

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



ФІЗИКА

Навчальний посібник

У 2 частинах

Частина 1

Дніпро
НТУ «ДП»
2025

УДК 53 (075.8)

Ф 50

*Рекомендовано вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка»
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей
183 Технології захисту навколишнього середовища, 101 Екологія, 103 Науки про
землю та 163 Біомедична інженерія
(протокол № 6 від 25.04.25)*

Рецензенти:

Е. П. Штапенко – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Український державний університет науки і технологій);

О. Й. Соколовський – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара).

Автори: В.В. Титаренко, В.М. Горєв, І.П. Гаркуша, М.О. Журавльов.

Фізика [Електронний ресурс] : навч. посіб. у 2-х ч. Ч. 1 / Ф 50 В. В. Титаренко, В. М. Горєв, І. П. Гаркуша, М. О. Журавльов; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2025. – 199 с.

Посібник містить початкові розділи теоретичного матеріалу дисципліни «Фізика». Зокрема в його тексті викладено основи механіки, молекулярної фізики й термодинаміки, основи електрики. Матеріал посібника включає детальне математичне обґрунтування фізичних явищ.

Зміст видання відповідає програмі підготовки бакалаврів спеціальностей 183 Технології захисту навколишнього середовища, 101 Екологія, 103 Наука про землю та 163 Біомедична інженерія. Також воно може бути корисним у підготовці здобувачів інших технічних або фізико-математичних спеціальностей.

УДК 53 (075.8)

© В. В. Титаренко, В. М. Горєв, І. П. Гаркуша, М. О. Журавльов, 2025

© НТУ «Дніпровська політехніка», 2025

Зміст

Вступ.....	7
Розділ 1 ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ.....	8
Тема 1 Кінематика матеріальної точки й твердого тіла.....	8
1.1 Простір і час. Система відліку. Матеріальна точка. Радіус-вектор. Траєкторія, шлях, переміщення.....	8
1.2 Середня й миттєва швидкість. Визначення переміщення і шляху тіла за його швидкістю.....	10
1.3 Прискорення. Тангенціальне й нормальне прискорення.....	12
1.4 Кінематика обертального руху. Рух матеріальної точки по колу. Зв'язок між лінійними і кутовими характеристиками руху.....	15
Тема 2 Динаміка матеріальної точки.....	18
2.1 Перший закон Ньютона. Інерційні системи відліку. Інертність. Маса. Сила. Другий закон Ньютона. Третій закон Ньютона.....	18
2.2 Види сил у механіці. Закон всесвітнього тяжіння. Сила тяжіння і вага тіла. Сила тертя. Сила пружності.....	23
2.3 Механічна енергія, робота й потужність. Закони збереження імпульсу та енергії.....	30
Тема 3 Динаміка твердого тіла.....	39
3.1 Момент сили і момент імпульсу.....	39
3.2 Момент інерції твердих тіл відносно осі симетрії. Теорема Гюйгенса – Штейнера.....	42
3.3 Рівняння динаміки обертального руху відносно нерухомої осі.....	46
3.4 Робота і потужність тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Кінетична енергія твердого тіла в умовах плоского руху.....	48
Тема 4 Механіка рідини.....	52
4.1 Трубка течії. Теорема про нерозривність потоку. Рівняння Бернуллі. Витікання рідини з малого отвору. Формула Торрічеллі.....	52

4.2 Сила внутрішнього тертя. Формула Ньютона для сили внутрішнього тертя. В'язкість. Ламінарна і турбулентна течія рідини. Число Рейнольдса.....	57
Контрольні питання до розділу 1.....	62
Розділ 2 ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ І ТЕРМОДИНАМІКИ	65
Тема 5 Макроскопічний стан термодинамічної системи	65
5.1 Термодинамічна система. Параметри стану системи. Основні положення молекулярно-кінетичної теорії речовини	65
5.2 Рівняння стану ідеального газу. Ізопроцеси.....	68
5.3 Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів. Середня кінетична енергія поступального руху одноатомної молекули та її зв'язок з температурою.....	72
5.4 Функції розподілу молекул за швидкостями Максвелла. Розподіл Больцмана.....	76
Тема 6 Перший закон термодинаміки.....	79
6.1 Число ступенів вільності й середня енергія багатоатомної молекули. Внутрішня енергія термодинамічної системи.....	79
6.2 Робота, що виконується тілом, коли відбуваються зміни його об'єму.....	82
6.3 Кількість теплоти. Перший закон термодинаміки.....	84
6.4 Теплоємність. Питома й молярна теплоємність. Теплоємність в умовах сталого тиску й об'єму. Внутрішня енергія ідеального газу. Рівняння Майєра.....	86
6.5 Рівняння адіабати ідеального газу. Політропічні процеси. Показник політропи. Рівняння політропи.....	90
6.6 Робота, що виконується газом під час ізопроцесів.....	95
Тема 7 Другий закон термодинаміки.....	98
7.1 Другий закон термодинаміки. Оборотні і необоротні процеси. Цикл Карно.....	98

7.2 Нерівність і рівність Клаузіуса. Ентропія.....	101
Тема 8 Явища перенесення.....	105
8.1 Число зіткнень і довжина вільного пробігу молекул.....	105
8.2 Емпіричні рівняння, що описують дифузію, теплопровідність, внутрішнє тертя.....	107
Тема 9 Реальні гази та рідкий стан.....	115
9.1 Реальні гази. Рівняння Ван-дер-Ваальса.....	115
9.2 Фазове перетворення першого і другого роду.....	118
9.3 Рідини. Поверхневий натяг рідин.....	121
Контрольні питання до розділу 2.....	128
Розділ 3 ЕЛЕКТРИКА.....	131
Тема 10 Електричне поле у вакуумі	131
10.1 Закон збереження електричного заряду. Закон Кулона. Електричне поле. Напруженість електричного поля. Принцип суперпозиції електричних полів.....	131
10.2 Робота під час переміщення заряду в електростатичному полі. Потенціал електричного поля. Зв'язок між напруженістю електростатичного поля і потенціалом. Силові лінії та екіпотенціальні поверхні.....	135
10.3 Поле електричного диполя. Теорема Гаусса для вектора напруженості електричного поля.....	141
Тема 11 Електричне поле в діелектриках.....	147
11.1 Поляризація діелектриків. Теорема Гаусса для діелектриків.	147
11.2 Поляризованість і діелектрична проникність.....	152
Тема 12 Провідники в електричному полі.....	159
12.1 Електричне поле в середині провідника. Електроємність відокремленого провідника. Ємність кулі.....	159

12.2 Конденсатор. Ємність конденсатора. Ємність плоского і циліндричного конденсатора. Ємність системи, що складається з послідовно та паралельно з'єднаних конденсаторів.....	163
12.3 Енергія електричного поля.....	167
Тема 13 Постійний електричний струм.....	171
13.1 Електричний струм. Густина електричного струму. Сторонні сили. Електрорушійна сила. Робота над електричним зарядом на ділянці кола.....	171
13.2 Закон Ома. Правила Кірхгофа. Потужність струму. Закон Джоуля – Ленца.....	174
13.3 Електропровідність металів з погляду класичної теорії. Електричний струм у газах.....	181
Контрольні питання до розділу 3.....	195
Список рекомендованої літератури.....	198

Вступ

Дисципліна «Фізика» є базовим освітнім компонентом у підготовці здобувачів спеціальностей 183 «Технології захисту навколишнього середовища», 101 «Екологія», 103 «Науки про землю» та 163 «Біомедична інженерія» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти.

Метою дисципліни є формування в здобувачів уявлень про сучасну фізичну картину світу, навиків застосування фундаментальних знань до розв'язування конкретних практичних задач у таких аспектах навчальної діяльності:

- ознайомлення із сучасною науково-дослідною апаратурою та вимірювальною технікою; формування навиків експериментальної роботи на приладах та апаратурі для вивчення фізичних законів, процесів і явищ;

- ознайомлення з основними тенденціями розвитку сучасної фізики та можливістю використання її найновіших досягнень у своїй майбутній фаховій діяльності;

- створення необхідної наукової бази для вивчення інших загально-професійних та спеціальних дисциплін, передбачених ОПП.

Фізика є невід'ємною складовою навчального процесу та професійної підготовки здобувачів спеціальностей природничого та екологічного спрямування, а також інженерії в галузі охорони здоров'я та довкілля. Вивчення цієї дисципліни формує фундаментальні знання, необхідні для аналізу та вирішення актуальних проблем, які виникають у сфері технічних і природничих наук. Опанування фізичних принципів сприяє розвитку інженерного мислення, підвищенню ефективності досліджень та впровадженню у професійну діяльність новітніх технологій.

У посібнику викладено початкові розділи теоретичного матеріалу дисципліни «Фізика», яку вивчають студенти зазначених спеціальностей. Ці розділи включають відомості про основи механіки, молекулярної фізики, термодинаміки та електрики. Матеріал посібника містить детальний математичний супровід пояснення теорії фізичних процесів. Засвоєння викладеного в посібнику матеріалу дозволить студентам набути знань, необхідних у подальшому освітньому процесі.

Посібник видано в рамках освітньої теми Ш-518 «Розробка методичного забезпечення дисциплін, що викладаються кафедрою фізики НТУ «Дніпровська політехніка».

Розділ 1 ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

Тема 1 Кінематика матеріальної точки й твердого тіла

1.1 Простір і час. Система відліку. Матеріальна точка. Радіус-вектор. Траєкторія, шлях, переміщення.

Фізика – наука, яка вивчає найпростіші і найбільш загальні властивості й закони руху об'єктів матеріального світу. Починаємо вивчення фізики з **механіки**, розділу фізики, що вивчає найпростішу форму руху матерії – механічний рух. **Механічним рухом** називають зміну з часом взаємного розміщення тіл або їх частин у просторі.

Одними з фундаментальних понять є поняття про **простір та час**. Коли говорять про простір, то під цим розуміють розміщення одної або іншої точки відносно інших тіл та спосіб вимірювання відстаней між точками та тілами. Коли говорять про час, то мають на увазі деякий періодичний процес, який відбувається у системі тіл, який служить виміру проміжків часу.

Кінематикою називають розділ механіки, який присвячено опису руху тіл, без з'ясування причин такого руху.

У механіці для опису тіл використовують різні моделі. Зупинимося на одній з них. **Матеріальною точкою** називають тіло, розмірами якого в даних умовах руху можна знехтувати. Знехтувати можна розмірами тіла коли: а) відстані до інших тіл набагато більші порівняно з розмірами самого тіла; б) коли відстані, які проходить тіло, є набагато більші порівняно з розмірами тіла; в) коли тіло рухається поступально, тобто усі точки тіла рухаються однаково.

Щоб описати рух будь-якого тіла, потрібно вказати інше тіло відносно яких розглядається рух даного тіла, потрібно вказати систему координат та визначити,

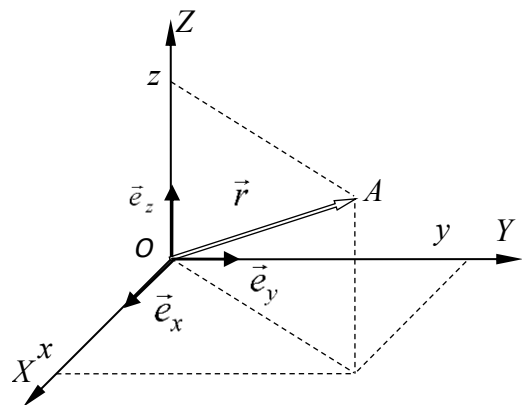


Рис. 1.1

яким чином ми будемо слідкувати за часом. Про все це говорять як про систему відліку. **Системою відліку** називають тіло відліку, систему координат, що пов'язана з тілом відліку, та прилад для виміру часу. Таким чином, рух тіла розглядається відносно системи відліку.

Розміщення матеріальної точки у просторі визначається радіус-вектором \vec{r} . Вектор, початок якого збігається з початком координат, а кінець визначає положення деякої матеріальної точки, називається **радіус-вектором** \vec{r} цієї точки (див рис. 1.1). У прямокутній системі координат $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, де x, y, z – координати точки, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ (або відповідно $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) – орти координатних осей (вектори одиничної довжини, які направлені вздовж відповідних осей).

Зміна положення матеріальної точки у просторі за час t визначається вектором переміщення $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.2). **Вектор переміщення** $\Delta\vec{r}$ – вектор, проведений з початкового положення матеріальної точки \vec{r}_1 в її кінцеве положення \vec{r}_2 . Вектор переміщення дорівнює різниці радіус-векторів у кінцевому \vec{r}_2 і початковому \vec{r}_1

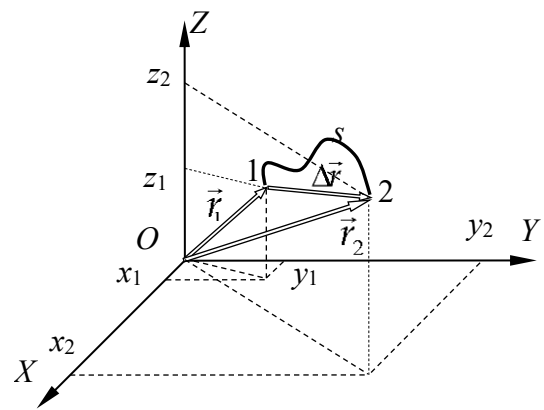


Рис. 1.2

положеннях матеріальної точки $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{e}_x + (y_2 - y_1)\vec{e}_y + (z_2 - z_1)\vec{e}_z$.

Модуль переміщення дорівнює $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Траєкторією називають лінію вздовж якої рухається тіло. **Шляхом** s називають довжину траєкторії. Шлях, модуль переміщення, модуль радіус-вектора вимірюють у системі СІ у метрах.

1.2 Середня й миттєва швидкість. Визначення переміщення і шляху тіла за його швидкістю.

Середньою швидкістю руху за даний проміжок часу називається векторна величина, яка чисельно дорівнює відношенню вектора переміщення до проміжку часу, за яке це переміщення відбулось:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.1)$$

Вимірюють середню швидкість у системі СІ у метрах за секунду (м/с).

У багатьох випадках нас цікавить не середня швидкість тіла за деякий проміжок часу, а швидкість тіла в даний момент часу, або миттєва швидкість. Для визначення миттєвої швидкості матеріальної точки слід прийняти до уваги те, що миттєва швидкість змінюється неперервно. Тому чим менше проміжок часу,

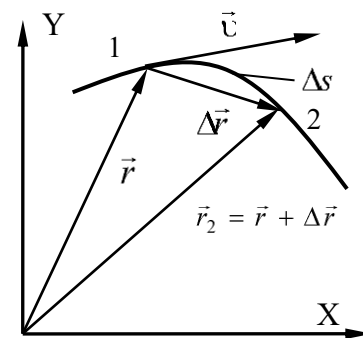


Рис. 1.3

протягом якого відбувається вимір переміщення, тим менше встигне змінитися середня швидкість і тим ближчою буде середня швидкість до її миттєвого значення.

Виходячи з вище сказаного, можна визначити миттєву швидкість таким чином. Нехай в деякий момент часу t радіус-вектор, що характеризує положення тіла у просторі, дорівнює \vec{r} (див. рис. 1.3). У момент часу $t_2 = t + \Delta t$ радіус-вектор буде $\vec{r}_2 = \vec{r} + \Delta \vec{r}$, де $\Delta \vec{r}$ – переміщення за час Δt . Тоді середня швидкість за цей проміжок часу буде дорівнювати

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}}{t_2 - t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Чим меншим буде проміжок часу Δt , тим менше буде відрізнятися середня швидкість на проміжку часу Δt від миттєвої швидкості в момент часу t . Тому

миттєву швидкість визначимо як границю, до якої прямує середня швидкість за нескінченно малий проміжок часу

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{v} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}. \quad (1.2)$$

У математиці таку границю називають похідною. Тому **миттєва швидкість** є похідною від радіус-вектора за часом. З рис. 1.3 випливає, що вектор швидкості \vec{v} направлений за дотичною до траєкторії у тій точці, де знаходиться частинка в даний момент часу, у той бік, куди рухається частинка. Як правило миттєву швидкість часто називають просто швидкістю. Вимірюють миттєву швидкість у системі СІ у метрах за секунду (м/с).

Знайдемо модуль виразу (1.2), тобто модуль швидкості $|\vec{v}|$:

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

З рис. 1.3 бачимо, що відношення $|\Delta \vec{r}| / \Delta s$, де Δs – шлях, який тіло проходить між точками 1 та 2, при зменшенні Δt прямує до одиниці. Тому ми можемо записати вираз (1.3) у вигляді

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (1.4)$$

Таким чином, модуль вектора миттєвої швидкості дорівнює похідній від шляху за часом, тобто миттєвій шляховій швидкості.

Підставимо у визначення (1.2) радіус-вектор, який виражений через орти та координати матеріальної точки $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$. Візьмемо до уваги, що $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ є постійними у часі векторами, й отримаємо

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z. \quad (1.5)$$

Разом з цим вектор швидкості \vec{v} можна подати через його проєкції v_x, v_y, v_z на координатні осі у вигляді

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z. \quad (1.6)$$

Порівняння виразів (1.5) і (1.6) приводить до співвідношень:

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt}. \quad (1.7)$$

Таким чином, проекції вектора дорівнюють похідним відповідних координат за часом.

Розіб'ємо інтервал часу $t_2 - t_1$ на N малі (не обов'язково однакові) проміжки Δt_i (i – номер проміжку, що набуває значення $1, 2, \dots, N$). Відповідно до формули (1.2) можна вважати, що на i -му проміжку часу вектор швидкості приблизно дорівнює $\vec{v}(t_i) \approx \Delta \vec{r}_i / \Delta t_i$. Тобто переміщення за проміжок часу Δt_i дорівнює

$$\Delta \vec{r}_i \approx \vec{v}(t_i) \cdot \Delta t_i. \quad (1.8)$$

Зрозуміло, що сумарне переміщення за час від t_1 до t_2 буде дорівнювати

$$\Delta \vec{r}_{12} \approx \sum_{i=1}^N \Delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{v}(t_i) \Delta t_i. \quad (1.9)$$

Точне значення переміщення знайдемо, коли малі інтервали часу будуть прямувати до нуля: $\max(\Delta t_i) \rightarrow 0$

$$\Delta \vec{r}_{12} = \lim_{\max(\Delta t_i) \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^N \vec{v}(t_i) \Delta t_i \right). \quad (1.10)$$

Підсумовування нескінченно малих у математиці має назву інтегрування. Таким чином формулу (1.10) можна представити у вигляді:

$$\Delta \vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt. \quad (1.11)$$

1.3 Прискорення. Тангенціальне й нормальне прискорення.

Щоб охарактеризувати зміну швидкості частинки з часом, використовується величина

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}, \quad (1.12)$$

яка називається **прискоренням частинки**. Взявши до уваги визначення швидкості, можна написати

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}. \quad (1.13)$$

Отже, прискорення можна визначити як першу похідну швидкості за часом або як другу похідну радіус-вектора за часом.

Компоненти прискорення дорівнюють другим похідним відповідних координат за часом

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (1.14)$$

Використовуючи визначення прискорення (1.12), можемо записати

$$d\vec{v} = \vec{a}(t) \cdot dt.$$

Далі проінтегруємо праву і ліву частини цього співвідношення. При цьому візьмемо до уваги, що в момент часу t_0 швидкість мала значення \vec{v}_0 , а в момент часу t швидкість мала значення \vec{v}

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a}(t) \cdot dt.$$

Далі отримуємо шукану залежність швидкості тіла від часу

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) \cdot dt. \quad (1.15)$$

Для знаходження радіус-вектора $\vec{r}(t)$ матеріальної точки в момент часу t використаємо визначення швидкості $\vec{v} = d\vec{r} / dt$. Звідси

$$d\vec{r} = \vec{v}(t) \cdot dt.$$

Далі аналогічно як і в попередньому випадку інтегруємо праву і ліву частини цього співвідношення. Візьмемо до уваги, що в момент часу t_0 радіус-вектор мав значення \vec{r}_0 , а в момент часу t – \vec{r} , і отримуємо

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) \cdot dt. \quad (1.16)$$

Рівноприскореним рухом називають такий рух, коли вектор прискорення тіла в будь-який момент часу має одне і те саме значення як за модулем, так і за напрямком ($\vec{a} = \text{const}$).

Зі співвідношення (1.15) знаходимо швидкість при рівноприскореному русі

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a} \cdot dt = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t. \quad (1.17)$$

Далі отриману швидкість (1.17) підставляємо в (1.16) і знаходимо шуканий радіус-вектор

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) \cdot dt = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t (\vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t) \cdot dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{a} t^2 / 2. \quad (1.18)$$

Спроектуємо ці формули, наприклад, на вісь X і отримаємо

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t, \quad x = x_0 + v_{0x} t + a_x t^2 / 2.$$

Розглянемо криволінійний плоский рух, в якому швидкість змінюється як за величиною, так і за напрямком. Виявляється, що в цьому випадку зручно використовувати поняття тангенціального та нормального прискорень.

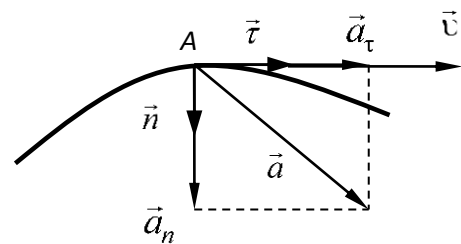


Рис. 1.4

Тангенціальним прискоренням \vec{a}_τ називають

компоненту повного прискорення \vec{a} , яка паралельна дотичній до траєкторії руху

(див. рис. 1.4). **Нормальним прискоренням** \vec{a}_n називають компоненту повного

прискорення \vec{a} , яка перпендикулярна дотичній до траєкторії руху (див. рис. 1.4).

Зрозуміло, що з вищесформульованих визначень випливає, що між повним, тангенціальним та нормальним прискореннями є зв'язок

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (1.19)$$

Крім цього вектор тангенціального прискорення є перпендикулярним до вектора нормального прискорення (див. рис. 3.1). Це означає, що модулі цих прискорень пов'язані між собою співвідношенням

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (1.20)$$

Нормальне прискорення \vec{a}_n визначає зміну напрямку вектора швидкості, залежить від модуля швидкості і радіуса кривизни траєкторії руху R і визначається за формулою:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}, \quad (1.21)$$

де \vec{n} - одиничний нормальний вектор, спрямований вздовж радіуса кривизни траєкторії до її центру.

Тангенціальне прискорення \vec{a}_τ визначає зміну модуля миттєвої швидкості і визначається за формулою:

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}, \quad (1.22)$$

де $\vec{\tau}$ - одиничний тангенціальний вектор, який спрямований по дотичній до траєкторії руху.

1.4 Кінематика обертального руху. Рух матеріальної точки по колу. Зв'язок між лінійними і кутовими характеристиками руху.

Абсолютно твердим тілом називають тіло, в якому у даних умовах задачі можна знехтувати деформаціями (відстані між довільними двома точками можна вважати постійними).

Рух твердого тіла можна подати як сукупність двох видів руху поступального та обертального.

Поступальним називають такий рух, коли будь-яка пряма, що жорстко пов'язана з тілом, яке рухається, залишається паралельною сама собі. Математично поступальний рух є еквівалентним паралельному перенесенню.

Обертальним називають такий рух, коли усі точки тіла рухаються по колам, центри яких лежать на одній і тій же прямій. Цю пряму називають віссю обертання.

Розглянемо детально обертальний рух твердого тіла. Описувати цей рух за допомогою лінійних швидкостей і лінійних прискорень стає незручно, тому що різні точки твердого тіла мають різні швидкості та прискорення. Потрібно ввести величини, які характеризують обертання твердого тіла як цілого.

Виберемо довільну точку твердого тіла A (рис. 1.5). Проведемо радіус від центра кола O , відносно якого обертається точка A до самої точки A . Через проміжок часу Δt т. A переміститься в положення A' . Кут $\varphi = \angle AOA'$ характеризує поворот твердого тіла. При цьому довільна пряма, яка проведена в площині, що перпендикулярна до осі обертання (рис. 1.5), повернеться на такий самий кут φ (рис. 1.5). Кут φ називають **кутом повороту**.

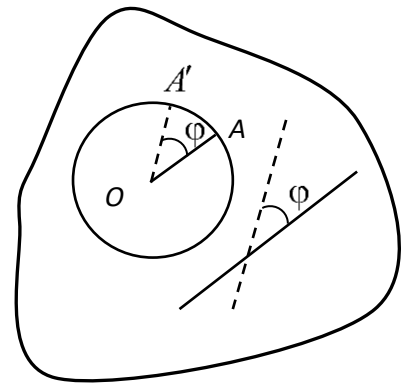


Рис. 1.5

Для того щоб вказати, в якому напрямку відбувається обертання вводять вектор кутового зміщення. **Вектором кутового зміщення** $\vec{\varphi}$ називають вектор, модуль якого дорівнює куту повороту, а напрямок пов'язаний з обертанням тіла правилом правого гвинта (див. рис. 1.6). Встановимо правий гвинт уздовж осі обертання, повернемо його за напрямком обертання твердого тіла, поступальний рух гвинта вкаже на напрямок вектора $\vec{\varphi}$. Вектор повороту в системі СІ вимірюється в радіанах $[\varphi] = [\text{рад}]$.

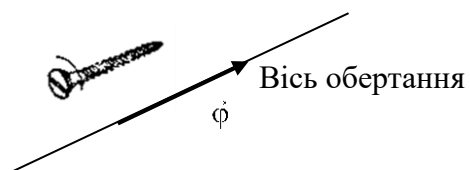


Рис. 1.6

Для того щоб характеризувати як швидко змінюється вектор повороту $\vec{\varphi}$, використовують поняття кутової швидкості. **Кутовою швидкістю** $\vec{\omega}$ називають $\vec{\omega} = d\varphi / dt$. Вектор кутової швидкості в системі СІ вимірюється в рад/с $[\omega] = [\text{рад} / \text{с}]$. Для того щоб характеризувати як швидко змінюється кутова швидкість $\vec{\omega}$, використовують

поняття кутового прискорення. **Кутовим прискоренням** $\vec{\beta}$ називають $\vec{\beta} = d\vec{\omega} / dt$. Вектор кутового прискорення в системі СІ вимірюється в рад/с² $[\beta] = [rad / c^2]$.

Між вектором кутового зміщення, кутовою швидкістю та кутовим прискоренням є аналогія

$$\vec{r} \leftrightarrow \vec{\varphi}, \quad \vec{v} \leftrightarrow \vec{\omega} \quad (d\vec{r} / dt \leftrightarrow d\vec{\varphi} / dt), \quad \vec{a} \leftrightarrow \vec{\beta} \quad (d\vec{v} / dt \leftrightarrow d\vec{\omega} / dt). \quad (1.23)$$

Розглянемо точку A твердого тіла, яка рухається по колу відносно центра кола O , який знаходиться на осі обертання Z (див. рис. 1.7). За час dt точка A пройде по колу шлях ds , який відповідає куту повороту $d\varphi$. Виходячи з цього, можемо записати

$$v = ds / dt = R \cdot d\varphi / dt = R \cdot \omega. \quad (1.24)$$

Для того щоб вказати напрямок вектора, використаємо векторний добуток. Виходячи з напрямків векторів, які зображені на рисунку, можемо записати

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{R}]. \quad (1.25)$$

Для нормального прискорення можемо записати

$$a_n = v^2 / R = \omega^2 R.$$

Для тангенціального прискорення можемо записати

$$a_t = dv / dt = d(\omega R) / dt = R \cdot d\omega / dt = R \cdot \beta.$$

Використовуємо визначення для кутового прискорення, знаходимо кутову швидкість

$$\vec{\beta} = d\vec{\omega} / dt, \quad \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}} d\vec{\omega} = \int_{t_0}^t \vec{\beta} dt, \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \int_{t_0}^t \vec{\beta} dt. \quad (1.26)$$

Далі використовуючи визначення кутової швидкості, знаходимо кут повороту

$$\vec{\omega} = d\varphi / dt, \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_{t_0}^t \vec{\omega} dt, \quad \varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^t \vec{\omega} dt. \quad (1.27)$$

Знайдемо кут повороту та його швидкість, коли тіло має постійне за напрямком і модулем кутове прискорення $\vec{\beta} = \vec{const}$.

Запишемо співвідношення (1.26) та (1.27) для проєкцій на вісь Z , вибираючи початковий час таким, що дорівнює нулю $t_0 = 0$

$$\omega_z = \omega_{z0} + \beta_z t, \quad \varphi_z = \varphi_{z0} + \omega_{z0} t + \beta_z t^2 / 2. \quad (1.28)$$

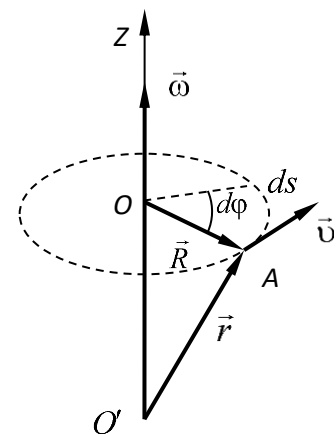


Рис. 1.7

Тема 2 Динаміка матеріальної точки

2.1 Перший закон Ньютона. Інерціальні системи відліку. Інертність. Маса. Сила. Другий закон Ньютона. Третій закон Ньютона.

Кінематика розглядає відносний рух тіл не враховуючи причин, що викликали цей рух. Динаміка ж вивчає рух тіл у зв'язку з тими причинами (взаємодіями між тілами), які обумовлюють той чи інший характер руху. В основі так званої класичної механіки або ньютонівської механіки лежать три основні закони динаміки (закони Ньютона), які були сформульовані Ньютоном в 1687 р. Ці закони грають виключну роль в механіці і являються узагальненням великої кількості дослідних фактів. Класична механіка, що базується на законах Ньютона, описує рух тіл достатньо великої маси (у порівнянні з масою атомів), які рухаються з достатньо малими швидкостями (у зрівнянні зі швидкістю світла).

Перший закон Ньютона формулюється таким чином: будь-яке тіло (матеріальна точка) знаходиться в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху, до тих пір, поки дія зі сторони інших тіл не змусить його змінити цей стан.

Прагнення тіла зберегти стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху називають *інертністю*. Тому перший закон Ньютона ще називають законом інерції.

Закон інертності виконується не у всякій системі відліку. Як вже зазначалося, характер руху залежить від вибору системи відліку. Розглянемо дві системи відліку, що рухаються одна відносно іншої з прискоренням, наприклад, два потяги, один з яких рухається рівномірно, а інший його опереджає, рухаючись прискорено. Людина, яка знаходиться у першому потязі, сидячи на полиці, буде знаходитися у стані спокою відносно першого потягу, у стані рівномірного руху відносно землі і у стані прискореного руху відносно другого потягу. Отже перший закон Ньютона не може одночасно виконуватися у всіх системах відліку.

Система відліку, відносно якої виконується перший закон Ньютона, називається **інерціальною**. Інерціальною системою відліку є така система, яка або покоїться, або рухається рівномірно і прямолінійно відносно деякої іншої інерціальної системи. Дослідним шляхом встановлено, що інерціальною можна вважати геліоцентричну систему відліку (початок координат якої знаходиться в центрі Сонця, а осі проведені в напрямку певних зірок). Система відліку, яка пов'язана із Землею, строго кажучи, не є інерціальною, але ефекти, що обумовлюють її неінерціальність (обертання Землі навколо своєї осі і навколо Сонця), при розв'язанні багатьох задач значно слабкі, і в цих випадках її можна вважати інерціальною. Так, в наведеному прикладі із потягами, Землю і перший потяг можна вважати інерціальними системами відліку, а другий потяг – неінерціальною.

Мірою інертності тіла є маса. Чим більше інертне тіло, тим більша його маса. Для точного кількісного визначення маси розглянемо замкнену систему, що складається із двох матеріальних точок. **Замкненою або ізольованою системою** називають систему тіл, настільки віддалених від усіх інших тіл, що ті практично не впливають на систему, яка розглядається. Тіла замкненої системи можуть взаємодіяти тільки між собою.

У результаті взаємодії двох матеріальних точок, що складають замкнену систему, їхні швидкості з часом змінюються. Тобто тіла рухаються з прискоренням. Позначимо через \vec{a}_1 прискорення точки 1, через \vec{a}_2 – прискорення точки 2. Як показує експеримент (приклад схеми одного з таких експериментів подано на рис. 2.1), ці прискорення мають протилежні напрямки й пов'язані між собою співвідношенням

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2 \quad \text{або} \quad \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = \frac{m_2}{m_1} = \text{const}, \quad (2.1)$$

де величини m_1 і m_2 сталі й мають однакові знаки. Величини m_1 і m_2 зовсім не залежать від характеру взаємодії між матеріальними точками 1 і 2. Наприклад, взаємодія може відбуватися шляхом зіткнення матеріальних точок між собою.

Його можна здійснити, надавши матеріальним точкам електричні заряди або помістивши між ними маленьку пружинку і т.д.

При цьому вектори \vec{a}_1 і \vec{a}_2 будуть змінюватись. Однак коефіцієнти m_1 і m_2 , а точніше їх відношення залишиться тим самим. Ці результати потрібно розглядати як дослідні факти, підтверджені незліченною кількістю експериментів. Коефіцієнти m_1 і

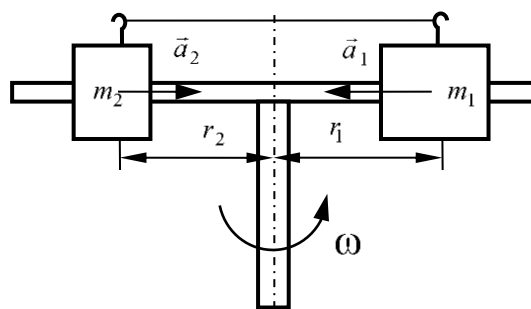


Рис. 2.1

m_2 можуть залежати тільки від властивостей самих матеріальних точок. Ці коефіцієнти m_1 і m_2 *називаються масами* або, більш точно, інертними масами матеріальних точок 1 і 2.

Таким чином, з визначення мас випливає, що відношення мас двох матеріальних точок дорівнює оберненому відношенню модулів прискорень цих точок у результаті взаємодії між ними

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|}. \quad (2.2)$$

Для характеристики дії на тіло вводять поняття сили. Під дією сили тіла або змінюють швидкість руху, тобто набувають прискорення (динамічне проявлення сил), або деформуються, тобто змінюють свою форму і розміри (статичне проявлення сил). В кожний момент часу сила характеризується числовим значенням, напрямком в просторі і точкою прикладання. Отже, **сила** – це векторна величина, яка є мірою механічної дії на тіло зі сторони інших тіл або полів, в результаті якого тіло набуває прискорення або змінює свою форму і розміри.

Якщо на різні тіла діяти однією і тою ж самою силою, то вони по різному будуть відгукуватися на цю дію, тобто набувати різні прискорення. Мірою відгуку тіла на дію сили є *маса* – це скалярна фізична величина, яка є мірою

інертності тіла. В системі СІ маса тіла вимірюється в кілограмах [кг], а сила в ньютонках [Н].

Другий закон Ньютона – це основний закон динаміки поступального руху тіл, який відповідає на питання, як змінюється механічний рух матеріальної точки (тіла) під дією прикладених до неї сил. Формулюється цей закон наступним чином: прискорення, якого набуває матеріальна точка (тіло) під дією деякої результуючої сили, пропорційна цій силі, співпадає з нею за напрямком і обернено пропорційне масі матеріальної точки (тіла).

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.3)$$

Під **результуючою силою** розуміють **векторну суму** всіх сил, що діють на матеріальну точку (тіло):

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_i \vec{F}_i \quad (2.4)$$

Повернемося до формули (2.3), враховуючи, що прискорення є першою похідною вектора швидкості за часом, а маса тіла в класичній механіці є величиною постійною.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (2.5)$$

Формула (2.5) є більш загальним визначенням другого закону Ньютона. Векторна фізична величина

$$\vec{P} = m\vec{v}, \quad (2.6)$$

яка визначається добутком маси матеріальної точки (тіла) на вектор швидкості, називається **імпульсом тіла**.

Таким чином **другий закон Ньютона** можна сформулювати по-іншому: швидкість зміни імпульсу матеріальної точки рівна діючій на неї силі.

Аналізуючи формулу другого закону Ньютона можна визначити, що сила 1Н- це сила, яка надає прискорення 1 м/с² матеріальній точці масою 1кг.

Другий закон Ньютона виконується лише в інерціальних системах відліку.

Перший закон Ньютона можна отримати з другого.

Якщо на тіло не діє ніяка сила, або результуюча всіх діючих сил рівна нулю, то і прискорення буде рівним нулю (за формулою (2.3)), а отже швидкість тіла або не змінюється, або теж рівна нулю, що і є суттю першого закону Ньютона.

В механіці велике значення має **принцип незалежності дії сил**: Якщо на матеріальну точку діють одночасно декілька сил, то кожна з цих сил

надає матеріальній точці прискорення згідно другому закону Ньютона, неначе інших сил не було. Згідно цьому принципу, сили і прискорення можна розкладати на складові, використання яких призводить до спрощення розв'язку задач.

Наприклад, на рис. 2.2 діюча сила $\vec{F} = m\vec{a}$ розкладена на дві компоненти: тангенціальну силу \vec{F}_τ (спрямована по дотичній до траєкторії) і нормальну \vec{F}_n (спрямована по нормалі до центра). Використовуючи формули (3.11) і (3.10), можна записати:

$$F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv}{dt}, \quad F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R. \quad (2.7)$$

Розглянемо замкнену систему, що складається із двох матеріальних точок. У результаті взаємодії ці матеріальні точки будуть рухатися з прискоренням. Позначимо через \vec{a}_1 прискорення точки 1, через \vec{a}_2 – прискорення точки 2. Як показують експерименти ці прискорення мають протилежні напрямки й пов'язані між собою співвідношенням

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2, \quad (2.8)$$

де m_1 і m_2 маси відповідних тіл. Згідно другого закону Ньютона, сила, що діє на перше тіло, дорівнює $\vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1$, а сила, що діє на друге тіло, дорівнює $\vec{F}_2 = m_2 \vec{a}_2$.

Звідси отримуємо рівність

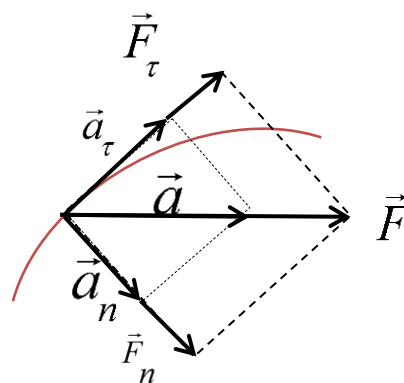


Рис. 2.2

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \quad (2.9)$$

яка математично виражає **третій закон Ньютона**: тіла діють один на одне з силами, які направлені вздовж однієї прямої, рівні за модулем та протилежні за напрямком.

Застосовуючи третій закон Ньютона, завжди потрібно пам'ятати, що однакові за модулем та протилежні за напрямком сили діють на різні тіла, і тому не можуть урівноважувати одна одну.

Закони Ньютона виконуються тільки в інерціальних системах відліку, вони перестають бути правильними для об'єктів дуже малих розмірів, які порівнянні з розмірами атомів, та коли рух відбувається зі швидкостями наближеними до швидкості світла.

2.2 Види сил у механіці. Закон всесвітнього тяжіння. Сила тяжіння і вага тіла. Сила тертя. Сила пружності.

У класичній механіці ми маємо справу з гравітаційними та електромагнітними силами, а також пружними силами та силами тертя. Гравітаційні та електромагнітні сили не можна звести до інших, більш простих сил. Тому їх називають **фундаментальними**. Сили пружності та сили тертя є за своєю природою електромагнітними і тому не можуть вважатися фундаментальними. Для цих сил можна отримати лише наближені емпіричні (отримані з досліду) формули.

Закон всесвітнього тяжіння визначає взаємодію між двома точковими тілами масами m_1 та m_2 , які розміщені на відстані r_{12} один від одного

$$\vec{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}. \quad (2.10)$$

Тут \vec{F}_2 – сила, що діє на точкове тіло масою m_2 з боку точкового тіла масою m_1 (див. рис. 10.1). Вектор \vec{r}_{12} з'єднує тіло масою m_1 з тілом масою m_2 . $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ – універсальна гравітаційна стала. Закон всесвітнього

тяжіння можна застосовувати також і до куль. При цьому за відстань між ними потрібно брати відстань між центрами цих куль.

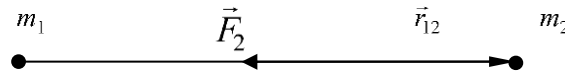


Рис. 2.3

Силою тяжіння називають силу, з якою тіла притягуються до Землі біля поверхні Землі

$$\vec{F}_{тяж} = m\vec{g}. \quad (2.11)$$

Тут m маса тіла, g – прискорення вільного падіння, яке отримує тіло рухаючись під впливом притягування Землі. Воно однакове для всіх тіл, залежить від географічної широти тіла, його висоти над рівнем моря та інших факторів. Для проведення розрахунків, як правило, приймають $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Можна вважати, що вектор прискорення вільного падіння \vec{g} направлений до центру Землі. За своєю природою сила тяжіння відноситься до гравітаційних сил.

Вагою тіла називають силу \vec{P} , з якою тіло діє на опору або підвіс (див. рис. 2.4). Вага тіла є різновидом сил пружності. Вагу тіла \vec{P} потрібно відрізнити від сили тяжіння $\vec{F}_{тяж}$. Це різні сили за своєю природою, вони прикладені до різних тіл.

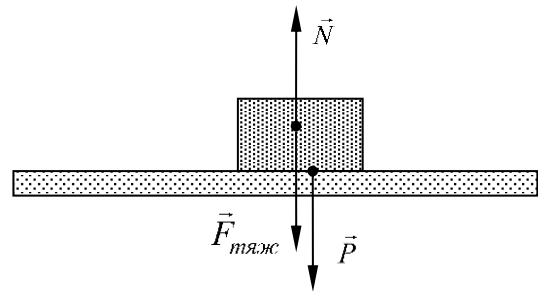


Рис. 2.4

Сила тяжіння $\vec{F}_{тяж}$ діє на тіло, а вага тіла \vec{P} діє на опору або підвіс (див. рис. 2.4).

Силою реакції опори називають силу \vec{N} , з якою опора або підвіс діють на тіло (див. рис. 2.4). Слід зазначити що, сила реакції опори \vec{N} та вага тіла \vec{P} однакові за модулем та протилежні за напрямком відповідно до третього закону Ньютона

$$\vec{N} = -\vec{P}. \quad (2.12)$$

Знайдемо вагу тіла для випадку, коли тіло перебуває у стані спокою та коли тіло рухається з прискоренням.

У випадку зображеному на рис. 2.4 тіло масою m знаходиться у спокої відносно Землі. Це означає, що рівнодійна сил, які діють на це тіло дорівнює нулю. На це тіло, як випливає з рисунка, діють дві сили: сила тяжіння $\vec{F}_{тяж}$ з боку Землі та сила реакції опори \vec{N} . Таким чином,

$$\vec{N} + \vec{F}_{тяж} = 0. \quad (2.13)$$

Коли взяти до уваги співвідношення (2.12), то з урахуванням (2.13) можемо записати

$$\vec{P} = \vec{F}_{тяж}. \quad (2.14)$$

Таким чином, вага та сила тяжіння дорівнюють одна одній. Однак слід зазначити, що ці сили прикладені до різних тіл – вага до опори, сила тяжіння до самого тіла. Рівність (2.14) має місце тільки у тому випадку, коли підвіс або опора (а отже, і тіло) знаходяться у стані спокою відносно Землі (або рухаються без прискорення). Коли опора рухається з прискоренням, вага тіла перестає дорівнювати силі тяжіння.

Припустимо, що тіло підвішено до стелі ліфта, який рухається з прискоренням \vec{a} (див. рис. 2.5). З таким же прискоренням рухається і тіло. Тому рівняння руху має вигляд

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Звідси з урахуванням (2.12) отримуємо

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{g} - \vec{P} \quad \text{або} \quad \vec{P} = m\vec{g} - m\vec{a}. \quad (2.15)$$

Таким чином отримали формулу (2.15), яка визначає вагу тіла, яке рухається з прискоренням.

Коли б ліфт обірвався й став падати з прискоренням, що дорівнює прискоренню вільного падіння $\vec{a} = \vec{g}$, то тіло б перестало б діяти на підвіс $\vec{P} = m\vec{g} - m\vec{a} = m\vec{g} - m\vec{g} = 0$. Про стан, в якому вага тіла дорівнює нулю говорять як про **стан невагомості**.

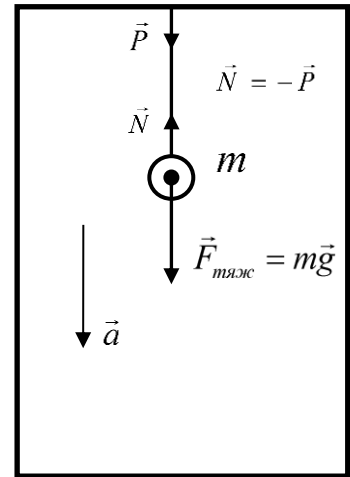


Рис. 2.5

Сила тертя спокою $\vec{F}_{\text{терм.сп.}}$ виникає під час дії на тіло деякої сили, при якому відносного руху тіла не виникає. Сила тертя спокою однакова за модулем та протилежно направлена до компоненти сили, яка прикладена до тіла та паралельна поверхні дотику тіл. Максимальне значення сили тертя спокою визначається співвідношенням

$$F_{\text{терм.сп.макс}} = \mu N, \quad (2.16)$$

де N – модуль нормальної складової сили реакції опори (перпендикулярна до поверхні дотику), що діє на тіло; μ – коефіцієнт тертя.

У випадку, що зображений на рис. 2.6, сила тертя спокою (вважаємо, що тіло, яке знаходиться на похилій площині, не рухається), однакова за модулем та протилежно направлена до компоненти сили тяжіння $\vec{F}_{\text{тяж}}$, яка паралельна поверхні дотику тіл. Нормальна складова сили реакції опори \vec{N} теж прикладена до тіла та направлена перпендикулярно до поверхні дотику тіл (див. рис. 2.6). Слід зазначити, що нормальна складова сили реакції опори \vec{N} разом з силою тертя спокою $\vec{F}_{\text{терм.сп.}}$ утворюють повну силу реакції опори \vec{R} : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{терм.сп.}}$. Сила реакції опори та вага тіла у відповідності до третього закону Ньютона однакові за модулем та протилежні за напрямком: $\vec{R} = -\vec{P}$, тобто $\vec{N} + \vec{F}_{\text{терм.сп.}} = -\vec{P}$.

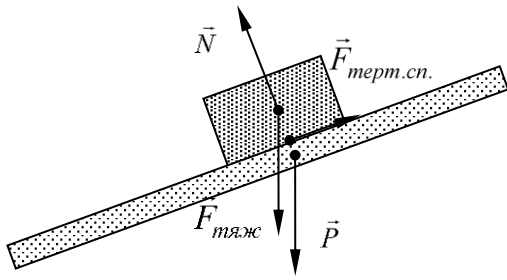


Рис. 2.6

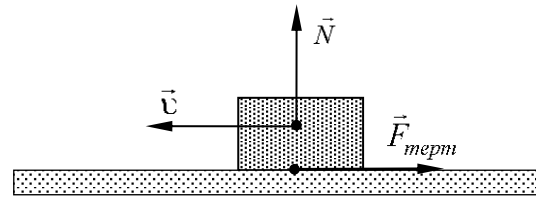


Рис. 2.7

Сила тертя ковзання $\vec{F}_{\text{терт.ковз.}}$ виникає під час ковзання тіла по поверхні іншого тіла (див. рис. 2.7). Вона направлена протилежно до напрямку вектора відносної швидкості, а її модуль визначається співвідношенням

$$F_{\text{терт.ковз.}} = \mu N, \quad (2.17)$$

де N – модуль нормальної складової сили реакції опори, що діє на тіло, μ – коефіцієнт тертя.

Сила тертя кочення визначається за законом:

$$F_{\text{коч}} = \mu_{\text{коч}} \frac{N}{r}. \quad (2.18)$$

В цьому законі, $\mu_{\text{коч}}$ - коефіцієнт тертя кочення (його чисельне значення набагато менше за значення коефіцієнта тертя ковзання), в системі СІ вимірюється в [м]; r - радіус тіла, що котиться.

Сила тертя кочення значно менша сили тертя ковзання, тому в побуті часто застосовують шарикопідшипники, в яких тертя ковзання вісі по втулці замінюють тертям ковзання кульок або циліндрів.

Під дією зовнішніх сил виникають **деформації** (тобто зміни розмірів і форми) тіл. Якщо після припинення дії зовнішніх сил відновлюються попередні форма й розміри тіла, то таку деформацію називають **пружною**. Деформація має пружний характер у випадку, коли зовнішня сила не перевищує певного значення, яке називається **межею пружності**. При перевищенні цієї межі деформація стає **пластичною**. У цьому випадку після усунення зовнішніх сил початкова форма й розміри тіла повністю не відновлюються. Далі ми будемо розглядати тільки пружні деформації.

У деформованому тілі виникають **пружні сили**, які врівноважують зовнішні сили, які викликали деформацію. Пояснимо це таким прикладом (див. рис. 2.8).

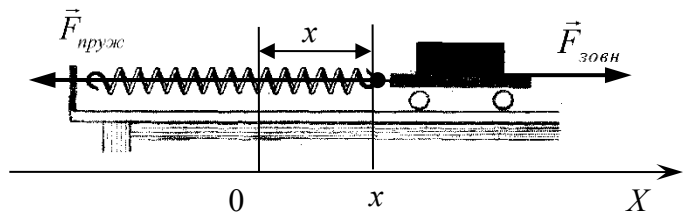


Рис. 2.8

Під дією зовнішньої сили $\vec{F}_{зовн}$ пружина отримує видовження x , у результаті чого в пружині виникає пружна сила $\vec{F}_{пруж}$, що врівноважує силу $\vec{F}_{зовн}$.

Встановлений експериментально **закон Гука** стверджує, що при пружній деформації видовження пружини пропорційно зовнішній силі. Аналітично цей закон можна записати у вигляді

$$F_{пруж,x} = -kx, \quad (2.19)$$

де $F_{пруж,x}$ проекція сили пружності на вісь X (див. рис. 2.8); x – деформація (видовження або стиснення) пружини відносно недеформованого стану пружини, k – коефіцієнт жорсткості пружини.

Жорсткість k пружини залежить від матеріалу, розмірів витка й довжини пружини. Якщо розрізати деформовану пружину на дві однакові частини, пружні сили в кожній із частин залишаться попередніми, а видовження x половини пружини буде у два рази менше, ніж у первісної пружини. Звідси згідно (2.19) випливає, що жорсткість «половинної» пружини у два рази більше, ніж цілої.

Однорідні стержні поведуться при розтягуванні й стисненні подібно пружині (рис. 2.9). Деформація приводить до виникнення у стержні пружних сил. Ці сили прийнято характеризувати **напругою** σ , яку визначають як модуль сили, що припадає на одиницю площі:

$$\sigma = F_{пруж\perp} / S, \quad (2.20)$$

де S – площа поперечного перерізу стержня; вважаємо, що пружна сила розподілена рівномірно по перетину; значок \perp вказує на те, що сила перпендикулярна до площі, на яку вона діє. У випадку розтягання σ вважається додатною, у випадку стиснення – від’ємною.

Дослід дає, що збільшення довжини стержня Δl пропорційно напрузі σ та початковій довжині стержня l_0 :

$$\Delta l = \frac{l_0 \sigma}{E}. \quad (2.21)$$

Відзначимо, що знак Δl збігається зі знаком σ . Коефіцієнт E у формулі (2.21) характеризує пружні властивості матеріалу стержня. Цей коефіцієнт називають *модулем Юнга*. Модуль Юнга вимірюється в ньютонках на квадратний метр. Одиниця напруги (а також тиску), що дорівнює ньютону на квадратний метр, називається *паскалем* (Па).

Формулу (2.21) можна перетворити, позначивши відносно збільшення довжини стержня $\Delta l / l_0$ буквою ε . У результаті отримуємо остаточну формулу

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma, \quad (2.22)$$

відповідно до якої відносно видовження стержня прямо пропорційно напрузі й обернено пропорційно модулю Юнга. Формула (2.22) виражає *закон Гука для стержня*.

З (2.22) випливає, що модуль Юнга дорівнює такій нормальній напрузі, при якому відносно видовження дорівнювало б одиниці (тобто збільшення довжини Δl дорівнювало б початковій довжині l_0 стержня), якби настільки великі пружні деформації були можливі. У дійсності, наприклад, залізні стрижні руйнуються при σ , що дорівнюють приблизно $0,002E$; межа пружності досягається при ще менших напругах.

Зазначимо, що розтягання й стиснення стрижнів супроводжується відповідною зміною і їх поперечних розмірів.

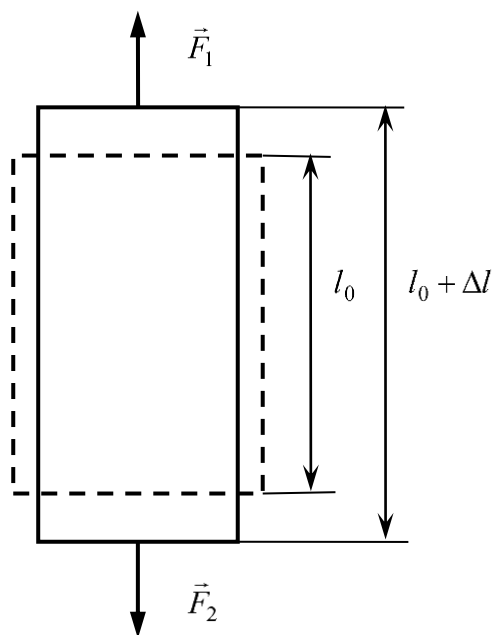


Рис. 2.9

2.3 Механічна енергія, робота й потужність. Закони збереження імпульсу та енергії.

Поняття енергії і роботи широко використовується у повсякденному житті. Ці поняття тісно пов'язані одне з одним. Відомо, що робота виконується за рахунок запасу енергії і, навпаки, виконуючи роботу можна здійснити запас енергії в будь-якому пристрою. Наприклад, здійснюючи роботу при заведенні годинника, ми надаємо запас енергії у пружині, за рахунок якого потім годинник йде.

Енергія є кількісною характеристикою руху і взаємодії всіх видів матерії. Енергія не зникає і не з'являється з нічого; вона лише переходить із однієї форми в іншу. Поняття енергії пов'язує в одне ціле вся явища природи. У відповідності з різними формами руху матерії розглядають різні види енергії: механічну, внутрішню, електромагнітну і т.д.

Механічну енергію поділяють на два види – це **кінетична і потенціальна енергія**. **Кінетична енергія** є енергією руху, вона визначається масами і швидкостями тіл. **Потенціальна енергія** представляє собою енергію взаємодії і залежить від взаємного положення взаємодіючих тіл.

Зміна механічного руху тіла викликається силами, що діють на нього зі сторони інших тіл. Щоб кількісно охарактеризувати процес обміну енергією між взаємодіючими тілами, в механіці вводиться поняття **механічної роботи**.

Формули для визначення кінетичної енергії і механічної роботи отримаємо з другого закону Ньютона.

Розглянемо матеріальну точку масою m , яка рухається під дією деякої результуючої сили \vec{F} . Запишемо рівняння другого закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Прискорення \vec{a} розглянемо, як першу похідну швидкості по часу:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Нехай за час dt матеріальна точка, рухаючись вздовж траєкторії 1-2 здійснила переміщення $d\vec{r}$ (рис.2.10).

Помножимо скалярно праву і ліву частину рівняння другого закону Ньютона на переміщення $d\vec{r}$; отримаємо рівняння

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \vec{F} d\vec{r}.$$

З кінематики відомо, що переміщення $d\vec{r} = \vec{v} dt$.

Якщо на протязі руху маса матеріальної точки не змінюється, її можна внести під знак диференціалу. Таким чином отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} \vec{v} dt = \vec{v} d(m\vec{v}) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F} d\vec{r}.$$

Елементарною роботою сили \vec{F} на переміщенні $d\vec{r}$ називається скалярна фізична величина ∂A , яка чисельно визначається скалярним добутком вектора сили \vec{F} на вектор елементарного переміщення $d\vec{r}$:

$$\partial A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.23)$$

Модуль елементарного переміщення $|d\vec{r}|$ дорівнює елементарному шляху dS ; розкривши скалярний добуток, отримуємо формулу для розрахунку елементарної механічної роботи:

$$\partial A = F dS \cos \alpha, \quad (2.24)$$

де α – кут між вектором \vec{F} і переміщенням $d\vec{r}$.

Робота сили на ділянці траєкторії від точки 1 до точки 2 рівна алгебраїчній сумі елементарних робіт на окремих нескінченно малих ділянках шляху. Ця сума зводиться до інтегралу:

$$A = \int_1^2 F dS \cos \alpha = \int_1^2 F_s dS, \quad (2.25)$$

де $F_s = F \cos \alpha$ – проекція сили на переміщення.

Для розрахунку цього інтегралу необхідно знати залежність F_s від S вздовж траєкторії руху.

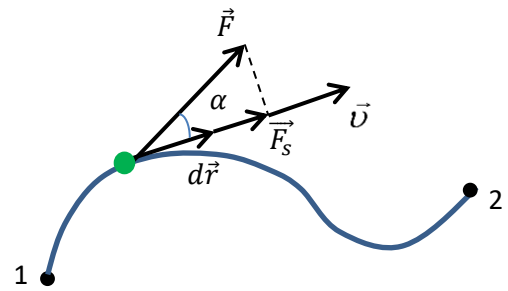


Рис. 2.10

Механічну роботу можна знайти графічно, для цього необхідно розрахувати площу фігури, обмеженою графіком залежності F_s від S в даному інтервалі (заштрихована фігура на рис. 2.11).

Якщо тіло рухається прямолінійно під дією сталої сили, яка не змінює свого напрямку, то формула (2.21) спрощується, і повну механічну роботу можна розрахувати за формулою:

$$A = FS \cos \alpha. \quad (2.26).$$

Одиниці вимірювання роботи в СІ є Джоуль (Дж); 1Дж=1Н·м.

Скалярна фізична величина, яка характеризує швидкість виконання роботи називається **потужністю**:

$$N = \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (2.26)$$

Одиниці вимірювання потужності в СІ є Ватт; 1Вт=1Дж/с.

Розглянувши рівняння другого закону Ньютона у попередньому розділі ми отримали рівняння

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}d\vec{r}, \text{ де } \vec{F}d\vec{r} = \partial A - \text{елементарна робота сили } \vec{F} \text{ на переміщенні } d\vec{r}.$$

Таким чином

$$\partial A = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \quad (2.27)$$

Якщо результуюча сил, що діє на тіло, рівна нулю, то $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0$, а сама величина

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad (2.28)$$

залишається постійною. Ця величина називається **кінетичною енергією** тіла.

З отриманої формули випливає, що кінетична енергія залежить тільки від маси і швидкості тіла, тобто є функцією стану руху.

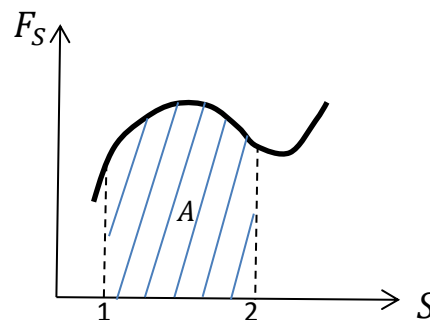


Рис.2.11

Враховуючи, що $mv = P$ - імпульс тіла, вираз (2.25) можна представити у вигляді:

$$E_k = \frac{P^2}{2m}. \quad (2.29)$$

Якщо результуюча сила, що діє на тіло не рівна нулю, то

$$dE_k = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \partial A.$$

Якщо проінтегрувати праву і ліву частину цієї рівності вздовж деякої траєкторії тіла від точки 1 до точки 2, то отримаємо рівняння:

$$A_{1-2} = E_{k2} - E_{k1}, \quad (2.30)$$

З якого випливає, що робота результуючої всіх діючих на тіло сил, йде на приріст його кінетичної енергії. Вираз (2.30) називають **теоремою про кінетичну енергію**.

Кінетична енергія (як і будь-яка інша енергія) вимірюється в СІ у Джоулях. Кінетична енергія 1Дж, це така енергія, яку має тіло масою 1кг, рухаючись зі швидкістю 1м/с.

Потенціальна енергія – механічна енергія системи тіл, яка визначається їх взаємним положенням і характером сил взаємодії між ними.

Нехай взаємодія тіл здійснюється завдяки силових полів (наприклад, поля пружних сил, поля гравітаційних сил), які характеризуються тим, що робота, яка здійснюється силами при переміщенні тіла з одного положення в інше, не залежить від того, по якій траєкторії це переміщення відбулося, а залежить тільки від початкового і кінцевого положення. Такі поля називаються **потенціальними**, а сили, **консервативними**. Якщо ж робота, здійснена силою, залежить від траєкторії переміщення тіла з однієї точки в іншу, то така сила називається **дисипативною** (наприклад, сила тертя).

Тіло, яке знаходиться в потенціальному полі, володіє потенціальною енергією E_n . Робота консервативних сил при елементарній (нескінченно малій) зміні конфігурації системи тіл рівна приросту потенціальної енергії, взятому зі

знаком мінус, так як робота виконується за рахунок зменшення потенціальної енергії:

$$\partial A_{\text{конс}} = -dE_n. \quad (2.31)$$

За визначенням, елементарна механічна робота консервативних сил визначається скалярним добутком:

$$\partial A_{\text{конс}} = \vec{F}_{\text{конс}} \cdot d\vec{r},$$

отже, знаючи яка консервативна сила діє на тіло, можна визначити його потенціальну енергію:

$$E_n = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} + C, \quad (2.32)$$

де C - постійна інтегрування, тобто потенціальна енергія визначається з точністю до деякої довільної постійної. Ця постійна ні відображується на фізичних законах, так як в них входить або різниця потенціальних енергій в двох положеннях тіла, або похідна потенціальної енергії за координатами. Тому потенціальну енергію в деякому положенні тіла вважають рівною нулю (вибирають нульовий рівень відліку), а енергію в других положеннях тіла відраховують відносно нульового рівня.

Певний вигляд функції E_n залежить від характеру силового поля. Наприклад, потенціальна енергія тіла масою m , піднятого на висоту h над поверхнею Землі (цей рівень може бути вибраний, як нульовий), рівна:

$$E_n = mgh \quad (2.33).$$

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла визначається за формулою:

$$E_n = \frac{k\Delta x^2}{2}, \quad (2.34)$$

де k - коефіцієнт жорсткості, Δx - абсолютне видовження.

Потенціальна енергія взаємодіючих мас у гравітаційному полі:

$$E_n = G \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (2.35)$$

де G - гравітаційна постійна.

Повна механічна енергія тіла (або системи тіл) рівна сумі кінетичної і потенціальної енергій:

$$E = E_n + E_k. \quad (2.36)$$

Закони збереження енергії і імпульсу виконуються лише в замкнених системах.

Сукупність тіл, виділених для розгляду, називають **механічною системою**. Тіла системи можуть взаємодіяти як між собою, так і з тілами, що не входять в систему. Відповідно з цим сили, що діють на тіла системи, поділяють на **внутрішні і зовнішні**. Внутрішніми називають сили, з якими тіла системи діють одне на одне, а зовнішніми – сили, обумовлені дією тіл, які не належать системі. Система, на яку не діють ніякі зовнішні сили, або результуюча всіх зовнішніх сил рівна нулю, називають **замкненою системою**.

Закон збереження енергії – це результат узагальнення багатьох експериментальних даних. Ідея цього закону належить М. В. Ломоносову, а кількісне формулювання – Ю. Майєру і Г. Гельмгольцу.

Згідно **закону збереження енергії** в замкненій системі тіл, між якими діють лише консервативні сили, повна механічна енергія є величиною постійною:

$$E = E_n + E_k = const. \quad (2.37)$$

Системи, в яких діють лише консервативні сили називають **консервативними системами**.

Хоча повна механічна енергія консервативних систем не змінюється, в ній можуть виникати перетворення кінетичної енергії в потенціальну і навпаки в еквівалентній кількості, таким чином, щоб повна енергія при цьому не змінювалася. Так, наприклад, при падінні тіла з деякої висоти в полі сил тяжіння землі потенціальна енергія буде поступово переходити в кінетичну, але в будь якій точці траєкторії польоту (за відсутності сил тертя) повна механічна енергія, тобто сума кінетичної в потенціальної енергії буде незмінною.

При наявності неконсервативних сил повна механічна енергія системи не зберігається. Неконсервативними, наприклад, є сили тертя і сили опору середовища. Робота цих сил, як правило, від'ємна. Тому при наявності таких сил повна механічна енергія системи зменшується з часом, перетворюючись у внутрішню енергію тіл, що призводить до їх нагрівання. Такий процес називають *дисипацією енергії*.

Закон збереження енергії має загальний характер і застосовується до всіх без винятку процесів, що трапляються у природі. Повна кількість енергії в ізольованій системі тіл і полів завжди залишається незмінною; енергія лише може переходити із однієї форми в іншу. Цей факт є проявом того, що матерія не зникає безслідно і не виникає з нічого.

В замкнених системах тіл виконується також і *закон збереження імпульсу*, згідно якому результуючий імпульс замкненої системи тіл не змінюється з часом, тобто зберігається. Під результуючим імпульсом розуміють векторну суму імпульсів всіх тіл системи:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \text{const} . \quad (2.38)$$

Закон збереження імпульсу є справедливим не тільки в класичній фізиці, хоча він і отриманий як наслідок законів Ньютона, а й в замкнутих системах мікрочастинок (у квантовій механіці). Цей закон є універсальним, тобто фундаментальним законом природи.

Прикладом застосування законів збереження імпульсу і енергії при роз'язанні фізичної задачі є удар абсолютно пружних і не пружних тіл.

Удар – це зіткнення двох або більше тіл, при яких взаємодія триває дуже короткий час. Виходячи з даного визначення, крім явищ, які можна віднести в прямому сенсі цього слова (наприклад, зіткнення більярдних кульок, зіткнення атомів), сюди можна віднести і такі, як удар людини об землю при стрибку з деякої висоти, попадання пулі у ціль і т.д. При ударах в тілах виникають настільки значні внутрішні сили, що зовнішніми силами можна знехтувати. Це дозволяє

розглядати тіла, що співударяються, як замкнену систему і застосовувати до неї закони збереження.

Тіла при ударі деформуються. Відношення нормальних складових відносної швидкості тіл після і до удару називають *коефіцієнтом встановлення* ε :

$$\varepsilon = \frac{v_n'}{v_n}. \quad (2.39)$$

Якщо для тіл, що співударяються $\varepsilon = 0$, то такі тіла називають *абсолютно непружними*, якщо $\varepsilon = 1$ - *абсолютно пружними*. На практиці для всіх тіл $0 < \varepsilon < 1$, однак в деяких випадках в наближенні тіла можна розглядати як абсолютно пружні або непружні.

Для абсолютно пружного удару виконується закон збереження імпульсу і енергії.

Розглянемо абсолютно пружний удар двох кульок масами m_1 і m_2 , які до удару рухалися відповідно зі швидкостями \vec{v}_1 і \vec{v}_2 , причому ці швидкості паралельні прямій, що проходить через точку дотику тіл і нормальна до поверхні дотику (такий удар називають центральним) (рис. 2.12). Закони збереження енергії і імпульсу будуть мати відповідно вигляд:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \quad (2.40)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}, \quad (2.41)$$

де штриховані швидкості – це швидкості кульок після удару.

Рівняння (2.38), яке наведено у векторному вигляді, необхідно при розв'язку задачі записати у скалярному вигляді, тобто знайти проекції векторів швидкості на відповідну вісь.

Загальний розв'язок цих рівнянь дозволяє отримати формули для розрахунку швидкостей кульок після удару:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad (2.42)$$

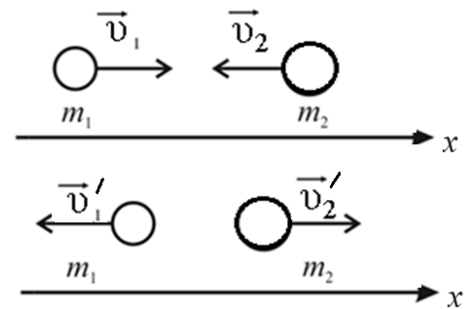


Рис. 2.12

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \quad (2.43)$$

Абсолютно непружний удар – це зіткнення тіл, в результаті якого тіла об'єднуються і рухаються далі, як одне ціле. При такому ударі виконується закон збереження імпульсу і не виконується закон збереження механічно енергії.

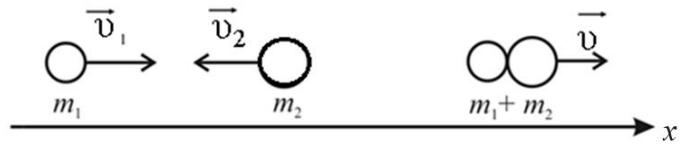


Рис. 2.13

Прикладом може бути зіткнення двох пластилінових кульок масами m_1 і m_2 , які до удару рухалися відповідно зі швидкостями \vec{v}_1 і \vec{v}_2 . Після удару вони будуть рухатися разом, як одне ціле, із швидкістю \vec{v} (рис. 2.13).

За законом збереження імпульсу:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}. \quad (2.44)$$

Внаслідок деформації виникає «втрата» кінетичної енергії (так як $\varepsilon < 1$), яка переходить в теплову або інші види енергії.

Втрату кінетичної енергії можна розрахувати за формулою:

$$\Delta E_k = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2. \quad (2.45)$$

Тема 3 Динаміка твердого тіла

3.1 Момент сили і момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу.

Розглянемо моменти відносно точки. Нехай O – будь-яка точка, відносно якої розглядається момент вектора сили або вектора імпульсу (рис. 3.1). Цю точку називають полюсом. Позначимо через \vec{r} радіус-вектор, проведений від цієї точки до точки прикладення сили \vec{F} . **Моментом сили** \vec{F} відносно точки O називається векторний добуток радіуса-вектора \vec{r} на силу \vec{F} :

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (3.1)$$

Для системи матеріальних точок моментом сили системи відносно деякого полюсу O називається сума моментів сил цих точок відносно того ж полюсу.

Аналогічно **моментом імпульсу** матеріальної точки відносно точки або полюса O називається вектор, що дорівнює

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad (3.2)$$

де \vec{p} – імпульс матеріальної точки; \vec{r} – радіус-вектор, що визначає положенням цієї точки.

Для системи матеріальних точок повним моментом імпульсу системи відносно деякого полюсу O називається сума моментів імпульсів точок системи відносно того ж полюсу.

Розглянемо випадок, коли точка O є нерухомою. У випадку однієї матеріальної точки, диференціюючи вираз (3.2) за часом, дістанемо $d\vec{L}/dt = [\vec{r} \times d\vec{p}/dt] + [d\vec{r}/dt \times \vec{p}]$. При цьому потрібно прийняти до уваги, що імпульс частинки \vec{p} є паралельним до її швидкості $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Тобто $[d\vec{r}/dt \times \vec{p}] = [v \times p] = v \cdot p \cdot \sin 0 = 0$. Крім того, $d\vec{p}/dt = \vec{F}$. Таким чином, $[\vec{r} \times d\vec{p}/dt] = [\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{M}$. У результаті отримуємо

$$d\vec{L}/dt = \vec{M}. \quad (3.3)$$

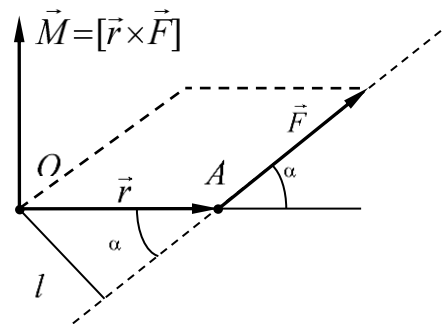


Рис. 3.1

Це рівняння називають *рівнянням моментів для однієї матеріальної точки* відносно точки обертання O .

Момент сили \vec{M} характеризує здатність сили обертати тіло навколо точки. Модуль моменту сили виходячи з (3.1) і визначення векторного добутку дорівнює

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \sin \alpha, \quad (3.4)$$

де α – кут між вектором \vec{r} і \vec{F} (рис. 3.1). Вираз (3.4) можна перетворити

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot l, \quad (3.5)$$

де $l = |\vec{r}| \cdot \sin \alpha$ – плече сили (див. рис. 20.1). За визначенням **плечем сили** називають довжину перпендикуляра, який опущено із точки O на пряму, вздовж якої діє сила (рис. 3.1).

Аналізуючи вираз (3.5), можемо зробити висновок, що здатність сили обертати тіло залежить не тільки від величини сили $|\vec{F}|$, але й від плеча сили l .

Обертання, як правило, відбувається не навколо деякої точки O , а навколо осі обертання Z . Проектуючи вектора рівняння (3.3) на вісь обертання Z , отримаємо *рівняння моментів відносно осі обертання*:

$$dL_z / dt = M_z \quad (3.6)$$

де M_z і L_z є, відповідними проекціями векторів \vec{M} та \vec{L} на вісь обертання Z .

Розглянемо систему, яка складається з N частинок (матеріальних точок).

Позначимо через \vec{F}_{ik} силу, що діє на i -у частинку з боку k -ї частинки (перший індекс вказує номер частинки, на яку діє сила, другий індекс – номер частинки, впливом якої обумовлена ця сила). Зрозуміло, \vec{F}_{ik} є внутрішніми силами.

Позначимо через \vec{F}_i результуючу всіх зовнішніх сил, що діють на i -у частинку.

Напишемо рівняння моментів для кожної матеріальної точки:

$$d\vec{L}_1 / dt = [\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}] + \dots + [\vec{r}_1 \times \vec{F}_{1k}] + \dots + [\vec{r}_1 \times \vec{F}_{1N}] + [\vec{r}_1 \times \vec{F}_1] \quad (k \neq 1),$$

$$d\vec{L}_i / dt = [\vec{r}_i \times \vec{F}_{i1}] + \dots + [\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik}] + \dots + [\vec{r}_i \times \vec{F}_{iN}] + [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] \quad (k \neq i),$$

$$d\vec{L}_N / dt = [\vec{r}_N \times \vec{F}_{N1}] + \dots + [\vec{r}_N \times \vec{F}_{Nk}] + \dots + [\vec{r}_N \times \vec{F}_{N,N-1}] + [\vec{r}_N \times \vec{F}_N] \quad (k \neq N).$$

Тут \vec{L}_i – момент імпульсу i -ї частинки.

Складемо разом ці рівняння. Ліворуч отримаємо похідну за часом від повного моменту імпульсу системи:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i^N \vec{L}_i \right). \quad (3.7)$$

Праворуч відмінною від нуля буде тільки сума зовнішніх моментів сил $\sum [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] = \sum \vec{M}_{i, \text{зовн}}$. Дійсно, суму внутрішніх сил можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} & ([\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}] + [\vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}]) + ([\vec{r}_1 \times \vec{F}_{13}] + [\vec{r}_3 \times \vec{F}_{31}]) + \dots + ([\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik}] + [\vec{r}_k \times \vec{F}_{ki}]) + \dots + \\ & + ([\vec{r}_{N-1} \times \vec{F}_{N-1,N}] + [\vec{r}_N \times \vec{F}_{N,N-1}]) = \\ & = ([(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}]) + ([(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times \vec{F}_{13}]) + \dots + ([(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{ik}]) + \dots + ([(\vec{r}_{N-1} - \vec{r}_N) \times \vec{F}_{N-1,N}]) = 0. \end{aligned}$$

Тут, відповідно до третього закону Ньютона, $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ і направлені ці сили вздовж лінії, що з'єднують точки, до яких ці сили прикладені. Тобто вектори \vec{F}_{ik} , \vec{F}_{ki} та $(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$ є паралельними. Це означає, що $|[(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{ik}]| = |(\vec{r}_i - \vec{r}_k)| \cdot |\vec{F}_{ik}| \cdot \sin 0 = 0$.

Тобто вираз у кожній з дужок дорівнює нулю.

З урахуванням цього отримуємо, що

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum \vec{M}_{i, \text{зовн}}. \quad (3.8)$$

Таким чином, похідна за часом від повного моменту імпульсу системи відносно довільної нерухомої точки O дорівнює геометричній сумі моментів зовнішніх сил, що діють на тіла системи відносно цієї ж точки. Це твердження називають *рівнянням моментів для системи матеріальних точок*.

Обертання, як правило, відбувається не навколо деякої точки O , а навколо осі обертання Z . Проектуючи вектора рівняння (3.8) на вісь обертання Z , отримаємо *рівняння моментів для системи матеріальних точок відносно осі обертання*:

$$dL_z / dt = \sum M_{z,i, \text{зовн}}, \quad (3.9)$$

де $M_{z,i,зовн}$ і L_z є відповідними проекціями векторів $\vec{M}_{i,зовн}$ та \vec{L} на вісь обертання Z .

Коли система замкнена, то зовнішні сили відсутні й права частина рівняння (3.8) дорівнює нулю. Це означає, що

$$d\vec{L}/dt = 0, \quad \vec{L} = \text{const}. \quad (3.10)$$

Таким чином, ми прийшли до висновку, що *повний, сумарний момент імпульсу замкненої системи матеріальних точок залишається постійним*. Це твердження становить зміст закону збереження моменту імпульсу.

Зазначимо, що відповідно до формули (3.8), *повний момент імпульсу залишається постійним і для незамкненої системи у тому випадку, коли сума всіх моментів зовнішніх сил дорівнює нулю* ($\sum \vec{M}_{i,зовн} = 0$).

Також повний момент імпульсу залишається постійним і для випадку коли в системі діють центральні сили. *Центральними* називають такі сили, напрямки яких проходять через нерухомий центр O . З визначення центральної сили випливає, що момент центральної сили завжди буде таким, що дорівнює нулю ($|\vec{M}_i| = |\vec{r}_i| \cdot |\vec{F}_i| \cdot \sin 0 = 0$).

3.2 Момент інерції твердих тіл відносно осі симетрії. Теорема Гюйгенса – Штейнера.

З визначення моменту інерції

$$I = \sum R_i^2 \Delta m_i \quad (3.11)$$

випливає, що ця величина є адитивною. Це означає, що момент інерції тіла відносно деякої осі дорівнює сумі моментів інерції частин тіла відносно тієї ж осі. З співвідношення (3.11) випливає також, що момент інерції тіла відносно різних осей буде різним.

Зазначимо, що вираз (3.11) є не цілком однозначним, оскільки кожний з векторів \vec{r}_i можна проводити в різні точки i -ї малої маси. Щоб усунути цю

невизначеність, потрібно взяти границю виразу цього виразу за умови, що всі Δm_i прямують до нуля. Тобто суму в (3.11) потрібно замінити інтегруванням:

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum R_i^2 \Delta m_i = \int R^2 dm. \quad (3.12)$$

Нарешті, якщо ми візьмемо до уваги визначення густини неоднорідного тіла $\rho = dm/dV$, то отримаємо формулу для моменту інерції твердого тіла

$$I = \int \rho R^2 dV, \quad (3.13)$$

де ρ – густина тіла в точці, яка входить в об'єм dV , R – відстань цього об'єму до осі обертання, відносно якої обчислюється момент інерції.

Обчислення інтеграла (3.13) являє собою достатньо складне завдання. Справа значно спрощується у випадку однорідних осесиметричних тіл. Як приклад, знайдемо момент інерції однорідного циліндра відносно його геометричної осі OO (рис. 3.2).

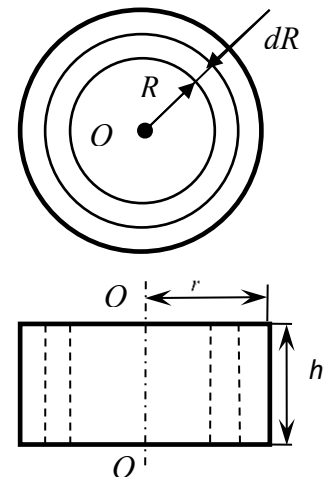


Рис. 3.2

Розіб'ємо циліндр на циліндричні шари радіуса R , товщини dR , висоти h . Маса такого шару дорівнює $dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi R h dR$ ($dV = 2\pi R h dR$ – об'єм шару). Всі точки цього шару розміщені від осі OO на однаковій відстані R . Тому момент інерції такого циліндричного шару дорівнює

$$dI = \rho R^2 dV = \rho R^2 \cdot 2\pi R h dR = 2\pi \rho h R^3 dR.$$

Проінтегруємо цей вираз за змінною R в межах від 0 до r (r – радіус циліндра) і отримаємо момент інерції однорідного циліндра відносно його осі:

$$I = 2\pi \rho h \int_0^r R^3 dR = 2\pi \rho h \frac{r^4}{4} = \frac{1}{2} \rho h \pi r^2 \cdot r^2 = \frac{1}{2} m r^2, \quad \text{тобто } I = \frac{1}{2} m r^2 \quad (3.14)$$

($m = \rho h \pi r^2$ – маса циліндра). Відзначимо, що отриманий вираз (3.14) не залежить від висоти циліндра h . Отже, формула (3.14) визначає й момент інерції тонкого диска відносно перпендикулярної до нього осі, що проходить через його центр.

Обчислимо момент інерції тонкого однорідного стержня маси m й довжини l відносно перпендикулярної до нього осі OO , яка проходить через його центр (рис. 3.3). Для цього використаємо визначення моменту інерції твердого тіла

$$I = \int R^2 dm. \quad (3.15)$$

Зазначимо, що стержень можна вважати тонким, якщо максимальний поперечний розмір його набагато менше довжини l .

Проведемо вздовж стержня вісь X , початок цієї осі розмістимо в центрі стержня (рис. 3.3).

Виберемо ділянку стержня dx .

Виходячи з того, що стержень

однорідний, маса ділянки dx буде дорівнювати $dm = (m/l)dx$, де l – довжина стержня. Ця маса dm знаходиться на відстані x від осі обертання OO (рис. 3.3).

У формулі (3.15) ця відстань позначена буквою R , тобто для даного випадку $R = x$. Далі використовуючи співвідношення (3.15), отримуємо момент інерції стержня відносно перпендикулярної до нього осі, яка проходить через його центр

$$I = \int x^2 dm = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12} ml^2, \text{ тобто } I = \frac{1}{12} ml^2. \quad (3.16)$$

Наведемо без доведення значення моменту інерції однорідної кулі відносно осі, що проходить через його центр:

$$I = \frac{2}{5} mr^2, \quad (3.16)$$

де m – маса, а r є її радіусом.

Знайдемо зв'язок між моментами інерції тіла відносно двох різних паралельних осей. Вважаємо, що ці осі перпендикулярні до площини рисунка й перетинають цю площину в точках O й A (рис. 3.4).

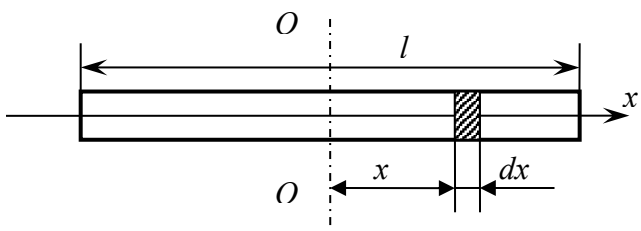


Рис. 3.3

Будемо називати ці вісі осями O й A . Розіб'ємо уявно тіло на елементарні маси dm . Позначимо радіус-вектор, який проведено в площині рисунка від точки O до елементарної маси dm через \vec{R} , а від точки A до dm – через \vec{R}' . Зрозуміло, що на рис. 3.4 зображено випадок, коли елементарна маса dm лежить у площині рисунка. Тоді $\vec{R}' = \vec{R} - \vec{a}$, де $\vec{a} = \vec{OA}$. Тому $(R')^2 = R^2 + a^2 - 2\vec{a}\vec{R}$. Далі, використовуючи визначення моменту інерції тіла, знаходимо момент інерції тіла відносно осі A :

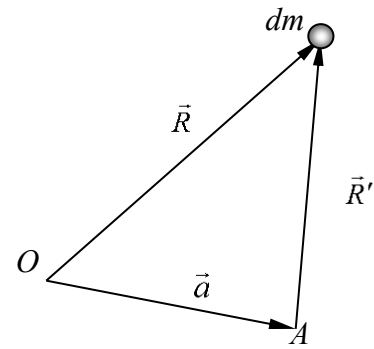


Рис. 3.4

$$I_A = \int (R')^2 dm = \int (R^2) dm + a^2 \int dm - 2\vec{a} \int \vec{R} dm. \quad (3.17)$$

Проаналізуємо доданки, які знаходяться у правій частині співвідношення (3.15). Перший інтеграл праворуч є моментом інерції відносно осі O I_O . Останній інтеграл праворуч у відповідності з визначенням центра мас можна подати у вигляді $\int \vec{R} dm = m_{\text{тіла}} \vec{R}_C$, де \vec{R}_C – радіус-вектор центра мас C тіла відносно осі O (більш точно, \vec{R}_C є компонентою радіуса-вектора центра мас, яка паралельна площині рисунка), M є масою тіла. Таким чином,

$$I_A = I_O + m_{\text{тіла}} a^2 - 2m_{\text{тіла}} (\vec{a} \cdot \vec{R}_C). \quad (3.18)$$

Припустимо, що вісь O проходить через центр мас C тіла (точки O й C збігаються). Тоді $\vec{R}_C = 0$, і попередня формула спрощується, набираючи вигляд

$$I_A = I_C + m_{\text{тіла}} a^2. \quad (3.19)$$

Це важливе співвідношення називається **теоремою Гюйгенса – Штейнера**. Момент інерції відносно довільної осі A дорівнює сумі моменту інерції відносно осі C , яка паралельна осі A й проходить через центр мас тіла C , і добутку маси тіла на квадрат відстані між осями.

3.3 Рівняння динаміки обертального руху відносно нерухомої осі.

Знайдемо рівняння, яке описує обертальний рух твердого тіла відносно нерухомої осі Z . Для розв'язання цієї задачі будемо розглядати тверде тіло як систему матеріальних точок, також використаємо рівняння моментів для системи матеріальних точок відносно осі обертання.

Розіб'ємо тіло (див. рис. 3.5), що обертається навколо нерухомої осі Z з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, на елементарні маси Δm_i , які можна вважати матеріальними точками. Відповідно до визначення момент імпульсу i -ї елементарної маси відносно точки O , що лежить на осі обертання, дорівнює

$$\vec{L}_i = \Delta m_i [\vec{r}_i \times \vec{v}_i], \quad (3.20)$$

де r_i – радіус-вектор, який визначає положення маси Δm_i відносно точки O , \vec{v}_i – швидкість i -ї елементарної маси. Проекція вектора \vec{L}_i на вісь обертання Z дорівнює його модулю L_i , помноженому на косинус кута φ_i : $L_{zi} = L_i \cos \varphi_i$ (рис. 3.5). Оскільки кут між векторами \vec{r}_i й \vec{v}_i прямий (рис. 3.5), то $L_i = \Delta m_i r_i v_i$. Тоді

$$L_{zi} = \Delta m_i r_i v_i \cos \varphi_i = \Delta m_i R_i v_i, \quad (3.21)$$

де $R_i = r_i \cos \varphi_i$ – відстань маси Δm_i від осі обертання (рис. 3.5). Як відомо $v_i = \omega R_i$

. З урахуванням цього можемо записати

$$L_{zi} = \omega R_i^2 \Delta m_i. \quad (3.21)$$

Проекція повного моменту імпульсу тіла L_z дорівнює сумі проекцій L_{zi} :

$$L_z = \sum L_{zi} = \sum \omega R_i^2 \Delta m_i = \omega \sum R_i^2 \Delta m_i. \quad (3.22)$$

Отриманий вираз не залежить від розміщення на осі обертання точки O , відносно якої визначається момент імпульсу тіла \vec{L} .

Величина

$$I = \sum R_i^2 \Delta m_i, \quad (3.23)$$

що дорівнює сумі добутків елементарних мас на квадрат їх відстаней до осі обертання, називається *моментом інерції тіла* відносно цієї осі.

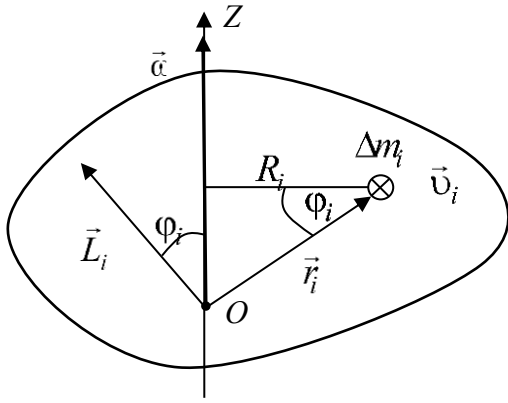


Рис. 3.5 – Вісь обертання Z й елементарна маса Δm_i лежать у площині рисунка. Швидкість \vec{v}_i направлена за площину рисунка. Момент імпульсу \vec{L}_i є перпендикулярним до векторів \vec{r}_i і \vec{v}_i . Відстань R_i від осі обертання дорівнює $R_i = r_i \cos \varphi_i$

Скориставшись поняттям моменту інерції, подамо вираз (3.22) для моменту імпульсу відносно осі Z у вигляді

$$L_z = I\omega, \quad (3.24)$$

де I – момент інерції твердого тіла відносно осі обертання Z .

Як відомо, для системи матеріальних точок є справедливим рівняння моментів відносно осі обертання

$$dL_z / dt = \sum M_{\text{зовн},z}. \quad (3.25)$$

Підставивши в це рівняння (3.24) і прийнявши до уваги, що $I = \text{const}$, а $d\omega / dt = \beta_z$ – проекція кутового прискорення на вісь Z (ми припускаємо, що напрямки вектора $\vec{\omega}$ й осі Z збігаються), прийдемо до рівняння

$$I\beta_z = \sum M_{\text{зовн},z}. \quad (3.26)$$

Це рівняння називають **рівнянням динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі**. Воно аналогічно рівнянню другого закону Ньютона $ma_z = \sum F_z$. Роль маси тут відіграє момент інерції, роль лінійного прискорення – кутове прискорення й, нарешті, роль результуючої сили – сумарний момент зовнішніх сил.

3.4 Робота і потужність тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Кінетична енергія твердого тіла в умовах плоского руху.

Знайдемо роботу, яку виконують зовнішні сили під час обертання твердого тіла відносно нерухомої осі Z . Позначимо зовнішню силу, що прикладена до елементарної маси Δm_i , через \vec{F}_i . За час dt робота сили \vec{F}_i над i -ю елементарною масою буде дорівнювати

$$dA_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt. \quad (3.27)$$

Відомо, що швидкість i -ї елементарної маси тіла, яке обертається навколо нерухомої осі визначається співвідношенням $\vec{v}_i = [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]$, де \vec{r}_i – радіус-вектор, що проведений від довільної точки O на осі обертання до точки з масою Δm_i . Тоді (3.27) набуває вигляду

$$dA_i = \vec{F}_i \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] dt. \quad (3.28)$$

Далі використаємо відоме з математики співвідношення для змішаного добутку векторів $\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = \vec{b} \cdot [\vec{c} \times \vec{a}]$ і отримаємо

$$dA_i = \vec{F}_i \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] dt = \vec{\omega} \cdot [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] dt = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_i dt = \omega \cdot M_i \cos(\angle \vec{\omega}, \vec{M}_i) dt = \omega \cdot M_{i,\omega} dt = M_{i,\omega} d\varphi. \quad (3.29)$$

У цій формулі $\vec{M}_i = [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]$ – момент сили \vec{F}_i відносно точки O , $M_{i,\omega}$ – проекція вектора \vec{M}_i на напрямок вектора $\vec{\omega}$, $d\varphi = \omega \cdot dt$ – кут на який повернеться тіло за час dt . Результуючу роботу знайдемо як суму робіт над кожною елементарною масою

$$dA = \sum dA_i = \left(\sum M_{i,\omega} \right) d\varphi.$$

Позначаючи через $M_\omega = \sum M_{i,\omega}$ – проекцію результуючого моменту імпульсу на напрямок кутової швидкості знаходимо шукану елементарну роботу, яку виконують зовнішні сили при обертанні твердого тіла відносно нерухомої осі

$$dA = M_\omega \cdot d\varphi. \quad (3.30)$$

Зазначимо, що формула (3.30) подібна до формули $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Розділивши роботу (3.30) на час dt , за яке тіло повернулося на кут $d\varphi$, отримуємо потужність, яка розвивається зовнішніми силами:

$$N = dA / dt = M_{\omega} (d\varphi / dt) = M_{\omega} \omega. \quad (3.31)$$

Знак потужності залежить від знаку проекції M_{ω} проекцію результуючого моменту імпульсу на напрямок кутової швидкості $\vec{\omega}$. Коли проекція M_{ω} від'ємна, то потужність N також від'ємна. Зазначимо, формула (3.31) подібна до формули $N = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Знайдемо кінетичну енергію твердого тіла при довільному плоскому русі. Для цього плоский рух будемо розглядати як накладення поступального руху деякої точки тіла та обертання навколо осі, що проходить через цю точку.

Тверде тіло представимо як сукупність елементарних мас Δm_i . Швидкість довільної елементарної маси \vec{v}_i подамо як накладення поступального руху зі швидкістю \vec{v}_O деякої точки тіла O й обертання навколо осі, що проходить через цю точку, з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. У цьому разі, як відомо, можемо записати

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i], \quad (3.32)$$

де r_i – радіус-вектор i -ї маси, який проведено з точки O (рис. 3.6).

Кінетична енергія i -ї елементарної маси дорівнює

$$(\Delta W_k)_i = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i (\vec{v}_O + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i])^2.$$

Підведення у квадрат дає

$$(\Delta W_k)_i = \frac{1}{2} \Delta m_i (v_O^2 + 2\vec{v}_O [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]^2). \quad (3.33)$$

Взявши суму $(\Delta W_k)_i$ за всіма елементарними масами, знайдемо кінетичну енергію тіла:

$$W_k = \sum (\Delta W_k)_i = \frac{1}{2} \sum \Delta m_i (v_O^2 + 2\vec{v}_O [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]^2).$$

Розіб'ємо отриманий вираз на три доданки, виносячи при цьому постійні множники за знак суми:

$$W_k = \frac{1}{2} v_O^2 \sum \Delta m_i + \vec{v}_O \sum \Delta m_i [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] + \frac{1}{2} \sum \Delta m_i [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]^2. \quad (3.34)$$

Сума елементарних мас дасть масу тіла $\sum \Delta m_i = m_{міла}$. Отже, перший доданок дорівнює $m_{міла} v_0^2 / 2$.

Квадрат вектора $[\vec{\omega} \times \vec{r}_i]$ дорівнює квадрату його модуля. Модуль цього вектора, як випливає з рис. 3.6, $\omega r_i \sin \beta_i = \omega R_i$, де R_i – відстань від i -ї маси до осі обертання. Тому можемо записати $[\vec{\omega} \times \vec{r}_i]^2 = \omega^2 R_i^2$. Отже, третій доданок у (3.34) дорівнює

$$\frac{1}{2} \omega^2 \sum \Delta m_i R_i^2 = \frac{1}{2} I_O \omega^2,$$

де $I_O = \sum \Delta m_i R_i^2$ – момент інерції тіла відносно осі обертання, яка проходить через точку O .

Другий доданок у (3.34) перетворимо таким чином:

$$\vec{v}_O \sum \Delta m_i [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] = \vec{v}_O [\vec{\omega} \times \sum \Delta m_i \vec{r}_i] = \vec{v}_O [\vec{\omega} \times m_{міла} \vec{r}_C],$$

де $\vec{r}_C = (\sum \Delta m_i \vec{r}_i) / m_{міла}$ – радіус-вектор центра мас, який проведено з точки O .

Таким чином, приходимо до висновку, що *кінетична енергія твердого тіла* визначається співвідношенням

$$W_k = \frac{1}{2} m_{міла} v_0^2 + m_{міла} \vec{v}_O [\vec{\omega} \times \vec{r}_C] + \frac{1}{2} I_O \omega^2. \quad (3.35)$$

У перший доданок входять тільки

величини, які характеризують поступальний рух, у третій доданок – тільки величини, що характеризують обертальний рух. Другий же доданок містить величини, що характеризують як поступальний, так і обертальний рух.

Коли за точку O взяти центр мас тіла C , то \vec{r}_C (вектор, який проведено від точки O до точки C) буде дорівнювати нулю й формула для кінетичної енергії твердого тіла (3.35) спроститься таким чином:

$$W_k = (1/2) m_{міла} v_C^2 + (1/2) I_C \omega^2, \quad (3.36)$$

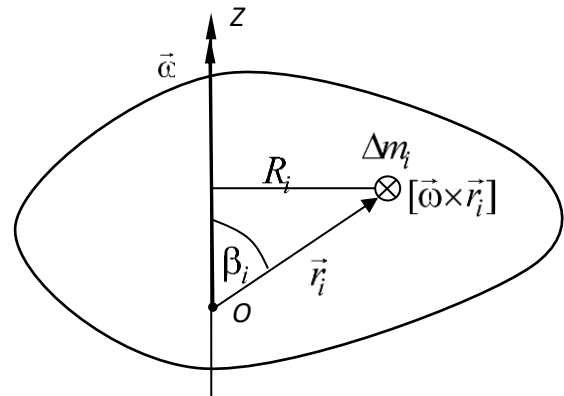


Рис. 3.6 Вектор $[\vec{\omega} \times \vec{r}_i]$ направлений за площину рисунка. Його модуль дорівнює $\omega r_i \sin \beta_i = \omega R_i$

де v_c – швидкість центра мас; I_c – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас.

Таким чином, якщо розбити плоский рух тіла на поступальний зі швидкістю центра мас і обертальний навколо осі, що проходить через центр мас, то кінетична енергія розпадається на два незалежні доданки, один з яких визначається тільки величинами, що характеризують поступальний рух, а другий – тільки величинами, що характеризують обертання.

Тема 4 Механіка рідини

4.1 Трубка течії. Теорема про нерозривність потоку. Рівняння Бернуллі. Витікання рідини з малого отвору. Формула Торрічеллі.

Для опису руху рідин і газів їх поділяють (аналогічно методиці вивчення твердих тіл) на окремі елементи (частинки рідини) так, щоб кожний з них можна було вважати матеріальною точкою і застосувати до неї загальні закони механіки. Про рух рідин і газів в цілому можна скласти уявлення, якщо простежити за рухом кожної їх частинки окремо. Такий метод вивчення руху рідин і газів, запропонований Лагранжем, зводиться до знаходження траєкторії кожного елемента рідини (газу) і його швидкості як функції часу і називається *методом Лагранжа*.

Інший метод вивчення руху рідин і газів запропонував Ейлер. За цим методом (*метод Ейлера*) замість дослідження руху кожного елемента рідини або газу, зокрема, визначають швидкість у кожній точці потоку в різний час; ця швидкість відноситься не до певної частинки, а до будь-якої частинки, що проходить через дану точку простору. Зрозуміло, що коли буде знайдено розподіл швидкостей у потоці й характер зміни його в часі, то потік рідини або газу стане цілком визначеним. Інакше кажучи, за методом Ейлера потік рідини або газу задається полем векторів швидкості $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

Сукупність векторів $\vec{v}(\vec{r}, t)$, заданих для всіх точок простору, називається *полем вектора швидкості*. Це поле можна наочно зобразити за допомогою *ліній течії* (рис. 4.1). Лінію течії можна провести через будь-яку точку простору. Якщо побудувати всі уявні лінії течії, вони зіллються. Тому

для наочного уявлення течії рідини будують лише частину ліній, вибираючи їх так, щоб густина ліній течії чисельно дорівнювала модулю швидкості в даному місці. Тоді за картиною ліній течії можна судити не тільки про напрямок, але й

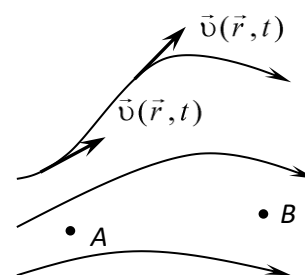


Рис 4.1

про модуль вектора \vec{v} у різних точках простору. Наприклад, у точці A на рис. 4.1 густина ліній, а отже, й модуль швидкості v є більшими, ніж у точці B . Оскільки різні частинки рідини можуть проходити через дану точку простору з різними швидкостями, то картина ліній течії, в загальному випадку, увесь час змінюється. Якщо швидкість, у кожній точці простору залишається постійною, то такий потік рідини називається **стаціонарним**. У стаціонарному потоці будь-яка частинка рідини проходить через дану точку простору з однієї й тією же швидкістю \vec{v} . Картина ліній стаціонарного потоку залишається незмінною, і лінії течії в цьому випадку збігаються із траєкторіями частинок.

Якщо через всі точки невеликого замкненого контура провести лінії течії, утвориться поверхня, яку називають **трубкою течії**. Вектор \vec{v} буде дотичним до поверхні трубки течії у кожній її точці. Це означає, що частинки рідини при своєму русі не перетинають стінок трубки течії.

Розглянемо трубку течії, досить тонку для того, щоб у всіх точках її поперечного перерізу S швидкість частинок v була однаковою (рис. 35.1). При стаціонарній течії трубка течії подібна до стінок твердої труби. Тому через перетин S пройде за час Δt об'єм рідини, який дорівнює $\Delta V = Sv\Delta t$, маса якого $\rho \cdot \Delta V = \rho \cdot Sv\Delta t$. На рис. 35.1 зображені два

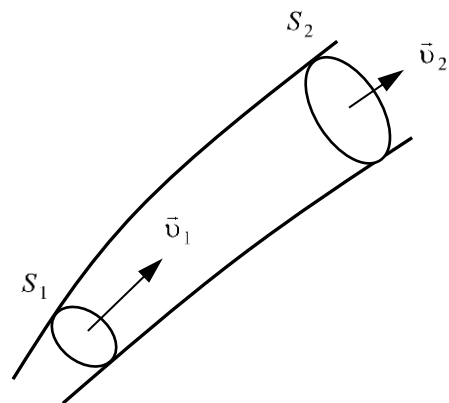


Рис. 4.2

перетини дуже тонкої трубки течії – S_1 і S_2 . Через ці перетини за час Δt пройдуть маси рідини $\Delta m_1 = \rho_1 \cdot \Delta V_1 = \rho_1 \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t$ та $\Delta m_2 = \rho_2 \cdot \Delta V_2 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$. У стаціонарному потоці ці маси рідини або газу повинні бути однаковими: $\Delta m_1 = \Delta m_2$. Інакше між перерізами S_1 та S_2 кількість речовини весь час збільшувалася б або зменшувалася і не існувало б стаціонарного потоку. Тому з рівності мас знаходимо

$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot v_2. \quad (4.1)$$

Розрахунки показують, що в стаціонарному потоці змінами густини не тільки рідини, а й газу можна знехтувати, тобто $\rho_1 = \rho_2$. Тоді рівність (4.1) можна записати так:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2. \quad (4.2)$$

Рівність (4.2) є справедливою для будь-якої пари довільно взятих перетинів. Отже, для нестисливої рідини для стаціонарного потоку добуток Sv у будь-якому перетині даної трубки течії має однакове значення:

$$S \cdot v = const. \quad (4.3)$$

Це твердження називають **теоремою про нерозривність потоку**.

Зі співвідношення (4.3) випливає, що у випадку трубки течії, в якій змінюється її перетин, частинки рідини в різних точках трубки рухаються з різними швидкостями, тобто із прискоренням. Якщо трубка течії горизонтальна, це прискорення може бути обумовлено тільки зміною тиску уздовж трубки – у місцях, де швидкість більше, тиск повинен бути менше, і навпаки.

У реальних рідинах при відносному переміщенні шарів рідини відносно один одного виникають сили внутрішнього тертя, які гальмують відносний зсув шарів. Рідина, у якої внутрішнє тертя повністю відсутнє, називається **ідеальною**. Таким чином рух ідеальної рідини не супроводжується дисипацією енергії.

Розглянемо стаціонарний потік ідеальної рідини, яка нестискується. Виділимо об'єм рідини, який обмежений стінками вузької трубки течії й перпендикулярними до ліній течії перетинами S_1 й S_2 (рис. 4.3). За час Δt цей об'єм зміститься уздовж трубки течії, причому границя об'єму S_1 отримає зміщення Δl_1 а границя S_2 – зміщення Δl_2 . Робота, яка виконана при цьому силами тиску, дорівнює збільшенню повної енергії $(E_k + E_p)$ рідини, яка міститься в розглянутому об'ємі.

Сили тиску на стінки трубки течії перпендикулярні в кожній точці до напрямку переміщення рідини, внаслідок чого роботи не виконують. Відмінна

від нуля лише робота сил тиску, яка прикладена до перетинів S_1 і S_2 . Ця робота дорівнює

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2) \Delta V. \quad (4.4)$$

Повна енергія розглянутого об'єму рідини складається з кінетичної енергії й потенційної енергії у полі сил земного тяжіння. Внаслідок стаціонарності потоку повна енергія тієї частини рідини, яка обмежена перетинами 1' і 2 (внутрішня незаштрихована частина трубки течії на рис. 36.1), за час Δt не змінюється. Тому збільшення повної енергії дорівнює різниці значень повної енергії заштрихованих об'ємів ΔV_2 і ΔV_1 , маса яких $\Delta m = \rho \Delta V$ (ρ – густина рідини).

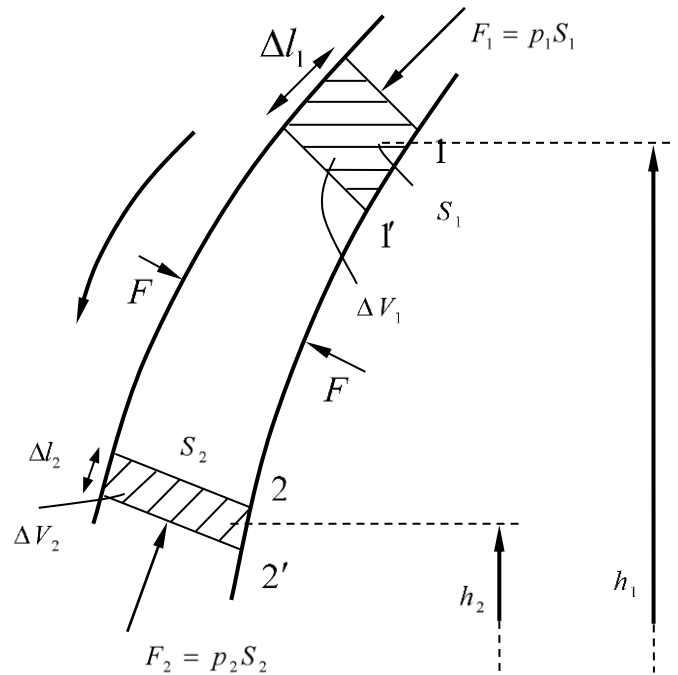


Рис. 4.3

Візьмемо перетин S трубки течії й переміщення Δl настільки малими, щоб усім точкам кожного із заштрихованих об'ємів можна було приписати однакові значення швидкості v , тиску p й висоти h . Тоді для збільшення повної енергії отримуємо вираз

$$\Delta W = \left(\frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left(\frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right) \quad (4.5)$$

Прирівнюємо вирази (4.4) і (4.5), скоротимо на ΔV й перенесемо члени з однаковими індексами в одну частину рівності. В результаті цього отримаємо

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (4.6)$$

Це рівняння стає абсолютно точним лише при прямуванні поперечного перерізу S до нуля, тобто при стягуванні трубки течії в лінію. Отже, величини v, h й p в обох частинах рівності потрібно розглядати як такі, що відносяться до двох довільних точок однієї й тієї ж лінії течії.

При доведенні формули (4.6) перетини S_1 й S_2 були взяті довільно. Тому можна стверджувати, що для стаціонарної ідеальної рідини, яка нестискується, уздовж будь-якої лінії течії виконується умова

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = const. \quad (4.7)$$

Рівняння (4.6) або рівнозначне йому рівняння (4.7) називається **рівнянням Бернуллі**. Хоча це рівняння було отримано для ідеальної рідини, воно добре виконується і для реальних рідин, у яких внутрішнє тертя невелике.

Для горизонтальної лінії течії рівняння (4.6) має вигляд

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2.$$

Звідси випливає, що тиск менший в тих точках, де швидкість більша.

Знайдемо швидкість витікання ідеальної рідини, яка нестискується, з невеликого отвору в широкій відкритій судині (рис. 4.4). Для цього використаємо рівняння Бернуллі.

Виділимо подумки в рідині трубку течії, перетинами якого є відкрита поверхня рідини S_1 й перетин потоку на виході з отвору S_2 (див. рис. 4.4). Покажемо штриховими лініями усередині судини стінки трубки течії рідини. Для всіх точок кожного із цих перетинів швидкість рідини v й висоту над деяким вихідним рівнем можна вважати однаковими. Тому до перетинів S_1 та S_2 можна застосувати рівняння Бернуллі

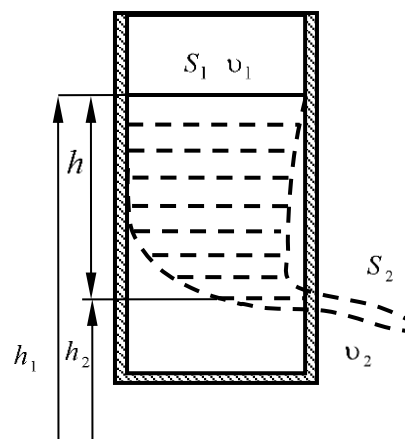


Рис. 4.4

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (4.8)$$

Зазначимо, що тиски p_1 й p_2 в обох перетинах однакові й дорівнюють атмосферному. Швидкості v_1 та v_2 у цих перетинах пов'язані між собою теоремою про нерозривність струменю

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2.$$

Звідси

$$v_1 = v_2 \cdot S_2 / S_1 \ll v_2$$

через те, що за умовою $S_2 / S_1 \ll 1$. Тому доданком $\rho v_1^2 / 2$ в (4.8) порівняно з $\rho v_2^2 / 2$ можна знехтувати. Тоді рівняння (4.8) спрощується

$$\rho g h_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2.$$

Звідси знаходимо шукану швидкість витікання рідини з отвору S_2

$$v_2 = \sqrt{2gh}, \quad (4.9)$$

де $h = h_1 - h_2$ – висота відкритої поверхні над отвором. Формула (4.9) називається **формулою Торрічеллі**. З неї випливає, що швидкість витікання рідини з отвору, який знаходиться на глибині h під відкритою поверхнею рідини, збігається зі швидкістю, що отримує будь-яке тіло, коли падає з висоти h (у випадку, якщо опором повітря можна знехтувати). Цей результат отриманий у припущенні, що рідина є ідеальною. Для реальних рідин швидкість витікання буде меншою.

4.2 Сила внутрішнього тертя. Формула Ньютона для сили внутрішнього тертя. В'язкість. Ламінарна і турбулентна течія рідини. Число Рейнольдса.

Ідеальна рідина, тобто рідина без внутрішнього тертя, є абстракцією. Всі реальні рідини і гази у більшій або меншій мірі мають властивість **в'язкості або внутрішнього тертя**. В'язкість проявляється, зокрема, у тому, що рух, який виникає в рідині або в газі, після припинення дії причин, які його викликали,

поступово припиняється. Прикладом може служити рух рідини в склянці після того, як її перестають розмішувати ложечкою.

Для з'ясування закономірностей, яким підкоряються сили внутрішнього тертя, розглянемо такий дослід. У рідину занурені дві паралельні одна одній пластини (рис. 4.5), лінійні розміри яких значно перевищують відстань між ними d .

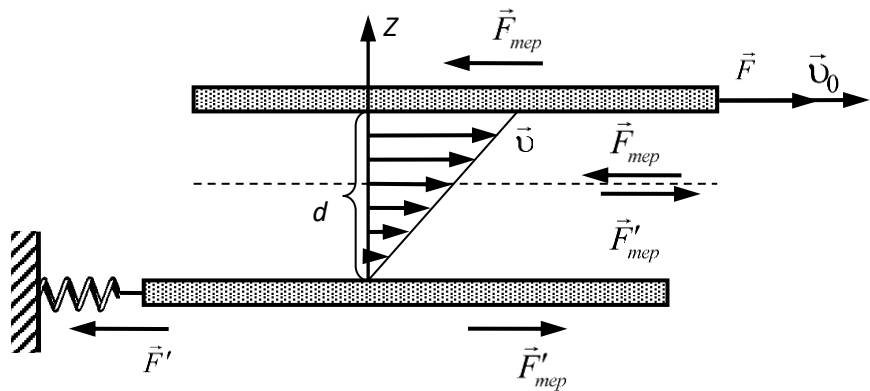


Рис. 4.5

Нижня пластина втримується на місці, верхня приводиться в рух відносно нижньої з деякою швидкістю U_0 . Дослід показує, що для переміщення верхньої пластини з постійною швидкістю U_0 необхідно діяти на неї із цілком певною постійною за величиною силою \vec{F} . Раз пластина не отримує прискорення, виходить, що дія цієї сили врівноважується рівною їй за величиною та протилежно направленою силою, яка і є силою тертя, що діє на пластину при її русі в рідині. Позначимо її $F_{тер}$. Варіюючи швидкість пластини U_0 , площу пластин S і відстань між ними d , можна отримати:

$$F_{тер} = \eta \frac{U_0}{d} S, \quad (4.10)$$

де η – коефіцієнт пропорційності, який залежить від природи й стану (наприклад, температури) рідини й називається **коефіцієнтом внутрішнього тертя або коефіцієнтом в'язкості, або просто в'язкістю рідини (газу)**.

На нижню пластину при русі верхньої також виявляється діє сила $F'_{тер}$, яка однакова за величиною $F_{тер}$. Для того щоб нижня пластина залишалася нерухомою, силу $F'_{тер}$ необхідно врівноважити за допомогою сили F' .

Таким чином, при русі двох занурених у рідину пластин одна відносно одної між ними виникає взаємодія, яка характеризується силою (4.10). Вплив пластин одна на одну здійснюється через рідину, яка міститься між пластинами, передається від одного шару рідини до іншого. Якщо в будь-якому місці між пластинами провести уявно площину, яка паралельна пластинам (див. пунктирну лінію на рис. 4.5), то можна стверджувати, що частина рідини, яка лежить над цією площиною, діє на частину рідини, що лежить під площиною, із силою $F'_{тер}$, а частина рідини, що лежить під площиною, у свою чергу діє на частину рідини, що лежить над площиною, із силою $F_{тер}$, причому величини $F_{тер}$ і $F'_{тер}$ визначаються формулою (4.10). Таким чином, формула (4.10) визначає не тільки силу тертя, що діє на пластини, але й силу тертя між дотичними частинами рідини.

Якщо досліджувати швидкість частинок рідини в різних шарах, то виявляється, що вона змінюється в напрямку Z , який перпендикулярний до пластин (рис. 4.5), за лінійним законом

$$v(z) = \frac{v_0}{d} z. \quad (4.11)$$

Частинки рідини, яка безпосередньо дотикаються до пластинки, як би прилипають до них, мають таку ж швидкість, як і самі пластини. Формулу (4.11) можемо перетворити

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v_0}{d}. \quad (4.12)$$

Використавши рівність (4.12), формулі (4.10) для сили внутрішнього тертя можна надати вигляд

$$F_{тер} = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S. \quad (4.13)$$

Формулу (4.13) отримав Ньютон і тому її називають **формулою Ньютона для сили внутрішнього тертя**. Величина $\left| dv / dz \right|$ показує, як швидко змінюється

швидкість у напрямку осі Z , і називається градієнтом швидкості (точніше, це – модуль градієнта швидкості; сам градієнт є вектором).

Формула (4.13) була нами отримана для випадку, коли швидкість змінюється за лінійним законом (у цьому випадку градієнт швидкості є постійним). Виявляється, що ця формула залишається справедливою й для будь-якого іншого закону зміни швидкості при переході від одного шару рідини до іншого. У цьому разі для визначення сили тертя між двома сусідніми шарами рідини потрібно брати значення градієнта dv/dz у тому місці, де проходить уявна поверхня розділу шарів.

Одиницею в'язкості в СІ є така в'язкість, при якій градієнт швидкості, що дорівнює 1 м/с на 1 м, приводить до виникнення сили внутрішнього тертя в 1 Н на 1 м² поверхні дотику шарів рідини. Ця одиниця позначається Н·с/м².

Коефіцієнт в'язкості залежить від температури, причому характер цієї залежності істотно різний для рідин і газів. У рідин коефіцієнт в'язкості сильно зменшується з підвищенням температури. У газів, навпаки, коефіцієнт в'язкості з температурою росте. Відмінність у характері поведінки η при змінах температури вказує на різні механізми внутрішнього тертя в рідинах і газах.

Спостерігається два види течії рідини (або газу). В одних випадках рідина як би розділяється на шари, які ковзають один відносно одного, не перемішуючись. Така течія називається *ламінарною*. Якщо в ламінарний потік увести підфарбований струмок, то він буде зберігатися, не розмиваючись, на всій довжині потоку, тому що частинки рідини в ламінарному потоці не переходять із одного шару в інший. Ламінарна течія є стаціонарною.

При збільшенні швидкості або поперечних розмірів потоку характер течії істотно змінюється. Виникає енергійне перемішування рідини. Така течія називається *турбулентною*. При турбулентній течії швидкість частинок у кожному місці увесь час змінюється хаотичним чином – течія є нестаціонарною. Якщо в турбулентний потік увести пофарбований струмок, то вже на невеликій

відстані від місця її введення пофарбована рідина рівномірно розподіляється по всьому перетині потоку.

Англійський учений Рейнольдс встановив, що характер течії залежить від значення безрозмірної величини:

$$\text{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (4.14)$$

де ρ – густина рідини (або газу); v – середня за перерізом швидкість потоку; η – в'язкість рідини; l – характерний для поперечного перерізу потоку розмір, наприклад, сторона квадрата при квадратному розтині, радіус або діаметр при круглому розтині. Величина Re , що визначається формулою (4.10), називається **числом Рейнольдса**.

При малих значеннях Re течія носить ламінарний характер. Починаючи з деякого значення Re , яке називають **критичним**, течія стає турбулентною. Якщо за характерний розмір труби взяти її радіус (у цьому випадку $\text{Re} = \rho v r / \eta$), то критичне значення числа Рейнольдса буде дорівнювати приблизно 1000 (якщо за l взяти діаметр труби, то критичне значення Re буде дорівнювати 2000).

Число Рейнольдса служить критерієм подібності для течії рідин у трубах, каналах і т.д. Наприклад, характер течії різних рідин (або газів) у круглих трубах різних діаметрів буде однаковим, якщо кожній течії відповідає однакове значення Re .

У число Рейнольдса входить відношення густини ρ й в'язкості η . Величина

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (4.15)$$

називається **кінематичною кв'язкістю**. Щоб відрізнити в'язкість η від ν , величину η називають **динамічною в'язкістю**. Число Рейнольдса, яке виражено через кінематичну в'язкість, має вигляд

$$\text{Re} = \frac{v l}{\nu}. \quad (4.16)$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 1

1. Дати визначення вектору, проекції вектору на вісь, модуля вектору, координат вектору, орту осі, правої системи координат.
2. Дати визначення операціям додавання та віднімання векторів, а також множення вектору на число, навести геометричний зміст цих операцій.
3. Дати визначення скалярного та векторного добутку векторів, навести властивості цих операцій.
4. Надати визначення радіус-вектору, швидкості, шляху, траєкторії, переміщення. Навести та пояснити зв'язок шляху та модуля швидкості. Надати визначення середньої швидкості та середньої швидкості переміщення, обґрунтувати нерівність між модулями цих величин.
5. Навести визначення прискорення. Вивести формули для нормального та тангенціального прискорень.
6. Пояснити та вивести закон додавання швидкостей.
7. Навести визначення поступального та обертового руху. Навести фізичні величини, що описують рух матеріальної точки по колу, та вивести формули, що описують зв'язки між цими величинами.
8. Вивести закони залежності координати та швидкості від часу при одновимірному рівноприскореному русі.
9. Для точки на ободі колеса, що рухається нерухомою дорогою без проковзування, вивести залежності швидкості та координат від часу.
10. Дати визначення сили. Сформулювати закони Ньютона.
11. Сформулювати закон Всесвітнього тяжіння. У яких випадках цей закон працює у вигляді **Ошибка! Источник ссылки не найден.**? Дати визначення сили тяжіння, вивести вираз для прискорення вільного падіння на поверхні планети. Дати визначення ваги, пояснити відмінність між вагою та силою тяжіння.
12. Дати визначення сили пружності. Сформулювати закон Гука. Вивести вирази для жорсткості паралельного та послідовного з'єднань тіл.

13. Дати визначення сили нормальної реакції опори. Дати визначення силі тертя. Пояснити принципову відмінність між силою тертя ковзання та силою тертя спокою. Навести математичні вирази для цих сил.

14. Вивести закони зміни та збереження імпульсу тіла та системи тіл.

15. Дати визначення центру мас. Сформулювати та довести теорему про рух центру мас.

16. Дати поняття реактивного руху. Вивести рівняння Мещерського та формулу Ціолковського.

17. Дати визначення роботи, потужності та кінетичної енергії. Сформулювати та довести теорему кінетичної енергії.

18. Дати визначення потенціальної сили та потенціальної енергії. Дати визначення дисипативної та гіроскопічної сили. Вивести закон збереження енергії при відсутності дисипативних сил. Вивести закон зміни повної механічної енергії тіла.

19. Дати визначення абсолютно пружного та абсолютно непружного ударів. Вивести вираз для втрати повної механічної енергії при абсолютно непружному ударі. Вивести вирази для швидкостей тіл після абсолютно пружного удару.

20. Вивести потенціальну енергію в полі тяжіння поблизу поверхні планети, потенціальну енергію пружно розтягнутого (стиснутого) тіла та потенціальну енергію гравітаційної взаємодії.

21. Дати визначення моменту сили та моменту імпульсу відносно точки. Вивести рівняння моментів.

22. Вивести закони зміни та збереження моменту імпульсу системи тіл.

23. Дати визначення моменту сили та моменту імпульсу відносно осі. Довести, що при їх обчисленні достатньо обчислити векторні добутки лише від перпендикулярних до осі компонент.

24. Дати визначення моменту інерції. Вивести вираз для кінетичної енергії обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

25. Вивести момент інерції однорідного тонкого стрижня відносно осі, що проходить через його середину перпендикулярно до нього.
26. Вивести рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.
27. Навести математичну аналогію між одновимірним рухом матеріальної точки та обертанням твердого тіла відносно нерухомої осі.
28. Сформулювати закон Паскаля. Вивести вираз для гідростатичного тиску рідини на глибині h .
29. Навести визначення сили Архімеда та обґрунтувати вираз для неї. Вказати умови плавання тіл.
30. Дати визначення ідеальної рідини. Дати визначення ламінарної течії. Вивести рівняння нерозривності та рівняння Бернуллі.

Розділ 2 ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ І ТЕРМОДИНАМІКИ

Тема 5 Макроскопічний стан термодинамічної системи

5.1 Термодинамічна система. Параметри стану системи. Основні положення молекулярно-кінетичної теорії речовини.

Термодинамічною системою називається сукупність макроскопічних тіл, які можуть обмінюватися енергією між собою та зовнішнім середовищем (тобто з іншими тілами). Прикладом може служити рідина і пара, що контактує з нею. Система може складатись і з одного макроскопічного тіла.

Термодинамічна система може перебувати у різних станах, які відрізняються температурою, тиском, об'ємом, густиною й так далі. Подібні величини, що характеризують стан системи як єдиного цілого, називаються *параметрами стану*.

Параметри стану не завжди мають певні значення. Наприклад, у тіла, що підігрівається з однієї сторони й охолоджується з іншої, температура в різних точках буде різною і йому, як цілому, не можна приписати певне значення температури. Стан, у якому хоча б один із параметрів не має певного значення, називається *нерівноважним*.

Стан термодинамічної системи називають *рівноважним*, коли всі параметри стану мають певні значення, які не змінюються із часом.

Термодинамічні системи, які не обмінюються із зовнішнім середовищем ні енергією, ні речовиною, називаються *ізолюваними* (або замкненими).

Термодинамічним процесом називається перехід системи з одного стану в інший. Такий перехід завжди пов'язаний з порушенням рівноваги системи. Наприклад, розглянемо рух поршня, який приводить до зменшення об'єму газу у посудині. При цьому газ буде стискуватися й у першу чергу підвищиться тиск газу поблизу поршня – рівновага буде порушена. Порушення рівноваги буде тим більшим, чим швидше буде переміщуватись поршень. Якщо рухати поршень дуже повільно, то рівновага порушується незначно й тиск у різних точках мало

відрізняється від рівноважного значення, яке відповідає цьому об'єму газу. У разі нескінченно повільного стискання тиск газу в різних точках посудини буде мати в кожний момент часу однакове значення. Отже, стан газу весь час буде рівноважним. Таким чином, нескінченно повільний процес можна розглядати як такий, що складається з послідовності рівноважних станів. Такий процес називається **рівноважним** або **квазистатичним**.

Одним із основних параметрів стану термодинамічної системи є температура. Якісно температуру можна визначити як величину, яка характеризує ступінь нагрітості тіл. **Температура** є параметром системи, який в стані термодинамічної рівноваги має одне і теж значення у всіх частинах системи.

Температуру можна вимірювати за допомогою шкали Цельсія. У цьому разі температуру льоду, який тоне, беруть за таку, що дорівнює 0°C , температуру води, яка кипить, такою, що дорівнює 100°C . Температура у проміжному стані визначається формулою

$$t = \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0} \cdot 100, \quad (5.1)$$

де V – об'єм у проміжному стані, наприклад, ртуті у приладі, який описано вище; V_0 – об'єм, при температурі 0°C ; V_{100} – об'єм, при температурі 100°C .

Коли температуру льоду, який тоне, взяти за 32°F , а температуру води, яка кипить за 212°F , то отримаємо шкалу Фаренгейта.

У фізиці є дуже зручною і нею часто користуються абсолютна шкала температур. Ця температура вимірюється в градусах Кельвіна ($^{\circ}\text{K}$). **Абсолютна температура** пов'язана з температурою за шкалою Цельсія співвідношенням

$$T = t + 273,15. \quad (5.2)$$

З цього співвідношення випливає, що один градус Кельвіна дорівнює одному градусу Цельсія, початок шкали температури Цельсія і абсолютної температури зміщено на $273,15$ градусів.

Сутність молекулярно-кінетичної теорії будови речовини зводиться до таких основних положень:

- Усі тіла складаються з частинок, які називають атомами (молекулами).
- Атоми (молекули) в тілах знаходяться у стані безперервного хаотичного руху, інтенсивність якого залежить від температури тіла. Такий рух молекул називають тепловим.
- Молекули речовини взаємодіють між собою.

Для характеристики кількості речовини з точки зору атомарної будови речовини використовується така одиниця як моль. У системі СІ моль є основною одиницею. Згідно до визначення *молем* називають таку кількість речовини, в якій знаходиться стільки частинок, скільки знаходиться атомів в 0,012 кг ^{12}C (нукліда вуглецю атомною масою 12).

Число частинок, що містяться в молі речовини, називається *сталою Авогадро*. Дослідним шляхом знайдено, що ця стала дорівнює

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}. \quad (5.3)$$

Отже, у молі заліза міститься N_A атомів заліза, у молі води міститься N_A молекул води і т.д.

Масу моля речовини позначають буквою μ й називають *молярною масою*. Вона дорівнює добутку постійної Авогадро на масу молекули:

$$\mu = N_A m_{\text{молекули}}. \quad (5.4)$$

З'ясуємо, чому дорівнює маса молекули речовини. Знайдемо, наприклад, масу молекули (атому) вуглецю ^{12}C . Його молярна маса дорівнює 0,012 кг/моль. Використаємо формулу (5.4) й отримаємо

$$m_{\text{молекули,C}} = \mu_C / N_A \approx 2 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

Маса інших молекул має такий же порядок.

5.2 Рівняння стану ідеального газу. Ізопроееси.

Параметри стану термодинамічної системи пов'язані один з одним. Співвідношення, яке визначає зв'язок між параметрами стану тіла, називається *рівнянням стану* цього тіла.

У найпростішому випадку рівноважний стан тіла визначається значеннями трьох параметрів: тиску p , об'єму V й температури T (маса тіла вважається відомою). Зв'язок між цими параметрами може бути виражений формулою

$$F(p, V, T) = 0, \quad (5.5)$$

де $F(p, V, T)$ – деяка функція параметрів. Рівняння (5.5) і є рівняння стану даного тіла.

Рівняння стану у термодинаміці встановлюються експериментально і відіграють важливу роль для опису властивостей речовин (чи це твердий, рідкий або газоподібний стан).

Розглянемо рівняння стану ідеального газу. *Ідеальним газом* називають такий газ, взаємодією між молекулами якого можна знехтувати (між молекулами відбуваються лише короткочасні зіткнення, які носять пружний характер).

Дослідним шляхом було встановлено, що при звичайних умовах (тобто при кімнатній температурі й нормальному атмосферному тиску) параметри стану таких газів, як кисень і азот, досить добре описуються рівнянням

$$\frac{pV}{T} = b, \quad (5.5)$$

де b – константа, яка пропорційна масі газу. Виявилося також, що чим більш розріджений газ (чим менше його густина), тим точніше виконується це рівняння. Рівняння (5.5) отримало назву *рівняння Клапейрона*.

Згідно до *закону Авогадро* при нормальних умовах, тобто при температурі 0°C ($273,15^\circ\text{K}$) і тиску в одну атмосферу ($1,013 \cdot 10^5$ Па), об'єм одного моля будь-якого газу дорівнює $22,4$ л/моль $= 22,4 \cdot 10^{-3}$ м³/моль.

Звідси випливає, що у випадку, коли кількість газу дорівнює одному молю, константа b в рівнянні (5.5) буде однаковою для всіх газів. Позначивши константу b для одного моля буквою R , напишемо рівняння стану ідеального газу у вигляді

$$pV_{\mu} = RT. \quad (5.6)$$

Індекс « μ » біля V вказує на те, що йдеться мова про об'єм одного моля газу (молярний об'єм). Константа R називається *газовою сталою*. Відповідно до закону Авогадро

$$R = \frac{pV_{\mu}}{T} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 22,4 \cdot 10^{-3}}{273,15} = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{°К}). \quad (5.7)$$

Щоб отримати рівняння стану для довільної маси m ідеального газу, помножимо обидві частини рівняння (5.7) на відношення m/μ де μ – молярна маса газу:

$$p \frac{mV_{\mu}}{\mu} = \frac{m}{\mu} RT.$$

При однакових p і T газ маси m буде займати об'єм V у m/μ раз більший, ніж V_{μ} , тому $mV_{\mu}/\mu = V$. Таким чином, ми приходимо до рівняння

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad (5.8)$$

яке називають *рівнянням Менделєєва – Клапейрона*.

Помножимо й розділимо праву частину рівняння (5.8) на сталу Авогадро N_A :

$$pV = \frac{m}{\mu} N_A \frac{R}{N_A} T = N \frac{R}{N_A} T. \quad (5.9)$$

Тут $N = (m/\mu)N_A$ – число молекул, які знаходяться в масі m газу. Величина

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{°К})}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}/\text{°К} \quad (5.10)$$

називається сталою Больцмана.

З урахуванням (5.9) рівнянню (5.8) можна надати вигляд

$$pV = NkT. \quad (5.11)$$

Розділимо обидві частини цього рівняння на об'єм газу V . Відношення N/V дає число молекул в одиниці об'єму газу, яке ми будемо позначати буквою n й називати **концентрацією молекул**. Отже,

$$p = nkT. \quad (5.12)$$

Рівняння (5.5), (5.8) і (5.12) являють собою різні форми запису рівняння стану ідеального газу.

Закон Бойля – Маріотта: для даної маси газу при сталій температурі добуток тиску газу на його об'єм є величина стала:

$$p_1V_1 = p_2V_2 \quad \text{або} \quad pV = \text{const}. \quad (5.13)$$

Процес, що протікає при сталій температурі, називається **ізотермічним**.

Ізотермічний процес зображується графічно у різних осях координат:

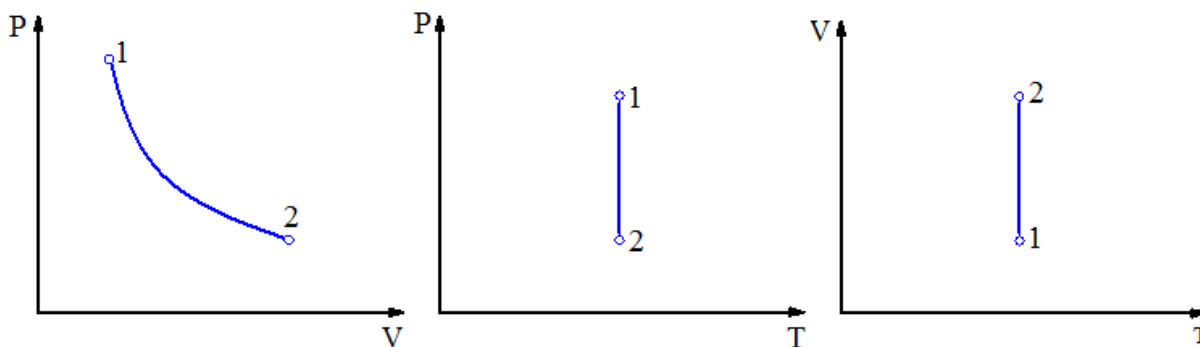


Рис. 5.1

Закон Гей – Люссака: об'єм даної маси газу при сталому тиску змінюється лінійно з температурою:

$$V = V_0(1 + \alpha t) \quad (5.14)$$

де V_0 - об'єм при 0°C , t - температура за шкалою Цельсія, $\alpha = \frac{1}{273,15} \text{K}^{-1}$ - коефіцієнт.

Процес, що протікає при сталому тиску, називається **ізобарним**. Ізобарний процес зображується графічно у різних осях координат:

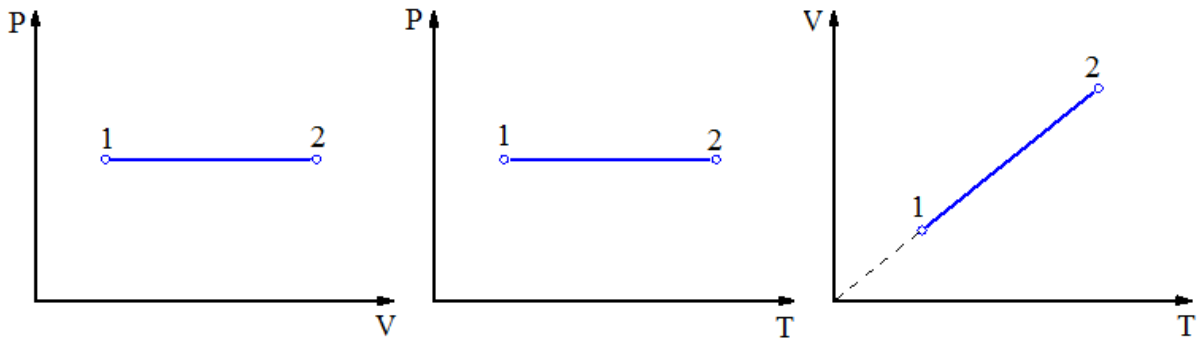


Рис. 5.2

Закон Шарля: тиск даної маси газу при сталому об'ємі змінюється лінійно з температурою:

$$p = p_0(1 + \alpha t) \quad (5.15)$$

де p_0 - тиск газу при 0°C .

Процес, який протікає при сталому об'ємі, називається **ізохорним**.

Ізохорний процес зображується графічно у різних осях координат:

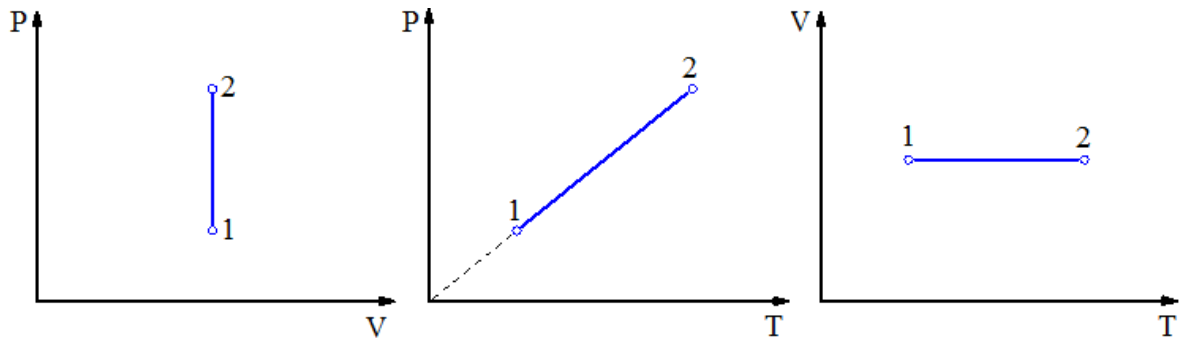


Рис. 5.3

Вводячи термодинамічну температуру $T = t + \frac{1}{\alpha}$, законам Гей – Люссака і

Шарля можна надати такий вигляд:

$$V = V_0(1 + \alpha t) = V_0 \left[1 + \alpha \left(T - \frac{1}{\alpha} \right) \right] = V_0 \alpha T ,$$

$$p = p_0(1 + \alpha t) = p_0 \left[1 + \alpha \left(T - \frac{1}{\alpha} \right) \right] = p_0 \alpha T$$

або у випадку ізобарного процесу

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{і} \quad \frac{V}{T} = \text{const} , \quad (5.16)$$

і ізохорного процесу

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{і} \quad \frac{p}{T} = \text{const.} \quad (5.17)$$

5.3 Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів. Середня кінетична енергія поступального руху одноатомної молекули та її зв'язок з температурою.

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії пов'язує параметри стану газу з характеристиками руху його молекул, тобто встановлює залежність між тиском і об'ємом газу та кінетичною енергією поступального руху його молекул.

Тиск газу в посудині є результатом зіткнення молекул газу із стінками посудини. Тиск газу є макроскопічним проявом руху молекул.

Розглянемо однорідний газ, який поміщений в посудину кубічної форми. Спрямуємо осі системи відліку вздовж ребер куба (рис. 5.4). Нехай певна молекула M рухається в посудині зі швидкістю \vec{v} . Швидкість \vec{v} можна розкласти на три складові вздовж координатних осей:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z.$$

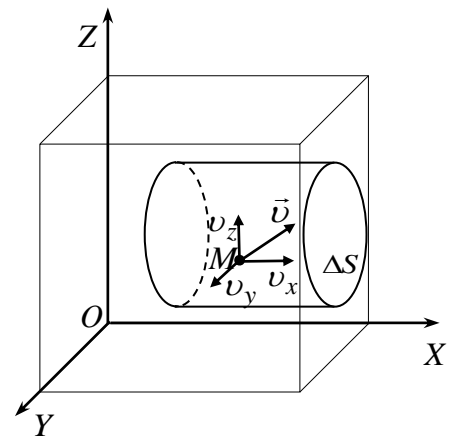


Рис. 5.4

Виділимо на стінці посудини елементарну площадку ΔS , яка перпендикулярна до осі OX . При кожному зіткненні молекула передає площадці імпульс $2m_0v_x$, де m_0 – маса молекули. За час Δt площадки досягнуть лише ті молекули, які знаходяться в об'ємі циліндра з основою ΔS і висотою $v_x \Delta t$. Кількість цих молекул дорівнює $n \Delta S v_x \Delta t$, де n – кількість молекул в одиниці об'єму газу. З них тільки половина потрапляє на площадку ΔS . Решта через повну безладність молекулярних рухів рухається не до стінки, а від неї. За час Δt об'єму ΔS вдаряються $N_x = \frac{1}{2} n \Delta S \Delta t v_x$ молекул газу.

Треба враховувати, що реально молекули рухаються до площадки ΔS під різними кутами і мають різні швидкості при кожному співударі. Для спрощення

розрахунків хаотичний рух молекул замінюють рухом вздовж трьох координатних осей, таким чином, щоб в кожний момент часу вздовж кожної осі рухається $\frac{1}{3}$ частина молекул. Таким чином, кількість ударів молекул, що рухаються вздовж однієї із осей в її позитивному напрямку, об площадку ΔS буде рівна $N'_x = \frac{1}{6} n \Delta S \Delta t v_x$.

Тоді при зіткненні ці молекули передадуть площадці ΔS імпульс:

$$\Delta P = 2m_0 v_x \frac{1}{6} n \Delta S \Delta t v_x = \frac{1}{3} m_0 v_x^2 n \Delta S \Delta t$$

Отже тиск газу на стінки посуду:

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta t \Delta S} = \frac{1}{3} m_0 n v_x^2 .$$

Оскільки швидкість молекул вздовж кожної з осей близькі за значенням (для великої кількості молекул швидкість рівноймовірно розподілена за всіма напрямками), то $v_x \approx v_y \approx v_z = v$.

Якщо в газі об'ємом V знаходиться N молекул, які мають швидкості $v_1, v_2, v_3 \dots v_N$ доцільно розглядати *середню квадратичну швидкість*:

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2} \quad (5.18)$$

В результаті тиск газу

$$p = \frac{1}{3} m_0 n \langle v_{кв} \rangle^2 . \quad (5.19)$$

Це рівняння називається *основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу*.

Отриману формулу перепишемо у вигляді:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_k \rangle , \quad (5.20)$$

де $\langle \varepsilon_k \rangle$ – середня кінетична енергія поступального руху однієї молекули газу.

Тиск ідеального газу дорівнює двом третинам середньої кінетичної енергії молекул одиниці об'єму газу

Оскільки густина газу

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Nm_0}{V} = nm_0,$$

то тиск ідеального газу

$$p = \frac{1}{3} \rho \langle v_{кв} \rangle^2.$$

Звідси

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}. \quad (5.21)$$

Ця формула показує, що середню квадратичну швидкість можна обчислити, користуючись даними вимірювань суто макроскопічних величин – тиску газу і його густини.

Враховуючи, що кінетична енергія поступального руху молекул газу $E_k = N \langle \varepsilon_k \rangle$, отримуємо

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle \varepsilon_k \rangle \quad \text{і} \quad pV = \frac{2}{3} E_k.$$

Це рівняння перепишемо таким чином:

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{1}{3} m \langle v_{кв} \rangle^2, \quad (5.22)$$

де $m = Nm_0$ – маса газу.

Для одного моля газу $m = \mu$ і $V = V_\mu$. Тоді

$$pV_\mu = \frac{1}{3} \mu \langle v_{кв} \rangle^2.$$

З іншого боку, за рівнянням Клапейрона – Менделєєва

$$pV_\mu = RT.$$

Отже,

$$RT = \frac{1}{3} \mu \langle v_{кв} \rangle^2 \quad \text{і} \quad \langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (5.23)$$

Оскільки

$$\mu = m_0 N_A, \quad R = k N_A,$$

де k - стала Больцмана, то

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \quad (5.24)$$

З рівняння Клапейрона – Менделєєва

$$p = \frac{RT}{V_\mu} = \frac{k N_A T}{V_\mu} = nkT. \quad (5.25)$$

Знайдемо вираз для середньої кінетичної енергії поступального руху молекули ідеального газу:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{E_k}{N} = \frac{m_0}{2} \langle v_{кв} \rangle^2.$$

Оскільки

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}},$$

то

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{m_0}{2} \frac{3kT}{m_0} = \frac{3}{2} kT. \quad (5.26)$$

Отже, середня кінетична енергія поступального руху молекул ідеального газу залежить тільки від його абсолютної температури, $\langle \varepsilon_k \rangle$ прямо пропорційна до T .

На рис. 5.5 зображено залежність $\langle \varepsilon_k \rangle$ від T . Якщо $T=0$, $\langle \varepsilon_k \rangle = 0$, тобто припиняється поступальний рух молекул газу, а отже, дорівнює нулю і його тиск.

Отже, **абсолютна температура** є мірою середньої кінетичної енергії поступального руху молекул.

Однак в області температур, близьких до абсолютного нуля, поведінка молекул описується не класичними законами, а законами квантової механіки.

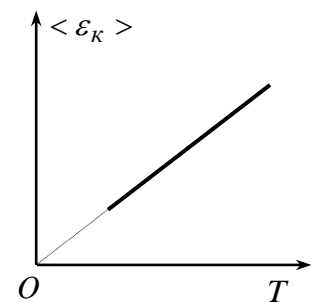


Рис. 5.5

5.4 Функції розподілу молекул за швидкостями Максвелла. Розподіл Больцмана.

За молекулярно-кінетичної теорії, як би не змінювалися швидкості молекул при зіткненнях, середня квадратична швидкість молекул масою то в газі, що знаходиться в стані рівноваги при, залишається постійною і рівною

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

Це пояснюється тим, що в газі, що знаходиться в стані рівноваги, встановлюється деякий стаціонарний, тобто такий, що не змінюється з часом, розподіл молекул за швидкостями, який підпорядковується статистичному закону.

Цей закон теоретично виведений Дж. Максвелом. Закон Максвела описується деякою функцією $f(v)$, яка називається функцією розподілу молекул за швидкостями. $f(v)$ - закон для розподілу молекул ідеального газу за швидкостями:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2 / (2kT)}.$$

Графік функції розподілу молекул за швидкостями наведений на рис. 5.6.

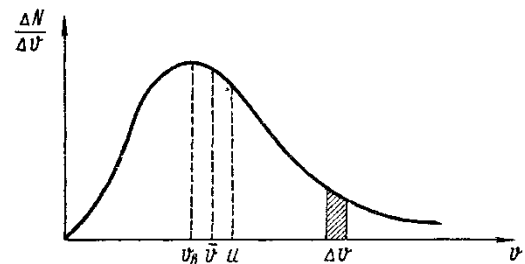


Рис. 5.6

Швидкість, при якій функція розподілу молекул ідеального газу за швидкостями максимальна, називається *найбільш вірогідною швидкістю*:

$$v_B = \sqrt{2kT / m_0} = \sqrt{2RT / \mu}.$$

З формули випливає, що при підвищенні температури максимум функції розподілу молекул за швидкостями (рис.4.6) зміститься вправо (значення найбільш вірогідною швидкості стає більше. Середня швидкість молекули $\langle v \rangle$ (середня арифметична швидкість)

$$\langle v \rangle = \sqrt{8kT / (\pi m_0)}.$$

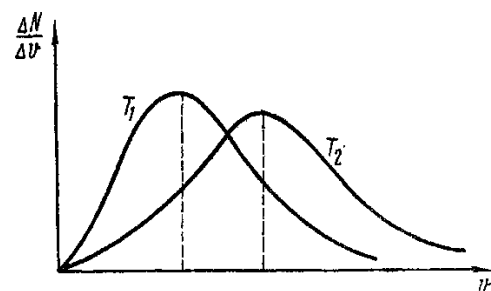


Рис. 5.7

Швидкості, що характеризують стан газу: 1) найбільш ймовірна $v_B = \sqrt{2kT / m_0} = \sqrt{2RT / \mu}$; 2) середня $\langle v \rangle = 1,13v_B$; 3) середня квадратична $\langle v_{кв} \rangle = 1,22v_B$. Виходячи з розподілу молекул за швидкостями газу можна знайти розподіл молекул за значеннями кінетичної енергії. Для цього перейдемо від змінної v до змінної $\varepsilon = mv_0^2 / 2$. Функція розподілу молекул по енергіях теплового руху

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/(kT)}.$$

При виведенні основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів і максвелівського розподілу молекул за швидкостями передбачалося, що на молекули газу зовнішні сили не діють, тому молекули рівномірно розподілені за об'ємом. Однак молекули будь-якого газу знаходяться в потенційному полі тяжіння Землі. Тяжіння, з одного боку, і тепловий рух молекул-з іншого, призводять до деякого стаціонарного стану газу, при якому тиск газу з висотою убуває. Виведемо закон зміни тиску з висотою, припускаючи, що поле тяжіння однорідно, температура постійна і маса всіх молекул однакова. Якщо атмосферний тиск на висоті h дорівнює p (рис. 5.8), то на висоті $h + dh$ воно дорівнює $p + dp$ (при $dh > 0$ $dp < 0$, так як тиск з висотою убуває).

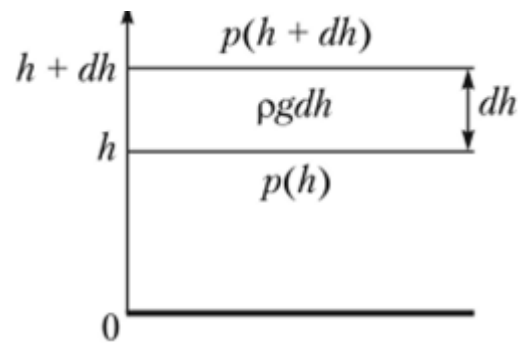


Рис. 5.8

Різниця тисків p і $p + dp$ дорівнює вазі газу, укладеного в об'ємі циліндра висотою dh з основою площею, що дорівнює одиниці площі

$$p - (p + dp) = \rho g dh, \text{ або } dp = -\rho g dh. \quad (5.27)$$

Скориставшись рівнянням стану ідеального газу знаходимо, що $\rho = m/V = p\mu/(RT)$. Підставивши цей вираз в (5.27), отримаємо

$$dp = -\frac{\mu g}{RT} p dh, \text{ або } \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh.$$

Зі зміною висоти від h_1 до h_2 тиск змінюється від p_1 до p_2 (рис. 5.8), тобто

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} \int_{h_1}^{h_2} dh, \quad \ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{\mu g}{RT} (h_2 - h_1), \text{ или } p_2 = p_1 e^{-\mu g (h_2 - h_1) / RT}. \quad (5.28)$$

Вираз (5.28) називається барометричною формулою. Вона дозволяє знайти атмосферний тиск залежно від висоти або, вимірявши тиск, знайти висоту. Так як висоти позначаються щодо рівня моря, де тиск вважається нормальним, то вираз (5.28) може бути записано у вигляді

$$p = p_0 e^{-\mu g h / (RT)}. \quad (5.29)$$

З формули випливає, що тиск з висотою убуває тим швидше, чим важче газ. Барометричну формулу (5.29) можна перетворити, якщо скористатися виразом $p = nkT$:

$$n = n_0 e^{-\mu g h / (RT)}.$$

Так як $\mu = m_0 N_A$, а $R = k N_A$, тоді

$$n = n_0 e^{-m_0 g h / (kT)},$$

де $E_p = m_0 g h$ - потенційна енергія молекули в полі тяжіння, тобто $n = n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}}$ - розподілом Больцмана в зовнішньому потенційному полі. З нього випливає, що при постійній температурі густина газу більше там, де менше потенційна енергія його молекул.

Тема 6 Перший закон термодинаміки

6.1 Число ступенів вільності й середня енергія багатоатомної молекули. Внутрішня енергія термодинамічної системи.

Довільна термодинамічна система складається з величезної кількості частинок, що рухаються і взаємодіють між собою, визначаючи її внутрішній стан. Енергію, що залежить від внутрішнього стану фізичної системи, називають внутрішньою енергією. У термодинаміці внутрішня енергія є однією з найважливіших величин, що характеризують рівноважний стан системи, і розглядається в загальному випадку як сума кінетичної енергії усіх видів руху частинок (молекули, атоми, електрони, протони, нейтрони тощо) та потенціальної енергії їхньої взаємодії. При цьому в поняття внутрішньої енергії не входить кінетична енергія руху системи як цілого і її потенціальна енергія в зовнішніх полях. Ці види енергії називають зовнішніми щодо термодинамічної системи.

Оскільки у термодинаміці і молекулярній фізиці в основному вивчають фізичні процеси, при яких не відбувається змін на атомарному і ядерному рівнях, то при розрахунках внутрішньої енергії не враховують внутрішньоатомну та внутрішньоядерну енергію. Під внутрішньою часто розуміють лише кінетичну енергію теплового руху молекул і атомів та потенціальну енергію їх взаємодії. Внутрішню енергію позначають U , а нескінченно малу зміну її - dU . Домовлено, що величина dU вважається додатною, якщо внутрішня енергія системи в термодинамічному процесі зростає, і від'ємною, якщо спадає.

Молекули ідеального газу не взаємодіють один з одним і, отже, не володіють потенційною енергією. Тому вся енергія молекул ідеального газу складається тільки з кінетичної енергії поступального і обертального рухів. Для врахування середньої кінетичної енергії обертального руху молекули необхідно ввести в розгляд поняття числа ступенів свободи тіла. Числом ступенів свободи тіла називається число незалежних координат визначають положення тіла в

просторі. Пояснимо дане визначення. Якщо тіло переміщається в просторі абсолютно довільно, то це переміщення завжди можна скласти з шести одночасних незалежних рухів: трьох поступальних (уздовж трьох осей прямокутної системи координат) і трьох обертальних (навколо трьох взаємно перпендикулярних осей, що проходять через центр ваги тіла) (рис. 6.1).

Іншими словами, положення тіла в просторі визначається в цьому випадку шістьма незалежними координатами: трьома лінійними (x, y, z) і трьома кутовими (α, β, γ). Отже, згідно з визначенням, число ступенів свободи довільно рухається в просторі тіла дорівнює шести (три поступальних і три обертальних ступеня свободи).

Якщо свобода руху тіла обмежена, то його число ступенів свободи менше шести. Наприклад,

тіло рухається тільки по площині, маючи при цьому можливість довільного обертання (котиться м'яч). Тоді число його ступенів

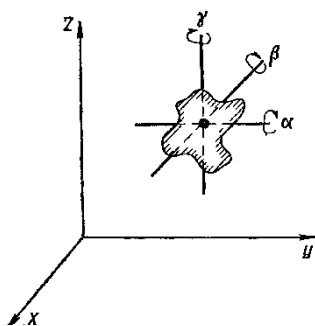


Рис. 6.1

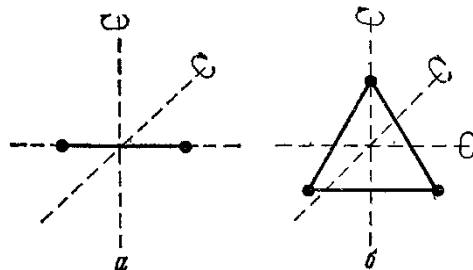


Рис. 6.2

свободи дорівнює п'яти (дві поступальних і три обертальних). Залізничний вагон має одну ступінь свободи (поступальну), так як він рухається тільки по лінії. Колесо вагона має два ступені свободи: одну поступальну (разом з вагоном) і одну обертальну (навколо горизонтальної осі). Зважаючи на повний хаотичний рух молекул всі види їх рухів (і поступальні, і обертальні) однаково можливі (різновірогідні). Тому на кожен ступінь свободи молекули припадає в середньому однакова кількість енергії (теорема Больцмана про рівномірний розподіл енергії за ступенями свободи). Оскільки молекули рухаються абсолютно довільно, вони повинні були б мати по шість ступенів свободи. Однак тут треба взяти до уваги таку обставину. Молекулу одноатомного газу

(наприклад, He) можна представити як матеріальну точку, обертання якої навколо власних осей не змінює її положення в просторі. Значить, для визначення положення одноатомної молекули досить задати тільки її лінійні координати. Тому одноатомній молекулі слід приписати число ступенів свободи, рівне трьом (поступальним). Молекулу двоатомних газу (наприклад, O_2) можна представити як сукупність двох матеріальних точок - атомів, жорстко зв'язаних між собою хімічними зв'язками (рис. 6.2 а). Обертання такої молекули навколо осі, що проходить через обидва атома, не міняє положення молекули в просторі. З фізичної ж точки зору енергія, що припадає на обертання молекули навколо осі, що проходить через атоми, близька до нуля. Тому двоатомній молекулі слід приписати п'ять ступенів свободи (три поступальних і дві обертальних). Що стосується трьохатомної молекули (рис. 6.2 б), то вона, очевидно, має всі шість ступенів свободи (три поступальних і три обертальних). Стільки ж ступенів свободи мають і інші багатоатомні молекули (чотирьохатомні, п'ятиатомні і т. д.). Для підрахунку середньої кінетичної енергії, що припадає на одну ступінь свободи молекули, скористаємося формулою

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = E / N = m_0 \langle v_{ке} \rangle^2 / 2 = 3 / 2 kT \quad , \quad (6.1)$$

так як ця енергія отримана для одноатомної молекули (як матеріальної точки), що має три ступені свободи, то на одну ступінь свободи молекули припадає енергія:

$$W_0 = \frac{\bar{W}}{3} = \frac{1}{2} kT .$$

Тоді, молекула, що має i ступенів свободи, володітиме повною кінетичною енергією:

$$W = \frac{i}{2} kT \quad (6.2).$$

Відповідно до формули (6.1), одноатомна молекула ($i = 3$) має повну енергію

$$W_1 = \frac{3}{2} kT, \quad \text{двохатомная молекула } (i = 5) \text{ має повну енергію } W_2 = \frac{5}{2} kT,$$

трьохатомна і багатоатомна молекули ($i = 6$) мають повну енергію

$W_3 = \frac{6}{2}kT = 3kT$. Тоді внутрішня енергія U деякої маси газу дорівнює:

$$U = NW = N \frac{i}{2} kT.$$

Враховуючи, що $k = R/N_A$, $\nu = N/N_A = m/\mu$, то вираз внутрішньої енергії U будь-якої маси m газу:

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT. \quad (6.3).$$

6.2 Робота, що виконується тілом коли відбуваються зміни його об'єму

Розглянемо газ у циліндрі з поршнем (рис. 6.3). Знайдемо нескінченно малу або *елементарну роботу* δA , виконану газом при нескінченно малому квазистатичному розширенні, у якому його об'єм збільшується на dV . Сила тиску газу на поршень дорівнює $F = pS$, де S – площа поршня. Якщо поршень переміститься на відстань dx , то газ виконає роботу $\delta A = F \cdot dx = pS \cdot dx$ або

$$\delta A = p \cdot dV, \quad (6.4)$$

тому що збільшення об'єму дорівнює $dV = S \cdot dx$.

Вираз (6.4) є справедливим й у загальному випадку квазистатичної зміни об'єму будь-якого тіла, що знаходиться під постійним зовнішнім тиском. Слід підкреслити, що величина (6.4) є алгебраїчною. При розширенні тіла збільшення об'єму dV є додатним, відповідно додатна й δA . При стисненні тіла dV є від'ємним, відповідно від'ємна й δA .

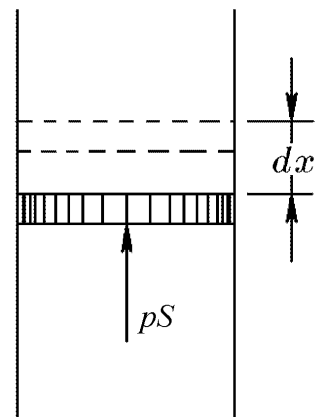


Рис. 6.3

Формула (6.4) визначає елементарну роботу, виконану газом при нескінченно малому збільшенні об'єму. Робота, виконана при скінченних змінах об'єму, обчислюється шляхом підсумовування елементарних робіт, тобто шляхом інтегрування:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV, \quad (6.5)$$

де A_{12} – робота, виконана тілом при квазистатичній зміні об'єму тіла від значення V_1 до значення V_2 . Зазначимо, що таке обчислення можливе тільки тоді, коли тиск є певною функцією об'єму V . Тим часом, відповідно до рівняння стану, p залежить не тільки від об'єму V , але й від температури T . Змінюючи неоднаково в ході процесу температуру, можна квазистатично перевести систему з початкового стану в кінцевий різними способами. Кожному із цих способів відповідає своя функція $p = p(V)$ і своє значення інтеграла у формулі (6.5). Таким чином, *робота A не визначається початковим й кінцевим станами системи. Її величина залежить також і від способу або шляху переходу системи з початкового стану в кінцевий.* Про величини такого роду говорять, що вони *не є функціями стану*. Навпаки, величини, що мають цілком певні значення в кожному стані системи, називаються *функціями стану*. Функціями стану є, наприклад, температура системи при термодинамічній рівновазі, внутрішня енергія. Саме тому елементарну роботу позначають через δA , тоді як, наприклад, елементарну зміну внутрішньої енергії позначають через dU .

Квазистатичний процес зміни об'єму тіла можна зобразити на діаграмі p, V (рис. 6.4). Тоді робота, яка виконується тілом при зміні його об'єму від значення V_1 до значення V_2 буде чисельно дорівнювати площі фігури, яка обмежена віссю V , кривою $p = f(V)$ і прямими V_1 й V_2 .

З рис. 6.5 випливає, що робота, яка виконується при квазистатичному круговому процесі, чисельно дорівнює площі, яка охоплюється кривою, що зображує цикл, узятій зі знаком плюс, коли обхід по кривій відбувається за годинниковою

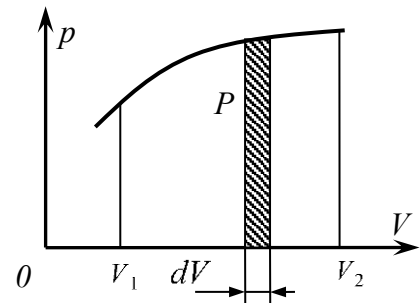


Рис. 6.4 Елементарна робота $\delta A = p \cdot dV$ чисельно дорівнює площі заштрихованої смужки

стрілкою, і зі знаком мінус, коли обхід по кривій відбувається проти годинникової стрілки.

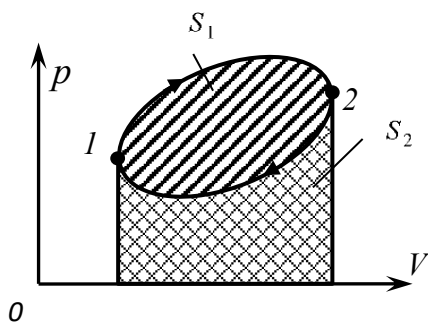


Рис. 6.5 Робота A_{12} на ділянці 1–2 чисельно дорівнює площі S_1 , заштрихованій лініями, які нахилені вправо, взятої зі знаком плюс ($A_{12} > 0$). Робота A_{21} на ділянці 2–1 чисельно дорівнює площі S_2 , заштрихованої лініями, нахиленими вліво, взятої зі знаком мінус ($A_{21} < 0$). Робота за цикл дорівнює $A_{12} + A_{21} = S_1 - S_2 > 0$, тобто чисельно дорівнює площі циклу. При зворотному напрямку циклу знаки робіт змінюються на зворотні

6.3 Кількість теплоти. Перший закон термодинаміки.

Велика кількість експериментів свідчить про те, що внутрішню енергію можна змінити лише двома шляхами: 1) виконанням над тілом роботи, 2) передачею тілу теплоти. *Теплопередачею* називають сукупність мікроскопічних процесів, які не пов'язані з макроскопічною роботою, що виконується над газом, і які приводять до передачі енергії від одного тіла до іншого. *Кількістю теплоти* (позначають буквою Q) називають енергію, яка передається від одного тіла до іншого шляхом теплопередачі. Фізична природа теплопередачі полягає у тому, що окремі молекули більш нагрітого тіла передають частину своєї енергії хаотичного руху молекулам менш нагрітого тіла шляхом зіткнень. При цьому макроскопічна робота, яка пов'язана зі зміною зовнішніх макроскопічних параметрів, не виконується.

Розглянемо тіло, яке взаємодіє з іншими тілами. У результаті взаємодії змінюється внутрішня енергія тіла $U_2 - U_1$. При цьому від зовнішнього середовища тілу було передано деяку кількість теплоти Q та над ним була виконана робота A' . Використовуючи закон збереження енергії, можемо записати

$$U_2 - U_1 = Q + A'. \quad (6.6)$$

Зрозуміло, що виходячи з визначення роботи та 3-го закону Ньютона, робота A , яку тіло виконує над зовнішнім середовищем, пов'язана з роботою A' , яку виконує зовнішнє середовище над тілом, таким чином

$$A' = -A.$$

Підставляємо це співвідношення в (6.6) і отримуємо

$$Q = U_2 - U_1 + A. \quad (6.7)$$

Це рівняння і дає математичне *формулювання першого закону термодинаміки*: тепло Q , яке передається системі, використовується на приріст внутрішньої енергії $\Delta U = U_2 - U_1$ та на виконання самою системою роботи проти зовнішніх сил A .

Перший закон термодинаміки часто записують для змін стану системи, яка викликана передачею їй малої теплоти δQ , виконанням системою малої роботи δA , внаслідок чого відбулася мала зміна внутрішньої енергії dU

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (6.8)$$

Відмінність у записі δA , δQ та dU носять не формальний характер, а виражають глибокі фізичні відмінності цих величин. Так внутрішня енергія є функцією стану системи. Це означає, що незалежно від попередньої історії системи її енергія в даному стані має визначені йому значення. Тому збільшення внутрішньої енергії при переході системи з одного стану в інший завжди дорівнює різниці значень внутрішньої енергії в кінцевому й початковому станах незалежно від шляху (процесу), за яким відбувався перехід системи з одного стану в інший. Таким чином, у випадку довільного кругового процесу, в результаті якого система повертається у вихідний стан, повна зміна внутрішньої енергії дорівнює різниці внутрішніх енергій початкового і кінцевого станів, які у цьому разі збігаються між собою, і тому дорівнює нулю. Тобто

$$\oint dU = U_2 - U_1 = 0. \quad (6.9)$$

На відміну від внутрішньої енергії кількість теплоти та робота не є функціями стану, тобто залежать від шляху (процесу), за яким відбувається перехід системи з одного стану в інший. Тому кількість теплоти, яка передається тілу та робота, яка виконується тілом, для кругового процесу у загальному випадку не будуть дорівнювати нулю

$$\oint \delta Q \neq 0, \quad \oint \delta A \neq 0. \quad (6.10)$$

Застосуємо рівняння (6.8) для аналізу довільного кругового процесу, врахуємо (6.9) та (6.10) й отримаємо

$$\oint \delta Q = \oint \delta A. \quad (6.11)$$

Співвідношення (6.11) виражає *ще одне формулювання першого закону термодинаміки*: неможливе існування вічного двигуна першого роду, тобто такого періодично працюючого двигуна, який би виконував роботу у більшій кількості, ніж отримувана енергія із зовнішнього середовища.

6.4 Теплоємність. Питома й молярна теплоємність. Теплоємність в умовах сталого тиску й об'єму. Внутрішня енергія ідеального газу. Рівняння Майєра.

Теплоємністю тіла називається величина, що дорівнює кількості теплоти, яку потрібно передати тілу, щоб підвищити його температуру на один градус Кельвіна. Тобто

$$C_{\text{тіла}} = \delta Q / dT,$$

де δQ – кількість теплоти, передача якої підвищує температуру тіла на dT . Теплоємність тіла вимірюється в джоулях на кельвін (Дж/К).

Питомою теплоємністю називають теплоємність одиниці маси речовини

$$c = C_{\text{тіла}} / m,$$

де m – маса тіла. Вимірюється вона в джоулях на кілограм-кельвін (Дж/(кг·К)).

Молярною теплоємністю називають теплоємність моля речовини.

$$C = C_{mola} / \mu,$$

де μ – кількість молів речовини тіла. Вимірюється вона в джоулях на моль-кельвін (Дж/(моль·К)).

Питома й молярна теплоємності пов'язані співвідношенням

$$c = C \cdot \mu / m. \quad (6.12)$$

Теплоємність залежить від умов, при яких відбувається нагрівання тіла. Найбільш цікавими є теплоємності для випадків, коли нагрівання виконується при сталому об'ємі або при сталому тиску. У першому випадку ми маємо справу з *теплоємністю при сталому об'ємі* (позначається C_V), у другому – з *теплоємністю при сталому тиску* (C_p).

З'ясуємо зв'язок між внутрішньою енергією та теплоємністю газу. Якщо нагрівання має місце при сталому об'ємі, то тіло не виконує роботу над зовнішніми тілами й, отже, уся теплота йде на збільшення внутрішньої енергії тіла: $\delta Q_V = dU$ (див. формулу першого закону термодинаміки; індекс V біля Q підкреслює ту обставину, що теплота передається в умовах, коли об'єм тіла не змінюється). Звідси випливає, що молярна теплоємність будь-якої речовини при сталому об'ємі дорівнює

$$C_V = \frac{dU_\mu}{dT} \quad (V = const). \quad (6.13)$$

У термодинаміці подібні вирази прийнято записувати у вигляді

$$C_V = \left(\frac{\partial U_\mu}{\partial T} \right)_V. \quad (6.14)$$

Символ частинної похідної з індексом V вказує на те, що при диференціюванні функції U_μ за змінною T об'єм вважається сталим.

Дослідним шляхом встановлено, що в газах, які близькі за своїми властивостями до ідеального газу, теплоємність при сталому об'ємі в широких

температурних інтервалах практично не залежить від температури: $C_V = const$.

Тоді відповідно до формули (6.13)

$$dU_\mu = C_V dT.$$

Інтегруємо це співвідношення і знаходимо вираз для внутрішньої енергії одного моля ідеального газу

$$U_\mu = \int C_V dT = C_V T + const$$

(ми врахували, що $C_V = const$). Відомо, що внутрішня енергія визначається з точністю до довільної адитивної сталої. Тому константу у виразі для U_μ можна взяти як таку, що дорівнює нулю. У результаті отримуємо

$$U_\mu = C_V T. \quad (6.15)$$

Внутрішня енергія – величина адитивна. Тоді внутрішня енергія маси газу m буде дорівнювати

$$U = \frac{m}{\mu} C_V T. \quad (6.16)$$

Таким чином, отримали співвідношення (6.16) для внутрішньої енергії ідеального газу.

Знайдемо зв'язок між теплоємностями C_p та C_V . Для цього використаємо рівняння першого закону термодинаміки для моля газу. Візьмемо до уваги, що $\delta A = p dV_\mu$. Будемо розглядати процес, коли теплота передається газу при сталому тиску:

$$\delta Q_p = dU_\mu + p dV_\mu$$

(V_μ – об'єм моля; індекс p біля Q вказує на те, що теплота передається газу в умовах, коли тиск залишається сталим). Розділивши цей вираз на збільшення

температури dT , яке має місце через передачу газу теплоти δQ_p , прийдемо до формули для молярної теплоємності газу при сталому тиску:

$$C_p = \frac{dU_\mu}{dT} + p \frac{dV_\mu}{dT} \quad (p = \text{const}).$$

Відповідно до формули (6.2) доданок dU_μ/dT дорівнює молярній теплоємності при сталому об'ємі. Урахувавши це, прийдемо до співвідношення

$$C_p = C_V + p \left(\frac{\partial V_\mu}{\partial T} \right)_p. \quad (6.17)$$

Ми не робили ніяких припущень про властивості газу, тому формула (6.17) справедлива для будь-яких газів. Тепер припустимо, що газ ідеальний. Відповідно до рівняння стану ідеального газу (рівняння Менделєєва-Клапейрона) $V_\mu = RT/p$. Диференціюємо цей вираз за величиною T в припущенні, що $p = \text{const}$, й отримаємо

$$\left(\frac{\partial V_\mu}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p}. \quad (6.18)$$

Підстановка цього значення похідної в (6.17) приводить до співвідношення

$$C_p = C_V + R. \quad (6.19)$$

Таким чином, отримали важливе співвідношення між C_p та C_V (6.19), яке називається **рівнянням Майєра**. Підкреслимо, що співвідношення (6.19) справедливе тільки для ідеального газу.

Експериментально більш зручно визначати не C_p та C_V , а їх відношення

$$\gamma = C_p / C_V. \quad (6.20)$$

Відношення (6.20) являє собою характерну для кожного газу величину і називається **сталою адіабати**. Далі ми встановимо, що значення γ визначається числом і характером ступенів вільності молекул.

Знайдемо вираз для внутрішньої енергії через сталу адіабати. Відповідно до рівняння Майєра (6.19)

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v}, \quad (6.21)$$

звідки

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1}. \quad (6.22)$$

Підставивши цей вираз для C_v в (6.16), отримаємо для внутрішньої енергії ідеального газу формулу

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{\gamma - 1}. \quad (6.23)$$

Врахуємо, що у відповідності до рівняння Менделєєва-Клапейрона $(m/\mu)RT = pV$ прийдемо до ще одного виразу для внутрішньої енергії довільної маси ідеального газу:

$$U = \frac{1}{\gamma - 1} pV. \quad (6.24)$$

6.5 Рівняння адіабати ідеального газу. Політропічні процеси. Показник політропи. Рівняння політропи.

Процес, що протікає без теплообміну із зовнішнім середовищем, називається *адіабатичним* ($\delta Q = 0$).

Знайдемо рівняння адіабатичного (адіабатного) процесу, або рівняння адіабати. Для цього використаємо рівняння стану (5.8) та перший закон термодинаміки.

Згідно першого закону термодинаміки

$$\delta Q = d\left(\frac{m}{\mu} C_v T\right) + pdV = 0 \text{ або } pdV = -\frac{m}{\mu} C_v dT. \quad (6.25)$$

У цьому рівнянні використали, що внутрішня енергія ідеального газу визначається формулою $(m/\mu)C_V T$, елементарну роботу записали у вигляді $\delta A = p dV$. Для адіабатичного процесу, як це впливає з визначення цього процесу, теплообмін із зовнішнім середовищем відсутній $\delta Q = 0$.

Далі візьмемо диференціал від обох частин рівняння стану (5.8) й прийдемо до рівності

$$p dV + V dp = \frac{m}{\mu} R dT. \quad (6.26)$$

Виключимо з системи рівнянь (6.25) та (6.26) dT . Для цього помножимо друге рівняння (6.25) на відношення R/C_V й складемо його з рівнянням (6.26). У результаті отримаємо

$$\gamma p dV + V dp = 0, \quad (6.27)$$

де $\gamma = 1 + R/C_V = C_p/C_V$ (див. визначення сталої адіабати). Потім розділимо (6.27) на добуток pV :

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0. \quad (6.28)$$

Далі виконуємо очевидні перетворення

$$\gamma \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}, \quad \gamma \int \frac{dV}{V} = -\int \frac{dp}{p}, \quad \gamma \ln(V) = -\ln(p) + \ln(const), \quad \ln(V^\gamma) + \ln(p) = \ln(const).$$

Звідси випливає, що

$$pV^\gamma = const. \quad (6.29)$$

Ми отримали рівняння (6.29) адіабати ідеального газу в змінних p й V . Це рівняння називають **рівнянням Пуассона**.

Якщо написати рівняння (6.29) у вигляді $pV \cdot V^{\gamma-1} = const$ й замінити pV відповідно до (5.8) через $(m/\mu)RT$ прийдемо до рівняння адіабати ідеального газу у змінних T й V :

$$TV^{\gamma-1} = const \quad (6.30)$$

(сталі m , μ й R ми включили в константу; отже, константи у формулах (6.30) і (6.31) мають неоднакове значення).

Аналогічно, коли відповідно рівнянню стану $V = (m/\mu)RT/p$ замінити об'єм V у виразі (6.30), то отримаємо рівняння адіабати у змінних T та p :

$$T^\gamma / p^{\gamma-1} = const \text{ або } p^{\gamma-1} / T^\gamma = const . \quad (6.31)$$

Політропічними (політропними) називаються процеси, у ході яких теплоємність тіла C залишається сталою. Отже, при політропічному процесі газ, крім рівняння стану, підкоряється додатковій умові

$$C = const . \quad (6.32)$$

Знайдемо рівняння політропи для ідеального газу. Для цього використаємо рівняння стану та перший закон термодинаміки.

У відповідності до першого закону термодинаміки маємо

$$\delta Q = d\left(\frac{m}{\mu}C_V T\right) + pdV .$$

Використовуючи визначення молярної теплоємності газу можемо записати, що $\delta Q = (m/\mu)CdT$. Тоді перший закон термодинаміки набере вигляду

$$\frac{m}{\mu}CdT = \frac{m}{\mu}C_V dT + pdV \text{ або } \frac{m}{\mu}RdT \cdot (C - C_V) = RpdV . \quad (6.33)$$

З рівняння стану (Менделєєва-Клапейрона $pV = (m/\mu)RT$) випливає, що

$$\frac{m}{\mu}RdT = pdV + Vdp . \quad (6.34)$$

Помножимо рівняння (6.34) на $(C - C_V)$ і за допомогою його виключимо з останнього рівняння (6.33) доданок з dT . у результаті отримаємо

$$(C - C_V)(pdV + Vdp) = RpdV ,$$

звідки

$$(C - C_V - R)p dV + (C - C_V)V dp = 0.$$

Розділимо це рівняння на pV й врахуємо, що $C_V + R = C_p$. У підсумку отримаємо

$$(C - C_p) \frac{dV}{V} + (C - C_V) \frac{dp}{p} = 0. \quad (6.35)$$

Уведемо величину

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}, \quad (6.36)$$

яка називається *показником політропи*. Тоді рівнянню (6.36) можна надати вигляду

$$n \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \quad \text{або} \quad n \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}. \quad (6.37)$$

Інтегруємо праву й ліву частини останнього рівняння (6.37) аналогічно, як і у випадку адіабатичного процесу й отримуємо:

$$pV^n = const. \quad (6.38)$$

Рівняння (6.38) і є *рівнянням політропи* ідеального газу в змінних p й V .

Аналогічно, як і у випадку адіабатичного процесу, використовуючи рівняння стану, отримуємо рівняння політропи в змінних T й V :

$$TV^{n-1} = const, \quad (6.39)$$

та рівняння політропи у змінних T та p :

$$T^n / p^{n-1} = const \quad \text{або} \quad p^{n-1} / T^n = const. \quad (6.40)$$

Ізотермічний, ізохоричний, ізобаричний, адіабатичний процеси можна вважати політропічними процесами з відповідним показником політропи. При цьому рівняння політропи для цих процесів переходять у відповідні рівняння ізопроцесів. Покажемо це.

У випадку ізобаричного процесу молярна теплоємність газу

$$C = C_p.$$

Для цього процесу показник політропи, як це впливає з співвідношення (6.36), дорівнює

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_v} = \frac{C_p - C_p}{C_p - C_v} = 0.$$

При цьому рівняння політропи (6.38) переходить у рівняння ізобари

$$pV^n = pV^0 = p = \text{const}.$$

У випадку ізохоричного процесу молярна теплоємність газу

$$C = C_v.$$

Для цього процесу показник політропи, як це впливає з співвідношення (6.36), дорівнює

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_v} = \frac{C_v - C_p}{C_v - C_v} = -\infty.$$

При цьому рівняння політропи (6.38) переходить у рівняння ізохори

$$(pV^n)^{1/n} = p^{1/n}V = p^{1/(-\infty)}V = p^0V = V = \text{const}.$$

У випадку ізотермічного процесу молярна теплоємність газу

$$C_T = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{\delta Q}{0} = \infty.$$

Це узгоджується з тим, що передача тілу кількості теплоти $\delta Q \neq 0$ не приводить до зміни температури: $dT = 0$. Показник політропи для цього процесу буде дорівнювати

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_v} = \frac{\infty - C_p}{\infty - C_v} = \frac{\infty}{\infty} = 1.$$

При цьому рівняння політропи (6.47a) переходить у рівняння ізотерми

$$TV^{n-1} = TV^{1-1} = TV^0 = T = \text{const}.$$

У випадку адіабатичного процесу молярна теплоємність газу

$$C_Q = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{0}{dT} = 0.$$

Це узгоджується з тим, що адіабатичний процес, за визначенням, протікає без теплопередачі ($\delta Q = 0$). Для цього процесу показник політропи, як це випливає з співвідношення (6.36), дорівнює

$$n = \frac{0 - C_p}{0 - C_v} = \frac{C_p}{C_v} = \gamma.$$

При цьому рівняння політропи (6.38) переходить у рівняння адіабати

$$pV^n = pV^\gamma = \text{const}.$$

6.6 Робота, що виконується газом під час ізопроцесів.

Знайдемо роботу, яку виконує газ при ізотермічному, ізобаричному, ізохоричному та адіабатичному процесах. Для цього використаємо співвідношення, яке визначає роботу при будь-якому процесу

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV, \quad (6.41)$$

де V_1 й V_2 – об'єм газу в початковому й кінцевому станах. Далі знайдемо, як у кожному з різних ізопроцесів тиск залежить від об'єму $p = p(V)$, обчислимо інтеграл (6.41) і знайдемо шукану роботу.

Розглянемо ізохоричний процес. У цьому разі $V_1 = V_2$, $dV = 0$ й інтеграл (6.41) дорівнює нулю. Таким чином, для ізохоричного процесу $A = 0$. Це справедливо не тільки для ідеального газу, але й взагалі для всякого тіла.

Розглянемо ізобаричний процес. Тут тиск p залишається сталим. Тому його можна винести у формулі (6.41) за знак інтеграла. У результаті отримуємо для ізобаричного процесу

$$A_{12} = p(V_2 - V_1). \quad (6.42)$$

Розглянемо ізотермічний процес. У цьому випадку знайдемо залежність тиску від об'єму за допомогою рівняння Менделєєва-Клапейрона $p = (m/\mu)RT/V$. Підставивши цю функцію у формулу (6.41) і взявши до уваги, що при ізотермічному процесі $T = \text{const}$, знаходимо

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln(V_2/V_1).$$

Таким чином, робота, яка виконується ідеальним газом при ізотермічному процесі, визначається формулою

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT \ln(V_2/V_1). \quad (6.43)$$

Розглянемо адіабатичний процес. Роботу, яка виконується газом при адіабатичному процесі, можна знайти декількома способами. У першому способі можна за допомогою рівняння адіабати знайти залежність тиску від об'єму ($pV^\gamma = p_1V_1^\gamma$, $p = p_1V_1^\gamma/V^\gamma$), підставити цю залежність в (6.41) і знайти шукану роботу A_{12} . У другому способі використаємо перший закон термодинаміки, візьмемо до уваги, що для адіабатичного процесу $Q = 0$. Тоді

$$\delta A = -dU \quad (6.44)$$

або

$$A_{12} = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2.$$

Підставивши вираз для внутрішньої енергії U в цю формулу, знаходимо роботу ідеального газу при адіабатичному процесі

$$A_{12} = \frac{1}{\gamma-1} (p_1V_1 - p_2V_2) = \frac{p_1V_1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{p_2V_2}{p_1V_1} \right).$$

Напишемо цю формулу у вигляді

$$A_{12} = \frac{p_1V_1}{\gamma-1} \left[1 - \frac{p_2V_2^\gamma}{p_1V_1^\gamma} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Використаємо рівняння Пуассона для адіабатичного процесу $p_2V_2^\gamma = p_1V_1^\gamma$.

Тоді остаточно

$$A_{12} = \frac{p_1V_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (6.45)$$

З рівняння стану випливає, що $p_1 V_1 = (m/\mu)RT_1$. Зробивши таку заміну, отримаємо ще один вираз для роботи, яка виконується ідеальним газом при адіабатичному процесі:

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]. \quad (6.46)$$

Розглянемо політропічний процес. Через те, що формули політропічного процесу подібні формулам для адіабатичного процесу, в яких потрібно стали адіабати γ замінити на стали політропи n , то формули для роботи при політропічному процесі можемо отримати з (6.45) і (6.46), в яких замінимо γ на n .

Тема 7 Другий закон термодинаміки

7.1 Другий закон термодинаміки. Оборотні і необоротні процеси. Цикл Карно.

Тепловою машиною (двигуном) називається періодично працюючий двигун, який виконує роботу за рахунок теплоти, що надходить до нього ззовні. Довільна тепла машина складається з трьох складових частин (рис. 7.1): робочого тіла, нагрівача та холодильника. Працює тепла машина таким чином. Для визначеності будемо вважати, що робочим тілом є газ, який знаходиться в циліндрі з поршнем. Будемо вважати, що початковий стан робочого тіла на діаграмі VP зображується точкою 1 (рис. 7.2). Приведемо робоче тіло в тепловий контакт із **нагрівачем**, тобто тілом, температура якого вище температури газу в циліндрі. Газ буде нагріватися й розширюватися – цей процес зображений кривою $1a2$. Робоче тіло отримує від нагрівача теплоту Q й виконає додатну роботу A_1 . Згідно першого закону термодинаміки можемо записати



Рис. 7.1

$$Q_1 = U_2 - U_1 + A_1. \quad (7.1)$$

Тепер треба повернути робоче тіло у вихідне положення (теплова машина – періодично діючий механізм), тобто стиснути газ. Це треба зробити так, щоб робота A_2 , яка витрачається на стиснення, була меншою за A_1 . З цією метою приведемо робоче тіло в тепловий контакт із **холодильником**, тобто тілом, температура якого нижче температури газу в циліндрі, і стиснемо газ по шляху $2b1$. У результаті газ повернеться у вихідний стан 1. При цьому він віддасть холодильнику кількість теплоти Q_2 . Згідно першого закону термодинаміки

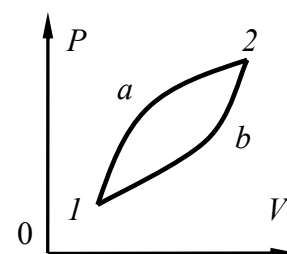


Рис. 7.2

$$-Q_2 = U_1 - U_2 - A_2. \quad (7.2)$$

Звідси, використовуючи (7.1), отримуємо

$$Q_1 - Q_2 = A_1 - A_2. \quad (7.3)$$

Таким чином, теплова машина виконала круговий процес, у результаті якого нагрівач віддав кількість теплоти Q_1 , холодильник отримав кількість теплоти Q_2 , $Q = Q_1 - Q_2$ пішло на виконання роботи $A = A_1 - A_2$. Відношення

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (7.4)$$

називається коефіцієнтом, або коефіцієнтом корисної дії (ККД) теплової машини. Зрозуміло, що коефіцієнт корисної дії теплової машини, як це випливає з визначення, не може перевищувати одиниці.

Виникає питання, чи не можна побудувати періодично діючу теплову машину без холодильника, тобто зробити так, щоб $Q_2 = 0$ і, отже, $\eta = 1$? Така машина могла б перетворювати в роботу всю теплоту, взяту від теплового резервуара. Можливість її побудови не суперечить закону збереження енергії. За своїм практичним значенням вона майже не поступалася б вічному двигуну першого роду, тому що за її допомогою можна було б виконувати роботу за рахунок практично невичерпних запасів внутрішньої енергії, які мають океани і моря, повітряна атмосфера й надра Землі. Таку машину Вільгельм Оствальд (1853–1932) назвав вічним двигуном другого роду на відміну від вічного двигуна першого роду, тобто двигуна, що виконує роботу з нічого, можливість якого заперечується законом збереження енергії.

Дослідні факти говорять проти можливості побудови вічного двигуна другого роду. Тому неможливість побудови такого вічного двигуна була введена у постулат. Цей постулат називається другим законом термодинаміки. Вільям Томсон в 1851 р. дав таке формулювання другого закону термодинаміки: «Неможливий круговий процес, єдиним результатом якого було б виконання роботи за рахунок зменшення внутрішньої енергії теплового резервуара». Клаузіус у 1850 р. висунув таке положення: «Теплота не може самочинно переходити від менш нагрітого тіла до більше нагрітого тіла».

Якщо в результаті деякого процесу система переходить зі стану A в інший стан B і якщо можливо повернути її хоча б одним способом у вихідний стан A і притому так, щоб у всіх інших тілах не відбулося ніяких змін, то цей процес називається **оборотним**. Якщо ж це зробити неможливо, то процес називається **необоротним**. Прикладом необоротного процесу може служити перехід теплоти від більше нагрітого тіла до тіла менш нагрітого під час теплового контакту цих тіл. Необоротність такого процесу впливає безпосередньо з другого закону термодинаміки у формулюванні Клаузіуса. Необоротним є і процес отримання теплоти шляхом тертя. Прикладом оборотного процесу є довільний квазістатичний процес.

Циклом Карно називають круговий процес, який складається з двох ізотерм та двох адіабат (рис. 7.3). У цьому квазістатичному процесі систему можна приводити у тепловий контакт із двома тепловими резервуарами, які мають сталі температури T_1 й T_2 . Надалі будемо вважати, що $T_1 > T_2$. Тепловий резервуар з більш високою температурою T_1 є нагрівачем, а з більш

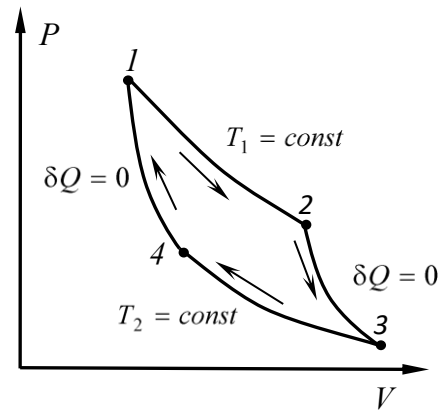


Рис. 7.3

низькою температурою T_2 – холодильником. Цикл Карно виконується таким чином. Спочатку система приводиться в тепловий контакт із нагрівачем, температура якого дорівнює T_1 . Далі, нескінченно повільно зменшуючи зовнішній тиск, відбувається ізотермічне розширення 1–2 (рис. 7.3). При цьому система отримує теплоту Q_1 від нагрівача й виконує додатну роботу A_{12} . Після цього систему адіабатично ізолюють і змушують квазістатично розширюватися по адіабаті 2-3 поки її температура не стане дорівнювати температурі холодильника T_2 . При адіабатичному розширенні система також виконує деяку роботу додатну A_{23} . У стані 3 систему приводять у тепловий контакт із холодильником і ізотермічно стискають її до деякого стану 4. При цьому над

системою виконується робота (тобто сама система виконує від'ємну роботу A_{34}), і вона віддає холодильнику деяку кількість теплоти Q_2 . Стан 4 вибирається так, щоб можна було квазістатичним стисненням по адіабаті 1–4 повернути систему у вихідний стан 1. Для цього потрібно над системою виконати роботу (тобто сама система повинна виконати від'ємну роботу A_{41}).

Особливість циклу Карно полягає у тому, що він є оборотним циклом. Це означає, що коли ми будемо виконувати його в оберненому напрямку, то холодильник віддасть теплоту $Q'_2 = Q_2$, а нагрівач отримає теплоту $Q'_1 = Q_1$. Використовуючи те, що цикл Карно є оборотним, й другий закон термодинаміки, можна довести першу і другу теореми Карно.

Перша теорема Карно: коефіцієнт корисної дії теплової машини, яка працює за циклом Карно, залежить тільки від температур T_1 і T_2 нагрівача й холодильника, і не залежить від будови машини, а також від виду робочої речовини. Можна отримати формулу для коефіцієнта корисної дії циклу Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (7.5)$$

Друга теорема Карно: коефіцієнт корисної дії будь-якої теплової машини не може бути більшим за коефіцієнт корисної дії ідеальної теплової машини, що працює за циклом Карно з тими самими температурами нагрівача та холодильника

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (7.6)$$

7.2 Нерівність і рівність Клаузіуса. Ентропія.

З першої та другої теореми Карно випливає цікавий наслідок. Розглянемо частинний випадок теплової машини, під час роботи якої робоче тіло отримує від нагрівача з температурою T_1 кількість теплоти Q_1 і це ж робоче тіло віддає холодильнику з температурою T_2 кількість теплоти Q_2 . Відповідно до другої

теореми Карно, коефіцієнт корисної дії будь-якої теплової машини не може бути більшим за коефіцієнт корисної дії ідеальної теплової машини, яка працює за циклом Карно з тими самими температурами нагрівача та холодильника. Тому можемо записати

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (7.7)$$

Співвідношення (7.7) можна перетворити

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad \text{або} \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (7.8)$$

Далі не будемо розрізняти, який тепловий резервуар є нагрівачем, а який – холодильником. Кількість теплоти, яка віддається тепловим резервуаром, будемо вважати додатною, кількість теплоти, яка передається тепловому резервуару – від’ємною. Завдяки цьому остання формула (7.7) набуває симетричного вигляду

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (7.9)$$

Можна провести узагальнення формули (7.9) на будь-який круговий тепловий процес. Виділимо малу ділянку такого процесу. Позначимо через δQ кількість теплоти, яка була передана робочому тілу на цій ділянці. Температуру резервуару на цій ділянці позначимо через T . Тоді відповідно з (7.9) сума відношень $\delta Q/T$ на всіх ділянках кругового процесу повинна бути додатною

$$\sum_i \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_i \leq 0.$$

Виходячи з визначення інтеграла, цю нерівність можна записати у вигляді

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0. \quad (7.10)$$

Нерівність (7.10), яка є вірною для будь-якого кругового процесу, отримала назву **нерівність Клаузіуса**.

Кількість теплоти, що отримується системою, і яка поділена на абсолютну температуру T , при якій ця теплота була отримана, іноді називають **приведеною кількістю теплоти**. Величина $\delta Q/T$ є елементарною приведеною кількістю

теплоти, що отримується в нескінченно малому процесі, а інтеграл $\int \frac{\delta Q}{T}$ можна назвати приведеною кількістю теплоти, що отримується в скінченному процесі.

Ентропія системи є функція її стану, що визначається з точністю до довільної сталої. Різниця ентропії у двох рівноважних станах 2 і 1 за визначенням дорівнює приведеній кількості теплоти, яку потрібно передати системі, щоб перевести її зі стану 1 у стан 2 будь-яким квазістатичним способом. Таким чином, якщо ентропії в станах 1 і 2 позначити буквами S_1 й S_2 , то нерівність Клаузіуса набуває вигляду

$$S_2 - S_1 \geq \int_{1 \rightarrow 2} \frac{\delta Q}{T}. \quad (7.11)$$

Тут під T потрібно розуміти температуру навколишнього середовища, при якій воно віддає системі кількість теплоти δQ .

Якщо система адіабатично ізольована, то $\delta Q = 0$, й інтеграл у (7.11) стає таким, що дорівнює нулю. Тоді

$$S_2 - S_1 = \Delta S \geq 0. \quad (7.12)$$

Таким чином, ентропія адіабатично ізольованої системи не може зменшуватися: вона або зростає, або залишається сталою. Це твердження є формулюванням закону зростання ентропії. По суті це є ще одне формулювання другого закону термодинаміки.

Обчислимо зміну ентропії ідеального газу. Спочатку розглянемо один моль речовини. Для будь-якого нескінченно малого квазістатичного процесу для ідеального газу згідно з першим законом термодинаміки можемо записати

$$\delta Q_\mu = dU_\mu + \delta A_\mu = C_V dT + P dV = C_V dT + RT dV/V.$$

Тут використали, що $dU_\mu = C_V dT$ (індекс « μ » показує, що величина характеризує один моль речовини) та у відповідності до рівняння Менделєєва-Клапейрона для одного моля газу $P = RT/V$. Далі згідно до визначення ентропії

$$S_{\mu 2} - S_{\mu 1} = \int_{1 \rightarrow 2} \frac{\delta Q_{\mu}}{T} = \int_{1 \rightarrow 2} \left(C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \right).$$

Теплоємність ідеального газу C_V не залежить від температури. Тоді

$$S_{\mu 2} - S_{\mu 1} = C_V \ln(T_2 / T_1) + R \ln(V_2 / V_1). \quad (7.13)$$

Якщо газ містить $\nu = m / \mu$ молей, то зміну ентропії для цієї кількості газу знайдемо, помноживши (7.13) на $\nu = m / \mu$ (ентропія адитивна величина),

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} C_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + \frac{m}{\mu} R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right). \quad (7.14)$$

Коли квазистатичний процес є адіабатним, то $\delta Q = 0$, а отже, $dS = 0, S = const$. Таким чином, будь-який квазистатичний адіабатичний процес є процес, що відбувається при сталій ентропії. Тому його можна також назвати ізоентропійним процесом.

Тема 8 Явища перенесення

8.1 Число зіткнень і довжина вільного пробігу молекул.

Молекула газу не увесь час рухається вільно, а час від часу має зіткнення з іншими молекулами. Вільно вона пролітає тільки коротку відстань від одного зіткнення до наступного. У момент зіткнення швидкість молекули різко змінюється як за модулем, так і за напрямком. У результаті траєкторія молекули є не прямою, а ламаною лінією з великою кількістю ланок. Молекула безладно метається туди й сюди, і її загальне просування вперед відбувається порівняно повільно. Для кількісного опису явища Клаузіус увів поняття *середньої довжини вільного пробігу*, тобто середньої відстані, що пролітає молекула від одного зіткнення до наступного.

Для обчислення середньої довжини вільного пробігу будемо користуватися моделлю твердих куль. Між зіткненнями молекули кулі рухаються за інерцією прямолінійно й рівномірно. У моменти зіткнень між молекулами розвиваються дуже великі сили відштовхування, що змінюють їх швидкості за величиною й напрямком. Зрозуміло, така груба модель передає далеко не всі риси явищ, які відбуваються при зіткненнях. Молекули можуть розпадатися й з'єднуватися. Атоми можуть іонізуватися, переходити в збуджені стани й т.д. Все це залишимо зараз без уваги. Модель твердих куль може приблизно вірно описати тільки процеси розсіювання молекул, у яких відбуваються зміни швидкості й напрямку руху цих частинок у результаті зіткнень їх між собою й зі стінками посудини, у якому знаходиться газ.

Для спрощення розрахунку припустимо, що рухається тільки одна молекула з сталою швидкістю v , а всі інші молекули є нерухомими. Будемо називати молекулу, яка рухається, молекулою А. Уявимо, що з молекулою А жорстко зв'язана концентрична

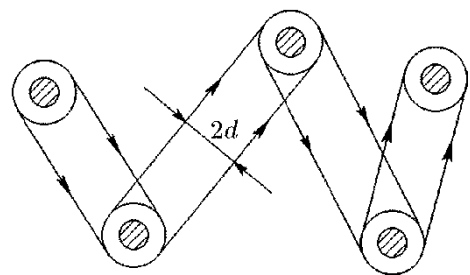


Рис. 8.1

з нею тверда сфера S удвічі більшого діаметра. Назвемо цю сферу сферою огороження молекули A . У момент зіткнення відстань між центрами молекул, що зіштовхуються, дорівнює діаметру молекули d . Отже, у цей момент центр нерухомої молекули, з якої зіштовхнулася молекула A , виявиться на поверхні сфери огороження останньої. Очевидно, він не може проникнути усередину цієї сфери. Між двома послідовними зіткненнями молекули A її сфера огороження описує циліндр, довжина якого і є вільний пробіг молекули A . З таких циліндрів складається поверхня, що описується з часом сферою огороження (рис. 8.1). Для стислості будемо називати цю поверхню ламаним циліндром. Якщо центр іншої молекули лежить усередині або на бічній поверхні цього циліндра, то вона зіштовхнеться з молекулою A . У протилежному випадку зіткнення не відбудеться. Нехай V – об'єм ламаного циліндра, що описується сферою S за час Δt . Число зіткнень молекули, що рухається, з іншими молекулами за цей час Δt дорівнює середньому числу останніх в об'ємі V , Vn , де n – число молекул в одиниці об'єму. Ми припускаємо, що середня довжина вільного пробігу λ дуже велика у порівнянні з діаметром сфери огороження $2d$. Тоді можна знехтувати тими частинами об'єму V , які приходяться на злами циліндра, тобто при обчисленні V циліндр можна вважати прямим, а його висоту такою, що дорівнює добутку швидкості молекули v на час Δt . У цьому наближенні $V = \sigma \cdot v \cdot \Delta t$, де $\sigma = \pi d^2$ – площа поперечного перерізу циліндра. Отже, число зіткнень молекули, що рухається, з іншими молекулами за час Δt дорівнює $\sigma \cdot v \cdot \Delta t \cdot n$, а за одиницю часу

$$z = \sigma \cdot v \cdot \Delta t \cdot n / \Delta t = n \cdot \sigma \cdot v. \quad (8.1)$$

Шлях, пройдений молекулою A за час Δt , дорівнює $v \cdot \Delta t$. Розділивши його на число зіткнень за цей же час, знайдемо середню довжину вільного пробігу молекули:

$$\lambda = \frac{v \Delta t}{\sigma \cdot v \cdot \Delta t \cdot n} = \frac{1}{\sigma \cdot n}. \quad (8.2)$$

Як правило, формули (8.1) і (8.2) не є точними, оскільки в основу їх доведення покладене припущення, що рухається тільки одна молекула, а всі інші нерухомі. Математично точний розрахунок було виконано Максвеллом з

урахуванням
максвеллівського
розподілу молекул за
швидкостями. Максвелл
отримав:

$$z = \sqrt{2} \cdot n \cdot \sigma \cdot v \quad (8.3)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma \cdot n}. \quad (8.4)$$

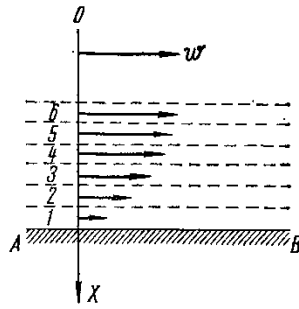


Рис. 8.2

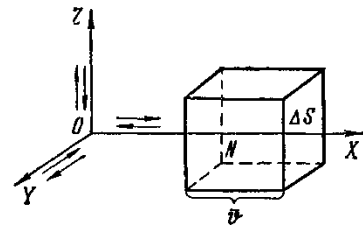


Рис. 8.3

Як бачимо формули (8.3) та (8.4) суттєво залежать від величини σ . Площа перерізу сфери огороження по великому колу σ отримала назву **ефективного перетину молекули**, точніше газокінетичним ефективним перетином молекули при розсіюванні її на інших молекулах. Якщо розсіювання відбувається на таких же самих молекулах, то ефективний перетин $\sigma = \pi d^2$, де d – діаметр молекули (мінімальна відстань, на яку зближуються молекули під час зіткнення). Зазначимо, що мінімальна відстань, на яку зближуються молекули, залежить від енергії (температури) молекул з якими відбувається зіткнення. Тому з підвищенням температури ефективний діаметр молекули зменшується.

8.2 Емпіричні рівняння, що описують дифузію, теплопровідність, внутрішнє тертя.

Хаотичний рух газових молекул веде до безперервного перемішування газу. З цим пов'язаний ряд наступних важливих явищ, що відбуваються в газах. Якщо в різних частинах об'єму газу густина була спочатку неоднаковою, то з часом вона вирівнюється. Точно так само два різних газу, які знаходяться в зіткненні, рівномірно перемішуються між собою. Це явище називається *дифузією*. В об'ємі газу, частини якого мали спочатку різну температуру, відбувається поступове вирівнювання температури за рахунок перенесення молекулами своєї енергії:

$$W = \frac{i}{2} kT.$$

Це явище називається **теплопровідністю** (молекулярною). Нехай газ тече вздовж твердої горизонтальній поверхні AB (рис. 8.2). Якщо на досить великій відстані від поверхні його швидкість дорівнює U , то прилеглий до неї шар газу 1 буде рухатися дуже повільно завдяки тертю об поверхню. Другий шар газу 2 буде рухатися вже швидше, але все ж не зі швидкістю U , так як він відчуває тертя об перший шар. Третій шар 3, випробовуючи тертя об другий шар, рухатиметься

ще швидше, і т.д. На досить великій відстані від горизонтальної поверхні швидкість течії газу стане, нарешті, рівною U . Тертя між шарами газу обумовлене переносом молекулами з шару в шар свого імпульсу (кількості руху) $P = mU$. Це явище називається *внутрішнім тертям*, або *в'язкістю*. Таким чином, завдяки внутрішньому тертю газ рухається поблизу поверхні паралельними шарами, швидкість яких зменшується в напрямку OX , перпендикулярному поверхні. Такий рух називається ламінарним.

Всі названі явища обумовлені однією причиною - перенесенням молекулами газу (у процесі хаотичного руху) своїх фізичних характеристик: маси (дифузія), або енергії (теплопровідність), або кількості руху (внутрішнє тертя). Тому механізм всіх цих явищ однаковий і всі вони об'єднані загальною назвою *явищ переносу*. Виходячи з уявлень молекулярно-кінетичної теорії виведемо спільне для явищ переносу рівняння переносу. Кількість молекул, що переходить за проміжок часу Δt через деяку уявну площадку ΔS , вміщену в газі (рис. 8.3):

$$N = \frac{1}{6} n \bar{v} \Delta S \Delta t .$$

Ці молекули переносять через площадку ΔS і значення своїх фізичних характеристик (масу, енергію, кількість руху і т. п.). Розглянемо загальний механізм перенесення, не будемо поки конкретизувати, яку саме фізичну характеристику переносять молекули, і позначимо її буквою φ . Тоді кількість фізичної характеристики, перенесене молекулами в одному напрямку (і в зворотному) через площадку ΔS за час Δt :

$$N\varphi = \frac{1}{6} (n\varphi) \bar{v} \Delta S \Delta t . \quad (8.5)$$

Припустимо тепер, що розглянутий газ неоднорідний за своїми властивостями, тобто концентрація n його молекул різна в різних місцях об'єму газу і самі молекули мають неоднакові значення фізичної величини φ . Тоді кількість фізичної величини $n\varphi$, що міститься в одиниці об'єму газу, також буде різною у різних місцях об'єму газу. Нехай кількість $n\varphi$ убуває в позитивному

напрямку OX , будучи рівною $(n\varphi)_1$ зліва від площадки ΔS і $(n\varphi)_2$ - праворуч від неї. У цьому випадку має місце переважне перенесення фізичної величини $N\varphi$ через площадку ΔS зліва направо; згідно з формулою (5.3), воно дорівнює:

$$\Delta(N\varphi) = (N\varphi)_1 - (N\varphi)_2 = \frac{1}{6}[(n\varphi)_1 - (n\varphi)_2]\bar{v}\Delta S\Delta t. \quad (8.6)$$

Тепер залишається з'ясувати, виходячи з фізичних міркувань, на якій відстані від площадки ΔS слід взяти значення $n\varphi$. Обмін значеннями φ і зміна концентрації n відбуваються тільки при взаємозіткненні молекул, тобто на відстані $\bar{\lambda}$, рівній середній довжині вільного пробігу молекул. Тому можна покласти, що значення величини $n\varphi$ зберігаються незмінними на відстані вліво і вправо від ΔS . На цих відстанях і будемо брати значення $n\varphi$ (рис. 8.4). Помноживши і розділивши на 2 праву частину формули (5.4), отримаємо:

$$\Delta(N\varphi) = \frac{1}{3} \frac{(n\varphi)_1 - (n\varphi)_2}{2\bar{\lambda}} \bar{\lambda}\bar{v}\Delta S\Delta t. \quad (8.7)$$

Як видно на рис. 8.4, відношення $\frac{(n\varphi)_1 - (n\varphi)_2}{2\bar{\lambda}}$ являє собою градієнт величини $n\varphi$:

$$\frac{\Delta(n\varphi)}{\Delta x}.$$

Тоді формула (8.7) прийме вигляд:

$$\Delta(N\varphi) = -\frac{1}{3} \bar{\lambda}\bar{v} \frac{\Delta(n\varphi)}{\Delta x} \Delta S\Delta t. \quad (8.8)$$

Знак мінус обумовлений тим, що перенесення фізичної величини відбувається в напрямку, протилежному градієнту ($grad\varphi$ спрямований справа наліво, а перенесення φ - зліва направо).

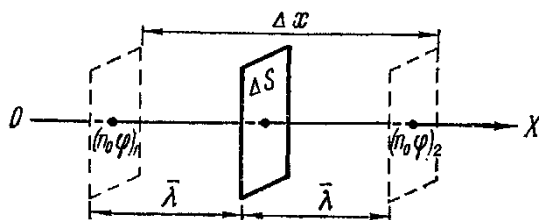


Рис. 8.4

Формула (8.8) називається *рівнянням переносу*. На його основі розглянемо тепер конкретні явища переносу: дифузію, теплопровідність і внутрішнє тертя.

Нехай в деякому об'ємі газу має місце неоднорідність щодо густини: густина ρ зменшується в напрямку OX (рис. 8.5) Це може бути, наприклад, у випадку, коли в лівій частині об'єму знаходиться джерело O газу (рідина, що випаровується). Позначимо через ρ_1 і ρ_2 значення густини на відстанях $\bar{\lambda}$ вліво і вправо від ΔS . Тоді $\rho_1 > \rho_2$.

Так як $\rho = nm_0$, де m_0 - маса молекули, однакова для всіх молекул газу, то $n_1 > n_2$, тобто концентрація молекул

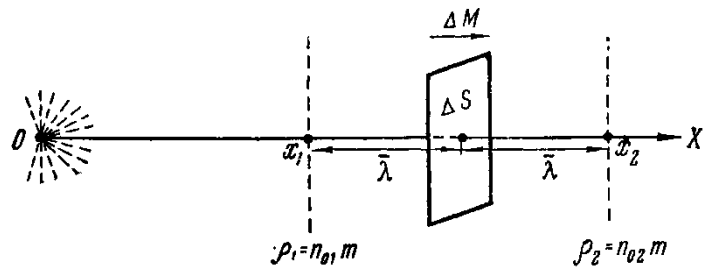


Рис. 8.5

зменшується в напрямку OX разом з густиною.

Застосовуючи рівняння переносу (8.6), зауважимо, що в нашому випадку фізичною характеристикою, що переноситься, є маса молекули, тобто $\varphi = m_0$. Тому:

$$n\varphi = nm_0 = \rho,$$

$$\Delta(N\varphi) = \Delta(Nm_0) = \Delta M \quad (8.7)$$

де ΔM - маса газу, що переноситься шляхом дифузії за час Δt через площадку ΔS , перпендикулярну напрямку убавання густини. Підставляючи вирази (5.7) в рівняння переносу (5.6), отримаємо

$$\Delta M = -\frac{1}{3} \frac{\Delta(\rho)}{\Delta x} \bar{\lambda} \bar{v} \Delta S \Delta t. \quad (8.8)$$

Позначимо

$$\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{v} = D, \quad (8.9)$$

напишемо

$$\Delta M = -D \frac{\Delta(\rho)}{\Delta x} \Delta S \Delta t, \quad (8.10)$$

звідки випливає, що маса газу ΔM , що переноситься завдяки дифузії через площадку ΔS , перпендикулярну до напрямку OX , в якому убуває густина, пропорційна розміру цієї площадки, проміжку часу Δt перенесення і градієнту густини $\frac{\Delta\rho}{\Delta x}$. Формула (8.10) називається рівнянням дифузії, або законом Фіка

(так як німецький фізик Фік отримав таке ж рівняння з досліду з рідинами).

Коефіцієнт пропорційності D називається коефіцієнтом дифузії. $[D] = [m^2 / c]$.

Нехай в деякому об'ємі газу температура T убуває в напрямку OX (рис.

8.6). Це може мати місце, наприклад,

у випадку, коли в лівій частині O об'єму знаходиться нагрівач.

Позначимо через T_1 і T_2 значення температури на відстанях від

площадки ΔS . Тоді $T_1 > T_2$. Так як

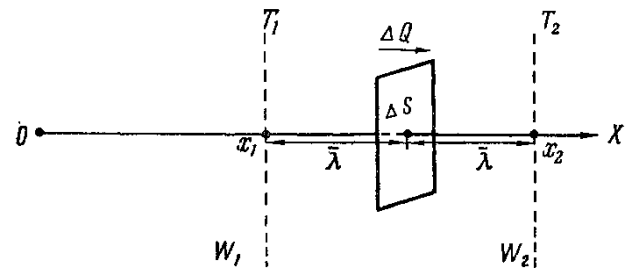


Рис. 8.6

кінетична енергія газової молекули $W = \frac{i}{2} kT$, то $W_1 > W_2$, тобто енергія молекул,

що знаходяться зліва від ΔS , більше енергії молекул, що знаходяться праворуч

від ΔS . Тому в напрямку убування температури буде відбуватися переважне

перенесення енергії, а отже, і кількості теплоти ΔQ , оскільки внутрішня енергія

газу складається з кінетичної енергії його молекул.

Застосовуючи рівняння переносу (8.6), зауважимо, що в даному випадку

фізичної характеристикою, яка переноситься, є енергія молекули, тобто $\varphi = W$.

Тоді, оскільки концентрацію молекул n можна вважати однаковою у всьому об'ємі газу,

$$\Delta(n\varphi) = \Delta(nW) = \Delta\left(n\frac{i}{2}kT\right) = n\frac{i}{2}k\Delta T, \quad (8.11)$$

де $\Delta T = T_1 - T_2$, а

$$\Delta(N\varphi) = \Delta(NW) = \Delta Q, \quad (8.12)$$

де ΔQ - кількість теплоти (внутрішньої енергії), що переноситься за час Δt через площадку ΔS , перпендикулярну напрямку убавання температури. Підставляючи вирази (8.11) і (8.12) в рівняння переносу (5.6), отримаємо

$$\Delta Q = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{v} n \frac{i}{2} k \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S \Delta t. \quad (8.13)$$

Множимо і ділимо праву частину цієї рівності на масу молекули m_0 і враховуючи, що $k = R / N_A$, напишемо

$$\Delta Q = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{v} \frac{nm_0}{N_A m_0} \frac{i}{2} R \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S \Delta t. \quad (8.14)$$

Так як $nm_0 = \rho$, $N_A m_0 = \mu$ і $\frac{i}{2} R = C_V$, де ρ - густина газу, μ - молярна маса, C_V - молярна теплоємність при постійному об'ємі, то остання рівність прийме вигляд:

$$\Delta Q = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{v} \rho \frac{C_V}{\mu} \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S \Delta t, \quad (8.15)$$

$$\frac{C_V}{\mu} = c_v,$$

де c_v - питома теплоємність газу при постійному об'ємі. Тому остаточно отримаємо:

$$\Delta Q = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{v} \rho c_v \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S \Delta t. \quad (8.16)$$

Позначивши

$$\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{v} \rho c_v = \chi, \quad (8.17)$$

знайдемо

$$\Delta Q = -\chi \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S \Delta t. \quad (8.18)$$

Звідси випливає, що кількість теплоти ΔQ , що переноситься через площадку ΔS , перпендикулярну напрямку OX , в якому убуває температура, пропорційно розміру цієї площадки, проміжку часу Δt перенесення і градієнту температури $\frac{\Delta T}{\Delta x}$. Формула (5.18) називається рівнянням теплопровідності, або законом Фур'є (оскільки вперше таке рівняння вивів французький математик Фур'є). Коефіцієнт пропорційності називається коефіцієнтом теплопровідності. $[\chi] = [\text{Дж} / \text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}]$.

Нехай в ламінарному потоці газу швидкість течії зменшується в напрямку OX (рис. 8.7), це може мати місце, наприклад, коли газ тече поблизу твердої стінки. Уявімо площадку ΔS , по якій стикаються два сусідніх шари газу, і позначимо через u_1 і u_2 значення швидкостей течії на відстанях $\bar{\lambda}$ від цієї площадки. Очевидно, що на хаотичний рух молекул накладеться швидкість потоку u ,

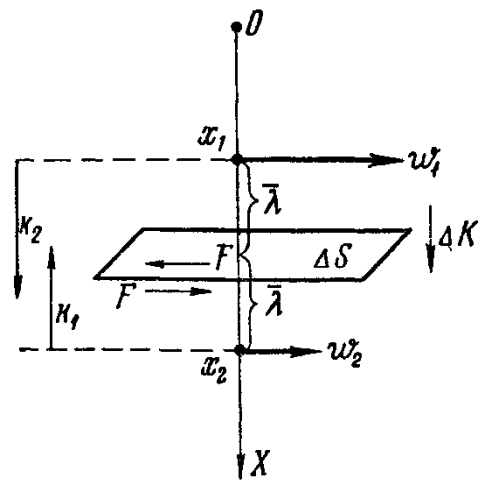


Рис. 8.7

через що молекули верхнього шару будуть мати більший імпульс, ніж молекули нижнього шару: $u_1 > u_2$. У процесі хаотичного руху молекули верхнього шару будуть переносити свій імпульс в нижній шар, збільшуючи тим самим його швидкість; в свою чергу молекули нижнього шару будуть переносити свій імпульс у верхній шар, зменшуючи тим самим його швидкість. В результаті між шарами виникає внутрішнє тертя, сила якого буде діяти уздовж площадки ΔS паралельно швидкості потоку.

Застосовуючи рівняння переносу (8.6), зауважимо, що в цьому випадку фізичною характеристикою, яка переноситься, є імпульс молекули: $\phi = m_0 u$. Тоді, оскільки концентрацію молекул n можна вважати однаковою у всьому об'ємі газу

$$\Delta(n\varphi) = \Delta(nm_0v) = nm_0\Delta v, \quad (8.19)$$

де $\Delta v = v_1 - v_2$, а

$$\Delta(N\varphi) = \Delta(Nm_0v) = \Delta P \quad (8.20)$$

де ΔP - зміна імпульса одного шару відносно другого, що відбувається за час Δt на приграничній площині ΔS . Так як зміна імпульсу дорівнює імпульсу діючої сили, то

$$\Delta P = F \Delta t,$$

де F - сила взаємодії між шарами газу, що діє в площині їхнього зіткнення, тобто сила внутрішнього тертя. Тому формулу (5.20) можна представити у вигляді

$$\Delta(N\varphi) = \Delta P = F \Delta t. \quad (8.21)$$

Підставляючи вирази (8.20) і (8.21) в рівняння переносу (8.6), отримаємо:

$$F \Delta t = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{v} n m_0 \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta S \Delta t.$$

Скорочуючи останню рівність на Δt і враховуючи, що $n m_0 = \rho$ знайдемо:

$$F = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{v} \rho \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta S.$$

Позначивши $\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{v} \rho = \eta$, напишемо

$$F = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta S, \quad (8.22)$$

звідки випливає, що сила внутрішнього тертя, що виникає в площині зіткнення двох шарів газу, що ковзають відносно один одного, пропорційна площі їхнього зіткнення ΔS і градієнту швидкості $\frac{\Delta v}{\Delta x}$. Формула (8.22) називається **рівнянням**

внутрішнього тертя, або **законом Ньютона** (так як Ньютон отримав таке ж рівняння з досліду з рідиною). Коефіцієнт пропорційності η називається **коефіцієнтом внутрішнього тертя (в'язкості)**. $[\eta] = [кг / м \cdot с]$.

Тема 9 Реальні гази та рідкий стан

9.1 Реальні гази. Рівняння Ван-дер-Ваальса.

При збільшенні густини газів починають відігравати всезростаючу роль об'єм молекул газу та їх взаємодія між собою. У цьому випадку модель ідеального газу й рівняння ідеального газу (Менделєєва-Клапейрона) для одного моля

$$p_{i0}V_{\mu} = RT \quad (9.1)$$

стають непридатними. Тут p_{i0} – тиск ідеального газу на стінки посудини; V_{μ} – об'єм посудини, в якому знаходиться один моль газу; T – температура газу; R – універсальна газова стала.

Рівняння, запропоноване Ван-дер-Ваальсом було отримано шляхом внесення поправок у рівняння (77.1) і для одного моля газу має вигляд (**рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля речовини**)

$$\left(p + \frac{a}{V_{\mu}^2}\right)(V_{\mu} - b) = RT, \quad (9.2)$$

де a і b – **сталі Ван-дер-Ваальса**, що мають для різних газів різні значення, які визначаються експериментально; p – тиск реального газу на стінки посудини. Стала a вимірюється в Па·м⁶/моль², стала b – у м³/моль. Обґрунтуємо внесені в рівняння (9.2) поправки.

Кожна молекула реального газу має власний об'єм. Тому молекули рухаються в посудині менш вільно, ніж «точкові» молекули ідеального газу. Ван-дер-Ваальс врахував власний об'єм молекул газу шляхом заміни в рівнянні Менделєєва-Клапейрона (9.1) повного об'єму посудини V_{μ} , який займає один моль речовини, на так званий «вільний» об'єм

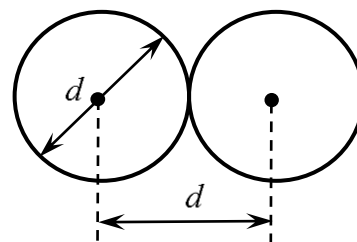


Рис. 9.1 Відстань, на яку зближуються центри двох молекул, збігаються з діаметром молекули d

$$V'_{\mu} = V_{\mu} - b, \quad (9.3)$$

в якому можуть рухатися молекули. Тут b – поправка, стала Ван-дер-Ваальса, яка залежить від власного об'єму молекул.

Розглянемо тепер вплив сил молекулярного притягання. Змінимо модель газу. Молекули будемо вважати точками, між якими діють сили притягання. Сили притягання між молекулами при збільшенні відстані між ними швидко зменшуються. Тому помітна взаємодія молекул між собою має місце лише в межах невеликої відстані r , яка називається **радіусом молекулярної дії** і яка дорівнює декільком ефективним діаметрам молекули. Сфера радіуса r називається **сферою молекулярної дії**.

Якщо ця сфера цілком знаходиться усередині газу, то сили, що діють на розглянуту молекулу з боку навколишніх молекул, у середньому врівноважуються (рис. 9.2). Але цього не буде, коли молекула перебуває поблизу

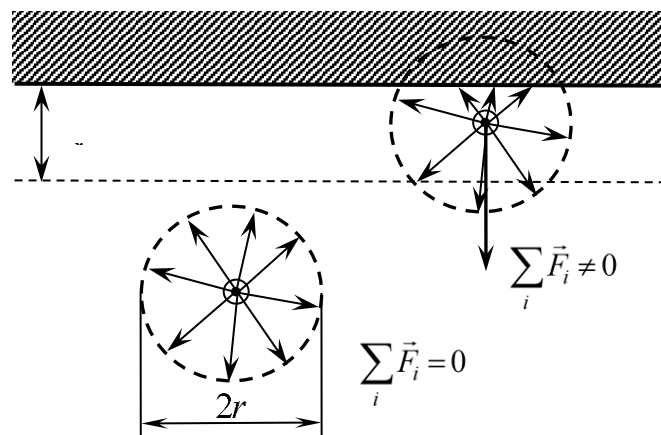


Рис. 9.2 – Молекула в глибині посудини (ліворуч) і в поверхневому шарі (праворуч), r – радіус молекулярної дії

частково проходить у газі. Кількість молекул, що тягнуть розглянуту молекулу усередину газу, є більшою порівняно з молекулами, що тягнуть її назовні. Таким чином, поблизу стінки виникає шар газу, товщина якого дорівнює радіусу сфери молекулярної дії r . На кожен молекулу, що знаходиться в цьому шарі, діє сила F , яка направлена всередину газу.

Величина сили F максимальна, коли молекула перебуває біля самої стінки, і зменшується при видаленні від неї. Коли молекула газу летить до стінки, а потім відбивається від неї, то змінюється її імпульс. На відміну від ідеальних газів, імпульс молекул, що налітають, змінюється не тільки під дією сил тиску з боку стінки, але й під дією сил, з якими їх тягнуть усередину газу молекули шару біля

стілки. Зокрема, під дією цих останніх сил молекула може відбитися усередині цього шару, не долетівши до стінки. Це приводить до того, що тиск газу на стінку посудини у випадку реального газу стає меншим, ніж у випадку ідеального газу на величину Δp . Зменшення тиску Δp на стінку посудини для реального газу порівняно з ідеальним пропорційне квадрату концентрації

$$\Delta p \sim n \cdot \bar{F} \sim n \cdot n = (N/V)^2 \sim 1/V^2$$

(N – кількість молекул в посудині; V – об'єм посудини) або для одного моля речовини

$$p_{id} - p = \Delta p_{\mu} = a/V_{\mu}^2, \quad (9.6)$$

де a – стала Ван-дер-Ваальса, яка пов'язана з притяганням молекул між собою. Зрозуміло, що такі фактори як притягання молекул між собою та відмінний від нуля об'єм молекул діють одночасно. Для того щоб це врахувати, підставимо в (9.1) замість тиску ідеального газу співвідношення, що отримали з (9.6)

$$p_{id} = p + \Delta p_{\mu} = p + a/V_{\mu}^2,$$

а також замість об'єму посудини V_{μ} , який займає один моль речовини так званий «вільний» об'єм (9.3) $V_{\mu} - b$. У результаті цього отримаємо рівняння Ван-дер-Ваальса (9.2).

Рівняння Ван-дер-Ваальса легко можна записати для довільної кількості молей. Для цього потрібно врахувати, що ν молей газу займають в ν раз більший об'єм, ніж один моль (при однакових температурі і тиску)

$$V = \nu \cdot V_{\mu} \text{ або } V_{\mu} = V/\nu. \quad (9.7)$$

Підставивши це співвідношення до (9.2), **отримаємо рівняння Ван-дер-Ваальса для довільної кількості речовини**

$$\left(p + \frac{a \cdot \nu^2}{V^2} \right) (V - b \cdot \nu) = \nu RT. \quad (9.8)$$

9.2 Фазове перетворення першого і другого роду.

У термодинаміці **фазою** називається сукупність однорідних, однакових за своїми властивостями частин системи. Якщо, наприклад, у закритій посудині знаходиться вода, у якій плавають шматочки льоду, то рідка вода являє собою одну фазу, всі шматочки льоду – другу, а суміш пари води й повітря над рідиною – третю фазу термодинамічної системи.

У станах, що відповідають горизонтальній ділянці експериментальної ізотерми, спостерігається рівновага між рідкою й газоподібною фазами речовини. Газ, що перебуває в рівновазі зі своєю рідиною, називається **насиченою парою**. Тиск $p_{н.п.}$, при якому здійснюється рівновага при даній температурі, називається **тиском насиченої пари**. Цей тиск росте з температурою.

На рис. 9.3 зображені експериментальні ізотерми для ряду значень температури. З рис. 9.3 бачимо, що з підвищенням температури горизонтальна ділянка ізотерми скорочується й стягується в точку K при критичній температурі. Відповідно зменшується розходження в густинах рідини й насиченої пари. При критичній температурі це розходження повністю зникає й речовина стає однорідною.

Проведена на рис. 9.3 через крайні точки горизонтальних ділянок дзвоноподібна штрихова крива обмежує область двофазних станів речовини. При температурах вище критичної речовина при будь-якому тиску залишається однорідною. При таких

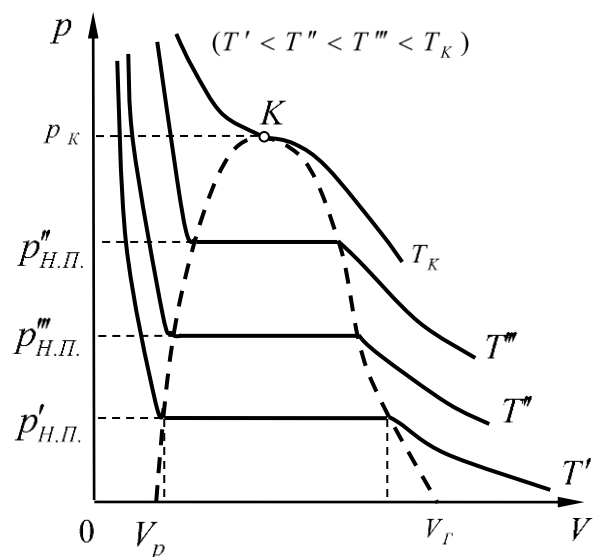


Рис. 9.3 Сукупність експериментальних ізотерм, що відповідають різним температурам. Область під дзвоноподібною штриховою кривою є областю двофазних станів речовини

температурах ніяким стисненням не може бути здійснений перехід речовини у рідкий стан.

Дзвоноподібна крива й ділянка критичної ізотерми, що лежить ліворуч від точки K , ділять діаграму p, V на три області (рис. 9.4). Похилим штрихуванням позначена область однорідних рідких станів речовини. Горизонтальним штрихуванням позначена область двофазних станів.

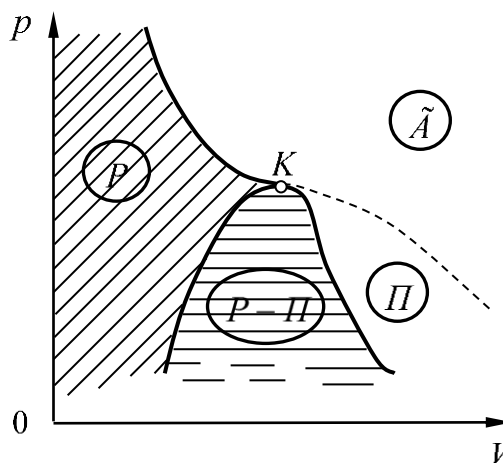


Рис. 9.4 Области рівноважних станів речовини на діаграмі p, V

Праворуч від дзвоноподібної кривої і верхньої гілки критичної ізотерми розташовується область однорідних газоподібних станів. У ній іноді виділяють позначену буквою « Π » частина, яку називають областю пари. Будь-який стан у цій області відрізняється від станів, що лежать в області « Γ », тим, що при ізотермічному стисненні речовина, що перебувала спочатку в такому стані, перетерплює процес зрідження. При температурах вищих критичної, як уже відзначалося, речовина не може бути зрідженою ніяким стисненням.

Переходи, що супроводжуються поглинанням або виділенням теплоти, називаються **фазовими перетвореннями першого роду**. Існують перетворення однієї кристалічної модифікації (різновиду) речовини в іншу, які не зв'язані поглинанням або виділенням теплоти. Їх називають **фазовими перетвореннями другого роду**.

При фазових перетвореннях другого роду густина речовини не змінюється. Існує стрибкоподібна зміна питомої теплоємності і деяких інші характеристик. Прикладом перетворення другого роду може служити перехід заліза з феромагнітного стану в парамагнітний, який відбувається при температурі Кюрі.

Три фази однієї й тієї ж речовини (тверда, рідка й газоподібна, або рідка й дві тверді, або, нарешті, три тверді) можуть знаходитися в рівновазі тільки при визначених значеннях температури й тиску, яким на діаграмі p, T відповідає точка, і яку називають **потрійною**.

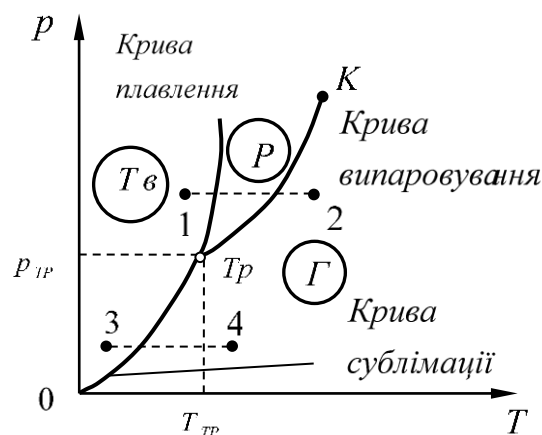


Рис. 9.4 Діаграма стану речовини

У потрійній точці сходяться три криві рівноваги фаз, узятих попарно (рис. 9.4). Крива плавлення визначає умови рівноваги між твердою й рідкою фазами речовини (наприклад, між рідкою водою й льодом); ця крива йде в нескінченність. **Сублімацією** називається безпосередній (без плавлення) перехід із кристалічного стану в газоподібний. Крива сублімації визначає умови рівноваги між твердою (кристалічною) і газоподібною фазами речовини. Діаграми, подібні до зображеної на рис. 9.4, називаються **діаграмами станів** речовини. Вони визначають рівноважні стани, тобто такі стани, у яких речовина при незмінних зовнішніх умовах перебуває нескінченно довго. Будують діаграми стану на основі експериментальних даних.

Криві плавлення, випаровування й сублімації розбивають координатну площину p, T на три області. Ліворуч від кривої сублімації й плавлення лежить область твердої фази, між кривими плавлення й випаровування знаходиться область рідких станів, і, нарешті, праворуч від кривої випаровування й сублімації знаходиться область газоподібних станів. Будь-яка точка в одній із цих областей зображує відповідний однофазний стан речовини. Будь-яка точка, що лежить на одній з кривих, що розмежовує області, визначає умови рівноваги двох відповідних фаз речовини. Потрійна точка зображує стан рівноваги всіх трьох фаз.

Діаграма стану дозволяє визначити, які перетворення буде мати речовина при різних процесах. Наприклад, якщо взяти речовину в стані, який зображено

точкою 1 на рис. 9.4, і його ізобарично нагріти, то речовина буде проходити послідовність станів, які зображені штриховою прямою 1–2, – кристалічний, рідкий, газоподібний. Якщо ж взяти речовину у стані, який зображений точкою 3, і також ізобарично нагріти, то послідовність станів 3–4 буде іншою: кристали перетворюються безпосередньо в газ, минаючи рідку фазу.

9.3 Рідини. Поверхневий натяг рідин.

Рідини займають проміжне положення між газами й кристалами, і тому вони мають деякі їх властивості. Зокрема, як для рідин, так і для кристалів, характерна наявність певного об'єму. Разом з тим рідина, подібно до газу, набуває форму тієї посудини, у якій вона знаходиться. Для кристалів характерно впорядковане розміщення частинок, у газах вони розміщені хаотично. За допомогою рентгенографічних досліджень з'ясовано, що у рідинах характер розміщення молекул також займає проміжне положення: *у рідинах спостерігається ближній порядок*. Це означає, що відносно будь-якої частинки розміщення найближчих до неї сусідів є впорядкованим. Однак у міру віддалення від даної частинки розміщення відносно неї інших частинок стає усе менш упорядкованим. На далеких відстанях упорядковане розміщення частинок повністю зникає. У кристалах спостерігаємо *дальній порядок*: упорядковане розміщення частинок відносно будь-якої частинки спостерігається в межах значного об'єму.

Тепловий рух молекул у рідинах має такий характер. Кожна молекула протягом деякого часу коливається біля певного положення рівноваги. Час від часу молекула стрибком переміщується в нове положення рівноваги, яке знаходиться від попереднього на відстані порядку розмірів самих молекул. Цим пояснюється течія рідин. З підвищенням температури частота таких стрибкоподібних переміщень зростає, внаслідок чого в'язкість рідин зменшується. Відзначимо, що в'язкість газів зростає з підвищенням температури.

Молекули рідини розміщуються так близько одна до одної, що сили протягування між ними є достатньо великими. Через швидке зменшення сил

протягування між молекулами при збільшенні відстані між ними помітна дія молекул одна на одну існує лише в межах невеликої відстані r , яка називається **радіусом молекулярної дії**, і, яка дорівнює декільком ефективним діаметрам молекули. Сфера радіуса r називається **сферою молекулярної дії**.

Таким чином, кожна молекула зазнає протягування з боку всіх молекул, що знаходяться усередині сфери молекулярної дії, центр якої збігається із центром даної молекули. Для молекули, яка знаходиться від поверхні рідини на відстані більшій за r , результуюча сила протягування до сусідніх молекул у середньому дорівнює нулю (рис. 9.10). Коли ж молекула знаходиться від поверхні на відстані, яка менша за r , то ситуація стає іншою. Через те що густина газоподібного середовища над поверхнею рідини у багато разів менше густини рідини, то у тій частині сфери молекулярної дії, яка знаходиться за межами рідини, молекул практично не буде. Тому на молекулу, яка знаходиться в поверхневому шарі товщиною, що дорівнює r , діє сила \vec{F} , яка направлена усередину рідини. Модуль цієї сили збільшується при переході від внутрішньої до зовнішньої границі цього шару.

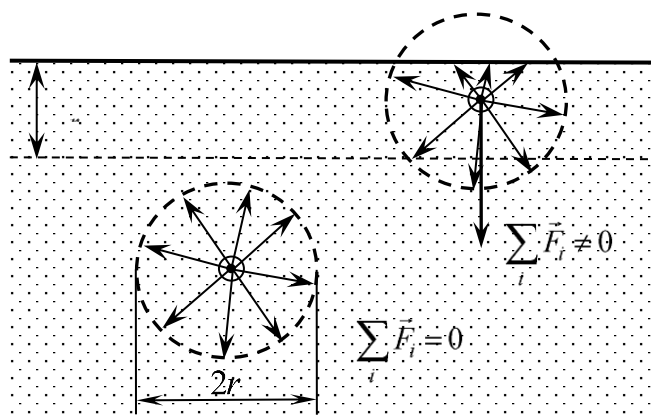


Рис. 9.10 Молекула в глибині рідини (ліворуч) і в поверхневому шарі (праворуч), r – радіус молекулярної дії

При переході молекули із глибини рідини в поверхневий шар над нею виконуються діючими в цьому шарі силами (про які йшла мова вище) від'ємна робота. У результаті цього кінетична енергія молекули зменшується, перетворюючись у потенціальну енергію. Це подібно до випадку, коли над тілом, яке летить вгору, сила земного тяжіння виконує від'ємну роботу, що приводить до перетворення кінетичної енергії тіла в потенціальну. Таким чином, молекули в поверхневому шарі мають додаткову потенціальну енергію. Поверхневий шар

у цілому має додаткову енергію, яка входить складовою частиною у внутрішню енергію рідини.

Положення рівноваги відповідає мінімуму потенціальної енергії. Тому за умови відсутності зовнішніх сил рідина набуває форму з мінімальною поверхнею, тобто форму кулі. Звичайно ми спостерігаємо рідини, на які діє сила земного тяжіння. У цьому випадку рідина набуває форму, що відповідає мінімуму сумарної енергії – потенціальної енергії у полі сил тяжіння й поверхневої енергії.

Наявність поверхневої енергії обумовлює прагнення рідини до скорочення своєї поверхні. Рідина поводить себе так, ніби вона була обмежена пружною плівкою, що прагне стиснутися. Насправді ніякої плівки, що обмежує рідину зовні, немає. Поверхневий шар складається з тих же молекул, що й вся рідина, і взаємодія між молекулами в поверхневому шарі описана вище.

Виділимо уявно ділянку поверхні рідини, що обмежена замкненим контуром. Прагнення цієї ділянки до скорочення приводить до того, що вона діє на іншу частину поверхні з дотичними до поверхні силами, які перпендикулярні в кожному місці до відповідного елемента контура. **Ці сили називають силами поверхневого натягу.**

Сила поверхневого натягу будь-якої межі поверхні рідини пропорційна довжині межі

$$F = \sigma l,$$

де l – довжина межі рідини; σ – **коефіцієнт поверхневого натягу** (вимірюється в Н/м). Таким чином, поверхневий натяг σ чисельно дорівнює силі, яка діє на одиницю довжини межі рідини. Відповідно до цього σ можна вимірювати не тільки в ньютонках на метр, але також і в джоулях на квадратний метр (Дж/м²).

Коли межують одна з одною відразу три речовини – тверде, рідке й газоподібне (рис. 9.11), рідке тіло набуває таку форму, при якій сума потенціальної енергії рідини у полі сил тяжіння й поверхневої енергії всіх тіл є мінімальною. Звідси випливає, що контур, який є межею усіх трьох речовин, розміщується на поверхні твердого тіла так, щоб сума проєкцій трьох

прикладених до кожного елемента контура сил поверхневого натягу на напрямок, у якому елемент контура може переміщуватися (тобто на напрямок вздовж дотичної до поверхні твердого тіла), дорівнював нулю (в іншому випадку рівновага буде відсутня).

Кут ϑ між дотичними до поверхонь твердого тіла й рідини, який відлічується усередині рідини, називається **крайовим кутом**.

Позначимо поверхневий натяг на границі твердого тіла й рідини через $\sigma_{m,p}$, на границі твердого тіла й газу – через $\sigma_{m,g}$ і на границі рідини й газу – через $\sigma_{p,g}$. Залежно від співвідношення між цими величинами крайовий кут

може набувати значення від 0 до π . Якщо $\sigma_{m,g} > \sigma_{m,p}$, кут ϑ виявляється гострим, якщо $\sigma_{m,g} < \sigma_{m,p}$,

кут ϑ тупий. У першому випадку говорять про **часткове змочування**, а в другому – про частинне незмочування рідиною твердого тіла (рис. 9.12).

Якщо $\sigma_{m,g} > (\sigma_{m,p} + \sigma_{p,g})$, виявляється енергетично вигідною заміна поверхні тверде тіло–газ двома поверхнями: тверде тіло–рідина й рідина–газ. У цьому випадку крайовий кут дорівнює нулю й рідина необмежено розтікається по поверхні твердого тіла – відбувається **повне змочування**. Якщо $\sigma_{m,p} > (\sigma_{m,g} + \sigma_{p,g})$, енергетично вигідна заміна поверхні тверде тіло–рідина двома поверхнями:

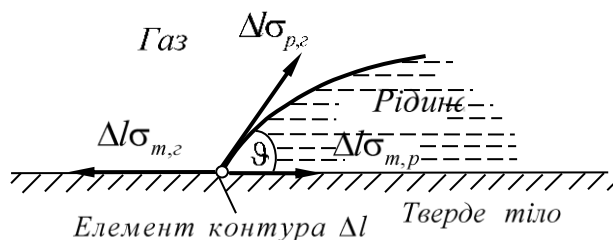


Рис. 9.11 Вздовж контура, що лежить на поверхні твердого тіла, границь відразу три речовини. Елемент контура Δl перпендикулярний до площини рисунка. Сума проєкцій трьох сил поверхневого натягу на межу розділу рідини й твердого тіла дорівнює нулю. ϑ – крайовий кут

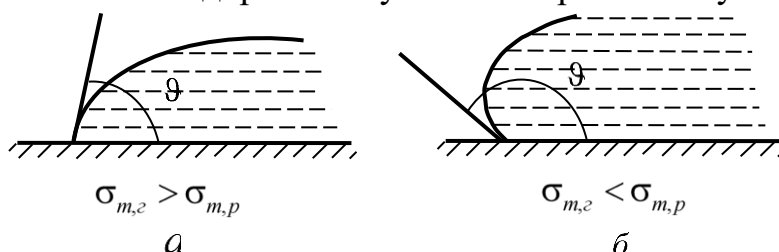


Рис. 9.12 Крайовий кут ϑ при частинному змочуванні (а) і незмочуванні (б)

тверде тіло-газ і рідина-газ. У цьому випадку крайовий кут дорівнює π й рідина повністю відділяється від поверхні твердого тіла, торкаючись її в одній тільки точці – має місце **повне незмочування**.

Прагнення поверхні рідини до скорочення приводить до того, що тиск під викривленою поверхнею рідини виявляється іншим, ніж під плоскою поверхнею.

Під опуклою поверхнею тиск більше, а під увігнутою менше, ніж під плоскою (рис. 9.13). У випадку увігнутої поверхні поверхневий шар, прагнучи скоротитися, розтягує рідину.

Додатковий тиск, обумовлений викривленням поверхні, повинен бути пропорційним поверхневому натягу σ й кривизні поверхні. Обчислимо додатковий тиск для сферичної поверхні рідини. Розсічемо уявно сферичну краплю рідини радіуса R площиною на дві півкулі (рис. 9.14). Через поверхневий натяг поверхневі шари півкуль притягуються один до одного із силою

$$F = 2\pi R\sigma$$

($2\pi R$ – довжина границі поверхневих шарів півкуль).

Ця сила притискає півкулі одна до одної по поверхні площею $S = \pi R^2$ й, отже, зумовлює додатковий тиск

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{2\pi R\sigma}{\pi R^2} = \frac{2\sigma}{R}. \quad (9.9)$$

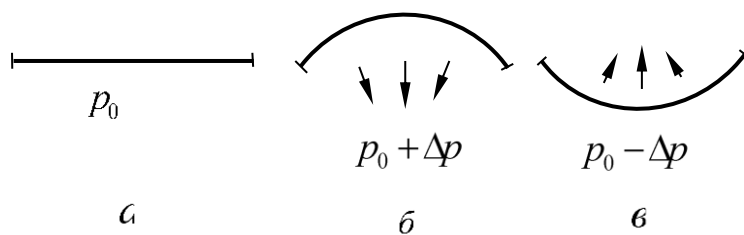


Рис. 9.13 Тиск під плоскою (а), опуклою (б) і увігнутою (в) поверхнями рідини

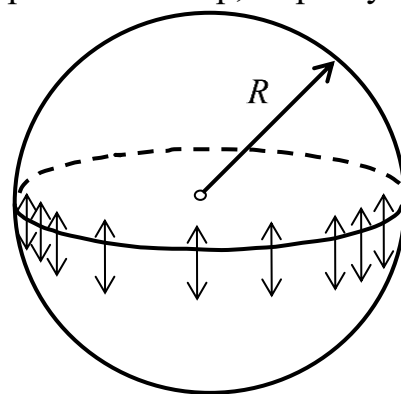


Рис. 9.14 Дві півкулі, на які уявно розсічена кругла крапля рідини, притискаються одна до одної силами поверхневого натягу

Кривизна сферичної поверхні всюди однакова й береться такою, що дорівнює $1/R$. Для характеристики довільної поверхні вводиться поняття середньої кривизни, яке визначається через кривизну нормальних перетинів.

Нормальним перетином поверхні в деякій точці називається

лінія перетину цієї поверхні із площиною, що проходить через нормаль до поверхні в розглянутій точці. Для сфери будь-який нормальний перетин є коло. У загальному випадку різні нормальні перетини, що проходять через одну і ту саму точку, мають різний радіус кривизни. У геометрії доводиться, що напівсума зворотних радіусів кривизни

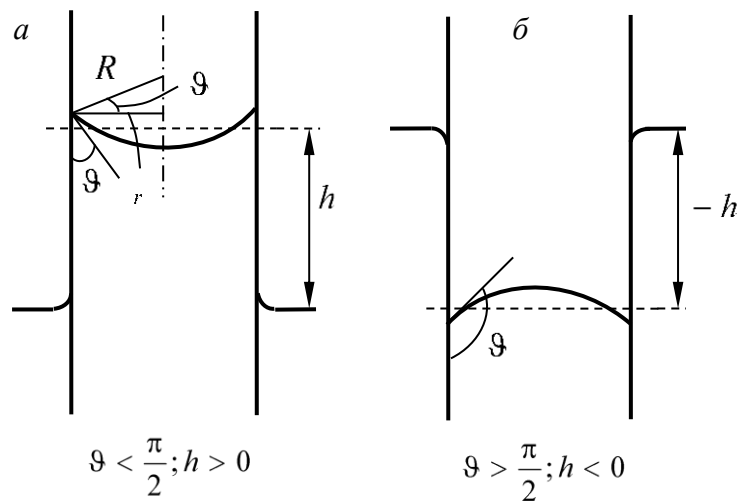


Рис. 9.15 Рідина у капілярі у випадку змочування (а) незмочування (б)

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (9.10)$$

для будь-якої пари взаємно перпендикулярних нормальних перетинів має одне і теж значення. Ця величина і є **середньою кривизною** поверхні в даній точці. Легко зрозуміти, що середня кривизна циліндра у два рази менше кривизни сфери того ж радіуса.

Радіуси R_1 й R_2 у формулі (9.10) є алгебраїчними величинами. Якщо центр кривизни нормального перетину знаходиться під поверхнею, радіус кривизни вважається додатним. Якщо ж центр кривизни нормального перетину знаходиться над поверхнею, радіус кривизни вважається від'ємним (рис. 82.3). Таким чином, неплоска поверхня може мати середню кривизну, яка дорівнює

нулю. Для цього потрібно, щоб радіуси кривизни R_1 й R_2 були однакові за модулем й протилежні за знаком.

У сфери $R_1 = R_2 = R$, тому $H = 1/R$. Замінивши у виразі (9.9) $1/R$ через H , прийдемо до формули

$$\Delta p = 2H\sigma. \quad (9.11)$$

Лаплас довів, що формула (9.11) справедлива для поверхні будь-якої форми, якщо під H розуміти середню кривизну поверхні в тій точці, під якою визначається тиск. Таким чином, у загальному випадку

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (9.12)$$

Ця формула називається **формулою Лапласа**.

Поверхневий натяг приводить до того, що поблизу стінок посудини поверхня рідини викривляється (дотична до поверхні рідини утворює зі стінкою кут, який дорівнює крайовому куту, що, як правило, відмінний від $\pi/2$). У вузькій круглій трубці, яку називають **капіляром**, або у вузькому зазорі між двома стінками викривленою виявляється уся поверхня (рис. 9.15). Вигнуті поверхні рідини в капілярах називаються **менісками**. Якщо рідина змочує стінки капіляра, меніск має ввігнуту форму, якщо не змочує – опуклу форму.

Коли капіляр занурений одним кінцем у рідину, налиту в широку посудину, тиск під меніском відрізняється від тиску під плоскою поверхнею в широкій посудині на величину Δp , яка обумовлена формулою (9.12). У результаті рівень рідини в капілярі при змочуванні буде вище, ніж у посудині, а при незмочуванні – нижче. Піднімання або опускання рівня рідини у вузьких трубках одержало назву **капілярності**. У широкому змісті під капілярними явищами розуміють всі явища, що обумовлені поверхневим натягом.

Між рідиною в капілярі й у широкій посудині встановлюється різниця рівнів h , при якій капілярний тиск Δp урівноважується гідростатичним тиском ρgh :

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho gh, \quad (9.13)$$

де R радіус кривизни меніска. З рис. 9.15 бачимо, що радіус кривизни меніска й радіус капіляра пов'язані співвідношенням $R = r/\cos\vartheta$, де ϑ – крайовий кут. Підставивши це значення R в (9.12) і розв'язавши отриману рівність відносно h , прийдемо до формули

$$h = \frac{2\sigma \cos\vartheta}{\rho gr}, \quad (9.14)$$

де σ – поверхневий натяг на границі рідина – газ; ϑ – крайовий кут; ρ – густина рідини; g – прискорення вільного падіння; r – радіус капіляра.

Якщо рідина змочує стінки капіляра, кут ϑ гострий, відповідно $\cos\vartheta$, а отже, і h додатні (рідина піднімається в капілярі). Якщо рідина не змочує стінки капіляра, то кут ϑ тупий, відповідно $\cos\vartheta$, а виходить, і h від'ємні (рідина опускається в капілярі).

Капілярністю пояснюються багато явищ, наприклад усмоктування рідин промокальним папером і тканинами (рушниками), підняття гасу по гноту, підйом ґрунтових вод у ґрунті й ін.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 2

1. Чи є сталою величиною молярний об'єм ідеального газу?
2. Чому розподіл молекул за швидкостями дає змогу лише визначити, яка частина молекул має швидкості, що лежать у деякому інтервалі швидкостей, а не яка частина молекул має точно задану швидкість?
3. Вивести вирази для середньоквадратичної швидкості, найбільш ймовірного модуля швидкості та середнього значення модуля швидкості частинок ідеального газу.
4. Вивести вираз для тиску ідеального газу та рівняння стану ідеального газу.
5. Швидкості газових молекул є близькими до швидкості звуку в тому самому газі. Що це означає фізично?
6. Як змінюється склад повітря зі збільшенням висоти?

7. Який механізм передачі теплоти від гарячого до холодного тіла?
8. Відомо, що температура пропорційна середній енергії поступального руху молекул. За допомогою прискорювача був отриманий пучок заряджених частинок, що рухаються в одному напрямі з однаковою великою швидкістю. Чи буде пучок еквівалентним газу, нагрітому до високої температури?
9. Який стан термодинамічної системи визначається як рівноважний?
10. Який з наведених процесів є зворотним: ізохорний, ізобарний, ізотермічний, адіабатний?
11. Вивести вираз для роботи ідеального газу.
12. Чому робота газу залежить від виду процесу розширення?
13. Навести визначення внутрішньої енергії ідеального газу та вказати вираз для внутрішньої енергії ідеального газу в різних випадках.
14. Піч нагріває повітря в кімнаті, і його температура зростає. Чи змінюється при цьому внутрішня енергія повітря в кімнаті?
15. Сформулювати перший закон термодинаміки.
16. Дати визначення ізобарного, ізохорного, ізотермічного та адіабатного процесів. Вивести рівняння адіабати.
17. Вивести вирази для роботи ідеального газу при ізобарному, ізохорному, ізотермічному та адіабатному процесів.
18. Назвіть основні властивості ентропії.
19. Як змінюється ентропія ідеального газу під час його ізотермічного розширення? Яке статистичне тлумачення можна надати цьому процесу?
20. Як змінюється ентропія ідеального газу під час його ізохорного нагрівання? Яке статистичне тлумачення можна надати цьому процесу?
21. Як змінюється ентропія ідеального газу під час його адіабатного розширення? Яке статистичне тлумачення можна надати цьому процесу?
22. При ізотермічному розширенні ідеального газу вся теплота, що одержав газ, повністю перетворюється в роботу. Чи не порушується при цьому другий закон термодинаміки?

23. Дати визначення термодинамічного циклу. Навести вираз для ККД термодинамічного циклу.
24. Надати визначення циклу Карно та вивести вираз для ККД циклу Карно. Сформулювати теорему Карно.
25. Навести визначення теплоємності. Отримати вираз для теплоти при сталій теплоємності.
26. Знайти вирази для теплоємностей ідеального газу при сталому тиску та при сталому об'ємі. Знайти відношення цих теплоємностей.
27. Сформулювати поняття оборотного та необоротного процесів.
28. Навести поняття ентропії, сформулювати другий закон термодинаміки. Вивести вираз для ентропії ідеального одноатомного газу.
29. Вивести рівняння Ван-дер-Ваальса для довільної кількості речовини.
30. Який механізм виникнення сил тертя в газах і рідинах?

Розділ 3 ЕЛЕКТРИКА

Тема 10 Електричне поле у вакуумі

10.1 Закон збереження електричного заряду. Закон Кулона. Електричне поле. Напруженість електричного поля. Принцип суперпозиції електричних полів.

Тіла, які діють на навколишні предмети електричними силами, називають електризованими або зарядженими й говоримо, що на цих тілах знаходяться електричні заряди. Явище виникнення на тілах електричних зарядів називають *електризацією тіл*.

Додатно зарядженими називають тіла, які діють на інші заряджені тіла так само як скло, що наелектризоване тертям об шовк. Від'ємно зарядженими називають тіла, які діють так само, як сургуч, що наелектризований тертям об вовну. З дослідів випливає, що однойменні заряди відштовхуються, різнойменні – притягаються. З точки зору будови речовини носіями електричних зарядів є елементарні частинки (елементарними частинками є найменші неподільні частинки матерії). Так елементарними частинками є електрон, протон, нейтрон. Було з'ясовано, що електричний заряд майже усіх елементарних частинок (якщо він не дорівнює нулю) є однаковим за абсолютною величиною і є найменшим електричним зарядом, що зустрічається в природі. Цей заряд називають елементарним зарядом. Експериментально знайдено, що він дорівнює $e=1,602176487(40)\cdot 10^{-19}$ Кл. Зокрема, елементарними частинками є електрон (має заряд $-e$), протон (має заряд $+e$) і нейтрон (заряд дорівнює нулю).

Усякий заряд q утворюється сукупністю елементарних зарядів, тому він є цілим кратним e :

$$q = \pm Ne . \quad (10.1)$$

Електричні заряди можуть виникати й зникати. Однак завжди виникають або зникають одночасно два елементарних заряди різних знаків. Наприклад, електрон і позитрон (додатній електрон) при зустрічі анігілюють, тобто

перетворюються в нейтральні частинки, що називаються гамма-фотонами. При цьому зникають заряди $-e$ й $+e$.

Таким чином, в природі виконується **закон збереження електричного заряду**, що стверджує, що **сумарний заряд електрично ізольованої системи не може змінюватися**.

Якщо розмірами зарядженого тіла можна знехтувати у порівнянні з відстанями до інших тіл, то таке тіло називають **точковим зарядом**. **Закон Кулона** стверджує, що сила взаємодії двох нерухомих точкових зарядів, які знаходяться у вакуумі, пропорційна величинам зарядів q_1 і q_2 , і обернено пропорційна квадрату відстані r між ними:

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}, \quad (10.2)$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Сила направлена уздовж прямої, що з'єднує заряди. Закон Кулона можна виразити у векторній формі:

$$\vec{F}_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}. \quad (10.3)$$

Тут \vec{F}_2 – сила, що діє на заряд q_2 , до якого проведено вектор \vec{r}_{12} від заряду q_1 (рис. 10.1). У випадку однойменних зарядів сила \vec{F}_2 направлена уздовж \vec{r}_{12} . Якби заряди були різнойменними, вектори \vec{F}_2 й \vec{r}_{12} були б направлені в протилежні боки.

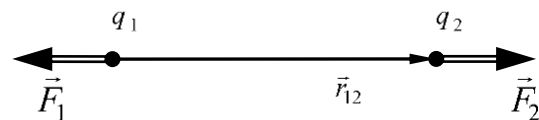


Рис. 10.1 Взаємодія двох однойменних зарядів. У випадку різнойменних зарядів сили \vec{F}_1 й \vec{F}_2 мали б зворотні напрямки

Нехай крім заряду q є заряди q_1, q_2, \dots, q_N . Тоді результуюча сила \vec{F} , з якої діють на q усі N зарядів q_i , визначається формулою

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (10.4)$$

де \vec{F}_i сила, з якої діє на q заряд q_i за умови відсутності інших $N-1$ зарядів. Про цю властивість говорять як про **принцип суперпозиції електричних сил**.

У Міжнародній системі одиниць (СІ) одиниця заряду, яка називається **кулоном** (Кл). Коефіцієнт k у формулі (10.2) дорівнює $k=9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл². Коефіцієнт пропорційності в законі Кулона подають у вигляді $k=1/4\pi\epsilon_0$. Тоді формула, що виражає закон Кулона, набере вигляд:

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}. \quad (10.5)$$

Величину ϵ_0 називають **електричною сталою**. Зрозуміло, що $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл². Звідки,

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ Кл}^2 / (\text{Н} \cdot \text{м}^2) = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ Ф} / \text{м} \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} / \text{м}, \quad (10.6)$$

де Ф (фарад) – одиниця ємності.

Взаємодія між електричними зарядами передається за допомогою особливого матеріального посередника, який називається **електромагнітним полем**. Усякий електричний заряд збуджує в навколишньому його просторі електричне поле. **Електричне поле** – матеріальний об'єкт, який проявляє себе в тому, що на поміщений у будь-яку його точку електричний заряд діє сила.

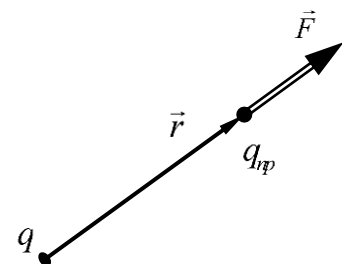


Рис. 10.2

Проведемо дослідження поля нерухомого точкового заряду q_1 за допомогою точкового пробного заряду q_{np} . У точці, положення якої відносно заряду q_1 визначається радіус-вектором \vec{r} (рис. 10.2), на пробний заряд у відповідності до закону Кулона буде діяти сила

$$\vec{F} = q_{np} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^3} \vec{r} \right). \quad (10.7)$$

З формули (10.7) випливає, що відношення \vec{F} / q_{np} не залежить від величини пробного заряду. Це відношення залежить тільки від величин q_1 і \vec{r} , які визначають поле в даній точці. Тому це відношення використовують як величину, що характеризує електричне поле. Позначивши цю величину буквою \vec{E} , напишемо співвідношення

$$\vec{E} = \vec{F} / q_{np}. \quad (10.8)$$

Векторну величину \vec{E} називають **напруженістю електричного поля** в даній точці простору.

З формули (10.7) та (10.8) випливає, що **напруженість поля точкового заряду** q_1 визначається виразом

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^3} \vec{r}, \quad (10.9)$$

де \vec{r} - радіус-вектор, проведений від заряду q_1 в дану точку поля. Направлений вектор \vec{E} уздовж радіальної прямої, яка обумовлена ортом \vec{e}_r , від заряду, якщо він додатний, і до заряду, якщо він від'ємний.

Згідно з (10.28) на точковий заряд q у точці поля з напруженістю \vec{E} діє сила

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (10.10)$$

Як відомо, для електричних сил виконується принцип суперпозиції електричних сил.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i,$$

де \vec{F}_i сила, з якою заряд q_i діє на точковий q за умови відсутності інших $N-1$ зарядів. Підставимо це співвідношення в (10.10), проведемо перетворення і отримаємо

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i / q) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i.$$

Тобто напруженість поля системи зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей полів, які створював би кожний із зарядів окремо:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i. \quad (10.11)$$

Таким чином, поля складаються, не збурюючи один одне. Це твердження називають *принципом суперпозиції електричних полів*.

10.2 Робота під час переміщення заряду в електростатичному полі. Потенціал електричного поля. Зв'язок між напруженістю електростатичного поля і потенціалом. Силкові лінії та екіпотенціальні поверхні.

Розглянемо нерухомий точковий електричний заряд q_1 , який створює у вакуумі електричне поле $\vec{E} = (q_1 / 4\pi\epsilon_0 r^3) \cdot \vec{r}$. Нехай у цьому полі переміщується інший точковий заряд q , який переходить із початкового положення 1 в кінцеве положення 2 вздовж довільної кривої 12 (рис. 10.3). Визначимо роботу, яку виконують сили поля при такому переміщенні.

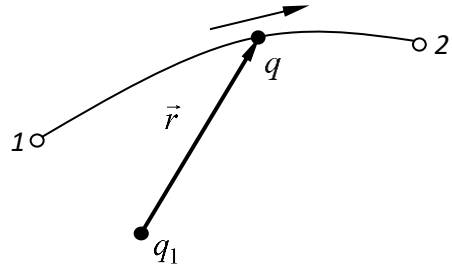


Рис. 10.3

Відповідно до закону Кулона на точковий заряд q з боку заряду q_1 діє сила

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{r^3} \vec{r} = q\vec{E}, \quad (10.12)$$

де \vec{E} – напруженість поля, що створюється зарядом q_1 . Використаємо визначення роботи сили на ділянці 12 і отримуємо

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} d\vec{r}}{r^3} = \int_1^2 \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r dr}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{r_2}. \quad (10.13)$$

Таким чином, при будь-якому виборі початкової й кінцевої точок 1 і 2 робота A_{12} не залежить від форми шляху, а визначається тільки положеннями цих точок. Силкові поля, що задовольняють такій умові, називаються потенціальними або консервативними. Отже, електростатичне поле точкового заряду є потенціальним.

Знайдемо потенціальну енергію точкового заряду q в полі заряду q_1 . Відомо, що робота консервативних сил може бути подана як зменшення потенціальної енергії:

$$A_{12} = W_{p,1} - W_{p,2}.$$

Порівняння цього співвідношення з формулою (10.13) дає для потенційної енергії, яку має заряд q у полі заряду q_1 , вираз

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{r} + const.$$

Значення константи у даному випадку вибирається так, щоб при віддаленні заряду q від заряду q_1 на нескінченність (тобто для $r = \infty$) потенціальна енергія ставала такою, що дорівнює нулю. За такої умови впливає, що $const = 0$, і потенціальна енергія заряду q у полі заряду q_1 має вигляд

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{r}. \quad (10.14)$$

Скалярна величина, що дорівнює відношенню потенціальної енергії до її електричного заряду

$$\varphi = \frac{W_p}{q} \quad (10.15)$$

не залежить від величини заряду q й може бути використана для характеристики поля. Ця величина називається **потенціалом поля** в даній точці. Дійсно, у випадку точкового заряду Q потенціал його поля буде мати вигляд

$$\varphi = \frac{W_p}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} \quad (10.16)$$

і не буде залежати від заряду q , а буде визначатися тільки величинами q_1 і r , які характеризують поле в даній точці.

Відповідно до формули (10.15) заряд q , що знаходиться в точці поля з потенціалом φ , має потенційну енергію

$$W_p = q\varphi. \quad (10.17)$$

Використовуючи (10.17), виразимо роботу сил поля над зарядом q через різницю потенціалів:

$$A_{12} = W_{p,1} - W_{p,2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (10.18)$$

Таким чином, робота, що виконується над зарядом силами поля, дорівнює добутку заряду на зменшення потенціалу.

Відповідно до принципу суперпозиції електричних полів робота, яка виконується над зарядом q силами поля, що створено системою зарядів q_i , дорівнює

$$A_{12} = \int_1^2 q \vec{E} d\vec{r} = \int_1^2 q (\sum \vec{E}_i) d\vec{r} = \sum \left(\int_1^2 q \vec{E}_i d\vec{r} \right) = \sum (A_{12})_i, \quad (10.19)$$

де $(A_{12})_i$ робота, яка була б виконана над зарядом q силами поля, що створювалось одним лише зарядом q_i .

Відповідно до формули (10.8) роботу A_{12} можна подати у вигляді $A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$, де φ – потенціал результуючого поля. Аналогічно можна подати роботу $(A_{12})_i = q(\varphi_{i1} - \varphi_{i2})$, де φ_i потенціал поля, який створював би заряд q_i . Підставивши ці вирази у формулу (10.16), прийдемо до співвідношення

$$q(\varphi_1 - \varphi_2) = \sum q(\varphi_{i1} - \varphi_{i2}) = q(\sum \varphi_{i1} - \sum \varphi_{i2}),$$

з якого випливає, що потенціал системи зарядів дорівнює

$$\varphi = \sum \varphi_i. \quad (10.20)$$

Таким чином, потенціал поля, який створюється системою зарядів, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, що створюється кожним із зарядів окремо.

За одиницю потенціалу в системі СІ беруть вольт (В), який дорівнює, виходячи з визначення потенціалу (10.15) $1В = \frac{1Дж}{1Кл}$.

Електростатичне поле можна описати або за допомогою векторної величини \vec{E} , або за допомогою скалярної величини φ . Очевидно, що ці величини повинні бути зв'язані один з одним тому, що описують один і той же матеріальний

об'єкт – електричне поле. Знайдемо зв'язок між напруженістю електричного поля \vec{E} та потенціалом φ .

Відповідно до визначень напруженості електричного поля та потенціалу можемо записати

$$\vec{F} = q\vec{E}, \quad W_p = q\varphi, \quad (10.21)$$

де \vec{F} є силою, з якою електричне поле діє на точковий заряд q ; W_p є потенціальною енергією точкового заряду q в електричному полі. Як відомо, між консервативною силою та потенціальною енергією, яка відповідає цій консервативній силі, існує зв'язок

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}W_p, \quad (10.22)$$

де $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$ – оператор набла. Підставимо в (10.22) вирази (10.21) і

отримаємо після скорочення на q співвідношення

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi, \quad (10.23)$$

відповідно до якого **напруженість електростатичного поля дорівнює градієнту потенціалу, узятому зі зворотним знаком.**

За допомогою (10.23) можна за відомою функцією $\varphi(x, y, z)$ знайти напруженість поля в кожній точці поля. Можна вирішити й зворотне завдання – знаючи функцію $\vec{E}(x, y, z)$, знайти різницю потенціалів між двома довільними точками поля. Для цього скористаємося тим, що робота A_{12} , яка виконується силами поля над зарядом q при переміщенні його по довільній траєкторії із точки 1 у точку 2, визначається інтегралом $A_{12} = \int_1^2 q\vec{E}d\vec{l}$. Також цю роботу можна подати у вигляді $A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$. Порівнюючи обидва вирази й скоротивши на q , отримаємо

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} . \quad (10.24)$$

Інтеграл можна брати по будь-якій лінії, що з'єднує точки 1 і 2, через те, що робота сил електростатичного поля не залежить від шляху.

Для графічного зображення електричного поля вводять поверхні рівного потенціалу та силові лінії електричного поля.

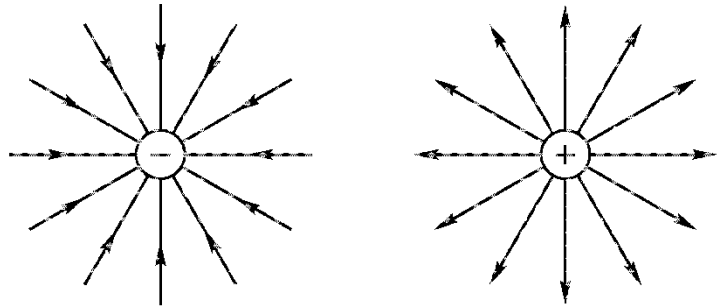


Рис. 10.4

Силовую лінією електричного поля

називають математичну лінію, дотична до якої у довільній точці цієї лінії є паралельною до вектора напруженості електричного поля в цій же точці. За додатний напрямок силової лінії домовилися вважати напрямком вектора \vec{E} . При такій умові можна сказати, що електричні силові лінії починаються на додатних зарядах і закінчуються на від'ємних. Можна показати, що в просторі, вільному від електричних зарядів, силові лінії йдуть густіше там, де поле \vec{E} сильніше, і рідше там, де воно слабше. Тому за густотою силових ліній можна судити й про величину напруженості електричного поля. На рис. 10.4 зображені силові лінії рівномірно заряджених кульок – додатного і від'ємного, а на рис. 10.5 – двох різнойменних і однойменних зарядів рівної величини, які розміщені на таких кульках.

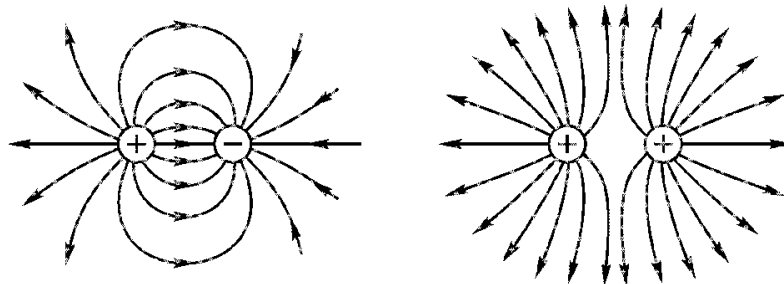


Рис. 10.5

Уявна поверхня, всі точки якої мають однаковий потенціал, називається **поверхнею рівного потенціалу або еквіпотенціальною поверхнею**.

Покажемо, що силові лінії електричного поля завжди перпендикулярні еквіпотенціальним поверхням. Для цього розглянемо елементарне переміщення $d\vec{l}$ електричного заряду q вздовж еквіпотенціальної поверхні. Через те, що в цьому випадку і початкова і кінцева точки будуть розміщені у еквіпотенціальній поверхні, елементарна робота при переміщенні заряду q буде дорівнювати нулю

$$dA = -q \cdot d\varphi = -q(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad (10.25)$$

($\varphi_1 = \varphi_2$, точки 1 та 2 належать одній еквіпотенціальній поверхні). З іншого боку, використовуючи визначення роботи, знаходимо

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\vec{E} \cdot d\vec{l} = qE \cdot dl \cdot \cos\alpha, \quad (10.26)$$

де α кут між векторами \vec{E} та $d\vec{l}$.

Порівнюючи (10.25) та (10.26) знаходимо, що для довільної $d\vec{l}$, яка дотична до еквіпотенціальної поверхні, виконується умова

$$E \cdot dl \cdot \cos\alpha = 0.$$

Ми розглядаємо випадок, коли $E \neq 0$, $dl \neq 0$. Це означає, що $\cos\alpha = 0$. Звідси випливає, що вектор напруженості електричного поля \vec{E} , отже, і силова лінія завжди перпендикулярні до еквіпотенціальної поверхні.

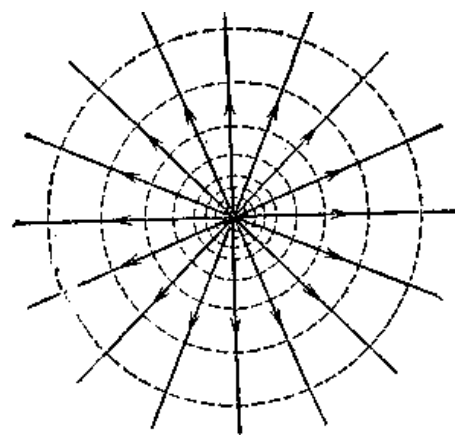


Рис. 10.6

Еквіпотенціальну поверхню можна провести через будь-яку точку поля. Однак доцільно проводити поверхні так, щоб різниця потенціалів між сусідніми поверхнями була однаковою (наприклад, 1 В). Тоді за густиною еквіпотенціальних поверхонь можна судити про модуль напруженості поля: там де поверхні густіше, потенціал змінюється уздовж лінії поля швидше й, отже, напруженість поля більша; там де поверхні рідше, напруженість поля менше. На рис. 10.6 зображені силові лінії \vec{E} (суцільні) і лінії

перетину екіпотенціальних поверхонь із площиною креслення (штрихові) для поля точкового заряду.

10.3 Поле електричного диполя. Теорема Гаусса для вектора напруженості електричного поля.

Електричним диполем називається система двох точкових зарядів $+q$ та $-q$, відстань l між якими мала у порівнянні з відстанями до тих точок, у яких розглядається поле системи. Орієнтацію диполя в просторі можна задати за допомогою вектора \vec{l} , який проведено від заряду $-q$ до заряду $+q$. Диполь характеризується *дипольним моментом*, який за визначенням дорівнює $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$ ($q = |q|$). Прикладом диполя може служити молекула. Дипольний момент являє собою важливу характеристику молекули.

Знайдемо потенціал електричного поля диполя φ . Обчислимо потенціал поля в точці A , положення якої відносно центра диполя O визначається полярними координатами r й θ (рис. 10.7). Використовуючи теорему косинусів, неважко знайти відстані від точки A до додатного заряду r_+ та до від'ємного заряду r_-

$$r_+ = \left(r^2 + (l/2)^2 - 2r(l/2)\cos\theta \right)^{1/2} \approx \left(r^2 + (l/2)^2 \cos^2\theta - 2r(l/2)\cos\theta \right)^{1/2} = r - (l/2)\cos\theta,$$

$$r_- = \left(r^2 + (l/2)^2 - 2r(l/2)\cos(\pi - \theta) \right)^{1/2} \approx \left(r^2 + (l/2)^2 \cos^2\theta + 2r(l/2)\cos\theta \right)^{1/2} = r + (l/2)\cos\theta.$$

Тут використано, що оскільки $l \ll r$, то $r^2 \pm (l/2)^2 \approx r^2 \pm (l/2)^2 \cos^2\theta$. Тоді для потенціалу в точці A отримуємо

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r - (l/2)\cos\theta} + \frac{(-q)}{r + (l/2)\cos\theta} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql\cos\theta}{r^2 - (l/2)^2 \cos^2\theta} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql\cos\theta}{r^2}. \quad (10.27)$$

У виразі (10.27) ми знехтували у знаменнику другим доданком через те, що $l \ll r$. При $\theta = \pi/2$ вираз (88.1) дорівнює нулю. Таким чином, площина, яка перпендикулярна до осі диполя й проходить через його центр, є екіпотенціальною поверхнею. Це впливає також з того, що точки цієї площини

знаходяться на однаковій відстані від протилежних за знаком зарядів, модуль яких однаковий.

З виразу (10.27) випливає, що потенціал поля диполя визначається модулем векторної величини

$$\vec{p} = q\vec{l} . \quad (10.28)$$

Інтеграл $\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$ називають **поток** **вектора напруженості електричного поля** \vec{E}

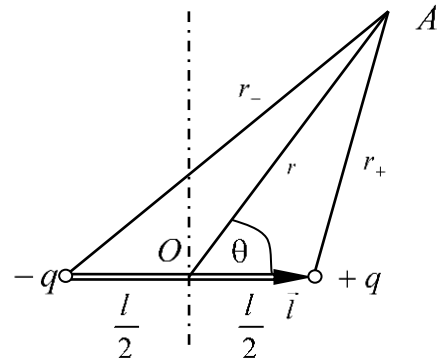


Рис. 10.17

Розглянемо найпростіший випадок, коли поверхня S є сферою, а точковий заряд q розміщено в її центрі. Потік вектора \vec{E} через елементарну площадку цієї сфери дорівнює

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot dS$$

а потік через всю сферу

$$\Phi \equiv \int \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot \int dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot S$$

Поверхня сфери S дорівнює $4\pi r^2$, тому потік вектора \vec{E} через замкнену поверхню дорівнює

$$\Phi \equiv \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} . \quad (10.29)$$

Отримане співвідношення називають **електростатичною теоремою Гаусса**. Ця теорема стверджує, що потік вектора напруженості електростатичного поля через замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів q , які оточені цією поверхнею, поділену на ϵ_0 .

У випадку симетричного розподілу зарядів, а отже, і симетричних полів теорема Гаусса дозволяє знайти напруженість поля достатньо простим способом. Коли заряд зосереджений у тонкому поверхневому шарі тіла, розподіл заряду характеризується за допомогою **поверхневої густини** σ , яка визначається виразом

$$\sigma = dq / dS, \quad (10.30)$$

де під dS розуміємо площу малої ділянки поверхні; dq – заряд, що знаходиться на цій ділянці.

Знайдемо напруженість електричного поля нескінченної рівномірно зарядженої площини, яка має поверхневу густину електричного заряду σ . Для визначеності будемо вважати заряд додатним. З міркувань симетрії випливає, що напруженість поля в будь-якій точці направлена вздовж перпендикуляра до площини. Дійсно, оскільки площина нескінченна й заряджена однорідно, немає ніяких підстав до того, щоб вектор \vec{E} відхилився в будь-який бік від нормалі до площини. Також очевидно, що в симетричних відносно площини точках напруженість поля однакова за величиною й протилежна за напрямком.

Виходячи з вище описаної симетрії поля, виберемо поверхню інтегрування у вигляді циліндра з твірними, які перпендикулярні до площини, і основами величиною ΔS , які розміщені відносно площини симетрично (рис. 10.18).

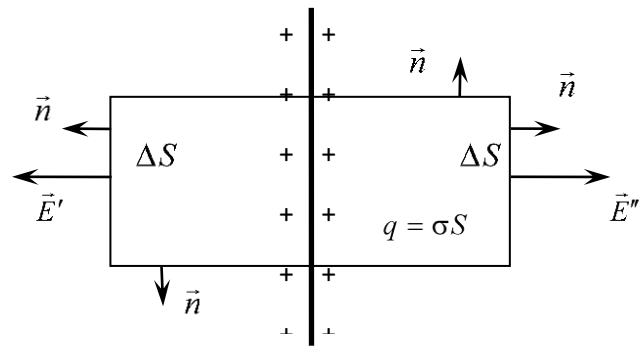


Рис. 10.18

Знайдемо потік вектора \vec{E} через цю поверхню інтегрування. У силу симетрії напруженість електричного поля на кожній основі за модулем є однаковою $E' = E'' = E$. Крім того для основ нормальна складова напруженості електричного поля E_n збігається з E . Тоді потік вектора \vec{E} через одну основу буде $E \cdot \Delta S$, а через обидві основи $2 \cdot E \cdot \Delta S$. Потік через бічну частину поверхні буде відсутній, оскільки E_n у кожній її точці дорівнює нулю (вектор напруженості електричного поля і нормаль до бічної поверхні взаємно перпендикулярні). Тому потік вектора \vec{E} через поверхню інтегрування буде дорівнювати

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{бічн.поверхн.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{основи}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 + 2E \cdot \Delta S = 2E \cdot \Delta S. \quad (10.31)$$

Заряд, що знаходиться всередині поверхні інтегрування (обмежено поверхню інтегрування) неважко знайти (рис. 10.18)

$$q = \sigma \Delta S. \quad (10.32)$$

Далі використаємо теорему Гаусса, згідно якої

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q / \varepsilon_0, \quad (10.33)$$

де q – заряд, який знаходиться всередині поверхні інтегрування.

Підставляємо (10.30) й (10.31) в (10.32) і отримуємо шукану **напруженість електричного поля однорідно зарядженої нескінченної пластини**

$$E = \sigma / (2\varepsilon_0). \quad (10.34)$$

Таким чином, напруженість електричного поля нескінченно зарядженої площини не залежить від відстані до неї. Відзначимо також, що по різні сторони від площини вектори \vec{E} однакові за модулем, але протилежні за напрямком. Тому при переході через заряджену площину напруженість електричного поля змінюється стрибком.

Знайдемо напруженість електричного поля однорідно зарядженої циліндричної поверхні. Якщо заряд знаходиться на дуже тонкому «ниткоподібному» провіднику, розподіл заряду вздовж нитки характеризують за допомогою **лінійної густини** λ , що визначається виразом

$$\lambda = dq / dl, \quad (10.35)$$

де dl – фізично нескінченно малий відрізок нитки; dq – заряд, що знаходиться на цьому відрізку.

Знайдемо напруженість електричного поля нескінченної циліндричної поверхні радіуса R , яка заряджена однорідно з лінійною густиною λ (рис. 10.19). З міркувань симетрії випливає, що напруженість поля в будь-якій точці повинна

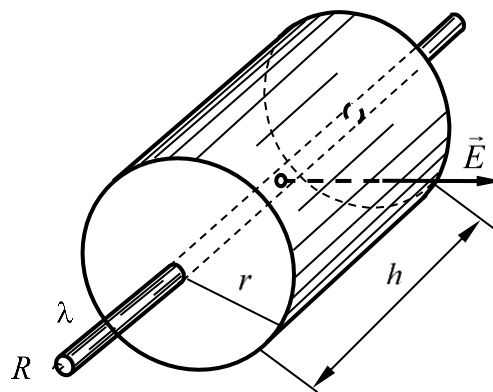


Рис. 10.19

бути направлена уздовж радіальної прямої, яка перпендикулярна до осі циліндра, а величина напруженості може залежати тільки від відстані r до осі циліндра. Виходячи з вище описаної симетрії поля, виберемо поверхню інтегрування у вигляді коаксіального із зарядженою поверхнею циліндра радіуса r й висоти h (рис. 10.19). Знайдемо потік вектора \vec{E} через цю поверхню. Нормальні складові вектора напруженості на бічній поверхні будуть дорівнювати $E_n = E(r)$ (заряд вважаємо додатним), на основі циліндра $E_n = 0$ (вектор напруженості електричного поля і нормаль до основи взаємно перпендикулярні). Тому потік вектора \vec{E} через замкнену поверхню інтегрування буде дорівнювати

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{бічн. поверхн.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{основи}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot S_{\text{бічн.}} + 0 = E(r) \cdot 2\pi r h. \quad (10.36)$$

Тепер знайдемо заряд всередині поверхні інтегрування. Тут потрібно розглянути два випадки. У випадку, коли радіус поверхні інтегрування більше або дорівнює радіусу циліндра $r \geq R$, заряд всередині поверхні інтегрування дорівнює, як це впливає з рисунка,

$$q = \lambda \cdot h, \text{ коли } r \geq R. \quad (10.37)$$

Коли ж $r < R$, то поверхня інтегрування знаходиться всередині циліндричної поверхні, на якій розміщено електричний заряд. Тому в цьому випадку всередині поверхні інтегрування заряд буде дорівнювати нулю

$$q = 0, \text{ коли } r < R. \quad (10.38)$$

Тепер використаємо теорему Гаусса

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (10.39)$$

Підставивши в (10.39) формули (10.36) й (10.37) для першого випадку отримаємо

$$E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \text{ або } E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \text{ коли } r \geq R. \quad (10.40)$$

Для другого випадку підставляємо в (10.39) формули (10.36) й (10.38). Звідси,

$$E(r) = 0, \text{ коли } r < R. \quad (10.41)$$

Таким чином, отримали формули (10.40) та (10.41), які визначають **напруженість електричного поля від нескінченної циліндричної поверхні радіуса R , яка заряджена однорідно з лінійною густиною λ .**

Знайдемо напруженість електричного поля об'ємно зарядженої кулі. **Об'ємна густина електричного заряду ρ** визначається як відношення заряду dq до фізично нескінченно малого об'єму dV , у якому знаходиться цей заряд:

$$\rho = dq / dV. \quad (10.42)$$

Знайдемо напруженість електричного поля нескінченної об'ємно зарядженої кулі радіуса R , яка має густину електричного заряду ρ (рис. 10.20). З

міркувань симетрії випливає, що поле, яке створюється електричним зарядом кулі, буде центральносиметричним.

Це означає, що напрямок вектора \vec{E} в будь-якій

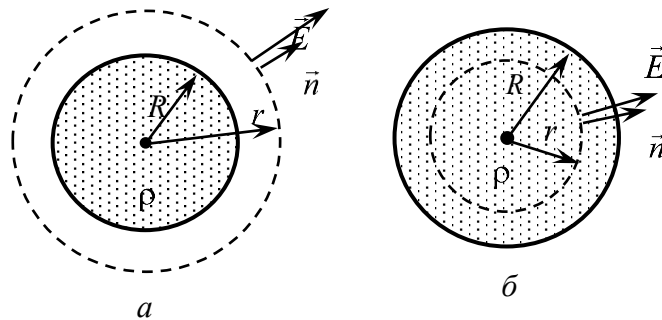


Рис. 10.20

точці проходить через центр кулі, а величина напруженості є функцією відстані r від центра кулі. Виходячи з вище описаної симетрії поля, виберемо поверхню інтегрування у вигляді концентричної із зарядженою кулею сферичну поверхню радіуса r (на рис. 10.20 зображена пунктирною лінією). Для всіх точок цієї

поверхні $E_n = E(r)$ (заряд кулі вважаємо додатним, вектор напруженості електричного поля і нормаль до поверхні інтегрування є паралельними). Тому потік вектора \vec{E} через замкнену поверхню інтегрування буде дорівнювати

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot S = E(r) \cdot 4\pi r^2. \quad (10.43)$$

Тепер знайдемо заряд всередині поверхні інтегрування. Тут потрібно розглянути два випадки: *a* і *б*, див. рис. 10.20. У випадку *a*, коли радіус поверхні інтегрування більше або дорівнює радіусу кулі $r \geq R$, заряд всередині поверхні інтегрування дорівнює, як це випливає з рисунка, заряду усієї кулі

$$q_{кулі} = \rho \cdot V_{кулі} = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R^3, \text{ коли } r \geq R. \quad (10.44)$$

Коли ж $r < R$ (випадок *б*, рис. 10.20), то поверхня інтегрування знаходиться всередині кулі. Тому всередині поверхні інтегрування буде знаходитися тільки частина заряду кулі, яка дорівнює

$$q = \rho \cdot V_{пов. інтегрування} = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3, \text{ коли } r < R. \quad (10.45)$$

Тепер використаємо теорему Гаусса

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (10.46)$$

Підставивши в (10.46) формули (10.43) й (10.44) для випадку *a* отримаємо

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{кулі}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi \cdot R^3 \cdot \rho}{3 \cdot \epsilon_0} \text{ або } E(r) = \frac{q_{кулі}}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2}, \text{ коли } r \geq R. \quad (10.47)$$

Для випадку *б* підставляємо в (10.46) формули (10.43) й (10.45). Звідси,

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi \cdot r^3 \cdot \rho}{3 \cdot \epsilon_0} \text{ або } E(r) = \frac{r\rho}{3\epsilon_0}, \text{ коли } r < R. \quad (10.48)$$

Як бачимо, за межами кулі поле збігається з полем точкового заряду тієї ж величини, що і куля, який поміщено в центр кулі. Всередині ж кулі напруженість поля росте лінійно з відстанню r від центра кулі.

Тема 11 Електричне поле в діелектриках

11.1 Поляризація діелектриків. Теорема Гаусса для діелектриків.

Усі речовини складаються з атомів і молекул. У свою чергу атоми складаються з від'ємно заряджених електронів та додатно заряджених ядер. При внесенні речовини в електричне поле легкі електрони зміщуються у протилежному напрямку по відношенню до напруженості поля. Зміщення атомних ядер порівняно з ними дуже малі. Відбувається частковий поділ додатних і від'ємних зарядів. Завдяки цьому в окремих місцях тіла з'являються макроскопічні заряди різних знаків. Ці заряди, що з'явилися в результаті дії електричного поля, називають *індукованими зарядами*.

Заряди в діелектрику можуть зміщуватися зі своїх положень рівноваги лише на малі відстані, порядку атомних розмірів. Припустимо, наприклад, що діелектрик складається з електрично нейтральних молекул. Під дією прикладеного електричного поля центр ваги електронів (від'ємний заряд) у молекулі ненабагато зміщується відносно центра ваги атомних ядер (додатний заряд). Молекули стають електричними диполями, орієнтованими додатно зарядженими кінцями у напрямку електричного поля \vec{E} . У цьому випадку говорять, що *діелектрик є поляризованим*, а саме зміщення додатних та від'ємних зарядів діелектрика в різні сторони називають *електричною поляризацією*.

Механізм поляризації діелектрика може бути й іншим. Розглянемо, наприклад, діелектрики, молекули яких мають дипольні моменти і за умови відсутності електричного поля. Такі молекули називаються *полярними*. Якщо поле відсутнє, то полярні молекули хаотично рухаються й орієнтовані абсолютно невпорядковано. При накладенні електричного поля дипольні моменти молекул орієнтуються переважно в напрямку поля. А це означає, що діелектрик стає поляризованим. Про такий механізм поляризації говорять як про *орієнтаційний*. Існують і інші механізми поляризації.

Для кількісного опису поляризації діелектрика користуються поняттям вектор поляризації. **Вектором поляризації** в деякій точці простору називають відношення дипольного моменту в фізично малому об'ємі ΔV , який знаходиться біля цієї точки, до величини цього об'єму

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}. \quad (11.1)$$

Нагадаємо, що диполем називають систему двох точкових зарядів $+q$ та $-q$, відстань l між якими мала порівняно з відстанями до тих точок, у яких розглядається поле системи. Орієнтацію диполя в просторі задають за допомогою вектора \vec{l} , який проведено від заряду $-q$ до заряду $+q$. Диполь характеризується дипольним моментом, який за визначенням дорівнює $\vec{p} = |q| \cdot \vec{l}$. Прикладом диполя є поляризована молекула. Дипольний момент являє собою важливу характеристику молекули.

Знайдемо зв'язок між вектором поляризації та густиною зв'язаних зарядів. Розглянемо частину однорідного ізотропного діелектрика, який має форму косоного паралелепіпеда (рис. 11.1). Помістимо його в

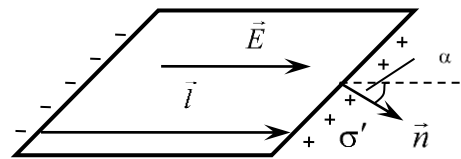


Рис. 11.1

однорідне електричне поле, яке направлено паралельно бічним ребрам. На основах паралелепіпеда з'являться поляризаційні заряди з поверхневою густиною σ' (тут і далі величини, які пов'язані зі зв'язаним зарядом, будемо позначати штрихом біля відповідного символу). На бічних гранях поляризаційних зарядів не виникне, тому що зміщення зарядів усередині діелектрика відбувається паралельно електричному полю \vec{E} , а отже, і цим граням. Якщо S – площа основи паралелепіпеда, то на основах з'явиться електричний заряд $q = S \cdot \sigma'$. Загальний дипольний момент косоного паралелепіпеда з діелектрика буде дорівнювати

$$q \cdot \vec{l} = S \cdot \sigma' \cdot \vec{l},$$

де \vec{l} – вектор, який проведено від від’ємної основи паралелепіпеда до додатної паралельно бічним ребрам. Згідно з означенням (11.1) можемо записати вектор поляризації цього паралелепіпеда у вигляді

$$\vec{P} = \frac{q \cdot \vec{l}}{V} = \frac{S \cdot \sigma'}{V} \vec{l}, \quad (11.2)$$

де V – об’єм паралелепіпеда. Нехай \vec{n} – одиничний вектор зовнішньої нормалі до основи паралелепіпеда, яка заряджена додатно. Тоді $V = S \cdot l \cdot \cos \alpha = S \cdot (\vec{l} \cdot \vec{n})$. У цій формулі α – кут між векторами \vec{l} та \vec{n} . Підставивши це значення у формулу (11.2) і помноживши її скалярно на \vec{n} , знайдемо

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = \frac{S \cdot \sigma'}{S \cdot (\vec{l} \cdot \vec{n})} \vec{l} \cdot \vec{n} = \sigma',$$

або

$$\sigma' = P_n. \quad (11.3)$$

Формула (11.3) була доведена для додатно зарядженої основи. Але вона вірна й для від’ємно зарядженої основи, тому що на ній зовнішня нормаль \vec{n} направлена у протилежну сторону, і тому проекція P_n від’ємна. Формула справедлива й на бічній поверхні паралелепіпеда, тому що на ній, як ми бачили, $\sigma' = 0$, що узгоджується з формулою (11.3). Таким чином, формула (11.3) є справедлива і в загальному випадку.

Формула (11.3) показує, що нормальна складова P_n чисельно дорівнює електричному заряду, що зміщується при поляризації через одиничну площу в напрямку нормалі \vec{n} до неї. Ця інтерпретація є вірною й у випадку неоднорідної поляризації. Тобто для такої, коли вектор \vec{P} змінюється від точки до точки. Щоб переконатися в цьому, досить уявно розділити діелектрик на малі об’єми, у межах кожного з яких поляризація може вважатися однорідною.

Як сказано вище, при неоднорідній поляризації поляризаційні заряди можуть з’являтися не тільки на поверхні, але й в об’ємі діелектрика. Обчислимо тепер величину поляризаційних зарядів всередині діелектрика. Виділимо уявно

в діелектрику довільний об'єм V , який обмежений замкненою поверхнею S (рис. 11.2).

Заряд, який зміщується при поляризації через площадку dS у напрямку нормалі \vec{n} , відповідно до формули (11.3) дорівнює $P_n \cdot dS$. Щоб знайти, який заряд вийде на всю поверхню S , потрібно просумувати (проінтегрувати) заряди на кожній елементарній площі

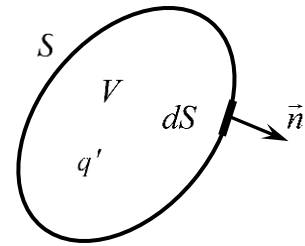


Рис. 11.2

dS цієї поверхні: $\oint P_n dS$. Діелектрик до поляризації був електрично нейтральним. Тому згідно закону збереження електричного заряду всередині діелектрика повинен знаходитися заряд, який рівний за модулем та протилежний за знаком до заряду, що вийшов на поверхню. Таким чином, всередині діелектрика при неоднорідній поляризації буде знаходитись електричний заряд

$$q' = -\oint_S P_n dS = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}. \quad (11.4)$$

Використовуючи теорему Остроградського-Гаусса для вектора поляризації $\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{P} \cdot dV$ та зв'язок заряду з об'ємною густиною електричного заряду $q' = \int_V \rho' \cdot dV$ з (11.4) неважко знайти густину зв'язаних зарядів в діелектрику

$$\text{div} \vec{P} = -\rho'. \quad (11.5)$$

Із співвідношення (11.5) випливає, що коли поляризація діелектрика є однорідною ($\vec{P} = \overrightarrow{\text{const}}$), то $\rho' = 0$, а отже і $q' = \int_V \rho' \cdot dV = 0$. Тобто, коли поляризація діелектрика є однорідною, то всередині діелектрика зв'язані заряди відсутні.

Джерелом електричного поля в електростатиці є електричні заряди і не важливо, чи вони є сторонніми, чи зв'язаними. Тому для обчислення електричного поля у діелектриках необхідно враховувати як вільні, так і сторонні електричні заряди.

Тому теорему Гаусса для електричного поля у діелектрику потрібно записати у вигляді

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (q + q'), \quad (11.6)$$

де q та q' є відповідно вільні та сторонні заряди, які розміщені всередині поверхні S . Візьмемо до уваги, що

$$q' = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}.$$

Тоді отримаємо

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = q, \quad (11.7)$$

Введемо новий вектор

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (11.8)$$

який називається вектором *електричної індукції або електричного зміщення*.

Тоді

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q. \quad (11.9)$$

Вираз (11.9) і є *теоремою Гаусса для електричного поля в діелектрику в інтегральній формі*. Бачимо, що потік вектора \vec{D} через замкнену поверхню визначається тільки вільними зарядами всередині цієї поверхні. Саме цим і виправдовується введення вектора \vec{D} .

Використовуючи теорему Остроградського-Гаусса для вектора електричної індукції $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{D} \cdot dV$ та зв'язок заряду з об'ємною густиною електричного заряду $q = \int_V \rho \cdot dV$ з (11.9) неважко знайти теорему Гаусса для електричного поля в діелектрику в диференціальному вигляді

$$\text{div} \vec{D} = \rho. \quad (11.10)$$

11.2 Поляризованість і діелектрична проникність.

Яким чином можна знайти напруженість електричного поля у діелектрику \vec{E} ? Зрозуміло, що електричне поле у речовині буде відрізнятися від зовнішнього через те, що в речовині індуються поляризаційні заряди. Ці індуквані заряди

створюють власне електричне поле \vec{E}' , яке накладається на зовнішнє \vec{E}_0 .
Результуюче поле буде дорівнювати

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (11.11)$$

І при цьому потрібно врахувати, що поле поляризаційних зарядів \vec{E}' визначається поляризаційними зарядами, які в свою чергу залежать від результуючого поля \vec{E} .

Принципово знайти напруженість електричного поля в діелектрику \vec{E} можна таким чином: 1) завдяки теоремі Гаусса для діелектрика можна знайти вектор індукції електричного поля \vec{D} , виходячи з інформації про сторонні заряди; 2) використовуючи отриману індукцію електричного поля \vec{D} та зв'язок між \vec{E} та \vec{D} , можемо знайти шукану напруженість електричного поля \vec{E} .

Таким чином, для розв'язання вище сформованої задачі потрібно знати зв'язок між напруженістю електричного поля \vec{E} та індукцією \vec{D} (або вектором поляризації \vec{P}).

З'ясуємо зв'язок між напруженістю електричного поля \vec{E} та індукцією \vec{D} в діелектрику. Дослід показує, що для великого класу діелектриків і широкого кола явищ зв'язок між векторами \vec{P} і напруженістю поля \vec{E} є лінійним та однорідним. Якщо середовище ізотропне, то вектори \vec{P} й \vec{E} колінеарні й можна записати

$$\vec{P} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (11.12)$$

де α – безрозмірний коефіцієнт, який називається **діелектричною сприйнятливістю або поляризованістю** діелектрика. Цей коефіцієнт залежить від густини й температури діелектрика.

Щоб знайти зв'язок між \vec{D} та \vec{E} використаємо визначення індукції електричного поля

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (11.13)$$

Далі підставляємо в (97.3) формулу (97.2) й отримуємо

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (11.14)$$

де нова безрозмірна величина

$$\varepsilon = 1 + \alpha \quad (11.15)$$

називається **діелектричною проникністю діелектрика**. Цією величиною звичайно й характеризуються індивідуальні властивості діелектриків. Для вакууму $\alpha = 0$ й $\varepsilon = 1$.

Знайдемо умови, яким повинні задовольняти вектори \vec{E} й \vec{D} на межі розділу двох однорідних і ізотропних діелектричних середовищ. Розглянемо достатньо малу ділянку межі, через це її можна вважати плоскою, а поля поблизу неї однорідними. Величини, що характеризують поле в першому середовищі, будемо позначати індексом 1, у другому середовищі – індексом 2 (рис. 11.3).

Помістимо діелектрики у зовнішнє електричне поле \vec{E}_0 . У кожному з діелектриків поблизу поверхні розділу з'являться поляризаційні заряди із густиною σ'_1 та σ'_2 , які будуть мати протилежні знаки. Границя розділу виявиться зарядженою з поверхневою густиною заряду $(\sigma'_1 - \sigma'_2)$, в результаті чого з'явиться додаткове електричне поле

$$E' = (\sigma'_1 - \sigma'_2) / (2\varepsilon_0), \quad (11.16)$$

яке є перпендикулярним до межі розділу й направлене в кожному з діелектриків у протилежні боки (рис. 11.3). Співвідношення (11.16) отримали, використовуючи формулу для електричного поля зарядженої площини. Поле індукованих зарядів \vec{E}' накладається на зовнішнє \vec{E}_0 . У результаті загальне поле дорівнює

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_0. \quad (11.17)$$

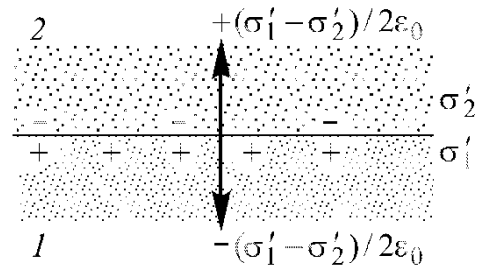


Рис.11.3 Поляризаційні заряди на межі двох діелектриків і створюване ними електричне поле (напрямок поля \vec{E}' в кожному з діелектриків показаний стрілками)

Позначимо напруженість повного (результуючого) поля в кожному з діелектриків через \vec{E}_1 й \vec{E}_2 , розкладемо кожне із цих полів на дві складові: тангенціальну (дотичну) до межі розділу ($E_{\tau 1}$ і $E_{\tau 2}$) і нормальну (перпендикулярну) до границі (E_{n1} і E_{n2}). Будемо вважати, що нормаль направлена від діелектрика 1 до діелектрика 2. Тоді виходячи з (11.17) та того, що \vec{E}' є перпендикулярним до межі, знаходимо

$$E_{\tau 1} = 0 + E_{\tau 0}, \quad E_{n1} = -\frac{\sigma'_1 - \sigma'_2}{2\varepsilon_0} + E_{n0}, \quad (11.18)$$

$$E_{\tau 2} = 0 + E_{\tau 0}, \quad E_{n2} = +\frac{\sigma'_1 - \sigma'_2}{2\varepsilon_0} + E_{n0}. \quad (11.19)$$

З (11.18) і (11.19) легко отримати, що тангенціальні (дотичні) складові електричного поля не змінюються і їх значення в обох діелектриках буде однаковим

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}. \quad (11.20)$$

Це пов'язано з тим, що електричне поле зарядів поверхні розділу є перпендикулярним до цієї поверхні. З (11.18) і (11.19) легко також отримати, що нормальні складові поля будуть різними; їх різниця дорівнює

$$E_{n2} - E_{n1} = +2 \cdot \frac{\sigma'_1 - \sigma'_2}{2\varepsilon_0} = \frac{P_{n1} - P_{n2}}{\varepsilon_0}, \quad (11.21)$$

де P_{n1} і P_{n2} – нормальні складові вектора поляризації в кожному з діелектриків. Нагадаємо, нормальна складова вектора поляризації дорівнює густині зв'язаних або поляризаційних зарядів ($P_n = \sigma'$). Далі співвідношення (11.5) подамо у вигляді

$$\varepsilon_0 E_{n2} + P_{n2} = \varepsilon_0 E_{n1} + P_{n1}$$

або

$$D_{n2} = D_{n1}. \quad (11.22)$$

Тут використали визначення індукції електричного поля. Таким чином, нормальні складові індукції електричного поля не змінюються і їх значення в обох діелектриках буде однаковим.

Якщо використати те, що напруженість та індукція електричного поля пов'язані між собою співвідношенням $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$, то нормальних складових напруженості електричного поля та тангенціальних складових індукції електричного поля можна отримати зв'язок

$$\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}, \quad D_{\tau 1} / \epsilon_1 = D_{\tau 2} / \epsilon_2. \quad (11.23)$$

Таким чином, нормальна складова напруженості електричного поля при переході через межу розділу двох діелектриків стрибком змінює своє значення. Причиною цього є наявність індукованого електричного заряду на межі поділу двох діелектриків. Також стрибком змінює значення і тангенціальна складова індукції електричного поля.

Розглянемо електричне поле усередині діелектричної пластини, яка розміщена перпендикулярно до напрямку поля. Припустимо, що однорідне електричне поле за умови відсутності діелектрика дорівнює \vec{E}_0 . Внесемо в це поле пластину з діелектрика з проникністю ϵ , розмістивши її перпендикулярно до напрямку поля \vec{E}_0 (див. рис. 99.1). Під дією поля діелектрик поляризується й на поверхнях пластини з'являються зв'язані заряди густиною $+\sigma'$ та $-\sigma'$. Ці заряди створюють поле зв'язаних зарядів \vec{E}' , яке накладається на зовнішнє \vec{E}_0 . Таким чином, результуюче поле буде дорівнювати $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_0$. Для того, щоб знайти результуюче поле \vec{E} використаємо умову на границі двох діелектриків

$$D_n = D_{n0}, \quad (11.24)$$

де $D_n = \epsilon\epsilon_0 E_n = \epsilon\epsilon_0 E$ – нормальна складова вектора індукції електричного поля в діелектрику, $D_{n0} = \epsilon_0 E_{n0} = \epsilon_0 E_0$ – нормальна складова вектора індукції

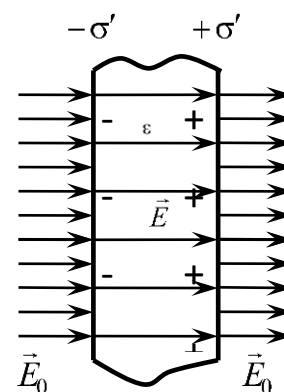


Рис. 11.4 Поле усередині діелектричної пластини, яка розміщена в однорідному зовнішньому полі

електричного поля в вакуумі. Також тут використали, що діелектрична пластинка розміщена перпендикулярно до напрямку поля і тому $E_n = E$, $E_{n0} = E_0$. Тобто напрямки нормалі до поверхні межі діелектрик-вакуум та вектора напруженості електричного поля збігаються між собою. Таким чином, співвідношення (11.24) можемо подати у вигляді

$$\varepsilon \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E_0 \text{ або } \vec{E} = \vec{E}_0 / \varepsilon. \quad (11.25)$$

Через те, що як зовнішнє поле, так і поле в діелектрику є однорідним, то формула (11.25) визначає електричне поле не тільки на межі розділу діелектрик-вакуум, а й у всьому діелектрику. Таким чином, отримали формулу (11.25), яка визначає напруженість електричного поля всередині діелектричної пластини, яка розміщена перпендикулярно до напрямку поля.

Розглянемо електричне поле усередині сферичного шару з діелектрика, в центрі якого розміщено сторонній точковий заряд. Помістимо в центр сферичного шару з діелектрика з проникністю ε сторонній точковий заряд $+Q$ (рис. 11.5). На внутрішній поверхні шару з'явиться від'ємний, а на зовнішній поверхні – додатний зв'язані заряди. Ці заряди будуть розподілені сферично симетрично і тому сферичну симетрію результуючого електричного поля не змінять. Силкові лінії результуючого електричного поля будуть направлені вздовж радіальних ліній.

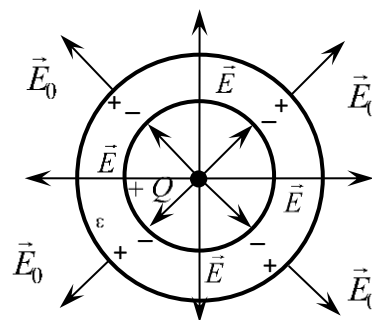


Рис. 11.5 Кульовий шар з діелектрика в центральнo-симетричному електричному полі

Для знаходження електричного поля всередині шару з діелектрика використаємо теорему Гаусса для діелектрика

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q, \quad (11.26)$$

де q – сторонній заряд всередині поверхні інтегрування S .

Виходячи з вище описаної симетрії поля, виберемо поверхню інтегрування у вигляді концентричної із сферичним шаром з діелектрика сферичну поверхню

радіуса r . Для всіх точок цієї поверхні через сферичний розподіл сторонніх і зв'язаних зарядів можемо записати $D_n = D(r)$. Тому потік вектора \vec{D} через замкнену поверхню інтегрування буде дорівнювати

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D(r) \cdot S = D(r) \cdot 4\pi r^2. \quad (11.27)$$

Тепер знайдемо сторонній заряд всередині поверхні інтегрування. Зрозуміло, що він дорівнює Q ($q = Q$). Далі підставляємо (11.27) в (11.26) і з урахуванням того, що $q = Q$, отримуємо

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}. \quad (11.28)$$

Далі використаємо зв'язок між індукцією і напруженістю електричного поля

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (11.29)$$

де ε діелектрична проникність середовища на поверхні інтегрування радіуса r , і знайдемо

$$E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 r^2} = \frac{E_0}{\varepsilon} \text{ або } \vec{E} = \vec{E}_0 / \varepsilon. \quad (11.30)$$

Тут $E_0 = Q/(4\pi \varepsilon_0 r^2)$ – напруженість електричного поля за умови відсутності діелектрика. Таким чином, отримали формули (11.30), які визначають електричне поле як усередині сферичного шару з діелектрика, в центрі якого розміщено сторонній точковий заряд, так і за його межами, де діелектричну проникність потрібно покласти такою, що дорівнює одиниці ($\varepsilon = 1$).

Для обох розглянутих вище прикладів є характерним те, що діелектрик був однорідним й ізотропним, а його поверхні збігалися з екіпотенціальними поверхнями поля сторонніх зарядів. Отриманий нами в цих випадках результат є загальним: якщо однорідний і ізотропний діелектрик з діелектричною проникністю ε повністю заповнює об'єм, що обмежений екіпотенціальними поверхнями поля сторонніх зарядів, то напруженість електричного поля визначається співвідношенням $E = E_0 / \varepsilon$, де E_0 напруженість електричного поля за умови відсутності діелектрика.

Тема 12 Провідники в електричному полі

12.1 Електричне поле в середині провідника. Електроємність відокремленого провідника. Ємність кулі.

Якби усередині однорідного провідника існувало макроскопічне електричне поле, то воно викликало б рух вільних електронів. У провіднику виник би електричний струм. Цей електричний струм приводить до перерозподілу електричних зарядів, у результаті якого загальне електричне поле зменшується (в протилежному разі на базі цього явища можна б було створити вічний двигун першого роду). Рух електронів припиняється, коли напруженість електричного поля в металі зменшиться до нуля. Таким чином, для рівноваги електричних зарядів необхідно, щоб макроскопічне поле E дорівнювало нулю в усіх точках усередині однорідного провідника.

Для того щоб визначити густину електричного заряду всередині провідника, використаємо теорему Гаусса в диференціальній формі

$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho / \epsilon_0. \quad (12.1)$$

Звідси випливає, що коли у всіх точках провідника $\vec{E} = 0$, то і $\rho = 0$. Таким чином, при рівновазі об'ємна густина електричного заряду усередині однорідного провідника дорівнює нулю. Електричний заряд може розміщуватися тільки на поверхні, а не усередині провідника.

Знайдемо напруженість електричного поля біля поверхні провідника, який знаходиться у рівноважному стані. Для розв'язання цієї задачі використаємо теорему Гаусса. Візьмемо до уваги, що в рівноважному стані напруженість електричного поля біля поверхні провідника має відмінну від нуля лише нормальну (перпендикулярну) до поверхні провідника складову ($E_n \neq 0$), тангенціальна ж складова дорівнює нулю ($E_\tau = 0$). Якби була відмінною від нуля тангенціальна складова, то вздовж поверхні провідника протікав би електричний струм, і цей стан не був би рівноважним. Крім того також використаємо, що електричне поле всередині провідника відсутнє.

Виходячи з вищеописаної симетрії поля, виберемо поверхню інтегрування у вигляді циліндра з твірними, які перпендикулярні до поверхні провідника, і основами величиною ΔS , одна з яких розміщена усередині, а інша поза провідником (рис. 12.1). Потік вектора напруженості електричного поля через частину поверхні інтегрування, що знаходиться

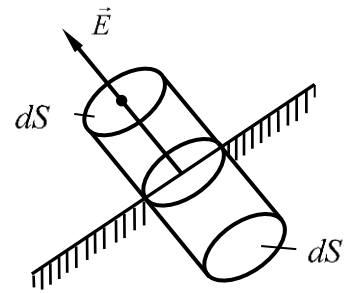


Рис. 12.1

всередині провідника, дорівнює нулю, тому що там напруженість електричного поля дорівнює нулю. Поза провідником у безпосередній близькості до нього напруженість поля \vec{E} направлена вздовж нормалі до поверхні. Тому для виступаючої ззовні бічної поверхні циліндра потік буде теж дорівнювати нулю, оскільки у кожній її точці вектор напруженості електричного поля \vec{E} і нормаль до бічної поверхні \vec{n} взаємно перпендикулярні ($d\Phi_{\text{бічн. пов.}} = \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{бічн. пов.}} = E \cdot dS_{\text{бічн. пов.}} \cdot \cos(\pi/2) = 0$). Зовнішня основа розміщена дуже близько до поверхні провідника і є малою за площею. Тому в кожній її точці можна вважати напруженість електричного поля однаковою і такою, що дорівнює $E_n = E$. Таким чином, потік через цю основу буде дорівнювати $E\Delta S$. У результаті можемо записати, що потік через всю замкнену поверхню інтегрування дорівнює

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{бічн. поверхн.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{основи}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 + E \cdot \Delta S = E \cdot \Delta S. \quad (12.2)$$

Заряд, що знаходиться всередині поверхні інтегрування (обмеженою цією поверхнею) неважко знайти

$$q = \sigma \Delta S, \quad (12.3)$$

де σ – поверхнева густина електричного заряду в точці провідника, де розміщена поверхня інтегрування. Далі використаємо теорему Гаусса, згідно якої

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q / \epsilon_0, \quad (12.4)$$

де q – заряд, який знаходиться всередині поверхні інтегрування. Підставляємо (12.2) й (12.3) в (12.4) і отримуємо шукану напруженість електричного поля біля поверхні провідника

$$E = \sigma / \varepsilon_0. \quad (12.5)$$

Зазначимо, що вектор \vec{E} направлений перпендикулярно до поверхні провідника.

Використовуючи зв'язок між напруженістю електричного поля та потенціалом, неважко з'ясувати, що потенціал всіх точок провідника у рівноважному стані є однаковим. Як відомо, різницю потенціалів двох довільних точок можна знайти за допомогою співвідношення

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{L_{12}} \vec{E} d\vec{l}. \quad (12.6)$$

Лінію L_{12} , вздовж якої проводиться інтегрування можна вибрати довільно тому, що електричне поле є потенціальним (відповідна сила є консервативною), і інтеграл (12.6) для електростатичного поля не залежить від лінії інтегрування. Виберемо цю лінію таким чином, щоб вона повністю знаходилася всередині провідника і з'єднувала дві довільні точки провідника. Як відомо, напруженість електричного поля всередині провідника дорівнює нулю, і тому інтеграл в правій частині (12.6) теж буде дорівнювати нулю. Це означає, що для довільних точок провідника $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, тобто

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = const. \quad (12.7)$$

Таким чином, потенціал всередині і на поверхні провідника є сталою величиною.

Розглянемо відокремлений провідник, який розміщено в однорідному середовищі. Передамо цьому провіднику електричний заряд q . Провідник (усі точки провідника) набудуть деякого потенціалу φ . Якщо заряд на провіднику збільшити в n раз, то, як встановлено дослідами, і його потенціал збільшиться в стільки ж разів. Дослідами з'ясовано, що відношення величини заряду q

провідника до значення його потенціалу φ є сталим: $q/\varphi = const$. Це відношення називають *електроємністю відокремленого провідника* (або просто *ємністю*):

$$C = q/\varphi. \quad (12.8)$$

Електроємність залежить від геометричних розмірів і форми провідника, розміщення навколо нього інших провідників, діелектричних властивостей середовища. Електроємність не залежить від матеріалу провідника, наявності в ньому порожнин та від величини заряду.

За одиницю в СІ прийнято електроємність такого відокремленого провідника, потенціал якого змінюється на 1 В при передачі йому заряду в 1 Кл. Ця одиниця дістала назву *фарада* (Ф): $1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/В}$. Ємність в 1 фараду є дуже великою величиною. Тому на практиці частіше користуються частками цієї одиниці ємності: міліфарад ($1 \text{ мФ} = 10^{-3} \text{ Ф}$), мікрофарад ($1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$), нанофарад ($1 \text{ нФ} = 10^{-9} \text{ Ф}$) і пікофарад ($1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$).

Визначимо електроємність провідної зарядженої кулі радіуса R , яка знаходиться в однорідному середовищі з відносною проникністю ϵ .

Електричне поле зарядженої кулі за її межами подібне до поля точкового заряду, який розміщено в центрі кулі,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \vec{r}. \quad (12.9)$$

Використовуючи зв'язок між напруженістю електричного поля та потенціалом, можемо знайти різницю потенціалів між поверхнею кулі ($r=R$) та нескінченністю ($r=\infty$)

$$\varphi - \varphi_\infty = \int_R^\infty \vec{E} d\vec{r} = \int_R^\infty E dr = \int_R^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon R}.$$

Поклавши потенціал на нескінченності φ_∞ таким, що дорівнює нулю (вважаємо, що на нескінченній відстані від заряду поле відсутнє і, отже, його потенціал дорівнює нулю), отримаємо для потенціалу кулі вираз

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon R}. \quad (12.10)$$

Використовуємо визначення (12.8) і знаходимо шукану електроємність кулі

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R. \quad (12.11)$$

Отже, ємність відокремленої кулі пропорційна його радіусу й діелектричній проникності навколишнього до кулі середовища.

12.2 Конденсатор. Ємність конденсатора. Ємність плоского і циліндричного конденсатора. Ємність системи, що складається з послідовно й паралельно з'єднаних конденсаторів.

Ємність відокремлених провідників невелика. Наприклад, куля таких розмірів, як Земля, має ємність усього лише 700 мкФ. Разом з тим бувають потрібні пристрої, які при невеликому потенціалі нагромаджували б на собі («конденсували») великі заряди.

Конденсатор складається з двох провідників-обкладок, відокремлених прошарком діелектрика. Наближаючи обкладки і розміщуючи між ними ізоляційний прошарок з високою діелектричною проникністю можна створити конденсатори великої ємності. Такий конденсатор дає можливість нагромаджувати на обкладках великі заряди при невисоких напругах і малих розмірах приладу. Зазначимо, що електричне поле конденсатора майже повністю локалізоване у вузькому зазорі між його обкладками і тому на нього не впливають навколишні тіла (через це навколишні тіла на ємність конденсатора не впливають). Його обкладки мають заряди однакової величини, але протилежні за знаком.

Умові, щоб електричне поле було зосереджено усередині конденсатора, задовольняють дві пластинки, розташовані близько одна до одної, два коаксіальних циліндри й дві концентричні сфери. Відповідно бувають плоскі, циліндричні й сферичні конденсатори.

Як показують досліди, відношення абсолютної величини заряду до модуля різниці потенціалів обкладок залишається сталим: $q/(\varphi_1 - \varphi_2) = const$. Це

відношення називається *взаємною ємністю* або просто *ємністю конденсатора*, тобто

$$C = q / (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (12.12)$$

Різницю потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ називають *напругою* U між відповідними точками.

Тому формулу (12.12) можна подати у вигляді

$$C = q / U, \quad (12.13)$$

де U – напруга між обкладками.

Ємність конденсаторів вимірюється в тих же одиницях, що і ємність відокремлених провідників, тобто в фарадах ($1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/В}$).

Знайдемо ємність плоского конденсатора (рис. 12.2). Нехай площа обкладки дорівнює S , а відстань між обкладками d . Зазор між обкладками вважаємо заповненим діелектриком із проникністю ϵ . Якщо d багато менше лінійних розмірів обкладок, то між обкладками поле буде таким, як поле двох нескінченних різнойменно

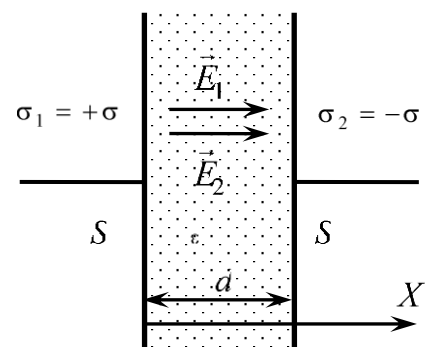


Рис. 12.2

однорідно заряджених площин. Тільки поблизу країв обкладок поле буде поступово послаблюватися (розсіюватися). Тому ми не внесемо істотної похибки, коли будемо напруженість електричного результуючого поля $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ від різнойменно заряджених обкладок в об'ємі конденсатора обчислювати з використанням формули для нескінченно зарядженої площини

$$E = E_{1x} + E_{2x} = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0} - \frac{(-\sigma)}{2\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S}. \quad (12.14)$$

Тут використали, що поверхнева густина електричного заряду σ дорівнює відношенню заряду q , що перебуває на обкладці, до площі обкладки S ; також прийняли до уваги, що діелектрик послабляє поле в ϵ раз. Використовуючи зв'язок між напруженістю електричного поля та різницею потенціалів, знаходимо напругу між обкладками

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon S} \int_0^d dx = \frac{qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S}$$

(напрямок осі X показано на рис. 12.3). Далі, використовуючи визначення електроємності (12.12), знаходимо ємність плоского конденсатора

$$C = q/U = \varepsilon_0 \varepsilon S / d. \quad (12.15)$$

Знайдемо ємність циліндричного конденсатора (рис. 12.3). Нехай радіуси циліндричних поверхонь дорівнюють відповідно R_1 та R_2 .

Зазор між обкладками вважаємо заповненим діелектриком із проникністю ε . Якщо довжина l обкладок циліндричного конденсатора набагато більша за відстань між коаксіальними циліндричними обкладками $d = R_2 - R_1$, то розсіюванням поля поблизу країв обкладок можна знехтувати й обчислювати поле в зазорі за формулою

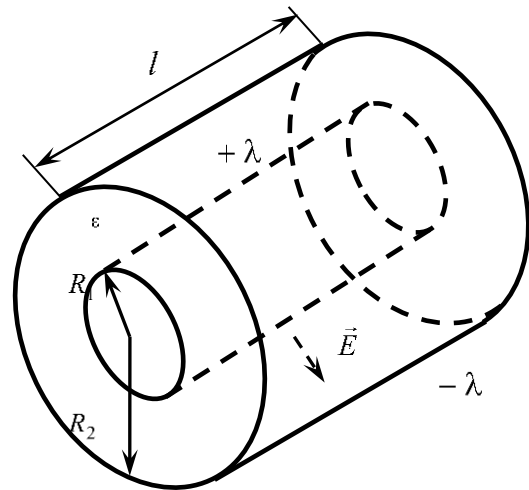


Рис. 12.3

напруженості електричного поля однорідно зарядженої циліндричної поверхні

$$E = E_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{\varepsilon r} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r l}.$$

Тут використали, що лінійна густина електричного заряду $\lambda = q/l$. Також зазначимо, що результуюче поле між обкладками циліндричного конденсатора створює лише внутрішня циліндрична поверхня радіусом R_1 ($E = E_1$). Зовнішня ж поверхня електричного поля у внутрішній області електричного поля не створює (як відомо, всередині провідника електричне поле від заряду на цьому провіднику дорівнює нулю). Напругу між обкладками знаходимо, використовуючи зв'язок між напруженістю електричного поля та різницею потенціалів

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Далі з визначення електроємності (12.13) знаходимо ємність циліндричного конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (12.16)$$

Маючи деякий набір конденсаторів, можна одержати багато різних значень ємності, якщо застосувати з'єднання конденсаторів у батареї. Знайдемо ємність батареї конденсаторів, які з'єднані паралельно.

При паралельному з'єднанні усі додатні та усі від'ємні обкладки конденсаторів з'єднуються між собою (рис. 12.4). Тому одна з обкладок кожного конденсатора має потенціал φ_1 , а інша φ_2 . На кожному k -му конденсаторі з'являється заряд q_k , який дорівнює згідно з визначенням ємності $q_k = C_k(\varphi_1 - \varphi_2)$. Загальний заряд батареї тоді буде дорівнювати сумі зарядів на кожному окремому конденсаторі

$$q = \sum q_k = \sum C_k(\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2) \sum C_k.$$

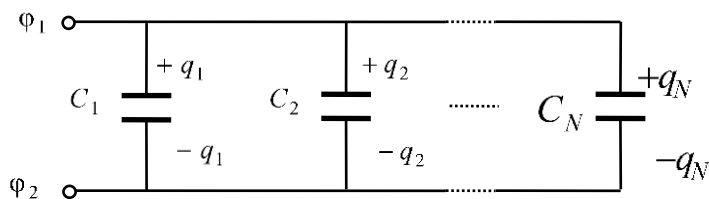


Рис. 12.4 Паралельне з'єднання конденсаторів

Розділивши цей загальний заряд на прикладену до батареї напругу $U = \varphi_1 - \varphi_2$, знайдемо ємність батареї, у якій конденсатори з'єднані паралельно:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \sum C_k}{\varphi_1 - \varphi_2} = \sum C_k \text{ або } C = \sum C_k. \quad (12.17)$$

Таким чином, при паралельному з'єднанні конденсаторів їх ємності сумуються.

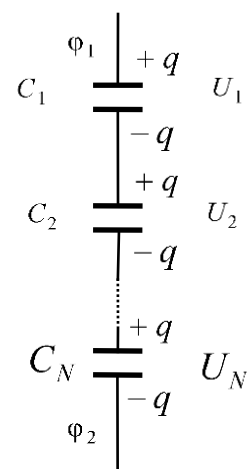


Рис. 12.5
Послідовне з'єднання конденсаторів

Знайдемо ємність батареї конденсаторів, які з'єднані послідовно. **При послідовному з'єднанні** (рис. 12.5) від'ємно заряджена обкладка першого конденсатора з'єднується з додатно зарядженою обкладкою другого, від'ємно

заряджена обкладка другого – з додатно зарядженою обкладкою третього і т.д. Провідник, що знаходиться між обкладками сусідніх конденсаторів виявляється електрично ізолюваним. Тому для цього провідника виконується закон збереження електричного заряду. Таким чином, сумарний електричний заряд на цьому провіднику, який дорівнює сумі заряду додатно зарядженої обкладки одного конденсатора та заряду від'ємно зарядженої обкладки другого конденсатора, дорівнює нулю. Тобто заряди, які виникають на конденсаторах, що з'єднані послідовно, за модулем однакові та протилежні за знаком. Позначимо заряд конденсатора через q . Напругу на кожному k -му конденсаторі можна обчислити, виходячи з визначення ємності, $U_k = q/C_k$. Сума цих напруг дорівнює напрузі $U = \varphi_1 - \varphi_2$, яка прикладена до батареї:

$$U = \sum U_k = \sum \frac{q}{C_k} = q \sum \frac{1}{C_k}. \quad (12.18)$$

Виходячи з визначення (12.15), знаходимо ємність батареї

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{q \sum \frac{1}{C_k}}{q} = \sum \frac{1}{C_k} \text{ або } \frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_k}. \quad (12.19)$$

Таким чином, обернена ємність батареї, в якій конденсатори з'єднані послідовно, дорівнює сумі обернених ємностей конденсаторів, з яких складається ця батарея.

12.3 Енергія електричного поля.

Знайдемо енергію зарядженого провідника. Заряд q , що знаходиться на деякому провіднику, можна розглядати як систему точкових зарядів q_i . Тому для знаходження енергії зарядженого провідника використаємо формулу для потенціалу системи точкових зарядів

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i, \quad (12.20)$$

де φ_i є потенціал електричного поля у точці, де знаходиться заряд q_i , і який створюється усіма зарядами, крім заряду q_i .

Точкові заряди виберемо так $q_i = \Delta q_i$, щоб вклад окремого заряду Δq_i в загальний потенціал провідника був дуже малим. Тому за потенціал у точці, де знаходиться заряд $q_i = \Delta q_i$ можна взяти загальний потенціал провідника $\varphi_i = \varphi$. Як відомо, поверхня провідника є екіпотенціальною. Тобто потенціал точок, у яких знаходяться точкові заряди $q_i = \Delta q_i$, є однаковим і дорівнює потенціалу φ провідника.

Використовуючи вищесказане, знаходимо з (12.20) для енергії зарядженого провідника вираз

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1} q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1} \Delta q_i \varphi = \frac{1}{2} \varphi \sum_{i=1} \Delta q_i = \frac{1}{2} \varphi q.$$

Далі використаємо визначення для електроємності відокремленого провідника $C = q/\varphi$ і отримаємо

$$W = \frac{\varphi q}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (12.21)$$

Кожний з цих виразів у (12.21) визначає енергію зарядженого провідника.

Знайдемо енергію зарядженого конденсатора. Припустимо, що потенціал обкладки, на якій знаходиться додатний заряд $(+q)$, дорівнює φ_1 а потенціал обкладки, на якій знаходиться від'ємний заряд $(-q)$, дорівнює φ_2 . Тоді кожний з елементарних зарядів $(+\Delta q_i)$, на які можна розділити додатний заряд $(+q)$, знаходиться в точці з потенціалом φ_1 , а кожний із зарядів $(-\Delta q_i)$, на які можна розділити від'ємний заряд $(-q)$, – у точці з потенціалом φ_2 . Відповідно до формули (104.1) енергія такої системи зарядів дорівнює

$$W = \frac{1}{2} \left[\sum_i (+\Delta q_i) \varphi_1 + \sum_i (-\Delta q_i) \varphi_2 \right] = \frac{1}{2} [(+q)\varphi_1 + (-q)\varphi_2] = \frac{1}{2} q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} qU.$$

Тут $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – напруга на конденсаторі. Взявши до уваги визначення для електроємності конденсатора $C = q/U$, можна отримати вирази для енергії зарядженого конденсатора:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \quad (12.22)$$

Формули (12.22) відрізняються від формул (12.21) тільки заміною φ на U .

Знайдемо густину енергії електричного поля. Для цього виразимо енергію зарядженого плоского конденсатора через характеристики поля в зазорі між обкладками.

Якщо у вираз для енергії конденсатора

$$W = CU^2/2$$

підставити формулу для ємності конденсатора

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d,$$

то отримаємо співвідношення

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \left(\frac{U}{d}\right)^2 S d.$$

У цій формулі U – напруга на обкладках, S та d відповідно площа та відстань між обкладками; ε – діелектрична проникність середовища між обкладками.

Для однорідного поля конденсатора $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int \vec{E} d\vec{l} = E \cdot d$, звідси, напруженість електричного поля між обкладками конденсатора $E = U/d$. Добуток $S \cdot d$ дорівнює об'єму V конденсатора, тобто об'єму, у якому зосереджене поле. Отже,

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V. \quad (12.23)$$

У плоскому конденсаторі поле є однорідним. Тому енергія розподілена в об'ємі конденсатора рівномірно. Отже, густина енергії електричного поля (енергія в одиниці об'єму) буде дорівнювати

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}.$$

Якщо врахувати зв'язок між електричним зміщенням та напруженістю електричного поля $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$, то отриману формулу можна подати у вигляді

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (12.24)$$

Вирази (12.24) визначають *густину енергії* електричного поля.

Ми отримали формули (12.24) для випадку, коли поле є однорідним. Однак ці формули є також справедливими для будь-якого електричного поля. Якщо поле є неоднорідним, то густина енергії в деякій точці P визначається за формулами (12.24) підстановкою значень E (або D) і ε в точці P .

Знаючи густину енергії електричного поля в кожній точці, можна знайти енергію поля в будь-якому об'ємі V . Для цього потрібно обчислити інтеграл

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} dV. \quad (12.25)$$

Таким чином, за допомогою формули (12.25) можна обчислити енергію електричного поля в будь-якому об'ємі.

Тема 13 Постійний електричний струм

13.1 Електричний струм. Густина електричного струму. Сторонні сили. Електрорушійна сила. Робота над електричним зарядом на ділянці кола.

Електричним струмом називається впорядкований рух електричних зарядів. Носіями струму можуть бути електрони, а також позитивні й від'ємні іони, тобто атоми або молекули, що втратили або приєднали до себе один або кілька електронів.

Носії струму у звичайному стані перебувають у хаотичному тепловому русі. Через уявну площу переноситься в обох напрямках однаковий заряд і тому електричний струм відсутній. При наявності електричного поля на хаотичний рух накладається впорядкований рух носіїв – виникає електричний струм.

Кількісною характеристикою електричного струму служить величина заряду, яка переноситься через розглянуту поверхню за одиницю часу. Її називають *силою електричного струму*. Відзначимо, що сила струму є за своєю суттю потоком заряду через поверхню. Якщо за час dt через поверхню переноситься заряд dq , то сила струму дорівнює

$$I = dq / dt . \quad (13.1)$$

Струм, що не змінюється з часом, називається постійним. Одиницею сили струму є ампер (А). Його визначення буде дано пізніше. У міжнародній системі одиниць СІ ампер є основною одиницею.

Електричний струм може бути розподілений у просторі, де він тече, нерівномірно. Більш детально можна охарактеризувати струм за допомогою векторної величини \vec{j} , яку називають густиною електричного струму. Щоб визначити *густину електричного струму* в деякій точці простору, потрібно взяти в цій точці елементарну площадку dS_{\perp} , яка є перпендикулярною до напрямку впорядкованого руху носіїв струму. Розділивши силу струму dI , що тече через цю площадку, на dS_{\perp} , отримаємо модуль густини струму:

$$j = dI / dS_{\perp}. \quad (13.2)$$

За напрямком вектора \vec{j} береться напрямком швидкості \vec{u} впорядкованого руху додатних носіїв.

Якщо вектор густини струму відомий, то можна обчислити силу струму, що протікає через будь-яку уявну поверхню S . Для цього потрібно розбити S на елементарні площадки $d\vec{S}$. Згідно (13.2) струм dI через площадку dS_{\perp} дорівнює $dI = jdS_{\perp} = jdS \cos\alpha = \vec{j}d\vec{S}$,

де α – кут між перпендикуляром до площі $d\vec{S}$ та напрямком вектора \vec{j} .

Підсумувавши струми через всі елементарні площі, отримуємо силу струму, що тече через поверхню S :

$$I = \int_S \vec{j}d\vec{S}. \quad (13.3)$$

Звідси випливає, що сила струму дорівнює потоку вектора густини струму через задану поверхню.

Знайдемо зв'язок густини електричного струму з швидкістю носіїв електричного струму (густина електричного струму з мікроскопічної точки зору).

Виділимо подумки в середовищі, в якому тече струм, довільний фізично нескінченно малий об'єм і позначимо через \vec{u} середній вектор швидкості носіїв у цьому об'ємі. Його називають середньою, дрейфовою або впорядкованою швидкістю руху носіїв струму. Позначимо далі через n концентрацію носіїв струму, тобто число їх в одиниці об'єму. Проведемо нескінченно малу площадку dS_{\perp} , що перпендикулярна до швидкості \vec{u} . Побудуємо на ній нескінченно короткий прямий циліндр із висотою $u dt$, як зазначено на рис. 106.1. Всі частинки, що

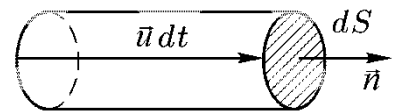


Рис. 13.1 Через площу dS пройдуть за час dt всі носії струму, що знаходяться в циліндрі висотою $u dt$. Їх сумарний заряд дорівнює $n \cdot e \cdot u \cdot dt \cdot dS$

знаходяться усередині цього циліндра, за час dt пройдуть через площадку dS і перенесуть через неї в напрямку швидкості \vec{u} електричний заряд $dq = n \cdot e \cdot u \cdot dt \cdot dS_{\perp}$, де e – електричний заряд носіїв струму. Далі використаємо визначення сили електричного струму і густини електричного струму і отримуємо

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}} = \frac{dq}{dt dS_{\perp}} = \frac{n \cdot e \cdot u \cdot dt \cdot dS_{\perp}}{dt dS_{\perp}} = n \cdot e \cdot u.$$

Тобто густина електричного струму дорівнює

$$\vec{j} = n \cdot e \cdot \vec{u}. \quad (13.4)$$

Припустимо, що єдиними джерелами електричного поля \vec{E} у провідниках, по яких течуть струми, є електричні заряди, що збуджують поля за законом Кулона. При проходженні струму безперервно відбувається зменшення зарядів, точніше, нейтралізація додатного і від'ємного зарядів. Для того щоб напруженість поля \vec{E} , а з нею й густина електричного струму \vec{j} залишалися незмінними, необхідні якісь додаткові сили або процеси, які неперервно поповнювали б електричні заряди.

Отже, для підтримки постійного струму, крім електростатичних сил, у електричному колі повинні діяти сили неелектростатичного походження, які називають *сторонніми силами*. Ці сили можуть бути обумовлені хімічними процесами, дифузією носіїв струму в неоднорідному середовищі або через границю двох різнорідних речовин, віхровими електричними (але не електростатичними, кулонівськими) полями, що створюються змінними у часі магнітними полями, і т.д. Сторонні сили можуть діяти або на усьому колі, або на окремих його ділянках.

Сторонні сили характеризують роботою, яку вони виконують над носіями струму. Величина, що дорівнює роботі сторонніх сил над одиничним додатним зарядом, називається *електрорушійною силою* (ЕРС) ε , що діє в замкненому колі або на його ділянці. Отже, якщо робота сторонніх сил над зарядом q дорівнює A_{cm} , то електрорушійна сила буде визначатися виразом

$$\varepsilon = A_{cm} / q . \quad (13.5)$$

Аналізуючи формулу (13.5) легко з'ясувати, що вимірюється ЕРС у Дж/Кл=В, тобто у вольтах.

Сторонню силу, що діє на заряд q , можна характеризувати **напруженістю поля сторонніх сил** E_{cm} , що дорівнює відношенню сторонньої сили \vec{F}_{cm} , яка діє на заряд q , до величини цього заряду:

$$\vec{E}_{cm} = \vec{F}_{cm} / q .$$

Тоді роботу сторонніх сил на ділянці 1–2 електричного кола над зарядом q можна записати у вигляді

$$A_{12cm} = \int_1^2 \vec{F}_{cm} d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} .$$

Розділивши цю роботу на q , отримаємо ЕРС, що діє на цій ділянці кола:

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} . \quad (13.6)$$

Крім сторонніх сил, на заряд q в провіднику діють сили електростатичного поля $q\vec{E}$. Отже, результуюча сила, що діє в кожній точці кола на заряд q дорівнює

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{E}_{cm}) .$$

Повна робота, що виконується цією силою над зарядом q на ділянці 1–2 кола, визначається виразом

$$A_{12} = q_{12} \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + q \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon . \quad (13.7)$$

Як бачимо, повна робота над електричним зарядом на ділянці кола 1–2 визначається різницею потенціалів і електрорушійною силою на цій ділянці.

Ділянка кола, на якому не діють сторонні сили, називається **однорідною**. Ділянка кола, на якому діють також і сторонні сили, називається **неоднорідною**.

13.2 Закон Ома. Правила Кірхгофа. Потужність струму. Закон Джоуля - Ленца.

Георг Ом експериментально встановив закон (*закон Ома в інтегральній формі для однорідної ділянки кола*), відповідно до якого сила струму, що проходить по однорідному (сторонні сили відсутні) металевому провіднику, пропорційна паданню напруги U на провіднику:

$$I = \frac{1}{R}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{R}U. \quad (13.8)$$

Величина R у формулі (13.8) називається *електричним опором провідника*. Одиницею опору служить ом (Ом), який дорівнює опору такого провідника, у якому при напрузі в 1 В тече струм силою 1 А (1 Ом=1 В/1 А).

Електричний опір залежить від форми й розмірів провідника, а також від властивостей матеріалу, з якого він зроблений. Для однорідного циліндричного провідника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (13.9)$$

де l – довжина провідника; S – площа його поперечного перерізу; ρ – коефіцієнт, який залежить від властивостей матеріалу, і який називається *питомим електричним опором речовини*. Вимірюється ρ в ом·метрах (Ом·м).

Отримаємо закон Ома в диференціальному вигляді. Виділимо уявно у провіднику елементарний циліндричний об'єм з твірними, які паралельні векторам \vec{j} і \vec{E} (рис. 13.2). Відповідно до формули (13.9) опір циліндра дорівнює $\rho dl / dS$. Через поперечний переріз циліндра проходить струм силою $j dS$. Напруга, що прикладена до циліндра, дорівнює $dU = -d\varphi = Edl$. Підстановка цих значень у формулу (13.8) дає, що

$$j dS = \frac{dS}{\rho dl} Edl, \text{ звідки } j = \frac{1}{\rho} E.$$

Вектори \vec{j} й \vec{E} мають однаковий напрямок. Тому можна написати

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}. \quad (13.10)$$

Ця формула виражає закон Ома в диференціальній формі для однорідної ділянки кола.

Зворотна до ρ величина $\sigma = 1/\rho$ називається **питомою електричною провідністю** (або **електропровідністю**) речовини. Одиниця, зворотна йому, називається **сименсом** (См). Отже, одиницею σ є сименс розділити на метр (См/м).

Для більшості металів при не занадто низьких температурах питомий опір ρ змінюється пропорційно термодинамічній температурі $\rho \sim T$.

У неоднорідній ділянці на носії електричного струму діють як сили з боку електростатичного поля, так і сторонні сили. Зрозуміло, що рух носіїв струму буде визначати результуюча сила або результуюча напруженість, що відповідає цим силам $\vec{E} + \vec{E}_{\text{нд}}$. Виходячи з вищесказаного, можемо записати закон Ома в диференціальному вигляді для неоднорідної ділянки, використовуючи закон Ома для однорідної ділянки кола ($\vec{j} = \sigma \vec{E}$), в якому замінимо напруженість електричного поля \vec{E} на результуючу напруженість $\vec{E} + \vec{E}_{\text{cm}}$. У результаті отримаємо

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{cm}}). \quad (13.11)$$

Формула (13.11) виражає закон Ома в диференціальній формі для неоднорідної ділянки кола.

Запишемо закон Ома для неоднорідної ділянки кола в інтегральному вигляді. Для цього розглянемо циліндричний провідник із площею поперечного перерізу S й довжиною l . Припустимо, що напруженості \vec{E} й \vec{E}_{cm} у всіх точках провідника однакові. Помножимо обидві частини рівності (13.11) на

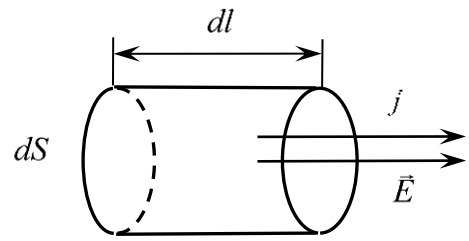


Рис. 13.2 В ізотропному провіднику напрямки векторів \vec{j} і \vec{E} збігаються

переміщення $d\vec{l}$ уздовж осі провідника й проінтегруємо отримане співвідношення по довжині провідника від 0 до l . У результаті отримаємо

$$\int_0^l \vec{j} d\vec{l} = \sigma \left(\int_0^l \vec{E} d\vec{l} + \int_0^l \vec{E}_{em} d\vec{l} \right). \quad (13.12)$$

Інтеграл, що стоїть ліворуч від знака рівності, дорівнює jl . Інтеграли праворуч дорівнюють відповідно різниці потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ між кінцями провідника й ЕРС ε_{12} , що діє в провіднику. Ураховавши це й замінивши j на I/S , а σ на $1/\rho$, можна написати (13.12) у вигляді

$$I \frac{\rho l}{S} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}.$$

Зрозуміло, що множник $\rho l/S$ біля I дорівнює опору R провідника. Отже,

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R}. \quad (13.13)$$

Таким чином, отримали **закон Ома для неоднорідної ділянки кола в інтегральній формі**. У (13.13) сила струму й ЕРС є алгебраїчними величинами. Сила струму додатна, коли струм проходить в напрямку від кінця провідника 1 до кінця 2. ЕРС вважається додатною, коли вона сприяє руху додатних носіїв у напрямку 1–2.

Для замкненого кола $\varphi_1 = \varphi_2$ (у замкненому колі точки 1 і 2 збігаються) й формула (13.13) отримує вигляд

$$I = \varepsilon / R, \quad (13.14)$$

де ε – ЕРС, що діє в замкненому електричному колі; R сумарний опір усього кола. Формула (13.14) виражає закон Ома для замкненого кола.

В основі розрахунку розгалужених електричних кіл лежать два правила Кірхгофа. Перше правило відноситься до вузлів кола. Вузлами називаються точки, у яких сходяться більш ніж два провідники (рис. 13.3).

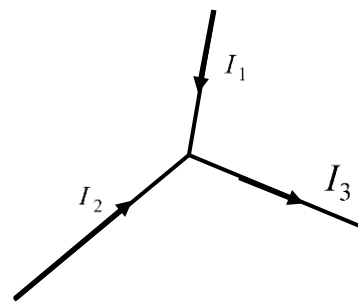


Рис.13.3 Вузол електричного кола. Сума струмів I_1 і I_2 дорівнює струму I_3

Перше правило Кірхгофа говорить, що алгебраїчна сума струмів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю:

$$\sum I_k = 0. \quad (13.15)$$

У цій формулі струму, що проходить до вузла, приписується один знак (плюс або мінус), струму, що проходить від вузла, – інший знак.

Перше правило Кірхгофа впливає з наступних міркувань. У колі постійного струму потенціали у всіх точках повинні залишатися постійними. Якби алгебраїчна сума струмів була відмінна від нуля, то у вузлі відбувалося б нагромадження або зменшення зарядів, що у свою чергу приводило б до зміни потенціалу вузла.

Рівняння (13.15)

можна написати для всіх N вузлів. Однак незалежними будуть тільки $N-1$ рівняння, N -е рівняння буде наслідком інших.

Друге правило відноситься до будь-якого замкнутому контура, який виділено уявно в розгалуженому колі (рис. 13.4). Виберемо напрямок обходу (наприклад, за годинниковою стрілкою, як

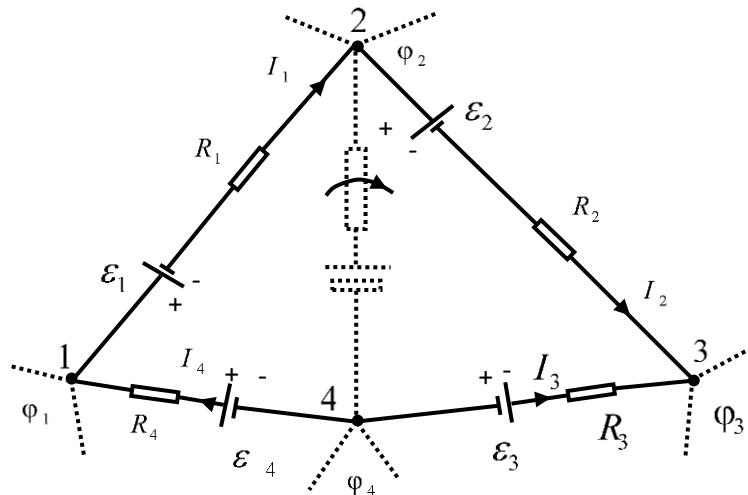


Рис. 13.4 Суцільними лініями показаний замкнений контур 1–2–3–4–1, який виділено у складному розгалуженому колі. З інших ланок кола зображена штриховою лінією лише ділянка 2–4

показано на рисунку) і застосуємо до кожної з ділянок контура закон Ома:

$$\begin{aligned} I_1 R_1 &= \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1, & I_2 R_2 &= \varphi_2 - \varphi_3 + \varepsilon_2, \\ I_3 R_3 &= \varphi_3 - \varphi_4 + \varepsilon_3, & I_4 R_4 &= \varphi_4 - \varphi_1 + \varepsilon_4. \end{aligned}$$

Якщо скласти ці рівності, потенціали скоротяться й отримаємо рівняння

$$\sum I_k R_k = \sum \varepsilon_k, \quad (13.16)$$

яке виражає *друге правило Кірхгофа*.

Рівняння (13.16) можна скласти для всіх замкнених контурів, які можна виділити в даному електричному колі. Однак незалежними будуть тільки рівняння для тих контурів, які не можна отримати накладенням на них інших контурів. Наприклад, контур 1–2–3–4–1 на рис. 110.2 отримаємо накладенням контурів 1–2–4–1 і 2–3–4–2. Тому незалежними будуть рівняння для будь-яких двох контурів із цих трьох.

При складанні рівнянь напрямки струмів і напрямки обходу можна вибирати довільно. Струмам і ЕРС потрібно приписувати знаки у відповідності до обраного напрямку обходу. Наприклад, струм I_3 на рис. 13.4 потрібно вважати від'ємним (і підставляти в рівняння $-I_3$), тому що він зображений як такий, що проходить назустріч напрямку обходу. ЕРС ε_1 і ε_2 також потрібно вважати від'ємними, оскільки вони діють у напрямку, протилежному напрямку обходу (викликають струм, напрямком якого протилежний до напрямку обходу контура). Якщо для деякого струму буде отримане від'ємне значення, це буде означати, що в дійсності він проходить в напрямку, який є протилежним до зазначеного на рисунку.

Потрібно мати на увазі, що через будь-який перетин нерозгалуженої ділянки кола проходить один і той самий струм. Наприклад, на ділянці від точки 1 до джерела струму ε_1 проходить такий самий струм I_1 , як і на ділянці від джерела ε_1 до точки 2.

Число незалежних рівнянь, складених за першим та другим правилами Кірхгофа, дорівнює кількості струмів, що проходять у різних ланках кола. Тому, якщо задані ЕРС і опори, то можна обчислити усі струми. Можна вирішити й завдання іншого роду, наприклад, знайти ЕРС (або опори), які потрібно включити в кожен ланку кола, щоб отримати при заданих опорах (або ЕРС) потрібні струми.

Розглянемо довільну ділянку кола постійного струму, до кінців якого прикладена різниця потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$, в якій діють сторонні сили, що характеризуються ЕРС ε . За час t через кожний перетин провідника проходить заряд $q = I \cdot t$. Це рівносильно тому, що заряд $q = I \cdot t$ переноситься за час t із одного кінця провідника в іншій. При цьому сили електростатичного поля й сторонні сили, що діють на даній ділянці, виконують роботу

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon_{12} = I \cdot t \cdot (\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}). \quad (13.17)$$

Розділивши роботу A на час t , за яке вона виконується, отримаємо потужність, що розвивається струмом на розглянутій ділянці кола:

$$N = A / t = I \cdot (\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}). \quad (13.18)$$

Ця потужність може витрачатися на здійснення розглянутою ділянкою кола роботи над зовнішніми тілами (для цього ділянка повинна переміщуватись у просторі), на протікання хімічних реакцій і, нарешті, на нагрівання цієї ділянки кола.

У випадку, коли провідник нерухомий і хімічні перетворення в ньому не виконуються, робота струму витрачається на збільшення внутрішньої енергії провідника, у результаті чого провідник нагрівається. Прийнято говорити, що при проходженні струму в провіднику виділяється тепло. Тоді, використовуючи (111.1) та закон Ома для неоднорідної ділянки кола $I \cdot R = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$, отримаємо

$$Q = A = I \cdot t \cdot (\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}) = RI^2t \text{ або } Q = RI^2t. \quad (13.19)$$

Коли сила струму змінюється з часом, то кількість тепла, що виділяється за час t , обчислюється за формулою

$$Q = \int_0^t RI^2 dt. \quad (13.20)$$

Співвідношення (13.20) було встановлено експериментально Джоулем і, незалежно від нього, Ленцем і носить назву закону Джоуля-Ленца (*закон Джоуля-Ленца в інтегральній формі*).

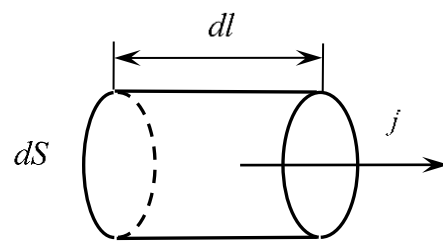


Рис. 13.5

Від формули (13.20), що визначає тепло, яке виділяється в усьому провіднику, можна перейти до виразу, що характеризує виділення тепла в малому об'ємі провідника. Виділимо в провіднику елементарний об'єм у вигляді циліндра (рис. 13.5). Відповідно до закону Джоуля – Ленца за час dt у цьому об'ємі виділиться тепло

$$dQ = RI^2 dt = \frac{\rho \cdot dl}{dS} (j \cdot dS)^2 dt = \rho j^2 \cdot dV \cdot dt \quad (13.21)$$

($dV = dS \cdot dl$ – величина елементарного об'єму, $R = \rho \cdot dl / dS$ – опір провідника, $j \cdot dS = I$ – сила струму). Розділивши вираз (13.21) на dV і dt , знайдемо кількість тепла, що виділяється в одиниці об'єму в одиницю часу:

$$Q_{num} = \rho j^2. \quad (13.22)$$

Величину Q_{num} називають питомою тепловою потужністю струму. Формула (13.22) являє собою *диференціальну форму закону Джоуля–Ленца* **Ошибка!**
Закладка не определена..

13.3 Електропровідність металів з погляду класичної теорії. Електричний струм у газах.

Виходячи з уявлення про вільні електрони, Друде створив класичну теорію електропровідності металів у 1900 р., яка потім була удосконалена Лоренцом. Друде припустив, що носії струму в металах – електрони поведуться подібно молекулам ідеального газу. У проміжках між зіткненнями вони рухаються під час відсутності поля вільно, пробігаючи в середньому деякий шлях λ . На відміну від молекул газу, пробіг яких визначається зіткненнями молекул одна з одною,

електрони зіштовхуються переважно не між собою, а з іонами, що утворюють кристалічну решітку металу. Ці зіткнення приводять до встановлення теплової рівноваги між електронним газом і кристалічною решіткою.

Для оцінки середньої швидкості теплового руху електронів провідності в металах скористаємося формулою для середньої швидкості теплового руху молекули, поклавши температуру такою, що дорівнює 300 К:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{3,14 \cdot 0,91 \cdot 10^{-30}}} \approx 10^5 \text{ м/с},$$

де m – маса електрона; k – стала Больцмана.

Після включення електричного поля на хаотичний рух, який відбувається зі швидкістю $\langle v \rangle$, накладається впорядкований рух електронів з деякою середньою швидкістю $\langle u \rangle$. Величину цієї швидкості легко оцінити, виходячи з формули

$$j = ne \langle u \rangle, \quad (13.23)$$

де n та e є відповідно концентрація та заряд електрона. Найбільша можлива густина електричного струму, коли провідник ще не перетворюється на рідину через виділення великої кількості тепла, для міді дорівнює близько 10^7 А/м². Якщо взяти для n значення 10^{29} м⁻³, то отримаємо

$$\langle u \rangle = \frac{I}{en} = \frac{10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{29}} \approx 10^{-3} \text{ м/с}.$$

Таким чином, навіть при дуже великих густинах електричного струму середня швидкість впорядкованого руху електронів $\langle u \rangle$ приблизно в 10^8 разів менше середньої швидкості теплового руху $\langle v \rangle$. Тому в обчисленнях модуль результуючої швидкості $|\vec{v} + \vec{u}|$ можна замінити модулем теплового руху $|\vec{v}|$.

Друде припускав, що електричне поле збільшує швидкість електрона і надає йому деяку додаткову енергію. Під час зіткнення електрона з іоном решітки набута ним за час пробігу додаткова енергія повністю передається іону. Далі електричне поле знову прискорює електрон, знову має місце зіткнення і т.д. Отримаємо закон Ома, виходячи з вище описаної моделі руху електрона в металі.

Якщо поле в металі є однорідним, то електрон рухається деякий час τ (час пробігу) з постійним прискоренням $a = eE/m$ (e та m є відповідно зарядом та масою електрона, E є напруженістю електричного поля) й за час пробігу τ швидкість упорядкованого руху досягає значення

$$u_{\max} = a \cdot \tau = \frac{eE}{m} \tau = \frac{eE}{m} \frac{\lambda}{\langle v \rangle}, \quad (13.24)$$

де λ – довжина вільного пробігу; $\langle v \rangle$ – його результуюча швидкість, яка, як ми з'ясували вище, практично збігається з тепловою $\langle v \rangle$.

Швидкість u змінюється за час пробігу лінійно. Тому її середнє значення дорівнює половині максимального:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} u_{\max} = \frac{eE\lambda}{2m \langle v \rangle}.$$

Підставивши це значення середньої швидкості впорядкованого руху носіїв струму у формулу для густини електричного струму, отримаємо

$$j = ne \langle u \rangle = \frac{ne^2 \lambda}{2m \langle v \rangle} E = \sigma E, \quad (13.25)$$

де n є концентрацією носіїв струму (вільних електронів у металі). Таким чином, ми прийшли до закону Ома в диференціальному вигляді. Більше того, виходячи з класичної теорії електропровідності металів, ми отримали вираз для провідності:

$$\sigma = \frac{ne^2 \lambda}{2m \langle v \rangle}. \quad (13.26)$$

Звідси випливає, якби електрони не мали зіткнень, довжина вільного пробігу, а отже, і провідність були б нескінченно великі. Таким чином, відповідно до класичних уявлень опір металів обумовлений зіткненнями електронів провідності з іонами кристалічної решітки.

Розглядаємо попередню модель руху електронів у провіднику. Знайдемо середнє значення додаткової кінетичної енергії електронів, що обумовлена дією електричного поля. Швидкість електронів дорівнює сумі швидкості теплового

руху \vec{v} й швидкості впорядкованого руху \vec{u} . Середнє значення квадрата результуючої швидкості дорівнює

$$\langle (\vec{v} + \vec{u})^2 \rangle = \langle v^2 + 2\vec{v}\vec{u} + u^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + 2\langle vu \cos\alpha \rangle + \langle u^2 \rangle,$$

де α – кут між векторами \vec{v} й \vec{u} (усереднення виконується за усіма електронами).

Швидкість \vec{v} хаотичного руху має з рівною ймовірністю найрізноманітніші напрямки. Тому всі значення $\cos\alpha$ від -1 до $+1$ мають однакову ймовірність.

Через цю причину середнє значення $vu \cos\alpha$ дорівнює нулю. Таким чином,

$$\langle (\vec{v} + \vec{u})^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + \langle u^2 \rangle.$$

Звідси випливає, що середня кінетична енергія електронів складається з постійного доданка $m \langle v^2 \rangle / 2$ й додаткового доданка

$$\langle \Delta\varepsilon_k \rangle = \frac{1}{2} m \langle u^2 \rangle,$$

який обумовлений полем.

У момент перед зіткненням u має значення u_{\max} (див. формулу (13.24)) й додаткова кінетична енергія дорівнює

$$\Delta\varepsilon_k = \frac{1}{2} m u_{\max}^2 = \frac{e^2 \lambda^2}{2m \langle v \rangle^2} E^2. \quad (13.27)$$

Зіштовхнувшись із іоном, електрон, за припущенням, віддає йому (тобто решітці) всю отриману ним додаткову енергію. Кожний електрон має за секунду $\langle v \rangle / \lambda$ зіткнень, передає щоразу решітці енергію (13.27). Тому в одиниці об'єму за одиницю часу буде виділятися кількість теплоти

$$Q_{num} = n \frac{\langle v \rangle}{\lambda} \Delta\varepsilon_k = \frac{ne^2 \lambda}{2m \langle v \rangle} E^2 = \sigma E^2, \quad (13.28)$$

де σ є провідністю, формула для якої збігається з (13.25). Зазначимо, що закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі має вигляд

$$Q_{num} = \rho j^2 = \frac{1}{\sigma} (\sigma E)^2 = \sigma E^2. \quad (13.29)$$

Порівнюючи (13.29) та (13.28) бачимо, що отримане співвідношення (13.28) є законом Джоуля-Ленца в диференціальному вигляді. Співвідношення для

провідності σ , які отримані з закону Ома (13.25) та закону Джоуля-Ленца, збігаються між собою.

Підбиваючи підсумок, можна сказати, що класична теорія електропровідності змогла пояснити закони Ома й Джоуля-Ленца, а також дала якісне пояснення деяким іншим законам. Разом з тим ця теорія зустрілася з досить істотними утрудненнями.

З формули (13.26) випливає, що опір металів $\rho = 1/\sigma$ (тобто величина, зворотна до σ) повинна зростати

$$\rho = 1/\sigma = \frac{2m \langle v \rangle}{ne^2 \lambda} \sim \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \sim \sqrt{T}$$

як корінь квадратний з температури. Дійсно, для припущення про залежність величин n і λ від температури немає ніяких підстав. Швидкість же теплового руху пропорційна кореню з температури \sqrt{T} . Цей висновок теорії суперечить дослідним даним, згідно яким електричний опір металів росте пропорційно першого ступеня температури T , тобто швидше, ніж \sqrt{T} .

Як відомо, при низьких температурах у металах спостерігається відсутність опору (явище надпровідності). Класична теорія електропровідності явище надпровідності не змогла пояснити.

Нарешті, класична теорія не змогла пояснити самого головного – чому електрони в металах виявляються вільними. Недоліки класичної теорії електропровідності пов'язані з тим, що об'єкти мікросвіту, якими є електрони в металах, описуються квантовою, а не класичною механікою.

Проходження електричного струму через гази називається **газовим розрядом**. Гази в нормальному стані є ізоляторами, носії струму в них відсутні. Лише при створенні особливих умов у газах можуть з'явитися носії струму (іони, електрони) і виникає електричний розряд.

Носії струму в газах можуть виникати в результаті зовнішніх впливів, не пов'язаних з наявністю електричного нуля. У цьому випадку говорять про **несамостійний розряд** газу. Несамостійний розряд може бути викликаний

нагріванням газу (термічна іонізація), впливом ультрафіолетових або рентгенівських променів, а також впливом випромінювання радіоактивних речовин.

Якщо носії струму виникають у результаті процесів, які обумовлені створеним у газі електричним полем, розряд називається *самостійним*.

Нехай газ, що знаходиться між електродами (рис. 13.6), знаходиться під дією постійного за інтенсивністю однорідного впливу, наприклад рентгенівських променів. Завдяки цьому від деяких молекул газу будуть відриватись електрони, у результаті чого виникнуть вільні електрони й додатні іони. Умовно будемо називати електрони від'ємними іонами. Додатні іони будемо вважати однозарядними (тобто такими, що мають заряд $+e$). Позначимо число пар іонів, які виникають за секунду в одиниці об'єму, через \dot{n}_i .

Одночасно з процесом іонізації має місце *рекомбінація* іонів, тобто возз'єднання при зустрічі електрона й додатного іона. Імовірність зустрічі двох різнойменних іонів пропорційна як числу додатних, так і числу від'ємних іонів. Тому число пар іонів \dot{n}_r , які рекомбінують за секунду в одиниці об'єму, є пропорційним квадрату числа наявних в одиниці об'єму пар іонів:

$$\dot{n}_r = r n^2, \quad (13.30)$$

де r коефіцієнт пропорційності.

У стані рівноваги число іонів, які виникають, дорівнює числу іонів, які рекомбінують. Тому

$$\dot{n}_i = \dot{n}_r \text{ або } \dot{n}_i = r n^2.$$

Звідси отримуємо величину рівноважної концентрації іонів (тобто число пар іонів в одиниці об'єму):

$$n = \sqrt{\dot{n}_i / r}. \quad (13.31)$$

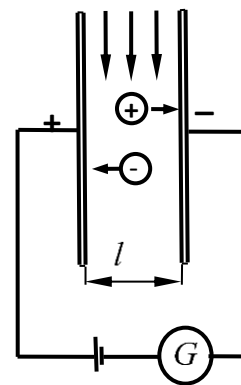


Рис. 13.6 Схема приладу для вивчення несамостійного газового розряду. Площа електро-дів S , об'єм простору між електродами дорівнює Sl

Якщо подати напругу на електроди, зменшення іонів буде відбуватися не тільки внаслідок рекомбінації, але й за рахунок відбирання іонів електродами. Нехай з одиниці об'єму відбирається електродами кожну секунду \dot{n}_j пар іонів. Нейтралізація на електродах однієї пари іонів супроводжується переносом по електричному колу заряду e . Отже, сила струму в колі

$$I = \frac{dq}{dt} = e\dot{n}_j S l,$$

де $S \cdot l$ – об'єм простору між електродами. Використаємо, що густина електричного струму пов'язана зі струмом співвідношенням $j = I/S$, і знаходимо

$$\dot{n}_j = j/el, \quad (13.32)$$

де l – відстань між електродами.

При наявності струму умова рівноваги набуває вигляд

$$\dot{n}_i = \dot{n}_r + \dot{n}_j.$$

Підстановка виразів (13.30) і (13.32) приводить до співвідношення

$$\dot{n}_i = m^2 + j/el. \quad (13.33)$$

Як відомо, густина електричного струму для носіїв електричного струму одного типу визначається виразом

$$\vec{j} = n \cdot e \cdot \vec{u},$$

де n – концентрація; e – електричний заряд; \vec{u} – середня швидкість впорядкованого носіїв заряду. Зрозуміло, що середня швидкість впорядкованого руху буде тим більше, чим буде більшою напруженість електричного поля, тобто

$$\vec{u} = u_0 \vec{E},$$

де коефіцієнт пропорційності u_0 називають **рухомістю носіїв електричного струму**. Тоді густина електричного струму буде дорівнювати

$$\vec{j} = n \cdot e \cdot u_0 \cdot \vec{E}.$$

Якщо врахувати, що в газі є додатні (їх рухомість u_0^+) та від'ємні носії (їх рухомість u_0^-) електричного струму, то модуль загального електричного струму буде визначатися співвідношенням

$$j = en(u_0^+ + u_0^-)E. \quad (13.34)$$

Розглянемо два граничні випадки – випадок слабких та випадок сильних електричних полів.

У випадку слабких полів густина струму буде дуже малою. Тому другим доданком у правій частині рівності (115.4) можна знехтувати порівняно з першим і визначати концентрацію іонів за формулою (115.2). Підстановка цього виразу в (115.5) дає, що

$$j = e\sqrt{\dot{n}_i/r}(u_0^+ + u_0^-)E = \sigma E.$$

Коефіцієнт σ не залежить від E . Отже, у випадку слабких полів несамоствійний газовий розряд описується законом Ома.

У випадку сильних полів практично всі іони будуть досягати електродів, не встигнувши рекомбінувати. Тому в рівності (13.33) можна знехтувати доданком rn^2 . У результаті отримаємо формулу

$$j = e\dot{n}_i l, \quad (13.35)$$

відповідно до якої у випадку сильного поля густина електричного струму j не залежить від напруженості електричного поля E . Ця густина струму формується усіма іонами, що створюються іонізатором за одиницю часу, і є максимальною при даних значеннях \dot{n}_i і l . Її називають густиною струму насичення $j_{нас}$.

При проміжних значеннях напруженості E відбувається плавний перехід від лінійної залежності j від E до насичення, коли j перестає залежати від E (рис. 13.7). При подальшому збільшенні напруженості електричного поля

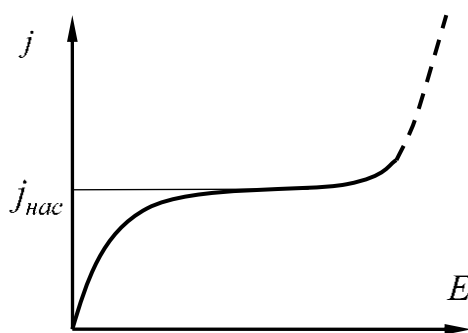


Рис. 13.7 Залежність густини струму при несамоствійному газовому розряді від напруженості електричного поля

починається стрімке зростання електричного струму (штрихова лінія). Це пояснюється тим, що, починаючи з деякого значення E , електрони (рухомість, яких набагато вища за рухомість додатних іонів) встигають за час вільного пробігу отримати енергію, достатню для того, щоб, зіштовхнувшись із молекулою, іонізувати її. Електрони, що виникають при іонізації, розганяються, і у свою чергу викликають іонізацію. У результаті відбувається лавиноподібне розмноження носіїв струму й різке зростання розрядного струму.

Залежно від умов, у яких проходить самостійний газовий розряд, він може набирати різноманітної форми. Перш ніж приступити до їх опису, розглянемо процеси, які приводять до виникнення носіїв струму при самостійному газовому розряді.

Енергія молекул (так само як і атомів) квантується. Це означає, що вона може набувати лише дискретні (тобто розділені скінченними проміжками) значення, які називають *рівнями енергії*. Стан з найменшою енергією називається *основним*, інші стани називаються *збудженими*. При зіткненні електрона з молекулою вона може перейти з основного стану в збуджений. У цьому стані молекула, як правило, перебуває час порядку 10^{-8} с, після чого переходить в основний стан, випромінюючи надлишок енергії у вигляді кванта світла – фотона. Ці процеси викликають світіння газу при розряді. При досить великій енергії електрона, що налітає, молекула може бути іонізована, тобто, втративши один або кілька електронів, перетворитися в додатний іон.

Електромагнітне випромінювання (зокрема, світло) складається із квазичастинок – фотонів, енергія яких дорівнює $h\nu$ (h – стала Планка, ν – частота випромінювання). Поглинання фотона молекулою приводить до її збудження або іонізації (яка в цьому випадку називається *фотоіонізацією*). Енергії фотона видимого світла недостатньо для відриву електрона від молекули. Енергію, достатню для фотоіонізації, мають фотони ультрафіолетового випромінювання.

Електрони провідності не можуть самовільно залишати метал у помітній кількості. Це пояснюється тим, що метал представляє для електронів потенційну

яму, яка має потенціальний бар'єр на границі металу. Сили, що обумовлюють цей бар'єр, мають наступне походження. Випадкове видалення електрона від зовнішнього шару додатних іонів приводить до виникнення у тому місці, що покинув електрон, надлишкового додатного заряду. Кулонівська взаємодія із цим зарядом змушує електрон, швидкість якого не дуже велика, повернутися назад. Таким чином, окремі електрони увесь час залишають поверхню металу, віддаляються від нього на декілька міжатомних відстаней і вертаються назад. У результаті метал виявляється оточеною тонкою хмарою електронів. Ця хмара утворює разом із зовнішнім шаром іонів подвійний електричний шар. Сили, що діють на електрон у такому шарі, спрямовані усередину металу. Вони й створюють потенційний бар'єр.

Найменша енергія, яку потрібно передати електрону для того, щоб видалити його із твердого або рідкого тіла у вакуум, називається **роботою виходу** $A_{вих}$. Робота виходу дуже чутлива до стану поверхні металу, зокрема до її чистоти. Підібравши покриття поверхні, можна сильно знизити роботу виходу. Наприклад, нанесення на поверхню вольфраму шару окисла лужного металу (Са, Sr, Ва) знижує роботу виходу з 4,5 еВ (для чистого вольфраму) до 1,5 – 2еВ.

Внаслідок розподілу за енергіями завжди є деяка кількість електронів, енергія яких достатня для того, щоб перебороти потенційний бар'єр і вийти з металу назовні. При кімнатній температурі число таких електронів мале. При підвищенні температури кількість електронів, що вилітають із металу, різко зростає й стає цілком помітною. Випромінювання електронів нагрітими твердими або рідкими тілами називається **термоелектронною емісією**.

Вторинною електронною емісією називається випромінювання електронів поверхнею твердого або рідкого тіла при бомбардуванні її електронами або іонами. Відношення числа випромінених (вторинних) електронів до числа частинок, що викликали емісію, називається коефіцієнтом вторинної емісії. У випадку бомбардування поверхні металу електронами значення цього коефіцієнта знаходиться у межах від 0,5 до 1,8.

Автоелектронною (або **холодною**) **емісією** називається випромінювання електронів поверхнею металів, що відбувається у випадку, коли поблизу поверхні створюється електричне поле дуже великої напруженості (порядку 10^8 В/м). Це явище називається також **вириванням електронів електричним полем**.

Розглянемо декілька видів самостійного розряду. **Тліючий розряд**. Цей розряд виникає при низьких тисках. Його можна спостерігати в скляній трубці з впаяними плоскими металевими електродами (рис. 13.8), подавши на електроди напругу порядку 1000 В. При атмосферному тиску струм у трубці практично відсутній. Якщо знижувати тиск, то приблизно при 50 мм рт. ст. виникає розряд у вигляді звивистого тонкого шнура, який світиться. Коли знижувати тиск далі, то шнур товщає й приблизно при 5 мм рт.ст. заповнює весь перетин трубки – встановлюється тліючий розряд.

Основні частини тліючого розряду зазначені на рисунку 13.8. Біля катода знаходиться тонкий шар, що світиться, який називається **катодною світною плівкою**.

Між катодом та світною плівкою знаходиться **астонівський темний простір**. З іншого боку від світної плівки розміщений **катодний**

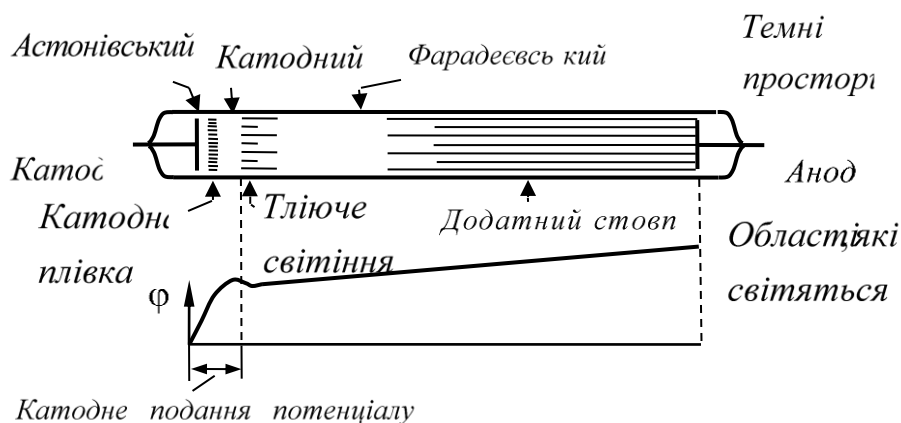


Рис. 13.8 Тліючий розряд. Унизу показана зміна потенціалу уздовж газорозрядної трубки

темний простір. Він світиться дуже слабо і за контрастом здається темним. Це катодний темний простір далі переходить в область, що слабо світиться, яку називають **тліюче світіння**. Усі перелічені вище шари утворюють катодну частину тліючого розряду.

Далі за тліючим світінням знаходиться темний проміжок – *фарадеєвський темний простір*. Межа між ними розмита. Уся інша частина трубки заповнена газом, який світиться; її називають *додатним стовпом*.

Експериментальні виміри показали (див. нижню частину рисунка 13.8), що потенціал змінюється уздовж трубки нерівномірно. Майже усе падіння напруги приходить на перші три ділянки розряду, до катодного темного простору включно. Цю частину напруги, яка прикладена до трубки, називають *катодним падінням потенціалу*. В області тліючого світіння потенціал не змінюється – тут напруженість електричного поля дорівнює нулю. Нарешті, у фарадеєвському темному просторі та додатному стовпі потенціал повільно росте.

Основні процеси, які необхідні для підтримки тліючого розряду, відбуваються у його катодній частині. Цих процесів два – вторинна електронна емісія з катода, яка викликана бомбардуванням його додатними іонами, і ударна іонізація електронами молекул газу. Ударна іонізація відбувається переважно в області катодного темного простору.

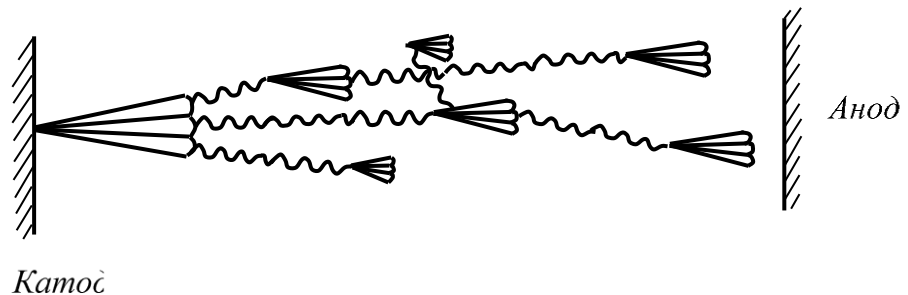
Додатний стовп являє собою газорозрядну плазму. Він виконує роль провідника, що з'єднує анод з катодними частинами розряду. Тому його довжина може бути довільною. Світіння додатного стовпа має різний колір для різних газів (неонові трубки дають червоне світіння, аргонові – синьо-зелене й т.д.). Ця обставина використовується в газорозрядних трубках, з яких виготовляються світні написи й реклами. Ці написи являють собою додатний стовп тліючого розряду.

У 1802 р. В.В.Петров виявив, що при розведенні вугільних електродів, що спочатку дотикались, які підключені до великої гальванічної батареї, між електродами спалахує сліпуче світіння. При горизонтальному розміщенні електродів нагрітий світний газ вигинається у вигляді дуги, у зв'язку із чим відкрите Петровим явище було названо *електричною дугою* (сам Петров назвав його вольтовою дугою).

Дуговий розряд може протікати як при низькому (порядку декількох гектопаскалей), так і при високому (до 1000 атм) тиску. Сила струму в дузі може досягати величезних значень ($10^3 - 10^4$ А) при напрузі в кілька десятків вольтів. Основними процесами, що підтримують дуговий розряд, є термоелектронна емісія з розпеченої поверхні катода й термічна іонізація молекул, обумовлена високою температурою газу в міжелектродному проміжку. Майже увесь міжелектродний простір заповнений ізотермічною плазмою (сукупністю додатних та від'ємних іонів). Вона служить провідником, по якому електрони, які випромінюються катодом, досягають анода. Температура плазми становить близько 6000 К. У дузі надвисокого тиску, температура плазми може досягати 10 000 К. Внаслідок бомбардування додатними іонами катод, розжарюється приблизно до 3500 К. Анод, який бомбардується потужним потоком електронів, розігрівається ще більше. Це приводить до того, що анод інтенсивно випаровується й на його поверхні утворюються поглиблення – кратер. Це поглиблення є самим яскравим місцем дуги.

Дуговий розряд має дуже важливе технічне застосування – він використовується для електрозварювання.

Крім описаної вище термоелектронної дуги буває дуга з холодним катодом.



Катодом такої дуги служить зазвичай рідка ртуть,

Рис. 13.9 Електронні лавини, що виникають при іскровому розряді. Їхнє перекриття приводить до утворення стримера. Звивистими лініями показано випромінювання, що викликає фотоіонізацію молекул

налита в балон, з якого викачане повітря. Розряд відбувається в парах ртуті. Електрони вилітають із катода за рахунок автоелектронної емісії.

Іскровий розряд виникає в тих випадках, коли напруженість електричного поля досягає пробивного для даного газу значення. Для повітря при атмосферному тиску воно становить близько 3 МВ/м (30 кВ/см).

Іскровий розряд супроводжується утворенням яскраво світлого звивистого розгалуженого каналу, по якому проходить короткочасний імпульс струму великої сили. Прикладом може служити блискавка: довжина її буває до 10 км, діаметр каналу до 40 см, сила струму може досягати 100 000 і більше амперів. Газ в іскровому каналі являє собою плазму, температура якої буває до 10 000 К. Викликає кожну лавину електрон, що утворюються шляхом фотоіонізації. Перекриття електронних лавин приводить до утворення стримера (див. рис.13.9). Стример являє собою добре провідний канал, по якому спрямовується від катода до анода потужний потік електронів.

Якщо один з електродів (або обоє) має дуже велику кривизну (наприклад, електродом служить тонкий дрід або вістря), то при не занадто великій напрузі виникає розряд, який супроводжується світінням, що має вигляд корони, що оточує електрод. Це послужило причиною того, що розряд був названий **коронним**.

При коронному розряді іонізація й збудження молекул відбуваються не в усьому міжелектродному просторі, а поблизу електрода з малим радіусом кривизни, де напруженість поля досягає пробивного значення,

Залежно від знака електрода говорять про додатну або від'ємну корону. У випадку від'ємної корони явища на катоді подібні з явищами на катоді тліючого розряду. У зовнішній області корони поле недостатньо для того, щоб передати електронам енергію, яка необхідна для іонізації молекул.

У додатній короні електронні лавини зароджуються біля зовнішньої границі корони й спрямовуються до анода. Виникнення електронів, що породжують лавини, обумовлено фотоіонізацією, яка викликана випромінюванням коронного розряду.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 3

1. Дати визначення електричного заряду, сформулювати закон Кулона. Вивести потенціальну енергію кулонівської взаємодії.
2. Дати визначення електричного поля. Вивести вираз для електростатичного поля точкового заряду.
3. Сформулювати принцип суперпозиції. Вивести вираз для електростатичного поля рівномірно зарядженої нескінченної нитки.
4. Вивести вираз для електростатичного поля рівномірно зарядженої площини.
5. Сформулювати теорему Гауса для напруженості електричного поля.
6. Вивести вираз для електростатичного поля рівномірно зарядженої сфери.
7. Вивести вираз для електростатичного поля рівномірно зарядженої кулі.
8. Вивести вираз для електростатичного поля рівномірно зарядженого полого нескінченного циліндру.
9. Вивести вираз для електростатичного поля рівномірно зарядженого по об'єму суцільного нескінченного циліндру.
10. Дати визначення поняття потенціалу електростатичного поля. Вивести вираз для потенціалу поля точкового заряду.
11. Вивести вираз для різниці потенціалів в полі коаксіальних циліндрів.
12. Вивести вираз для різниці потенціалів в полі концентричних сфер.
13. Вивести вираз для різниці потенціалів в полі паралельних площин.
14. Дати визначення електричного диполя та його дипольного моменту. Дати визначення пари сил. Вивести вираз для потенціальної енергії диполя у зовнішньому електричному полі. Вивести вираз для результуючої сили, що діє на диполь в неоднорідному зовнішньому електричному полі.
15. Дати визначення поляризації діелектриків. Описати механізми поляризації полярних та неполярних діелектриків.

16. Дати визначення вектору поляризованості. Дати визначення діелектричної сприйнятливості. Вивести вираз для поверхневої густини зв'язаних зарядів.

17. Дати визначення діелектричної проникності. Навести поняття електричної індукції та сформулювати теорему Гауса для електричної індукції. Навести зв'язок між електричною індукцією і напруженістю електричного поля.

18. Описати властивості провідників у зовнішньому електричному полі.

19. Дати визначення ємності провідника. Дати визначення конденсатора та ємності конденсатора. Вивести вираз для ємності плоского конденсатора.

20. Вивести вирази для ємності сферичного та циліндричного конденсатора.

21. Вивести вирази для ємності паралельного та послідовного з'єднань конденсаторів.

22. Вивести вирази для енергії системи зарядів, енергії зарядженого провідника та системи заряджених провідників. Вивести вираз для енергії зарядженого конденсатора.

23. Навести поняття електричного струму як явища. Навести поняття електричного кола. Дати визначення сили струму, напруги та опору. Сформулювати закон Ома для ділянки кола, що не містить джерел.

24. Вивести вирази для загального струму, напруги та опору для послідовного та паралельного з'єднань.

25. Пояснити принцип роботи джерела напруги. Дати визначення ЕРС ідеального джерела напруги. Навести послідовну схему заміщення реального джерела напруги, вивести закон Ома для повного кола. Вивести вольт-амперну характеристику реального джерела напруги. Вказати значення внутрішнього опору ідеального джерела та аргументувати відповідь.

26. Вивести вираз для роботи та потужності струму. Сформулювати закон Джоуля-Ленца. Вивести умову передачі максимальної потужності від джерела в коло.

27. Вивести закон Ома для ділянки кола, що містить джерело ЕРС.

28. Навести вираз для опору провідника заданої довжини та площі перерізу. Навести визначення густини струму та питомої провідності. Вивести закон Ома в диференціальній формі.

29. Сформулювати та вивести закони Кірхгофа.

30. Навести визначення іонізації газу та газового розряду. Навести типи газових розрядів.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гаркуша І. П. Фізика : навч. посіб. у 7 ч. Ч. 1. Механіка / І. П. Гаркуша, В. П. Курінний; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2019. – 95 с.

2. Гаркуша І. П. Фізика : навч. посіб. у 7 ч. Ч. 3. Електрика і магнетизм / І. П. Гаркуша, В. П. Курінний; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2018. – 163 с.

3. Шкурдода Ю. О. Фізика. Механіка, молекулярна фізика та термодинаміка : навч. посіб. / Ю. О. Шкурдода, О. О. Пасько, О. А. Коваленко; М-во освіти і науки України, Сумський держ. ун-т. – Суми : СДУ, 2021. – 221 с.

4. Сергєєва, О. Є. Основи загальної фізики. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. Електрика : навч. посіб. / О. Є. Сергєєва, С. Н. Федосов; М-во освіти і науки України, Одес. нац. акад. харч. технологій. – Одеса : ОНАХТ, 2018. – 124 с.

5. Фізика. Механіка / Ю. І. Горобець, О. Ю. Горобець, А. М. Кучко, С. О. Решетняк, А. М. Красіко, М. Г. Мусієнко, Т. М. Ніколаєва, П. О. Юрачківський, Л. Г. Лосицька. – Київ : Хімджест, 2018. – 192 с.

6. Дубовик В. М. Лекції з механіки : навч. посіб. / В. М. Дубовик, В. М. Сухов; М-во освіти і науки України, Харк. нац. ун-т ім. В. Н. Каразіна. – Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2019. – 312 с.

Навчальне видання

Титаренко Валентина Василівна
Горєв В'ячеслав Миколайович
Гаркуша Ігор Павлович
Журавльов Михайло Олександрович

ФІЗИКА

Навчальний посібник

У 2 частинах

Частина 1

Видано авторській редакції.

Електронний ресурс.

Підписано до видання 25.04.2025. Авт. арк. 15,1.

Підготовлено до видання
в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.