментальних принципів і знань.

В ході опанування дисципліною «Математична економіка» у здобувачів формуються загальні та фахові компетентності:

– здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;

– здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;

– здатність до адаптації та дії в новій ситуації;

– здатність зберігати та приумножувати моральні, культурні, наукові цінності і досягнення суспільства на основі розуміння історії та закономірностей розвитку предметної області, її місця у загальній системі знань про природу і суспільство та розвитку суспільства, техніки і технологій, використовувати різні види та форми рухової активності для активного відпочинку та ведення здорового способу життя;

– здатність формулювати задачі оптимізації при проектуванні систем управління та прийняття рішень, а саме: математичні моделі, критерії оптимальності, обмеження, цілі управління; обирати раціональні методи та алгоритми розв’язання задач оптимізації та оптимального керування;

– здатність організовувати роботу з аналізу та проектування складних систем, створення відповідних інформаційних технологій та програмного забезпечення;

– здатність формулювати та досліджувати математичні моделі природних, техногенних, економічних і соціальних об’єктів та процесів.

Програмні результати навчання після засвоєння дисципліни спрямовані на набуття ряду знань, умінь і навичок вирішення складних спеціалізованих задач та практичних проблем економічної сфери фахівцями-аналітиками:

– знати основи теорії оптимізації, оптимального керування, теорії прийняття рішень, вміти застосовувати їх на практиці для розв’язування прикладних задач управління і проектування складних систем

– Знати основи математичного моделювання, вміти будувати та досліджувати математичні моделі природних, техногенних, економічних і соціальних об’єктів та процесів.

Основою для вивчення дисципліни «Математична економіка» є оволодіння студентами дисциплінами «Математичний аналіз», «Алгебра та геометрія» «Диференціальні рівняння», «Методи оптимізації та дослідження операцій».

РОЗДІЛ І. ВСТУП ДО ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИЧНА ЕКОНОМІКА».
Лекція 1

Мета: визначити предмет та задачі математичної економіки, надати характеристику її становлення як науки.

План
1. Предмет та задачі математичної економіки.
2. Сутність та призначення економіко-математичного моделювання.
3. Системний підхід до моделювання економічних об'єктів та процесів.

Ключові терміни та поняття: математична економіка, модель, економіко-математична модель, детермінована модель, стохастична модель, оптимізаційна модель, адекватність моделі, системний підхід, принципи системного підходу, емереджентність, синергія, соціально-економічна система

1.1 Предмет та задачі математичної економіки

У економіці діють стійкі кількісні закономірності, тому є можливим їх строге математичне описання. **Об'єктом дослідження** математичної економіки є різноманітні економічні системи. **Предмет математичної економіки** – математичні моделі реальних економічних об'єктів. **Основні її методи** – це економіко-математичне моделювання та системний аналіз економіки як складної динамічної системи.

Моделювання – це універсальний спосіб вивчення процесів та явищ реального світу. Особливе значення моделювання має при вивченні об'єктів, повністю чи частково недоступних для прямого спостереження та дослідження. Такими об'єктами є, зокрема, соціально-економічні явища та процеси. Задачами управління економічними системами, в яких ефективно застосовують математичні методи та моделі, є задачі аналізу результатів господарської діяльності, прогнозування, планування, проектування виробництва та підготовки управлінських рішень.

Модель – це об'єкт, який у дослідженні заміняє оригінал, відтворює найбільш важливі для даного дослідження риси та властивості оригіналу. Математична модель є сукупністю математичних співвідношень, здебільшого рівнянь та нерівностей.

Сучасна економічна теорія на мікро- та макрорівні досліджує математичні моделі економічних процесів та систем. Використання математики у економіці дозволяє виділити та описати найважливіші зв'язки між складовими цих складних об'єктів. Вивчення економічних систем передбачає високий рівень узагальнення за допомогою математичного апарату, який передбачає чітке формулювання висновків, адекватних об'єктам дослідження, на основі вихідних даних та співвідношень.

Використання математичних та статистичних методів дозволяє індуктивним методом отримувати нові знання про об'єкт дослідження, оцінувати форму та параметри залежності його змінних, що відповідають наявним спостереженням.

Відтак, використання мови математики дозволяє формалізовано викладати положення економічної теорії, формулювати її поняття та висновки.

Будь-яке економічне дослідження завжди передбачає об'єднання економічної теорії (наявних економічних моделей) та практики (статистичних даних). Дослідники використовують теоретичні економічні моделі для описання та пояснення процесів, що спостерігаються, а також збирають статистичні дані. На їх основі здійснюють емпіричну побудову математичних моделей, що кількісно відображають та обґрунтовують сутність економічних моделей (гіпотез).

Для вивчення різних економічних явищ фахівці з економіки використовують їх спрощені формальні описання, тобто економічні моделі. Прикладами економічних моделей є моделі споживчого вибору, моделі фірми, моделі економічного зростання, моделі рівноваги для товарних та фінансових ринків та інші концептуальні моделі економічних процесів, що є основою для побудови їх математичних моделей. У процесі побудови економічної моделі визначають суттєві фактори, що визначають поведінку об'єкта дослідження та відкидають несуттєві елементи для розв'язання поставлених проблем. Формалізація основних особливостей функціонування економічних об'єктів дозволяє оцінити можливі наслідки певного впливу на них та використати ці оцінки в керуванні цими об'єктами.

Математичну економіку визначають як розділ економічної науки, що займається аналізом властивостей та розв'язків математичних моделей економічних процесів. У деяких випадках ці моделі розглядаються як частина математичної теорії на стику з економічною наукою.

Основу для побудови математичних моделей, які вивчає математична економіка, створює **економетрика,** що займається статистичною оцінкою та аналізом зв'язків між економічними величинами на основі вивчення емпіричних даних. Економетрика досліджує кількісні закономірності та взаємозв'язки у економіці за допомогою методів математичної статистики, зокрема, кореляційно-регресійного аналізу.

У математичній економіці досліджуються теоретичні моделі, що ґрунтуються на певних формальних передумовах (лінійність, опуклість, монотонність, конкретні форми взаємозв'язку тощо). Математична економіка не займається вивченням рівня обґрунтованості вигляду певної залежності, це завдання економетрики.

Задачею математичної економіки є вивчення питання про існування розв’язку математичної моделі, умови його невід’ємності, стаціонарності, наявності інших властивостей. Це здійснюється, як і у математиці, шляхом дедуктивного отримання наслідків у вигляді теорем з апріорно зроблених передумов (аксіом).

Методологія та апарат сучасної економічної науки не вичерпуються підходами математичної економіки та економетрики, звичайно в економічних дослідженнях використовуються також методи якісного аналізу, індуктивні евристичні підходи, що поєднуються з методами математичної економіки та економетрики.

Отже, математична економіка є одночасно і самостійним розділом економічної науки, і її інструментом. При цьому розділи математичної економіки, все в більшій мірі становляться теоретичною основою для прикладних досліджень.

1.2 Сутність та призначення економіко-математичного моделювання

Економіко-математична модель – це математичний опис економічного об’єкту чи процесу з метою дослідження та керування. У співвідношеннях, що утворюють математичну модель, зокрема економіко-математичну модель, розрізняють два типи змінних: екзогенні та ендогенні. **Екзогенні змінні** визначаються поза моделлю, а **ендогенні змінні** визначають у ході розрахунків за моделлю.

Математичні моделі різних об’єктів можуть мати однакову математичну структуру, але різні змістовні інтерпретації, тобто одну й ту саму математичну модель можна використати для дослідження різних об’єктів. Поряд з експериментом, математичне моделювання є основним способом дослідження.

Активне застосування математичного моделювання у математичній економіці обумовлене наступними причинами:

– неможливість здійснення експериментів у більшості випадках;

– значні витрати на проведення експериментів;

– ускладнення типів задач, що розв’язуються у ході досліджень;

– скорочення термінів дослідження та отримання результатів;

– можливість багаторазового повторення дослідження на математичній моделі.

З точки зору зміни стану системи у часі розрізняють *динамічні* та *статичні* моделі. У статичних моделях розглядають стан системи у конкретний момент часу і змінні характеристики моделі не залежать від часу. В динамічних моделях вони є функціями часу.

З точки зору врахування випадкових факторів розрізняють детерміновані та стохастичні моделі. *Детерміновані* моделі передбачають наявність жорстких функціональних зв’язків між змінними моделі. *Стохастичні* моделі допускають наявність дії випадкових факторів на систему – об’єкт дослідження. Вони використовують для моделювання системи апарат теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів.

За виглядом співвідношень між змінними розрізняють *лінійні* та *нелінійні* моделі. *Оптимізаційні* моделі передбачають побудову цільової функції, що відображає результати функціонування системи та подальше дослідження її на екстремум з врахуванням обмежень на систему.

За методами аналізу моделі розрізняють моделі, що досліджуються аналітично та за допомогою чисельних методів. Результатом аналітичного дослідження є отримання формул, що задають шукані величини у явному вигляді, тут можуть бути також отримані висновки про стійкість розв’язку, наявність у нього особливих точок, його асимптотику тощо. У більшості реальних випадків математичну модель неможливо звести до вигляду, для якого можливо отримати аналітичний розв’язок за умови збереження адекватності моделі. Тому для дослідження моделі використовують чисельні методи. Проблемами при використанні чисельного аналізу можуть бути некоректність або нестійкість побудованої математичної моделі. У некоректно поставленої задачі відсутній єдиний розв’язок (його немає або розв’язків декілька).

Нестійкість моделі означає, що малі похибки у визначенні її вихідних даних спричиняють великі відхилення у отриманих результатах. У таких випадках застосування чисельних методів здебільшого не має сенсу.

До основних властивостей математичних моделей відносять їх скінченність, спрощеність, наближеність, повноту, адекватність та істинність.

Скінченність моделі означає, що вона відображає лише деякі з характеристик, притаманних оригіналу. Вона обумовлена обмеженістю часу, потрібного для розробки та аналізу моделі. Спрощеність моделі означає, що при її побудові були відкинуті характеристики оригіналу, несуттєві для дослідника.

Наближеність означає, що модель лише наближено відображає характеристики системи та співвідношення у ній. Типовими прикладами наближень, що використовуються при математичному моделюванні, є заміна дискретних систем неперервними та навпаки, заміна нелінійної залежності лінійною, установлення обмежень на точність обчислення результатів тощо. З скінченності та наближеності моделі випливає, що вона неповно відображає оригінал. Ступінь повноти моделі залежить від мети та задач моделювання.

Адекватність моделі характеризує можливість реалізації мети моделювання, а її істинність визначається відповідністю моделі існуючим знанням про об’єкт моделювання. Критеріями адекватності є відображення всіх суттєвих властивостей об’єкта дослідження, вірне відтворення існуючих взаємозв’язків між окремими елементами складної системи. При кількісному дослідженні показником адекватності моделі є величина відхилення результатів моделювання від існуючих емпіричних даних.

Істинність моделі не є гарантією її адекватності, що обумовлюється накопиченням обчислювальних похибок при розрахунках по моделі. З іншого боку, адекватними можуть бути моделі, що не є істинними. Прикладом є регресійні моделі для прогнозування поведінки системи, що досліджується, у деякому діапазоні зміни вхідних параметрів, не відображаючи при цьому відомі дані щодо структури системи та взаємозв'язків між її елементами.

1.3. Системний підхід у математичній економіці

Системний підхід – це методологія дослідження об'єкта та побудови його математичної моделі, коли об'єкт розглядається як цілісний комплекс взаємопов'язаних компонентів, що має єдність з зовнішнім середовищем – підсистемою вищого порядку по відношенню до об'єкту моделювання.

Єдність економічної системи з її зовнішнім середовищем визначається дією об'єктивних економічних законів.

При моделюванні об'єктів та подання їх у вигляді системи необхідно враховувати наступні властивостей систем:

1) цілісність – стійкі відношення між елементами системи, коли стан будь-якого її елементу залежить від стану систему і навпаки;

2) подільність – систему як цілісну можна зобразити об'єктом, поділеним на окремі елементи;

3) ізольованість – комплекс об'єктів, що утворюють систему, та зв'язки між ними можна виділити з їх оточення і розглядати ізольовано (ізольованість системи є відносною, оскільки відкрита система пов'язана з середовищем через деякі елементи, що є входами та виходами);

4) стійкість – система повинна нормально функціонувати за наявності зовнішніх впливів;

5) різноманіття – кожний елемент системи має власну поведінку та стан, відмінний від поведінки та стану інших елементів та системи як цілісності;

6) ідентифікованість – кожен елемент системи можна відрізнити від інших її складових;

7) стабілізація – система може здійснювати відновлення своїх елементів;

8) спостережуваність – всі входи та виходи можна спостерігати дослідниками;

9) адаптивність – система зберігає стан рухомої рівноваги зі своїм зовнішнім середовищем та стійкість до зовнішніх збурень.

Системний підхід до моделювання економічних об'єктів ґрунтується на принципах інтегратизму, невизначеності, інваріантності та принцип головних видів діяльності.

Принцип інтегратизму полягає в тому, що взаємовідносини частини та цілого характеризуються трьома елементами:

1) виникнення взаємодії та зв'язків між елементами системи як частинами цілого;

2) втратою деяких властивостей частини при входження до складу цілого;

3) появі нових властивостей у цілого, обумовлених властивостей окремих складових частин.

При цьому обов'язковою є впорядкованість частин системи, детермінованість їх просторових та функціональних взаємовідношень, коли частина становиться компонентом інтегрального цілого.

Принцип невизначеності полягає, що на початку та в кінці економічні процеси є значною мірою невизначеними. У часі вони постійно змінюються, тому, якщо вдається з'ясувати деяку властивість процесу, то вона є істинною лише у цей момент часу і у даній ситуації. Економічні процеси потрібно розглядати з урахуванням дії випадкових факторів. Принцип невизначеності стверджує, що існує рівень факторів, коли їх малі відхилення ведуть до зміни стану системи. Чим складніша модель системи, тим більш невизначеними є результати, отримані внаслідок її дослідження.

Принцип інваріантності полягає у тому, що модель системи повинна бути інваріантною для будь-яких організаційних форм її діяльності і їх зміна не повинна змінювати сутність моделі. Принцип головних видів діяльності полягає у тому, що у різних систем існують стандартні однотипні види діяльності.

При побудові економіко-математичної моделі потрібно враховувати такі особливості моделювання економічних систем: зростання кількості міждисциплінарних проблем, комплексність проблем та необхідність їх вирішення з врахуванням єдності економічних, соціальних, психологічних та технічних аспектів, ускладнення економічних об'єктів, зростанням кількості зв'язків між елементами у системі, динамічність економічних процесів, можливості застосування сучасних інформаційних технологій.

Система – це сукупність взаємопов'язаних елементів, що спільно діє для досягнення певних цілей. *Підсистемою* називають підмножину елементів системи, що діють для досягнення певних цілей, узгоджених з цілями системи. *Надсистема* – це зовнішнє середовище, у якому функціонує система.

Основною метою економіки є забезпечення суспільства предметами споживання, у тому числі й ті, що створюють умови для безпеки суспільства. Економіка складається з елементів – одиниць господарювання (підприємств, домашніх господарств). Надсистемою національної економіки є природа, світова економіка та суспільство, її основні підсистеми – виробнича, фінансово-кредитна та сфера обміну.

Економіка як об'єкт моделювання має наступні дві основні особливості. По-перше, при моделювання економіки неможливо використовувати моделі подібності, тобто побудувати її зменшені копії і над ними проводити дослідження. По-друге, у економіці значною мірою обмежені можливості локальних економічних експериментів, оскільки всі її частини взаємопов'язані, тому експеримент над однією з них у «чистому» вигляді неможливий. Прямі експерименти з економікою мають як позитивний, так і негативний аспект. Позитивний аспект полягає в тому, що одразу помітні короткотермінові результати економічної політики, що здійснюється. Негативна сторона експериментів над економікою пов'язана з тим, що неможливо передбачити середньо- та довготермінові наслідки рішень, прийнятих у ході експерименту.

Реальні економічні об'єкти є досить складними, тому для їх вивчення створюють їхні моделі. Останні не повинні дуже складними, тобто вони спрощують реальний об'єкт. При цьому вони повинні відображати найважливіші для дослідження риси реального об'єкта. Спочатку будується концептуальна модель розвитку економічної системи чи її підсистеми, що ґрунтується на аналізі минулого досвіду. Концептуальні економічні моделі складають фундамент для побудови математичних моделей.

Розглянемо *структуру економіки* як об'єкта математичного моделювання. При виконанні своєї основної функції економічна система виконує наступні дії: розміщує ресурси, виробляє продукцію та надає послуги, розподіляє предмети споживання та здійснює накопичення. Вона використовує трудові та природні ресурси, у ній здійснюється виробництво товарів та надання послуг, які у сукупності утворюють валовий внутрішній продукт, потім здійснюється його розподіл та споживання.

Економічна система, в свою чергу, є підсистемою людського суспільства. Вона є складною системою, що складається з виробничих та невиробничих одиниць, що знаходяться між собою у виробничо-технологічних та організаційно-господарських зв'язках. По відношенню до економічної системи кожний член суспільства виступає у двох ролях: з одного боку, він є працівник, з іншого, – споживач.

У виробничому процесі, крім природних та трудових ресурсів, задіяні засоби виробництва. Засоби виробництва поділяють на засоби праці та предмети праці. Засоби праці беруть участь у кількох виробничих циклах до їх заміни внаслідок їхнього фізичного чи морального зносу. Предмети праці (сировина, матеріали) беруть участь у одному виробничому циклі. накопичені засоби виробництва складають виробничі фонди. Вони складаються з основних виробничих фондів (накоплених засобів виробництва) та основних оборотних фондів (накоплених предметів праці).

Основні виробничі фонди на протязі довгого періоду часу обслуговують виробничий процес, зберігаючи при цьому свою натуральну форму і частково в процесі зносу приймають участь у створенні вартості виробленого продукту.

Відновлення основних виробничих фондів здійснюється за рахунок амортизаційних відрахувань, збільшення основних виробничих фондів – за рахунок капітальних вкладень у вигляді інвестицій. Оборотні фонди складаються з предметів праці, що знаходяться у виробництві. Сюди включають предмети праці, що входять у незавершену продукцію та виробничі запаси. Внаслідок діяльності національної економіки за рік всі галузі матеріального виробництва створюють валовий внутрішній продукт (ВВП). У натурально-речовій формі ВВП розпадається на засоби праці та предмети споживання, у вартісній формі – на амортизаційний фонд (фонд заміщення вибуття основних фондів) та нову створену вартість (національний доход).

У процесі створення ВВП виробнича підсистема економіки виробляє та знову споживає проміжний продукт, тобто предмети праці, використання для поточного виробничого споживання, їх вартість повністю переходить у вартість предметів праці чи предметів споживання, що входять у ВВП. У якості розрахункового допоміжного показника часто застосують валове виробництво, що є сумарною вартістю ВВП та проміжного продукту.

Задачею виробничої підсистеми національної економіки є перетворення предметів праці у товари. Основна функція фінансово-кредитної підсистеми є регулювання фінансових потоків, щоб забезпечити стабільний та справедливий обмін товарів та послугами між елементами економічної системи.

Основою економічної системи є виробничі господарські одиниці (виробничі підприємства), що мають господарську самостійність. Кожна така виробнича одиниця має засоби праці, які дозволяють здійснювати один чи кілька виробничих процесів. У курсі математичної економіки об’єктом моделювання є як економіка в цілому, так і її окремі господарські одиниці.

Отже, під системою розуміють сукупність взаємопов’язаних елементів. Соціально-економічні системи спрямовані на досягнення певної мети. Підсистема – це частина системи, що реалізує певну мету, узгоджену з метою системи. Надсистема – це зовнішнє середовище, у якому функціонує система. Будь-яка система має властивості *емереджентності*, тобто наявні системні властивості, що не притаманні їх складовим елементам.

Економічна система – це сукупність господарських одиниць (галузей, підприємств чи підрозділів підприємства), що знаходяться у виробничо-технологічних та організаційно-господарських зв’язках. Будь-яка система, що спрямована на досягнення певної мети, складається з органу керування та об’єкту керування.

У своїй діяльності системи та їх елементи перетворюють входи на виходи. Для економічними системами *входи* є ресурси, а *виходи* – результати їх діяльність, наприклад, товар чи послуги. Елементи, з яких складаються системи, можуть бути статичними чи динамічними. Відповідно розрізняють статичні та динамічні моделі економічних систем та їх елементів.

Статична модель система передбачає миттєве перетворення входу x у вихід $F(x)$. Статична модель систему розглядає як «чорну скриню», внутрішня структура якої у дослідженні не враховується, а предметом дослідження є перетворення входів у виходи. Для такої моделі час t однаковий для входу та виходу. *Динамічна модель* системи чи її елемента характеризується тим, що вихід системи у момент часу t залежить не лише від значень входів у нинішній момент часу t, але й від значень входів та виходів у попередні моменти часу. У динамічній системі та відповідній моделі причина переходить у наслідок не миттєво, а з деяким запізненням. Модель є динамічною, якщо у її складі є змінні, які змінюються з часом.

Розрізняють динамічні економічні моделі з дискретним та неперервним часом. У багатьох секторах економіки господарський цикл триває рік, тому підсумки господарської діяльності підбивають за рік, тобто змінна часу розглядається як дискретна величина, що змінюється з кроком у рік. Крок зміни часу може бути і іншим проміжком часу (місяць, квартал, тощо). Динамічні моделі з дискретним часом подають звичайно у вигляді скінченно-різницевих рівнянь, наприклад, $Y_{t+1} = Y_{t-1} + 2Y_t$, де Y_t – значення економічного показника Y в момент часу t. При дослідженнях багатьох економічних процесів, наприклад, короткотермінових перехідних процесів доцільно розглядати економічні показники як функції неперервного аргументу часу. Для побудови та дослідження динамічних моделей з неперервним часом використовують апарат диференціальних рівнянь.

Питання та завдання для самоконтролю до лекції 1

1. Поясніть, що є предметом та об'єктом дослідження математичної економіки.
2. Вкажіть об'єкт дослідження математичної економіки.
3. Поясніть призначення математичної економіки як науки.
4. Поясніть різницю між математичною економікою та економетрикою.
5. Поясніть зміст економіко-математичної моделі.
6. Надайте означення оптимізаційної моделі.
7. Поясніть призначення та необхідність математичних моделей в економічних дослідженнях.
8. Поясніть, яку математичну модель економічного об'єкта можна вважати ефективною.
9. Поясніть сутність системного підходу економічних досліджень.
10. Поясніть, чому підприємства є відкритими економічними системами.
11. Назвіть основні принципи, на яких ґрунтується системний підхід дослідження економічних процесів та поясніть ці принципи.

12. Наведіть приклади економічних систем.
13. Охарактеризуйте особливості національної економіки як об’єкта моделювання.
14. Назвіть основні підсистеми національної економіки та вкажіть їх функції.
15. Поясніть, у чому різниця між динамічними системами з неперервним та дискретним часом.

У наведених **тестових завданнях** вкажіть вірну відповідь.

1. Об’єктом дослідження математичної економіки є
   а) будь-які системи;
   б) економічні системи;
   в) математичні моделі економічних систем;
   г)закони економіки.
2. У статичних моделях змінні моделі
   а) залежать від часу;
   б) залежать від суб’єкта керування;
   в) не залежать від часу;
   г) не залежать від зовнішнього середовища.
3. Стохастичні моделі допускають
   а) наявність жорстких функціональних зв’язків між змінними моделями;
   б) відсутність керування;
   в) врахування дії випадкових факторів;
   г) адаптивність до зовнішнього середовища.
4. Детерміновані моделі допускають
   а) наявність жорстких функціональних зв’язків між змінними моделями;
   б) відсутність керування;
   в) врахування дії випадкових факторів;
   г) адаптивність до зовнішнього середовища.
5. При прогнозуванні економічних процесів неможливо використовувати
   а) математичні моделі;
   б) моделі подібності;
   в) статистичні дані;
   г) сучасні інформаційні технології.
6. Під системою розуміють
   а) будь-яку непусту множину;
   б) множину взаємопов’язаних елементів;
   в) відкриту множину;
   г)замкнену множину.
7. Властивість системи передбачає
   а) її замкненість;
   б)збереження стану рухомої рівноваги з її зовнішнім середовищем;
   в) досягнення її мети;

г) ізольованості системи.

8. Показником, що кількісно характеризує діяльність національної економіки є
   а) прибуток;
   б) рівень інновації;
   в) валовий внутрішній продукт;
   г) середня заробітна платня.
9. Властивість системи, що полягає у тому, що вона має властивості, не притаманні окремим її складових, називають
   а) динамічність;
   б) емереджентність;
   в) адаптивність;
   г) відкритість.
10. Динамічні системи з дискретним часом моделюються з допомогою
    а) різницевих рівнянь;
    б) диференціальних рівнянь;
    в) інтегральних рівнянь;
    г) нелінійних рівнянь.
11. Динамічні системи з неперервним часом моделюються з допомогою
    а) різницевих рівнянь;
    б) диференціальних рівнянь;
    в) інтегральних рівнянь;
    г) нелінійних рівнянь.

РОЗДІЛ ІІ. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЕКОНОМІКИ.
Лекції 2 – 3

Мета: ознайомити або нагадати основні відомості з теорії оптимізації, математичного аналізу, вищої алгебри та аналітичної геометрії, на яких базується математична економіка.

План

1. Постановка задачі нелінійної оптимізації. Основні поняття.
2. Графічний метод розв'язання задач оптимізації функції двох змінних.
3. Умови існування розв'язків задачі нелінійної оптимізації.
4. Локальний екстремум функції кількох змінних.
5. Пошук екстремуму цільової функції на межі області. Умовний екстремум.
6. Схема рішення задачі нелінійної оптимізації.
7. Елементи опуклого аналізу.
8. Необхідні і достатні умови оптимальності. Умови Куна-Таккера.

Ключові терміни та поняття: нелінійна оптимізація, графічний метод, локальний екстремум, глобальний екстремум, безумовна оптимізація, умовний екстремум, опукла функція, критерій оптимальності, умови Куна-Таккера.

2.1 Постановка задачі нелінійної оптимізації. Поняття множини допустимих розв'язків, оптимального розв'язку задачі

Постановка задачі: серед усіх точок n-мірного простору R^n:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n,$$

що задовольняють системі обмежень

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ \dots, \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

знайти ті, в яких цільова функція

$$u = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(\bar{x})$$

досягає свого оптимального (максимального чи мінімального) значення

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max\ (min)$$

і визначити це значення.

Зауваження 1. Задача буде задачею нелінійної оптимізації, якщо цільова функція або хоча б одна з функцій в системі обмежень є нелінійною.

Зауваження 2. Знаки нерівностей в системі (2.1) завжди можна змінити на протилежні, помноживши обидві частини нерівності на (-1).

Зауваження 3. Частина нерівностей в системі (2.1) може бути записаною у вигляді рівностей або строгих нерівностей.

Точки, які задовольняють систему обмежень, називають допустимими розв'язками задачі нелінійного програмування. Вони утворюють *множину допустимих розв'язків* (МДР). Допустимий розв'язок, якому відповідає екстремальне значення цільової функції, називають *оптимальним для* задачі нелінійного програмування і позначають x_{opt}.

Отже, система обмежень (2.1) визначає деяку область $D \subseteq R^n$, яка є множиною допустимих розв'язків задачі оптимізації.

Якщо всі нерівності в системі (2.1) зробити строгими, то ми отримаємо систему обмежень, що описує всі внутрішні точки області D:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0, \\ \dots, \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0, \\ x_1, x_2, \dots, x_n > 0. \end{cases}$$

Кожна рівність виду $\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ описує точки, що належать k-й межі області $\boldsymbol{D}$.

Рівняння виду $x_k = 0$ описує відповідну координатну пряму або координатну площину (гіперплощину), яка (можливо) служить також однією з меж області $\boldsymbol{D}$.

Будь-який набір рівностей

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots, \\ \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

описує точки перетину відповідних меж області $\boldsymbol{D}$.

Приклад 2.1. Область $\boldsymbol{D}$ визначається системою обмежень

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 9, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Зобразити графічно множину точок $\boldsymbol{D}$.

Розв'язання. Межами області є коло

$$x_1^2 + x_2^2 = 9,$$

пряма

$$x_1 + x_2 = 1$$

і відрізки координатних прямих

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

На рисунку 2.1 заштриховані внутрішні точки області, які розташовані всередині кола, вище похилої прямої і в першій чверті координатної площини, тобто в області невід'ємних змінних задачі. На рисунку також відзначені точки перетину меж.

Серед усіх точок області $\boldsymbol{D}$ ми розшукуємо ту, в якій цільова функція приймає оптимальне значення. Це завдання пошуку глобального екстремуму функції в даній області.

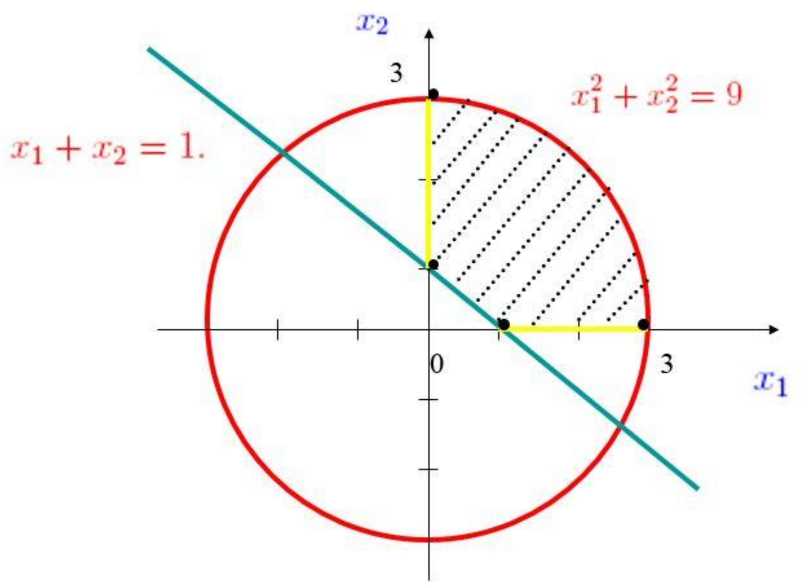

Рис. 2.1. Розв'язки системи нерівностей в прикладі 2.1

Зауваження 4. Множина $\boldsymbol{D}$ може виявитися порожньою, коли не існує перетину підмножин, що описуються певними нерівностями в системі (2.1)

2.2 Графічний метод розв'язання задач нелінійної оптимізації функції двох змінних

Розглянемо задачу пошуку екстремуму цільової функції

$$F(x_1, x_2) \to \max\ (\min)$$

при обмеженнях на змінні

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2) \geq 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2) \geq 0, \\ \cdots, \\ \varphi_m(x_1, x_2) \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Схема графічного розв'язання задачі є наступною:

1. Побудувати на площині множину допустимих рішень задачі $\boldsymbol{D}$, тобто множину точок, що задовольняють системі обмежень (2.2).

2. Побудувати декілька ліній рівня цільової функції: $F(x_1, x_2) = Const$, де *Const* – деякі дійсні значення.

3. Визначити напрямок зростання (зменшення) цільової функції.

4. Переміщуючи лінії рівня в напрямку зростання (зменшення) цільової функції, знайти точки з множині $\boldsymbol{D}$, в яких функція приймає найбільше (найменше) значення.

Приклад 2.2. Розв'язати задачі нелінійного програмування графічним методом, використовуючи набуті знання з математичного аналізу, алгебри та аналітичної геометрії.

$$F = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \to extr$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 9, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Область допустимих значень задачі побудована в попередньому прикладі.

Лінії рівня цільової функції задачі

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = C$$

визначені тільки для $C \geq 0$.

Якщо $C = 0$, то лінія рівня

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = 0$$

Вироджується в одну єдину точку з координатами

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 2.$$

У цій точці цільова функція досягає свого мінімального значення:

$$F_{min} = F(1,2) = 0.$$

При збільшенні значення C (при $C \to +\infty$) отримаємо відповідні лінії рівня – концентричні кола зростаючого радіусу $R = \sqrt{C}$. У всіх цих кіл загальний центр – вже згадана точка (1, 2). Зі збільшенням радіусу кола зростає значення цільової функції вздовж цього кола (рис.2.2).

З рис 2.2 видно, що коло найбільшого радіуса, що перетинається з областю допустимих значень задачі, проходить через точку перетину кола і осі абсцис:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 9, \\ x_2 = 0, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

В цій точці досягається максимальне значення цільової функції. Її координати дорівнюють

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = 0.$$

Максимальне значення цільової функції становить:

$$F_{max} = F(3,0) = (3-1)^2 + (0-2)^2 = 8.$$

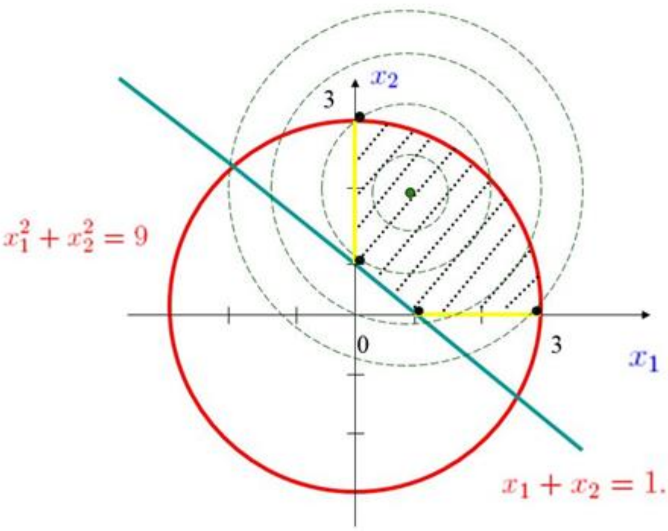

Рис 2.2. Ілюстрація до прикладу 2.2

Особливості задачі нелінійної оптимізації в порівнянні з завданням ЛП:

- Множина допустимих розв'язків задачі нелінійної оптимізації може не бути опуклою
- Ця множина може мати нескінченно багато кутових точок
- У разі нелінійної цільової функції екстремум цієї функції може досягатися не тільки на межі, але і всередині області допустимих значень.

2.3 Умови існування розв'язків задачі нелінійної оптимізації

Сформулюємо теорему Вейєрштрасса, яка гарантує існування розв'язку задачі нелінійної оптимізації у разі, коли область її допустимих рішень замкнена й обмежена.

Теорема 2.1 Нехай множина D є замкненою і обмеженою, а функція $u = F(x_1, \dots, x_n)$ має неперервні частинні похідні 1-ого порядку на цій множині. Тоді функція $F(\bar{x})$ досягає свого найбільшого (найменшого) значення на множині D, або на її межі, або у внутрішній точці, що є точкою її локального екстремуму.

Звідси випливає, що процес пошуку глобального екстремуму функції $F(x_1, \dots, x_n)$ на певній множині розпадається на два етапи: 1) пошук безумовного локального екстремуму функції у внутрішніх точках області; 2) пошук умовного екстремуму функції на межі області. Розглянемо їх окремо.

2.4 Локальний екстремум функції кількох змінних

Проведемо аналогію з функціями однієї змінної.

Нехай функція однієї змінної $y = f(x)$ має безперервні похідні першого і другого порядку в околиці деякої точки x_0.

Необхідною умовою локального екстремуму функції $f(x)$ є виконана рівність

$$f'(x_0) = 0,$$

тобто точка x_0 – стаціонарна точка.

Достатньою умовою локального екстремуму функції $f(x)$ є виконання в стаціонарній точці x_0 нерівності

$$f''(x_0) > 0. \tag{2.3}$$

Додатність другої похідної функції $f(x)$ визначає її строгу опуклість (вниз). А, отже, умова (2.3) гарантує досягання в стаціонарної точці мінімального значення функції у деякому околі цієї точки (рис. 2.3).

Виконання нерівності

$$f''(x_0) < 0$$

в стаціонарній точці x_0 забезпечує строгу опуклість вгору функції (увігнутість) в деякому околі цієї точки і гарантує існування в цій точці максимуму функції (рис. 2.3).

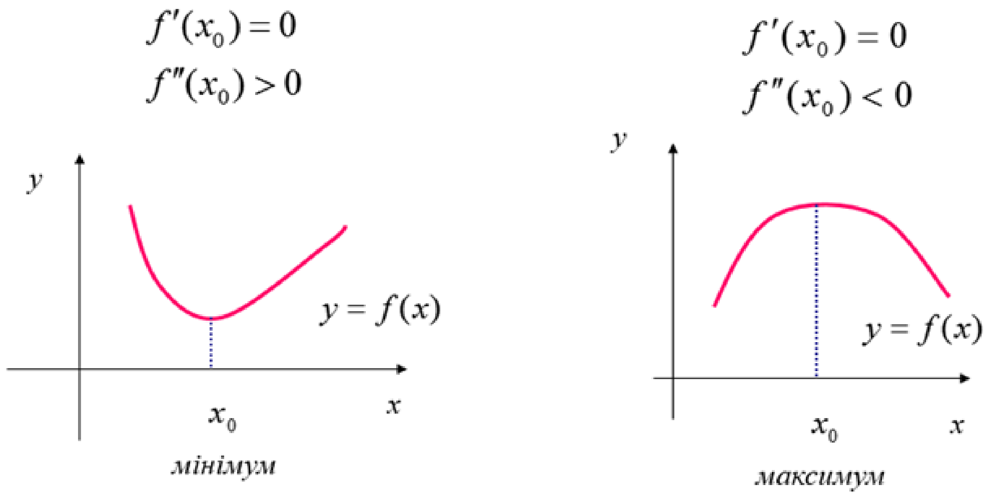

Рис. 2.3 Приклади опуклої і увігнутої функції в околі точок екстремуму

Розглянемо тепер функцію кількох змінних.

Визначення 2.1 Якщо для всіх точок $\bar{\boldsymbol{x}}$ з деякому околі точки

$$\bar{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \cdots \\ x_n^* \end{pmatrix} \in D(F),$$

виконано

$$F(\bar{x}^*) > F(\bar{x}) \qquad \text{або} \qquad F(\bar{x}^*) < F(\bar{x}),$$

то кажуть, що функція $F(\bar{x})$ має локальний екстремум в точці $\bar{x}^*$ (відповідно максимум або мінімум).

Будемо вважати, що функція $F(\bar{x})$ двічі диференційована у всіх точках околу точки $\bar{x}^*$, тобто має всі частинні похідні першого $\frac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{x})$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}(\bar{x})$, …, $\frac{\partial F}{\partial x_N}(\bar{x})$ та другого порядку $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x})$.

Теорема 2.2. Необхідна умова локального екстремуму: якщо в точці $\bar{x}^*$ функція $u = F(\bar{x})$ має локальний екстремум, то часткові похідні функції в цій точці дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0, i = 1,2, \dots, n.$$

Таким чином, для знаходження точок можливого екстремуму функції $u = F(\bar{x})$ необхідно вирішити систему рівнянь:

$$\begin{cases} F'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ F'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \quad\quad\quad\quad \dots \\ F'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Знайдену точку (точки) $\bar{x}^0$, в яких всі частинні похідні функції дорівнюють 0, будемо називати *стаціонарної точкою*. Не всі стаціонарні точки є точками екстремуму.

Теорема 2.3. Достатня умова локального екстремуму: у стаціонарній точці $\bar{x}^0$ функція $u = F(\bar{x})$ досягає свого максимуму, якщо є від'ємним значення її другого диференціала в цій точці, тобто

$$d^2F(\bar{x}^0) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} F''_{x_k x_j}(\bar{x}^0)dx_k dx_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k \partial x_j}(\bar{x}^0)dx_k dx_j < 0$$

і мінімум, якщо це значення

$$d^2F(\bar{x}^0) > 0$$

при будь-яких збільшеннях dx_k $і$ dx_j, і не обертаються в нуль одночасно.

Від'ємність другого диференціала функції в точці $\bar{x}^0$ гарантує, що в деякому її околі функція багатьох змінних строго опукла вгору (увігнута), а значить, має в цій точці локальний *максимум*. При цьому матрицю других частинних похідних (гессіан, матриця Гессе) функції

$$F''(\bar{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

називають *від'ємно визначеною*.

Додатність другого диференціала функції в точці $\bar{x}^0$ гарантує, що в деякому околі цієї точки функція багатьох змінних строго опукла вниз, а значить, має в цій точці локальний *мінімум*. Матриця других частинних похідних (гессіан) функції у такому випадку називається *додатно визначеною.* На рис. 2.4 зображені поверхні увігнутої і опуклої функцій двох змінних.

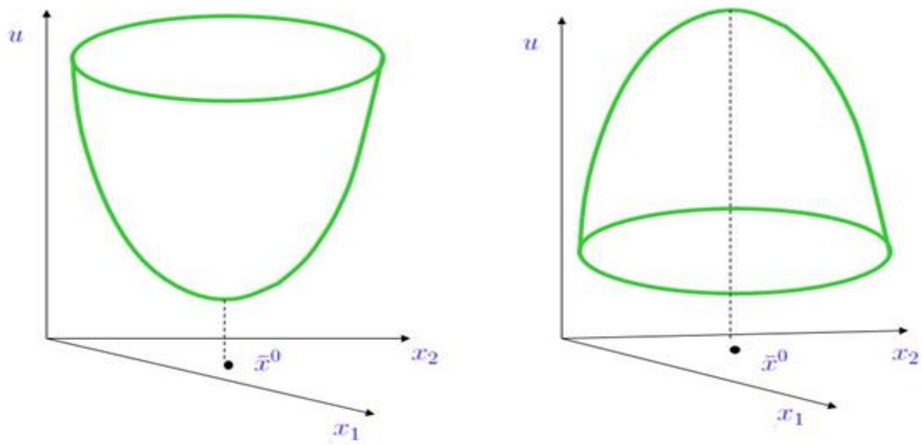

Рис. 2.4. Поверхні опуклої і увігнутої функцій

З курсу вищої алгебри відомо, що існує декілька простих способів, які дозволяють перевірити, чи є дана матриця (а разом з нею і відповідний другий диференціал) додатно визначеною, від'ємно визначеною, невизначеною і т.п. Всі способи перевірки застосовні, лише коли матриця є симетричною.

Справедливі наступні твердження (**критерій Сильвестра**):

1. Для того, щоб матриця була додатно визначеною ($Q > 0$), необхідно і достатньо, щоб її *послідовні головні мінори* були додатними, тобто

$$\boldsymbol{D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0},$$

$$\boldsymbol{D_1 = q_{11}},\ \ \boldsymbol{D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}},\ \dots,\ \ \boldsymbol{D_N = \begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}}.$$

2. Аби матриця була Q була невід'ємно визначеною ($Q \geq 0$), необхідно і достатньо, щоб всі її *головні мінори* були невід'ємними:

$$\begin{vmatrix} q_{i_1 i_1} & \cdots & q_{i_1 i_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{i_p i_1} & \cdots & q_{i_p i_p} \end{vmatrix} \geq 0,\ 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_p \leq n\ (p = 1, \ldots, n).$$

3. Аби встановити, що дана матриця є від'ємно визначеною (знаковід'ємною), слід помножити її на (-1) і перевірити отриману матрицю на додатну визначеність (знакододатність).

Або можна скористатися такими критеріями:

1) критерієм від'ємності матриці:

$$(-1)^p \cdot D_p > 0,\ \ p = 1, \ldots, n;$$

2) критерієм недодатності матриці:

$$(-1)^p \cdot \begin{vmatrix} q_{i_1 i_1} & \cdots & q_{i_1 i_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{i_p i_1} & \cdots & q_{i_p i_p} \end{vmatrix} \geq 0,\ \ p = 1, \ldots, n.$$

Отже, алгоритм методу розв'язання задачі безумовної багатовимірної оптимізації містить три кроки.

1. Виписати необхідні умови оптимальності

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\overline{x}) = 0, i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2.4)$$

2. Знайти всі стаціонарні точки функції. Для цього розв'язати систему рівнянь (2.4).

3. Серед критичних (стаціонарних) точок визначити точки мінімуму цільової функції, використовуючи достатні умови оптимальності другого порядку.

Приклад 2.3. Найпростіша задача – знайти екстремум функції двох змінних

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 + 5x_2.$$

Розв'язання. Знайдемо градієнт функції, а саме:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 6, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 + 5.$$

Знайдемо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 6 = 0, \\ 2x_2 + 5 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = -2,5. \end{cases}$$

Отже, $\hat{x} = (3;\ -2,5)$ – єдина стаціонарна точка.
Обчислюємо гессіан функції $f(x)$, тобто

$$\frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_2^2} = 2,$$

$$f''(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матриця $f''(\hat{x})$ є додатно визначеною, оскільки за критерієм Сільвестра $D_1 > 0$, $D_2 > 0$. Це означає, що точка $\hat{x} = (3;\ -2,5)$ є точкою глобального безумовного мінімуму функції.

2.5 Пошук екстремуму цільової функції на межі області. Умовний екстремум

Задача пошуку екстремуму цільової функції на межі області в загальному вигляді формулюється як задача на умовний екстремум: серед усіх точок n-мірного простору R^n

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n,$$

що задовольняють системі обмежень

$$\begin{cases} \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \quad \dots \\ \phi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

знайти ті, в яких цільова функція

$$u = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(\bar{x})$$

досягає свого оптимального (максимального чи мінімального) значення

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max\ (min) \tag{2.6}$$

і визначити це значення.

Приклад 2.4. Знайти екстремум функції двох змінних

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 + 5x_2$$

за умови

$$x_1 + x_2 - 1 = 0.$$

Зауваження 2.5 У сформульованій задачі (2.5), (2.6) будемо вважати, що $m < n$, оскільки у протилежному випадку система рівнянь може виявитися нерозв’язною, або такою, що має скінченну множину розв’язків, порівняти які з точки зору значень цільової функції не є проблемою. Умови невід'ємності змінних також розглядати не будемо. Перевірити, чи виконані ці умови для деякої знайденої точки, не складає труднощів.

Визначення 2.2 Кажуть, що в точці

$$\bar{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_n^* \end{pmatrix},$$

що задовольняє рівняннями зв'язку (2.5), функція $u = F(\bar{x})$ має умовний максимум (мінімум), якщо має місце нерівність

$$F(\bar{x}^*) > F(\bar{x}) \qquad \text{або} \qquad F(\bar{x}^*) < F(\bar{x}),$$

для всіх точок $\bar{x}$, координати яких задовольняють умовам зв'язку.

Розглянемо далі два методи пошуку умовного екстремуму.

1. Метод виключення невідомих

Умови зв'язку (2.5) є системою рівнянь (в загальному випадку нелінійних). Якщо цю систему вдається розв’язати, то можна виразити явно m змінних задачі через решту $(n - m)$ змінних:

$$\begin{cases} x_1 = q_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \\ x_2 = q_2(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \\ \qquad \dots \\ x_m = q_m(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n). \end{cases}$$

Підставимо знайдені вирази в цільову функцію, тим самим отримаємо функцію відносно $(n - m)$ змінних:

$$P(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) = F(q_1, q_2, \dots, q_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \to \max(\min).$$

Таким чином, зводимо задачу умовної оптимізації функції n змінних до задачі пошуку безумовного (локального) екстремуму нової функції P, яка залежить від $(n - m)$ змінних. Для розв’язання останньої використовується класичний метод, заснований на необхідних умовах оптимальності.

2. Метод множників Лагранжа

Якщо систему рівнянь зв'язку неможливо або складно розв'язати, задачу про знаходження умовного екстремуму функції $u = F(\bar{x})$ при обмеженнях (2.5) можна звести до знаходження локального екстремуму допоміжних функції – функції Лагранжа.

Складемо функцію Лагранжа

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = F(\bar{x}) + \lambda_1 \cdot \phi_1(\bar{x}) + \lambda_2 \cdot \phi_2(\bar{x}) + + \cdots + \lambda_m \cdot \phi_m(\bar{x}) =$$
$$= F(\bar{x}) + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \cdot \phi_s(\bar{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \cdot \phi_s(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Тут $\lambda_j -$ поки невідомі постійні множники (множники Лагранжа).

Знаходження стаціонарних точок функції L зводиться до розв'язання системи з $n + m$ рівнянь. Для того, щоб визначити числові значення множників Лагранжа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, до умов рівності нулю часткових похідних L додають умови зв'язку.

Будемо вважати, що функція $F(\bar{x})$ і функції $\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1,2, \dots, m$, є двічі диференційованими.

Зауважимо, що частинні похідні функції Лагранжа за змінними x_k мають вигляд:

$$L'_{x_k}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \frac{\partial L(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial x_k} = \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_k} + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \cdot \frac{\partial \phi_s(\bar{x})}{\partial x_k}.$$

Необхідні умови екстремуму функції Лагранжа

$$\begin{cases} L'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = 0, \\ L'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = 0, \\ \dots \\ L'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = 0, \\ \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ \phi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Розв'язком системи, якщо воно існує, будуть стаціонарні точки (точки) $\bar{x}^0$ функції L і відповідні їм значення множників Лагранжа $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$.

Достатні умови екстремуму функції Лагранжа. Для визначення типу екстремуму можна використовувати дослідження знаку другого диференціала d^2L в знайденої стаціонарної точці і при вже відомих $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$.

$$d^2L(\bar{x}^0) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L''_{x_k x_j}(\bar{x}^0) dx_k dx_j.$$

!! Збільшення змінних dx_k i dx_j тут вже не є незалежними, оскільки змінні повинні задовольняти умовами зв'язку.

Приклад 2.5. Не перевіряючи достатні умови, знайти можливі точки умовного екстремуму функції двох змінних

$$u = x_1^2 - x_2^2$$

за умови

$$2x_1 - x_2 - 3 = 0.$$

Функція Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 - x_2^2 + \lambda(2x_1 - x_2 - 3).$$

Необхідні умови екстремуму функції Лагранжа^

$$\begin{cases} L'_{x_1} = 2x_1 + 2\lambda = 0, \\ L'_{x_2} = -2x_2 - \lambda = 0, \\ L'_{\lambda} = 2x_1 - x_2 - 3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\lambda, \\ x_2 = -\dfrac{\lambda}{2}, \\ 2x_1 - x_2 = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\lambda, \\ x_2 = -\dfrac{\lambda}{2}, \\ 2\lambda + \lambda/2 = 3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 1, \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

2.6 Схема рішення задачі нелінійної оптимізації

Оскільки теорема Вейєрштрасса гарантує існування розв’язку задачі нелінійної оптимізації, то при вирішенні цього завдання можна обійтися без використання достатніх умов перебування локального і умовного екстремуму, діючи за такою схемою:

1. Перевіряємо чи задовольняє задача вимогам теореми Вейєрштрасса

- область допустимих значень D – замкнена і обмежена;
- цільова функція F має неперервні похідні в цій області;

2. Застосовуючи необхідні умови існування локального екстремуму, знаходимо точки можливого локального екстремуму цільової функції F;

3. Використовуючи метод виключення або метод Лагранжа (необхідні умови), знаходимо точки можливого екстремуму цільової функції F на кожній з меж області та точки їх перетинів.

4. Всі точки можливих екстремумів і точки перетину меж перевіряємо на приналежність до множини допустимої розв'язків D – їх координати повинні задовольняти системі обмежень задачі. Сторонні точки відкидаємо.

5. У кожній з решти точок обчислюємо значення цільової функції, порівнюємо їх і вибираємо оптимальне.

2.7 Елементи опуклого аналізу

У багатьох економічних завданнях нелінійної оптимізації цільові функції і функції з системи обмежень володіють одним дуже корисним властивістю-опуклістю. Наведемо відповідні визначення.

Визначення 2.3 Множина $M \subseteq R^n$ називається опуклою, якщо разом з будь-якими двома точками вона містить і відрізок, що з'єднує ці точки, тобто $\bar{x}, \bar{y} \in M$ і будь-якого числа

$$\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1$$

виконано

$$\alpha\bar{x} + (1 - \alpha)\bar{y} \in M.$$

Зауваження 2.6. Безліч точок простору R^n з невід'ємними компонентами (на якому зазвичай розглядаються економічні завдання) являє собою опуклу множину.

Визначення 2.4. Функція $F(\bar{x})$ задана на опуклій множині $M \subseteq R^n$, називається опуклою на цій множині, якщо для будь-яких двох точок $\bar{x}, \bar{y} \in M$ і будь-якого числа

$$\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1$$

виконана нерівність

$$F(\alpha\bar{x} + (1 - \alpha)\bar{y}) \leq \alpha F(\bar{x}) + (1 - \alpha)F(\bar{y}).$$

Якщо в останньому визначенні нерівність строга $<$, то функція називається строго опуклою. Якщо знак нерівності замінити на $\geq$, то отримаємо визначення увігнутою функції. У разі строгої нерівності $>$, функція буде строго ввігнутою.

Достатні умови опуклості функцій. Нехай функція $\boldsymbol{F}(\bar{x})$ має неперервні частинні похідні другого порядку на опуклій множині $M \subseteq R^n$.

1. $F(\bar{x})$ буде опуклою на M, якщо в будь-якій точці $\bar{x} \in M$ її другий диференціал $d^2F(\bar{x}) \geq 0$.

2. $F(\bar{x})$ буде строго опуклою на M, якщо в будь-якій точці $\bar{x} \in M$ її другий диференціал $d^2F(\bar{x}) > 0$.

3. $F(\bar{x})$ буде увігнутою на M, якщо в будь-якій точці $\bar{x} \in M$ її другий диференціал $d^2F(\bar{x}) \leq 0$.

4. $F(\bar{x})$ Буде строго ввігнутої на M, якщо в будь-якій точці $\bar{x} \in M$ її другий диференціал $d^2F(\bar{x}) < 0$.

Визначити, чи зберігає другий диференціал функції постійний знак, можна по знакам головного мінору матриці других похідних цієї функції.

Дослідження знаку другого диференціала за допомогою матриці Гессе

Нехай в точці $\bar{x}$ знайдені всі часткові похідні другого порядку функції $u = F(\bar{x})$, тобто всі елементи матриці Гессе

$$H = F''(\bar{x}) = \begin{pmatrix} F''_{x_1x_1}(\bar{x}) & F''_{x_1x_2}(\bar{x}) & \dots & F''_{x_1x_n}(\bar{x}) \\ F''_{x_1x_2}(\bar{x}) & F''_{x_2x_2}(\bar{x}) & \cdots & F''_{x_2x_n}(\bar{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F''_{x_kx_j}(\bar{x}) & F''_{x_2x_n}(\bar{x}) & \dots & F''_{x_nx_n}(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

і визначені значення головного мінору цієї матриці:

$$\Omega_1 = a_{11};\ \Omega_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \dots;$$

$$\Omega_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. Якщо усі головні мінори є додатними

$$\Omega_1 > 0, \Omega_2 > 0, \dots,\ \ \Omega_n > 0,$$

то $d^2F(\bar{x}) > 0$, і функція строго опукла в точці $\bar{x}$.

2. Якщо знаки головного мінору строго чергуються, починаючи з від'ємного

$$\Omega_1 < 0, \Omega_2 > 0,\ \Omega_3 < 0, \dots$$

то $d^2F(\bar{x}) < 0$, і функція строго увігнута в точці $\bar{x}$.

3. Якщо в послідовності головного мінору з пунктів 1 або 2 трапляються мінори, рівні 0, то $d^2F(\bar{x}) \geq 0$ або $d^2F(\bar{x}) \leq 0$ й функція, відповідно, опукла або увігнута в точці $\bar{x}$.

4. У разі будь-яких інших послідовностей знаків головного мінору можна гарантувати опуклості або угнутості функції в даній точці.

Відтак, можна визначати *опуклість* функцій в такий спосіб: якщо матриця Гессе функції додатно визначена, то функція опукла, якщо $\boldsymbol{H}$ від'ємно визначена, то функція є увігнутою.

Примітка. Під час перевірки матриці на невизначеність достатньо переконатися в тому, що принаймні два діагональні елементи мають різні знаки, приміром:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}.$$

На рис. 2.5 зображено лінії рівня деякої функції, яка має дві точки локального мінімуму і сідлову точку.

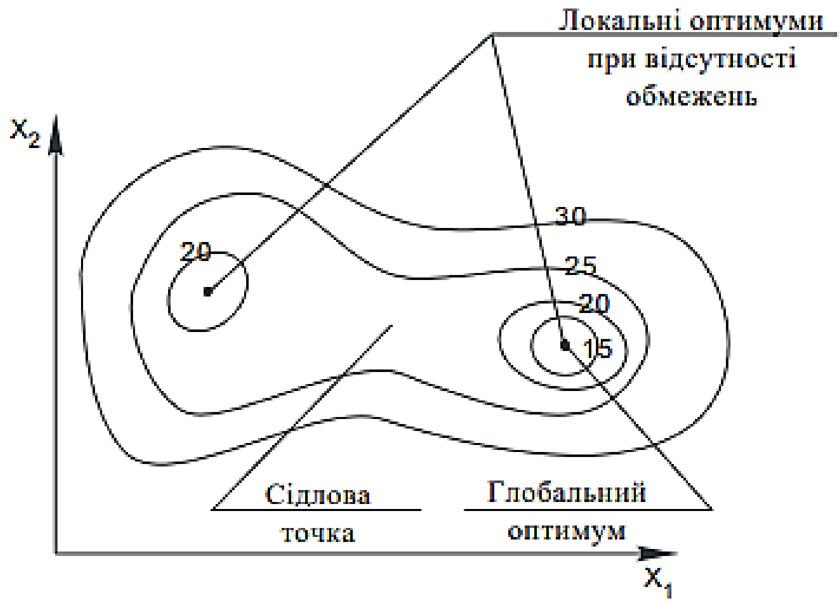

Рис. 2.5. Приклад функції двох змінних з декількома локальними оптимумами

Приклад 2.6. Дослідити опуклість функції

$$u = F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Розв'язання.

Матриця Гессе функції

$$u = F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

однакова в будь-якій точці і має вигляд

$$F''(x_1, x_2) = H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Її головних мінори додатні:

$\Omega_1 = 2 > 0$; $\Omega_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$,

що гарантує $d^2F(\bar{x}) > 0$ і, отже, опуклість функції в будь-якій точці простору.

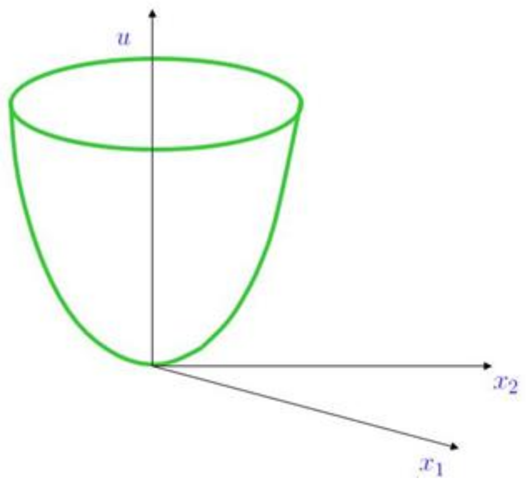

Рис. 2.6. Графічне зображення функції
з прикладу 2.6

Властивості опуклих функцій

1. Якщо $F(\bar{x})$ є (строго) опуклою функцією, то функція $-F(\bar{x})$ є (строго) увігнутою.

2. Функція $F(\bar{x}) = const$ і лінійна функція є одночасно і опуклими і увігнутими на всьому просторі.

3. Якщо функції $\phi_1(\bar{x}), \dots, \phi_m(\bar{x})$ є опуклими, то їх лінійні комбінації

$$\lambda_1\phi_1(\bar{x}) + \lambda_2\phi_2(\bar{x}) + \dots + \lambda_m\phi_m(\bar{x})$$

також представляють собою опуклу функцію при будь-яких дійсних значеннях

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0.$$

4. Якщо функції $\phi_1(\bar{x}), \dots, \phi_m(\bar{x})$ є опуклими на деякій опуклій множині, то множина розв’язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ \quad \dots \\ \phi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \end{cases}$$

або порожня, або є опуклою. Таким чином, область, яку задає система обмежень задачі нелінійної оптимізації, буде опуклою множиною, якщо всі функції з системи обмежень є опуклими.

5. Будь-який локальний мінімум опуклої функції (локальний максимум увігнутої функції) є одночасно і глобальним. На замкнутій обмеженій множині функція досягає цього мінімуму (максимуму). Для строго опуклої (строго ввігнутої) функції точка локального екстремуму буде єдиною, цей екстремум буде перебувати в стаціонарній точці функції.

Висновок

Нехай в задачі нелінійної оптимізації всі функції з системи обмежень $\phi_1(\bar{x}), \dots, \phi_m(\bar{x})$ є опуклими і задають непорожню обмежену множину $D \subseteq R^n$. Якщо цільова функція $F(\bar{x})$ є строго опуклою (строго ввігнутої) на цій множині, то задача пошуку оптимального рішення

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to min$$

для строго опуклою функції і

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to max$$

для строго ввігнутої функції має єдиний розв’язок, який досягається всередині області D, якщо остання включає стаціонарну точку цільової функції. Якщо стаціонарної точки всередині області немає, то розв’язок знаходиться на межі області D.

2.8 Необхідні умови екстремуму в задачі нелінійної оптимізації. Умови Куна-Таккера

Теорема Куна-Таккера, про яку піде мова далі, дозволяє об'єднати необхідні умови екстремуму цільової функції у внутрішніх і граничних точках області, яка визначається системою обмежень задачі нелінійної оптимізації.

Розглянемо задачу пошуку умовного максимуму цільової функції

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to max \tag{2.6}$$

при наступних обмеженнях на змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ \dots \\ \phi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$x_i \geq 0, 1 \leqslant i \leqslant n. \quad (2.8)$$

Зауваження 2.8 Тип екстремуму і вид нерівностей у наведеній задачі нелінійної оптимізації можна змінити, помноживши функцію $F(\bar{x})$ і нерівності в (2.7) на (–1).

Розглянемо спочатку задачу максимізації функції $F(\bar{x})$ за умови лише невід'ємності змінних (2.8). Нехай в точці $\bar{x}^*$ існує локальний максимум функції F. Якщо все $x_k^* > 0,$ то $\bar{x}^*$ то – внутрішня точка області R_+^n (конуса елементів з невід'ємними компонентами простору R^n). Тобто існує окіл цієї точки, що цілком належить R_+^n. Для внутрішньої точки локального екстремуму необхідні умови існування екстремуму відомі і стандартні:

$$F'_{x_k}(\bar{x}^*) = \frac{\partial F}{\partial x_k}(\bar{x}^*) = 0, k = 1,2, \dots, n.$$

Нехай тепер одна з координат точки локального екстремуму приймає нульове значення $x_k^* = 0$. В цьому випадку $\bar{x}^*$ – гранична точка області R_+^n, і необхідною умовою екстремуму в ній буде виконання нерівності

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(\bar{x}^*) \leq 0,$$

яка гарантує, що при зміні змінної x_k у сторону зростання (при інших фіксованих координатах) значення функції не зростає.

Отже, в точці локального екстремуму $\bar{x}^*$: $\forall\, k = 1,2, \dots, n$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(\bar{x}^*) \leq 0, \text{якщо } x_k^* = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(\bar{x}^*) = 0, \text{якщо } x_k^* > 0.$$

тому для будь-якого k:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(\bar{x}^*) \cdot x_k^* = 0.$$

Відтак, необхідні умови локального максимуму функції F за умов невід’ємності змінних можна переписати у вигляді:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(\bar{x}^*) \le 0, \qquad k = 1,2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(\bar{x}^*) \cdot x_k^* = 0, \qquad k = 1,2, \dots, n,$$

$$\cdot\, x_k^* \ge 0, \qquad k = 1,2, \dots, n.$$

Повернемося до загальної задачі нелінійної оптимізації (2.6) – (2.8).

Обмеження-нерівності перетворимо в обмеження-рівності, ввівши m фіктивних невід'ємних змінних $s_1, s_2, \dots, s_m$:

$$\begin{cases} s_1 = \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ s_2 = \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \qquad \dots \\ s_m = \phi_m(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

Позначимо

$$\bar{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_m \end{pmatrix} \in R^m,$$

Тепер завдання (2.6) – (2.8) запишеться у вигляді

$$u = F(\bar{x}) \to max,$$

$$\begin{cases} \phi_j(\bar{x}) - s_j = 0, \qquad j = 1,2, \dots, m, \\ \qquad x_k \ge 0, \;\; k = 1,2, \dots, n, \\ \qquad s_j \ge 0, \;\; j = 1,2, \dots, n. \end{cases}$$

Без умови невід'ємності змінних це звичайна задача на умовний максимум, яка вирішується шляхом відшукання максимуму функції Лагранжа (тут це буде функція вже від $(n + m)$ змінних):

$$L(\bar{x}, \bar{s}) = F(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{m} s_j \left(\phi_j(\bar{x}) - s_j\right).$$

З урахуванням умов невід'ємності змінних, для функції Лагранжа ми вирішуємо задачу виду:

$$L(\bar{x}, \bar{s}) = F(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{m} s_j \left(\phi_j(\bar{x}) - s_j\right) \to max$$

$$x_k \ge 0, \;\; k = 1,2, \dots, n,$$

$$s_j \geq 0, \quad j = 1,2,\dots,n,$$

для якої тільки що вивели необхідні умови існування локального екстремуму.

Нехай в точці $(\bar{x}^*, \bar{s}^*)$ функція Лагранжа має локальний максимум (з урахуванням невід'ємності змінних); $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*$ – множники Лагранжа, відповідні точці екстремуму. Запишемо необхідні умови екстремуму і додамо до них умови зв'язку, необхідні для обчислення множників Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\bar{x}^*, \bar{s}^*)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_i} + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^* \cdot \dfrac{\partial \phi_j(\bar{x}^*)}{\partial x_i} \leq 0, \qquad i = 1,2,\dots,n, \\ \dfrac{\partial L(\bar{x}^*, \bar{s}^*)}{\partial x_i} \cdot x_i^* = \left(\dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_i} + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^* \cdot \dfrac{\partial \phi_j(\bar{x}^*)}{\partial x_i} \right) \cdot x_i^* = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n, \\ x_k^* \geq 0, \qquad k = 1,2,\dots,n, \\ \dfrac{\partial L(\bar{x}^*, \bar{s}^*)}{\partial s_j} = -\lambda_j^* \leq 0, \qquad j = 1,2,\dots,m \\ \dfrac{\partial L(\bar{x}^*, \bar{s}^*)}{\partial s_j} \cdot s_j^* = -\lambda_j^* \cdot s_j^* = 0, \quad j = 1,2,\dots,m \\ s_j^* \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,m \\ \phi_j(\bar{x}^*) - s_j^* = 0, \qquad j = 1,2,\dots,m \end{cases}$$

Заміна фіктивних змінних s_j на $\phi_j(\bar{x})$ в отриманих рівняннях і нерівностях призводить до зникнення останнього рівняння і до наступних умов Куна-Таккера, які є необхідними умовами існування екстремуму початкової задачі нелінійної оптимізації (2.6) – (2.8) як у внутрішніх, так і в граничних точках області допустимих рішень, які визначаються її системою обмежень:

$$\frac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \cdot \frac{\partial \phi_j(\bar{x}^*)}{\partial x_i} \leq 0, \qquad i = 1,2,\dots,n,$$

$$\left(\frac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \cdot \frac{\partial \phi_j(\bar{x}^*)}{\partial x_i} \right) \cdot x_i^* = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n,$$

$$x_k^* \geq 0, \qquad k = 1,2,\dots,n,$$

$$\lambda_j^* \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,m,$$

$$\lambda_j^* \cdot \phi_j(\bar{x}^*) = 0, \quad j = 1,2,\dots,m,$$

$$\phi_j(\bar{x}^*) \geq 0, \quad j = 1,2,\dots,m.$$

Якщо всі $\phi_j(\bar{x}^*) > 0$ і всі $x_j^* > 0$, то всі $\lambda_j^* = 0$, точка $\bar{x}^*$ – внутрішня точка області допустимих рішень, і умови Куна-Таккера перетворюються на звичайні необхідні умови локального екстремуму. Якщо ж виконується хоч одна з рівностей $\phi_j(\overline{\boldsymbol{x}}^*) = 0$, то точка $\overline{\boldsymbol{x}}^*$ лежить на відповідній межі і мова йде про умовний екстремум і відповідну функцію Лагранжа.

Економічний сенс множників Лагранжа

Якщо λ_j^* не дорівнює нулю, то оптимальний розв'язок (точка екстремуму) належить межі допустимої множини розв'язків, яка визначається рівнянням $\phi_j(\bar{x}^*) = 0$. Якщо функція $\phi_j(\overline{\boldsymbol{x}}^*)$, наприклад, описує витрати по ресурсах, це означає, що в оптимальному рішенні $\overline{\boldsymbol{x}}^*$ j-й ресурс є «вузьким місцем», оскільки його буде витрачено повністю. Збільшення наявного запасу цього ресурсу дозволить отримати краще значення функції $F(\overline{\boldsymbol{x}}) -$ показника ефективності.

Питання та завдання для самоконтролю до лекцій 2 – 3

1. Сформулюйте задачу нелінійної оптимізації. Наведіть приклади.
2. У яких випадках задача нелінійної оптимізації не має розв'язків?
3. Дайте визначення лінії рівня цільової функції? Який вигляд вона має для лінійної функції двох змінних? Якого вигляду вона набуває для нелінійної функції двох змінних? Наведіть приклади.
4. Чи може задача нелінійної оптимізації мати безліч розв'язків? Якщо так, то наведіть приклад такої задачі.
5. Наведіть приклад нерозв'язної оптимізаційної задачі.
6. Яка множина на площині відповідає обмеженню лінійної нерівності?
7. Розв'язати задачі нелінійного програмування графічним методом, використовуючи набуті знання з математичного аналізу, алгебри та аналітичної геометрії:

а) $x_1^2 - 4x_2^2 \to \max\ (\min)$
$x_1 - x_2 = 4,$
$x_1^2 + x_2^2 \le 16$

б) $-4x + y \to \max\ (\min)$
$(x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2 = 9$
$0 \le x_1 \le 6,\ -2 \le x_2 \le 2,$

в) $z = 9x_1^2 + x_2^2 - 18x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min),$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 32; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 16; \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

г) $z = x_1^2 + x_2^2 + 14x_1 - 16x_2 \to \max\ (\min),$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \ge 4; \\ 3x_1^2 + 2x_2 \le 35; \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

8. Визначити мінімум функції $f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3^2$ за умов, що

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 8,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Дослідити, наскільки зміниться величина мінімуму зі зміною вільних членів рівнянь зв’язку: першого на + 0,1 і другого на – 0,2?

9. Які є способи зведення задач умовної оптимізації до задач знаходження безумовного екстремуму?

10. До яких задач можна застосовувати метод множників Лагранжа?

11. У чому полягає сутність методу множників Лагранжа?

12. Яким чином складають функцію Лагранжа?

13. З яких етапів складається алгоритм визначення екстремальних точок методом множників Лагранжа?

14. Яка функція називається опуклою?

15. Сформулюйте критерій оптимальності першого порядку для задачі нелінійної умовної оптимізації.

16. Дайте визначення градієнта, гессіана цільової функції.

17. Сформулюйте теорему Куна – Такера для задачі мінімізації опуклої функції з обмеженнями у вигляді рівностей.

РОЗДІЛ ІІІ. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. Лекції 4 – 6

Мета: ознайомити класифікацією економіко-математичних моделей, сформувати у студентів уявлення про сутність та використання виробничих функцій, особливості моделюванні виробничого процесу на основі апарату виробничих функцій, еластичність продукту, оптимізаційні задачі математичної економіки

План

1. Класифікація моделей математичної економіки.
2. Моделювання виробничих процесів.
3. Виробничі функції випуску продукції.
4. Середній та граничний продукти. Коефіцієнт еластичності продукту за певним фактором.
5. Ступінь однорідності виробничої функції і віддача від масштабу виробництва.
6. Еластичність заміщення факторів виробництва.
7. Оптимізаційні моделі виробництва.

Ключові терміни та поняття: економіко-математична модель, виробнича функція, макроекономіка, мікроекономіка, середній продукт, граничний продукт, еластичність продукту, оптимізаційна модель.

3.1. Класифікація моделей математичної економіки

Як зазначалось в першій лекції, економіко-математичне моделювання – одна з фундаментальних дисциплін, що вивчає закони функціонування різних економічних систем. Її метою є виявлення кількісних взаємозв'язків і закономірностей, що існують в таких системах.

Моделлю називають умовний образ (згаяне зображення) реального об'єкта або процесу, який відображає найбільш важливі властивості оригіналу для дослідження.

Метод дослідження, що базується на розробці і використанні моделей, називається **моделюванням**.

Необхідність моделювання обумовлена складністю, а часом і неможливістю прямого вивчення реального об'єкта (процесу). Значно доступніше створювати і вивчати їх моделі. Можна сказати, що теоретичне значення про який-небудь об'єкт або процес, як правило, і є сукупність різних моделей.

Модель, що представляє собою сукупність математичних співвідношень, називається **математичною**.

Єдиної класифікації економіко-математичних моделей не існує, хоча можна виділити найбільш значущі їх групи в залежності від **ознаки класифікації**.

За ступенем **узагальненості об'єктів** моделювання розрізняють моделі:

- мікроекономічні
- одно-, двосекторні (одно-, двопродуктові)
- багатосекторні (багатопродуктові)
- макроекономічні
- глобальні.

За фактором врахування **часу** розрізняють моделі:

- статичні
- динамічні.

За **метою** створення і застосування розрізняють моделі:

- балансові
- економетричні
- оптимізаційні
- мережеві
- систем масового обслуговування
- імітаційні (експертні).

За ступенем **невизначеності** вихідних даних розрізняють моделі:

- детерміновані (з однозначно визначеними результатами)
- стохастичні (з різними можливими результатами)

За типом **математичного апарату** розрізняють моделі:

- лінійного та нелінійного програмування
- кореляційно-регресійні
- матричні
- мережеві
- теорії ігор
- теорії масового обслуговування і т.д.

В курсі математичної економіки будемо дотримуватися класифікації за ступенем узагальненості об'єктів, уточнюючи, чи є модель статичною або динамічною (тобто з урахуванням або без урахування зміни за часом), а також чи є вона лінійною або нелінійною. Почнемо з теорії виробничих функцій, яка використовується і в мікроекономічних, і в макроекономічних моделях.

3.2 Моделювання виробничих процесів

У ході операційної діяльності створюють нові товари та послуги, що мають додану вартість та беруть участь у наступних процесах обміну та споживання. Виробництво товарів пов’язане з одночасним споживанням інших товарів – сировини, праці та капіталу. Отже, процес виробництва пов’язаний з процесом споживання, а розвиток виробничих процесів значною мірою визначається поведінкою споживачів.

Наведемо основні економічні поняття, які будемо використовувати надалі при моделюванні виробничих процесів.

Виробничий процес – це процес створення доданої вартості шляхом цілеспрямованого перетворення одного набору продуктів у інші економічні продукти, які далі споживаються або обмінюються.

Економічна система, в якій організований і здійснюється виробничий процес, називається **виробничою системою** або виробництвом.

Розміри виробничої системи можуть змінюватися в найширших межах – від домашнього господарства до світової економіки.

Всі види економічного продукту будь-якої виробничої системи узагальнено називаються **товарами**. Всі товари мають властивості корисливості та рідкості, що створюють можливості процесів економічного обміну ними. Тому всі вироблені товари беруть участь у операціях обміну та споживаються іншими виробничими системами або кінцевими споживачами.

Будь-яка виробнича система використовує працю людей, у тому числі і для управління цієї системою. Виробнича система одночасно виробляє і споживає різноманітні товари. Тому вона у процесі обміну одночасно виступає у двох протилежних ролях – як покупець сировини, праці та капіталу так і як продавець виробленого продукту (товару).

Товари, що споживаються у процесі виробництва, називають **факторами виробництва** або **ресурсами**. Отримані в результаті виробничого процесу товари називаються **продуктами виробництва** або **випуском**.

Дії виробничих систем визначають попит на ринках ресурсів та пропозиції на ринках вироблених ними товарами.

Дослідження економічних процесів у сучасному великомасштабному виробництві вимагає отримання великих обсягів статистичної інформації для побудови математичних моделей, що описують взаємозв’язок між витратами та обсягом виробництва – моделями типу «**витрати – результати**», оскільки такі моделі повинні враховувати внутрішню структуру витрат на підприємстві.

Отримання достатньої кількості статистичних даних про всі внутрішні виробничі витрати є складною задачею. Значно простіше отримати дані про загальні показники, такі як вартість виробленого товару, вартість основних фондів підприємства, кількість виробничого персоналу, фонд оплати праці тощо. Аналізуючи ці показники і розглядаючи підприємство як «чорний ящик», тобто досліджуючи взаємозв'язок між величиною витрачених ресурсів та величину виробленого продукту, можна зробити певних висновків щодо виробничої діяльності цієї системи.

Далі будемо вважати, що всі товари локалізовані у просторі і в часі (відрізняються один від одного, якщо знаходяться в різних регіонах або відносяться до різних часових періодів) і мають властивість **однорідності**, яка означає, що будь-яку кількість товару такою, що нескінченно ділиться. Гіпотеза однорідності дозволяє використовувати диференціальне числення в економіко-математичних моделях.

Кількість товару може бути виражено невід'ємним дійсним числом. Нуль відповідає відсутності товару. Будь-якому впорядкованого набору з n товарів може бути поставлена у відповідність точка з множини R_+^n – конуса елементів з невід'ємними компонентами простору R^n:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in R_+^n,$$

де кожна компонента $x_k \geq 0, k = 1, \dots, n,$ задає кількість товару k-го виду.

При описі багатономенклатурного виробництва широкого поширення набуло **агрегування** як чинників, так і продуктів виробництва. Агрегування дозволяє перетворити деталізовані набори товарів в більш узагальнені набори товарів меншої розмірності (перетворити точки n-мірного простору в точки простору розмірності $n - m$).

Товари, виражені в одних і тих самих натуральних одиницях, можуть бути агреговані простим об'єднанням (і, відповідно, складанням їх кількостей). Для різнорідних товарів необхідно використовувати вагові коефіцієнти, що показують внесок кожного товару з набору в агрегований результуючий показник.

Приклад 3.1. У макроекономіці численні фактори виробництва часто агрегуються в набір з двох товарів:

- накопичену працю у формі виробничих фондів – капітал K .
- справжню (живу) працю L.

А в якості продукту виробництва розглядається валовий випуск (ВВП) або національний дохід.

Існує безліч **цілей** виробничої системи, які можна розділити на короткострокові та довгострокові. В рамках неокласичної економічної теорії найважливішими цілями виробника є:

- максимізація доходу
- максимізація прибутку
- мінімізація витрат

Є **два альтернативних підходи** щодо оптимізації управління виробничими процесами, які зводяться до вирішення такого роду завдань:

- максимізація виробництва продукту при фіксованих бюджетних обмеженнях (використовується аналіз **виробничих функцій**);
- мінімізація виробничих витрат при заданому рівні виробництва продукту (розв'язується за допомогою **функції витрат**, яка може бути побудована за відомою виробничою функцією).

3.3 Виробничі функції випуску продукції

Модель виробничого процесу включає в себе:

- множину факторів виробництва (ресурсів)
- множину продуктів виробництва
- множину доступних технологій

Технологія – це технічний спосіб перетворення факторів виробництва в продукти. Серед безлічі доступних технологій виробники вибирають найефективніші, що забезпечують виробництво максимальної кількості продукту для даної кількості використовуваних факторів виробництва.

Розглянемо виробничу систему, яка за час T перетворює набір (агрегованих) факторів виробництва $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в єдиний (агрегований) продукт y. Між кількістю витрачених ресурсів і кількістю виробленого продукту існує стійка детермінована залежність. Мала зміна ресурсу призводить до зміни продукту на малу величину.

Визначення 3.1 Виробнича функція (ВФ) - це математично виражена залежність між набором витрачених за час T факторів виробництва $x_1, x_2, \ldots, x_n$

і **максимальною** на заданій множині технологій кількістю отриманого продукту y:

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(\bar{x}).$$

Зауваження 3.1 Теоретично виробничу функцію (ВФ) вдається визначити тільки е найпростіших випадках. Завдання знаходження ВФ для реальних виробничих систем вирішується статистичними методами обробки даних.

Звичайні вимоги до виробничої функції полягають у виконанні двох видів умов, що мають економічну інтерпретацію:

1) при збільшенні витрат одного з ресурсів і незмінних обсягах витрат інших ресурсів випуск продукції зростає, тобто

$$\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_k} > 0 \text{ для будь} - \text{якого } k = 1,2, \dots, n; \qquad (3.1)$$

2) при збільшенні витрат одного з ресурсів і незмінних обсягах витрат інших ресурсів швидкість зростання випуску сповільнюється (**закон спадної віддачі факторів виробництва**) що означає властивість угнутості ВФ:

$$\frac{\partial^2 F(\bar{x})}{\partial x_k^2} < 0 \text{ для будь} - \text{якого } k = 1,2, \dots, n. \qquad (3.2)$$

Економічною областю будемо називати множиною точок $\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{R}_+^n$, в яких виконуються умови строгої позитивності перших похідних ВФ.

Приклади додаткових обмежень, які можуть бути накладені на виробничу функцію:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \text{ якщо існує } x_k = 0,\ k = 1, \dots, n, \qquad (3.3)$$

– при відсутності одного з ресурсів виробництво неможливо;

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = +\infty \text{ при } x_k = +\infty, \text{для будь} - \text{якого } k = 1, \dots, n, \qquad (3.4)$$

– при необмеженому збільшенні одного з ресурсів випуск необмежено зростає;

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^\gamma \cdot F(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ для будь} - \text{якого } \lambda > 0, \qquad (3.5)$$

– ВФ є однорідною функцій. Число $\gamma > 0$ називається ступенем однорідності F.

Приклад 3.2. Часто при аналізі макроекономіки використовується мультиплікативна ВФ від двох чинників праці L і капіталу K. Така функція задається виразом:

$$y = F(K, L) = CK^{\alpha}L^{\beta},\ \alpha > 0,\ \beta > 0, \tag{3.6}$$

де $C > 0$ – коефіцієнт, що характеризує технічний прогрес.

Для цієї функції, очевидно, виконані умови (3.3) і (3.4). Вона також є однорідною зі ступенем однорідності $\gamma = \alpha + \beta$, оскільки

$$F(\lambda K, \lambda L) = C(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} = C\lambda^{\alpha}K^{\alpha}\lambda^{\beta}L^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta}CK^{\alpha}L^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta}F(K, L).$$

Перші похідні

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha CK^{\alpha-1}L^{\beta} = \alpha\left(\frac{y}{K}\right) > 0,\ \text{при}\ \alpha > 0; \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \beta CK^{\alpha}L^{\beta-1} = \beta\left(\frac{y}{L}\right) > 0,\ \text{при}\ \beta > 0; \tag{3.8}$$

тобто умова (3.1) теж виконана.

Частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = \alpha(\alpha-1)CK^{\alpha-2}L^{\beta} = \alpha(\alpha-1)\left(\frac{y}{K^2}\right);$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} = \beta(\beta-1)CK^{\alpha}L^{\beta-2} = \beta(\beta-1)\left(\frac{y}{L^2}\right)$$

будуть від'ємними (умова (3.2)) при виконанні нерівностей:

$$0 < \alpha, \beta < 1.$$

Важливим окремим випадком мультиплікативної ВФ є **функція Кобба - Дугласа**:

$$y = CK^{\alpha}L^{\beta},\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1, \tag{3.9}$$

або

$$y = CK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Для функції Кобба-Дугласа виконуються усі умови (3.1) – (3.5), вона є лінійно-однорідною зі ступенем однорідності $\gamma = \alpha + \beta = 1$.

3.4 Середній та граничний продукти. Коефіцієнт еластичності продукту

Перелічимо основні економіко-математичні характеристики ВФ.

Визначення 3.2 Середній продукт за k-ого фактору визначається як відношення виробленого продукту y до кількості витраченого фактору x_k, за даний період часу:

$$Ay_{x_k} = \frac{y}{x_k} = \frac{F(\bar{x})}{x_k}. \tag{3.10}$$

Визначення 3.3 Граничний продукт k-ого фактору являє собою границя відношення приросту продукту Δy до приросту фактору Δx_k , його викликав, при $\Delta x_k \to 0$ і незмінних значеннях інших факторів, тобто часткову похідну:

$$My_{x_k} = \frac{\partial y}{\partial x_k} = \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_k}. \tag{3.11}$$

Економічно-граничний продукт фактору – це додатковий продукт, вироблений системою при витратах додаткової одиниці цього факторе (чим менше похідна, тим повільніше росте випуск при додаткових витратах ресурсу).

Для ВФ від праці і капіталу визначаються наступні показники:

- середня фондовіддача

$$A_{YK} = \frac{F(K,L)}{K};$$

- середня продуктивність праці

$$A_{YL} = \frac{F(K,L)}{L};$$

- гранична фондовіддача (гранична ефективність фондів)

$$M_{YK} = \frac{\partial F}{\partial K};$$

- гранична продуктивність праці (ефективність праці)

$$M_{YL} = \frac{\partial F}{\partial L}.$$

Зауваження 3.2 З (3.7), (3.8) випливає, що для мультиплікативної функції

$$y = CK^{\alpha}L^{\beta}$$

гранична фондовіддача є пропорційною середній фондовіддачі з коефіцієнтом α, а гранична продуктивність праці пропорційна середньої продуктивності праці з коефіцієнтом β. За умов $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ граничні віддачі чинників менше середніх. При цих же умовах на ВФ виконано закон спадної віддачі факторів виробництва, який означає, що зі збільшенням витрат фактору граничний продукт монотонно зменшується.

Середній і граничний продукт є розмірними величинами, що не завжди зручно при економічних порівняннях. Для того, щоб позбутися від розмірності і охарактеризувати відсоток приросту продукту y при збільшенні витрат ресурсу x_k на 1 відсоток (при незмінних значеннях витрат інших ресурсів), вводиться **коефіцієнт еластичності продукту по $\boldsymbol{k}$- му фактору**:

$$E_{x_k}(y) = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x_k}{x_k}}.$$

Тут $\frac{\Delta y}{y}$ – відносне збільшення продукту; $\frac{\Delta x_k}{x_k}$ – відносне збільшення фактору. Обидві величини є безрозмірними.

Наведена формула виражає коефіцієнт еластичності через кінцеві різниці. Якщо перейти до границі $\boldsymbol{x_k \to 0}$, отримаємо наступний вираз:

$$E_{x_k}(y) = \lim_{\Delta x_k \to 0}\left(\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x_k}{x_k}}\right) = \frac{x_k}{y}\lim_{\Delta x_k \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x_k}\right).$$

Отже, в різних варіантах записи, отримаємо формули для коефіцієнта (точкової) еластичності:

$$E_{x_k}(y) = E_{x_k} = \frac{x_k}{y}\frac{\partial y}{\partial x_k} = \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{F(\bar{x})} =\cdot \frac{My_{x_k}}{Ay_{x_k}}. \quad (3.13)$$

Отже, середній продукт і граничний продукт у цій чиннику пов'язані через коефіцієнт еластичності

$$My_{x_k} = E_{x_k}(y) \cdot Ay_{x_k}. \quad (3.14)$$

Приклад 3.3. Подивимося, як отримані формули застосовуються в економічних розрахунках. Середній продукт розраховується за емпіричними даними, коефіцієнт еластичності – так само, за допомогою кінцевих різниць. Аналітичний вид виробничої функції і її перших часткових похідних для цього не потрібен. Виведемо формулу, яка дозволяє оцінювати (в лінійному наближенні) можливе збільшенні продукту y за відомими прирощеннями факторів виробництва $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, середнім продуктам і коефіцієнтам еластичності продукту за такими чинниками. Оцінити приріст в лінійному наближенні означає покласти

$$\Delta y \approx dy = dF(\bar{x}) = \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_n}\Delta x_n.$$

В силу визначення граничного продукту (3.11), формули (3.14) і визначення середнього продукту (3.10), будь-яку часткову похідну ВФ в точці $\bar{x}$ можна замінити виразом

$$\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_k} = My_{x_k} = E_{x_k}Ay_{x_k} = E_{x_k} \cdot \frac{y}{x_k}.$$

Підставами отриманий вираз в наближену формулу для розрахунку замість Δy відповідної часткової похідної. Отримаємо, що

$$\Delta y \approx E_{x_1} \cdot \frac{y}{x_1}\Delta x_1 + E_{x_2} \cdot \frac{y}{x_2}\Delta x_2 + \cdots + E_{x_n} \cdot \frac{y}{x_n}\Delta x_n.$$

Зауважимо, однак, що е припущенні увігнутості (опуклості вгору) виробничої функції лінійне наближення дає завищене значення приросту продукту Δy при зростанні виробництва і занижене (за абсолютною величиною) у випадку його спаду, рис. 3.1).

Характеристиками виробничої функції, яка визначається капіталом та працею, є наступні величини:

- коефіцієнт еластичності по фондах

$$E_K(y) = E_K = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} \cdot \frac{K}{F(K,L)};$$

- коефіцієнт еластичності з праці

$$E_L(y) = E_L = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} \cdot \frac{L}{F(K,L)}.$$

Зростання виробництва Спад виробництва

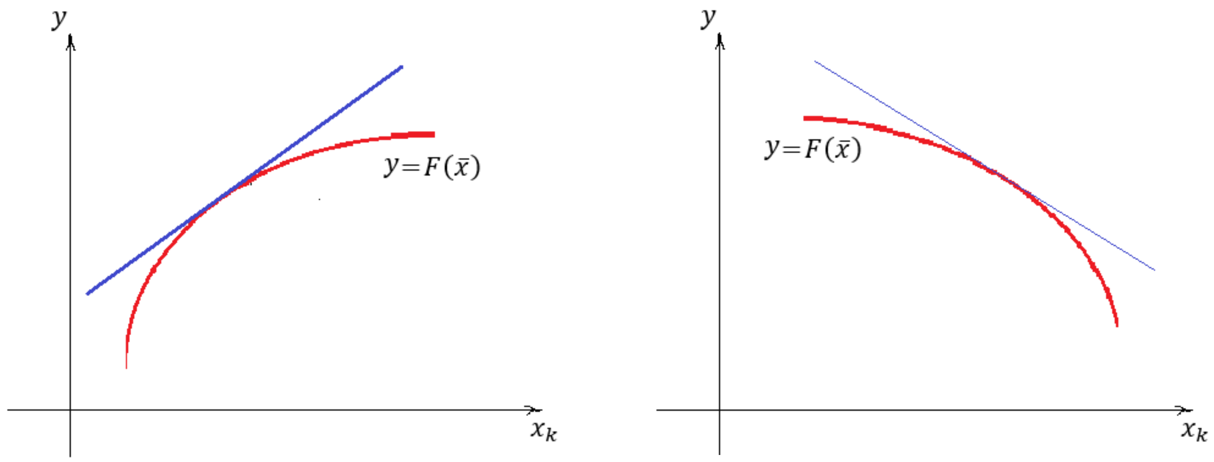

Рис. 3.1. Виробничі функції та їх лінійні наближення

Теорема 3.1 Якщо ВФ має ступеневу залежність від k-ого фактору

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1} \dots, x_n) = x_k^{\alpha} G(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1} \dots, x_n),$$

то коефіцієнт еластичності продукту за цим фактором дорівнює показнику ступеня α.

Доведення:

$$\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_k} = \alpha x_k^{\alpha-1} \cdot G,$$

звідси випливає

$$E_{x_k} = \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{F(\bar{x})} = \alpha x_k^{\alpha-1} \cdot G \cdot \frac{x_k}{F(\bar{x})} = \alpha \cdot \frac{x_k^{\alpha} \cdot G}{F(\bar{x})} = \alpha,$$

що й потрібно було довести.

Справедливим є і зворотне твердження – якщо коефіцієнт еластичності продукту за деяким фактором є постійною величиною, то ВФ має ступеневу залежність від цього нього.

Приклад 3.3. Для мультиплікативної функції

$$y = CK^{\alpha} L^{\beta}$$

коефіцієнти еластичності по фондам і по праці рівні, відповідно:

$$E_K(y) = \alpha, \qquad E_L(y) = \beta.$$

Коефіцієнт еластичності показує, на скільки відсотків збільшується випуск продукту, якщо фактор зросте на 1 відсоток. Для мультиплікативної функції при $\alpha > \beta$ має місце працезберігаючий (інтенсивний) закон зростання, в іншому випадку – фондозберігаючий (екстенсивний) характер зростання.

3.5 Ступінь однорідності виробничої функції і віддача від масштабу виробництва

Термін «віддача від масштабу виробництва», або «ефект масштабу виробництва», настільки важливе поняття, що на його економічний зміст необхідно зупиниться особливо:

- Якщо при збільшенні витрат кожного з n факторів виробництва в λ раз обсяг випуску продукту зросте більш ніж в λ раз, то буде мати місце позитивний (збільшується) ефект масштабу виробництва;
- якщо при збільшенні витрат кожного з факторів виробництва в λ раз обсяг випуску зросте також в λ раз, то буде мати місце постійний ефект масштабу виробництва.
- якщо при аналогічному збільшенні витрат факторів обсяг випуску підвищиться менш ніж в λ раз, то спостерігається негативний, або зменшується, ефект зростання масштабу виробництва.

У разі заходу з реагування випуску на рівне пропорційне зміні всіх факторів виробництва λ раз будемо розглядати коефіцієнт **еластичності масштабу виробництва:**

$$E_\lambda(y) = E_\lambda = \frac{\partial F(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)}{\partial \lambda} \cdot \frac{\lambda}{F(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)}.$$

Еластичність масштабу E_λ вимірює (груба результати) процентна зміна у випуску продукції в результаті одновідсоткового зміни кількості всіх факторів виробництва, тобто в результаті зміни масштабу виробництва. Збільшується випуск в більшій чи меншій мірі, ніж масштаб виробництва, залежить від того, чи буде коефіцієнт еластичності E_λ більше або менше 1:

- Якщо $E_\lambda > 1$, то віддача масштабу зростаюча
- Якщо $E_\lambda = 1$, то віддача масштабу постійна
- Якщо $E_\lambda < 1$, то віддача масштабу спадна

Для однорідних виробничих функцій коефіцієнт еластичності масштабу виробництва - це константа, рівна ступеня однорідності функції. Виробнича функція є однорідною ступеня γ, якщо множення кількості всіх факторів на параметр масштабу λ призводить до збільшення випуску в λ^γ раз:

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^\gamma F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Отже, однорідна ВФ має ступеневу залежність від λ і, в силу теореми (3.1), коефіцієнт еластичності масштабу виробництва (коефіцієнт еластичності продукту по λ) буде дорівнює γ:

$$E_\lambda = \gamma.$$

Приклад 3.5. Мультиплікативна функція

$$y = CK^\alpha L^\beta$$

при $\gamma = \alpha + \beta > 1$ описує зростаючу економіку.

Для будь-якої однорідної функції зі ступенем однорідності γ виконується теорема Ейлера:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_k} \cdot x_k = \gamma F(\bar{x}).$$

Розділимо обидві частини рівняння на $F(\bar{x}) = y$ і отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{F(\bar{x})} = \gamma.$$

У лівій частині рівності підсумовуються коефіцієнти еластичності продукту по k-му фактору $k = 1, \dots, n$, а що стоїть праворуч число γ дорівнює коефіцієнту еластичності масштабу виробництва. Остаточно отримуємо зв'язок коефіцієнтів еластичності в формі:

$$\sum_{k=1}^{n} E_{x_k} = E_{\lambda}.$$

Для лінійно-однорідною функції (ступінь однорідності $\gamma = 1$) теорема Ейлера набуває вигляду:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_k} \cdot x_k = F(\bar{x}).$$

Відтак, продукт виробництва $y = F(\bar{x})$ представити у вигляді суми n доданків

$$dy = dF(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_k} \cdot x_k = \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_2} x_2 + \cdots + \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_n} x_n.$$

З огляду на те, що (як уже виводили раніше в одному з прикладів)

$$\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_k} = My_{x_k} = E_{x_k}(y) Ay_{x_k} = E_{x_k} \frac{y}{x_k},$$

можна зробити висновок, що для випадку лінійно-однорідною ВФ вироблений продукт розкладається в суму з n доданків. Кожне з доданків відповідає внеску відповідного факторе в вироблений продукт, при цьому частка, яку даний фактор вносить в вироблений продукт, визначається коефіцієнтом еластичності продукту відповідного факторе:

$$y = E_{x_1} \frac{y}{x_1} \cdot x_1 + E_{x_2} \frac{y}{x_2} \cdot x_2 + \cdots + E_{x_n} \frac{y}{x_n} \cdot x_n = E_{x_1} y + E_{x_2} y + \cdots + E_{x_n} y.$$

3.6 Лінії рівного випуску (ізокванти). Гранична норма заміщення факторів виробництва

Для виробничої функції, яка залежить від двох змінних (факторів виробництва)

$$y = F(x_1, x_2)$$

можна запропонувати графічний спосіб її опису.

Лінії рівня виробничої функції від двох змінних називають **ізоквантою.** З економічної точки зору ізокванта – це крива на площині $x_1 O x_2$, що показує всі можливі комбінації факторів виробництва x_1, x_2, які дають постійний (однаковий) обсяг випуску.

$$F(x_1, x_2) = y_0 = Const.$$

Оскільки уздовж ізокванти виробнича функція зберігає постійне значення, то її повний диференціал в будь-якій точці ізокванти тотожно дорівнює нулю:

$$dF(\bar{x}) = \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_2} dx_2 = 0.$$

Звідки випливає, що:

$$\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_1} dx_1 = -\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_2} dx_2$$

Отже, тангенс кута нахилу до ізокванти в точці $\bar{x}$ дорівнює відношенню приватних похідних виробничої функції в цій точці, взятому з протилежним знаком.

$$tg\alpha = \frac{dx_2}{dx_{\ 1}} = -\frac{\left(\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_1}\right)}{\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_2}}.$$

В силу припущення невід'ємності частинних похідних ВФ, отримаємо, що значення тангенса від’ємне, тобто дотичні до ізокванти (і, отже, самі ізокванти) утворюють тупий кут з додатним напрямом осі Ox_1.

Отже, відзначимо властивості ізвоквант:

1. Ізокванти не перетинають один одного (оскільки це – лінії рівня функції).

2. Чим далі від початку координат (в північно-східному напрямку) розташована ізокванта, тим вищий рівень випуску вона представляє.

3. Негативний нахил ізоквант має простий економічний сенс. Адже якщо ми збільшимо витрати першого фактору при фіксованих витратах другого фактора, то в силу позитивності приватних похідних ВФ, випуск повинен буде зрости. А вздовж ізокванти він постійний. Значить, щоб зберегти постійний випуск при збільшенні витрат одного з факторів, витрати іншого чинника потрібно зменшити.

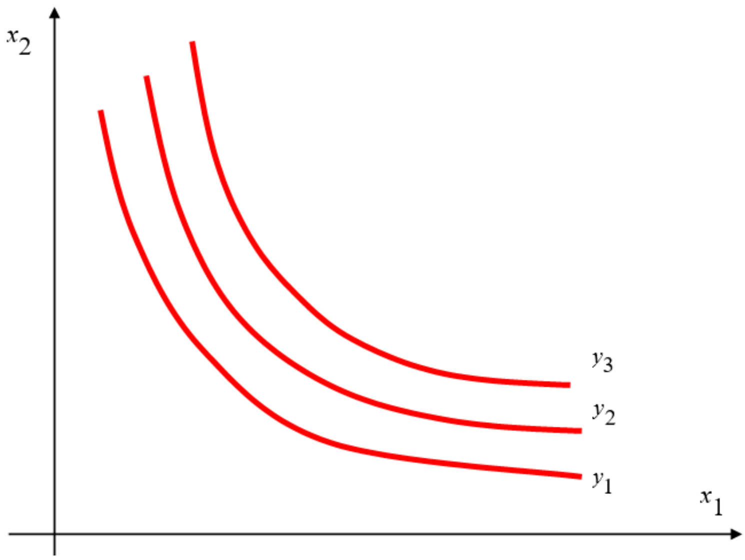

Рис. 3.2. Ізокванти при $y_1 < y_2 < y_3$

Норма технологічного заміщення $RTS_{1,2}$ одного фактору виробництва іншим показує, на скільки одиниць слід збільшити витрати другого фактору виробництва, якщо ми хочемо зменшити витрати першого фактору на 1 одиницю, зберігаючи при цьому незмінним обсяг випуску:

$$RTS_{1,2} = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}.$$

При $x_1 \to 0$ переходимо до граничної норми технологічного заміщення ($MRTS_{1,2}$ чи $S_{1,2}$).

$$MRTS_{1,2} = S_{1,2} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\left(\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_1}\right)}{\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_2}}.$$

Таким чином, $MRTS_{1,2}$ дорівнює за абсолютною величиною (і протилежна за знаком) тангенсу кута нахилу дотичної до ізокванти. Відповідно,

$MRTS_{1,2} > 0$.

Перейдемо до економічного змісту частинних похідних і отримаємо, що

$$S_{1,2} = \frac{My_{x_1}}{My_{x_2}} = \frac{\left(E_{x_1}\frac{y}{x_1}\right)}{\left(E_{x_2}\frac{y}{x_2}\right)} = \frac{E_{x_1}x_2}{E_{x_2}x_1}.$$

При постійному співвідношенні коефіцієнтів еластичності гранична норма заміщення першого факторе другим прямо пропорційна відношенню витрат другого чинника до витрат першого.

Зауваження 3.3 Для ВФ від n змінних гранична норма технологічного заміщення i-го чинника j-м фактором математично визначається як

$$S_{i,j} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\left(\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_i}\right)}{\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_j}}.$$

Для ВФ від K і L величина

$$S_{L,K} = \frac{\left(\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}\right)}{\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}} = \frac{My_L}{My_K} = \frac{E_L K}{E_K L}$$

називається **граничною нормою заміщення праці капіталом**.

Співвідношення між капіталом і працею

$$k = \frac{K}{L}$$

називається **фондоозброєністю** і дорівнює кількості витрачених одиниць капіталу, що припадають на витрачену одиницю праці.

Для мультиплікативної ВФ, у якої коефіцієнти еластичності – константи, норма заміни $S_{L,K}$ прямо пропорційна фондоозброєності, що видається цілком природним: чим вище фондоозброєність, тим більше потрібно фондів для компенсації однієї одиниці трудових ресурсів.

Зауваження 3.4 Заміщення одного факторе іншим можна зупинити. Граничні норми заміщення при цьому зв'язані співвідношеннями

$$S_{i,j} = \frac{1}{S_{j,i}}.$$

3.7 Еластичність заміщення факторів виробництва

Визначення 3.4 Для ВФ від двох змінних коефіцієнт еластичності заміщення факторів виробництва представляє собою кількісну характеристику швидкості зміни граничної норми заміщення уздовж ізокванти. Цей коефіцієнт показує, на скільки відсотків зміниться пропорція 1-ого та 2-ого ресурсів при зміні норми заміщення цих ресурсів на 1 відсоток,

$$\sigma_{1,2} = \frac{\Delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right) / \left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\left(\Delta S_{1,2}/S_{1,2}\right)}.$$

Перехід до границі, коли

$$\sigma_{1,2} = \frac{\partial\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\partial S_{1,2}} \cdot \frac{S_{1,2}}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}.$$

З геометричної точки зору величина коефіцієнта еластичності заміщення характеризує відносну зміну кута α нахилу дотичної до ізокванти

$$tg\alpha = \frac{dx_2}{dx_1} = -S_{1,2}$$

при зміні кута нахилу θ радіус-вектору точки, що переміщається уздовж ізокванти

$$tg\alpha = \frac{x_2}{x_1},$$

тобто характеризує кривизну ізокванти (рис. 3.3). З ростом кривизни ізокванти коефіцієнт еластичності зменшується.

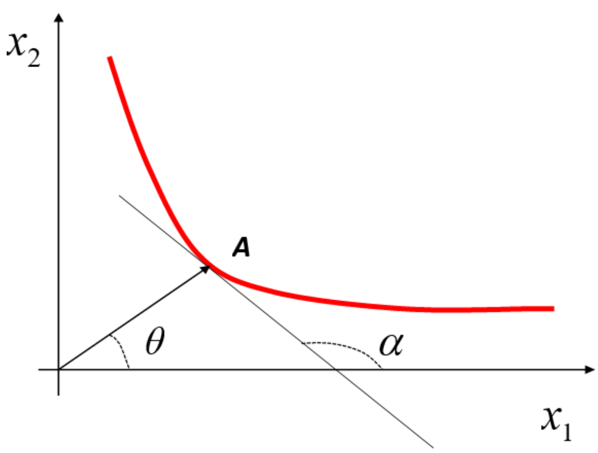

Рис. 3.3 Ізокванта і радіус-вектор точки

Зауваження 3.5 Для ВФ від n змінних можна побудувати відповідний аналог коефіцієнта еластичності заміщення.

Теорема 3.3 Для однорідної ВФ від двох факторів виробництва коефіцієнт еластичності заміщення залежить лише від пропорції факторів $\frac{x_2}{x_1}$ й залишається постійним вздовж променів, що виходять з точки початку координат.

Відповідно характеру поведінки показника еластичності і заміщення розрізняють два класи виробничих функцій: VES (Variable Elasticity of Substitution – змінна еластичність заміщення) і CES (Elasticity of Substitution - постійна еластичність заміщення).

Клас функцій з постійною еластичністю заміщення $\sigma = const$ допускає простий опис (без виведення). Для ВФ від двох змінних при $\sigma \neq 0$ і $\sigma \neq 1$ функція CES виглядає наступним чином:

$$y = A\left(\delta x_1^{-\rho} + (1-\delta)x_2^{-\rho}\right)^{-\frac{\gamma}{\rho}},$$

де $A > 0, 0 < \gamma \leq 1, \rho = \frac{1-\sigma}{\sigma} > -1, \gamma$ – ступінь однорідності функції.

Дві останніх нерівності забезпечують позитивність перших похідних і негативність других похідних функції CES.

В разі $\sigma = 1$ функція CES являє собою функцію Кобба -Дугласа:

$$y = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}, 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, \alpha + \beta = 1.$$

Випадок нульового коефіцієнта еластичності заміщення $\sigma = 0$ відповідає жорсткому виробничому процесу, коли неможлива заміна одного фактору іншим і відсутність одного фактору не може бути компенсована надлишком іншого (величина кривизни ізокванти при цьому нескінченно велика). Формулу ВФ можна отримати за допомогою граничного переходу з формули для функції CES. При $\sigma \to 0$

$$\lim_{\sigma \to 0} \rho = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1-\sigma}{\sigma} = \infty.$$

Граничний перехід для функції визначається за формулою:

$$y = \lim_{\rho \to 0} A\left(\delta x_1^{-\rho} + (1-\delta)x_2^{-\rho}\right)^{-\frac{\gamma}{\rho}} = \min\left(\frac{x_1^{\gamma}}{a}, \frac{x_2^{\gamma}}{b}\right).$$

Отримана ВФ називається **функцією з фіксованими пропорціями**.

Для лінійно-однорідною ВФ з нульовою еластичністю заміщення ($\gamma = 1, \sigma = 0$) отримуємо виробничу функцію Леонтьєва для факторів - досконалих комплементів:

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{b}\right).$$

Випадок нескінченно великої еластичності заміщення $\sigma \to \infty$ відповідає виробничому процесу, в якому можлива як компенсація зменшення витрат одного фактору збільшенням затрат другого, так і повне заміщення одного фактору виробництва іншим (фактори - вчинені субститути). Таке можливо, коли внесок кожного ресурсу незалежний, наприклад, якщо виробнича система складається з окремих виробничих одиниць, кожна з яких використовує собою власний виробничий ресурс, що підходить тільки для цього виробництва, при $\sigma \to \infty$

$$\lim_{\sigma \to \infty} \rho = \lim_{\sigma \to \infty} \frac{1 - \sigma}{\sigma} = -1,$$

і для лінійно-однорідною ВФ з нескінченної еластичністю заміщення ($\gamma = 1, \sigma = \infty$ отримуємо шляхом граничного переходу до лінійної виробничої функції:

$$y = ax_1 + bx_2.$$

Зауваження 3.6. Функція CES від n змінних при $y \neq 0$ і $\sigma \neq 1$ визначається так:

$$y = A\left(\delta_1 x_1^{-\rho} + \delta_2 x_2^{-\rho} + \dots + \delta_n x_n^{-\rho}\right)^{-\frac{\gamma}{\rho}}.$$

3.8 Оптимізаційні моделі виробництва

Розглянемо задачу прийняття рішення щодо планування виробництва у припущенні виконання наступних аксіом.

- будь-яке виробництво починається з етапу планування;
- приймаються тільки реалістичні плани;
- прийняті плани виконуються.

На основі цих положень задача виробничої системи, витрачених ресурсів для виготовлення певного продукту, зводиться до визначення кількості продукції, що випускається і необхідних для цього витрат.

Виробнича система (наприклад, фірма або галузь) повинна вирішити своє завдання оптимальним чином. При цьому оптимальність можна розуміти двояко: або як отримання найбільшого випуску (або прибутку) з урахуванням наявних можливостей системи щодо витрат ресурсів, або як досягнення необхідного (фіксованого) рівня випуску з найменшими витратами. Можна поставити перед собою лише одну з цілей. В іншому випадку задачу потрібно розглядати як багатокритеріальну, результатом якої виявиться певний компроміс.

З точки зору часового проміжку (горизонту планування) можна розрізнити задачу двох типів – задачу поточного виробництва (короткострокова задача) і задачу перспективного розвитку (довгострокова задача).

Короткострокова задача ставиться на один виробничий цикл – від початку виробництва продукту до моменту його виходу на ринок. Тут вирішується завдання раціонального використання вже наявних у розпорядженні ресурсів, виробничих потужностей, сировини, витрат на заробітну плату. Тому математичні моделі короткострокової задачі виробництва представляють собою оптимізаційні задачі з обмеженнями (завдання умовної оптимізації).

Довгострокова задача охоплює період, достатній для прийняття і реалізації великомасштабних рішень: нарощування або скорочення основних фондів, зміни структури виробництва, визначення довгострокових інвестицій, страховок і ін. Ці витрати безпосередньо не залежать від обсягу поточного випуску.

Визначення 3.5 Назвемо **витратами виробництва** вартість набору ресурсів $x_1, x_2, \dots, x_n$, витрачених системою на виробництво продукту за певний період. Якщо ціна одиниці ресурсу k –ого виду є $w_k, k = 1, \dots, n,$ то вартість C всього набору ресурсів знаходиться за формулою

$$C = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n = \sum_{k=1}^{n} w_k x_k.$$

Позначимо через $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ вектор-рядок цін на ресурси.

Строго кажучи, мова йде про змінні витрати, так як вони змінюються замість з обсягом випуску. Крім них, виробнича система несе і постійні витрати, пов'язані з витратами на її утримання. Оскільки постійні витрати не пов'язані з випуском, то при складанні оптимізаційних моделей ми їх враховувати не будемо.

Далі будемо припускати, що виробнича система функціонує в умовах досконалої конкуренції. Це означає, що ціни ресурсів $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ і ціна виробленого продукту p визначаються ринком і не можуть бути змінені в результаті дій виробника, тобто є зовнішніми по відношенню до системи (екзогенними) змінними.

Визначення 3.6 Лінією постійних витрат або **ізокостою** назвемо безліч точок - наборів факторів виробництва, які мають однакову фіксовану вартість $C = const$.

Для випадку двох факторів виробництва ізокоста допускає просту графічну інтерпретацію - це відрізок прямої

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 = C$$

потрапив в першу координатну чверть.

Взявши диференціал від обох частин останнього рівняння (ціни передбачаються постійними), отримаємо:

$$w_1 \cdot dx_1 + w_2 \cdot dx_2 = 0,$$

Або

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{w_1}{w_2}.$$

Отже, для різних $Const$ ізокости є паралельними лініями з одним і тим же кутом нахилу

$$tg\beta = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{w_1}{w_2},$$

і цей нахил виражається через відношення цін на ресурси.

Зміна бюджетного обмеження призводить до паралельного зсуву ізокости, зміна вартості ресурсів змінює нахил ізокости (див. рис. 3.4).

Рис. 3.4. Ізокости

Припустимо, що технологія виробництва досить добре вивчена, тобто відома виробнича функція

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(\bar{x})$$

задає правило перетворення використовуваних ресурсів $x_1, x_2, \dots, x_n$ в кінцевий продукт y. У цікавій для нас області зміни ресурсів ця функція має звичайні властивості:

- Збільшення витрат ресурсів призводить до збільшення випуску продукції (часткові похідні ВФ позитивні)
- Справедливий закон регресійний віддачі факторів виробництва. Зажадаємо навіть більш сильного умови - угнутості виробничої функції.

Розглянемо математичні моделі різних завдань виробництва для випадку нелінійної виробничої функції (в лінійному випадку ми будемо мати справу з завданням лінійного програмування).

3.8.1 Короткострокова задача оптимізації виробництва: задача максимізації випуску продукції при наявності бюджетних обмежень.

Припустимо, що для придбання необхідних ресурсів виділена фіксована сума C. Тоді задача максимізації випуску продукції (а, отже, і максимізації доходу виробничої системи) можна поставити такою формою:

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(\bar{x}) \to max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n = C \\ x_k \geq 0, \ \ k = 1,2, \dots, n. \end{cases} \tag{3.15}$$

Зауваження 3.7 Обмеження-рівність (3.15) описує безліч максимальних кількостей ресурсів, доступних для споживача при наявних бюджетному обмеженні. Оскільки збільшення витрат ресурсів призводить до збільшення випуску продукції, має сенс розглядати тільки такі набори ресурсів. Всі ці набори належать одній і тій же ізокости.

Це задача нелінійної оптимізації з одним лінійним обмеженням і умовою невід'ємності змінних. Відповідно до теорії, будуємо функцію Лагранжа:

$$L(\bar{x}) = F(\bar{x}) + \lambda(C - w_1x_1 - w_2x_2 - \dots - w_nx_n),$$

потім максимізували її за умови невід'ємності змінних. Для цього необхідно виконання умов Куна-Такера:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\bar{x})}{\partial x_i} = \dfrac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_k} - \lambda w_k \le 0, \qquad i = 1,2,\dots,n, \\ \dfrac{\partial L(\bar{x})}{\partial x_i} \cdot x_i = \left(\dfrac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_k} - \lambda w_k\right) \cdot x_i = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n, \\ x_k \ge 0, \qquad k = 1,2,\dots,n, \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n = C. \end{cases}$$

Спростимо їх, припустивши що в оптимальний набір ресурсів $\bar{x}^*$ входять всі ресурси, тобто всі його компоненти $x_k^* > 0$. Ця умова не є жорстким, так як в разі $x_k^* = 0$ можна було виключити ресурс k-ого виду з розгляду, скоротивши тим самим розмірність простору витрат.

Отже, для оптимального набору $\bar{x}^*$ від умов Куна- Такера залишаться звичайні рівняння для пошуку стаціонарної точки функції Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_k} - \lambda w_k = 0, \;\; k = 1,2,\dots,n; \\ w_1 x_1^* + w_2 x_2^* + \dots + w_n x_n^* = C. \end{cases}$$

Останнє рівняння призначене для знаходження множника $\boldsymbol{\lambda}$-тіньовий ціни, яка показує, на скільки одиниць збільшується випуск продукту, при збільшенні вартості набору факторів на одиницю. З перших $\boldsymbol{n}$ рівнянь слід, що для $\bar{x}^*$виконано:

$$\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_k} = \lambda w_k, \;\; k = 1,2,\dots,n,$$

звідки можна отримати співвідношення двох видів:

$$\frac{\left(\dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_1}\right)}{w_1} = \frac{\left(\dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_2}\right)}{w_2} = \dots = \frac{\left(\dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_n}\right)}{w_n} = \lambda, \tag{3.16}$$

$$\frac{\left(\dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_i}\right)}{\left(\dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_j}\right)} = \frac{w_i}{w_j}, \quad i,j = 1,2,\dots,n. \tag{3.17}$$

З огляду на припущення про угнутості виробничої функції, ці умови стають і достатніми умовами оптимальності, а знайдена стаціонарна точка $\bar{x}^*$ є точкою умовного максимуму функції $F(\bar{x})$ при наявності бюджетного обмеження.

З (3.17) отримаємо співвідношення для граничної норми заміщення $i -$ ого чинника $j -$ м фактором в оптимальній точці, яка буде дорівнює відношенню цін за одиницю цих факторів

$$\frac{My_{x_i}}{My_{x_j}} = S_{i,j} = \frac{w_i}{w_j}$$

Графічну інтерпретацію задачі максимізації випуску продукту при фіксованій повної вартості ресурсів можна дати для ВФ від двох змінних.

Для ВФ від двох змінних умова оптимальності (3.17) набуде вигляду:

$$\frac{\left(\frac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_2}\right)} = \frac{w_1}{w_2}.$$

З останнього рівності випливає, що в точці оптимуму $\bar{x}^*$ збігаються тангенси кутів нахилу ізокванти $tg\alpha$ і ізокости $tg\beta$:

$$tg\alpha = -\frac{\left(\frac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_2}\right)} = -\frac{w_1}{w_2} = tg\beta.$$

Це означає, що в точці оптимального рішення ізокванта і ізокоста дотичні. Графічне рішення зображено на рис. 3.5. Нехай бюджетне обмеження виробника і ціни на ресурси відомі. Ці параметри однозначно задають ізокосту виробника. Зафіксуємо ізокосту і почнемо збільшувати випуск продукту, тобто зміщувати ізокванти в напрямку від початку координат вправо-вгору. Точки дотику ізокости та ізокванти дає оптимальне рішення.

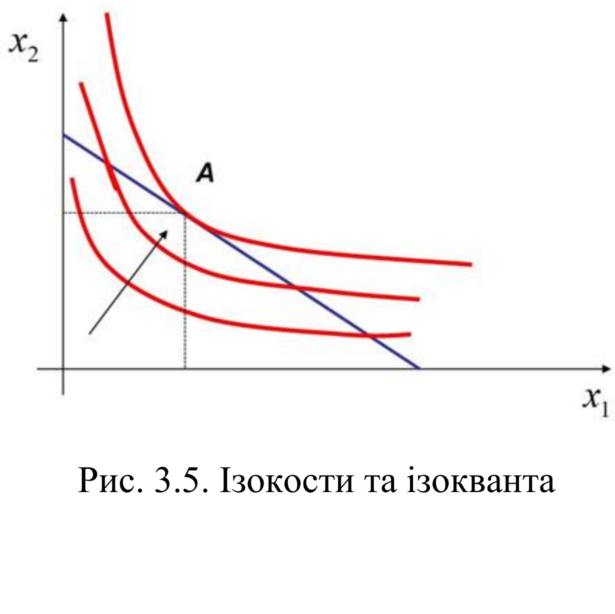

Рис. 3.5. Ізокости та ізокванта

Функція умовного попиту на фактори виробництва і функція пропозиції виробника. Вирішивши задачу максимізації випуску, ми отримаємо оптимальні кількості необхідних факторів виробництва, які будуть залежати від цін на ці фактори виробництва і від наявних бюджетних коштів C:

$$x_1^* = x_1^*(w_1, w_2, \dots, w_n, C) = x_1^*(\overline{w}, C);$$
$$x_2^* = x_2^*(w_1, w_2, \dots, w_n, C) = x_2^*(\overline{w}, C);$$
$$\dots$$
$$x_n^* = x_n^*(w_1, w_2, \dots, w_n, C) = x_n^*(\overline{w}, C).$$

Якщо відстежити залежність оптимальних кількостей факторів виробництва від зміни цін на них і від зміни C, ми отримаємо набір з n функцій (короткострокового) умовного попиту виробничої системи на фактори виробництва. Якщо зміниться ціна на будь-який з факторів виробництва або C, то оптимальним стане інший набір факторів виробництва.

Функцію від $n+1$ змінної:

$$y^*(\overline{w}, C) = F\left(x_1^*(\overline{w}, C), \dots, x_n^*(\overline{w}, V)\right) = F\left(\bar{x}^*(\overline{w}, C)\right).$$

назвемо функцією (короткострокового) пропозиції виробничої системи.

3.8.2 Короткострокова задача оптимізації виробництва: задача мінімізації витрат при фіксованому рівні випуску продукції

Математичне формулювання цього завдання виглядає наступним чином:

Знайти

$$C = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n \to min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = y, \\ x_k \geq 0, \ \ k = 1,2, \dots, n. \end{cases} \qquad (3.19)$$

Перетворимо її в задачу на максимум:

$$-C = -w_1 x_1 - w_2 x_2 - \dots - w_n x_n \to max \qquad (3.20)$$

при обмеженнях (3.19).

Розв'яжемо задачу по тій же схемі, що і задача максимізації випуску. Функція Лагранжа:

$$L(\bar{x}) = -w_1 x_1 - w_2 x_2 - \dots - w_n x_n + \lambda'(F(\bar{x}) - y).$$

Умови Куна- Такера

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\bar{x}\,)}{\partial x_i} = -w_i + \lambda' \dfrac{\partial F(\bar{x}\,)}{\partial x_i} \leq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \\ \dfrac{\partial L(\bar{x}\,)}{\partial x_i} \cdot x_i = \left(-w_i + \lambda' \dfrac{\partial F(\bar{x}\,)}{\partial x_i}\right) \cdot x_i = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \\ \quad x_k \geq 0, \qquad k = 1,2,\ldots,n, \\ \qquad\qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y. \end{cases}$$

від яких на оптимальному рішенні $\bar{x}^*$, в якому всі компоненти $x_k^* > 0$, залишаються рівняння для пошуку стаціонарної точки

$$\begin{cases} -w_i + \lambda' \dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \\ \; F(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = y. \end{cases}$$

З перших n рівнянь слід, що

$$\lambda' \frac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_i} = w_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

У підсумку отримуємо, що для оптимального набору факторів виробництва, що володіє найменшою вартістю і забезпечує заданий рівень випуску, справедливі співвідношення ж виду, що були отримані під час вирішення задача максимізації випуску:

$$\frac{\left(\dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_1}\right)}{w_1} = \frac{\left(\dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_2}\right)}{w_2} = \cdots = \frac{\left(\dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_n}\right)}{w_n} = \frac{1}{\lambda'},$$

$$\frac{\left(\dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_i}\right)}{\left(\dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_j}\right)} = \frac{w_i}{w_j}, \quad i, j = 1,2,\ldots,n,$$

а знайдена стаціонарна точка $\bar{x}^*$ є точкою умовного максимуму функції $F(\bar{x}^*)$ за наявністю бюджетного обмеження. Зауважимо, що в цьому завданні матриця других похідних функції Лагранжа $L(\bar{x})$ збігається з матрицею других похідних виробничої функції $F(\bar{x})$ з точністю до множника λ' (причому, як випливає з щойно отриманих співвідношень, $\lambda' > 0$).

З огляду на припущення угнутості виробничої функції, ці умови стають і достатніми умовами оптимальності, а знайдена стаціонарна точка $\bar{x}^*$ є точкою умовного максимуму функції $(-C)$ і, отже, точкою умовного мінімуму функції C при заданому рівні випуску.

Графічне представлення задачі мінімізації вартості набору ресурсів дано для ВФ від двох змінних на рис. 3.6. Воно аналогічно інтерпретації, даної в задачі максимізації випуску. У точці оптимуму ізокванта і ізокоста як і раніше перетинаються, але на цей раз рухається ізокоста. Заданий рівень випуску продукції відповідає нерухомій ізокванті. Зменшення повної вартості набору ресурсів призводить до паралельного зсуву ізокости в напрямку початку координат. Рішенням завдання буде точка дотику ізокости та фіксований ізокванти.

Отже, оптимальні рішення задачі максимізації випуску при наявності бюджетних обмежень і задача мінімізації витрат при фіксованому рівні випуску, повинні задовольняти одним і тим же умовам. Графічно ці оптимальні рішення - точки ізокванти і ізокости.

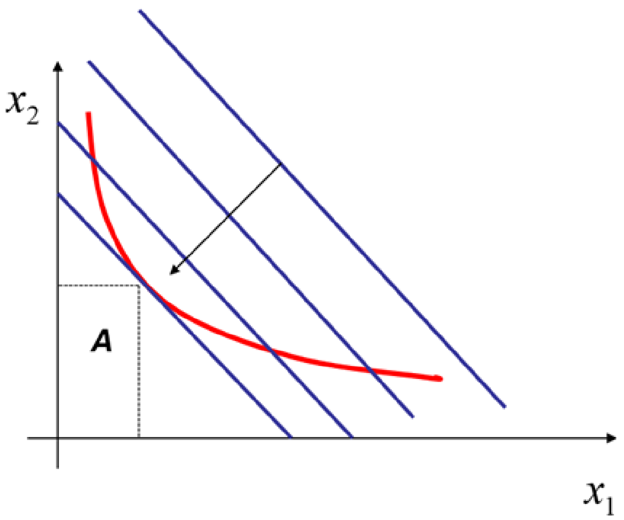

Рис. 3.6. Графічне представлення задачі мінімізації вартості набору ресурсів

Функції умовного попиту на фактори виробництва і функція витрат. Вирішивши задачу мінімізацію витрат, ми отримаємо оптимальні кількості факторів виробництва, які будуть залежати від цін на ці фактори виробництва і від необхідного обсягу випуску

$$x_1^* = x_1^*(w_1, w_2, \dots, w_n, y) = x_1^*(\overline{w}, y);$$
$$x_2^* = x_2^*(w_1, w_2, \dots, w_n, y) = x_2^*(\overline{w}, y);$$
$$\dots$$
$$x_n^* = x_n^*(w_1, w_2, \dots, w_n, y) = x_n^*(\overline{w}, y).$$

Якщо відстежити залежність оптимальних кількостей факторів виробництва від зміни цін на них і від зміни випуску, ми отримаємо набір з $\boldsymbol{n}$ функцій (короткострокового) умовного попиту на фактори виробництва.

Якщо зміниться ціна на будь-який з факторів виробництва або якщо виробнича система побажає працювати при іншому рівні випуску, тоді оптимальним стане інший набір факторів виробництва.

Функція витрат показує мінімальні грошові витрати, які повинні здійснити виробнича система (наприклад, фірма), щоб досягти деякого заданого рівня випуску при певних цінах факторів виробництва, що склалися на ринку:

$$C(w_1, w_2, \dots, w_n, y) = w_1 x_1^* + w_2 x_2^* + \dots + w_n x_n^* =$$

$$= w_1 x_1^*(w_1, w_2, \dots, w_n, y) + w_2 x_2^*(w_1, w_2, \dots, w_n, y) + \dots + w_n x_n^*(w_1, w_2, \dots, w_n, y).$$

Звернемо увагу на те, що якщо набір факторів виробництва неоптимальний , тобто $x_k \neq x_k^*$, то функцію

$$C = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n$$

не можна розглядати як функцію витрат.

Кожній виробничої функції відповідає певна функція витрат. Кожна функція витрат, в свою чергу, однозначно визначає виробничу функцію системи. Таким чином, виробнича система може бути однозначно задана як за допомогою виробничої функції, так і за допомогою функції витрат.

3.8.3 Довгострокова задача оптимізації виробництва: задача максимізації прибутку

На довгостроковий період виробнича система може планувати будь-які витрати, а загальний результат виробництва можна оцінити величиною **прибутку**

$$\Pi(\bar{x}) = p \cdot y - (w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n).$$

Тут p − вартість одиниці виробленої продукції;

$$p \cdot y = p \cdot F(\bar{x})$$

− вартість річного випуску або річний дохід виробничої системи;

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n$$

− повна вартість витрат ресурсів за рік.

Вирішується оптимізаційна задача пошуку максимуму прибутку (з урахуванням природного вимоги невід'ємності ресурсів):

$$\Pi(\bar{x}) = pF(\bar{x}) - (w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n) \rightarrow max$$

за умови

$$x_n \geq 0,\ \ k = 1,2,\dots,n.$$

Ця задача нелінійної оптимізації з умовами невід'ємності змінних, необхідними умовами її розв’язку є умови Куна- Такера:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi(\bar{x})}{\partial x_k} = p\dfrac{\partial F(\bar{x}\,)}{\partial x_k} - w_k \leq 0,\ \ k = 1,2,\dots,n, \\ \dfrac{\partial \Pi(\bar{x})}{\partial x_k} \cdot x_k = \left(p\dfrac{\partial F(\bar{x}\,)}{\partial x_k} - w_k\right) \cdot x_k = 0,\ \ k = 1,2,\dots,n, \\ x_k \geq 0, \quad k = 1,2,\dots,n. \end{cases}$$

В припущенні про опуклість виробничої функцій, ці умови становяться і достатніми умовами оптимальності. Спростимо їх, припустивши необхідність витрат всіх видів, тобто $x_k^* > 0, k = 1,2,\dots,n$.

В результаті необхідні і достатні умови оптимальності матимуть вигляд:

$$p\frac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_k} - w_k = 0,\ \ k = 1,2,\dots,n, \tag{3.21}$$

з якого випливає, що в точці для часткових похідних ВФ (граничних продуктів) і цін на ресурси виконані співвідношення того ж типу, що були отримані в задачах максимізації випуску і мінімізації вартості ресурсів:

$$\frac{\left(\dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_1}\right)}{w_1} = \frac{\left(\dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_2}\right)}{w_2} = \cdots = \frac{\left(\dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_n}\right)}{w_n} = \frac{1}{p},$$

$$\frac{\left(\dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_i}\right)}{\left(\dfrac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_j}\right)} = \frac{w_i}{w_j},\quad i,j = 1,2,\dots,n.$$

Наведемо геометричну ілюстрацію до отриманого рішення для випадку ВФ двох змінних. У геометричному сенсі умови оптимальності відповідають точці дотику однієї з ізоквант виробничої функції і деякої ізокости (лінії постійних витрат).

У довгостроковому періоді всілякі ізокванти і ізокости заповнюють всю економічну область. Поєднуючи точки дотику планованих ізокванти і ізокости, отримуємо безперервну лінію. Чим далі на північний схід на цій лінії розташована точка дотику, тим більшим є відповідне значення витрат і випуску. Тому дана лінія називається **довгостроковим шляхом розширення виробництва**.

Таким чином, геометричне місце торкань ізоквант і ізокост показує оптимальний сценарій розвитку виробництва.

У випадку короткострокової завдання виробництва, короткостроковий шлях розширення збігається довгостроковим шляхом в малому околі оптимальної точки.

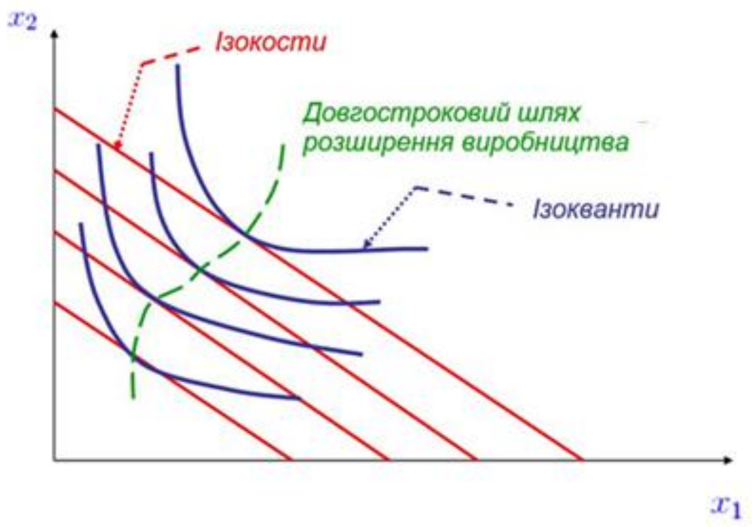

Рис. 3.7. Побудова довгострокового шляху розширення виробництва

За умов, накладених нами на виробничу функцію, систему рівнянь (3.21)

$$p\frac{\partial F(\bar{x}^*)}{\partial x_k} - w_k = 0, \quad k = 1,2,\dots,n,$$

в околі оптимальної точки ці рівняння можна (хоча б теоретично) вирішити, знайшовши залежність оптимальної кількості ресурсів від зміни цін на них і від зміни ціни випуску, тобто можна знайти функції попиту (на фактори виробництва):

$$x_1^* = x_1^*(w_1, w_2, \dots, w_n, p) = x_1^*(\overline{w}, p);$$

$$x_2^* = x_2^*(w_1, w_2, \dots, w_n, p) = x_2^*(\overline{w}, p);$$

$$\dots$$

$$x_n^* = x_n^*(w_1, w_2, \dots, w_n, p) = x_n^*(\overline{w}, p).$$

Підставляючи отримані функції попиту на ресурси у виробничу функцію, отримаємо функцію (довгострокової) пропозиції готової продукції, що також залежить від цін на ресурси і продукцію:

$$y^*(\overline{w}, p) = F\left(x_1^*(\overline{w}, p), \dots, x_n^*(\overline{w}, p)\right) = F\left(\bar{x}^*(\overline{w}, p)\right) = F^*(\overline{w}, p).$$

Виявляється, попит не залежить від масштабу цін, точніше, від пропорційної зміни ціни продукції та цін ресурсів. Дійсно, для будь-якого множника, що масштабує $\alpha > 0$, з визначення функції прибутку отримуємо, що

$$\alpha p \cdot F(\bar{x}) - \alpha(w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n) = \alpha\Pi(\bar{x}) \to max$$

Оскільки постійний коефіцієнт α не впливає на максимізацію функції $\Pi(\bar{x})$, то задача

$$\alpha\Pi(\bar{x}) \to max$$

має таке ж оптимальне рішення, що і задача

$$\Pi(\bar{x}) \to max.$$

Отже,

$$x_k^*(\alpha\overline{w}, \alpha p) = x_k^*(\overline{w}, p), \qquad k\ 1,2, \dots, n,$$

і функції попиту на витрати є однорідними функціями нульового порядку однорідності.

Для функції пропозиції готової продукції отримуємо

$$F^*(\alpha\overline{w}, \alpha p) = F\left(x^*(\alpha\overline{w}, \alpha p)\right) = F\left(x^*(\overline{w}, p)\right) = F^*(\overline{w}, p),$$

і, отже функція пропозиції також є однорідною нульового порядку, тобто обсяг пропозиції товару залишається незмінним при підвищенні (зниженні) цін на ресурси, якщо в тій самій пропорції підвищується (знижується) ціна готової продукції.

3.8.4 Аналіз впливу цін на обсяги витрат і випуску

Підставляючи в систему (3.21) знайдені функції попиту і приєднуючи до неї вираз для функції пропозиції, отримаємо замкнену систему з $n + 1$ рівняння з $n + 1$ невідомими:

$$\begin{cases} F^*(\overline{w}, p) = F\left(x^*(\overline{w}, p)\right), \\ p\dfrac{\partial F}{\partial x_k}\left(\bar{x}^*(\overline{w}, p)\right) = w_k, \qquad k = 1,2, \dots, n. \end{cases} \tag{3.22}$$

Диференціюючи співвідношення (3.22) за ціною випуску p і цінами ресурсів w_k відповідно, можна досліджувати чутливість оптимальних витрат і випуску до змін параметрів моделі, тобто зміну попиту на ресурси і функції пропозиції у відповідь на зміни ціни випуску і зміни цін ресурсів.

Оскільки чутливість оптимальних витрат і випуску за цінами оцінюється величинами часткових похідних

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial p}, \qquad \frac{\partial x_k^*}{\partial w_j}, \;\; k, j = 1,2, \dots, n; \qquad \frac{\partial F^*}{\partial p}, \qquad \frac{\partial F^*}{\partial w_j}, \;\; j = 1,2, \dots, n;$$

то систему (3.22) будемо диференціювати по змінним p і $w_1, \dots, w_n$.

Диференціювання системи (3.22) приводить до основного матричного рівняння теорії виробництва. Вирішуючи його стосовно цікавих для нас похідних і аналізуючи їх знаки, можна прийти до наступних висновків (математичних і економічних):

1. Підвищення ціни на продукт, що виготовляється, завжди призводить до збільшення обсягу випуску

$$\frac{\partial F^*}{\partial p} > 0$$

(крива пропозиції збільшується).

2. Підвищення ціни на продукт, що випускається, спричиняє підвищення попиту на деякі види ресурсів

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial p} > 0,$$

такі ресурси називаються цінними (нормальними).

3. Ресурс виду k називається малоцінним, якщо

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial p} < 0.$$

(Підвищення ціни продукції призводить до падіння попиту на такий ресурс). З пункту 2 маємо, що не можна обходитися виключно малоцінними ресурсами.

4. Зростання ціни на деякий вид ресурсів призводить до скорочення обсягу випуску

$$\frac{\partial F^*}{\partial w_j} < 0;$$

5. Підвищення ціни на деякий ресурс завжди призводить до падіння попиту на нього

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial w_j} < 0;$$

6. Виконується рівність

$$\frac{\partial F^*}{\partial w_j} = -\frac{\partial x_k^*}{\partial p}, j = 1,2, \dots, n,$$

тому зростання ціни продукції призводить до підвищення (зниження) попиту на окремі види витрат, якщо підвищення ціни на цей вид ресурсів призводить до скорочення (зростання) випуску.

7. Має місце система рівностей

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial w_j} = \frac{\partial x_j^*}{\partial w_k}, \quad j, k = 1,2, \dots, n,$$

чутливість обсягу витрат k-го виду на зміну цін витрат j-го виду така ж, що і чутливість обсягу витрат j-го виду на зміну цін витрат k-го виду.

8. Витрати k-го і j-го виду є взаємозамінними (взаємодоповнюючими), якщо

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial w_j} > 0 \quad \left(\frac{\partial x_k^*}{\partial w_j} < 0\right).$$

Для взаємозамінних витрат підвищення (зниження) ціни на одній з них тягне збільшення (зменшення) попиту на іншу; для взаємодоповнюючих один одного витрат підвищення (зниження) ціни однієї з них тягне зменшення (збільшення) попиту на іншу.

Питання та завдання для самоконтролю до лекцій 4 – 6

1. Поясніть призначення виробничої функції.

2. Вкажіть, що є аргументами виробничої функції.

3. Назвіть види виробничих функцій.

4. Вкажіть основні допущення, що використовуються при побудові виробничої функції.

5. Поясніть зміст коефіцієнтів виробничої функції Кобба-Дугласа.

6. Поясніть, що є об’єктом моделювання для виробничої функції Кобба-Дугласа.

7. Наведіть визначення ізокости, ізокванти та їх економічний зміст.

8. Сформулюйте задачу оптимізації для будь-якого виробничого процесу.

9. На фабриці, що виготовляє взуття, 5 працівників працюють на 5 верстатів та виготовляє 1000 пар взуття за тиждень. Були найняті ще 5 працівників, внаслідок чого обсяг виробництва взуття збільшиться до 1500 пар взуття на тиждень. Знайти, як зміниться продуктивність праці робітників та величина виробничих фондів підприємства.

10. Для фабрики з попередньої задачі обсяг виробництва виробничою функцією Кобба-Дугласа з коефіцієнтом β=0,75. Як збільшиться обсяг виробленої продукції (гранична продуктивність праці), якщо підприємство найме додаткового працівника при наявності 5 працівників. Як зміниться ця величина, якщо найме 1 працівника при наявній численності виробничого персоналу 10 працівників?

11. Розкрийте на конкретних прикладах зміст поняття еластичності.

12. Поясніть призначення та роль у економічних дослідженнях показника еластичності.

13. Наведіть формули для обчислення коефіцієнтів еластичності обсягів виробництва за факторами виробництва.

14. Поясніть зміст граничних показників.

15. Поясніть, що таке еластичність заміни ресурсів.

16. Назвіть основні середні показники, пов'язані з виробничою функцією та розкрийте їх зміст.

17. Поясніть, у чому полягають ефекти розширення масштабу виробництва та заміщення ресурсів та як можна застосувати на підприємстві ці ефекти.

18. Розкрийте зміст понять ізоклін та ізоквант.

19. На фабриці, що виробляє взуття, 5 працівників працюють на 5 верстатів і виробляють 1000 пар взуття за місяць. Якщо коефіцієнти еластичності ресурсів дорівнюють $\alpha = 0{,}25$; $\beta = 0{,}75$, знайти норму заміни на цьому підприємстві, тобто скільки можна скоротити працівників при придбанні додатково 1 верстату, щоб обсяг виробництва залишився незмінним.

20. На конвеєрі збирають телевізори шляхом з'єднання корпусу та кінескопа, тобто маємо фіксовані пропорції використання ресурсів ($c_1 = c_2 = 1$). Виробничою функцією підприємства є функція Леонтьєва. Якщо на конвеєр надійшло 200 корпусів та 500 кінескопів у місяць, то буде зібрано 200 телевізорів. Знайдіть у цьому випадку граничну продукцію першого ресурсу (корпуса) та граничну продукцію другого ресурсу (кінескопу). Побудувати криву виробництва (залежності обсягу виробництва) від кількості корпусів, що надійшло, при фіксованій кількості кінескопів (500 штук).

РОЗДІЛ IV. МОДЕЛЮВАННЯ СФЕРИ СПОЖИВАННЯ. Лекції 7 – 8

Мета: сформувати у здобувача представлення про функцію корисності, попиту. Навчити виявляти й оцінювати взаємозв'язок між двоїстими задачами споживчого вибору, формулювати й розв’язувати оптимізаційні задачі вибору споживача.

План

1. Уподобання споживача і його функція корисності.
2. Гранична корисність. Поверхні і криві байдужості. Норма заміни товарів.
3. Бюджетна множина і завдання споживчого вибору.
4. Мінімізація витрат споживача при заданому рівні корисності.
5. Формальний взаємозв'язок між подвійними проблемами споживчого вибору.
6. Залежність попиту від доходу споживача і цін на товари. Ефект заміщення і ефект доходу.
7. Особливий випадок оптимального вибору споживача.

Ключові терміни та поняття: споживач, корисність, попит, гранична корисність, байдужість, норми заміни, ефект заміщення, ефект доходу, закони Госсена, закон попиту Маршалла, рівняння Слуцького, коефіцієнти Слуцького, порядкова теорія корисності, теорія визначеної переваги.

4.1 Уподобання споживача і його функція корисності

Головна проблема при вивченні поведінки споживача полягає в тому, щоб встановити, в яких об'ємах він може придбати готівкові товари залежно від цін на ці товари і свого доходу. За одним з основних принципів економічної теорії, особа, приймаючі рішення, знає свої інтереси і діє так, аби збільшити свій добробут. Теорія корисності описує один з можливих підходів до формалізованого ухвалення рішень.

Рішення споживача про купівлю певного набору товарів можна уявити, як вибір конкретної точки в просторі товарів, тобто безлічі векторів-стовпців з невід’ємними компонентами.

Набір товарів

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in R_+^n,$$

де кожна компонента $x_k \geq 0, k = 1, \dots, n$, задає кількість товару k-го виду, що придбається споживачем за певний термін.

У теорії споживчого вибору передбачається, що кожен споживач має свої переваги на деякій підмножині X простору товарів. Це означає, що для кожної пари точок

$$\bar{x}^{(1)} \in X, \;\; \bar{x}^{(2)} \in X$$

має місце одне з трьох співвідношень:

$\bar{x}^{(1)} \succ \bar{x}^{(2)}$ – набір $\bar{x}^{(1)}$ краще, ніж $\bar{x}^{(2)}$;

$\bar{x}^{(1)} \prec \bar{x}^{(2)}$ – набір $\bar{x}^{(1)}$ менш кращий, ніж $\bar{x}^{(2)}$;

$\bar{x}^{(1)} \sim \bar{x}^{(2)}$ – набори $\bar{x}^{(1)}$ і $\bar{x}^{(2)}$ однаково гарні для споживача.

Відношення переваги на практиці виявляють експериментальним шляхом, порівнюючи набори товарів попарно і опитуючи споживача, якому товару він віддає перевагу. Реально таку роботу можна провести в разі невеликого числа товарів. Перевага споживача мінлива і залежить від багатьох умов: ціни товару, його доходу, запасу товарів, сезону, стану здоров'я, настрою і так далі. Тому не можна раз і назавжди прикріпити за споживачем незмінні принципи переваги.

Отже, при повторному моделюванні поведінки споживача його переваги потрібно формалізувати заново з урахуванням мінливих умов. В принципі немає нічого складного в тому, щоб взяти два набори товарів, запитати споживача, який з них він вважає кращим, і в результаті послідовного опитування знайти шукану закономірність. Набагато складніше виявити перевагу цільової групи людей або суспільства, позаяк неможливо по кожній парі наборів товарів проводити голосування або референдум і очікувати, що результати будуть однозначними. Розгляд питань «колективної переваги» споживчого сектора поки відкладемо.

Відношення переваги має *властивість транзитивності*:

якщо $\bar{x}^{(1)} \succ \bar{x}^{(2)} \; i \; \bar{x}^{(2)} \succ \bar{x}^{(3)}$, то $\bar{x}^{(1)} \succ \bar{x}^{(3)}$

Ставлення байдужості має наступні властивості:

1. *рефлексивність*: $\bar{x}^{(1)} \sim \bar{x}^{(1)}$;

2. *симетричність*: $\bar{x}^{(1)} \sim \bar{x}^{(2)}$, то $\bar{x}^{(2)} \sim \bar{x}^{(1)}$;

3. *транзитивність*: якщо $\bar{x}^{(1)} \sim \bar{x}^{(2)} \; i \; \bar{x}^{(2)} \sim \bar{x}^{(3)}$, то $\bar{x}^{(1)} \sim \bar{x}^{(3)}$.

Часто зручно припустити виконання передумови про **ненасичуваність**, згідно якої якщо в наборі $\bar{x}^{(1)}$ товари містяться в меншій кількості, ніж в наборі $\bar{x}^{(2)}$, а, принаймні, один товар представлено в більшій кількості, то для споживача набір $\bar{x}^{(1)}$ є кращим:

$$\bar{x}^{(1)} \succ \bar{x}^{(2)}.$$

Відношення переваги є досить незручним інструментом вивчення споживчого вибору. Воно є більше якісної категорією і не пристосоване для проведення кількісних досліджень. Тому потрібен інший механізм, який, з одного боку, був би адекватний даному відношенню переваги, тобто відбивав би всі його основні властивості, з іншого боку, був би чисельним індикатором ставлення переваги.

Таким механізмом є функція корисності. З функцією працювати зручніше, ніж з відношенням переваги, хоча останнє має і певні переваги. Якщо відношення переваги відображає схильність або побажання споживачів, то **функція корисності** відображає поняття вигідності товарів. **Корисність** розуміється як міра добробуту і як критерій правильності прийнятих рішень. Джерелом корисності є споживання товару. Термін *корисність* менш індивідуальний, ніж термін перевага. Дійсно, важче вгадати, чого людині хочеться, ніж визначити, що йому корисніше, позаяк факт, що x корисніше y , на відміну від x пріоритетніше за y, можна оцінити за числовою шкалою.

Функція корисності повинна бути побудована з урахуванням всіх тих об'єктивних і суб'єктивних умов, які впливають на перевагу споживача. При побудові функції корисності нюанси, пов'язані з поняттям корисності, враховуються тією обставиною, що ця функція будується суто на основі відносин переваги. При певних слабких припущеннях (теорема Дебре) для будь-якого відношення переваги можна побудувати функцію корисності, що буде його відображати.

Визначення 4.1 Функція

$$U = U(x_1, x_2, \dots, x_n) = U(\bar{x})$$

є функцією корисності для даних відносин переваги $\succ$ і байдужості $\sim$, якщо

з $\bar{x}^{(1)} \succ \bar{x}^{(2)}$ слідує, що $U\left(\bar{x}^{(1)}\right) > U\left(\bar{x}^{(2)}\right) і$

з $\bar{x}^{(1)} \sim \bar{x}^{(2)}$ слідує, що $U\left(\bar{x}^{(1)}\right) = U\left(\bar{x}^{(2)}\right)$

Зауваження 4.1 Подання переваг споживача у вигляді функції корисності є багатоваріантним. Наприклад, якщо $U(\bar{x}) -$ функція корисності, то функції $C \cdot U(\bar{x})$ і $\ln\left(U(\bar{x})\right)$ також можуть служити індикаторами переваг.

Зауваження 4.2 Введення функції корисності дозволяє замінити відносини переваги звичними відносинами між числами: більше, менше, дорівнює.

У теорії споживання передбачається, що функція корисності має такі властивості:

1. Зі зростанням споживання блага корисність зростає:

$$\frac{\partial U(\bar{x})}{\partial x_k} > 0 \text{ для будь} - \text{якого } k = 1,2, \dots, n.$$

2. Невеликий приріст блага при його первісному відсутності різко збільшує корисність:

$$\lim_{x_k \to 0+0} \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial x_k} = \infty \text{ для будь} - \text{якого } k = 1,2, \dots, n.$$

3. При дуже великому обсязі блага його подальше збільшення не призводить до збільшення корисності

$$\lim_{x_k \to \infty} \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial x_k} = 0 \text{ для будь} - \text{якого } k = 1,2, \dots, n.$$

4. Зі збільшенням споживання блага швидкість зростання корисності сповільнюється (закон убування граничної корисності)

$$\frac{\partial^2 U(\bar{x})}{\partial x_k^2} < 0 \text{ для будь} - \text{якого } k = 1,2, \dots, n.$$

Зауваження 4.3 Умову 4 зазвичай заміняють більш сильною вимогою опуклості (або навіть сильною опуклістю) функції корисності і, як наслідок, умовою існування розв'язку задачі максимізації функції корисності. Для сильно опуклих функцій корисності цей розв'язок буде єдиним.

При моделюванні задачі споживача найбільш вразливим місцем є функція корисності, оскільки потрібно адекватно відображувати переваги індивідуального споживача. Найбільш загальними для побудови функцій корисності є *методи регресійного аналізу*, які застосовуються при наявності відповідного статистичного матеріалу. Для обраного виду функції корисності на основі цих даних оцінюються її коефіцієнти (параметри). Складність методу залежить від класу функцій (лінійних, квадратичних, статечних і інших) в якому шукають функцію корисності.

4.2 Гранична корисність. Поверхні і криві байдужості. Норма заміни товарів

Визначення 4.2 Граничною корисністю k-го товару називається границя відношення приросту корисності ΔU до викликав цей приріст збільшенню товару Δx_k (при $\Delta x_k \to 0$ і незмінних кількостях інших товарів), тобто часткову похідну:

$$MU_{x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \left(\frac{\Delta U}{\Delta x_k} \right) = \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial x_k}.$$

Гранична корисність показує, на скільки зростає корисність при зростанні товару на малу величину.

Визначення 4.3. Поверхнею байдужості називається множина точок (наборів в просторі товарів), корисність яких з точки зору споживача однакова:

$$U(\bar{x}) = U_0 = const.$$

Для функція корисності, що залежить від двох змінних (товарів)

$$U = U(x_1, x_2)$$

поверхні байдужості перетворюються в криві байдужості, які представляють собою лінії рівня функції корисності двох змінних і можуть бути зображені графічно (рис. 4.1).

Вид і властивості кривих байдужості аналогічні властивостям ізоквант виробничої функції двох змінних:

1. Криві байдужості не перетинають одна одну.

2. Чим далі від початку координат (до північно-східному напрямку) розташована крива байдужості, тим вищим є рівень корисності вздовж неї.

3. Криві байдужості мають від'ємний кутовий коефіцієнт.

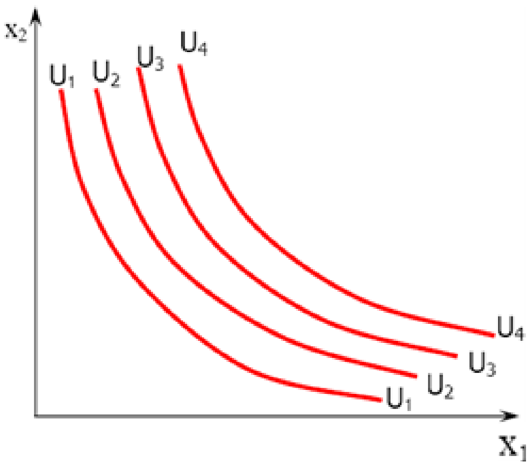

Рис. 4.1. Криві байдужості

З точки зору споживача наявність множини наборів товарів, що володіють однаковою корисністю (тобто однаковим ступенем переваги) означає можливість заміни одного набору товарів іншим рівноцінним набором, в тому числі можливість заміни одного товару іншим.

Визначення 4.4 Норма заміни $RS_{i,j}$ товару i товаром j показує ту кількість товару j, який буде потрібно, щоб замінити одну вибулу одиницю товару i, залишаючись при цьому на тій же самій поверхні байдужості (тобто на тому ж самому рівні корисності):

$$RS_{i,j} = -\frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}\bigg|_{U=const}.$$

При $\Delta x_i \to 0$ переходимо до границі і замінюємо позначення $RS_{i,j}$ на $MRS_{i,j}$ або $N_{i,j}$ **:**

$$MRS_{i,j} = N_{i,j} = -\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\bigg|_{U=const}.$$

Оскільки в будь-якій точці поверхні байдужості

$$U(\bar{x}) = U_0 = const,$$

то повний диференціал функції корисності в будь-якій точці поверхні байдужості тотожно дорівнює нулю:

$$dU(\bar{x}) = \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial x_n}dx_n = 0. \tag{4.1}$$

Нехай в співвідношенні (4.1) відмінні від нуля тільки два збільшення товарів: $dx_i \neq 0$ і $dx_j \neq 0$. Тоді це співвідношення набуде вигляду:

$$\frac{\partial U(\bar{x})}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial x_j}dx_j = 0,$$

звідки

$$-\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{\left(\dfrac{\partial U(\bar{x}^*)}{\partial x_i}\right)}{\left(\dfrac{\partial U(\bar{x}^*)}{\partial x_j}\right)} = N_{i,j}, \quad i,j = 1,2,\dots,n,$$

тобто гранична норма заміни дорівнює відношенню граничної корисності товарів і показує кількість товару j, необхідну для заміни малої кількості товару i, залишаючись при цьому на тій же самій поверхні байдужості (тобто на тому самому рівні корисності).

Зауваження 4.4 Для функції корисності від двох змінних гранична норма заміщення має простий геометричний зміст: MRS вимірює нахил кривої байдужості в кожній окремій точці (див. рис. 4.2):

$$\frac{dx_2}{dx_1} = tg\beta; \quad MRS = -\frac{dx_2}{dx_1} = tg\alpha.$$

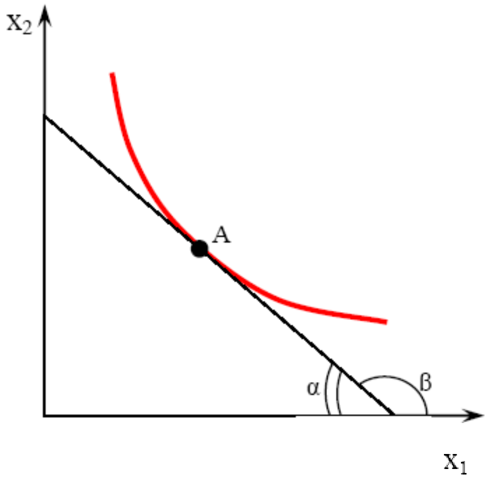

Рис. 4.2. Кут нахилу кривої байдужості

4.3 Бюджетна множина і завдання споживчого вибору

Визначення 4.5 Бюджетна множина

$$B = \{\bar{x} \in R_+^n: \ p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n \leq I\}$$

є множина всіх товарних наборів $\bar{x}$ доступних для споживача, яка стикається з ринковими цінами

$$\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

на товари і має дохід I.

Звідси проблема споживача може бути сформульована як вибір товарного набору $\bar{x}$ з множини B при наявних цінах $\bar{p}$ і доході I.

Зауваження 4.5 Верхня межа бюджетного множини для випадку двох товарів називається бюджетною лінією. Усі товарні набори, розташовані на ній, доступні для споживача тільки за умови повного витрачання грошового доходу I. Рівняння бюджетної лінії виглядає наступним чином:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$$

і графічно являє собою відрізок прямої, що потрапила в першу координатну чверть. Зміна доходу призводить до паралельного зсуву бюджетної лінії, зміна цін на товари змінює нахил бюджетної лінії (рис. 4.3)

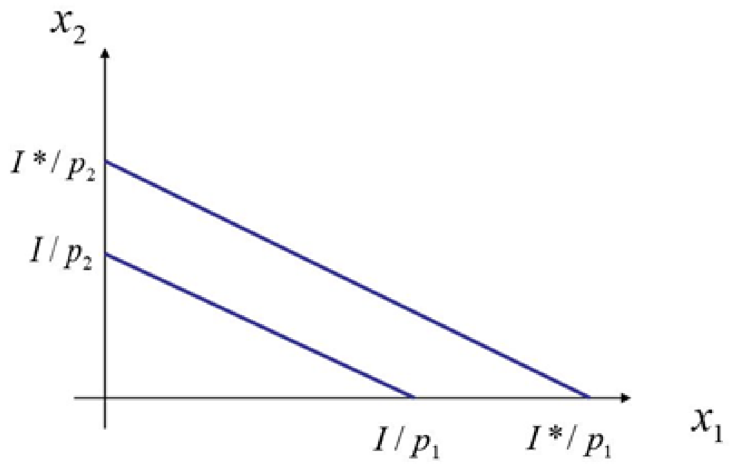

Рис. 4.3. Розташування бюджетної лінії при $I^* > I$

Припишемо бюджетній множині деякі властивості, які стануть важливими передумовами для подальшого аналізу поведінки споживача.

По-перше, припустимо, що бюджетна множина є обмеженою. Мається на увазі те, що жодна з цін на товари не є нульовою:

$$p_k > 0, \ \ k = 1,2, \dots, n.$$

По-друге, припустимо, що бюджетна множина є замкнутою. Це означає, що будь-який товарний набір, розташований на межі бюджетної множини є доступним для споживача. Отже, ми будемо розглядати і ситуації, коли одне з благ взагалі не споживається індивідом.

По-третє, будемо припускати, що бюджетна множина є не порожньою. Це означає, що дохід споживача $I > 0$ і ціна хоча б одного з благ така, що індивід зможе купити позитивне кількість даного блага. Іншими словами, ми не розглядаємо виродженим випадок, коли

$$x_k = 0, \qquad \forall\, k = 1,2, \dots, n.$$

У теорії споживання передбачається, що споживач прагне максимізувати свою корисність і єдине, що його стримує, – це обмеження доходу. Таким чином, задача споживчого вибору може бути формалізована у вигляді задачі нелінійної оптимізації:

$$U = U(x_1, x_2, \dots, x_n) = U(\bar{x}) \to max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \le I, \\ x_k \ge 0, \ \ k = 1,2, \dots, n. \end{cases} \tag{4.2}$$

Ми можемо спростити це завдання. Оскільки функція корисності зростає при збільшенні споживання товарів, то споживач максимізуючи корисність, буде змушений витрачати весь свій дохід на покупку товарів. Це дозволяє перетворити перше обмеження-нерівність з (4.2) в обмеження-рівність:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = I.$$

Складніше йде справа з обмеженнями другого типу в завданню (4.2). В принципі можливо таке рішення задачі споживчого вибору, при якому деякі з благ не споживаються нашим індивідом взагалі, тобто деякі $x_k = 0$. Таке рішення називається кутовим. Кутове рішення задачі споживчого вибору ми розглянемо окремо дещо пізніше. А зараз введемо ще одну додаткову спрощує аналіз передумову. Припустимо, що наше завдання має рішення у вигляді «внутрішнього» максимуму, при якому споживач купує ненульові кількості всіх благ з товарного набору, тобто

$$x_k > 0,\ \ k = 1,2,\ldots,n.$$

Тоді проблема максимізації корисності при заданому бюджетному обмеженні приймає наступний вигляд:

$$U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = U(\bar{x}) \to max$$

при обмеженнях

$$I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_n = 0. \qquad (4.3)$$

Легко бачити, що ми маємо справу зі звичайною завданням на умовний екстремум, яку можна вирішити, використовуючи метод множників Лагранжа. Введемо функцію Лагранжа:

$$L(\bar{x}) = U(\bar{x}) + \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_n).$$

Необхідною умовою існування максимуму функції Лагранжа в точці $\bar{\boldsymbol{x}}^*$ є виконання рівності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U(\bar{x}^*)}{\partial x_k} = \dfrac{\partial U(\bar{x}^*)}{\partial x_k} - \lambda p_k = 0,\ \ k = 1,2,\ldots,n; \\ p_1x_1^* + p_2x_2^* + \cdots + p_nx_n^* = I. \end{cases} \qquad (4.4)$$

У припущенні про угнутості функції корисності отримані умови (4.4) є не тільки необхідними, але і достатніми і визначають точку умовного максимуму функції $\boldsymbol{U}(\bar{\boldsymbol{x}})$ при наявності бюджетного обмеження.

З перших n рівнянь (4.4) випливає, що

$$\frac{\partial U(\bar{x}^*)}{\partial x_k} = \lambda p_k,\ \ k = 1,2,\ldots,n,$$

тобто споживач при фіксованому доході так вибирає набір $\bar{x}^*$, що в цій точці відношення часткових похідних функції корисності (вони ж граничні корисності товару) рівні відносин цін на ці товари:

$$\frac{\partial U(\bar{x}^*)}{\partial x_1} : \frac{\partial U(\bar{x}^*)}{\partial x_2} : \ldots : \frac{\partial U(\bar{x}^*)}{\partial x_n} = p_1 : p_2 : \ldots : p_n.$$

Перепишемо ці співвідношення трохи по-іншому:

$$\frac{\left(\frac{\partial U(\bar{x}^*)}{\partial x_i}\right)}{\left(\frac{\partial U(\bar{x}^*)}{\partial x_j}\right)} = N_{i,j} = \frac{p_i}{p_j}, \quad i,j = 1,2, \ldots, n,$$

і сформулюємо очевидний економічний висновок: **в точці оптимального вибору гранична норма заміщення одного блага іншим зі споживчого набору дорівнює співвідношенню цін цих двох благ**.

Отримані співвідношення повністю аналогічні тим, що були отримані в задачі максимізації випуску. Замість ВФ – тут функція корисності, замість ізокости – бюджетна лінія. У двовимірному випадку отримуємо подібну геометричну інтерпретацію задачі: оптимальна точка є точкою дотику фіксовано] бюджетної лінії і деякої кривої байдужості, на якій і досягається оптимальне значення корисності споживача (рис. 4.4).

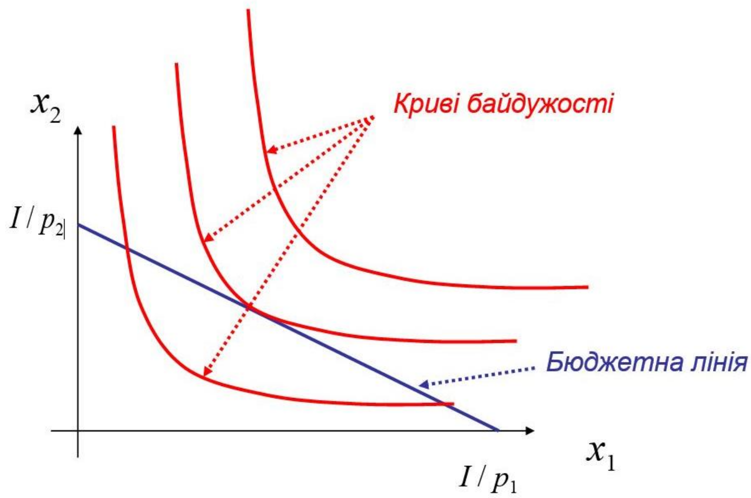

Рис. 4.4. Криві байдужості і бюджетна лінія

Якщо вирішити систему рівнянь (4.4) в загальному вигляді (не приписуючи цінами і доходу конкретних числових значень), то оптимальна кількість кожного блага постануть як функції від цін і доходу:

$$\begin{cases} x_1^* = d_1(p_1, p_2, \ldots, p_n, I) = d_1(\bar{p}, I), \\ x_2^* = d_2(p_1, p_2, \ldots, p_n, I) = d_2(\bar{p}, I), \\ \ldots \\ x_n^* = d_n(p_1, p_2, \ldots, p_n, I) = d_n(\bar{p}, I). \end{cases}$$

Ці функції називаються функціями некомпенсованого попиту споживача (чому некомпенсованого – обговоримо пізніше). Їх також називають **функціями маршаліанського попиту** на честь великого економіста Альфреда Маршала.

Зауважимо, що некомпенсований попит не змінюється при пропорційній зміні ціни товарів і доходів споживача. Дійсно, для будь-якого множника $\alpha > 0$, отримуємо, що при зміні цін і доходу в однакове число α раз бюджетне обмеження

$$\alpha p_1 x_1 + \alpha p_2 x_2 + \cdots + \alpha p_n x_n = \alpha I$$

рівносильно вихідній умові

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n \leq I.$$

Геометрично – бюджетна лінія залишається на місці. А значить, оптимальне рішення, тобто кількість кожного з благ, що купуються споживачем на ринку залишається незмінним.

Звідси випливає важлива властивість функцій некомпенсованого попиту - їх однорідність нульової ступеня щодо цін і доходу:

$$d_k(\alpha p_1, \alpha p_2, \dots, \alpha p_n, \alpha I) = d_k(p_1, p_2, \dots, p_n, I), \qquad k = 1,2, \dots, n.$$

Завдання: Вирішити задачу споживчого вибору і знайти функції некомпенсованого попиту для функції корисності Кобба-Дугласа від двох змінних.

Вирішуючи задачу споживчого вибору, ми знайшли оптимальні кількості благ у товарному наборі, максимізує корисність споживача. Тепер ці значення можуf підставити в первісну функцію корисності отримати функцію

$$U^*(\bar{p}, I) = U(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = U(d_1(\bar{p}, I), d_2(\bar{p}, I), \dots, d_n(\bar{p}, I)),$$

яка називається **функцією непрямої корисності**.

Оскільки споживач бажає максимізувати корисність при заданому бюджетному обмеженні, то одержуваний оптимальний рівень корисності буде побічно (НЕ прямо) залежати від цін, за якими товари купуються на ринку і від доходу споживача. Ця залежність і представлена в непрямій функції корисності.

Якщо або ціни, або дохід змінюється, то рівень корисності, який може бути досягнутий, виявиться під впливом цих змін.

4.4 Мінімізація витрат споживача при заданому рівні корисності

Будь-яке завдання максимізації функції при наявності обмеження пов'язана зі своєю двоїстої проблемою - завданням мінімізації функції (нею стане обмеження з першого завдання) при заданому новому обмеження (яким стає цільова функція з початкової завдання). Так, наприклад, економісти виходячи з того, що індивіди максимізують свою корисність при заданому бюджетному обмеженні. Це і є первинна проблема споживача. Двоїстої до неї проблем є мінімізація витрат, які необхідно зробити споживачеві, для того, щоб досягти деякого заданого рівня корисності (аналогічне завдання вирішували і в теорії виробництва).

Формалізуємо проблему мінімізації витрат споживача при заданому рівні корисності $\widetilde{U}$. Використовуємо практично ті ж самі передумови, що і в задачі максимізації корисності, при заданому бюджетному обмеженні. Нехай необхідний рівень корисності

$$\widetilde{U} > U(0,0,\dots,0) = 0,$$

і наше завдання має рішення у вигляді внутрішнього мінімуму, при якому споживач купує тільки позитивні, а не нульові кількості всіх благ їх товарного набору, тобто

$$x_k > 0,\ \ k = 1,2,\dots,n.$$

У цьому випадку завдання про мінімізацію витрат при заданому рівні корисності перетворюється в стандартну задачу про відшукання умовного мінімуму функції

$$E = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \to min$$

при обмеженні

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \widetilde{U}.$$

Перетворимо її в задачу на максимум

$$-E = -p_1x_1 - p_2x_2 - \dots - p_nx_n \to max$$

при обмеженні

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) - \widetilde{U} = 0$$

і вирішимо методом множників Лагранжа.

Функція Лагранжа цього завдання має вигляд

$$L(\bar{x}) = -p_1x_1 - p_2x_2 - \dots - p_nx_n + \lambda'\big(U(\bar{x}) - \widetilde{U}\big).$$

Необхідною умовою існування її максимуму в точці $\bar{\boldsymbol{x}}^*$ являють собою систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\bar{x}^*)}{\partial x_k} = \lambda' \dfrac{\partial U(\bar{x}^*)}{\partial x_k} - p_k = 0, \quad k = 1,2,\dots,n; \\ U(\bar{x}^*) - \widetilde{U} = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Другі похідні функції Лагранжа $L(\bar{x})$ в цьому завданні збігаються з матрицею других похідних функції корисності $U(\bar{x})$ точністю до множника λ' (Причому , як випливає з щойно отриманих співвідношень, $\lambda' > 0$). Отже,

$$d^2\, L(\bar{x}^*) = \lambda' d^2 U(\bar{x}^*)$$

і другі диференціали мають однакові знаки.

У припущенні про угнутості функції корисності, це означає, що умова (4.5) є не тільки необхідними, але і достатніми, і дійсно визначають точку умовного максимуму функції $(-\boldsymbol{E})$ і, відповідно, точку умовного мінімуму функції $\boldsymbol{E}$ при заданому рівні корисності $\widetilde{\boldsymbol{U}}$**.**

З (4.5) отримуємо, що для оптимального товару, що володіє найменшою вартістю і забезпечує заданий рівень корисності, справедливі стандартні співвідношення часткових похідних і цін:

$$\frac{\left(\dfrac{\partial U(\bar{x}^*)}{\partial x_1}\right)}{p_1} = \frac{\left(\dfrac{\partial U(\bar{x}^*)}{\partial x_2}\right)}{p_2} = \cdots = \frac{\left(\dfrac{\partial U(\bar{x}^*)}{\partial x_n}\right)}{p_n} = \frac{1}{\lambda'}, \tag{4.6}$$

або

$$\frac{\left(\dfrac{\partial U(\bar{x}^*)}{\partial x_i}\right)}{\left(\dfrac{\partial U(\bar{x}^*)}{\partial x_j}\right)} = N_{i,j} = \frac{p_i}{p_j}, \quad i,j = 1,2,\dots,n,$$

– такі самі, що були отримані в завданні споживчого вибору: в точці оптимального вибору гранична норма заміщення одного блага іншим повинна бути дорівнює співвідношенню цін цих двох благ.

У двовимірному випадку отримуємо геометричну інтерпретацію задачі: оптимальна точка є точкою дотику фіксованою кривої байдужості і деякої бюджетної лінії, на якій і досягається мінімум витрат споживача (рис. 4.5).

Якщо вирішити систему рівнянь (4.5) в загальному вигляді (Не приписуючи цінам і необхідному рівню корисності конкретні числові значення), то оптимальні кількості кожного блага постануть як функції від цін і бажаного споживачем рівня корисності:

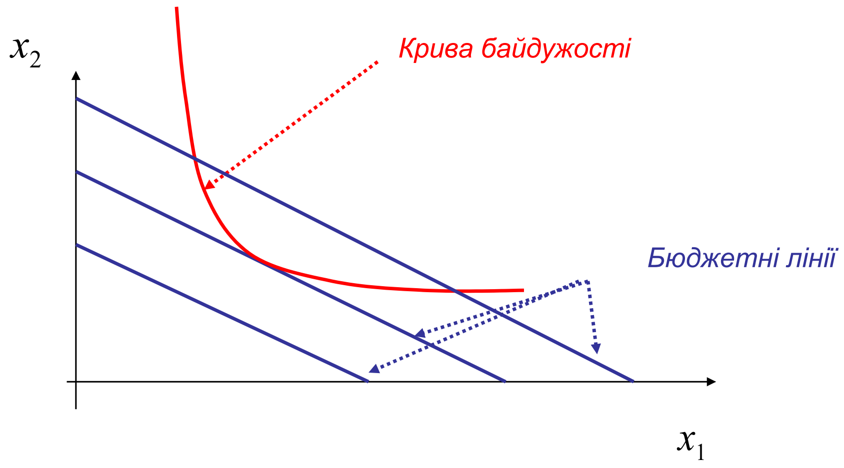

Рис. 4.5. Байдужні лінії та крива байдужості

$$\begin{cases} x_1^* = h_1(p_1, p_2, \dots, p_n, \widetilde{U}) = h_1(\bar{p}, \widetilde{U}), \\ x_2^* = h_2(p_1, p_2, \dots, p_n, \widetilde{U}) = h_2(\bar{p}, \widetilde{U}), \\ \dots \\ x_n^* = h_n(p_1, p_2, \dots, p_n, \widetilde{U}) = h_n(\bar{p}, \widetilde{U}). \end{cases}$$

Ці функції називаються функціями компенсованого попиту споживача. На відміну від функцій попиту, отриманих під час вирішення завдання максимізації корисності, коли кількість запитуємо товарів залежало від цін і від доходу, функції попиту, отримані при вирішенні завдання мінімізації витрат , відображають залежність кількості запитуваного товару від цін на ці товари, а також від деякого фіксованого рівня корисності, на якому хоче залишатися споживач. Чому цей попит називається компенсованим, ми обговоримо пізніше. Хіксіанським він називається на честь знаменитого економіста Джона Хікса .

Якщо зміниться ціна на будь-який з блага в споживчому наборі або якщо метою споживача стане інший рівень корисності , то стане оптимальним і інший товарний набір. Ця залежність може бути представлена як функція витрат споживача:

$$E^*(\bar{p}, \widetilde{U}) = p_1 x_1^* + p_2 x_2^* + \dots + p_n x_n^* =$$
$$= p_1 h_1(\bar{p}, \widetilde{U}) + p_2 h_2(\bar{p}, \widetilde{U}) + \dots + p_n h_n(\bar{p}, \widetilde{U}).$$

Функція $E^*(\bar{p}, \widetilde{U})$ називається функцією витрат споживачів. Вона показує мінімальні грошові витрати, які повинен зробити споживач, щоб досягти деякого заданого рівня корисності, при певних цінах, що склалися на ринку.

Завдання: Вирішити задачу мінімізації витрат і визначити функції компенсованого попиту для функції корисності Кобба-Дугласа від двох змінних.

4.5 Формальна взаємозв'язок між подвійними проблемами споживчого вибору

У загальному випадку функції компенсованого попиту і некомпенсованого попиту абсолютно різні (порівняйте виведені функції попиту для функції попиту і для функції корисності Кобба-Дугласа), хоча умова максимізації корисності і мінімізації витрат ідентичні. Але в одному випадку оптимальний набір з завдання максимізації корисності і оптимальний набір з завдання, двоїстої до неї, будуть ідентичні. Це дуже важливе твердження, яке знадобитися при виводі рівняння Слуцького, тому сформулюємо його докладно:

1. Якщо $\bar{x}^*$ є оптимальним споживчим набором в проблемі максимізації корисності при доході $I > 0$, то $\bar{x}^*$ є оптимальним набором і в задачі мінімізації витрат, за умови, що необхідний рівень корисності є $U(\bar{x}^*)$. Крім того, мінімальні рівень витрат в даній задачі в точності дорівнює доходу споживача.

2. Якщо $\bar{x}^*$ є оптимальним споживчим набором в задачі мінімізації витрат при необхідному рівні корисності $\widetilde{U} > 0$, то $\bar{x}^*$ є оптимальним набором і в проблемі максимізації корисності, за умови, що дохід споживача

$$I = p_1 x_1^* + p_2 x_2^* + \cdots + p_n x_n^*.$$

Крім того, максимальний рівень корисності в цьому випадку в точності дорівнює $\widetilde{U} -$ необхідному значенню корисності з завдання мінімізації витрат.

З сформульованого тільки що **принципу двоїстості** можна отримати кілька важливих тотожностей, які розкривають зв'язок між непрямої функцією корисності і функції витрат, а також між функціями компенсованого і некомпенсованого попиту.

Отже, для будь-яких $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0, I > 0, \widetilde{U} > 0$ виконані співвідношення:

$$E^*(\bar{p}, U^*(\bar{p}, I)) \equiv I;$$

$$U^*\big(\bar{p}, E^*(\bar{p}, \widetilde{U})\big) \equiv \widetilde{U};$$

$$d_k(\bar{p}, I) \equiv h_k\big(\bar{p}, U^*(\bar{p}, I)\big);$$

$$h_k\big(\bar{p}, \widetilde{U}\big) \equiv d_k\big(\bar{p}, E^*(\bar{p}, \widetilde{U})\big).$$

4.6 Залежність попиту від доходу споживача і цін на товари. Ефект заміщення і ефект доходу

Легко бачити, що кількість запитуваного на ринку товару - це функція, зокрема від наступних змінних:

- ціни даного товару;

- цін інших товарів зі споживчого набору;

-дохід споживача.

У наших моделях ми всюди припускаємо, що інші фактори попиту (смаки споживача, очікування щодо цін і доходу в майбутньому) залишаються незмінними (постійними), не впливають на наш аналіз і можуть бути проігноровані нами.

Розглянемо спочатку, як зміниться попит на товар при зміні доходу споживача. Вирішуючи задачу про максимізації функції корисності, ми отримали функції некомпенсованого попиту на товар виду $\boldsymbol{k}$:

$$x_k^* = d_k(p_1, p_2, \dots, p_n, I) = d_k(\bar{p}, I), k = 1,2, \dots, n.$$

Їх часткові похідні по доходу I показують, як реагує попит на товар виду k при зміні доходу.

Визначення 4.6 Товар k називається цінним (або нормальним благом), якщо при збільшенні доходу на попит на нього зростає:

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial I} = \frac{\partial d_k(\bar{p}, I)}{\partial I} > 0.$$

Визначення 4.7 Якщо попит на цінний товар k росте швидше, ніж зростає дохід, тобто друга похідна по доходу

$$\frac{\partial^2 x_k^*}{\partial I^2} = \frac{\partial^2 d_k(\bar{p}, I)}{\partial I^2} > 0,$$

то такий товар відносять до предметів розкоші.

Визначення 4.8 Якщо попит на цінний товар k росте повільніше, ніж зростає дохід, тобто друга похідна по доходу

$$\frac{\partial^2 x_k^*}{\partial I^2} = \frac{\partial^2 d_k(\bar{p}, I)}{\partial I^2} < 0,$$

то такий товар відносять до предметів першої необхідності.

Визначення 4.9 Товар k називається **малоцінних** (або **інферіорним** благом), якщо при збільшенні доходу попит на нього не збільшується (або спадає):

$$\frac{\partial^2 x_k^*}{\partial I^2} = \frac{\partial^2 d_k(\bar{p}, I)}{\partial I^2} \leq 0$$

(див. рис. 4.6)

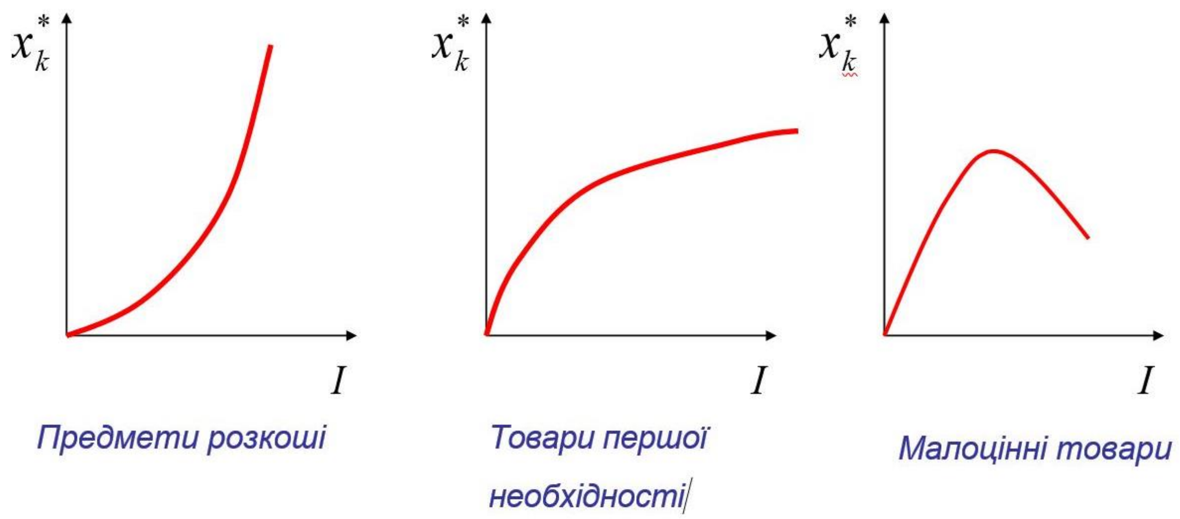

Рис. 4.6. Криві залежності попиту на товар від доходу

Більш складне явище, ніж вплив зміна доходу, являє собою вплив на попит зміни ціни даного або будь-якого іншого товару.

Загальна зміна попиту на товар k у відповідь на зміну ціни товару j відображає часткова похідна функції некомпенсованого попиту

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial p_j} = \frac{\partial d_k(\bar{p}, I)}{\partial p_j}, k, j = 1,2, \dots, n.$$

Насправді при зміні ціни деякого товару виникають два аналітично різних ефекту.

Розглянемо, наприклад, випадок зменшення ціни одного з товарів при сталості цін інших товарів. При цьому відбувається зниження відносної ціни цього товару (даний товар дешевшає по відношенню до інших товарів). У той же час, хоча номінальні (грошові) ціни інших товарів залишаються незмінними, вони стають дорожчими відносного даного товару. Споживач буде прагнути заміщати щодо подорожчали блага товаром, щодо подешевшали. Попит на долар, що подешевшав товар зросте, а попит на товари, ціна на які не змінилася, відповідно, впаде. У цьому полягає суть ефекту заміщення.

Крім цього, зменшення ціни деякого товару призводить до збільшення реального доходу споживача, так як на той же самий номінальний (грошовий) дохід споживач може купити більшу кількість благ. В результаті зміна реального доходу споживач переміщується на іншу поверхню байдужості, що має інше значення функції корисності. У цьому полягає суть ефекту доходу.

У реальному житті ефект заміщення і ефект доходу невіддільні одна від одної. Для того, щоб теоретично виокремити ефект заміщення із загального зміни попиту у відповідь на зміну ціни товару, слід елімінувати ефект доходу. Зробимо це за допомогою функцій компенсованого попиту на товар виду k, виведених в завданню про мінімізацію витрат:

$$x_k^* = h_k\left(p_1, p_2, \dots, p_n, \widetilde{U}\right) = d_k\left(\bar{p}, \widetilde{U}\right), k = 1,2, \dots, n.$$

Функції компенсованого попиту, як уже зазначалося, відображають залежність кількості запитуємо товарів від цін на ці товари і від деякого фіксованого рівня корисності, на якому повинен залишатися споживач. Економічно це означає наступне: якщо ціна j товару зростає, то споживачеві потрібно видати певну суму грошей, компенсацію для того, щоб залишитися на колишньому рівні корисності і не переміститися на більш низьку поверхню байдужості. Якщо ж в результаті зниження ціни у споживача вивільнилася деяка сума грошей, то цю суму грошей потрібно вилучити у нього для того, щоб рівень корисності залишився незмінним. Це можна назвати компенсацією зі знаком «мінус». За рахунок компенсації ефект доходу елімінується.

Дамо геометричну інтерпретацію ефекту заміщення і ефекту доходу для випадку $n = 2$.

Нехай

$$\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$$

– оптимальні значення некомпенсованого попиту в задачі максимізації корисності при цінах на товари

$$\bar{p} = (p_1, p_2).$$

Припустимо, що знижується ціна першого товару до величини

$$\hat{p}_1 < p_1.$$

Тоді змінюється нахил бюджетної лінії (рис. 4.6). Оскільки криві байдужості функції корисності заповнюють всю економічну область, то обов'язково знайдеться одна крива байдужості, що має з новою бюджетною лінією точку дотику. Позначимо цю точку

$$\bar{x}^{**} = (x_1^{**}, x_2^{**})$$

Вона відповідає оптимальним значенням некомпенсованого попиту при нових цінах.

Координати точки $\bar{x}^{**}$ порівняно з $\bar{x}^*$ враховують ефект заміщення, і ефект доходу. Зауважимо, що споживач перемістився з кривою байдужості з рівнем корисності $U^* = U(\bar{x}^*)$на нову криву байдужості з більш високим рівнем корисності $U^{**} = U(\bar{x}^{**})$ (за рахунок зміни реального доходу). Щоб прибрати ефект доходу, здійснимо компенсацію зі знаком «мінус». Формально потрібно «вилучити» у споживача таку частину його доходу, щоб він, при умовах, що змінилися ціни на товари, залишився на старому рівні корисності U^*.

Геометрично ми повинні побудувати до старої кривої байдужості дотичну, паралельну новій бюджетній лінії. Аналітично – ми вирішуємо завдання про мінімізацію витрат при заданих (нових) цінах $\bar{p} = (\hat{p}_1, p_2)$ і старому рівні корисності $\boldsymbol{U}^*$, тобто шукаємо функції компенсованого попиту. Шукану точку гойдання позначимо

$$\bar{x}^{comp} = (x_1^{comp}, x_2^{comp})$$

Розглянемо зміну попиту на перший товар. Загальна зміна попиту, величина

$$x_1^{**} - x_1^* > 0;$$

являє собою суму двох складових, ефект заміщення:

$$x_1^{comp} - x_1^* > 0;$$

і ефект доходу:

$$x_1^{**} - x_1^{comp} > 0.$$

Завдання: вивчити геометрично зміна попиту на другий товар, ефект заміщення і ефект доходу, а також дослідити поведінку цих величин і їх знаки величини при зростанні ціни.

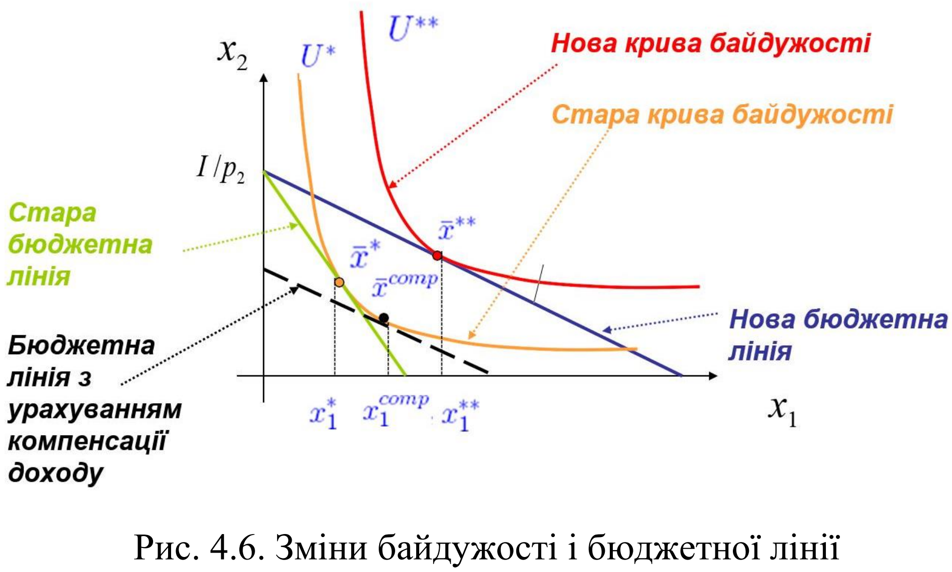

Рис. 4.6. Зміни байдужості і бюджетної лінії
з урахуванням компенсації доходу

Виведемо рівняння Слуцького, в якому пояснюється теоретично зв'язок некомпенсованого попиту, ефекту заміщення і ефекту доходу.

З принципу подвійності задач максимізації корисності і мінімізації витрат випливає кілька важливих тотожностей, два з яких використовується при виводі рівняння Слуцького:

1. У точці $\bar{x}^*$, що є спільним рішенням цих двоїстих задач мінімальне значення функції витрат споживача в точності так само доходу споживача (при тому, що необхідний рівень корисності $\widetilde{U}$ дорівнює максимуму функції корисності $U(\bar{x}^*)$)

$$E^*(p_1, p_2, \dots, p_n, \widetilde{U}) \equiv I. \tag{4.7}$$

2. Значення функцій компенсованого і некомпенсованого попиту в цій точці $\bar{x}^*$ збігаються

$$h_k\big(p_1, p_2, \dots, p_n, \widetilde{U}\big) \equiv d_k\big(p_1, p_2, \dots, p_n, E^*(p_1, p_2, \dots, p_n, \widetilde{U})\big). \tag{4.8}$$

Лема 4.1 (**Шепарда**). Часткова похідна функції витрат за ціною j-го товару дорівнює значенню функції компенсованого попиту на цей товар.

$$\frac{\partial E^*(p_1, p_2, \dots, p_n, \widetilde{U})}{\partial p_j} = h_j\big(p_1, p_2, \dots, p_n, \widetilde{U}\big) = x_j^*, \;\; j = 1,2, \dots, n.$$

Для того, щоб відстежити реакцію попиту на k-й товар у відповідь на зміну ціни j-го товару, диференціюємо тотожність (4.8) по ціні товару p_j, враховуючи, що p_j двічі входить в функцію некомпенсованого попиту і потрібно застосувати формулу для диференціювання складної функції декількох змінних:

$$\frac{\partial h_k(p_1, \dots, p_n, \widetilde{U})}{\partial p_j} = \frac{\partial d_k(p_1, \dots, p_n, E^*(p_1, \dots, p_n, \widetilde{U}))}{\partial p_j} +$$

$$+ \frac{\partial d_k(p_1, \dots, p_n, E^*(p_1, \dots, p_n, \widetilde{U}))}{\partial I} \cdot \frac{\partial E^*(p_1, p_2, \dots, p_n, \widetilde{U})}{\partial p_j}, \qquad k, j = 1,2, \dots, n.$$

Використовуємо рівність функції витрат доходу споживача (4.7) і лему Шепарда, перепишемо рівняння у вигляді:

$$\frac{\partial h_k(p_1, \dots, p_n, \widetilde{U})}{\partial p_j} = \frac{\partial d_k(p_1, \dots, p_n, I)}{\partial p_j} + \frac{\partial d_k(p_1, \dots, p_n, I)}{\partial I} \cdot x_j^*.$$

Переносимо один доданок в іншу частину рівняння, і отримуємо рівняння Слуцького:

$$\frac{\partial d_k(p_1, \dots, p_n, I)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_k(p_1, \dots, p_n, \widetilde{U})}{\partial p_j} - \frac{\partial d_k(p_1, \dots, p_n, I)}{\partial I} \cdot x_j^*.$$

Проаналізуємо це рівняння. Вираз в лівій частині рівняння Слуцького

$$\frac{\partial d_k(p_1, p_2, \dots, p_n, I)}{\partial p_j}$$

відображає зміну в некомпенсованому попиті споживача k-й товар при нескінченно малій зміні ціни j-го товару. Як вже було сказано, це зміна є сума двох цих ефектів - заміщення і доходу. Вони представлені в правій частині рівняння Слуцького.

Вираз

$$\frac{\partial h_k(p_1, \dots, p_n, \widetilde{U})}{\partial p_j}$$

являє собою зміну в компенсованій попиті споживача k-й товару при нескінченно малій зміні ціни j-го товару. Як відомо, в компенсованому попиті елімінувати ефект доходу, отже, це доданок відображає ефект заміщення в чистому вигляді. Звідси зрозуміло, що другий доданок в правій частині рівняння

$$-\frac{\partial d_k(p_1, \dots, p_n, I)}{\partial I} \cdot x_j^*$$

відображає ефект доходу, який виникає за рахунок зміни реального доходу споживача при зміні ціни j -го товару.

У деяких підручниках рівняння Слуцького може бути представлено в дещо іншому (більш зручному для запису) вигляді:

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial p_j} = \left.\frac{\partial x_k^*}{\partial p_j}\right|_{comp} - \frac{\partial x_k^*}{\partial I} \cdot x_j^*, \quad k, j = 1,2, \dots, n.$$

Тут просто використані інші позначення, що не змінює змісту рівняння.

Особливий інтерес представляє рівняння Слуцького, в якому відстежується зміна попиту на товар в залежності від зміни ціни цього ж товару.

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial p_k} = \left.\frac{\partial x_k^*}{\partial p_k}\right|_{comp} - \frac{\partial x_k^*}{\partial I} \cdot x_k^*, \qquad k = 1,2, \dots, n.$$

Рівняння Слуцького дозволяє дати пояснення напрямку ефекту заміщення і ефекту доходу. Припустимо, що ціна деякого блага збільшується. Тоді, в результаті дії ефекту заміщення, споживач скоротить споживання цього блага, замінюючи його іншими, дешевшими товарами. Отже, ефект заміщення в цьому випадку буде мати негативний знак:

$$\left.\frac{\partial x_k^*}{\partial p_k}\right|_{comp} < 0.$$

Два товари k і j є взаємозамінними, якщо

$$\left.\frac{\partial x_k^*}{\partial p_j}\right|_{comp} > 0.$$

і взаємодоповнюючими, якщо

$$\left.\frac{\partial x_k^*}{\partial p_j}\right|_{comp} < 0.$$

Знак ефекту доходу залежить від того, з яким благом ми маємо справу: з нормальним або інферіорним. Припустимо, що даний товар є нормальним благом. Тоді за визначенням:

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial I} > 0 \ \Rightarrow \ -\frac{\partial x_k^*}{\partial I} \cdot x_j^* < 0.$$

Отже, в разі нормального блага ефект доходу теж буде негативним. Звідси зрозуміло, що загальна зміна в попиті на нормальний товар в результаті зміни його ціни буде мати негативний знак як сума двох негативних величин:

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial p_k} = \left.\frac{\partial x_k^*}{\partial p_k}\right|_{comp} - \frac{\partial x_k^*}{\partial I} \cdot x_k^* < 0,$$

що на економічній мові інтерпретується як закон попиту.

Припустимо тепер, що дане благо є **інферіорним**, тобто малоцінним товаром. Ефект заміщення в цьому випадку, як і раніше, буде негативним. А ефект доходу змінить свій знак. Дійсно, за визначенням інферіорного блага:

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial I} < 0 \ \Rightarrow \ -\frac{\partial x_k^*}{\partial I} \cdot x_k^* > 0.$$

Це означає, що при зниженні ціни малоцінного товару наш споживач розширить його споживання в силу дії ефекту заміщення, але скоротить покупки даного блага в результаті впливу ефекту доходу. Яким же буде загальна зміна в попиті? Відповідь на це питання залежить від абсолютної величини різноспрямованих ефектів.

Якщо ефект заміщення по модулю перевищує ефект доходу, то закон попиту продовжує діяти

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial p_k} < 0.$$

Якщо ж ефект заміщення за своєю абсолютною величиною в точності дорівнює ефекту доходу, взятому по модулю, тоді споживач не змінить попит на дане благо в результаті зміни його ціни:

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial p_k} = 0.$$

Нарешті, можлива ситуація, коли ефект заміщення за своєю абсолютною величиною виявляється менше ефекту доходу, взятому по модулю. Тоді споживач збільшить попит на інферіорне благо в результаті збільшення його ціни. Загальна зміна в попиті буде позитивним:

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial p_k} > 0$$

(товар Гріффіна). Остання ситуація є швидше теоретичною конструкцією.

4.7 Особливий випадок оптимального вибору споживача

Ми розглянули основну теоретичну модель оптимального вибору споживача, що лежить в основі формування індивідуального попиту. Це - хороша і дуже коректна модель. Однак, як будь-яка модель, вона дуже абстрактна, тому що базується на цілому ряді спрощують аналіз передумов. Реальне життя набагато складніше і різноманітніше теоретичних моделей. Тому в даному параграфі ми розглянемо деякі особливі випадки оптимального вибору споживача, які були виключені з попереднього аналізу через наявність великої кількості жорстких передумов.

Кутовий розв'язок, або граничний максимум. Як правило, завдання максимізації корисності при заданому бюджетному обмеженні має рішення у вигляді внутрішнього максимуму, коли споживаються позитивні (ненульові) кількості всіх благ. Але в деяких випадках переваги індивіда такі, що максимум корисності досягається при нульовому споживанні одного з благ. Виведемо функції попиту в разі корисності, що має кутові рішення, для найпростішої функції такого роду – лінійної.

Досконалі субститути – це блага, які служать для задоволення однакових потреб, так що споживачеві абсолютно все одно, який з цих товарів споживати, і вони легко замінюють один одного в споживанні. Уподобання споживача щодо двох таких благ описуються лінійною функцією корисності:

$$U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2,$$

де константи $a > 0, b > 0$.

Криві байдужості цієї функції – паралельні прямі

$$ax_1 + bx_2 = const,$$

(див. рис. 4.7) з кутовим коефіцієнтом

$$tg\alpha = -\frac{a}{b} < 0 \text{ або, що зручніше } tg\beta = \frac{a}{b} > 0.$$

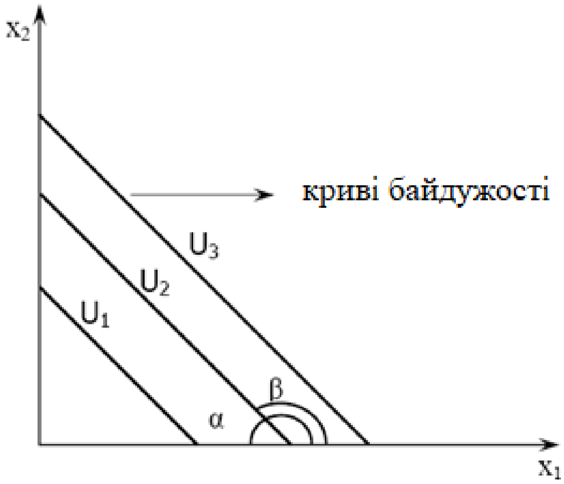

Рис. 4.7. Зміна байдужості

Задача максимізації корисності для випадку досконалих субститутів виглядає наступним чином:

$$U(x_1, x_2) \rightarrow max$$

при обмеженнях

$$p_1x_1 + p_2x_2 = I, \qquad x_1, x_2 \geq 0.$$

Якщо кутовий коефіцієнт бюджетної лінії

$$tg\alpha^* = -\frac{p_1}{p_2} \text{ або, що зручніше } tg\beta^* = \frac{p_1}{p_2}$$

не збігається з кутовим коефіцієнтом кривої байдужості, це приводить нас до кутовим рішенням (див. рис. 4.8). Якщо ж кутові коефіцієнти однакові, бюджетна лінія і крива байдужості просто збігаються по всій довжині.

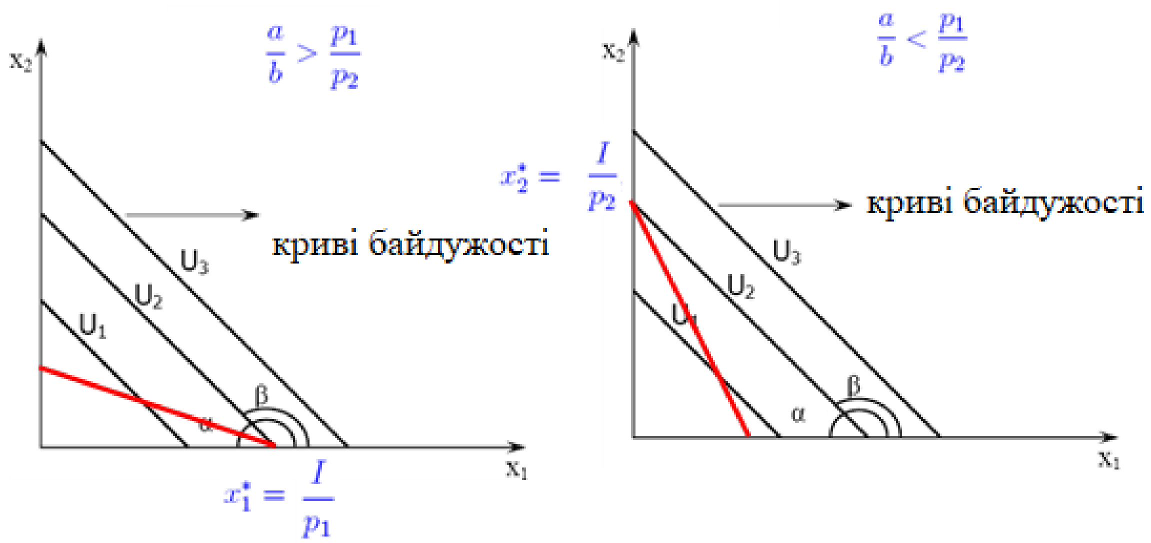

Рис. 4.8. Кутові розв’язки задачі оптимального вибору споживача

Відтак, функція некомпенсованого попиту на товари досконалі субститути виглядають так:

$$x_1^* = \begin{cases} \frac{I}{p_1}, \ \text{якщо} \ \frac{a}{b} > \frac{p_1}{p_2}, \\ 0, \quad \text{якщо} \ \frac{a}{b} < \frac{p_1}{p_2}, \\ \in \left[0, \frac{I}{p_1}\right], \ \text{якщо} \ \frac{a}{b} = \frac{p_1}{p_2}; \end{cases}$$

$$x_2^* = \begin{cases} \frac{I}{p_2}, \ \text{якщо} \ \frac{a}{b} < \frac{p_1}{p_2}, \\ 0, \quad \text{якщо} \ \frac{a}{b} > \frac{p_1}{p_2}, \\ \frac{I}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1^*, \ \text{якщо} \ \frac{a}{b} = \frac{p_1}{p_2}. \end{cases}$$

Абсолютно взаємодоповнюючі блага (досконалі комплементи). Це такі товари, які завжди споживаються разом з деяким індивідом і завжди у фіксованій пропорції. У реальному житті прикладами таких благ можуть служити права і ліва рукавичка, правий і лівий черевик, тенісна ракетка і тенісний м'яч. Взагалі слід мати на увазі, що приналежність благ до досконалим комплементу і досконалим субститутів залежить тільки від смаків та вподобань того чи іншого споживача. Функція корисності для досконалих комплементів матиме вигляд:

$$U(x_1, x_2) = \min\left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{b}\right),$$

де константи $a > 0, b > 0$.

Знак «min» означає, що рівень корисності визначається значенням найменшого з елементів в фігурних дужках. Розглянемо три можливі випадки.

1. Нехай

$$\frac{x_1}{a} < \frac{x_2}{b},$$

Тоді

$$U(x_1, x_2) = \frac{x_1}{a}.$$

У цьому випадку кількість другого блага виявляється надлишковим.

2. Нехай

$$\frac{x_1}{a} > \frac{x_2}{b},$$

тоді

$$U(x_1, x_2) = \frac{x_2}{b}.$$

Тут надмірною виявляється кількість першого блага.

3. Нехай тепер

$$\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{b}.$$

Тоді

$$U(x_1, x_2) = \frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{b}.$$

Тобто товари споживаються в потрібних пропорціях:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{b}{a}.$$

Це і є пропорція, в якій повинні споживатися блага, які є досконалими комплементами. Економічний сенс коефіцієнтів в даній функції корисності в тому і полягає, що вони показують пропорцію споживання взаємодоповнюючих благ.

Функція корисності для товарів – досконалих комплементів не диференційована і не зростає при збільшенні значення тільки однієї з змінних, отже, завдання її максимізації не може бути дозволена стандартним способом. Криві байдужості функції (див. рис. 4.9) мають незвичайну конфігурацію.

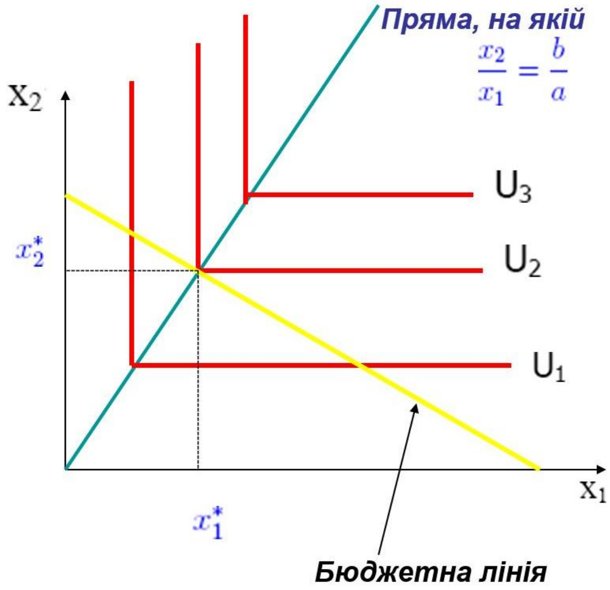

Рис. 4.9. Ілюстрація до випадку 3

Графічне рішення означає, що споживач максимізує корисність, повністю витрачаючи свій дохід на покупку товарного набору, і споживає блага в правильній пропорції, тобто функції попиту пов'язані співвідношенням

$$\frac{x_2^*}{x_1^*} = \frac{b}{a} \text{ або } x_2^* = \frac{b}{a} x_1^*$$

Підставляючи останнє співвідношення до бюджетного обмеження, отримаємо для функції $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$ попиту :

$$p_1 x_1^* + p_2 \frac{b}{a} x_1^* = I.$$

Звідки отримуємо рівняння функції некомпенсованого попиту для першого блага

$$x_1^* = \frac{aI}{ap_1 + bp_2}$$

і, після нескладних перетворень, для другого блага

$$x_2^* = \frac{b}{a} x_1^* = \frac{bI}{ap_1 + bp_2}.$$

Питання та завдання для самоконтролю до лекцій 7 – 8

1. Поясніть зміст та призначення функції корисності.
2. Як на вашу думку, на практиці можна побудувати функцію корисності.
3. Вкажіть основні властивості функції корисності.
4. Вкажіть можливі види функції корисності.
5. Поясніть, що таке гранична корисність та гранична норма заміщення.
6. Поясніть, що моделюють рівняння Слуцького.
7. Що описує функція індивідуального попиту і для чого її можна використати?
8. Розкрийте зміст порядкової теорії корисності.
9. Як класифікують товари у межах порядкової теорії корисності?
10. Ціна 1 кг м'яса знизилась з 100 грош.од. до 90 грош.од. В результаті попит на нього зріс з 2кг до 4кг в місяць. Знайти середню еластичність попиту за ціною.
11. Ціна на взуття зросла з 700 грош.од. за пару до 1000 грош.од. за пару, внаслідок цього попит зменшився з 3 пар на рік до 2 пар на рік. Знайти середню еластичність попиту за ціною.

РОЗДІЛ V. МОДЕЛІ ВЗАЄМОДІЇ СПОЖИВАЧІВ І ВИРОБНИКІВ.
Лекції 9 – 11

Мета: ознайомити з моделями встановлення рівноважної ціни, факторами попиту та пропозиції, моделями Еванса, Вальраса. Павутиноподібною моделлю з дискретним часом.

План

1. Моделі встановлення рівноважної ціни.
2. Модель Еванса (модель з безперервним часом).
3. Павутиноподібна модель (модель з дискретним часом).
4. Нецінові фактори попиту і пропозиції. Зрушення точки рівноваги.
5. Модель Вальраса.

Ключові терміни та поняття: учасники ринку, модель Вальраса, модель Еванса, точка рівноваги, рівноважна ціна, фактори попиту і пропозиції.

5.1 Моделі встановлення рівноважної ціни

До цього часу ми вивчали поведінку двох суб'єктів мікроекономіки – споживача і виробника – ізольовано один від одного. Тепер приступимо до розгляду взаємодії цих суб'єктів в межах більшої структури – ринку, і обговоримо математичні моделі ринку. Основним поняттями будь-якого ринку є товари, їх ціни, учасники, їх попит і пропозиція, саме ці елементи і будуть піддаватися далі формалізації.

Учасниками ринку можуть бути будь-які зацікавлені в купівлі-продажу товарів: індивідуальні споживачі, окремі фірми, сукупність споживачів деякого регіону, сукупність підприємств даної галузі, фінансові організації, концерни, цілі країни. Одним словом, класифікація учасників ринку залежить від характеру розв'язуваної задачі.

У класичних моделях в якості учасників ринку розглядаються виробники товарів (фірми) і їх споживачі. Перші виходять на ринок для реалізації своєї продукції, а другі – для придбання необхідних їм товарів споживання. Тому для класифікації учасників ринку більше підходять назви продавців і покупців. Якщо продавців (покупців) даного товару багато, то між ними виникає конкуренція. Тому ринки можна класифікувати за характером конкуренції.

У цьому розділі ми будемо розглядати ринок з великим числом учасників. Тому будемо припускати існування великої кількості продавців і покупців для кожного товару.

У звичайному розумінні ринок – це те місце, де продається і купується велика різноманітність товарів. У разі необхідності ринок можна сегментувати за видами товарів і при відповідних обмеженнях (наприклад, з урахуванням наявних зв'язків з ринками інших товарів) вивчати ринок товару, що цікавить нас окремо.

Перш за все, нам треба з'ясувати і формалізувати поняття сукупного (ринкового) попиту і сукупної (ринкової) пропозиції щодо наявних на ринку товарів. Раніше були формалізовані поняття попиту індивідуального споживача і пропозиції окремо взятої фірми. Як визначити поняття ринкового попиту і ринкової пропозиції, виходячи з понять індивідуального попиту і пропозиції? Чи можливо це в принципі? Як формуються криві ринкового попиту і ринкової пропозиції? Чи мають вони властивості, притаманні їхнім аналогам?

Проблема агрегування попиту окремих індивідів і пропозиції окремих фірм є досить тонкою. Це одне з тих питань, щодо яких сувора методологія математики розбігається з економічною теорією, ближчою до практики. З точки зору математики, цю проблему не можна вважати вирішеною – не існує загальних способів агрегування, які відповідають всім основним теоретичним постулатами (зокрема, різноманітні теоретичні труднощі виникають при спробі сконструювати функцію колективної корисності всіх споживачів, які бажають придбати даний товар і визначити ринковий попит як розв’язок загальної задачі максимізації корисності). Економічна ж теорія виходить із передумови про реальну можливість формування ринкового попиту і ринкової пропозиції. Скористаємося нею.

Розглянемо ринок одного єдиного товару. Криву ринкового попиту отримаємо як суму кривих індивідуального попиту всіх споживачів.

$$\text{Ринковий попит на товар} = \sum_i \text{попит } i - \text{ого споживача.}$$

На основі теорії корисності ми отримали функції і криві індивідуального некомпенсованого попиту споживача і з'ясували, що для нормальних товарів обсяг індивідуального попиту є спадною функцією ціни цього товару (похідна функції попиту на даний товар по ціні товару є від’ємною). Розглянемо залежність попиту на товар лише від його ціни, вважаючи усі інші фактори попиту (ціни інших товарів, грошовий дохід і т.п.) незмінним. Тоді обсяг Q ринкового попиту на товар можна представити у вигляді монотонно спадної функції від однієї змінної – ціни цього товару p:

$$Q = D(p).$$

Як і у випадку зі споживачами, шляхом підсумовування кривих пропозиції окремих фірм, які є результатом вирішення їх оптимізаційних задач, можна отримати поняття кривої ринкової пропозиції:

$$\text{Ринкова пропозиція товару} = \sum_j \text{пропозиція } j - \text{ї виробничої системи.}$$

У розділі, присвяченому максимізації прибутку, ми вивели функцію пропозиції виробничої системи. Її аналіз (аналогічний аналізу функції попиту) показує, що, в загальному випадку, пропозиція є зростаючою функцією ціни p товару, що випускається виробничою системою.

Вважаючи незмінними всі інші фактори, що впливають на пропозицію, крім ціни передбачуваного товару, обсяг Q ринкового пропозиції товару можна представити у вигляді монотонно зростаючої функції однієї змінної p:

$$Q = S(p).$$

Загальний висновок такий, що можна знайти, у всякому разі, прийнятні для економічної практики способи формалізації понять ринкового попиту і ринкової пропозиції. Останнє дає право оперувати поняттями сукупного попиту і сукупної пропозиції. Природно припустити, що функції ринкового попиту і пропозиції визначені і неперервні для всіх $p > 0$.

Взаємодія між складними на ринку готової продукції споживчим попитом і пропозицією призводить до поняття рівноваги.

У загальноприйнятому в економіці сенсі рівноваги ринку визначається як рівність попиту і пропозиції:

$$S(p) = D(p), \tag{5.1}$$

причому в силу зроблених припущень про монотонності функцій попиту і пропозиції, рівняння (5.1) має єдине рішення – рівноважну ціну p_e, так що стан рівноваги

$$S(p_e) = D(p_e) = Q_e$$

єдиний.

На рис. 5.1 показані графіки функцій попиту і пропозиції, а також точка рівноваги.

Рівновага може бути порушена або з волі ринку, який розпоряджається ціною товару, або з волі покупця (наприклад, через зміну величини доходу змінюється функція попиту) або виробника (наприклад, через зміну обсягів витрат змінюється функція пропозиції). У першому випадку, будемо говорити про цінові причини порушення рівноваги, у другому – про нецінових причини.

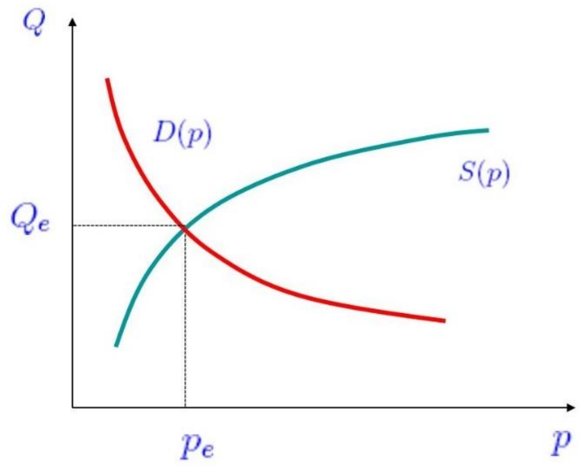

Рис. 5.1. Графіки функцій попиту і пропозиції
і точка рівноваги

Однак, ринковій рівновазі притаманний досить важливий вид стійкості – стійкість проти коливання ціни, якою б причиною воно не було викликане.

Якщо ціна на ринку вище рівноважної, то пропозиція перевищує попит і виникає **затоварення**. У цій ситуації товаровиробники (продавці) багатьох видів товарів готові піти на зниження ціни з метою залучення більшої кількості покупців (наприклад, якщо мова йде про швидкопсувні товари). Отже, при значеннях ціни вище рівноважної відбувається тиск на неї з метою її зменшення.

Якщо ж ціна на ринку нижче рівноважної, то попит перевищує пропозицію і товар стає дефіцитним. У цій ситуації, частина покупців готова заплатити за товар більш високу ціну, але знизити ризик і з упевненістю придбати товар (наприклад, якщо утвориться черга покупців, ті, хто знаходяться в її кінці, можуть не отримати товару). Таким чином, при значеннях ціни, нижче рівноважної, відбувається тиск на неї в сторону збільшення. Ці дві тенденції призводять до того, що на ринках багатьох видів товарів, як правило, встановлюється рівновага, при якому попит дорівнює пропозиції.

Динамічні нерівноважні моделі ринку використовуються для аналізу зміни змінних (ціна, попит, пропозиція) у часі у випадку, коли ціна в початковий момент відрізняється від рівноважної. При цьому процес встановлення рівноважної ціни може бути описаний різними моделями при використанні одних і тих самих функцій попиту і пропозиції. Розрізняють моделі з неперервним і дискретним часом.

5.2 Модель Еванса (модель з неперервним часом)

Розглядається ринок одного товару. Час t вважається безперервним,

$$p = p(t)$$

- ціна товару в момент часу t.

У цій моделі передбачається, що функції ринкового попиту і пропозиції

$$D(p) = D(p(t)) \text{ та } S(p) = S(p(t))$$

є лінійними функціями ціни:

$D(p) = a - bp, a > 0, b > 0$ − попит зі зростанням ціни спадає;

$S(p) = \alpha + \beta p, \alpha > 0, \beta > 0$ − пропозиція з ростом ціни зростає).

Крім того, природно вважати, що $a > \alpha$ (при нульовій ціні попит перевищує пропозицію).

Основне припущення моделі полягає в тому, що зміна ціни пропорційно перевищенню попиту над пропозицією:

$$\Delta p = \gamma(D - S)\Delta t, \ \gamma > 0. \tag{5.2}$$

Згідно з припущенням (5.2) взаємодія споживачів і виробників відбувається таким чином, що ціна товару, яка відображає цю взаємодію, неперервно пристосовується до ситуації на ринку: в разі перевищення попиту над пропозицією – зростає; в протилежному випадку – знижується.

Запишемо (5.2) у наступному вигляді:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \gamma(D - S),$$

перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$ і отримаємо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma(D - S).$$

Підставимо в нього функції попиту і пропозиції і додаємо початкову умову – значення ціни в момент часу $t = 0$, аби отримати задачу Коші для диференціального рівняння відносно ціни товару:

$$\begin{gathered} \frac{dp}{dt} = \gamma(-(b + \beta)p + a - \alpha), \\ p(0) = p_0. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Рівноважну точку в цій моделі легко знайти, прирівнюючи функції попиту і пропозиції

$$a - bp = \alpha + \beta p.$$

Значення рівноважної ціни

$$p_e = \frac{a-\alpha}{b+\beta} > 0.$$

З диференціального рівняння випливає, що

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma(b+\beta)\cdot\left(p - \frac{a-\alpha}{b+\beta}\right),$$

тобто

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma(b+\beta)\cdot(p - p_e).$$

Що означає наступне:

$$\frac{dp}{dt} > 0 \text{ при } p < p_e, \qquad \text{зокрема,} \qquad \text{при } p_0 < p_e,$$

$$\frac{dp}{dt} < 0 \text{ при } p > p_e, \qquad \text{зокрема,} \qquad \text{при } p_0 > p_e,$$

$$\frac{dp}{dt} = 0 \text{ при } p = p_e,$$

Тому

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = p_e,$$

причому в першому випадку ціна досягає рівноважного значення, зростаючи, у другому – спадаючи, а рівноважна ціна p_e не залежить від початкової ціни p_0.

Ці висновки отримані без безпосереднього розв'язання диференціального рівняння (5.3). Вони будуть такими самими, якщо скористатися розв'язком задачі Коші для рівняння з роздільними змінними:

$$p(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta} + \left(p_0 - \frac{a-\alpha}{b+\beta}\right)e^{-\gamma(b+\beta)t}.$$

Дискретний аналог моделі Еванса представлений на рис. 5.2.

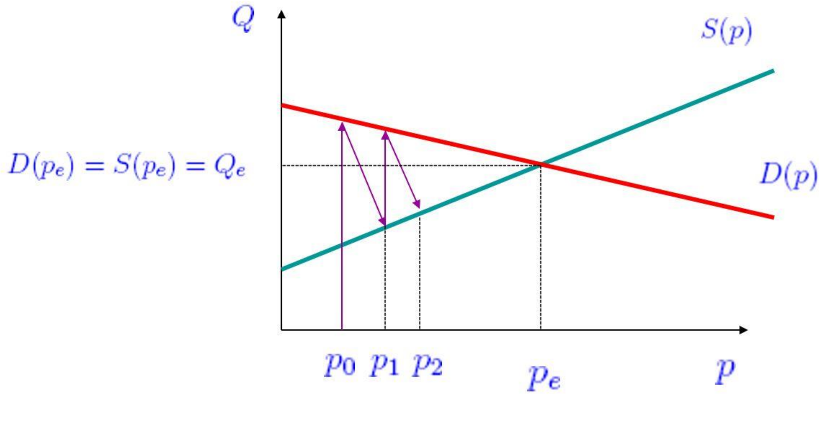

Рис. 5.2. Дискретна модель Еванса

Тут зображені прямі попиту пропозиції, і показаний механізм виникнення послідовності цін p_n , які зростають від початкової ціни p_0. У початковий час попит не дорівнює пропозиції. Ціна зростає до рівноважної p_e, коли попит і пропозиція дорівнюють один одному. Час розбито на інтервали довжини Δt і відзначені моменти $t_n = n\Delta t$, яким відповідають значення цін p_n.

5.3 Павутиноподібна модель (модель з дискретним часом)

Крім стандартних позначень функції попиту і пропозиції

$$D(p) = D\big(p(t)\big)\ i\ S(p) = S\big(p(t)\big),$$

в цій моделі для позначення значень ціни, обсягу попиту та пропозиції в дискретні моменти часу t будемо використовувати символи

$$p_t = p(t), \quad D_t, \qquad S_t$$

відповідно.

Залежно від використовуваних гіпотез в дискретної моделі динаміки цін відбувається або запізнювання пропозиції на один крок – в цьому випадку приходимо до процесу

$$S(p_{t+1}) = D(p_t),$$

або запізнювання попиту на один крок – в цьому випадку отримуємо процес

$$D(p_{t+1}) = S(p_t).$$

Функції пропозиції і попиту задовольняють звичайних умов монотонності:

$$S'(p) > 0, D'(p) < 0.$$

В обох випадках на площині QOp відповідної ітераційний процес зображується у вигляді павутини, яка намотується на криві попиту і пропозиції. Це дало підставу для загальної назви дискретних динамічних моделей. Дискретні моделі представляють інтерес тому, що в них більш послідовно, ніж в неперервних, відображаються процедури прийняття рішень.

Павутиноподібна модель із запізненням попиту. Розглянемо гіпотези, які лежать в основі цієї моделі.

Гіпотеза 1. Товаровиробник, приймаючи рішення про обсяг пропозиції, орієнтується на ціну попереднього періоду.

Гіпотеза 2. Ринок завжди знаходиться в стані локальної рівноваги.

Формально ці дві гіпотези означають наступне:

1. Обсяг своєї пропозиції на ринку S_{t+1} в момент часу $t+1$ виробник визначає за значенням ціни попереднього періоду p_t, за допомогою функції пропозиції

$$S_{t+1} = S(p_t);$$

2. На ринку в кожен момент часу $t+1$ встановлюється локально-рівноважна ціна p_{t+1}, причому ця ціна є рішенням рівняння

$$D(p_{t+1}) = S_{t+1}$$

(тобто ціна змінюється з p_t на p_{t+1}, таку, яка забезпечить рівність попиту наявного пропозицією S_{t+1});

3. Споживач пред'являє попит, який при ціні p_{t+1} дорівнює пропозиції S_{t+1}, внаслідок чого споживач набуває все, що йому запропоновано.

Динаміка ціни (а також попиту і пропозиції) в рамках даної моделі може бути зображена у вигляді кривої, яку називають або **павутиною**, або спіраллю (рис. 5.3).

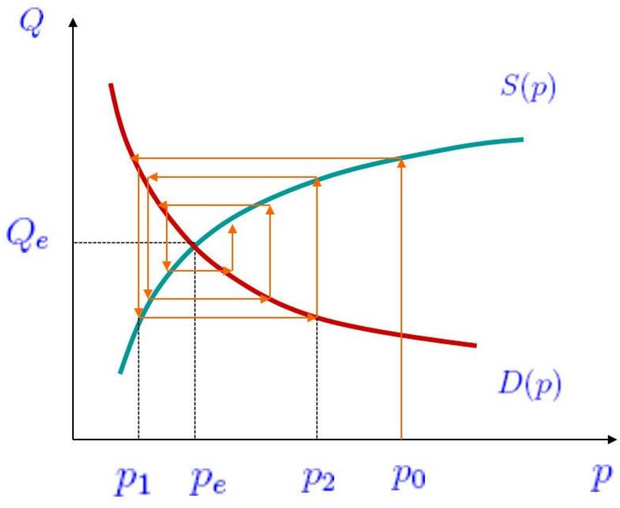

Рис. 5.3. Павутиноподібна модель

Дійсно, в силу правила (1) товаровиробник за значенням ціни p_0 за допомогою кривої пропозиції визначає S_1; в силу правила (2) на ринку встановлюється ціна p_1 (знаходиться за допомогою кривої попиту); в силу правила (3) весь товар в кількості S_1 знаходить споживача; в силу гіпотези (1) товаровиробник, орієнтуючись на ціну p_1, визначає обсяг і пропозиції S_2 і т.п. Далі розглянутий процес повторюється. Павутина при цьому намотується на точку рівноваги проти годинникової стрілки.

На рис. 5.3 функція попиту є опуклою, а функція пропозиції – увігнутою, внаслідок чого послідовність цін p_t прагне до рівноважного рівня p_e, і, таким чином, з часом встановлюється рівновага. Якби функція пропозиції теж була опуклою, то можна було б отримати розбіжний процес, навіть коли точка рівноваги p_e існує.

Завдання: Для відповіді на питання про те, коли даної моделі ітераційний процес призводить до рівноваги, розглянути випадок лінійних функції попиту і пропозиції:

$$D(p) = a - bp, a > 0, b > 0;$$

$$S(p) = \alpha + \beta p, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Вважати, що $a > \alpha$ (при нульовій ціні попит перевищує пропозицію). Розглянути ітераційний процес при $b > \beta, b < \beta, b = \beta$. Зробити висновки.

Павутиноподібна модель з запізненням пропозиції. Розглянемо гіпотези, які лежать в основі цієї моделі.

Гіпотеза 1. При визначенні обсягу пропозиції в кожен період часу товаровиробник орієнтується на попит в попередній період.

Гіпотеза 2. Ціна пропонованого товару встановлюється товаро-виробником на рівні, що визначається відповідно до функцією пропозиції.

Гіпотеза 3. Обсяг споживання товару не може перевищувати ні обсягу пропозиції, ні обсягу попиту.

Підкреслимо, що перша і друга гіпотези визначають модель пропозиції товарів. Розглянемо описаний ітераційний процес (див. рис. 5.4).

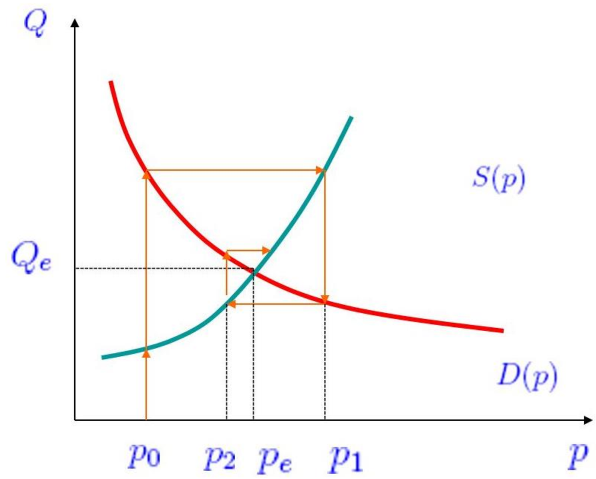

Рис. 5.4. Павутиноподібний ітераційний процес

На першому кроці, при ціні p_0, має місце надлишковий попит, внаслідок чого споживання товару одно його пропозицією. Так як в цьому випадку реалізований товар в обсязі S_0, що менше рівноважного значення Q_e, то товаровиробник втрачає частину прибутку, оскільки і ціна, як виявилося, занижена, і запропоновано товару менше, ніж могло б бути подано.

Упущена вигода змушує товаровиробника збільшити ціну товару до p_1 і збільшити обсяг його пропозиції. Припускаючи при цьому, що попит не зміниться, він приймає рішення збільшити випуск до обсягу наявного попиту D_0. Пропозиція при такому обсязі є, як сподівається товаровиробник, оптимальним у разі, коли ціна p_1 задовольняє рівняння $S(p_1) = D_0$. Це означає, що на наступному кроці продавець (він же товаровиробник) встановлює ціни, використовуючи криву пропозиції.

Так як збільшилася ціною p_1 відповідає попит D_1, то, в силу

$$D_1 < S_1,$$

споживання на цьому кроці одно D_1 (тепер частина запропонованого товару не знаходить покупця через високу ціну). В результаті такого дисбалансу підприємство знову опиняється в програші, недоодержуючи частина прибутку.

Для поліпшення ситуації на ринку в цьому випадку фірма повинна скоротити пропозицію і знизити ціну. Відповідно до використовуваними тут допущеннями, пропозиція повинно знизитися до рівня попиту D_1, а ціна – до рівня p_2, який визначається з умови $S(p_2) = D_1$. Далі процес повторюється.

Відзначимо, що в моделі з запізненням пропозиції, на відміну від моделі з запізненням попиту, павутина намотується вже за годинниковою стрілкою. Таким чином, зміна гіпотез про поведінку споживача і товаровиробника призвело до зміни напрямку руху по спіралі на протилежне. (зверніть увагу на вид функції пропозиції, що забезпечує збіжність процесу і його відмінність від моделі з запізненням попиту).

Завдання: Для відповіді на питання про те, коли в даній моделі ітераційний процес призводить до рівноваги, розглянути випадок лінійних функції попиту і пропозиції:

$$D(p) = a - bp, a > 0, b > 0;$$

$$S(p) = \alpha + \beta p, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Вважаємо, що $a > \alpha$ (при нульовій ціні попит перевищує пропозицію). Розглянути ітераційний процес при $b > \beta, b < \beta <\ b = \beta$. Зробити висновки.

5.4 Нецінові фактори попиту і пропозиції. Зрушення точки рівноваги

Рівновага – це такий стан системи, яка вона зберігає за відсутності впливу ззовні. Якщо функції попиту і пропозиції незмінні, і ринок знаходиться в стані рівноваги, то у його учасників немає причин міняти ні кількості товарів, ні ціни. Рівновага можна розглядати як ситуацію реалізації запланованих рішень покупців і продавців.

Головним джерелом інформації про стан справ на ринку, про співвідношення пропозиції товарів і попиту на них служать ціни. Якщо ціни зростають, то це означає, що товарів на ринок надходить менше, ніж покупці готові придбати при первинному рівні цін. Якщо ціни знижуються, то це означає, що товарів на ринку надходить більше, ніж покупці готові придбати при первинному рівні цін. Якщо ціни залишаються незмінними, то це означає, що на ринок надходить стільки товарів, скільки покупці готові придбати при цьому рівні цін.

Одночасно ціни визначають і розподіл економічних ресурсів (факторів виробництва) по галузям. В умовах досконалої конкуренції ресурси можуть абсолютно вільно переміщатися з галузі в галузь. Ціновий механізм забезпечує їх переміщення з тих галузей, де вони надмірні (пропозиція перевищує попит) в ті галузі, де вони недостатньо (попит перевищує пропозицію). Тепер в справу вступають вже нецінові фактори, які впливають на криву пропозиції і зміщують її (див. рис. 5.5). При зростанні пропозиції рівноважна ціна p_e зменшується, рівноважний обсяг продажів товару Q_e росте. При падінні пропозиції рівноважна ціна p_e росте, рівноважний обсяг продажів товару Q_e зменшується.

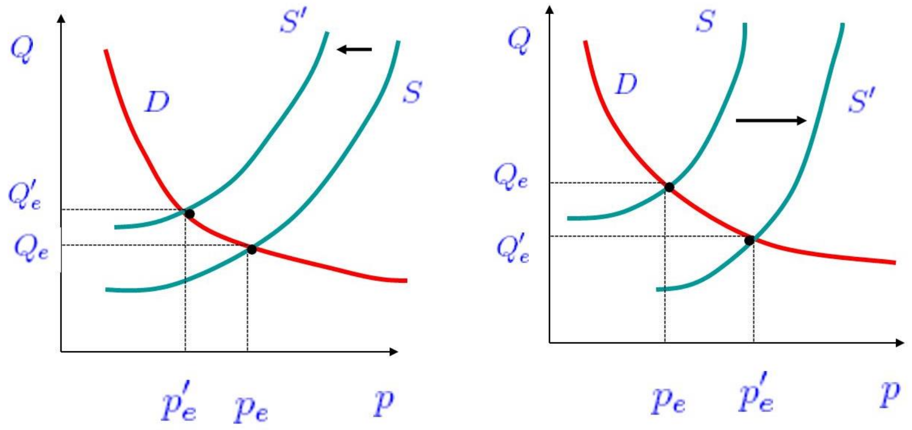

Рис. 5.5. Зміна пропозиції під дією нецінових факторів і зрушення точки рівноваги

Нецінові фактори, що впливають на зміну попиту (наприклад, зміна доходу покупців) викликають зміщення кривої попиту (рис. 5.6). При зростанні попиту рівноважна ціна p_e росте, і рівноважний обсяг продажів товару Q_e також зростає. При падінні пропозиції рівноважна ціна p_e зменшується, рівноважний обсяг продажів товару Q_e також знижується.

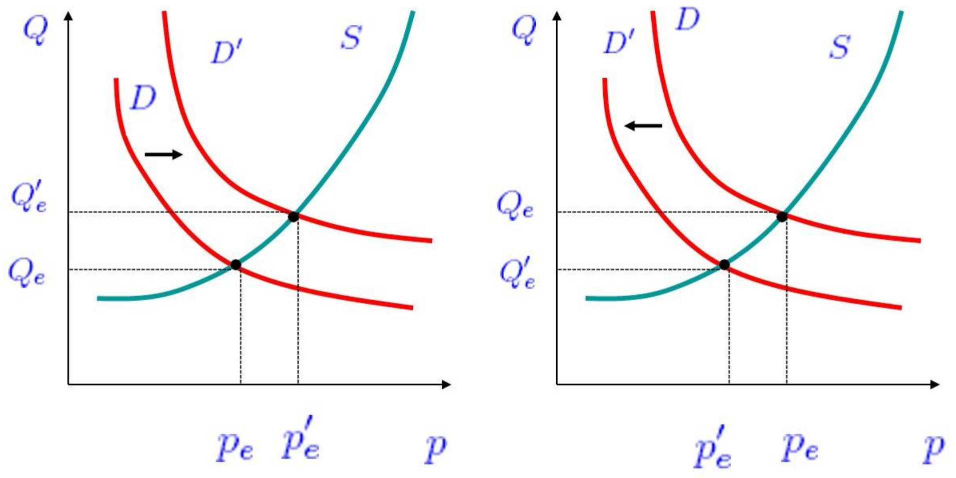

Рис. 5.6 Зміна попиту під дією нецінових
факторів і зрушення точки рівноваги

При одночасному переміщенні лінії ринкового попиту і лінії ринкової пропозиції ціна рівноваги, і обсяг продажів рівноваги можуть вести себе по-різному.

5.5 Модель Вальраса

У моделі Вальраса розглядається економічна система, в якій виробляється, розподіляється і споживається велика кількість товарів. Число виробників і споживачів хоча і звичайне, але є настільки великим, що жоден з них не може впливати на ціни, тобто ринок є конкурентним. Кожен з учасників ставить перед собою мету, тому можливі конфліктні ситуації. У моделі Вальраса вирішення конфліктів досягається через дію конкурентного ринкового механізму, заснованого на регулюючому впливі системи цін. Тому одним з ключових є питання: чи існують такі ціни, які влаштовують як споживачів, так і виробників?

Основна ідея Вальраса полягає у тому, що при деякій системі цін індивідуальні наміри учасників стають спільними і конфлікти вирішуються. Така ситуація називається **конкурентною рівновагою**.

Припущення моделі Вальраса. Розглядається економіка з l споживачами, m виробниками і n типами товарів:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

– вектора-стовпець товарів,

$$\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

– вектор-рядок цін на ці товари.

Скалярний добуток вектора-рядка на вектор-стовпець є числом, який позначимо так:

$$\bar{p} \cdot \bar{x} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n.$$

Визначення 5.2 Вираз виду

$$\bar{y} \geq \bar{x}$$

означає, що для всіх компонент n-мірних векторів $\bar{y}$ і $\bar{x}$ виконано нерівність

$$y_k \geq x_k$$

Поняття товару в моделі тлумачиться розширено. Під **товарам** розуміється і предмет споживання, і проміжний продукт, і кошти праці (будівлі, обладнання тощо) і первинні ресурси (праця і природні ресурси).

Модель формалізує річний цикл виробництва і розподілу товарів в результаті взаємодії суб'єктів економіки, кожен з яких переслідує свої цілі.

Кожен k-й споживач володіє доходом $I_k(\bar{p})$ і має своє поле переваг, яке може бути задано у вигляді його функції корисності $U_k(\bar{p})$. Область визначення функції корисності даного споживача позначимо X_k.

Якщо позначити безліч всіх n-мірних товарних наборів $\bar{x}_k$, доступних k-му споживачеві і одночасно належать області визначення його функції корисності, через

$$B_k(\bar{p}) = \{\bar{x}_k \in X_k, \qquad \bar{p} \cdot \bar{x}_k \leq I_k(\bar{p})\},$$

то векторна функція попиту цього споживача на всі види товарів буде здаватися таким чином:

$$D_k(\bar{p}) = \begin{cases} \bar{x}_k^* \in B_k(\bar{p}), \qquad U_k(\bar{x}_k^*) = \max\limits_{\bar{x}_k \in B_k(\bar{p})} U_k(\bar{x}_k); \\ 0, \ \text{якщо максимум не досягнуто.} \end{cases}$$

тобто функція попиту – це таке безліч доступних наборів товарів, кожен з яких максимізує корисність споживача при наявних цінах.

Передбачається, що дохід k-го споживача складається з двох частин: з доходів від продажу за цінами $\bar{p}$ початкового запасу товарів, що є у споживача (цей запас позначимо як n-мірний вектор-стовпець $\bar{b}_k$) і з доходу $V_k(\bar{p})$, отриманого в результаті участі споживача у виробництві, тобто

$$I_k(\bar{p}) = \bar{p} \cdot \bar{b}_k + V_k(\bar{p}).$$

Кожен виробник задається своїми технологічними можливостями. Позначимо через $\bar{y}_j$ n-мірний вектор-стовпець витрати-випуск j-го виробника: додатні компоненти цього вектора відповідають тим товарам, які випускає фірма (її випуску), від'ємні значення змінних відповідають тим товарам, які фірма використовує в процесі виробництва (її витратам). Тому добуток

$$\bar{p} \cdot \bar{y}_j$$

являє собою прибуток фірми (різниця між виручкою від продажу випущеного продукту і витратами на його виробництво). Технологічні можливості фірми визначаються як безліч всіх допустимих векторів витрати-випуск для j-го виробника – множина Y_j. Воно називається безліччю виробничих можливостей.

Вектор витрат-випуску для всієї економіки визначається як сума векторів витрат-випуску всіх виробників:

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j$$

і являє собою **сукупний виробничий процес**. Сукупні процеси утворюють загальноекономічну множину виробничих можливостей $\boldsymbol{Y}$.

При такому підсумовуванні проміжні продукти взаємно скорочуються, оскільки вони є додатними для їх виробників і від'ємними для тих фірм, які споживають ці проміжні продукти. У підсумку в вектор $\bar{y}$ увійдуть з додатним знаком тільки кінцеві продукти (кінцевий випуск) і з від'ємним – первинні ресурси.

Вважаємо, що сумарний дохід виробничого сектора ділиться між споживачами:

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{p} \cdot \bar{y}_j = \bar{p} \cdot \sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j = \bar{p} \cdot \bar{y} = \sum_{k=1}^{l} V_k(\bar{p}).$$

Під функцією пропозиції фірми далі будемо розуміти один або кілька векторів витрати - випуск, які при наявних цінах максимізують прибуток:

$$S_j(\bar{p}) = \{\bar{y}_j^*:\ \bar{y}_j^* \in Y_j, \qquad \bar{p} \cdot \bar{y}_j^* = \max_{\bar{y}_j \in Y_j} \bar{p} \cdot \bar{y}_j;\}.$$

Передбачається, що безліч виробничих можливостей замкнуто і містить нульовий вектор, тобто фірма може не виробляти продукцію і не робити витрат.

Визначення 5.3 Набір невід'ємних векторів

$$(\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \dots, \bar{x}_l^*, \bar{y}_1^*, \dots, \bar{y}_m^*, \bar{p}^*)$$

називається **конкурентним рівновагою** в моделі Вальраса, якщо

$$\bar{x}_k^* \in D_k(\bar{p}), \qquad k = 1,2,\dots,l;$$

$$\bar{y}_j^* \in S_j(\bar{p}), \qquad j = 1,2,\dots,m;$$

і виконані співвідношення балансу попиту і пропозиції

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j^* + \sum_{k=1}^{l} \bar{b}_k \geq \sum_{k=1}^{l} \bar{x}_k^*,$$

$$\bar{p}^* \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j^* + \sum_{k=1}^{l} \bar{b}_k \right) \geq \bar{p}^* \cdot \sum_{k=1}^{l} \bar{x}_k^*.$$

Визначення 5.4 Вектор $\boldsymbol{\bar{p}}^*$ −компонента конкурентного рівноваги - називається вектором рівноважних цін.

Розглянемо складові, що входять до співвідношення балансу попиту і пропозиції. Сума по всім споживачам

$$\bar{b} = \sum_{k=1}^{l} \bar{b}_k$$

є **сукупною первинною власністю** (вона може бути продана і куплена). У це поняття можуть бути включені не лише споживчі товари, але й предмети праці, обладнання, праця і т.д.

Множину векторів виду

$$\bar{y}^* = \sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j^* + \sum_{k=1}^{l} \bar{b}_k = \sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j^* + \bar{b}$$

назвемо **сукупною пропозицією**.

Вектори виду

$$\bar{x}^* = \sum_{k=1}^{l} \bar{x}_k^*$$

утворюють **сукупний попит**.

Ці вектори є (оптимальними) реакціями сукупного покупця і сукупного продавця на сталий на ринку вектор цін. Якщо при цьому попит більше пропозиції, то на ринку виникає дефіцит товарів, а якщо попит менше пропозиції, то з'являються їх надлишки. Такі ціни не можуть вважатися задовільними, так як в одному випадку ущемлені інтереси покупців, а в іншому

- продавців. Очевидно, найкращим варіантом для економіки є рівність попиту і пропозиції. Цей ідеальний випадок на практиці не завжди має місце. Тому доцільно якось його послабити. У моделі Вальраса допускається найбільш гуманний з точки зору інтересів споживачів варіант узагальнення поняття економічної рівноваги.

З використанням понять сукупного попиту і пропозиції визначення конкурентного рівноваги можна сформулювати наступним чином.

Визначення 5.5 Набір невід'ємних векторів

$$(\bar{x}^*, \bar{y}^*, \bar{p}^*)$$

називається конкурентним рівновагою в моделі Вальраса, якщо

$$\bar{x}^* = \sum_{k=1}^{l} \bar{x}_k^*, \quad \bar{x}_k^* \in D_k(\bar{p}^*), \qquad k = 1,2,\dots,l,$$

$$\bar{y}^* = \sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j^* + \bar{b}, \quad \bar{y}_k^* \in S_j(\bar{p}^*), \qquad j = 1,2,\dots,m,$$

і виконані співвідношення балансу попиту і пропозиції

$$\bar{x}^* \leq \bar{y}^*, \tag{5.4}$$

$$\bar{p}^* \cdot \bar{x}^* = \bar{p}^* \cdot \bar{y}^*. \tag{5.5}$$

Таким чином, конкурентна рівновага є спільний розподіл виробництва і споживання, при якому сукупний попит не перевищує сукупної пропозиції, а вартість сукупного попиту в конкурентних цінах дорівнює вартості сукупної пропозиції. При цьому кожен споживач максимізує свою корисність, а кожен споживач - свій прибуток в цих же цінах.

Умова рівності вартості сукупного попиту і вартості сукупної пропозиції в конкурентних цінах (5.5) автоматично виконувати в тому випадку, якщо має місце суворе рівність сукупності попиту сукупній пропозиції (5.4). Якщо для деякого товару попит строго менше пропозиції, то в вартісному вираженні (5.5), очевидно, теж буде сувора нерівність

$$\bar{p}^* \cdot \bar{x}^* < \bar{p}^* \cdot \bar{y}^*,$$

що не відповідає умові конкурентного рівноваги.

Відповідно до закону пропозиції, в разі появи надлишку товарів (перевищення пропозиції над попитом) ціна виробленого товару повинна бути знижена. Але це призведе до зміни рівноважної ціни даного товару. Як вийти з цього протиріччя? Очевидно, що потрібно якимось чином знищити надлишок. Обґрунтування справедливості (5.5) тим, що на поставлений понад наявного попиту товар повинен отримати нульову ціну, економічно усвідомлено, але не подається адекватній формалізації в рамках моделі.

Формальний дохід з даної ситуації полягає в тому, щоб вважати ціну всього пере виробленого товару рівною нулю. Чисто теоретично цей прийом є спроможним, так як це не приводить надалі до протиріччям. В т о же час, слід визнати відсутність економічно осмисленого пояснення я існування товару з нульовою ціною, оскільки і в разі перевиробництва користується попитом частина товару продається з ненульовий ціною. Для економіки існування надлишку також погано, як і існування дефіциту. Все це говорить на користь доцільності визначення вартості рівноваги все ж у вигляді вимоги рівності попиту і пропозиції.

Отже, модель ринку за Вальрасом побудована. Як бачимо, центральне місце в ній займає поняття конкурентного рівноваги. Привабливість рівноваги як стану ринку (і економіки в цілому), полягає в можливості реалізації всіх виробничих товарів і в задоволенні попиту всіх споживачів. Процес формування ринкових цін умовно можна порівняти з роботою деякого алгоритму. У першому блоці формується вектор цін. Інформація про вектор цін надходить в блок формування сукупного попиту та сукупної пропозиції, зміст яких, в свою чергу, передається блок порівняння. У блоці порівнянні здійснюється попарне порівняння елемента вектору сукупного попиту і пропозиції. Якщо існує пара або пари $(\bar{x}^*, \bar{y}^*)$, для яких виконується умова

$$\bar{x}^* = \bar{y}^*$$

(або умови 5.1, 5.2), то процес закінчується. В іншому випадку ціни відкидаються, про що надходить сигнал в блок формування цін, де формуються нові ціни. Ітераційна процедура триває до тих пір, поки не буде знайдений рівноважний вектор цін.

Позитивну відповідь на питання, чи буде він все ж коли-небудь знайдений, пов'язаний з дозволом двох важливих проблем:

1. Встановлення факту існування конкурентної рівноваги в моделі Вальраса;

2. Розробка збіжної до рівноважної ціною обчислювальної процедури (методу) формування ринкових цін.

Існування рівноваги в моделі Вальраса не встановлено. Причина полягає в рівні формалізму цієї моделі – вона досить абстрактна.

Конкретизуючи визначення складових її елементів і уточнюючи функціональні властивості, можна отримати різні модифікації моделі Вальраса.

Найбільш відома з них носить назву моделі Ерроу-Дебре, за іменами її творців. Структурно модель Ерроу-Дебре вельми близька до моделі Вальраса.

Від останньої вона відрізняється конкретизацією природи походження функцій пропозиції і попиту, а також механізму утворення доходу споживача. Теорема Ерроу-Дебре відповідає на питання про існування конкурентного рівноваги в цій моделі.

Існування конкурентного рівноваги саме по собі ще не дає гарантії того, що економіка перейде в цей стан. Необхідно досліджувати, для яких станів економіки неможливий перехід в стан конкурентного рівноваги, а для яких – можливий, сформулювати процедуру ітераційну досягнення рівноваги (таку, наприклад, як павутиноподібна модель або модель Еванса) і умови, при яких ця процедура сходиться, тобто конкурентна рівноваги стійка.

Стійкість конкурентного рівноваги, тобто збіжність ітеративного процесу встановлення рівноваги до рівноважної ціною, можна вивчати на двох рівнях - на рівні локальної стійкості і на рівні глобальної стійкості. Рівновага називається локально стійким, якщо ітеративний процес сходиться при початкових цінах, досить близьких до рівноважних. Якщо стійкість має місце незалежно від того, якими були початкові ціни, то рівновага є глобально стійкою. Для моделі Ерроу-Дебре відомий критерій глобальної стійкості конкурентного рівноваги.

Питання та завдання для самоконтроля до лекцій 9 – 11

1. Поясніть потребу у розробці моделей взаємодії споживачів та виробників.
2. Розкрийте сутність моделі встановлення ринкової ціни товару.
3. Поясніть зміст моделі Еванса.
4. Висвітліть призначення та зміст моделі Вальраса.
5. Поясніть основні відмінності у моделях Кейнса та Фрідмана.
6. Поясніть механізм функціонування ринку робочої сили.
7. Вкажіть основні моделі функціонування ринку грошей.
8. Назвіть кількісні критерії суспільного розвитку. Чи можна, на Вашу думку, їх вважати об’єктивність?
9. Вкажіть основні підходи до моделювання науково-технічного прогресу.

У наведених тестових завданнях вкажіть вірну відповідь.

1. Рівноважна ціна товару визначається як абсциса точки перетину кривих попиту та пропозиції у моделі

1) Вальраса;

2) Севіджа;

3) «павутиноподібної» моделі ринку;

4) Кейнса.

2. Річний цикл виробництва та розподілу товару здійснюється на основі дослідження взаємодії споживачів та виробників, що намагаються досягти власні цілі, здійснюється у межах

1) моделі Гурвіца;

2) моделі Вальраса;

3) моделі Фрідмана;

4) моделі Кейнса.

3. У моделі Еванса час є

1) неперервною змінною;

2) дискретною змінною;

3) сталою величиною;

4) ендогенною змінною.

4. Класична модель ринкової економіки найбільшою мірою відповідає

1) ринку монополістичної конкуренції;

2) монополії;

3) досконалої конкуренції;

4) олігополії.

5. У стані рівноваги ринку праці вартісний вираз граничного продукту праці дорівнює

1) ціні одиниці товару;

2) податку на дохід;

3) ставці заробітної

платні;

4) податку на додану вартість.

6. У моделі Кейнса відносна ціна грошей визначається як

1) процентна ставка за облігацією;

2) депозитна процентна ставка;

3) норма прибутку на акцію;

4) обмінний курс.

7. У моделі Солоу критерієм оптимальності економіки є

1) виробництво та споживання на душу населення предметів споживання;

2) валового внутрішнього продукту на душу населення;

3) середній дохід на душу населення;

4) рівень зайнятості.

8. Вплив науково-технічного прогресу на обсяг виробництва враховується у виробничій функції

1) Леонтьєва;

2) Кобба-Дугласа;

3) Тінбергера;

4) лінійній.

9. Якщо у ході науково-технічного прогресу не змінюється граничний продукт праці, то він називається

1) нейтральним за Хіксом;

2) нейтральним за Хірродом;

3) нейтральним за Солоу;

4) нейтральним за Дугласом.

РОЗДІЛ VI. МІЖГАЛУЗЕВІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІКИ. Лекції 12 – 13

Мета: з’ясувати сутність, призначення та метод побудови статичної міжгалузевої моделі балансу.

План

1. Сутність та призначення міжгалузевих моделей.
2. Модель Леонтьєва.
3. Модель міжгалузевого балансу в натуральному вираженні.
4. Баланс цін і двоїста задача.
5. Узагальнення моделі Леонтьєва.
6. Модель динамічного міжгалузевого балансу.

Ключові терміни та поняття: модель Леонтьєва, балансові моделі, технологічна матриця, мультиплікатор Леонтьєва, продуктивність матриці.

6.1 Сутність та призначення міжгалузевих моделей. Балансові моделі в економіці

Залежно від мети дослідження економіку можна вивчати в різних розрізах – від рівня національної економіки до рівня окремих фірм і споживачів. Міжгалузеві моделі призначені для отримання інформації про виробничому секторі економіки країни або регіону, а, можливо, і всієї світової економіки з метою обґрунтованого планування міжгалузевих поставок продукції за заданими обсягами кінцевого попиту на продукцію.

Нагадаємо, що економіко-математичні моделі призначаються для отримання якісної та кількісної інформації про об’єкти дослідження з метою раціонального керування цими економічними об’єктами. Одним з найбільш важливих таких об’єктів є виробничий сектор економіки країни, що діє у складній системі міжгалузевих взаємозв’язків.

Міжгалузеві моделі характеризують взаємозв’язки між галузями економіки. Міжгалузеві моделі, вперше розроблені видатним американським економістом лауреатом Нобелевської премії В.В. Леонтьєвим, призначені для отримання інформації та аналізу діяльності виробничого сектору економіки країни з метою забезпечення обґрунтованого планування міжгалузевих постачань продукції згідно з плановими чи прогнозованими обсягами кінцевого попиту на продукцію. Міжгалузеві моделі можуть бути застосовані не лише до економіки країни, але й на рівні світової чи регіональної економіки, або навіть на рівні окремої компанії. У економічній практиці міжгалузеві моделі використовують у економічній практиці більше 80 країн світу. Їх застосування дозволяє раціонально керувати виробничими секторами національних економік. За типами використаного математичного апарату міжгалузеві моделі є лінійними детермінованими моделями.

У міжгалузевих моделях вважається, що виробничий сектор економіки поділений на деяку кількість n галузей. У одну галузь при цьому об'єднуються всі виробничі процеси одного продукту, так, що кожна галузь виробляє один продукт. Зі зростанням кількості галузей, на які поділений виробничий сектор національної економіки, міжгалузева модель адекватніше відображає весь виробничий сектор. Найчастіше на практиці використовують міжгалузеві моделі (МГМ), де виділені зазвичай від 500 до 600 галузей, як виняток, у Японії МГМ включає 2000 галузей.

Балансовий метод в економіці. Баланс (від. фр. *Balance* – терези) – рівновага. Балансові моделі широко використовують в економічних дослідженнях, аналізі, плануванні. Ці моделі будуються на підставі балансового методу, тобто узгодженні матеріальних, трудових і фінансових ресурсів. Якщо описувати економічну систему загалом, то під балансовою моделлю передбачають систему рівнянь, кожне з яких виражає балансові співвідношення між виробництвом окремими економічними об'єктами обсягів продукції й сукупною потребою в цій продукції. За такого підходу досліджувана економічна система складається з об'єктів, кожен з яких випускає певний продукт, частина якого споживається ним же та іншими об'єктами системи, а решта виводиться за межі системи як її кінцева продукція.

Якщо замість поняття «продукт» увести загальніше поняття «ресурс», то під **балансовою моделлю** розуміють систему рівнянь, які задовольняють вимоги відповідності щодо наявності ресурсу та його використання. Можна також розглядати приклади балансової відповідності, наприклад: відповідність наявної робочої сили й кількості робочих місць, платоспроможного попиту населення та продукції (товарів і послуг) тощо.

В економіці складають такі баланси:

- бухгалтерський;
- доходів і витрат підприємства;
- народного господарства країни (доходів і витрат населення);
- національного доходу;
- суспільного продукту;
- трудових ресурсів;
- основних фондів;
- виробничих потужностей;

міжгалузевий та ін.

Балансовий метод застосовують в аналізі господарської діяльності та плануванні. В аналізі першої – це порівняння взаємопов'язаних показників господарської діяльності в цілях з'ясування та вимірювання їх взаємного впливу і визначення резервів підвищення ефективності виробництва.

Балансовий метод у плануванні – це узгодження потреб і ресурсів, порівняння затрат і результатів, узгодження та координація всіх завдань і показників плану забезпечення єдності та збалансованості всіх його частин і розділів.

Міжгалузевий баланс (МГБ) класифікують за різними ознаками:

1) за широтою охоплення економічного процесу:
   - народногосподарські – МГБ виробництва та розподілу продукції народного господарства країни;
   - регіональні – МГБ народного господарства регіону;
   - галузеві – міжпродуктовий баланс виробництва та розподілу продукції окремої галузі;
2) за застосовуваними одиницями:
   - натуральні, що характеризують матеріально-речові зв'язки у виробництві та споживанні за широкою номенклатурою продукції;
   - у вартісному вираженні, що відображають галузеві зв'язки в процесі виробництва;
   - натурально-вартісні, які в одній схемі відбивають основні міжгалузеві зв'язки та їх вплив на загальноекономічні пропорції і конкретизують пропорції за основними продуктами;
3) за характером відображення процесу відтворення:
   - статичні, що характеризують стан економічного процесу за деякий період, звичайно за рік;
   - динамічні, що характеризують процес відтворення в динаміці, тобто змінному в часі;
4) за ступенем деталізації номенклатури продукції:
   - укрупнені – у вартісному вираженні;
   - розгорнуті – натурально-вартісні та між продуктові.

Усі названі баланси мають однаковий формальний принцип побудови, єдину систему рахунків, аналогічні показники. Це дає змогу вивчати їх структуру, основні залежності, зміст на прикладі статичного МГБ виробництва та розподілу продукції народного господарства країни у вартісному вираженні.

Принципова схема міжгалузевого балансу виробництва та розподілу продукції. В основі МГБ лежить розподіл валового продукту на проміжний і кінцевий. Цей розподіл залежить не від матеріально-речового складу продукту, а від тієї ролі, яку він відіграє в процесі суспільного виробництва.

Проміжний продукт – це частина валового продукту, яка не виходить зі стадії виробництва, а піддається подальшій переробці та становить поточні матеріальні витрати. Кінцевий продукт – це частина валового продукту, яка остаточно вийшла за межі поточного виробництва і використовується на невиробниче споживання (особисте та суспільне); нагромадження (виробниче те невиробниче); відшкодування зношеності та капітальний ремонт основних фондів; експорт (за від рахуванням імпорту). Принципова схема МГБ за один рік в грошовому (вартісному) представленні наведена в табл. 6.1.

Таблиця 6.1. Міжгалузевий баланс виробництва і розподілу продукції у вартісному виразі

Галузі-споживачі / Галузі-виробники			Сукупний суспільний продукт									Валова продукція
			Поточні виробничі потреби						Кінцева продукція			
			$Г1$	$Г2$	…	$Гj$	…	$Гn$	Заміна і ремонт ОВФ	Фонд споживання	Фонд накопичення	
Сукупний суспільний продукт	Поточні матеріальні затрати	$Г1$	X_{11}	X_{12}	…	X_{1j}	…	X_{1n}		Y_1		X_1
		$Г2$	X_{21}	X_{22}	…	X_{2j}	…	X_{2n}		Y_2		X_2
		…	…	…	I	…	…	…		…	II	…
		$Гi$	X_{i1}	X_{i2}		X_{ij}	…	X_{in}		Y_i		X_i
		…	…	…	…	…	…	…		…		…
		$Гn$	X_{n1}	X_{n2}	…	X_{nj}	…	X_{nn}		Y_n		X_n
	Чиста продукція	Оплата праці	V_1	V_2	III	V_j	…	V_n		V	IV	-
		Чистий прибуток	m_1	m_2		m_j	…	m_n		m		-
Валова продукція			X_1	X_2	…	X_j	…	X_n	-			Сума

Кожна з n галузей матеріального виробництва представлена в МГБ двічі: окремим *рядком* як *галузь виробництва* і відповідним *стовпчиком* як *галузь споживання*. Квадратна матриця розмірності $n \times n$ утворює I квадрант, елементами якого є міжгалузеві потоки ($Xij > 0$), які показують вартість засобів виробництва, вироблених за рік в i-й галузі та використаних в якості поточних матеріальних затрат в j-й галузі. Ці затрати складаються з вартості предметів праці і амортизації засобів праці. Кінцева продукція (КП) – це продукція i-тої галузі, використана поза сферою матеріального виробництва на кінцеве споживання (суспільне і особисте). В табл. 6.1 КП знаходиться в II квадранті, для простоти показана одним стовпчиком, без розподілу за напрямками використання. Далі наведена таблиця "ВИТРАТИ-ВИПУСК" за 2021 рік у цінах споживачів України, представлена на сайті https://www.ukrstat.gov.ua .

Таблиця ВИТРАТИ - ВИПУСК	Проміжне споживання / *Intermediate consumption*							Кінцеві споживчі витрати / *Final consumption expenditure*				Валове нагромадження капіталу / *Gross capital formation*				**Використання продукції / *Use of production***
	Сільське, лісове та рибне господарство / *Agriculture, forestry and fishing*	Добування кам'яного та бурого вугілля /	Добування сирої нафти та природного газу /	Добування металевих руд, інших корисних копалин та	Виробництво харчових продуктів; напоїв та тютюнових виробів	Текстильне виробництво, виробництво одягу, шкіри та інших матеріалів /	**Всього / *Total***	**Всього / *Total***	Домашніх господарств / *Of households*	Некомерційних організацій, що обслуговують домашні господарства	Загального державного управління / *Of general government*	**Всього / *Total***	Валове нагромадження основного капіталу / *Gross fixed capital formation*	Зміна запасів матеріальних оборотних коштів / *Changes in inventories*	Придбання за виключенням вибуття цінностей / *Net acquisitions of valuables*	
Сільське, лісове та рибне господарство	303714	217		118	289515	274	**641703**	**436154**	430838		5316	**119520**	7201	112319		**1578047**
Добування кам'яного та бурого вугілля	743	5451		7	210		**240723**	**11586**	11586			**-10381**		-10381		**171103**
Добування сирої нафти та прир.газу	11784	9	4732	5871	17149	333	**278853**	**67286**	67229		57	**-1164**		-1164		**210638**
Добування металевих руд, інших	1008	1146	1585	23709	2105	63	**230280**					**-17484**		-17484		**411303**
Виробництво харчових тютюнових виробів	6248	6	1	17	38373	5	**53149**	**1346790**	1343712	691	2387	**-36753**		-36753		**1513469**
Текстильне вир-тво,	206	155	35	318	132	9005	**18244**	**172721**	170334		2387	**-7288**		-7288		**112293**
ПРОМІЖНЕ СПОЖИВАННЯ	**953043**	**110443**	**72548**	**240061**	**1028707**	**59080**	**7874027**	**4734271**	**3717848**	**49324**	**967099**	**788599**	**719771**	**67284**	**1544**	**13324876**
Оплата праці найманих працівників	140755	26626	15617	42428	87437	12096	**2231206**									
Податки на виробництво/ імпорт	34836	4377	17652	1648	309762	30768	**818335**									
Субсидії на в-во/імпорт	-5590	-5462	-4167	-81	-1306	-67	**-75846**									
Валовий прибуток, змішаний дохід	455003	35119	108988	127247	88869	10416	**2477154**									
ВВП	**625004**	**60660**	**138090**	**171242**	**484762**	**53213**	**5450849**									
ВИПУСК	**1578047**	**171103**	**210638**	**411303**	**1513469**	**112293**	**13324876**									

Джерело:https://www.ukrstat.gov.ua/operativ/operativ2006/vvp/vitrvip/vitru/arhvitru.html

6.2 Модель Леонтьєва

Модель Леонтьєва являє собою статичну лінійну модель багатогалузевої економіки. Метою побудови моделі Леонтьєва є аналіз перетікання товарів між галузями економіки, що забезпечує таке функціонування виробничого сектора, коли обсяг випуску відповідає сумарному (тобто виробничому і кінцевого) попиту на товари. Тому економіка розглядається в розукрупнення до рівня галузей вигляді. Основні припущення моделі:

1. В економічній системі виробляється, продаються, купуються і інвестуються n продуктів.

2. Кожна з n галузей економіки виробляє єдиний продукт. Різні галузі виробляють різні продукти.

3. Під виробничому процесом в кожній галузі розуміється перетворення деяких (можливо, всіх) типів продукту в певний продукт.

При цьому співвідношення витраченого продукту і випускається передбачається постійним:

якщо для виробництва однієї одиниці j-го продукту треба затратити a_{ij} одиниць i-го продукту

то для виробництва y_i одиниць j-го продукту треба затратити $a_{ij}y_i$, одиниць i-го продукту.

Величину $a_{ij} > 0$ називають технологічним коефіцієнтом. Валовий випуск i-го продукту за рік y_i розпадається на дві частини:

Виробниче споживання y_i^p у всіх галузях, яке в пропозиціях 1-3 дорівнює

$$y_i^p = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j.$$

Кінцева продукція або чистий випуск.

Визначення 6.1 Величини

$$y_{ij} = a_{ij} y_i$$

називають міжгалузевими поставками і складають з них матрицю міжгалузевих поставок (потоків)

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1j} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & \cdots & y_{2j} & \cdots & y_{2n} \\ \dots & \cdots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & \dots & y_{nj} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}.$$

Чистий випуск (різниця між валовим випуском і виробничим споживанням) i-го продукту складає

$$y_i - y_i^p = y_i - \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\,, \qquad i = 1,2,\dots,n.$$

Якщо прирівняти чистий випуск кожного i-го продукту і кінцевий попит на нього x_i, то утворюється система лінійних рівнянь:

$$y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = x_i, \qquad i = 1,2,\dots,n. \tag{6.1}$$

яка і становить **модель Леонтьєва**.

Кінцевий попит x_i складається з кінцевого споживання, експорту та інвестицій. Але в самій моделі величини x_i вважаються задаються ззовні (екзогенними) параметрами.

Тому система з n лінійних рівнянь моделі Леонтьєва дозволяє визначити n валових випусків галузей $\boldsymbol{y_i}$ по заданих екзогенних величинах попиту $x_i,\ i = 1,\dots,n$ та інформації про технологічні можливості, втіленої в технологічних коефіцієнтахa_{ij}. Зрозуміло, за цими ж рівнянням може бути вирішена і зворотне завдання: за заданими валових випусків знайти обсяги кінцевого попиту на кожен продукт.

Величини $x_i,\ y_i$ можуть бути представлені в натуральних і вартісних одиницях виміру. Відповідно до цього розрізняють натуральний або вартісний міжгалузеві баланси. Для початку розглянемо вартісної баланс, вважаючи, що x_i, y_i представлені в вартісних одиницях. Про його зв'язки з натуральним балансом поговоримо пізніше.

Методи рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь добре відомі, але система (6.1) має важливу особливість: коефіцієнти прямих витрат a_{ij}, величини кінцевого попитуx_i і валові випуски y_i – невід'ємні.

Система (6.1) (і, відповідно, модель Леонтьєва) називається продуктивною, якщо для будь-яких невід'ємних значень кінцевого попиту вона має рішення у вигляді невід'ємних значень валових випусків, тобто

$$y_i \geq 0,\ \ i = 1,2,\dots,n.$$

Система (6.1) може бути переписана в матричної формі.

Введемо технологічну матрицю, складену з технологічних коефіцієнтів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи цієї матриці невід'ємні і в ній немає нульових стовпців. Якби j-й стовпець цієї матриці був повністю нульовим, це означало б, що j-я галузь при виробництві свого продукту нічого не споживає.

Крім того, кількість власного продукту, споживаного i-й галуззю в процесі виробництва, є меншою ніж валового випуску цієї галузі:

$$a_{ij} y_i < y_i,$$

тобто

$$0 < a_{ii} < 1, \qquad i = 1,2, \dots, n.$$

Приміром, табл 6.2 містить розраховані за даними статистики України (таблиці ВИТРАТИ-ВИПУСК наведена вище) технологічні коефіцієнти деяких галузей виробничого сектора у 2021 році.

Таблиця 6.2. Технологічні коефіцієнти галузей виробничого сектора України в 2021 р

	Код галузі	**A01-A03**	**B05**	**B06**	**B07-B09**	**C10-C12**
Сільське, лісове та рибне господарство	**A01-A03**	0,1925	0,0001		0,0001	0,1835
Добування кам'яного та бурого вугілля	**B05**	0,0043	0,0319		0,0000	0,0012
Добування сирої нафти та природного газу	**B06**	0,0559	0,0000	0,0225	0,0279	0,0814
Добування металевих руд, інших корисних копалин	**B07-B09**	0,0025	0,0028	0,0039	0,0576	0,0051

Введемо також вектори-стовпці кінцевого попиту і валового випуску:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

В силу правила множення матриць, система (6.1) перепишеться у вигляді:

$$\bar{y} - A \cdot \bar{y} = \bar{x}.$$

Винесемо $\bar{y}$ за дужку. У дужках залишається різниця одиничної матриці E розміру $n \times n$ і матриці A,

$$(E - A) \cdot \bar{y} = \bar{x}.$$

З останнього рівняння випливає, що модель Леонтьєва буде продуктивною при виконанні двох умов:

1. Матриця $(E - A)$ має зворотну, так що можна вирішити матричне рівняння і знайти вектор
$$\bar{y} = (E - A)^{-1} \cdot \bar{x}$$
2. Всі елементи δ_{ij} матриці $(E - A)^{-1}$ є невід'ємними числами
$$\delta_{ij} \geq 0.$$

Перша умова очевидно. Для того, щоб зрозуміти друга умова, проаналізуємо економічний сенс елементів матриці $(E - A)^{-1}$.

Виберемо вектор кінцевого попиту $\bar{x}$ з компонентами

$$x_1 = 0, \dots, x_{j-1} = 0, x_j = 1, x_{j+1} = 0, \dots, x_n = 0.$$

Виконавши множення $(E - A)^{-1} \cdot \bar{x}$ отримаємо вектор випуску $\bar{y}$, компоненти якого збігаються з елементами j-го стовпця матриці $(E - A)^{-1}$:

$$y_i = \delta_{ij}, \quad i = 1,2, \dots, n.$$

Якщо допустити, що якийсь з елементів $\delta_{ij} < 0$, то відповідна компонента вектора випуску буде від’ємною, що суперечить умові продуктивності моделі.

З проведеного аналізу випливає, що δ_{ij} – розмір валової продукції (у вартісному вираженні) i-й галузі, необхідне для випуску однієї одиниці кінцевої продукції (у вартісному вираженні) j-й галузі.

Визначення 6.2 Величини δ_{ij} іменуються **коефіцієнтами повних матеріальних витрат**.

Визначення 6.3 Матриця $(E - A)^{-1}$, що складається з цих коефіцієнтів, називається матрицею повних витрат або **мультиплікатором Леонтьєва**.

Крім уже згаданого властивості всіх елементів цієї матриці:

$$\delta_{ij} \geq 0,$$

можна відзначити ще одну важливу властивість діагональних елементів матриці повних витрат. У моделі Леонтьєва кінцевий попит на i-й продукт x_i дорівнює різниці між валовим випуском і виробничим споживанням:

$$y_i - y_i^p = x_i$$

тобто валовий випуск

$$y_i = y_i^p + x_i.$$

Вже згаданий вектор попиту, всі компоненти якого, крім x_i, дорівнюють нулю, а $x_i = 1$, отримаємо, що i −й елемент вектора валового випуску:

$$y_i = y_i^p + 1 = \delta_{ii}.$$

Виробниче споживання – невід'ємна величина, тому діагональні елементи матриці повних витрат

$$\delta_{ij} \geq 1, \;\; i = 1,2, \dots, n.$$

Відповідь на питання, продуктивна або непродуктивна модель Леонтьєва, залежить, таким чином, від властивостей технологічної матриці A (кажуть про продуктивність матриці A). Існує кілька критеріїв продуктивності технологічної матриці. Важливою умовою є її нерозкладність.

Позначимо через N множину номерів галузей

$$N = \{1,2, \dots, n\}$$

і розділимо її на дві підмножини

$$S \text{ і } \bar{S} = N \backslash S.$$

Будемо говорити, що підмножину галузей S ізольовано, якщо

$$a_{ij} = 0 \text{ для } i \in \bar{S}, j \in S.$$

Це означає, що галузі з S не потребують товари, вироблені галузями з $\bar{S}$, хоча, може бути, продають їм свої товари.

Якщо перенумерувати галузі так, щоб в перших k рядках і стовпчиках технологічної матриці розташовувалися технологічні коефіцієнти галузей з S, то матриця A прийме наступний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

де A_1 – квадратна $(k \times k)$ матриця , що складається з елементів матриці A, відповідних галузям з S.Матриця A_3 – квадратна з розмірами $(n - k) \times (n - k)$, що містить елементи матриці A, відповіді галузям з $\bar{S}$.

Визначення 6.4 Технологічна матриця називається нерозкладною, якщо її не можна шляхом перестановок рядків і стовпців привести до виду (6.2). Нерозкладність A означає, що кожна галузь хоча б побічно використовує продукцію всіх галузей.

Критерії продуктивності технологічної матриці *A* і моделі Леонтьєва

Критерій 1: Якщо матриця A нерозкладна, то модель Леонтьєва продуктивна тоді і тільки тоді, коли найбільше за абсолютною величиною власне значення матриці A:

$$\lambda_A < 1.$$

Достатня умова 1: Якщо матриця A нерозкладна і

$$\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1,$$

то модель Леонтьєва є продуктивною.

Достатня умова 2: Якщо матриця *A* нерозкладна і

$$\max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1,$$

то модель Леонтьєва є продуктивною.

У достатній умові 1 мова йде про підсумовуванні елементів технологічної матриці по рядку, в умові 2 – за стовпцем. Останній можна дати просте економічне обґрунтування. Розглянемо j-й стовпець матриці A і відповідний їй j-й стовпець матриці міжгалузевих поставок Y. Тоді сума елементів j-го стовпця міжгалузевих поставок

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_j, \qquad j = 1,2,\ldots,n,$$

являє собою витрати всіх галузей на валовий випуск y_j галузі з номером j. Природно зажадати, щоб ці витрати були меншими за вартість y_j валового випуску j-й галузі (тобто вимагати, щоб галузь створювала додану вартість):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_j < y_j.$$

Розділимо обидві частини рівності на $y_j > 0$ і отримаємо, що:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1, \ \text{для будь} - \text{якого} \ j = 1,2,\ldots,n,$$

тобто виконана достатня умова 2.

6.3 Модель міжгалузевого балансу в натуральному вираженні

До сих пір ми розглядали модель міжгалузевого балансу, в якій вектори валового випуску $\bar{y}$ і кінцевого попиту $\bar{x}$ мають вартісне вираження. Цю модель ми записували в покоординатно і матричної формах. Покоординатно форма міжгалузевого балансу для компонент векторів валового випуску і кінцевого попиту:

$$y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = x_i, \qquad i = 1,2, \dots, n.$$

Матрична форма:

$$\bar{y} - A \cdot \bar{y} = \bar{x}.$$

Від моделі у вартісному вираженні легко перейти до моделі в натуральному сенсі, де вектори валового випуску і кінцевого попиту виражені в натуральних (фізичних) показниках.

Нехай x_i^q і y_i^q – кількості відповідно кінцевої і валової продукції i-й галузі в натуральному вираженні. Зв'язок між кількостями x_i^q і x_i, y_i^q i y_i очевидна:

$$x_i = p_i \cdot x_i^q, \qquad y_i = p_i \cdot y_i^q,$$

де p_i – вартість одиниці продукції i-й галузі.

З цін p_i сформуємо діагональну матрицю

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Вектори кінцевого попиту і валового випуску у вартісному і натуральному вираженні будуть пов'язані через цю матрицю

$$\bar{x} = P \cdot \bar{x}^q, \;\; \bar{y} = P \cdot \bar{y}^q.$$

Підставимо праві частини цих рівностей в матричну форму запису міжгалузевого балансу замість $\bar{y}$ i $\bar{x}$:

$$P \cdot \bar{y}^q - A \cdot P \cdot \bar{y}^q = P \cdot \bar{x}^q.$$

Обидві частини цього матричного рівняння помножимо зліва на діагональну матрицю

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/p_n \end{pmatrix}$$

і, з огляду на те, що $P^{-1}\ P = E$ отримаємо модель міжгалузевого балансу в натуральному вираженні $\bar{x}$:

$$\bar{y}^q - P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot \bar{y}^q = \bar{x}^q.$$

Позначимо через

$$A^q = P^{-1} \cdot A \cdot P,$$

побудовану нами технологічну матрицю в натуральному вираженні. За правилами множення матриць, елемент цієї матриці a_{ij}^q пов'язаний з відповідним технологічним коефіцієнтом a_{ij} рівністю:

$$a_{ij}^q = p_i^{-1} \cdot a_{ij} \cdot p_j.$$

Тепер модель міжгалузевого балансу в натуральному вираженні прийме той же вид, що і модель в вартісному вираженні

$$\bar{y}^q - A^q \cdot \bar{y}^q = \bar{x}^q.$$

Зворотний перехід від натуральної моделі до вартісної (якщо спочатку складена натуральна) здійснюється за допомогою рівностей:

$$\bar{x}^q = P^{-1} \cdot \bar{x}; \quad \bar{y}^q = P^{-1} \cdot \bar{y}; \qquad a_{ij} = p_i \cdot a_{ij}^q \cdot p_j^{-1}.$$

Зазвичай модель міжгалузевого балансу складається одночасно в натуральному і вартісному вираженні; з продуктивності матриці A слід продуктивність A^q і навпаки.

6.4 Баланс цін і двоїста задача

Розглянемо вектор випуску (в натуральному вимірі), що складається з одиниць^

$$\bar{y}^q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

У вартісному вираженні цей вектор випуску виглядає як вектор цін

$$\bar{y} = P \cdot \bar{y}^q = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Для кожного $j = 1, \ldots, n$ візьмемо j- й стовпець технологічної матриці A і розглянемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}p_j.$$

Ця сума є витрати всіх галузей на виробництво однієї одиниці в фізичному вимірі (або p_j одиниць в вартісному) продукції галузі j.

Тоді різниця

$$p_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}p_j = v_j^q \geq 0, \quad j = 1,2, \dots, n, \tag{6.2}$$

є частка доданої вартості в кожній одиниці продукції галузі j або, що рівносильно, додана вартість, яка припадає на одиницю (в натуральному вимірі) продукції цієї галузі. Позначимо цю додану вартість через v_j^q.

Перейдемо до коефіцієнтів технологічної матриці в натуральному виразі, використовуючи формулу

$$a_{ij} = p_i \cdot a_{ij}^q \cdot p_j^{-1}.$$

Підставляючи формулу для коефіцієнтів в (6.2), отримаємо:

$$p_j - \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot a_{ij}^q \cdot p_j^{-1} p_j = v_j^q \geq 0, \quad j = 1,2, \dots, n,$$

або

$$p_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}p_i = v_j^q \geq 0, \quad j = 1,2, \dots, n, \tag{6.3}$$

Система рівнянь (6.3) являє собою покоординатно форму запису для балансу цін і є двоїстої завданням до моделі міжгалузевого балансу в натуральному вираженні. Система (6.3) називається прибутковою, якщо для будь-яких невід'ємних значень доданої вартості вона має рішення у вигляді невід'ємних значень цін, тобто

$$p_j \geq 0, \; j = 1,2, \dots, n.$$

Перепишемо (6.3) в матричної формі. Введемо вектори-стовпці цін і доданих вартостей:

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}, \bar{v}^q = \begin{pmatrix} v_1^q \\ v_2^q \\ \dots \\ v_n^q \end{pmatrix},$$

і розглянемо матрицю

$$(A^q)^T = \begin{pmatrix} a_{11}^q & a_{21}^q & \cdots & a_{n1}^q \\ a_{12}^q & a_{22}^q & \cdots & a_{n2}^q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n}^q & a_{2n}^q & \cdots & a_{nn}^q \end{pmatrix},$$

що є транспонованою до технологічної матриці в натуральному вираженні.

У матричної формі баланс цін має вигляд

$$\bar{p} - (A^q)^T \bar{p} = \bar{v}^q.$$

Вирішуючи систему матричних методом, як і модель Леонтьєва, отримаємо:

$$(E - (A^q)^T) \cdot \bar{p} = \bar{v}^q,$$

і вектор цін можна знайти з рівняння

$$\bar{p} = (E - (A^q)^T)^{-1} \cdot \bar{v}^q.$$

Баланс цін дозволяє коригувати рівноважні ціни на продукцію різних галузей при зміні додаткової вартості продукції.

Запишемо обидві взаємно двоїсті завдання – модель міжгалузевого балансу в натуральному вираженні і баланс цін – в матричної формі:

$\bar{y}^q - A^q \cdot \bar{y}^q = \bar{x}^q$ – міжгалузевий баланс;

$\bar{p} - (A^q)^T \cdot \bar{p} = \bar{v}^q$ – баланс цін.

З властивостей транспонованих і зворотних матриць випливає, що продуктивність моделі Леонтьєва (міжгалузевого балансу) і прибутковість балансу цін еквіваленти - з одного випливає інше.

6.5 Узагальнення моделі Леонтьєва

У моделі Леонтьєва були зроблені наступні, вельми жорсткі, припущення:

- в моделі немає обмежень по трудових і матеріальних ресурсів;
- всі виробничі процеси відбуваються миттєво, і проміжні продукти виявляються зробленими до того моменту, коли вони потрібні;
- всі галузі є «чистими».

Позбавляючись від цих припущень, отримаємо різні узагальнення моделі Леонтьєва і різні оптимізаційні задачі.

6.5.1 Модель з урахуванням обмеженості трудових ресурсів

Кожній з j-й галузі можна порівняти число

$$l_j > 0, \qquad j = 1,2,\dots,n,$$

коефіцієнт трудомісткості одиниці j-го продукту, що виражає витрати трудових ресурсів при одиничній інтенсивності виробництва (одиничному випуску галузі). Величина l_j може вимірюватися в людино-годинах, людино-днях або в числі найнятих робітників. Введемо вектор-рядок коефіцієнтів трудомісткості

$$\bar{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n)$$

і позначимо загальний обсяг трудових ресурсів через $L, L > 0$.

Обсяг витрат трудових ресурсів на виробництво векторів валового випуску $\bar{y}$ складе величину

$$\bar{l} \cdot \bar{y} = l_1 y_1 + l_2 y_2 + \dots + l_n y_n.$$

Модель з урахуванням обмеженості трудових ресурсів записується у такий спосіб:

$$\begin{cases} \bar{y} - A\bar{y} \geq \alpha\bar{c}, \\ \bar{l} \cdot \bar{y} \leq L, \\ \bar{y} \geq 0. \end{cases}$$

На відміну від вихідної моделі Леонтьєва, це завдання буде мати рішення не для всіх векторів кінцевого попиту $\bar{x}$.

Наведемо приклад завдання оптимізації для моделі з урахуванням обмеженості трудових ресурсів. Нехай вектор

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

задає «структуру» кінцевого попиту, наприклад, «пайок» на одного працюючого.

Завдання лінійної оптимізації формулюється у наступному вигляді:

$$\alpha \to max,$$

$$\begin{cases} \bar{y} - A\bar{y} \geq \alpha\bar{c}, \\ \bar{l} \cdot \bar{y} \leq L, \\ \bar{y} \geq 0. \end{cases}$$

Її можна інтерпретувати як прагнення випустити якомога більше кількість «комплектів» вектору $\bar{c}$.

6.5.2 Модель з урахуванням обмеженості трудових ресурсів і споживання

Нехай вектор $\bar{c}$ описує «пайок», призначений для оплати праці одного працюючого, $\bar{L}$ – число найнятих робітників. Якщо $\bar{y}$ - вектор валового випуску, то витрати на його виробництво будуть складатися з виробничих витрат всіх галузей і оплати праці і складуть

$$A\bar{y} + L\bar{c}.$$

Баланс матеріальних і трудових витрат задається наступною системою нерівностей:

$$\begin{cases} A\bar{y} + L\bar{c} \leq \bar{y}, \\ \bar{l} \cdot \bar{y} \leq L, \\ \bar{y} \geq 0. \end{cases}$$

6.5.3 Узагальнення фон Неймана

Знявши вимога про те, що одна галузь виробляє тільки один продукт, можна отримати ще одну версію завдання.

Нехай в моделі n продуктів і m способів їх виробництва, $m \geq n$. У цьому випадку деякі продукти можуть проводитися різними способами (різними галузями). У векторі валового випуску в різний спосіб виробництва можна порівняти різні компоненти, тобто цей вектор стане m −мірним:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Кожен j-й спосіб виробництва $(j = 1, \dots, m)$ задається j-м стовпцем одиничних витрат $\bar{a}_j$ в технологічній матриці A і j-м стовпцем одиничних випусків $\bar{b}_j$ в матриці випуску B:

$$\bar{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix}.$$

Технологічна матриця A і матриця випуску B, що складаються з цих стовпців, будуть прямокутними матрицями розміру $m \times n$:

$$A = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m), \quad B = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_m).$$

Вектор кінцевого попиту $\bar{x}$ залишається як і раніше n-мірним.

Приклад лінійної задачі оптимізації – мінімізація трудових витрат при заданій трудомісткості і векторі кінцевого попиту:

$$L = \bar{l} \cdot \bar{y} \to min,$$

$$\begin{cases} B\bar{y} - A\bar{y} \geq \bar{x}, \\ \bar{y} \geq 0. \end{cases}$$

6.5.4 Модель з урахуванням обмеженості основних виробничих фондів (ОПФ)

Розглянемо спочатку модель Леонтьєва з «чистими» галузями.

Визначення 6.5 Коефіцієнтом прямий фондомісткості (капіталомісткості) галузі називається величина ϕ_j, рівна кількості ОПФ галузі j, що витрачаються при випуску однієї одиниці її продукції.

З коефіцієнтів прямої фондомісткості ϕ_j сформуємо діагональну матрицю – матрицю прямих фондомісткості:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \phi_n \end{pmatrix}.$$

Для вектору валового випуску $\bar{y}$ виникає обмеження

$$\Phi \cdot \bar{y} \leq \bar{\xi}_0,$$

де $\bar{\xi}_0$ – n-мірний вектор наявних на момент планування ОПФ галузей.

Приклад відповідної лінійної задачі оптимізації:

$$L = \bar{l} \cdot \bar{y} \to min,$$

$$\begin{cases} \bar{y} - A\bar{y} \geq \bar{x}, \\ \Phi \cdot \bar{y} \leq \bar{\xi}_0, \\ \bar{y} \geq 0. \end{cases}$$

Якщо обмеження на «чисті» галузі знято (узагальнення фон Неймана), то матриця ϕ стане повною прямокутною матрицею розміру $m \times n$ і завдання набуде вигляду:

$$L = \bar{l} \cdot \bar{y} \to min,$$

$$\begin{cases} B\bar{y} - A\bar{y} \geq \bar{x}, \\ \Phi \cdot \bar{y} \leq \bar{\xi}_0, \\ \bar{y} \geq 0. \end{cases}$$

Якщо в момент планування умова

$$\Phi \cdot \bar{y} \leq \bar{\xi}_0,$$

не виконана, то для забезпечення необхідного рівня валового випуску потрібно створити (ввести в дію) нові ОПФ, тобто створювати нові потужності. Однак процес створення нових потужностей тривалий, має іноді «часовий лаг» в кілька років, що довше періоду планування. Ідея поступового (протягом декількох тимчасових періодів) введення в дію яких бракує потужностей, призводить нас до створення динамічного міжгалузевого балансу.

6.6 Модель динамічного міжгалузевого балансу

Ця модель походить від моделі Леонтьєва і використовує наступного припущення:

- «Чисті галузі» виробляють n різних продуктів;
- технологічна матриця A розміру $n \times n$ не залежить від часу і масштабу виробництва;
- час t дискретно, $t = 1,2, \ldots, T$.

Оскільки модель буде представлена в матричної формі, нижній індекс t означитиме номер року.

У модель включені такі постійні і змінні величини

- $\bar{y}_t$ вектор-стовпець валових випусків галузей;
- $\bar{\xi}_t$ вектор-стовпець галузевих потужностей (максимально можливих випусків галузей), обумовлений наявністю ОПФ галузей;
- $\bar{\eta}_t$ вектор-стовпець бажаного збільшення галузевих потужностей. Його j-та компонента η_j^t – бажане збільшення потужності галузі j.
- D – матриця прямих витрат на збільшення галузевих потужностей. Добуток елемента цієї матриці d_{ij} на η_j^t:

$$d_{ij}\eta_j^t$$

показує витрати продукту галузі ?? на збільшення потужності галузі j на 1 одиницю;

- $D\bar{\eta}_t$ – відображає витрати на одночасне збільшення потужностей всіх галузей (інвестиції);
- $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_n)$ – вектор-рядок коефіцієнтів трудомісткості;

- L_t – число найнятих робітників;
- $\bar{c}$ – вектор-стовпець споживання на одного працюючого.

Спрощена модель динамічного міжгалузевого балансу має наступний вигляд:

$$A\bar{y}_t + D\bar{\eta}_t + L_t\bar{c} \le \bar{y}_t; \tag{6.4}$$

$$\bar{y}_t \le \bar{\xi}_{t-1}; \tag{6.5}$$

$$\bar{\xi}_t \le \bar{\xi}_{t-1} + \bar{\eta}_t; \tag{6.6}$$

$$\bar{l} \cdot \bar{y}_t \le L_t; \tag{6.7}$$

$$\bar{y}_t \ge 0, \bar{\xi}_t \ge 0, \bar{\eta}_t \ge 0, L_t \ge 0,\ t = 1,2,\dots,T.$$

Тут $\bar{\xi}_0$ – галузеві потужності, створені до початку періоду $[1, T]$.

Рівняння (6.4) описує матеріальний баланс. Рівняння (6.5) – обмеження по накопиченим до моменту часу $\boldsymbol{t}$ галузевим потужностям. Рівняння (6.6) описує динаміку приросту галузевих потужностей. Рівняння (6.7) – обсяг трудових ресурсів, що беруть участь у виробництві.

Визначення 6.6 Послідовність

$$(\bar{y}_t, \bar{\xi}_t, \bar{\eta}_t, L_t), \qquad t = 1,2,\dots,T,$$

що задовольняє нерівності (6.4) – (6.7), називають **траєкторією моделі**.

Як завдання оптимізації зазвичай формулюється досягнення будь-яких значень до моменту часу T (сумарного рівня споживання, сумарної вартості ОПФ і. т.п.)

Недоліки (ідеалізації) моделі:

- вважається, що будівельні галузі можуть освоїти будь-який необхідний обсяг будівництва;
- будівельний лаг становить один період $[t, t+1]$ (в реальності він зазвичай більше)

Ідеї динамічного міжгалузевого балансу знаходять свій подальший розвиток в моделях фон Неймана, Гейла і магістральної теорії.

Питання та завдання для самоконтроля до лекцій 12 – 13

1. Поясніть, у чому зміст міжгалузевої балансової моделі.
2. Запишіть статичну модель міжгалузевого балансу.
3. Розкрийте, у чому полягає тотожність міжгалузевого балансу.

4. Наведіть означення технологічної матриці.

5. Вкажіть, як з'ясувати, чи є задана технологічна матриця продуктивною.

6. Поясніть зміст мультиплікатора Леонтьєва.

7. Поясніть, у чому полягають баланси цін, основних виробничих фондів та трудових ресурсів.

8. Поясніть різницю між екзогенними та ендогенними змінними, а також наведіть відповідні приклади з моделі Леонтьєва.

9. Поясніть зміст та призначення матриці коефіцієнтів капітальних витрат.

10. Запишіть рівняння відкритого динамічного міжгалузевого балансу.

11. Наведіть повну структурну форму динамічного міжгалузевого балансу. Поясніть її змінні.

12. Вкажіть, для чого застосовують динамічну модель міжгалузевого балансу.

13. Назвіть у динамічній моделі міжгалузевого балансу екзогенні та ендогенні змінні.

14. Поясніть, у чому полягає приведена форма динамічної моделі міжгалузевого балансу.

15. Вкажіть, що розуміють під траєкторію виробничого сектора економіки.

16. Поясніть, у чому полягає збалансованості траєкторії виробничого сектора економіки.

17. Наведіть рівняння замкнутого динамічного балансу.

18. Перша міжгалузева модель, що охоплювала взаємозв'язки економіки та навколишнього середовища, була розроблена

А) В.В. Леонтьєвим і Д. Фордом
Б) Дж. Форрестером
В) Д. Пірсом й К. Тернером
Г) Т.Р. Мальтусом
Д) Д. Рікардо

19. Необхідність у розробці динамічної моделі міжгалузевого балансу виникла у зв'язку необхідністю врахування:

1) витрат праці;

2) динаміки галузевого ринку;

3) введення нових виробничих потужностей;

4) необхідності збільшення обсягів виробництва.

20. Головним джерелом для збільшення основних виробничих фондів є:

1) залучення акціонерного капіталу;

2) кредитні ресурси;

3) збільшення обсягу реалізації продукції підприємства;

4) залучення нових іноземних інвестицій.

21. Матриця капітальних коефіцієнтів встановлює зв'язок між величиною інвестицій у збільшення виробничих потужностей та :

1) обсягом збуту підприємства;

2) прибутком підприємства;

3) приростом валового виробництва;

4) витратами праці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Коряшкіна Л.С., Ус С.А. Практикум за курсом «Методи оптимізації та дослідження операцій». Частина І. Дослідження операцій: навч. посіб. Дніпро : НТУ «ДП», 2020. 182 с.

2. Клименко М. І., Панасенко Є. В., Ткаченко І. Г. Математична економіка : конспект лекцій для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2023. 114 с.

3. Капустян В. О., Мажара Г. А., Фартушний І. Д. Моделювання економіки [Електронний ресурс] : підручник для студентів спеціальності 051 Економіка. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 265 с.

4. Григорків В.С. Моделювання економіки: підручник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2019. 360 с.

5. Лось В.О. Моделі економічної динаміки: навч. посіб. для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Економіка» освітньо-професійної програми «Економічна кібернетика». Запоріжжя : ЗНУ, 2020. 78 с.

6. Ніколіна І.І. Моделі економічної динаміки: конспект лекцій. Вінниця : ВНАУ, 2019. 81 с.

7. Здрок В.В., Лагоцький Т.Я., Паславська І.М. Моделювання економічної динаміки : практикум. Львів : Магнолія, 2018. 252 с.

8. Волонтир Л.О., Потапова Н.А., Ушкаленко І.М., Чіков І.А. Оптимізаційні методи та моделі в підприємницькій діяльності: навч. посіб. Вінниця : ВНАУ, 2020. 334 с.

9. Одновол М.М., Коряшкіна Л.С., Гаранжа Д.М. Методи оптимізації та дослідження операцій. Методичні рекомендації до виконання курсової роботи з дисципліни для студентів спеціальності 124 Системний аналіз. Дніпро : НТУ «ДП», 2023. 68 с.

10. Капустян В.О., Мажара Г.А. Оптимальне керування та теорія ігор в економіці: конспект лекцій [Електронний ресурс] : курс лекцій: навч. посіб. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 120 с.

11. Пономаренко О. І., Перестюк М. О., Бурим В. М. Основи математичної економіки. Київ : Інформтехніка, 2015. 320 с.

12. Товкач Р. В. Математична економіка. Луцьк : СНУ ім. Лесі Українки, 2018. 146 с.

13. Гамалій В. Ф., Сотніков В. С., Вишневська В. А. та ін. Математичні моделі у маркетингу та менеджменті. Кропивницький : ЦНТУ, 2017. 136 с.

14. Економіко-математичне моделювання / за ред. О. Т. Іващука. Тернопіль : ТНЕУ «Економічна думка», 2008. 704 с.

15. Мазник Л. В., Березянко Т. В., Безпалько О. В. та ін. Економіко-математичні методи і моделі в галузі управління персоналом. Київ : Кафедра, 2019. 290 с.

16. Малярець М. М. Економіко-математичні методи та моделі. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. 412 с.

17. Соколовська З. М., Андрієнко В. М., Івченко І. Ю. Математичне та комп'ютерне моделювання економічних процесів. Одеса : Астропринт, 2016. 308 с.

18. Моклячук М. П., Ямненко Р. Є. Теорія вибору та прийняття рішень. Київ : ВПЦ Київський університет, 2020. 527 с.

19. Werner F., Sotskov Y. N. Vfthematics of Economics and Business. London and New York : Rostlende. 2020. 536 p.

20. Dunbar S. Mathematical Modeling in Economics and Finanse. New York : AMS/NAA, 2019. 322 p.

Навчальне видання

Коряшкіна Лариса Сергіївна
Udновол Микола Миколайович

МАТЕМАТИЧНА ЕКОНОМІКА

Конспект лекцій
для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 124 Системний аналіз
(F4 Системний аналіз та наука про дані)

Видано в авторській редакції.

Електронний ресурс.
Підписано до видання 12.06.2025. Авт. арк. 10,7.

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка».
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницкого, 19.