

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

С.А. Ус

**МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ І
СОЦІАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ З ДИСЦИПЛІНИ**

студентами спеціальності 124 «Системний аналіз»

Дніпро
НТУ «ДП»
2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



**Факультет інформаційних технологій
Кафедра системного аналізу і управління**

С.А. Ус

**МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ І
СОЦІАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ З ДИСЦИПЛІНИ
студентами спеціальності 124 «Системний аналіз»**

Дніпро
НТУ «ДП»
2023

Ус С.А. Моделювання економічних, екологічних і соціальних процесів. Методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань з дисципліни студентами спеціальності 124 «Системний аналіз» / С.А. Ус; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2023. – 82 с.

Автор:

С.А. Ус, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Затверджено до видання навчально-методичним відділом (протокол № 12 від 27.12.2022) за поданням методичної комісії спеціальності 124 «Системний аналіз» (протокол № 5 від 31 серпня 2022).

Мета видання – допомогти студентам у самостійному засвоєнні нормативної дисципліни «Моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів» під час виконання індивідуальних робіт і підготовки до модульного контролю.

Рекомендації включають тематику практичних робіт, перелік основних теоретичних питань, короткі теоретичні відомості. Описано методики обчислень і наведено схеми та приклади розв'язування типових задач. Подано методичні поради до виконання індивідуальних завдань.

Сформульовано питання для самоконтролю й критерії оцінювання індивідуальних робіт. Рекомендації орієнтовано на активізацію виконавчого етапу навчальної діяльності студентів.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри системного аналізу та управління, канд. техн. наук, доц. Желдак Т.А.

Зміст

Вступ.....	4
Індивідуальне завдання 1.....	5
Порядок виконання роботи.....	5
Короткі теоретичні відомості та приклади виконання завдання.....	5
Контрольні питання.....	14
Критерії оцінювання індивідуального завдання.....	15
Варіанти завдань.....	15
Індивідуальне завдання 2.....	24
Порядок виконання роботи.....	24
Короткі теоретичні відомості та порядок виконання завдання.....	25
Приклад виконання завдання.....	30
Контрольні питання.....	37
Критерії оцінювання індивідуального завдання.....	37
Варіанти завдань.....	38
Індивідуальне завдання № 3.....	49
Порядок виконання роботи.....	49
Короткі теоретичні відомості й приклад виконання завдання.....	50
Завдання II.....	54
Контрольні питання.....	56
Критерії оцінювання індивідуального завдання.....	56
Варіанти завдань.....	56
Індивідуальне завдання № 4.....	60
Завдання I.....	61
Короткі теоретичні відомості.....	61
Розрахунок висоти підйому струменя газової суміші від джерела забруднення.....	61
Гауссові моделі прогнозування забруднень.....	62
Завдання II.....	65
Короткі теоретичні відомості.....	66
Методика Агентства з охорони навколишнього середовища (VSEPA, 1977).....	66
Методика розрахунку максимальної приземної концентрації забруднювача, джерело якого розташоване на даху будинку.....	67
Модель Гаусса для розрахунку забруднення атмосфери внаслідок викидів газу з низьких джерел.....	68
Приклади виконання завдань.....	70
Завдання I.....	70
Завдання II.....	73
Контрольні питання.....	76
Критерії оцінювання індивідуального завдання.....	77
Варіанти індивідуальних завдань.....	78
Рекомендована література.....	81

ВСТУП

В освітньо-професійній програмі Національного технічного університету «Дніпровська політехніка» спеціальності 124 «Системний аналіз» до дисципліни «Моделювання економічних, екологічних і соціальних процесів» віднесено такі результати навчання:

– Знати основи математичного моделювання, вміти будувати й досліджувати математичні моделі природних, техногенних, економічних і соціальних об'єктів та процесів.

– Знати і вміти застосовувати методи інтелектуального багатовимірного аналізу даних та їхньої оперативної аналітичної обробки з візуалізацією результатів аналізу в процесі розв'язування прикладних задач у різних галузях.

– Застосовувати сучасні інформаційні технології до розв'язування задач системного аналізу

Мета дисципліни – формування компетентностей в обґрунтованому застосуванні математичних моделей для опису й прогнозування екологічних, соціальних та економічних процесів.

Під час вивчення програмового матеріалу студенти набувають таких дисциплінарних результатів навчання:

– знати основні підходи до математичного моделювання, вимоги, що висуваються до моделей, інструментарій математичного моделювання;

– уміти будувати й досліджувати статистичні моделі, застосовувати їх для дослідження природних, економічних і соціальних об'єктів та процесів;

– уміти моделювати природні та соціальні процеси за допомогою диференціальних рівнянь;

– уміти будувати й застосовувати когнітивні моделі для дослідження природних, техногенних, економічних і соціальних об'єктів та процесів;

– застосовувати методи інтелектуального багатовимірного аналізу даних та їхньої оперативної аналітичної обробки з візуалізацією результатів у процесі розв'язування задач моделювання;

– виконувати підготовку та аналіз статистичних даних при моделюванні;

– застосовувати сучасні системи імітаційного моделювання для моделювання економічних та соціальних процесів.

Робочою програмою дисципліни «Моделювання економічних, екологічних і соціальних процесів» передбачено такі теми практичних робіт:

1. Побудова простих моделей систем.

2. Розробка лінійної регресійної моделі впливу скидання стічних вод підприємства на якість річкової води в контрольному створі.

3. Моделювання якості стічних вод на основі диференціальних рівнянь.

4. Використання математичних моделей у прогнозуванні забруднення повітря.

5. Побудова когнітивних моделей соціальних процесів.

Це видання має допомогти студентам у виконанні індивідуальних завдань з дисципліни, зокрема в умовах дистанційного навчання. Методичні рекомендації включають необхідні короткі теоретичні відомості, детальні приклади виконання завдань, контрольні питання та варіанти завдань для індивідуальної роботи студентів.

Індивідуальне завдання 1

Тема: Основні положення моделювання систем. Побудова простих моделей систем

Мета: навчитися вибирати вид моделі залежно від умов і завдань дослідження, визначати їхні параметри. Будувати концептуальні та математичні моделі систем.

Порядок виконання роботи

1. Вивчити необхідний теоретичний матеріал [4, 5];
2. Розробити когнітивну, змістову й концептуальну (структурно-функціональну і причинно-наслідкову) моделі для задачі згідно із варіантом.
3. Оцінити відмінність між когнітивною та змістовою моделями.
4. З використанням доступних математичних методів розробити варіант математичної моделі, визначити її основні параметри (вхідні, вихідні дані, вплив середовища і т. ін.).
5. Проаналізувати розроблену модель із позицій складності об'єкта, операторів, типу вхідних і вихідних параметрів, мети моделювання.
6. Провести аналіз і класифікацію декількох математичних моделей у цікавій для вас галузі знань. Встановити аналоги розглянутих математичних моделей в інших галузях.
7. Оформити звіт такого змісту:
 - тема лабораторної роботи;
 - постановка задачі;
 - опис параметрів системи;
 - сформульована концептуальна модель;
 - побудована математична модель системи.

Короткі теоретичні відомості та приклади виконання завдання

Математична модель – це сукупність математичних об'єктів і відношень між ними, яка адекватно відображає властивості вихідного об'єкта.

Процес формування математичної моделі й використання її для аналізу та синтезу називається *математичним моделюванням*. У конструкторській практиці під моделюванням зазвичай розуміють процес побудови математичної моделі об'єкта, а проведення досліджень з використанням такої моделі називають *обчислювальним експериментом*.

Можна виділити різні класи математичних моделей. Так, модель називається *статичною*, якщо її параметри не залежать від часу. Модель *динамічна*, коли серед її параметрів є часовий, тобто вона відображає функціонування системи (процеси в системі) в часі.

Модель *дискретна*, якщо вона описує поведінку системи тільки в окремі моменти часу. Модель *неперервна*, коли вона описує поведінку системи у всі моменти часу із певного проміжку.

Модель *імітаційна*, якщо вона призначена для випробування або вивчення можливих шляхів розвитку й поведінки об'єкта шляхом варіювання деяких або всіх параметрів моделі.

Модель *детермінована*, коли кожному вхідному набору параметрів відповідає цілком певний та однозначно встановлений набір вихідних параметрів; в іншому випадку модель *недетермінована*, *стохастична* (імовірнісна).

Модель *функціональна*, якщо її описано у вигляді системи будь-яких операторних співвідношень.

Модель *теоретико-множинна*, якщо її побудовано за допомогою деяких множин і властивих їм відношень, а також тих, що існують між цими множинами.

Сутність побудови математичної моделі полягає в тому, що реальна система спрощується, схематизується й описується за допомогою того чи іншого математичного апарату.

Опишемо сновні етапи побудови моделі.

1. *Змістовий опис об'єкта, який моделюється.* Подається словесна характеристика об'єкта, яка включає цілі його функціонування, середовище, у якому він діє, опис окремих елементів, можливих станів, ознаки об'єкта та його елементів. Визначаються взаємозв'язки між елементами, станами, характеристиками. Таке попереднє, наближене уявлення про об'єкт дослідження називається концептуальною моделлю. Цей етап є основою для його подальшого формального опису.

2. *Формалізація операцій.* На основі змістового опису визначають й аналізують вихідну множину характеристик об'єкта, виділяють найбільш істотні з них. Потім виявляють керовані та некеровані параметри, вводять символні позначення. Окреслюють систему обмежень, будують цільову функцію моделі. Отже, відбувається заміна змістового опису формальним (символьним, упорядкованим).

3. *Перевірка адекватності моделі.* Початковий варіант моделі необхідно проаналізувати з таких позицій:

- 1) чи всі суттєві параметри включено в модель?
- 2) чи немає в моделі несуттєвих параметрів?
- 3) чи правильно відображено зв'язки між параметрами?
- 4) чи правильно встановлено обмеження на значення параметрів?

Головним методом перевірки адекватності моделі досліджуваного об'єкта виступає практика. Результати, отримані під час використання моделі, порівнюються із відомими практичними результатами, піддаються аналізу на відповідність відомим властивостям досліджуваного об'єкта. За результатами перевірки моделі на адекватність приймається рішення про можливість її практичного використання або про необхідність коригування.

4. *Коригування моделі.* На цьому етапі уточнюють наявні відомості про об'єкт і всі параметри побудованої моделі, вносять зміни в неї і знову виконують оцінювання адекватності.

5. *Оптимізація моделі.* Сутність оптимізації (покращення) моделі полягає в її спрощенні за умови збереження заданого рівня адекватності.

Розглянемо приклади побудови математичної моделі.

Приклад 1. Задача про баскетболіста

Змістова постановка задачі. Розробити математичну модель, яка дозволяє описати політ баскетбольного м'яча, кинутого гравцем у баскетбольний кошик.

Модель має реалізовувати такі завдання:

- обчислювати положення м'яча в будь-який момент часу;
- визначати точність влучання м'яча в кошик після кидка з урахуванням різних початкових параметрів.

Початкові дані:

- маса і радіус м'яча;
- початкові координати, початкова швидкість і кут кидка м'яча;
- координати центра і радіус кошика.

Концептуальна постановка задачі про баскетболіста. Рух баскетбольного м'яча може бути описано відповідно до законів класичної механіки Ньютона (рис. 1.1).

Візьмемо такі гіпотези:

- об'єктом моделювання є баскетбольний м'яч з радіусом R ;
- м'яч будемо вважати матеріальною точкою маси m , положення якої збігається з центром мас м'яча;
- рух відбувається в полі сил тяжіння із сталим прискоренням вільного падіння g й описується рівняннями класичної механіки Ньютона;
- м'яч рухається в одній площині, яка перпендикулярна поверхні Землі й проходить через точку кидка і центр кошика;
- нехтуємо опором повітря і збуреннями, викликаними власним обертанням м'яча навколо центра мас.

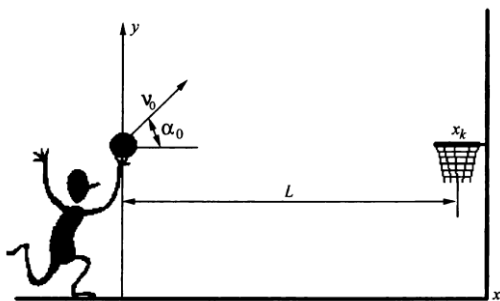


Рис. 1.1. Схема до постановки задачі про баскетболіста

Відповідно до описаних гіпотез параметрами руху м'яча будуть координати (x, y) і швидкість v (її проєкції v_x і v_y) центра мас м'яча. Тоді для визначення положення м'яча в будь-який момент часу достатньо знайти закон руху його центра мас, тобто залежність координат x, y та проєкцій v_x і v_y швидкості центра м'яча від часу. Для оцінювання точності кидка можна взяти величину відстані по горизонталі (вздовж осі x) від

центра кошика до центра м'яча в момент, коли останній перетинає горизонтальну площину, що проходить через кільце кошика.

З урахуванням вищевикладеного можна сформулювати концептуальну постановку задачі про баскетболіста в такому вигляді: визначити закон руху матеріальної точки масою m під дією сили тяжіння, коли відомі початкові координати точки x_0 і y_0 , її початкова швидкість v_0 і кут кидання α_0 . Центр кошика має координати x_k і y_k . Обчислити точність кидка Δ за такою формулою: $\Delta = r_x(t_k) - r_{xk}$, тут параметр t_k визначається із таких співвідношень: $t_k > 0$, $v_y(t_k) < 0$, $y(t_k) = y_k$.

Математична постановка задачі про баскетболіста. Математичну постановку задачі про баскетболіста можна записати у векторній або координатній формі (рис. 1.2).

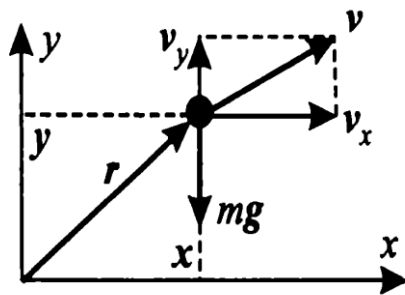


Рис. 1.2. Розрахункова схема для задачі про баскетболіста

1. *Векторна форма.* Знайти залежність векторних параметрів $r(t)$ та $v(t)$ від часу розв'язуючи таку систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = mg, \\ v = \frac{dr}{dt}, \end{cases} \quad (1)$$

з такими початковими умовами: $r(0) = 0$, $v(0) = v_0$.

Обчислити параметр Δ за такою формулою: $\Delta = r_x(t_k) - r_{xk}$, у якій величину t_k визначити із таких співвідношень:

$$t_k > 0, v_y(t_k) < 0, y(t_k) = y_k.$$

Проеціюючи векторні співвідношення (1) на осі координат, перепишемо математичну постановку задачі про баскетболіста в координатній формі.

2. *Координатна форма.* Визначити залежності $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$, розв'язуючи такі системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = 0, \\ v_x = \frac{dx}{dt}, \end{cases} \quad \begin{cases} m \frac{dv_y}{dt} = -mg, \\ v_y = \frac{dy}{dt}. \end{cases}$$

за таких початкових умов:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0;$$

$$v_x(0) = v_0 \cos \alpha_0, \quad v_y(0) = v_0 \sin \alpha_0.$$

Параметр Δ обчислити за такою формулою:

$$\Delta = x(t_k) - x_k,$$

параметр t_k визначити із таких співвідношень:

$$t_k > 0, \quad v_y(t_k) < 0, \quad y(t_k) = y_k.$$

Як можна бачити, з позиції математики задача про баскетболіста звелася до задачі Коші стосовно системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку із заданими початковими умовами. Ця система є замкненою, оскільки число незалежних рівнянь (чотири диференціальних і два алгебраїчних) дорівнює числу шуканих параметрів задачі ($x, y, v_x, v_y, \Delta, t_k$).

Виконаємо контроль розмірностей задачі.

Для рівняння динаміки отримуємо такий результат:

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F, \Rightarrow [\text{кг}] \frac{[\text{м/с}]}{[\text{с}]} = [\text{Н}], \Rightarrow \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \right] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \right],$$

зв'язок між швидкістю й переміщенням

$$\frac{dr}{dt} = v \Rightarrow \frac{[\text{м}]}{[\text{с}]} = \left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right].$$

Існування та єдиність розв'язку задачі Коші доведено математиками. Тому побудовану математичну модель можна вважати коректною.

Розглянемо особливості наведеної в прикладі концептуальної постановки задачі про баскетболіста.

Перша з перерахованих гіпотез особливо важлива, оскільки вона виділяє об'єкт моделювання. У нашому випадку об'єкт можна вважати простим. Однак у ролі такого об'єкта можна розглядати систему «гравець – м'яч – кільце». Необхідна для опису подібної системи модель буде вже набагато складнішою, бо гравець своєю чергою являє собою складну біомеханічну систему, моделювання якої – це зовсім не тривіальне завдання. У цій ситуації обрати об'єктом моделювання тільки м'яч є обґрунтованим рішенням, оскільки саме рух м'яча потрібно дослідити, а вплив гравця можна врахувати досить просто через початкові параметри кидка. У застосуванні до складних систем вибір об'єкта моделювання – далеко не просте й не однозначне завдання.

Гіпотеза про те, що м'яч можна вважати матеріальною точкою, широко застосовується, коли досліджують рух тіл у механіці. У нашій задачі вона виправдана з огляду на симетрію форми м'яча і малість його радіуса порівняно з характерною відстанню його переміщення. Передбачається, що м'яч – це куля з однаковою товщиною стінки.

Гіпотезу про можливість застосування в цьому випадку законів класичної механіки можна обґрунтувати багатьма експериментами на вивчення руху тіл поблизу Землі, швидкість яких багато менша від швидкості світла. Враховуючи що висота польоту м'яча перебуває в межах 5 – 10 м, а дальність – 5 – 20 м, припущення про сталість прискорення вільного падіння також обґрунтоване. Якби моделювали рух балістичної ракети, дальність і висота польоту якої перевищує 100 км, то довелося б враховувати зміну прискорення вільного падіння залежно від висоти і географічної широти місця запуску.

Гіпотеза про рух м'яча в площині, перпендикулярній поверхні Землі, обмежує клас можливих даних про траєкторію і значно спрощує модель. Траєкторія м'яча може не лежати в одній площині, якщо під час кидка він сильно обертається навколо вертикальної осі. Тоді величини швидкості точок поверхні м'яча стосовно повітря на різних його сторонах будуть різними. Точки, що рухаються назустріч потоку, мають вищу відносну швидкість, а точки на протилежному боці, які рухаються разом з потоком, – нижчу порівняно з швидкістю центра мас м'яча. Відповідно до закону Бернуллі тиск газу на поверхню більший там, де його відносна швидкість менша. Ось чому в ситуації, схематично показаній на рис. 1.3, на м'яч буде діяти додаткова сила, спрямована (відповідно до схеми) зверху вниз.

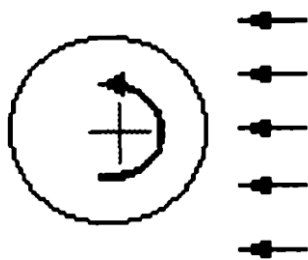


Рис. 1.3. Обтікання м'яча потоком повітря

Ефект впливу потоку повітря буде проявлятися тим сильніше, чим більшою буде швидкість центра мас м'яча і швидкість його обертання. Для баскетболу характерні відносно низькі швидкості польоту м'яча (до 10 м/с). При цьому досить рідко використовується його підкручування рукою. Отже, гіпотеза про рух м'яча в одній площині здається виправданою. Її використання дозволяє відмовитись від побудови значно більш складної тривимірної моделі руху м'яча.

Гіпотеза про нехтування впливом опору повітря на рух об'єкта найменш обґрунтована, оскільки коли тіло переміщується в газі або рідині, сила опору збільшується зі зростанням швидкості руху. Але з огляду на невисоку швидкість руху м'яча, його правильну обтічну форму і малу дальність кидків, зазначена гіпотеза може бути використана як перше наближення.

Необхідно зауважити, що в концептуальній постановці задачі моделювання на відміну від змістової, використовують термінологію конкретної дисципліни (у нашому випадку – механіки).

При цьому реальний об'єкт (м'яч) замінюється на його механічну модель (матеріальну точку). Фактично в наведеному прикладі концептуальна постановка звелася до постановки класичної задачі механіки про рух матеріальної точки в полі сил тяжіння. Концептуальна постановка більш абстрактна по відношенню до змістової, бо з матеріальною точкою можна зіставити довільний матеріальний об'єкт, кинутий під кутом до горизонту, наприклад, футбольний м'яч, ядро, камінь або артилерійський снаряд.

Математична постановка задачі ще більш абстрактна, ніж концептуальна, тому що зводить вихідну задачу до чисто математичної (наприклад, до задачі Коші), методи розв'язування якої досить добре розроблені. Уміння звести вихідну проблему до відомого класу математичних задач та обґрунтувати правомочність такого підходу потребує високої кваліфікації математика-прикладника, що особливо високо цінується в колективах дослідників.

Приклад 2. Задача планування виробництва

Змістова постановка задачі. Підприємство виготовляє і продає фарбу двох видів: для внутрішніх і зовнішніх робіт. У виробництві фарби використовується два початкові продукти A і B . Дані про витрату продуктів A і B на 1 т кожного виду фарб і про запаси цих продуктів на складі наведено в табл.1.1.

Таблиця 1.1

Вихідні дані для задачі планування виробництва

Початковий продукт	Витрата продуктів (у тоннах на 1 т. фарби)		Запас продукту на складі (тонн)
	фарба для внутрішніх робіт	фарба для зовнішніх робіт	
A	a_{11}	a_{12}	b_1
B	a_{21}	a_{22}	b_2

Продажна ціна за 1 тону фарби для внутрішніх робіт становить c_1 грн, фарба для зовнішніх робіт продається по c_2 грн за 1 тону. Необхідно визначити, яку кількість фарби кожного виду потрібно виробляти підприємству, аби отримати максимальний дохід.

Концептуальна постановка задачі. Сформулюємо такі гіпотези:

- об'єктом моделювання є процес виготовлення фарби;
- керовані змінні: x_1 – кількість вироблюваної фарби для внутрішніх робіт, x_2 – відповідна кількість фарби для зовнішніх робіт;
- некеровані змінні: витрата продукту на 1 т фарби є визначеною детермінованою величиною, яка не залежить від часу та умов зовнішнього середовища;

- кількість запасу продукту на складі також є визначеною величиною і не може бути змінена в процесі виробництва;
- величина доходу, а також витрати матеріалів лінійно залежать від виробленої кількості продукту;
- величина доходу, який можна отримати за одиницю продукції, не залежить від зовнішніх умов і не змінюється в часі;
- наявний попит дозволяє продати весь вироблений продукт;
- у продажу фарби не використовується фасування.

Побудова математичної моделі. Позначимо через x_1 кількість виробленої фарби для внутрішніх робіт; і через x_2 кількість фарби для зовнішніх робіт.

Враховуючи лінійну залежність доходу від кількості виробленої фарби, формулу для його обчислення запишемо в такому вигляді:

$$f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2.$$

Обмеження, які мають задовольняти змінні завдання, такі:

$$\text{на витрату продукту } A: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1;$$

$$\text{на витрату продукту } B: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2.$$

Ці обмеження означають, що підприємство не може використати більше сировини, ніж воно має на складі.

Крім того, необхідно врахувати, що $x_1, x_2 \geq 0$.

Отже, отримуємо таку оптимізаційну математичну модель виробництва фарби:

Знайти максимальне значення такої функції:

$$f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2,$$

з огляду на обмеження:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Оскільки змінні задачі x_1, x_2 лінійно входять у цільову функцію та обмеження, то побудована задача оптимізації називається *задачею лінійного програмування* (ЛП).

Перевірка розмірності. За умовами змінні задачі мають розмірність [т], ціна [грн/т], отже, цільова функція – дохід, [грн] = [грн/т][т] = [грн].

Обмеження: витрата матеріалів [т]/ [т], отже, [т] = [т]/ [т][т] = [т].

Обговорення. Гіпотези, які були висунуті при побудові концептуальної моделі, є суттєвими, оскільки вони впливають на її кінцевий вигляд.

Так, вибір керованих змінних дозволяє скласти оптимальний план виробництва фарби у вигляді завдання на виготовлення кожного з її видів.

Припущення про детермінованість основних параметрів задачі є слушним, коли витрати матеріалів на один виріб не змінюються суттєво залежно від зовнішніх умов, наприклад, вони підлягають жорстко визначеній виробничій технології. Якщо, наприклад, витрати будуть випадковими, тобто з певною ймовірністю можуть бути збільшені або зменшені (приміром у виробництві продукту харчування витрати часто залежать від якості вхідного продукту), то необхідно застосовувати стохастичні моделі.

Припущення про детермінованість запасу на складі також є достатньо жорстким. У реальних умовах підприємство, як правило, може докупити потрібну кількість продукту в разі необхідності.

Припущення про лінійну залежність доходу від кількості виробленої продукції дозволяє записати модель у вигляді добре вивченої задачі лінійного програмування. В реальності такі процеси часто нелінійні, наприклад, графік залежності доходу від кількості виробленого продукту може мати вигляд, показаний на рис. 1.4.

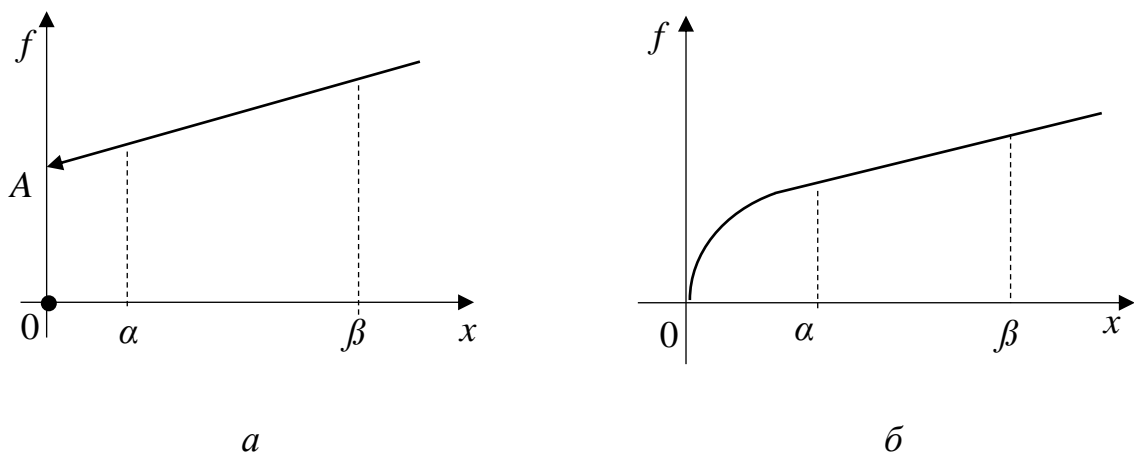


Рис. 1.4. Графік залежності витрат від обсягу виробництва

Графік відображає той факт, що при збільшенні обсягу виробництва витрати на одиницю продукції зменшуються, але існує необхідність робити більші витрати на початковому етапі виробництва.

Але якщо вважати, що обсяги виробництва належать певному інтервалу (α, β) (рис. 1.4), то можна вважати залежність лінійною, що суттєво спрощує задачу.

При побудові цільової функції також використовувалось припущення про можливість продати весь вироблений продукт, інакше необхідні були б обмеження на його кількість (не більше ніж...), відповідно до попиту або виникла б потреба врахувати знижки в цільовій функції (змінну ціну).

Припущення про те, що фарба продається без фасування, дозволяє використовувати неперервну модель. Це означає, що величини змінних можуть бути аби-якими з певного інтервалу, у нашому випадку, наприклад, можна

продати і 3, і 3,475 т фарби. Інакше модель мала б бути дискретною (цілочисловою).

Іші приклади побудови і використання моделей можна знайти в літературі [1 – 6].

Контрольні питання

1. Дайте визначення понять моделі і моделювання. Що являє собою мета моделювання?
2. У яких галузях людської діяльності застосовуються моделі?
3. Чи можна віднести міфологію до сфери моделювання? Якщо так, то чому?
4. Які типи моделей використовуються або можуть бути використані у вивчених вами дисциплінах (з освітніх програм вищих і / або середніх навчальних закладів)?
5. Які існують типи моделювання?
6. У чому полягає відмінність моделювання натурального від уявного?
7. Що являє собою когнітивна модель?
8. Які моделі називають змістовими?
9. Назвіть різновиди змістових моделей.
10. Чим концептуальна модель відрізняється від змістової?
11. Що являє собою формальна модель?
12. Яке моделювання називається математичним?
13. Які приклади математичних моделей вам відомі?
14. Назвіть переваги математичних моделей.
15. Наведіть і проаналізуйте різні визначення математичних моделей.
16. Який об'єкт може бути оператором у математичному моделюванні?
17. Чому інформаційні моделі можна вважати різновидом математичних?
18. За якими класифікаційними ознаками можна поділити математичні моделі?
19. Чим прості моделі відрізняються від складних?
20. У чому полягає складність моделювання систем?
21. Які типи моделей можна виділити з огляду на вид оператора моделювання?
22. Назвіть основні математичні схеми моделювання систем.
23. У чому полягає різниця між лінійними і нелінійними моделями?
24. Які типи моделей виділяють з огляду на параметри моделювання?
25. Що являють собою D -схеми моделювання систем?
26. Який математичний апарат використовують при описі Q -схем моделювання систем?
27. Для опису яких процесів слугують F -схеми моделювання систем?
28. Дайте визначення дескриптивної моделі. Які її властивості?
29. Для яких цілей слугує оптимізаційна модель?
30. Чим відрізняються стаціонарні моделі від нестаціонарних?
31. Яким чином впливає розмірність на складність моделі? Чому?

32. Перелічіть способи опису невизначеності параметрів моделі.
33. Назвіть основні методи реалізації моделей, опишіть їхні переваги й недоліки.
34. Які особи беруть участь у розробці змістової постановки задачі?
35. На підставі якої інформації формулюють концептуальну постановку задачі моделювання?
36. Яка з постановок задачі (змістова, концептуальна або математична) є найбільш абстрактною?
37. Поясніть зміст поняття коректності математичної задачі? Які умови має задовольняти коректна модель?
38. З якою метою проводиться перевірка адекватності моделі?
39. Назвіть причини можливої неадекватності моделі.
40. Для виконання яких завдань може бути використана математична модель?

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Під час оцінювання індивідуального завдання враховується повнота і правильність його виконання (50 %), слухність пояснень щодо вибору типу моделі, знання визначень і термінології (40 %), своєчасне подання завдання на перевірку (10 %). Виконання додаткового завдання оцінюється окремо.

Варіанти завдань

Індивідуальне завдання включає розробку трьох видів моделей, згідно із варіантом¹. Нумери завдань, відповідно до варіанта, подано в табл. 1.2. Завдання 3 не є обов'язковим, його оцінюють додатковим балом.

Таблиця 1.2

№ варіанта	№ завдання		
	Завдання 1	Завдання 2	Завдання 3 (додаткове)
1	1	1, 23	10
2	2	2, 19	9
3	3	3, 18	8
4	4	4, 22	7
5	5	5, 17	6
6	6	6, 21	5
7	7	7, 20	4
8	8	8, 16	3
9	9	9, 15	2
10	10	10, 19	1
11	2	11, 14	10
12	3	12, 21	9
13	4	1, 13	8
14	5	2, 14	7
15	6	3, 15	6

¹ Будь-який варіант завдання 1 і 3 може бути змінений на варіант 11 за погодженням із викладачем.

Завдання 1. Сформулюйте кілька варіантів змістових постановок задач моделювання відповідно до поданої нижче тематики.

1. Робота громадського транспорту.
2. Процес розвитку епідемії захворювання в регіоні.
3. Екологічна ситуація в регіоні.
4. Робота продовольчого магазину.
5. Робота стаціонару лікарні чи поліклініки.
6. Робота ремонтної майстерні.
7. Функціонування регульованого перехрестя доріг.
8. Робота автодорожньої мережі мікрорайону.
9. Робота дільниці цеху.
10. Діяльність факультету, закладу вищої освіти або середньої школи.
11. Проведіть аналіз і класифікацію декількох математичних моделей у цікавій для вас галузі знань.

Встановіть аналоги розглянутих математичних моделей в інших галузях діяльності.

Завдання 2. Побудуйте концептуальну та математичну моделі поданих нижче задач. Визначте, яких змін зазнає побудована модель, коли змінити вихідні припущення.

1. Продукція деякого підприємства може вироблятися за допомогою двох технологічних способів T_1 і T_2 . При цьому на виробництво продукції витрачаються ресурси трьох видів K_1 ; K_2 ; K_3 , запаси яких дорівнюють 15; 18; 8 одиниць відповідно. Витрати ресурсів на виробництво всієї продукції першим технологічним способом становлять 2; 4; 0 одиниць на одну одиницю продукції, другим – 3; 2; 2 відповідно. Вихід продукції, виробленої способом T_1 , дорівнює 10 одиниць, способом T_2 – 8 одиниць. Визначити, із якою інтенсивністю потрібно застосовувати кожен із способів, аби, використовуючи визначені в умові ресурси, отримати максимальний обсяг продукції.

2. Із двох сортів бензину утворюють дві суміші А та Б. Суміш А містить 60 % бензину першого сорту і 40 % другого. Суміш Б містить 80 % бензину першого сорту і 20 % – другого. Продажна ціна 1 л суміші А – 10 грн.; суміші Б – 12 грн. Скласти план створення сумішей, який забезпечить отримання максимального доходу, якщо в наявності маємо 50 т бензину першого сорту й 30 т другого.

3. Підприємство виробляє два види продукції: P_1 та P_2 . Для її виготовлення використовують три види сировини: S_1 ; S_2 ; S_3 , запаси кожної з них становлять 200, 110, 120 одиниць відповідно. Витрата сировини на 1000 одиниць продукції така: S_1 – 20; 10; S_2 – 20; 5; S_3 – 10; 10. Оптові ціни за 1000 одиниць кожного з виробів визначено в розмірі 15 та 17 тис. грн. Собівартість виробництва 1000 одиниць становить 12 тис. грн (P_1) і 15 тис. грн (P_2).

Необхідно скласти план випуску продукції, з огляду на забезпечення максимального прибутку за умови, що її збут необмежений.

4. Підприємство має три виробничі фактори у кількості 6; 5; 2 тис. одиниць і може організувати виготовлення продукції двома різними способами. Витрата виробничих факторів згідно з першим способом виробництва становить 1; 1; 3 тис. одиниць, другим – 3; 1; 2 тис. одиниць відповідно. Якщо використовують перший спосіб виробництва, то підприємство може виготовити 3 тис. одиниць продукції на місяць, коли задіяно другий спосіб, то 2 тис. одиниць. Скільки часу підприємство має працювати кожним способом, щоб виготовити максимальну кількість продукції?

5. Для вивезення вантажу з районів А та Б формуються автоколони. Для кожної автоколони кількістю 10 машин, що вивозить вантаж з району А, необхідно 4 пересувні майстерні, 3 машини технічної допомоги та 2 мотоцикли. Для такої самої автоколони, яка вивозить вантаж з району Б, потрібно 3 пересувні майстерні та 1 машина технічної допомоги. При цьому одна колона з району А вивозить 2 тис. тон вантажу, а з району Б – 1 тис. т. Скільки автоколон потрібно направити в кожен район, аби забезпечити максимальну кількість вивезеного вантажу, якщо в розпорядженні є 200 машин, 20 авторемонтних майстерень, 10 машин технічної допомоги та 16 мотоциклів?

6. Підприємство виробляє два види продукції П1 та П2, використовуючи 4 групи верстатів (А, Б, В, Г), фонди робочого часу яких становлять 10; 30; 20; 12 годин відповідно. На виготовлення одного виробу П1 кожна група верстатів витрачає 4; 0; 1; 3 години відповідно, на виріб П2 – 2; 3; 2; 2 год. Прибуток від реалізації кожного виробу П1 дорівнює 20 грн; П2 – 30 грн. Необхідно скласти план виробництва, з огляду на забезпечення максимального прибутку.

7. У тваринницькому господарстві на виробництво одного центнера молока витрачається 962 грн, у тому числі трудові витрати дорівнюють 100 грн. Виробництво 1 центнера м'яса коштує 3895 грн, з яких 467 грн – трудові витрати. Державні закупівельні ціни одного центнера молока – 1170 грн, а одного центнера м'яса – 4370 грн. Скласти оптимальний план виробництва молока та м'яса, якщо на тваринництво виділено 1900000 грн, при цьому фонд зарплати становить 100000 грн, решта – матеріальні витрати.

8. З Чернігова до Тернополя необхідно перевезти обладнання трьох типів, зокрема 84 одиниці І типу, 80 одиниць ІІ типу й 150 третього. Для перевезення використовують два види транспорту А і Б. За один рейс транспорт А може перевезти 3 одиниці обладнання типу І або 4 одиниці типу ІІ, або 2 одиниці типу ІІІ. Транспорт Б може перевезти 2 одиниці обладнання будь-якого типу за один рейс. Витрати на перевезення транспортом А дорівнюють 5092 грн, транспортом Б – 4000 грн. Скласти план перевезень, який забезпечує мінімальні транспортні витрати.

9. Трикотажна фабрика виробляє светри й блузи, використовуючи вовну, силон та нітрон, запаси яких дорівнюють 900; 400; 300 кг відповідно. Кількість кожного виду пряжі для виготовлення десяти светрів становить 4; 2; 1 кг відповідно, а для десяти блуз – 2; 1; 1 кг. Прибуток від реалізації 10 одиниць светрів дорівнює 600 грн, а блуз – 500 грн. Потрібно скласти план випуску продукції, який максимізує прибуток, враховуючи, що можливості ринку дозволяють реалізувати не більше 150 светрів.

10. Механічний цех може виготовити за зміну 600 деталей типу 1 або 1200 деталей типу 2. Виробнича потужність термічного цеху, куди ці деталі надходять на обробку того самого дня, за зміну становить 1200 деталей типу 1 або 800 деталей типу 2. Вартість обох видів деталей однакова. Скласти щоденну виробничу програму, яка забезпечує максимізацію випуску продукції, за умови що підприємство працює у дві зміни і при цьому деталей типу 1 має бути виготовлено не менше ніж 800 одиниць, деталей типу 2 не більше 1200 одиниць.

11. З пункту А до пункту Б щодня відправляються пасажирські та швидкі поїзди, які комплектуються із вагонів різних типів (плацкартних, купейних, спальних та ін). Кількість вагонів різних типів для комплектування поїздів та число пасажирів, на які розраховано ці вагони, подано в табл. 1.3. Визначити оптимальну кількість швидких і пасажирських поїздів, за такими критеріями:

- число пасажирів, які перевозяться, буде максимальним, за умови, що пропускна спроможність дороги обмежує кількість пасажирських поїздів до шести на день.
- забезпечення максимізації загального доходу від перевезень.

Таблиця 1.3

Вихідні дані до задачі 11

Тип вагона	Парк вагонів	Поїзд		Кількість пасажирів	Вартість квитка, грн
		швидкий	пасажирський		
Вагон-буфет	12	1	1	–	–
Поштовий	18	≤ 1	1	–	–
Загальний	5	≤ 1	≤ 2	72	277
Плацкартний	89	≤ 5	8	54	559
Купейний	79	≤ 6	≤ 4	36	1036
Спальний	35	≤ 4	≤ 1	18	2129
Максимальна кількість вагонів		10	12		

12. Три механізми I, II і III можуть виконувати три види земляних робіт A, B, і C. У табл. 1.4 зазначено ресурси робочого часу кожного механізму, його продуктивність при виконанні різних видів робіт і вартість однієї години роботи. Скориставшись цими даними, скласти математичну модель для визначення: а) оптимального завантаження механізмів за критерієм максимального сумарного обсягу виконаних робіт; б) оптимального завантаження обладнання, яке мінімізує сумарні витрати, коли задано такі обсяги робіт: $A = 6000 \text{ м}^3$, $B = 50000 \text{ м}^3$, $C = 8000 \text{ м}^3$.

Таблиця 1.4

Вихідні дані до задачі 12

Механізм	Продуктивність, м ³ /год			Вартість роботи, грн/год			Ресурс часу, год
	A	B	C	A	B	C	
I	30	20	40	20	40	20	400
II	20	30	50	30	20	50	300
III	60	40	20	50	30	60	280

13. Транспортна агенція для організації пасажирських перевезень між центром Ц та чотирма містами M1, M2, M3, M4 може використовувати три групи автомобілів. Перша група складається з 10 мікроавтобусів Mercedes-Benz Sprinter (кількість місць 20), друга – з 25 автобусів «Neoplan» (кількість пасажирів 55) і третя – з 40 автобусів МАН (кількість пасажирів 37). Кожен автомобіль може здійснити 2 рейси на день, за маршрутами M1 та M4, або 1 рейс за маршрутами M2 і M3. Дані про кількість пасажирів, що перевозяться одним автобусом певного типу кожним маршрутом за один рейс, та пов'язані з цим експлуатаційні витрати на одну машину показано в табл. 1.5. Попит на перевезення кожним маршрутом становить не менше ніж 1800, 1530, 1000, 2250 осіб на день відповідно.

Необхідно розподілити автомобілі серед маршрутів, за такими критеріями:

- досягнення максимального прибутку компанії;
- максимізація числа перевезених пасажирів.

Таблиця 1.5

Вихідні дані до задачі 13

Тип автобусу	Вартість квитка, грн /експлуатаційні витрати, грн/день			
	Ц – M1 / 100	Ц – M2 / 150	Ц – M3/ 200	Ц – M4/ 80
I	150/1800	237/2700	430/3600	127/1440
II	227/3200	315/4800	564/6400	200/2560
III	200/2500	280/3750	500/5000	200/2000

14. Нафтопереробний завод отримує чотири типи напівфабрикатів у такій кількості: 400 тис. л алкілату, 250 тис. л крекінг-бензину, 350 тис. л бензину прямого переганяння та 100 тис. л ізопентану. Після змішування цих чотирьох компонентів у різних пропорціях утворюється три сорти бензину: бензин А (2:3:5:2), бензин Б (3:1:2:1) і бензин В (2:2:1:3). Вартість 1 тис. л бензину кожного сорту дорівнює 30000, 25000 та 45000 грн відповідно. Скориставшись цими даними, визначити: а) співвідношення виробленої продукції, яке забезпечить її максимальну вартість; б) оптимальне співвідношення виробленого продукту, виходячи з умови максимального використання наявних компонентів.

15. На підприємство надійшло дві партії листового заліза, причому перша партія містить 400 листів, товщиною 8 мм, а друга – 250 листів товщиною 10 мм. З них виготовляються комплекти, що включають 4 деталі 1-го типу, 3 деталі

2-го типу та 2 деталі 3-го типу. Один лист кожної партії можна розкроїти різними способами. Відомості про кількість деталей кожного типу, що виходить після розкрою одного листа тим чи іншим способом, подано в табл. 1.6. Потрібно розкроїти матеріал у такий спосіб, аби забезпечити виготовлення максимальної кількості комплектів.

Таблиця 1.6

Вихідні дані до задачі 15

Тип деталей	Кількість деталей, шт.						
	Перша партія			Друга партія			
	R1	R2	R3	R1	R2	R3	R4
1-й	0	6	9	6	5	4	0
2-й	5	3	4	5	3	2	6
3-й	12	14	0	7	4	5	7

16. У роботі підприємства передбачено п'ять типів технологічних процесів (T1, T2, T3, T4, T5), причому кількість одиниць продукції, що випускається із застосуванням кожного з них за одну годину, дорівнює 300, 260, 320, 400 та 450 відповідно. Під час виробництва враховуються витрати на сировину, електроенергію, зарплату та ін. Ці показники в перерахунку на 1 годину наведено в табл. 1.7. Скласти виробничу програму підприємства, яка забезпечує максимальний випуск продукції, враховуючи, що час роботи із застосуванням кожної технології має становити цілу кількість годин.

Таблиця 1.7

Вихідні дані до задачі 16

Виробничі фактори	Витрати факторів під час застосування різних технологій					Наявні ресурси
	T1	T2	T3	T4	T5	
Сировина, кг	15	20	15	14	18	2000
Електроенергія, кВт/год	0,2	0,3	0,15	0,25	0,3	300
Інші витрати, грн	40	50	60	30	20	1000
Заробітна платня, грн	60	30	40	60	30	1600

17. Механічний завод у процесі виготовлення трьох різних типів деталей I, II, III використовує токарні, фрезерувальні та стругальні верстати. Обробку кожної деталі можна вести трьома різними технологічними методами T1, T2 і T3. У табл. 1.8 відображено норми часу обробки деталі на відповідному верстаті з використанням кожного технологічного способу, а також ресурси (верстато-год) кожної групи верстатів. Прибуток від продажу певного типу деталей становить 22, 18 та 30 грн відповідно. На основі цих даних виконати такі завдання:

а) скласти оптимальний план завантаження виробничих потужностей, який забезпечує максимальний прибуток;

б) вважаючи, що між кількістю виготовлених деталей має бути співвідношення комплектності 1:2:1, визначити виробничу програму, яка забезпечує випуск максимальної кількості комплектів;

в) скласти оптимальний план завантаження виробничих потужностей з огляду на забезпечення максимального прибутку, якщо кількість деталей типу II не може перевищувати 100 од.

Таблиця 1.8

Вихідні дані до задачі 17

Тип верстата	Норми часу на обробку деталей, год									Ресурс часу, год
	I			II			III			
	T1	T2	T3	T1	T2	T3	T1	T2	T3	
Токарний	1	0,9	1,1	1,2	1,5	–	0,9	–	–	200
Фрезерувальний	0,8	0,8	1,3	0,9	1,1	1,3	1,1	0,8	–	400
Стругальний	–	0,7	0,7	0,7	–	1,3	1,3	0,6	–	300

18. Для виготовлення сплаву певної рецептури зі свинцю, цинку та олова використовується сировина у вигляді п'яти сплавів з тих самих металів, що мають різний склад і різну вартість 1 кг. Конкретні дані про це наведено в табл. 1.9. Потрібно визначити: а) у якому співвідношенні потрібно взяти ці компоненти, щоб виготовити сплав мінімальної собівартості, який містить олова – від 40 до 60 % та цинку – від 20 до 30 %; б) яку кількість кожного компонента потрібно взяти, аби виготовити сплав мінімальної собівартості, який містить олова не більше 40 % і цинку не менше 20 %; в) яку кількість кожного компонента потрібно взяти, для виготовлення максимальної кількості сплаву, що включає 20 % свинцю, 30 % цинку та 50 % олова?

Таблиця 1.9

Вихідні дані до задачі 18

Тип сплаву	Вміст металу, %			Вартість сплаву, грн/кг
	Свинець	Цинк	Олово	
I	25	40	45	8
II	10	80	10	17
III	30	30	40	10
IV	40	25	35	12
V	10	70	20	15

19. Деталі А, Б, В можна обробляти на трьох верстатах (I, II, III). У табл. 1.10 подано норми витрат часу на обробку верстатом відповідної деталі, вартість однієї години роботи верстата і граничний час його роботи на тиждень. У припущенні, що обробка кожної деталі може бути виконана на будь-якому верстаті, скласти оптимальну виробничу програму, враховуючи такі критерії:

а) максимум товарної продукції;

- б) максимум сумарного прибутку;
 в) мінімум сумарних витрат на обробку, якщо задано такий план випуску продукції: деталей А – 300 шт., Б – 500 шт., В – 100 шт.;
 г) максимум числа комплектів, які включають три деталі А, дві деталі Б та одну деталь В.

Таблиця 1.10

Вихідні дані до задач 19 – 23

Верстат	Норма часу для обробки деталі обробки			Вартість роботи верстата за 1 годину, грн	Граничний час роботи верстата, год
	А	Б	В		
I	0,3	0,1	0,2	30	50
II	0,5	0,2	0,4	20	60
III	0,4	0,5	0,3	15	40
Ціна однієї деталі, грн	20	40	35	–	–

20. Скориставшись умовами попередньої задачі, скласти оптимальну виробничу програму дільниці, керуючись такими критеріями:

- а) максимум прибутку, коли задано асортимент деталей у співвідношенні 3: 2: 1;
 б) максимум прибутку, якщо є замовлення на випуск такої кількості деталей: А – 200 шт., Б – 400 шт., В – 600 шт.;
 в) максимальне завантаження верстатів.

21. Використавши умови задачі 19, скласти оптимальну виробничу програму дільниці з огляду на такі критерії:

- а) максимізація кількості деталей А, Б, В за умови однакового часу роботи верстатів;
 б) максимізація прибутку за умови, що кожен верстат обробляє тільки деталі одного типу і за планом передбачено випуск усіх трьох типів деталей.

22. Використовуючи дані табл. 1.10 та припускаючи, що кожна деталь має бути послідовно оброблена на кожному верстаті, скласти виробничу програму дільниці, керуючись одним із таких критеріїв:

- а) максимізація прибутку;
 б) максимізація випуску товарної продукції, коли асортимент задано в співвідношенні 3: 2: 1.

23. На базі даних попередньої задачі скласти виробничу програму дільниці за такими критеріями:

- а) максимізація випуску товарної продукції;

б) максимізація прибутку за умови, що потрібно виготовити деталей А не менше 300 шт., деталей Б точно 200 шт.;

в) максимізація числа комплектів, якщо кожен з них містить одну деталь А, дві деталі Б і три деталі В.

Завдання 3. Виконайте змістову, концептуальну і математичну постановки задачі для моделювання описаних нижче процесів.

1. Рух поїзда. У першому наближенні вагони можна вважати абсолютно жорсткими тілами, з'єднання між ними – лінійними або нелінійно пружними.

2. Зліт космічного апарата з поверхні Місяця.

3. Процес руху частинки у водному потоці.

4. Рух кульки у сферичній ямці.

5. Рух зрубаного дерева.

6. Рух зарядженої частинки в магнітному полі.

7. Космічний корабель здійснює рух по орбіті навколо Землі. Опишіть, як бачить цей рух на небосхилі спостерігач, що перебуває в точці земної поверхні із заданими координатами.

8. Рух лижника, який виконує стрибок із трампліна.

9. Процес нагрівання й закипання води в чайнику.

10. Посадка космічного апарата на поверхню Землі.

11. Розробіть математичну модель будь-якого процесу в цікавій для вас галузі знань, опишіть особливості кожного з етапів моделювання, порівняйте їх з етапами побудови математичної моделі.

Індивідуальне завдання 2

Тема: розробка лінійних регресійних моделей екологічних, економічних і соціальних процесів

Мета: поглиблення теоретичних знань і набуття практичних навичок у розрахунках параметрів регресійних моделей процесів навколишнього середовища за даними синхронних спостережень та в графічному відображенні (візуалізації) даних спостережень і отриманих результатів.

Порядок виконання роботи

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал [2, 6, 7].

2. Побудувати лінійну регресійну модель відповідно до варіанта індивідуального завдання.

В результаті роботи мають бути виконані розрахунки:

– оцінок параметрів парної лінійної регресійної моделі відповідно до варіанта завдання;

– залишків регресії;

– параметрів довірчої області;

– параметрів довірчого інтервалу регресії;

– параметрів довірчого інтервалу прогнозу.

3. На підставі проведених розрахунків визначити умови існування регресії даних вимірювань.

4. Візуалізувати дані спостережень і розрахунків, побудувавши такі залежності:

– графік (точковий) розподілу даних синхронних вимірювань;

– графік (точковий) розподілу залишків регресії;

– графік регресійної залежності;

– графік довірчих інтервалів регресійної залежності;

– графік довірчих інтервалів прогнозу.

4. Скласти звіт про виконання роботи такого змісту:

– постановка індивідуального завдання;

– математична модель і пояснення її побудови;

– розв'язування задачі з необхідним для її розуміння рівнем деталізації;

– результати розрахунків та їх візуалізація;

– аналіз отриманих результатів.

Короткі теоретичні відомості та порядок виконання завдання²

Серйозною екологічною проблемою сьогодні є забруднення навколишнього середовища як наслідок діяльності промислових підприємств. Це зазвичай надходження в довкілля шкідливих речовин разом із викидами та стоками. Будь-яка екологічна система є складною і багатоелементною, а її існування залежить від багатьох умов та факторів. Коли дія таких факторів незначна, то система перебуває у стаціонарному стані, а її функціонування передбачене. Антропогенний вплив на природні системи, наприклад, скидання виробничих, побутових і сільськогосподарських стічних вод, викиди забруднювальних речовин в атмосферне повітря, призводить до порушення рівноваги і здійснює негативний вплив на здоров'я людини. Отже, актуальним завданням є вивчення впливу таких факторів на якісні показники навколишнього середовища і здоров'я людини. Аби виконати це завдання, спеціальні служби проводять моніторинг стану довкілля, досліджують інформацію про здоров'я людей. Одним із методів вивчення таких процесів є кореляційно-регресійний аналіз, описаний у літературі [2, 6, 7].

Для прикладу розглянемо діяльність підприємства, розташованого в точці *A* (місце випуску стічної води) (рис. 2.1). Тоді, коли режим випуску стічних вод порушено (наприклад, через неправильну роботу очисних споруд), у районі водозбору *B* може скластися екологічно небезпечна ситуація. Необхідно на основі даних моніторингу забруднень у місці випуску стічної води та у місці водозбору (рис. 2.1) скласти лінійну регресійну модель, яка дозволить спрогнозувати якість води у місці водозбору (точка *B*) на основі даних про її забруднення в точці *A*.

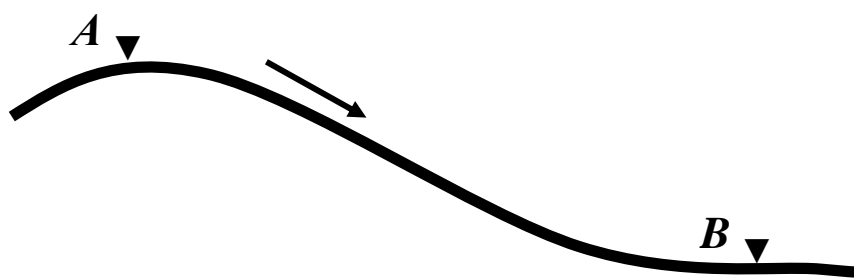


Рис. 2.1. Схема водозбору

Для розв'язування задачі складемо регресійну статистичну модель такого вигляду:

$$y = a + bx + \varepsilon, \quad (2.1)$$

де y – вміст забруднювальної речовини в місці водозбору, x – вміст забруднювальної речовини в стоках.

² У завданні використано матеріали навчального посібника [2].

Лінійну регресію величини y за величиною x , що розглядається як випадкова, описано таким рівнянням: $y = f(x) = a + bx$, тут a й b – параметри регресії; ε – внесок випадкових факторів, що відображає вплив фонові концентрації забруднювачів та умов розбавлення стічної води.

Аби виконати завдання, необхідно провести такі етапи регресійного аналізу:

- визначити вид залежності (етап специфікації), тобто потрібно впевнитися, що має місце лінійна парна регресія:

$$f(x) = a + bx, \quad (2.2)$$

- обчислити коефіцієнти регресії (етап ідентифікації) та характеристики «шуму», тобто впливу ε випадкових факторів.
- перевірити якість рівняння регресії (етап верифікації).

Вихідними даними для проведення повного регресійного аналізу, метою якого є вивчення впливу скидання стоків на якість річкової води в контрольному створі, є синхронні ряди спостережень за зміною значень величин x та y (див. табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Результати вимірювання величин x та y

Номер вимірювання	1	2	...	i	...	M
x_i	x_1	x_2	...	x_i	...	x_M
y_i	y_1	y_2	...	y_i	...	y_M

Число M відображає розмір вибірки спостережень, а індекс i показує номер вимірювання. Розрахунки й визначення параметрів необхідно проводити в описаній нижче послідовності.

Етап 1. Специфікація

Оскільки за умовами задачі досліджується парна регресія, то найпростіше впевнитися в тому, що розподіл результатів вимірювань має ознаки лінійної регресії, за допомогою їхньої *візуалізації*. Для цього потрібно побудувати точковий графік розподілу результатів вимірів $(x_i; y_i)$ у декартовій системі координат, де вздовж осі абсцис відкладають значення величини x_i – результати вимірів у місці скидання стічної води, а вздовж осі ординат – величини y_i , тобто відповідні їм результати вимірів у місці водозбору.

Якщо розподіл точок утворює видовжену в певному напрямку «хмарку», то можна припустити наявність лінійної регресії (2.2). Коли ж точки утворюють хаотичний клубок без певної тенденції розподілу, то швидше за все існування лінійної регресії не підтвердиться. Для побудови графіка можна використовувати, наприклад, засоби електронних таблиць Excel.

Припущення про існування парної лінійної регресії перевіримо шляхом обчислення коефіцієнта парної кореляції. Для цього спочатку потрібно розрахувати статистики, які описують результати вимірювань, а саме:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i; \quad (2.3)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M y_i; \quad (2.4)$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i^2; \quad (2.5)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}; \quad \sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}; \quad (2.6)$$

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}); \quad (2.7)$$

$$\text{Коефіцієнт кореляції } r_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (2.8)$$

Якщо значення коефіцієнта кореляції буде більшим за 0,7, то кореляція вважається сильною і припущення про лінійну залежність є слушним. Крім того, необхідно перевірити таку умову:

$$|r_{xy}| \geq \frac{2}{\sqrt{M-3}}. \quad (2.9)$$

Коли цю умову виконано, то дані виявляють статистичну залежність і їх можна використовувати для побудови рівняння регресії.

Етап 2. Ідентифікація

Якщо на попередньому етапі аналізу припущення про існування лінійної залежності підтвердилось, то необхідно обчислити оцінки параметрів регресії. Коли йдеться про парну лінійну регресію, то можна скористатися такими формулами:

$$\hat{b} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2}; \quad (2.10)$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}. \quad (2.11)$$

Етап 3. Верифікація

Для перевірки якості складеного рівняння регресії обчислимо такі характеристики:

Залишки регресії

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, M. \quad (2.12)$$

Математичне сподівання залишків регресії

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \varepsilon_i. \quad (2.13)$$

Якщо рівняння побудовано правильно, то математичне сподівання залишків регресії має дорівнювати 0.

Середнє квадратичне відхилення залишків регресії

$$S_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{M-1} \left[\sum_{i=1}^M \varepsilon_i^2 - \frac{1}{M} \left(\sum_{i=1}^M \varepsilon_i \right)^2 \right]}. \quad (2.14)$$

Розраховані величини залишків регресії записуємо у табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Результати оцінювання залишків регресії

Вимірювання, i	1	2	...	M
Залишок регресії, ε_i	ε_1	ε_2	...	ε_M

Аби упевнитися, що вплив інших факторів, окрім вмісту забруднювальної речовини в стічній воді, може реально розглядатися як випадковий, також можна використовувати *візуалізацію залишків регресії*.

Для цього будуємо декартову систему координат, де вісь абсцис відповідає номеру вимірювання, а вісь ординат – величині залишку регресії, і позначаємо в ній точки (i, ε_i) для кожного вимірювання.

Якщо внаслідок побудови точки на графіку хаотично розподіляються вздовж осі абсцис з обох її боків, то це означає що вплив інших факторів ε випадковий. Коли ж у розподілі точок можна побачити певну закономірність, то побудоване рівняння лінійної регресії (2.2) не охоплює повністю вплив скидання стоків на якість води в контрольному створі, отже, необхідно розглянути інші види залежності, окрім лінійної.

Етап 4. Розрахунок параметрів довірчої області коефіцієнтів регресії

Нагадаємо, що для обчислення коефіцієнтів регресії використовується деяка вибірка спостережуваних значень. Отже, в результаті ми маємо деякі *оцінки* цих коефіцієнтів, а не їх істинні значення. Відтак, оцінки, обчислені за іншою вибіркою, можуть відрізнитися. Якщо обсяг вибірки не великий, то ця різниця може бути досить суттєвою. Тоді доцільно побудувати довірчу область коефіцієнтів регресії, аби впевнитись, що їхні обчислені оцінки задовольняють висунуті вимоги стосовно достовірності.

Довірча область являє собою частину фазової площини, тобто площини в декартовій системі координат aOb , де з довірчою ймовірністю P_α перебувають дійсні величини параметрів регресії a і b , які, звісно, відрізняються від їх статистичних оцінок \hat{a} і \hat{b} .

Розрахунок таких статистик – це дуже важливий крок регресійного аналізу, тому що саме на цій стадії остаточно вирішується питання про можливість побудови моделі лінійної регресії. Границя довірчої області параметрів моделі (2.2) являє собою еліпс, який описується такою формулою:

$$(a - \hat{a})^2 + 2\bar{x}(a - \hat{a})(b - \hat{b}) + \bar{x}^2(b - \hat{b})^2 = \frac{2}{M} S_\varepsilon^2 F_{2;M-2;\alpha}, \quad (2.15)$$

де $F_{2;M-2;\alpha}$ – величина оберненого F -розподілу ймовірностей, коли його ступені вільності $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = M - 2$ і рівень значущості $\alpha = 1 - P_\alpha$.

Цю величину визначають, скориставшись статистичними таблицями або функцією з бібліотеки Excel. В інженерній екології найчастіше беруть рівень значущості 0,05.

Розрахунок параметрів довірчої області починається з визначення її нижньої $\min b$ та верхньої $\max b$ меж уздовж осі абсцис b , а саме:

$$d = \frac{S_\varepsilon}{\sigma_y} \sqrt{\frac{2}{M} F_{2;M-2;\alpha}}; \quad (2.16)$$

$$\min b = \hat{b} - d; \quad (2.17)$$

$$\max b = \hat{b} + d. \quad (2.18)$$

Якщо нижня і верхня межі мають однаковий знак, тобто

$$\min b \cdot \max b > 0, \quad (2.20)$$

то довірча область не перетинає вісь Ob і гіпотезу про існування регресії у вигляді рівняння (2.2) можна прийняти. У протилежному випадку гіпотеза, про те, що $b = 0$, не може бути відкинута. Це означає, що ми не можемо виявити зв'язок (2.2) через брак даних вимірювань або тому, що його не існує.

Якщо умова (2.20) виконується, то регресійну модель записують у такому вигляді:

$$\bar{y} = \hat{a} + \hat{b}x, \quad (2.21)$$

де \bar{y} – середня величина вмісту забруднювальної речовини в місті водозбору, яку очікують з огляду на її концентрацію x у стічній воді.

Для того, щоб наочно побачити результати аналізу, доцільно також виконати візуалізацію лінії регресії та довірчих інтервалів.

Етап 5. Візуалізація регресії та довірчих інтервалів

Графік лінії регресії, тобто графік функції (2.21), являє собою пряму лінію, що проходить з нахилом до осей координат Ox і Oy

Графік нижньої $l(x)$ та верхньої $h(x)$ меж довірчого інтервалу для величини \bar{y} будують за такими рівняннями:

$$l(x) = \hat{a} + \hat{b}x - \frac{S_\varepsilon}{\sqrt{M}} t_{M-1; \alpha/2} \sqrt{1 + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2}}; \quad (2.22)$$

$$h(x) = \hat{a} + \hat{b}x + \frac{S_\varepsilon}{\sqrt{M}} t_{M-1; \alpha/2} \sqrt{1 + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2}}, \quad (2.23)$$

де $t_{M-1; \alpha/2}$ – це величина оберненого розподілу Стьюдента, коли ступінь вільності $\nu = M - 1$ і рівень значущості $\alpha/2 = (1 - P_\alpha)/2$.

Графік нижньої $L(x)$ і верхньої $H(x)$ границь довірчого інтервалу, у якому можуть відбуватися майже всі коливання значень миттєвої величини у вмісту забруднювальної речовини в місці водозбору залежно від її концентрації x в стічній воді будують за такими рівняннями:

$$\lambda(x) = t_{M-1; \alpha/2} S_\varepsilon \sqrt{1 + \frac{1}{M} + \frac{(x-\bar{x})^2}{M\sigma_x^2}}; \quad (2.24)$$

$$L(x) = \hat{a} + \hat{b}x - \lambda(x); \quad (2.25)$$

$$H(x) = \hat{a} + \hat{b}x + \lambda(x). \quad (2.26)$$

Довірчі інтервали показують межі коливань миттєвого значення забруднень у місці водозбору.

Приклад виконання завдання

Умови задачі. Припустимо, що підприємство розташоване в точці A (місце випуску стічної води) (рис. 2.1). У разі порушення режиму випуску стоків (наприклад, через неправильну роботу очисних споруд) у районі водозбору B може скластися екологічно небезпечна ситуація. У процесі спостережень і синхронних вимірювань отримано дані про концентрацію забруднювальної речовини в місці випуску стічної води та в контрольному створі (місці водозбору). Необхідно провести регресійний аналіз і побудувати статистичну (регресійну) модель впливу скидання стоків на якість річкової води у місці водозбору. Результати вимірювань наведено у табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Результати вимірювання концентрації забруднювача в стічній воді та в місці водозбору, мг/дм³

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	308	35,56	11	305	34,88	21	309	34,39
2	289	34,46	12	429	36,19	22	378	35,61
3	282	34,02	13	279	33,72	23	390	36,27
4	310	34,77	14	364	35,28	24	421	36,56
5	304	34,82	15	350	34,95	25	409	36,95
6	345	35,5	16	371	36,22	26	290	35,02
7	403	36,65	17	279	33,69	27	304	34,87
8	269	34	18	389	36,04	28	246	33,74
9	247	33,78	19	330	34,85	29	262	34,6
10	308	35,56	20	304	35,24	30	333	35,09

Проведемо розрахунки відповідно до етапів, що були описані вище.

Етап 1. Специфікація

Виконаємо візуалізацію результатів вимірювань. Для цього побудуємо точковий графік розподілу парних вимірів величин (x_i ; y_i) у декартовій системі координат (див. рис. 2.2.).

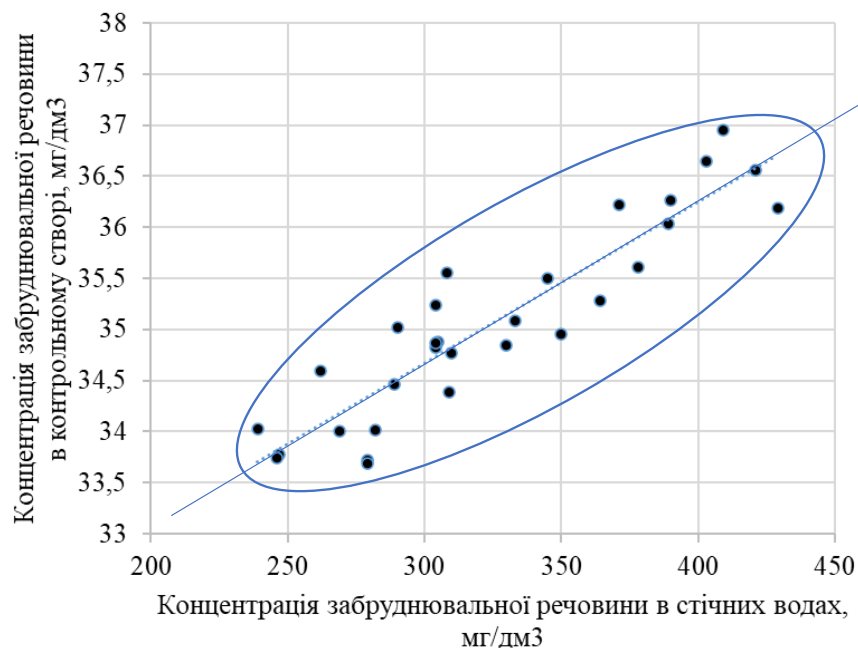


Рис. 2.2. Поле кореляції концентрації забруднювача в стічній воді та в місці водозбору

Як бачимо, точки створюють хмаринку, котра нагадує еліпс, вісь якого не паралельна осям координат. Отже, робимо висновок, що можливо визначити вплив скидання стічної води на вміст забруднювача в контрольному створі у вигляді лінійної регресії.

Тепер розрахуємо коефіцієнт парної лінійної кореляції. Для цього спочатку обчислимо допоміжні статистики, використовуючи формули (2.3) – (2.8), а саме:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i = 324,6 \text{ мг/дм}^3;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M y_i = 35,06 \text{ мг/дм}^3;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i^2 = 108264,13 \text{ мг}^2/\text{дм}^6;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = 53,84211487;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2} = 0,927951447 \text{ мг/дм}^3;$$

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 45,694 \text{ мг}^2/\text{дм}^2.$$

Коефіцієнт парної лінійної кореляції $r_{xy} = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = 0,91$. Оскільки це значення близьке до 1, то робимо висновок, що між результатами спостережень існує сильна лінійна залежність.

Перевіримо умову (2.9): $|r_{xy}| \geq \frac{2}{\sqrt{M-3}}$.

Як бачимо,

$$0,91 \geq 0,3849.$$

Умову виконано, отже, результати спостережень виявляють статистичну залежність і їх можна використовувати для побудови лінійного рівняння регресії.

Переходимо до наступного етапу.

Етап 2. Ідентифікація

Рівняння регресії будемо шукати в такому вигляді:

$$y = a + bx.$$

Обчислимо оцінки параметрів регресії, а саме:

$$\hat{b} = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x^2} = 0,0158;$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 29,942 \text{ мг/дм}^3.$$

Отже, рівняння регресії має такий вигляд:

$$y = 29,942 + 0,0158 x.$$

Етап 3. Верифікація

Для перевірки якості рівняння спочатку обчислимо залишки регресії.

Для цього скористаємось такою формулою: $\varepsilon_i = y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i$, результати занесемо в табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Результати розрахунків залишків регресії ε_i , мг/дм³

<i>i</i>	1	2	3	4	5	6
ε_i	0,7633	-0,0372	-0,3669	-0,0582	0,0864	0,1201
<i>i</i>	7	8	9	10	11	12
ε_i	0,1201	0,356	-0,182	-0,0552	0,1306	-0,5139
<i>i</i>	13	14	15	16	17	18
ε_i	-0,3994	-0,5087	0,4303	-0,6496	-0,0334	-0,2934
<i>i</i>	19	20	21	22	23	24
ε_i	0,5064	-0,4224	-0,2900	0,1808	-0,0178	0,5613
<i>i</i>	25	26	27	28	29	30
ε_i	0,5070	0,1364	-0,0794	0,5284	-0,1007	0,3209

Обчислимо математичне сподівання залишків регресії, тобто

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \varepsilon_i = -9,00021\text{E} -15.$$

Воно дорівнює нулю, отже, у рівнянні враховано всі суттєві фактори, системної помилки немає.

Тепер розраховуємо середнє квадратичне відхилення залишків регресії, а саме:

$$S_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{M-1} \left[\sum_{i=1}^M \varepsilon_i^2 - \frac{1}{M} (\sum_{i=1}^M \varepsilon_i)^2 \right]} = 0,38172797 \text{ мг/дм}^3.$$

За властивостями нормального розподілу інтервал $(2S_{\varepsilon}; -2S_{\varepsilon})$ має включати майже всі значення залишків регресії.

Для зручності проілюструємо це на графіку. У декартовій системі координат, де вісь абсцис показує порядковий номер вимірювання i , а ордината – відповідні величини залишку регресії ε_i , позначимо точки (i, ε_i) (див. рис. 2.3).

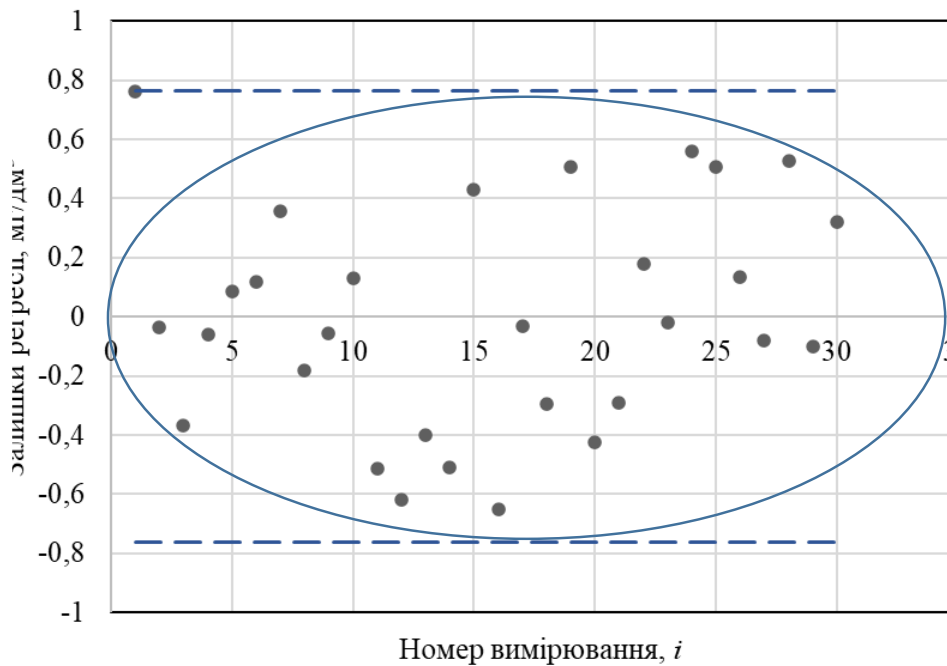


Рис. 2.3. Графік розподілу залишків регресії [пунктиром показано інтервал $(2S_{\varepsilon}; -2S_{\varepsilon})$ нормального розподілу залишків регресії]

Як бачимо, точки розташувались і зверху, і знизу осі OX , утворюючи еліпс, вісь якого збігається (або близька) з цією віссю. Отже, робимо висновок, що вплив інших факторів на результати вимірювань схожий на випадковий.

Етап 4. Розрахунок параметрів довірчої області регресії

Розрахунок виконуємо за формулами (2.14) – (2.16). Спочатку оберемо рівень значущості α , наприклад, $\alpha = 0,05$, і визначимо табличне значення F -критерію, а саме: $F_{2;M-2;\alpha} = F_{2;28;0,05} = 3,340$. Тоді

$$d = \frac{S_e}{\sigma_{cm}} \sqrt{\frac{2}{M} F_{2;M-2;\alpha}} = \frac{0,3817}{53,842} \sqrt{\frac{3,340}{15}} = 0,00335;$$

$$\min b = \hat{b} - d = 0,0158 - 0,00335 = 0,01242;$$

$$\max b = \hat{b} + d = 0,01911.$$

Нижня й верхня границі довірчої області мають однаковий знак, тобто

$$\min \theta_1 \cdot \max \theta_1 = 0,000237251 > 0.$$

Отже, довірна область не перетинає вісь Ob , а тому гіпотеза щодо існування лінійної регресії в такому вигляді: $\hat{y} = 29,942 + 0,0158 x$, мг/дм³, має бути прийнята.

Для обчислення миттєвих значень у вмісту забруднювача в контрольному створі, які можуть спостерігатися відповідно до його концентрації x у стічній воді, маємо таку модель:

$$y = 29,942 + 0,0158 x + \varepsilon, \text{ мг/дм}^3.$$

Етап 5. Візуалізація регресії та її довірчих інтервалів

Розрахунок координат точок на графіку виконуємо за формулами (2.22) – (2.26). Передбачимо, що рівень значущості $\alpha = 0,05$, тоді

$$t_{M-1;\alpha/2} = t_{29;0,025} = 2,045.$$

І формули набувають такого вигляду:

$$\hat{y} = 29,942 + 0,0158 x, \text{ мг/дм}^3;$$

$$\beta(x) = \frac{S_\varepsilon}{\sqrt{M}} t_{M-1;\alpha/2} \sqrt{1 + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2}} = 0,0735 \sqrt{1 + \frac{(x-324,6)^2}{2899}}, \text{ мг/дм}^3;$$

$$l(x) = 29,942 + 0,0158 x - \beta(x), \text{ мг/дм}^3;$$

$$h(x) = 29,942 + 0,0158 x + \beta(x), \text{ мг/дм}^3;$$

$$\lambda(x) = t_{M-1;\alpha/2} S_\varepsilon \sqrt{1 + \frac{1}{M} + \frac{(x-\bar{x})^2}{M\sigma_x^2}} = 0,7806 \sqrt{1,033 + \frac{(x-324,6)^2}{86969}}, \text{ мг/дм}^3;$$

$$L(x) = 29,942 + 0,0158 x - \lambda(x), \text{ мг/дм}^3;$$

$$H(x) = 29,942 + 0,0158 x + \lambda(x), \text{ мг/дм}^3.$$

Для графічної візуалізації регресії та довірчих інтервалів разом з даними спостережень визначаємо інтервал зміни величини x таким чином, аби він охоплював усі дані вимірювань і був зручним для обрання її кроку Δx .

Для графічного відображення довірчих інтервалів лінійної регресії достатньо 8 – 10 точок. Згідно з даними табл. 2.3, $\min x_i = 239, \text{ мг/дм}^3$; $\max x_i = 429, \text{ мг/дм}^3$. Тому обираємо область зміни величини x уздовж осі абсцис в межах від 230 мг/дм^3 до 430 мг/дм^3 , а крок $\Delta x = 25 \text{ мг/дм}^3$, що дає 9 точок для проведення кожної лінії.

Результати розрахунків координат точок ліній регресії та меж обох довірчих інтервалів занесемо в табл. 2.5.

Таблиця 2.5

Результати розрахунку координат точок лінії регресії та границь її довірчих інтервалів, мг/дм³

x	\hat{y}	$\beta(x)$	$l(x)$	$h(x)$	$\lambda(x)$	$L(x)$	$H(x)$
230	33,57	0,1485	33,42	33,72	0,8320	32,74	34,40
255	33,96	0,1200	33,84	34,08	0,8145	33,15	34,78
280	34,35	0,0954	34,26	34,45	0,8021	33,55	35,16
305	34,75	0,0782	34,67	34,83	0,7951	33,95	35,54
330	35,14	0,0738	35,07	35,23	0,7935	34,35	35,94
355	35,54	0,0844	35,45	35,62	0,7975	34,74	36,33
380	35,93	0,1054	35,83	36,04	0,8068	35,12	36,74
405	36,33	0,1320	36,19	36,46	0,8215	35,50	37,15
430	36,72	0,1615	36,56	36,88	0,8410	35,88	37,56

Графіки лінії регресії та границь обох довірчих інтервалів розмістимо на одному рисунку (див. рис. 2.3.) разом із точками, що відображають розподіл результатів вимірювань, за якими будували лінійну регресійну модель.

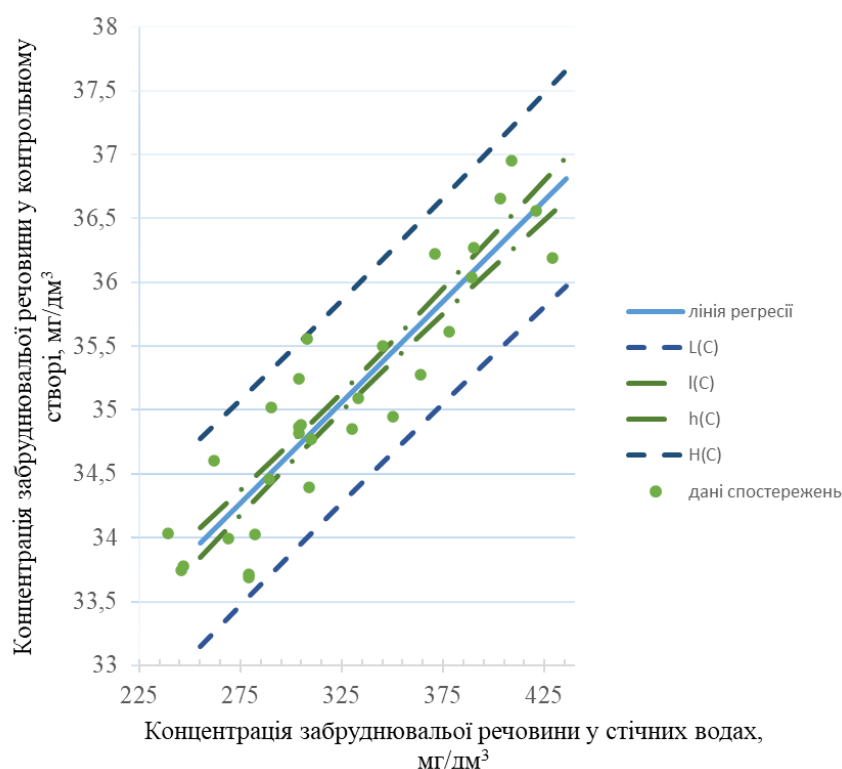


Рис. 2.3. Лінії регресії (суцільна), границь її довірчого інтервалу (штрих-пунктирні) та довірчого інтервалу (пунктирні) вимірюваних величин вмісту забруднювача (точки)

Контрольні питання

1. У чому полягає завдання регресійного аналізу?
2. Назвіть етапи регресійного аналізу.
3. Розкрийте суть етапу специфікації під час проведення регресійного аналізу. Які методи при цьому застосовують?
4. У чому полягає етап ідентифікації у проведенні регресійного аналізу? Яким чином виконують завдання цього етапу?
5. Які завдання виконують на етапі верифікації у проведенні регресійного аналізу?
6. У якому вигляді формулюють рівняння лінійної парної регресії?
7. Які критерії слугують для перевірки якості рівняння регресії?
8. Яким чином можна перевірити значущість коефіцієнтів регресії?
9. Яку властивість відображає коефіцієнт кореляції?
10. Який обсяг вибірки вважається достатнім, аби побудувати рівняння регресії?
11. Яку властивість описує коефіцієнт детермінації?
12. Якими мають бути залишки регресії, аби рівняння вважалось «прийнятним»?
13. У яких сферах можна застосовувати побудовану регресійну модель?
14. З якою метою в регресійному аналізі використовують критерій Фішера?
15. Для чого в регресійному аналізі застосовують критерій Стюдента?
16. Яким чином визначають ступені вільності, застосовуючи критерії Фішера й Стюдента?
17. Як, враховуючи значення коефіцієнта кореляції, перевірити, чи існує зв'язок між досліджуваними величинами?
18. Чи можна застосовувати побудоване рівняння регресії для прогнозування значень параметрів, що перебувають за межами інтервалу вихідних даних?

Критерії оцінювання індивідуального завдання

При оцінюванні індивідуального завдання враховується правильність його виконання (50 %), слушність пояснень до використаних методів і правил обчислення, аналіз отриманих результатів, знання визначень і термінології (40 %), своєчасне подання виконаної роботи на перевірку (10 %). Самостійно написана програма для проведення обчислень оцінюється додатковим балом.

Варіанти завдань

Завдання (варіанти 1 – 10). Припустимо, за результатами спостережень отримано дані синхронних вимірювань концентрації забруднювальної речовини в місці випуску стічної води та в контрольному створі. Необхідно провести регресійний аналіз і побудувати статистичну (регресійну) модель впливу скидання стоків на якість річкової води в контрольному створі (місці водозбору). Дані вимірювань (мг/дм^3) вмісту речовини в стічній воді та контрольному створі наведено в кожній таблиці варіанта.

Варіант 1

Результати вимірювання концентрації забруднювача в стічній воді та в місці водозбору, мг/дм^3

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	373,00	38,50	11	427,00	38,40	21	330,00	40,50
2	415,00	39,90	12	440,00	38,50	22	450,00	40,90
3	398,00	39,10	13	350,00	42,10	23	369,00	43,30
4	361,00	38,70	14	334,00	47,00	24	400,00	45,30
5	380,00	38,60	15	386,00	38,30	25	372,00	47,70
6	393,00	39,80	16	415,00	41,60	26	441,00	40,30
7	434,00	39,80	17	379,00	42,40	27	456,00	44,00
8	450,00	39,50	18	455,00	39,20	28	353,00	37,10
9	446,00	39,00	19	396,00	47,20	29	344,00	44,10
10	336,00	38,20	20	435,00	48,20	30	363,00	40,10

Варіант 2

Результати вимірювання концентрації забруднювача в стічній воді та в місці водозбору, мг/дм^3

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	377,00	41,10	11	358,00	39,20	21	336,00	37,40
2	350,00	37,80	12	393,00	42,10	22	360,00	38,20
3	397,00	43,50	13	432,00	47,00	23	386,00	40,90
4	405,00	44,30	14	404,00	44,20	24	366,00	39,00
5	347,00	37,80	15	456,00	48,70	25	375,00	40,00
6	372,00	40,00	16	427,00	45,50	26	449,00	47,50
7	362,00	39,30	17	442,00	47,30	27	403,00	43,00
8	394,00	43,10	18	454,00	49,10	28	381,00	40,90
9	411,00	44,90	19	436,00	47,40	29	452,00	48,10
10	454,00	49,00	20	397,00	43,30	30	419,00	44,90

Варіант 3

Результати вимірювання концентрації забруднювача в стічній воді та в місці водозбору, мг/дм³

<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>	<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>	<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>
1	370,00	40,80	11	418,00	45,60	21	430,00	45,80
2	396,00	43,20	12	430,00	46,60	22	456,00	47,80
3	433,00	46,20	13	432,00	46,10	23	341,00	36,40
4	401,00	43,30	14	359,00	39,10	24	351,00	37,50
5	385,00	42,30	15	372,00	41,00	25	381,00	40,60
6	435,00	47,30	16	404,00	44,20	26	334,00	36,00
7	427,00	45,90	17	353,00	38,50	27	404,00	43,10
8	344,00	37,20	18	389,00	41,70	28	426,00	45,40
9	454,00	49,10	19	446,00	48,30	29	367,00	39,60
10	359,00	39,90	20	365,00	40,50	30	377,00	40,70

Варіант 4

Результати вимірювання концентрації забруднювача в стічній воді та в місці водозбору, мг/дм³

<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>	<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>	<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>
1	255,00	29,60	11	285,00	32,60	21	275,00	30,90
2	281,00	32,20	12	258,00	29,90	22	275,00	29,70
3	250,00	29,00	13	296,00	33,60	23	291,00	31,40
4	250,00	28,10	14	287,00	31,80	24	258,00	28,20
5	280,00	32,10	15	251,00	29,20	25	295,00	32,00
6	282,00	31,40	16	266,00	29,80	26	250,00	27,60
7	251,00	28,00	17	259,00	28,80	27	267,00	29,40
8	299,00	33,20	18	287,00	32,00	28	295,00	32,30
9	272,00	30,80	19	283,00	31,90	29	294,00	32,30
10	250,00	27,80	20	299,00	32,70	30	280,00	31,00

Варіант 5

Результати вимірювання концентрації забруднювача в стічній воді та в місці водозбору, мг/дм³

<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>	<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>	<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>
1	314,00	34,70	11	326,00	35,90	21	336,00	37,00
2	304,00	32,80	12	341,00	36,50	22	341,00	36,30
3	312,00	35,20	13	350,00	39,00	23	335,00	35,80
4	307,00	33,10	14	319,00	34,30	24	326,00	35,00
5	332,00	36,50	15	340,00	37,30	25	307,00	33,20
6	319,00	35,40	16	327,00	36,20	26	339,00	36,50
7	317,00	33,90	17	311,00	33,30	27	308,00	33,50
8	342,00	36,20	18	333,00	35,30	28	343,00	37,10
9	330,00	37,10	19	311,00	35,20	29	309,00	33,80
10	300,00	33,70	20	304,00	34,10	30	335,00	36,50

Варіант 6

Результати вимірювання концентрації забруднювача в стічній воді та в місці водозбору, мг/дм³

<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>	<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>	<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>
1	306,00	33,50	11	341,00	37,00	21	332,00	36,20
2	324,00	35,20	12	336,00	36,40	22	344,00	36,60
3	341,00	37,10	13	340,00	37,00	23	326,00	34,90
4	348,00	38,20	14	343,00	37,70	24	337,00	36,10
5	331,00	37,20	15	328,00	36,90	25	306,00	33,10
6	330,00	36,10	16	330,00	36,10	26	308,00	33,40
7	330,00	36,20	17	327,00	35,90	27	301,00	32,80
8	321,00	35,50	18	320,00	35,40	28	319,00	34,70
9	314,00	34,60	19	350,00	38,20	29	336,00	36,50
10	315,00	33,60	20	335,00	35,60	30	345,00	37,50

Варіант 7

Результати вимірювання концентрації забруднювача в стічній воді та в місці водозбору, мг/дм³

<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>	<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>	<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>
1	329,00	36,90	11	345,00	38,50	21	339,00	36,90
2	343,00	37,90	12	311,00	34,70	22	349,00	37,10
3	345,00	36,60	13	345,00	36,60	23	341,00	36,40
4	300,00	33,00	14	321,00	35,10	24	333,00	35,70
5	313,00	33,40	15	307,00	32,80	25	313,00	33,80
6	314,00	35,00	16	308,00	34,40	26	319,00	34,50
7	307,00	32,90	17	335,00	35,70	27	341,00	36,80
8	323,00	34,50	18	347,00	36,90	28	338,00	36,60
9	322,00	35,60	19	303,00	33,70	29	348,00	37,70
10	306,00	33,20	20	338,00	36,40	30	310,00	34,00

Варіант 8

Результати вимірювання концентрації забруднювача в стічній воді та в місці водозбору, мг/дм³

<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>	<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>	<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>
1	323,00	35,00	11	350,00	37,70	21	310,00	34,00
2	307,00	34,10	12	326,00	36,00	22	321,00	34,30
3	319,00	36,00	13	308,00	34,90	23	303,00	32,60
4	301,00	33,80	14	335,00	37,20	24	317,00	34,10
5	301,00	33,00	15	306,00	33,50	25	315,00	34,00
6	309,00	33,70	16	340,00	36,80	26	320,00	34,60
7	346,00	37,60	17	322,00	35,20	27	306,00	33,30
8	302,00	33,60	18	326,00	36,00	28	309,00	33,70
9	321,00	34,90	19	328,00	35,60	29	336,00	36,50
10	309,00	33,40	20	330,00	35,50	30	331,00	36,10

Варіант 9

Результати вимірювання концентрації забруднювача в стічній воді та в місці водозбору, мг/дм³

<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>	<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>	<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>
1	304,00	33,20	11	350,00	37,80	21	343,00	36,70
2	340,00	37,50	12	316,00	35,10	22	326,00	34,80
3	303,00	32,60	13	322,00	34,50	23	301,00	32,40
4	326,00	36,40	14	305,00	34,30	24	323,00	34,70
5	313,00	33,60	15	339,00	36,20	25	325,00	35,00
6	346,00	36,90	16	332,00	35,50	26	324,00	35,00
7	346,00	38,40	17	307,00	34,50	27	301,00	32,80
8	311,00	34,80	18	340,00	37,70	28	318,00	34,60
9	323,00	35,70	19	337,00	37,10	29	313,00	34,20
10	314,00	34,40	20	329,00	35,90	30	341,00	37,10

Варіант 10

Результати вимірювання концентрації забруднювача в стічній воді та в місці водозбору, мг/дм³

<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>	<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>	<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>
1	281,00	30,10	11	262,00	28,20	21	264,00	28,90
2	271,00	29,60	12	274,00	29,90	22	290,00	31,20
3	293,00	31,40	13	252,00	27,30	23	281,00	30,40
4	299,00	32,80	14	273,00	30,20	24	273,00	29,70
5	254,00	28,20	15	282,00	31,00	25	298,00	32,30
6	283,00	31,30	16	272,00	30,20	26	271,00	29,70
7	281,00	31,00	17	277,00	30,60	27	252,00	27,90
8	275,00	29,50	18	251,00	27,10	28	279,00	30,70
9	265,00	29,10	19	275,00	30,10	29	280,00	30,90
10	254,00	27,50	20	264,00	28,50	30	284,00	31,40

Завдання (варіант 11 – 14). Припустимо, що існують підстави вважати, що викиди забруднювальних речовин впливають на кількість захворювань серед населення. Необхідно провести кореляційно-регресійний аналіз та з'ясувати, чи має місце така залежність, і якщо це буде підтверджено, то побудувати статистичну (регресійну) модель впливу шкідливих викидів на рівень захворювань серед населення.

Варіант 11

Використовуючи дані про викиди забруднювальних речовин в атмосферне повітря України (табл. 2.5) та про кількість уперше зареєстрованих випадків захворювань серед населення (табл. 2.8), дослідити, чи існує залежність між обсягами викидів оксиду вуглецю та кількістю захворювань системи кровообігу.

Варіант 12

На підставі даних, наведених у табл. 2.5, 2.8, дослідити, чи існує залежність між обсягами викидів оксиду азоту й кількістю захворювань шкіри та підшкірної клітковини.

Варіант 13

На підставі даних, наведених у табл. 2.5, 2.8, дослідити, чи існує залежність між обсягами викидів діоксиду сірки та кількістю захворювань на новоутворення.

Варіант 14

На підставі даних, наведених у табл. 2.5, 2.8, дослідити, чи існує залежність між обсягами викидів діоксиду сірки та кількістю захворювань на хвороби кістково-м'язової системи і сполучної тканини.

Варіант 15

Використовуючи дані про викиди забруднювальних речовин в атмосферне повітря України (табл. 2.5) та про витрати на охорону навколишнього природного середовища (табл. 2.7), дослідити, чи існує залежність між кількістю коштів, що йдуть на охорону атмосферного повітря, й загальними обсягами викидів шкідливих речовин в атмосферу.

Варіант 16

Використовуючи дані про викиди забруднювальних речовин в атмосферне повітря України (табл. 2.5) та про загальні обсяги постачання первинної енергії (табл. 2.6), дослідити, чи існує залежність між рівнем виробництва електроенергії та загальною кількістю викидів шкідливих речовин в атмосферу.

Варіант 17

Використовуючи дані про викиди забруднювальних речовин в атмосферне повітря України (табл. 2.5) та про витрати на охорону навколишнього природного середовища (табл. 2.7), дослідити, чи існує залежність між обсягами коштів, що йдуть на науково-дослідні роботи, та загальною кількістю викидів шкідливих речовин в атмосферу.

Варіант 18

На підставі даних про загальні обсяги постачання первинної енергії (табл. 2.6) та про викиди забруднювальних речовин в атмосферне повітря України (табл. 2.5) дослідити, чи існує залежність між кількістю виробленої енергії за рахунок вугілля й торфу та обсягами викидів оксиду вуглецю в повітря.

Варіант 19

На підставі даних про загальні обсяги постачання первинної енергії (табл. 2.6) та про викиди забруднювальних речовин в атмосферне повітря України (табл. 2.5), дослідити, чи існує залежність між кількістю виробленої гідроенергії та обсягом викидів оксиду вуглецю в атмосферу.

Варіант 20

Використовуючи дані про обсяги викидів забруднювальних речовин в атмосферне повітря України (табл. 2.5) та про вироблення первинної енергії (табл. 2.6), дослідити, чи існує залежність між цим показником та обсягами викидів оксиду вуглецю в атмосферу.

Вихідні дані до індивідуальних завдань³

Таблиця 2.5

*Обсяги викидів забруднювальних речовин в атмосферне повітря України,
1000 т/рік*

Рік	Діоксид сірки (SO ₂)		Оксид вуглецю (CO)			Оксиди азоту (NO ₂)	
	Загалом	стаціонарні джерела	Загалом	стаціонарні джерела	пересувні джерела	Загалом	стаціонарні джерела
2000	984,80	976,60	2776,80	1230,60	1546,20	440,60	320,00
2001	992,10	983,60	2852,50	1270,30	1582,20	452,00	328,10
2002	1032,60	1023,90	2865,10	1256,80	1608,30	435,70	309,40
2003	1046,30	1034,20	2889,60	1269,70	1619,90	477,90	306,00
2004	988,50	975,40	2991,00	1318,80	1672,20	471,90	291,70
2005	1132,80	1119,50	2975,20	1320,50	1654,70	523,90	343,70
2006	1347,20	1333,00	3050,50	1357,90	1692,60	515,10	325,80
2007	1342,60	1313,10	3301,50	1404,40	1897,10	641,90	336,60
2008	1320,60	1290,60	3176,70	1185,20	1991,50	642,00	330,90
2009	1262,70	1235,20	2787,50	915,50	1872,00	562,10	279,20
2010	1235,20	1206,30	2951,90	1063,80	1888,10	603,70	310,50
2011	1363,40	1333,10	2908,20	1066,10	1842,10	633,00	333,00
2012	1430,30	1399,20	2830,50	1004,60	1825,90	634,60	332,50
2013	1413,30	1381,80	2782,10	1007,20	1774,90	633,40	333,30
2014	1160,60	1133,30	2283,40	828,40	1455,00	541,40	288,10
2015	854,00	830,30	1971,90	764,10	1207,80	453,00	233,80
2016	1094,00	1076,40	2029,90	802,80	1227,10	404,50	240,20

³ Побудовано з використанням даних Державної служби статистики України. – <https://www.ukrstat.gov.ua/>

Таблиця 2.6

Загальний обсяг постачання первинної енергії за 2007 - 2021 роки, тис. т н.е.⁴

Рік	Виробництво енергії	Загальне постачання первинної енергії	Вугілля й торф	Атомна енергія	Гідроенергія
2007	84998	139330	42657	24273	872
2008	84260	134562	41798	23566	990
2009	79339	114420	35870	21764	1026
2010	78712	132308	38251	23387	1131
2011	85485	126438	41490	23672	941
2012	85247	122488	42718	23653	901
2013	85914	115940	41427	21848	1187
2014	76928	105683	35576	23191	729
2015	61614	90090	27344	22985	464
2016	66323	94383	32450	21244	660
2017	58863	89462	25757	22449	769
2018	60883	93526	28055	22145	897
2019	60452	89359	26076	21771	560
2020	57017	86363	22847	19994	650

⁴ тонна нафтового еквівалента

Таблиця 2.7

Обсяги витрат на охорону навколишнього природного середовища відповідно до видів природоохоронних заходів у фактичних цінах, тис. грн

	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Усього	21925579,9	32488702,1	31491958,5	34392270,3	43735862,1	41332201,7
у тому числі на такі потреби:						
охорона атмосферного повітря та усунення проблем зміни клімату	3153766,4	4263419,2	4712301,7	6403592,6	7240656,7	7971112,2
очищення зворотних вод	6733710,7	8960117,4	9341782,6	11316115,1	12626613,3	12325011,2
поводження з відходами	6200941	8928254,3	9979183,2	10012249,3	15981405,2	14096941,5
захист і реабілітація ґрунтів, підземних і поверхневих вод	1324662,6	1617183,2	2268283,8	2732666,6	3305851,4	4131255,3
зниження шумового та вібраційного впливу	13159,1	361994,2	696443,7	278081,9	36057,2	478199,9
збереження біорізноманіття та середовища існування видів	369934,6	594125,8	944563,7	871182,7	1171144,4	1339109,7
радіаційна безпека	3866567,9	7053479,2	3114089,4	2166508,2	2709785,3	514031,8
науково-дослідні роботи природоохоронного спрямування	59108,7	58649,5	89267,0	124199,0	126955,8	127887,1
інші напрями природоохоронної діяльності	203728,9	651479,3	346043,4	487674,9	537392,8	348653,0

Таблиця 2.8

*Кількість уперше зареєстрованих випадків захворювань серед населення
України, тис/рік*

Рік	Новоутворення	Хвороби системи кровообігу	Хвороби кістково-м'язової системи і сполучної тканини	Хвороби шкіри та підшкірної клітковини
2000	382	2338	1571	1996
2001	394	2384	1593	2008
2002	382	2370	1598	1950
2003	395	2386	1572	1915
2004	406	2498	1609	1917
2005	408	2430	1600	1936
2006	414	2431	1597	1906
2007	407	2437	1569	1952
2008	406	2478	1567	1911
2009	407	2423	1544	1890
2010	418	2390	1532	1921
2011	423	2346	1490	1881
2012	433	2318	1445	1852
2013	440	2256	1444	1856
2014	363	1880	1247	1570
2015	366	1844	1246	1567
2016	369	1826	1241	1564

Індивідуальне завдання № 3

Тема: Моделювання якості річкової води після скидання стоків

Мета: навчитися будувати одновимірні моделі трансформації та перенесення забруднень, ідентифікувати рівняння динаміки забруднення в річках.

Порядок виконання роботи

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал [3].
2. Записати одновимірне рівняння трансформації та перенесення забруднювальної речовини.
3. Візуалізувати результати вимірювання гідрологічних характеристик (за параметрами часу й відстані).
4. Ідентифікувати побудовану теоретичну модель в умовах, коли швидкість течії та коефіцієнти самоочищення води не змінюються на різних ділянках річки, а саме:
 - записати систему рівнянь для обчислення коефіцієнтів моделі;
 - розв'язати складену систему рівнянь за допомогою MS Excel;
 - обчислити невідомі значення коефіцієнта дифузії, швидкості, коефіцієнта самоочищення води;
 - обчислити прогнозні значення вмісту забруднювальної речовини у воді стосовно наступного моменту часу.
5. Ідентифікувати отриману теоретичну модель з огляду на умови, що швидкість течії та коефіцієнти самоочищення води істотно відрізняються на тих чи інших ділянках річки, а перенесення забруднювача за рахунок дифузії несуттєве порівняно із його перенесенням течією.
 - записати систему рівнянь для обчислення коефіцієнтів моделі стосовно кожної точки створу;
 - розв'язати складену систему рівнянь за допомогою MS Excel;
 - скласти різницеві рівняння для визначення вмісту забруднювача в кожній точці створу;
 - обчислити прогнозні значення вмісту забруднення в наступний момент часу.
6. Побудувати графіки обчислених прогнозних значень вмісту забруднювача та порівняти отримані результати.
7. Оформити звіт про виконану роботу такого змісту:
 - тема лабораторної роботи;
 - постановка задачі;
 - теоретична модель;
 - система рівнянь для обчислення коефіцієнтів моделі в припущенні, що швидкість течії та коефіцієнти самоочищення води не змінюються на різних ділянках річки;
 - результати обчислень (необхідні таблиці та візуалізація);

- система рівнянь для обчислення коефіцієнтів моделі коли швидкість течії та коефіцієнти самоочищення води істотно відрізняються на тих чи інших ділянках річки, а перенесення забруднювача за рахунок дифузії несуттєве порівняно із його перенесенням течією;
- результати обчислень (необхідні таблиці та візуалізація);
- аналіз отриманих результатів.

Короткі теоретичні відомості й приклад виконання завдання

Підприємство розташоване в точці *A* (місце випуску стічних вод) (рис. 3.1). В умовах неправильної роботи очисних споруд, коли порушується технологія або режим скидання стоків, у районі водозбору *B* може скластися екологічно небезпечна ситуація. Побудувати модель, яка дозволить прогнозувати якість питної води на основі невеликого числа спостережень.

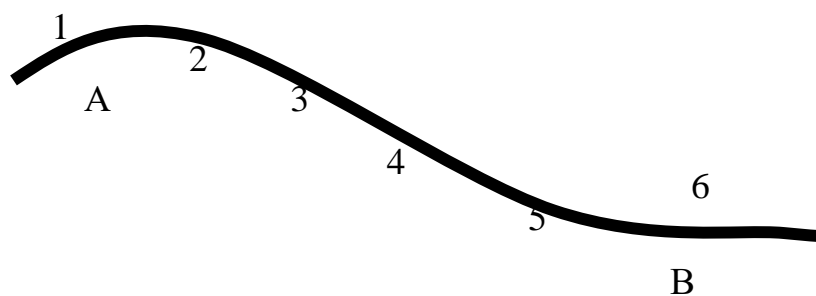


Рис. 3.1. Схема розташування місць скидання стічних вод *A* та водозбору *B*

Припустимо, що відомі результати вимірювання гідрогеологічних характеристик і показника біхроматної окиснюваності на пунктах 1 ... 6 (табл. 3.1) у три різні моменти часу коли інтервал між ними $\tau = \Delta t = 1$ год; відстань $\Delta x = 1000$ м, а швидкість течії становить 0,2 – 0,3 м/с (останній показник орієнтовний для вибору співвідношень параметрів Δt та Δx).

Таблиця 3.1

Узгоджені дані гідрогеологічних характеристик і показника біхроматної окиснюваності води в річці на пуктах вимірювання, мг/л

t	$U_{1,n}$, мг/л	$U_{2,n}$, мг/л	$U_{3,n}$, мг/л	$U_{4,n}$, мг/л	$U_{5,n}$, мг/л	$U_{6,n}$, мг/л
1	12,3	4	6	5,8	5,77	4,98
2	7	10	5,7	5,7	5,67	4,5
3	6	5	8	7	6	4,86
4	4	4	5	6	7	6

Розв'язування задачі

Візуалізуємо дані спостережень. Для цього побудуємо графіки залежності показника біхроматної окиснюваності води від часу (рис. 3.1) та зміни концентрації на кожному пункті вимірювання в один і той самий момент часу, тобто залежності між концентрацією забруднювальної речовини і відстанню до джерела забруднення (рис. 3.2).

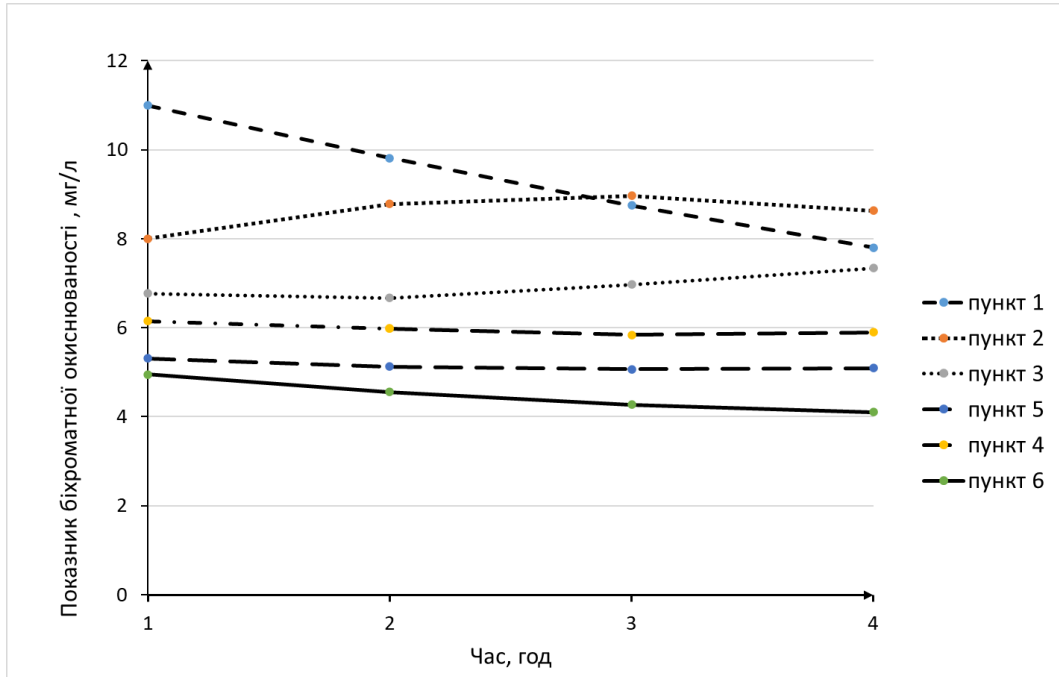


Рис. 3.1. Графіки залежності показника біхроматної окиснюваності води від часу на кожному з пунктів вимірювання

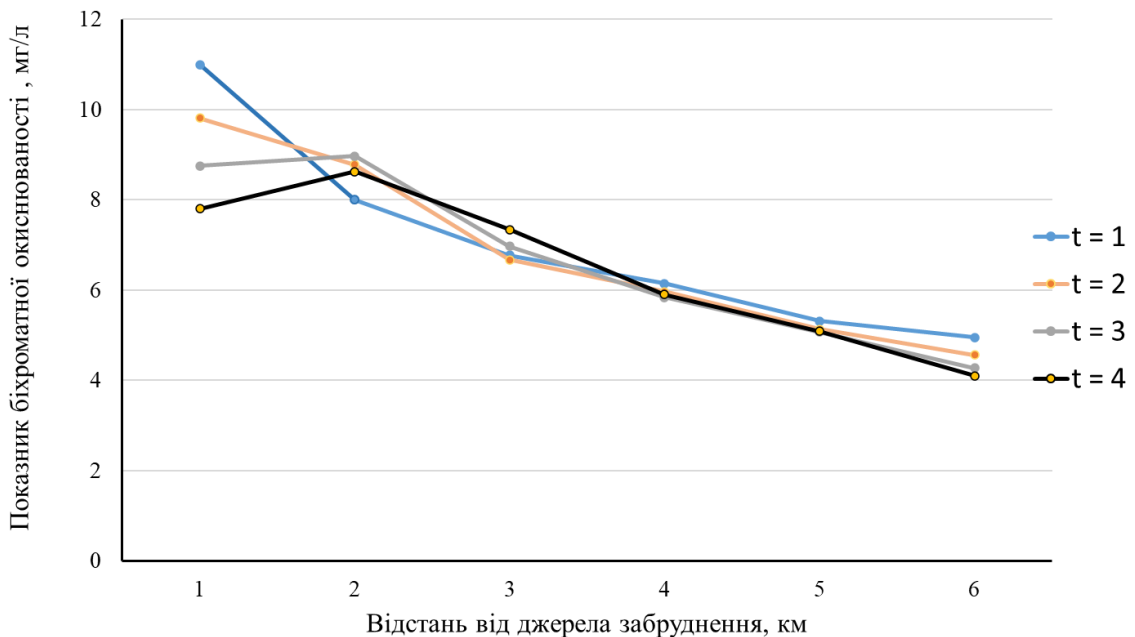


Рис.3.2. Графік залежності між показником біхроматної окиснюваності води та відстанню до джерела забруднення

Завдання I

Припустимо, що швидкість течії та коефіцієнти самоочищення не змінюються на різних ділянках річки. За цих умов поширення забруднювальних речовин у річках (одновимірний випадок) можна описати рівнянням у частинних похідних такого вигляду:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \lambda(t, x)U(t, x) - V(t, x) \frac{\partial U}{\partial x} + f(t, x), \quad (3.1)$$

де $U(t, x)$ – концентрація забруднювальної речовини, $V(t, x)$ – швидкість водного потоку, $\lambda(t, x)$ – коефіцієнт самоочищення, $f(t, x)$ – функція потужності джерела викидів, a – коефіцієнт турбулентної дифузії.

Враховуючи умови задачі, структуру різницевого оператора, який відповідає наведеному рівнянню, можна відшукати в такому вигляді:

$$U_{k,n+1} = a_{-1}U_{k-1,n} + a_0U_{k,n} + a_1U_{k+1,n}, \quad (3.2)$$

тут

$$a_{-1} = \left(\frac{a}{(\Delta x)^2} + \frac{V}{2\Delta x} \right) \tau, \quad (3.3)$$

$$a_0 = \left(\frac{1}{\tau} - \frac{2a}{(\Delta x)^2} + \lambda \right) \tau, \quad (3.4)$$

$$a_1 = \left(\frac{a}{(\Delta x)^2} - \frac{V}{2\Delta x} \right) \tau. \quad (3.5)$$

Визначимо коефіцієнти рівняння в припущенні, що швидкість течії та коефіцієнти самоочищення води не змінюються на різних ділянках річки. У таких умовах для розрахунків ми можемо взяти будь-які три точки вимірювання.

Складемо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів a_{-1}, a_0, a_1 на основі спостережень у точках 1, 2, 3. Вона матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} 8,78 = 11a_{-1} + 8a_0 + 6,77a_1, \\ 8,97 = 9,81a_{-1} + 8,78a_0 + 6,67a_1, \\ 8,63 = 8,75a_{-1} + 8,97a_0 + 7,348a_1. \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему, а за результатами обчислень отримуємо такі значення коефіцієнтів:

$$a_{-1} = 0,39; \quad a_0 = 0,80; \quad a_1 = -0,27.$$

Отже, різницевий оператор набуває такого вигляду:

$$U_{k,n+1} = 0,39U_{k-1,n} - 0,8U_{k,n} - 0,27U_{k+1,n}. \quad (3.6)$$

Тепер обчислимо наступні величини: V – швидкість потоку, λ – коефіцієнт самоочищення, a – коефіцієнт турбулентної дифузії, використовуючи рівняння (3.3) – (3.5) і враховуючи, що $\tau = 1$ год, $\Delta x = 1000$ м. Тепер складена система набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} 0,39 = \left(\frac{a}{1000^2} + \frac{V}{2000} \right) \cdot 3600, \\ 0,8 = \left(\frac{1}{3600} - \frac{2a}{1000^2} + \lambda \right) \cdot 3600, \\ -0,27 = \left(\frac{a}{1000^2} - \frac{V}{2000} \right) \cdot 3600. \end{cases}$$

Або після перетворення

$$\begin{cases} 10,72 = 0,1a + 50V, \\ -5,65 = 100000\lambda - 0,2a, \\ -7,54 = 0,1a - 50V. \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему й отримуємо такі результати:

$$V = 0,18 \text{ м/с}; \quad \lambda = -2,47 \cdot 10^{-5}; \quad a = 15,89.$$

Рівняння (3.6) дає можливість спрогнозувати значення забруднень у наступний момент часу стосовно певної контрольної точки.

Розрахуємо прогнозні значення. Зауважимо, що для цього нам потрібні три точки попереднього моменту часу, отже, можемо обчислити ці значення тільки для точок 2, 3, 4, 5 коли момент часу $t = 5$; точок 3 і 4 коли $t = 6$.

Таблиця 3.2

Вимірювані й прогнозні значення показника біхроматної окиснюваності води в річці на пунктах вимірювання, мг/л

t	$U_{1,n}$, мг/л	$U_{2,n}$, мг/л	$U_{3,n}$, мг/л	$U_{4,n}$, мг/л	$U_{5,n}$, мг/л	$U_{6,n}$, мг/л
1	11,00	8,00	6,77	6,15	5,31	4,95
2	9,81	8,78	6,67	5,97	5,13	4,56
3	8,75	8,97	6,97	5,84	5,07	4,27
4	7,80	8,63	7,34	5,90	5,09	4,10
5		7,89	7,58	6,15	5,22	

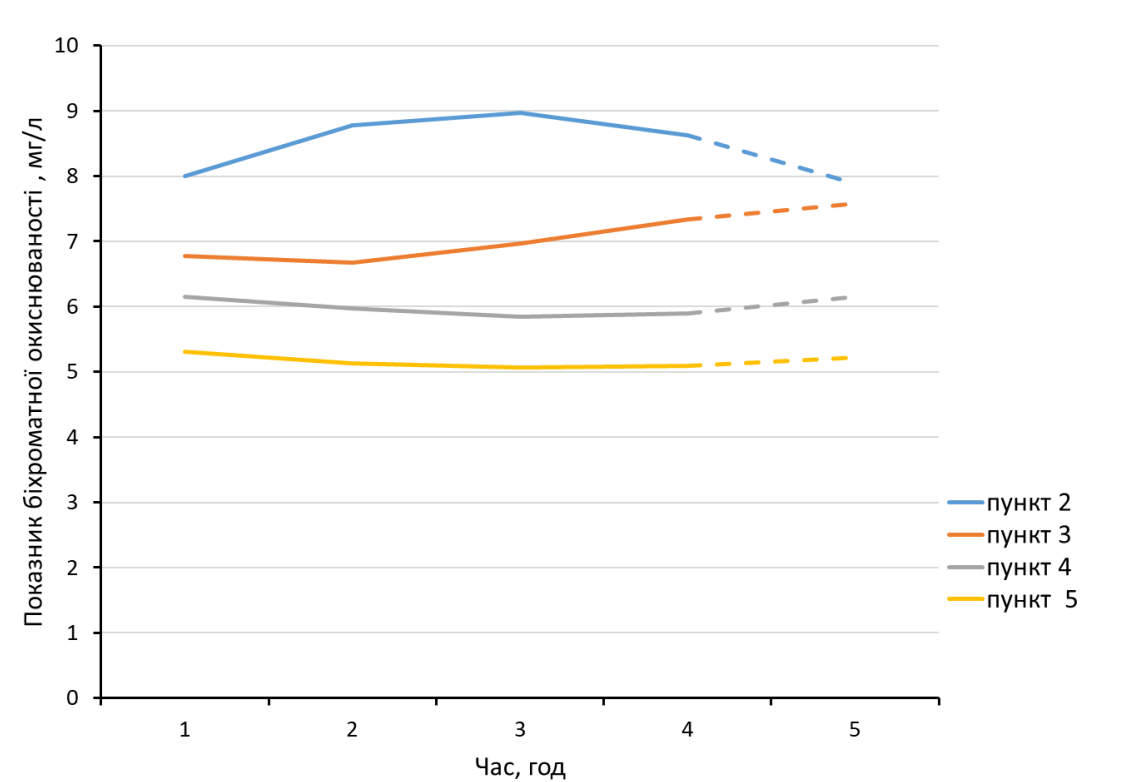


Рис. 3.3. Прогноз значень показника біхроматної окиснюваності води на кожному з пунктів вимірювання (показано пунктиром)

Для перевірки коректності припущень обчислимо на основі отриманого рівняння прогнозні значення в точках $U_{2,n}$, $U_{3,n}$, $U_{4,n}$, $U_{5,n}$ коли $t = 2, 3, 4$ (див. табл. 3.3), і обчислимо відносну середню похибку прогнозу.

Таблиця 3.3

Прогнозні значення показника біхроматної окиснюваності води в річці на пунктах вимірювання, мг/л

t	$U_{2,n}$, мг/л	$U_{3,n}$, мг/л	$U_{4,n}$, мг/л	$U_{5,n}$, мг/л
2	8,78	6,81	6,07	5,26
3	8,97	7,08	5,94	5,15
4	8,63	7,43	5,97	5,13

Похибка обчислень становить 0,87 %. Отже, припущення було слушним і ми можемо використовувати складене рівняння.

Завдання II

Припустимо, що перенесення забруднювальної речовини за рахунок дифузії можна вважати несуттєвим порівняно із її перенесенням течією річки. Тоді структуру різницевого оператора, який відповідає наведеному вище рівнянню, можна відшукати в такому вигляді:

$$U_{k,n+1} = b_0 U_{k,n} + b_1 U_{k-1,n}. \quad (3.7)$$

Враховуючи, що швидкість течії та коефіцієнти самоочищення води істотно відрізняються на тих чи інших ділянках річки, модель необхідно ідентифікувати стосовно кожної точки створу окремо.

Запишемо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів різницевого оператора (3.7) стосовно точки 2, тобто

$$\begin{cases} 8,78 = 11b_1 + 8,0b_0, \\ 8,97 = 9,81b_1 + 8,78b_0. \end{cases}$$

За результатами обчислень $b_1 = 0,29$; $b_0 = 0,69$.

Отже, різницевий оператор набуває такого вигляду:

$$U_{2,n+1} = 0,29U_{1,n} + 0,69U_{2,n}. \quad (3.8)$$

Аналогічно обчислюються різницеві рівняння стосовно інших точок створу.

Отже,

$$U_{3,n+1} = 0,44U_{2,n} + 0,46U_{3,n}; \quad (3.9)$$

$$U_{4,n+1} = 0,46U_{3,n} + 0,47U_{4,n}; \quad (3.10)$$

$$U_{5,n+1} = -1,32U_{4,n} + 2,39U_{5,n}; \quad (3.11)$$

$$U_{6,n+1} = 0,29U_{5,n} + 0,61U_{6,n}. \quad (3.12)$$

Результати прогнозування забруднень у кожній точці створу, коли момент часу $t = 4$, на основі рівнянь (3.8) – (3.12), а також значення абсолютної та відносної похибки прогнозу показано в табл. 3.4

Таблиця 3.4

Прогнозні значення показника біхроматної окиснюваності води в річці на пунктах вимірювання (мг/л) й похибки прогнозу

t	$U_{1,n}$, мг/л	$U_{2,n}$, мг/л	$U_{3,n}$, мг/л	$U_{4,n}$, мг/л	$U_{5,n}$, мг/л	$U_{6,n}$, мг/л
1	11	8	6,77	6,15	5,31	4,95
2	9,81	8,78	6,67	5,97	5,13	4,56
3	8,75	8,97	6,97	5,84	5,07	4,27
4	7,8	8,63	7,34	5,90	5,09	4,1
Прогноз, коли $t = 4$		8,27	7,19	5,92	4,38	3,98
Абсолютна похибка, мг/л		0,36	0,15	0,01	0,71	0,12
Відносна похибка, %		4,13	2,01	0,25	13,89	2,98
Середня відносна похибка, %	4,65					

Як бачимо, складені рівняння є адекватними й можуть бути використані для прогнозу. Зауважимо, що оскільки швидкість течії і показники змішування на різних ділянках річки відрізнялися не суттєво (див. задачу 1), то розраховані коефіцієнти рівнянь також мають близькі значення.

Контрольні питання

1. Опишіть основні особливості водних екосистем.
2. Які властивості необхідно враховувати в математичному моделюванні гідроекологічних процесів?
3. Класифікуйте фактори негативного впливу на стан водних об'єктів.
4. Назвіть фактори, які впливають на зміну концентрації забруднювальних речовин у водних об'єктах.
5. Які основні механізми поширення речовини у рухливому середовищі?
6. Якими диференціальними рівняннями описують процеси поширення речовини і тепла (енергії) у водному середовищі?
7. Опишіть механізм побудови балансових різницевого рівнянь у припущенні, що швидкість течії та коефіцієнти самоочищення води істотно відрізняються на ділянках річки, а перенесення речовини за рахунок дифузії є малим порівняно із її перенесенням течією річки.
8. Опишіть механізм побудови балансових різницевого рівнянь у припущенні, що швидкість течії та коефіцієнти самоочищення не змінюються на різних ділянках річки.

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Під час оцінювання індивідуального завдання враховується правильність його виконання (50 %), слушність пояснень щодо використаних методів і правил обчислення й отриманих результатів, знання визначень і термінології (40 %), своєчасне подання завдання на перевірку (10 %). Самостійно написана для обчислення програма оцінюється додатковим балом.

Варіанти завдань

На основі даних про вимірювання гідрологічних характеристик у точках 1 ... 6, які наведено в таблиці варіанта, побудувати моделі, що дозволять прогнозувати якість питної води на основі невеликого числа спостережень.

Варіант 1

Узгоджені дані гідрологічних характеристик і показника біхроматної окиснюваності води в річці на пунктах вимірювання, мг/л

t	$U_{1,n}$	$U_{2,n}$	$U_{3,n}$	$U_{4,n}$	$U_{5,n}$	$U_{6,n}$
0	11,00	8,10	6,67	6,10	5,77	4,98
1	12,30	9,78	9,12	8,16	5,97	10,17
2	9,10	11,51	11,82	10,99	7,28	15,54
3	11,00	11,94	14,74	14,62	9,51	22,10

Варіант 2

Узгоджені дані гідрогеологічних характеристик і показника біхроматної окиснюваності води в річці на пунктах вимірювання, мг/л

t	$U_{1,n}$	$U_{2,n}$	$U_{3,n}$	$U_{4,n}$	$U_{5,n}$	$U_{6,n}$
0	11,00	8,10	6,67	6,10	5,30	4,98
1	12,30	8,97	10,05	6,94	5,78	9,75
2	9,10	9,97	13,53	8,88	6,47	14,95
3	11,00	9,71	17,16	11,63	7,92	20,78

Варіант 3

Узгоджені дані гідрогеологічних характеристик і показника біхроматної окиснюваності води в річці на пунктах вимірювання, мг/л

t	$U_{1,n}$	$U_{2,n}$	$U_{3,n}$	$U_{4,n}$	$U_{5,n}$	$U_{6,n}$
0	11,98	10,30	8,17	7,48	6,30	4,98
1	11,30	10,80	9,24	8,50	7,01	4,15
2	10,30	10,95	10,02	9,65	7,91	4,33
3	9,00	10,76	10,49	10,76	8,95	4,82

Варіант 4

Узгоджені дані гідрогеологічних характеристик і показника біхроматної окиснюваності води в річці на пунктах вимірювання, мг/л

t	$U_{1,n}$	$U_{2,n}$	$U_{3,n}$	$U_{4,n}$	$U_{5,n}$	$U_{6,n}$
0	12,2	10,01	9,65	9,45	8	5,25
1	10,36	9,87	8,49	8,91	9,06	6,09
2	8,79	9,39	7,73	7,26	9,21	6,77
3	7,46	8,54	7,71	5,36	8,08	7,07

Варіант 5

Узгоджені дані гідрогеологічних характеристик і показника біхроматної окиснюваності води в річці на пунктах вимірювання, мг/л

t	$U_{1,n}$	$U_{2,n}$	$U_{3,n}$	$U_{4,n}$	$U_{5,n}$	$U_{6,n}$
0	10,30	9,89	9,40	8,13	7,80	6,77
1	10,3	9,89	9,4	8,13	7,8	6,77
2	9,11	9,12	9,05	7,86	7,46	7,16
3	8,06	8,10	8,53	7,61	6,89	6,46

Варіант 6

Узгоджені дані гідрогеологічних характеристик і показника біхроматної окиснюваності води в річці на пунктах вимірювання, мг/л

t	$U_{1,n}$	$U_{2,n}$	$U_{3,n}$	$U_{4,n}$	$U_{5,n}$	$U_{6,n}$
0	11,06	9,63	8,41	6,90	5,13	4,54
1	9,79	9,62	8,57	7,46	5,51	4,07
2	8,66	9,01	8,48	7,87	6,28	4,20
3	7,66	8,05	7,97	7,87	7,08	4,58

Варіант 7

Узгоджені дані гідрогеологічних характеристик і показника біхроматної окиснюваності води в річці на пунктах вимірювання, мг/л

t	$U_{1,n}$	$U_{2,n}$	$U_{3,n}$	$U_{4,n}$	$U_{5,n}$	$U_{6,n}$
0	12,30	10,00	8,75	6,98	5,30	4,98
1	11,06	9,63	8,41	6,90	5,13	4,54
2	9,95	9,14	8,06	6,79	5,03	4,18
3	8,94	8,56	7,67	6,65	5,00	3,92

Варіант 8

Узгоджені дані гідрогеологічних характеристик і показника біхроматної окиснюваності води в річці на пунктах вимірювання, мг/л

t	$U_{1,n}$	$U_{2,n}$	$U_{3,n}$	$U_{4,n}$	$U_{5,n}$	$U_{6,n}$
0	14	12	9,7	8,15	6,31	5,95
1	11,88	12,51	10,31	8,75	6,54	5,77
2	10,09	11,46	10,78	9,46	7,16	5,32
3	8,56	9,35	10,23	9,98	8,32	5,51

Варіант 9

Узгоджені дані гідрогеологічних характеристик і показника біхроматної окиснюваності води в річці на пунктах вимірювання, мг/л

t	$U_{1,n}$	$U_{2,n}$	$U_{3,n}$	$U_{4,n}$	$U_{5,n}$	$U_{6,n}$
0	12	12,5	10,3	8,8	6,5	5,8
1	10,19	11,53	10,74	9,52	7,14	5,74
2	8,65	9,48	10,20	10,03	8,10	5,63
3	7,34	7,21	8,36	9,65	9,25	6,11

Варіант 10

Узгоджені дані гідрогеологічних характеристик і показника біхроматної окиснюваності води в річці на пунктах вимірювання, мг/л

t	$U_{1,n}$	$U_{2,n}$	$U_{3,n}$	$U_{4,n}$	$U_{5,n}$	$U_{6,n}$
0	12,03	11,5	10,3	8,8	6,5	5,8
1	10,70	11,7	10,52	9,22	6,88	5,72
2	9,55	10,56	10,30	9,53	7,39	5,52
3	8,52	9,15	9,56	9	8,04	5,60

Індивідуальне завдання № 4

Тема: Прогнозування забруднення атмосферного повітря внаслідок викидів із промислових труб підприємств та з димарів на дахах будинків

Мета: навчитися розраховувати концентрацію забруднень на різній висоті від поверхні землі під час викидів із труб промислових підприємств та з димарів на дахах будинків

Порядок виконання роботи

1. Вивчити необхідний теоретичний матеріал [1];
2. Використовуючи модель Гаусса, виконати завдання 1. Для цього дотримуватись такої схеми:
 - записати модель Гаусса для сформульованої задачі;
 - визначити висоту підйому струменя газової суміші, використовуючи одну з обчислювальних формул (рекомендовано модель П.І. Андреева);
 - визначити висоту джерела забруднення;
 - обчислити коефіцієнти дисперсії з урахуванням заданого рівня стабільності атмосфери, скориставшись формулами Г. Бріггса;
 - розрахувати значення концентрації забруднення на різній висоті від поверхні землі;
 - побудувати графіки залежності концентрації забруднення в повітрі від висоти над поверхнею землі, відстані до джерела забруднення, класу стабільності атмосфери.
3. Розрахувати забруднення на рівні зросту людини (завдання 2) використовуючи такі способи:
 - методику Агентства з охорони навколишнього середовища (VSEPA, 1977);
 - методику розрахунку максимальної приземної концентрації домішки забруднення внаслідок її викиду з димаря на даху будинку;
 - модель Гаусса для розрахунку забруднення атмосфери внаслідок викиду газової суміші з низьких джерел.Порівняти отримані результати.
4. Оформити звіт про виконану роботу такого змісту:
 - тема індивідуального завдання;
 - постановка задачі;
 - теоретична модель;
 - результати обчислень вихідних даних (висота підйому струменя газової суміші, висота джерела забруднення, коефіцієнти дисперсії);
 - обчислені прогностичні значення;
 - графіки залежності концентрації забруднення від висоти над поверхнею землі, відстані до джерела забруднення, класу стабільності атмосфери;
 - висновки.

Завдання I

Завод має трубу, крізь яку здійснюється викид газів в атмосферу. Інтенсивність викиду CO дорівнює Q .

Вхідні дані:

Клас стабільності атмосфери;

Швидкість вітру V ;

Висота труби H ;

Радіус устя труби R_0 ;

Швидкість руху газів на виході з труби ω_0 ;

Місцевість відкрита.

Необхідно виконати такі розрахунки:

1) обчислити концентрацію CO на осі струменя ($y = 0$) та на відстані x (10, 100, 200, ... 1000 м) від джерела забруднення на приземному рівні ($z = 0$), на рівні зросту людини ($z = 2$), на рівні флюгера ($z = 10$ м) та на рівні висоти труби;

2) визначити концентрацію CO за наведеними даними для різних класів стабільності атмосфери на рівні зросту людини, коли відстань $x = 200$ м. Коефіцієнти дисперсії обчислити за формулами Бріггса.

Результати подати у вигляді таблиці та графічно.

Короткі теоретичні відомості

Розрахунок висоти підйому струменя газової суміші від джерела забруднення

Для прогнозування рівня забруднень атмосфери або ґрунту від діяльності промислових підприємств, коли викид шкідливих речовин відбувається із труб, необхідно знати висоту джерела забруднення.

З цією метою вводять поняття *ефективної висоти джерела забруднення*, а саме:

$$H_e = H + \Delta h,$$

де H – висота труби, Δh – висота підйому струменя газової суміші (рис. 4.1).

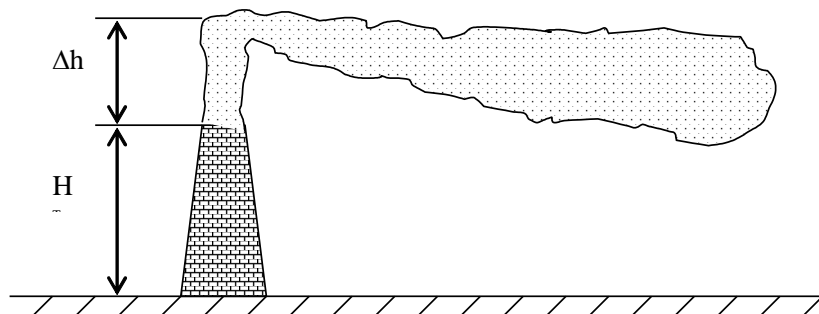


Рис. 4.1. Схема до розрахунку висоти підйому струменя газової суміші [1]

Для розрахунку висоти підйому струменя газів Δh розроблено кілька залежностей [1], у яких використано різні вхідні параметри. Зокрема, рекомендовано скористатись залежністю П.І. Андреева, тобто

$$\Delta h = 3,8 \cdot R_0 \cdot \frac{\omega_0}{V}, \quad (4.1)$$

тут R_0 – радіус труби, V – швидкість вітру на рівні флюгера, ω_0 – швидкість газів на виході з труби.

Необхідно зазначити, що всі наявні формули для визначення величини Δh отримано експериментальним шляхом і тому результати можуть суттєво відрізнятися порівняно один з одним.

Гауссові моделі прогнозування забруднень

Модель Гаусса широко використовується за кордоном, особливо в США, для розв'язування задач прогнозування забруднення унаслідок викидів з різноманітних джерел. Розрахункова формула за стаціонарною моделлю Гаусса (коли джерело забруднення діє постійно) має такий вигляд:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Q}{2\pi \cdot V \cdot \sigma_y \sigma_z} \cdot \exp\left[\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}\right] \cdot \left\{ \exp\left[\frac{-(Z-H)^2}{2\sigma_z^2}\right] + \exp\left[\frac{-(Z+H)^2}{2\sigma_z^2}\right] \right\}, \quad (4.2)$$

тут σ_y^2 , σ_z^2 – коефіцієнти дисперсії ($\sigma_y^2 = \frac{2\mu_y \cdot x}{V}$, $\sigma_z^2 = \frac{2\mu_z \cdot x}{V}$); μ_y , μ_x – коефіцієнти турбулентної дифузії домішки; x – відстань від джерела забруднення до рецептора; V – швидкість вітру на рівні зрізу труби (див. рис. 4.2), м/с; Q – інтенсивність викиду газів з точкового джерела забруднення, г/с; H – висота джерела забруднення, м.

У гауссових моделях також передбачається, що існує відбивання забруднювальної речовини від поверхні землі. Воно описується в рівнянні як член у фігурних дужках. Модель побудована в припущенні однорідності й стійкості атмосфери.

Зауважимо, що описана модель має низку недоліків, а саме:

- у ній не враховано рельєф поверхні;
- не відображено зміну метеорологічних параметрів у просторі і в часі;
- не описано роботу джерел забруднення, які працюють обмежений час;
- використовуються характеристики, що відображають дію наземних, а не піднятих джерел;
- не враховано вертикальну структуру прилеглої шару повітря.

Гауссові моделі можуть адекватно описувати розподіл забруднювача тільки в горизонтальному напрямку, для розрахунку вертикального профілю їх можна використовувати тільки стосовно дуже коротких відстаней.

Наведена вище формула відповідає ситуації, коли джерело забруднення перебуває в точці з координатами (0;0), а напрямок вітру збігається із напрямком осі OX. Вибір координатних осей x , y , z показано на рис. 4.2.

Зазначимо, що точкове джерело забруднення діє постійно. Для визначення концентрації забруднювача у повітрі на рівні зросту людини в розрахунках передбачають, що висота $z \approx 1,8 \div 2,0$ м.

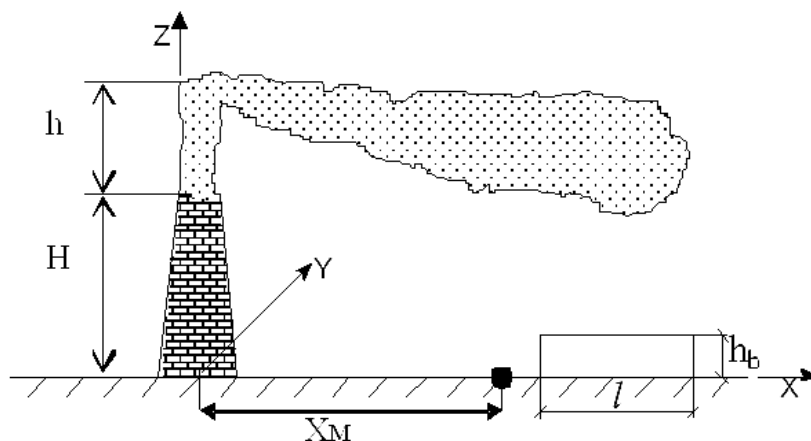


Рис. 4.2. Ілюстрація до розрахункової схеми використання гауссової моделі [1]

Значення середньоквадратичних відхилень $\sigma_y(x)$ і $\sigma_z(x)$ пов'язані з коефіцієнтами дифузії газу і тривалістю перебігу процесу дифузії, а ці параметри прямо залежать від ступеня стійкості атмосфери. Для оцінювання величин $\sigma_y(x)$ і $\sigma_z(x)$ та встановлення їхнього взаємозв'язку було проведено багато експериментальних досліджень в атмосфері, на основі яких побудовано відповідні діаграми. Один з найбільш поширених наборів діаграм запропоновано Тернером, їхні приклади можна знайти в літературі [1]. Ці діаграми побудовано в застосуванні до шести класів стійкості атмосфери:

- A* – дуже нестабільні умови,
- B* – помірно нестабільні умови,
- C* – злегка нестабільні умови,
- D* – нейтральні умови,
- E* – злегка стабільні умови,
- F* – помірно стабільні умови.

Зауваження. Клас нейтральної стійкості *D* (ізотермія⁵) допускає наявність хмарності удень чи вночі. Клас *A* відповідає найбільшій нестійкості

⁵ Ізотермія – стан приземного шару повітря, коли температура поверхні ґрунту орієнтовно дорівнює температурі повітря на висоті 2 м від поверхні

(конвекція⁶), клас *F* – найбільшій стійкості (інверсія⁷), а клас *E* – слабкій стійкості.

Оцінювання стійкості атмосфери зазвичай виконують метеослужби в аеропортах. Для приблизного визначення категорій стійкості атмосфери можна використовувати дані табл. 4.1.

Таблиця 4.1

*Ключ до визначення категорій стійкості атмосфери
(класифікація Паскуїлла)*

Швидкість вітру на висоті 10 м, м/с	День			Ніч	
	Рівень сонячної радіації			Хмарність	
	Сильна	Помірна	Слабка	Суцільна	Немає
Клас	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
< 2	<i>A</i>	<i>A – B</i>	<i>B</i>		
2 – 3	<i>A – B</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
3 – 5	<i>B</i>	<i>B – C</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
5 – 6	<i>C</i>	<i>C – D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>
> 6	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>

На практиці, розраховуючи значення величин $\sigma_y(x)$ і $\sigma_z(x)$, більш зручно застосувати емпіричні формули, наприклад, запропоновані Бріггсом (Briggs, 1973) (див. таб. 4.2, 4.3)

Таблиця 4.2

*Формули для розрахунку коефіцієнтів дисперсії повітря
(відкрита місцевість)*

Клас стійкості	$\sigma_y(x)$	$\sigma_z(x)$
<i>A</i>	$0,22x (1 + 0,0001 x)^{-1/2}$	$0,20 x$
<i>B</i>	$0,16 x (1 + 0,0001 x)^{-1/2}$	$0,12 x$
<i>C</i>	$0,11 x (1 + 0,0001 x)^{-1/2}$	$0,08 x (1 + 0,0002 x)^{-1/2}$
<i>D</i>	$0,08 x (1 + 0,0001 x)^{-1/2}$	$0,06 x (1 + 0,0015 x)^{-1}$
<i>E</i>	$0,06 x (1 + 0,0001 x)^{-1/2}$	$0,03 x (1 + 0,0003 x)^{-1}$
<i>F</i>	$0,04 x (1 + 0,0001 x)^{-1/2}$	$0,016 x (1 + 0,0003 x)^{-1}$

⁶ Конвекція – стан приземного шару повітря, у якому температура поверхні ґрунту більша за температуру повітря на висоті 2 м від поверхні.

⁷ Інверсія – стан приземного шару повітря, у якому температура поверхні ґрунту менша за температуру повітря на висоті 2 м від поверхні.

Формули для розрахунку коефіцієнтів дисперсії повітря
(місцевість із забудовою)

Клас стійкості	$\sigma_y(x)$	$\sigma_z(x)$
A – B	$0,32 x (1 + 0,0004 x)^{-1/2}$	$0,24 x (1 + 0,0001 x)^{-1/2}$
C	$0,22 x (1 + 0,0004 x)^{-1/2}$	0,20 x
D	$0,16 x (1 + 0,0004 x)^{-1/2}$	$0,14 x (1 + 0,0003 x)^{-1/2}$
E – F	$0,11 x (1 + 0,0004 x)^{-1/2}$	$0,08 x (1 + 0,0001 x)^{-1/2}$

Необхідно зазначити, що наведені в табл. 4.2, 4.3 залежності рекомендується використовувати на відстані, яка не перевищує 10 км від джерела викиду.

Часто необхідно знати концентрацію забруднювача на приземному рівні ($z = 0$). У цьому випадку розрахункова формула Гаусса набуває такого вигляду:

$$\varphi(x, y, z = 0) = \frac{Q}{\pi \cdot U \cdot \sigma_y \sigma_z} \cdot \exp\left[\frac{-H^2}{2\sigma_z^2}\right] \cdot \exp\left[\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}\right].$$

Система координат (X, Y, Z) орієнтована таким чином, що вісь OX збігається з напрямком вітру.

Завдання II

Викид газів, які містять CO , відбувається з димаря на даху будинку (рис. 4.3.).

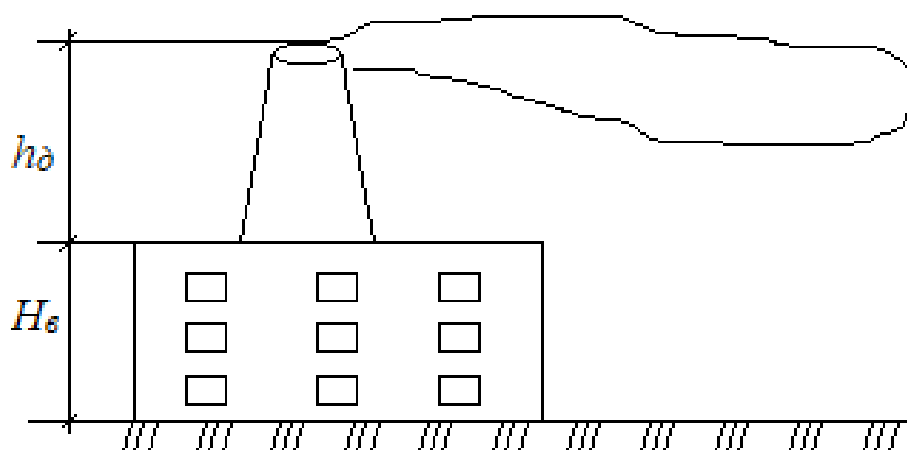


Рис. 4.3. Розрахункова схема до завдання II

Вхідні дані: $H_{\text{буд}}$ – висота будинку; $h_{\text{д}}$ – висота димаря; d – діаметр устя димаря; ω – швидкість виходу газів з димаря; V – швидкість вітру на рівні флюгера; Q – інтенсивність викиду CO;

Довжина й ширина будинку.

Необхідно визначити максимальну приземну концентрацію CO в повітрі, скориставшись різними методиками. Дослідити, як вона зміниться, коли висоту димаря $h_{\text{д}}$ збільшити у 1,5 раза, у 2 рази.

Результати подати у вигляді такої таблиці:

$h_{\text{д}}$, висота димаря	Спосіб розрахунку		
	Методика VSEPA, 1977	Методика розрахунку максимальної приземної концентрації домішки при її викиді на даху будинку	Модель Гаусса
h_1			
h_2			
h_3			

Короткі теоретичні відомості**Методика Агентства з охорони навколишнього середовища (VSEPA, 1977)**

Якщо джерело викиду розташоване на даху будинку, то в США величину максимальної концентрації забруднення на рівні зросту людини розраховують за методикою Агентства охорони навколишнього середовища (VSEPA, 1977) згідно з такою формулою:

$$\varphi_{\text{max}} = \frac{Q}{a \cdot W_{\text{буд}} \cdot H_{\text{буд}} \cdot V},$$

тут a – емпіричний коефіцієнт ($a \approx 1,5$), Q – інтенсивність викиду забруднювача, $W_{\text{буд}}$ – ширина будинку (поперек напрямку вітру), $H_{\text{буд}}$ – висота будинку, V – мінімальна швидкість вітру, коли відбувається притискання струменя викиду до поверхні землі (коли нема даних, вважати, що $V \approx 3$ м/с).

Методика розрахунку максимальної приземної концентрації забруднювача, джерело якого розташоване на даху будинку

Передбачено описаний нижче порядок обчислень.

1. Розраховуємо такий параметр:

$$h = \frac{h_d - H_{\text{б\ddot{y}д}}}{H_{\text{б\ddot{y}д}}},$$

тут h_d – висота димаря, вимірювана від землі, м; $H_{\text{б\ddot{y}д}}$ – висота будинку, м.

2. За даними табл. 4.4 визначаємо коефіцієнт φ взаємного впливу висоти димаря і висоти будинку, на якому він розташовується.

Таблиця 4.4

Значення коефіцієнта φ взаємного впливу висоти димаря і висоти будинку, на якому його розташовано

h	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,2
φ	0,8	1,0	1,1	1,2	1,4	1,4

3. Визначаємо висоту підйому струменя газу над джерелом за такою формулою:

$$\Delta h = \frac{\alpha \cdot d \cdot \omega}{\varphi \cdot V},$$

тут коефіцієнт $\alpha \approx 1,9$, d – діаметр устя димаря, м; ω – вертикальна швидкість виходу газового потоку з димаря, м/с; V – швидкість вітру на рівні флюгера (тобто на висоті 10 м), м/с.

4. Обчислюємо параметр h_e , а саме:

$$h_e = \frac{h_d - H_{\text{б\ddot{y}д}} + \Delta h}{H_{\text{б\ddot{y}д}}}$$

5. Визначаємо допоміжний коефіцієнт впливу висоти викиду, а саме:

$$K_h = 2,05 \exp(-0,61h_e^{-2}).$$

6. Знаходимо відносну довжину будинку $\frac{L}{H_{\text{б\ddot{y}д}}}$, тут L – довжина будинку.

Залежно від величини $\frac{L}{H_{\text{б\ddot{y}д}}}$, за даними табл. 4.5 визначаємо коефіцієнт K_e .

Значення допоміжного коефіцієнта

$\frac{L}{H_e}$	1,0	2,0	3,0	5,0	7,0	8,0	9,0
K_e	1,2	1,3	1,15	0,8	0,5	0,35	0,28

7. Розраховуємо коефіцієнт корекції, тобто $K = K_h \cdot K_e$

8. Визначаємо максимальну приземну концентрацію забруднення за такою формулою:

$$\varphi_{\max} = \frac{K \cdot Q}{V \cdot H_e^2}, \text{ мг/м}^3,$$

де Q – інтенсивність викиду, мг/с.

Дані спостереження показують, що коли висота джерела викиду над дахом H менша від $2,5 H_{\text{б\ddot{y}д}}$, де $H_{\text{б\ddot{y}д}}$ – висота будинку, то наявність будівлі починає впливати на процес поширення забруднювача. Через це на практиці викиди, для яких виконується така умова: $H \leq 2,5 H_{\text{б\ddot{y}д}}$, називають низькими. Вони потребують окремих методик прогнозу рівня забруднення атмосфери. Якщо $H > 2,5 H_{\text{б\ddot{y}д}}$, то розрахунок, як правило, виконують так, ніби будинку не існує, вважаючи місцевість ніби відкритою, наприклад, використовуючи модель Гаусса.

Модель Гаусса для розрахунку забруднення атмосфери внаслідок викидів газу з низьких джерел

В обчисленні забруднень використовується описаний нижче поряток.

1. Визначають умовну ширину будівлі – параметр h_w . У цій моделі вважають, що вона дорівнює діаметру кола, описаного навколо будівлі.

2. Порівнюють величину периметра h_w та висоту будівлі $H_{\text{б\ddot{y}д}}$ і визначають, для якого типу будівлі – низької або високої, буде виконано прогноз, а саме:

– якщо $h_w < H_{\text{б\ddot{y}д}}$, то будівля висока;

– якщо $h_w \geq H_{\text{б\ddot{y}д}}$, то низька.

Далі подано методику розрахунку концентрації забруднювача на відстані x від джерела забруднення відповідно до таких умов:

- $3 H_{\text{б\ddot{y}д}} < x < 10 H_{\text{б\ddot{y}д}}$ (для низьких будівель);
- або $3 h_w < x < 10 h_w$ (для високих будівель);
- коли $h_w / H_{\text{б\ddot{y}д}} > 5$.

3. Розраховують висоту Δh підйому струменя газу над димарем, який розташований на даху будівлі (див. рис. 4.3).

4. Визначають висоту джерела забруднення, тобто

$$H = H_{\delta y\delta} + h_{\delta} + \Delta h ,$$

де h_{δ} – висота димаря над дахом.

5. Порівнюють висоту будівлі $H_{\delta y\delta}$ та висоту джерела забруднення H , при цьому, якщо $H \leq 1,2 H_{\delta y\delta}$, то розраховують модифіковані значення параметрів дисперсії σ_y, σ_z які передбачено в моделі Гаусса, а саме:

$$\sigma_y' = 0,35h_w + 0,067 (x - 3 H_{\delta y\delta});$$

а параметр σ_z' визначають з урахуванням висоти будівлі, тобто якщо $1,2H_{\delta y\delta} < H \leq 2,5H_{\delta y\delta}$, то беруть тільки модифіковане значення вертикального коефіцієнта дисперсії за формулами (*) або (**), а саме:

$$\sigma_z' = 0,7h_b + 0,067 (x - 3 H_{\delta y\delta}) \quad (*)$$

для низької будівлі, тобто коли $h_w \geq H_{\delta y\delta}$;
або

$$\sigma_z' = 0,7h_w + 0,067 (x - 3h_w) \quad (**)$$

для високої будівлі.

Коли $H > 2,5 H_{\delta y\delta}$, то значення коефіцієнтів дисперсії σ_y, σ_z в моделі Гаусса обчислюють як для рівної місцевості, наприклад, за формулами Бріггса.

6. Розраховують приземну концентрацію за моделлю Гаусса (див. завдання I, рубрику Гауссові моделі), тобто

$$\varphi(x, y = 0, z = 0, H) = \frac{Q}{\pi \sigma_y' \sigma_z' \cdot V} \cdot \left[-\frac{H^2}{2\sigma_z'^2} \right],$$

де V – швидкість вітру; Q – інтенсивність викиду газів.

Описана модель має такі недоліки:

1. Вона не призначена для розрахунку концентрації забруднювача в зоні аеродинамічної тіні за будівлею, тобто якщо відстань $x < 3 H_{\delta y\delta}$ (приблизно).

2. Не враховано форму будівлі та можливість розташування поблизу її інших будівель та об'єктів, які впливають на процес деформації поля швидкого вітру, а значить, на процес поширення забруднювача.

Приклади виконання завдань

Завдання I

Завод має трубу, з якої відбувається викид газів в атмосферу. Інтенсивність Q викиду CO дорівнює 25 г/с.

Вхідні дані

Клас стабільності атмосфери – A ;

Швидкість вітру $V=3$ м/с;

Висота димаря $H=30$ м;

Радіус устя димаря $R_0=1$ м;

Швидкість газів на виході з димаря $\omega_0=3$ м/с; ;

Місцевість відкрита.

Необхідно виконати такі розрахунки:

1) обчислити концентрацію CO на осі струменя ($y=0$) та на відстані x (10, 100, 200, ... 1000 м) від джерела забруднення на різних рівнях: приземному ($z=0$), на рівні зросту людини ($z=2$), флюгера ($z=10$ м), а також на рівні висоти димаря;

2) визначити концентрацію CO за наведеними даними стосовно різних класів стабільності атмосфери на пішохідному рівні коли відстань $x=200$ м. Коефіцієнти дисперсії повітря обчислити за формулами Бріггса.

Результати подати у вигляді таблиці й графічно.

Виконання розрахунків

Оскільки місцевість відкрита, можна скористатися моделлю Гаусса і розрахувати концентрацію забруднення, використовуючи формулу (4.2).

Для цього необхідно обчислити висоту джерела забруднення і визначити коефіцієнти дисперсії.

Висоту підйому струменя газу над трубою обчислимо за формулою (4.1), а саме:

$$\Delta h = 3,8 \cdot R_0 \cdot \frac{\omega_0}{V} = 3,8 \cdot 1 \cdot \frac{3}{3} = 3,8, \text{ м.}$$

Тепер можна визначити висоту джерела забруднення, тобто

$$H_{\text{дж}} = H + \Delta h = 33, \text{ м.}$$

Аби обчислити значення коефіцієнтів дисперсії σ_y, σ_z , скористаємось формулами Бріггса (табл. 4.2, 4.3).

Визначимо їх за умови, що відстань $x=100$ м, тоді $\sigma_y=21,89$, $\sigma_z=20$.

Тепер за формулою (4.2) обчислимо вміст забруднювальної речовини, коли відстань $x=100$ м, клас стійкості атмосфери A , а висота $z=0; 2; 10; 33,8$ м (висота джерела забруднення). Результати покажемо у табл. 4.6 та графічно відобразимо на рис. 4.4.

Таблиця 4.6

Концентрація CO, коли відстань $x = 100$ м,
клас стійкості атмосфери A

Висота z , м	Концентрація CO, мг/м ³
0	0,001453459
2	0,001466912
10	0,001768508
33,8	0,003040887

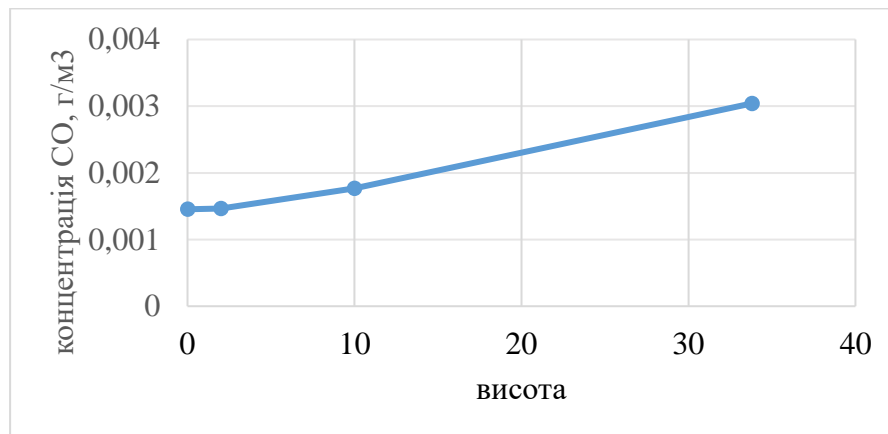


Рис. 4.4. Графічне подання концентрації CO (відстань $x = 100$ м, клас стійкості атмосфери A)

Тепер дослідимо, як впливають погодні умови (клас стабільності атмосфери) на поширення забруднювача. Для цього обчислимо його концентрацію на рівні зросту людини стосовно різних класів стабільності атмосфери, коли відстань $x = 100$ м. Результати показано в табл. 4.7 та на діаграмі (рис. 4.5).

Таблиця 4.7

Концентрація CO в повітрі (відстань $x = 100$ м, $z=2$ м) стосовно різних класів стабільності атмосфери

Клас стабільності атмосфери	A	B	C	D	E	F
Концентрація CO, мг/м ³	0,001467	0,000289	5,40E-06	2,92E-09	5,57E-27	9,45E-90

Покажемо результат дослідження на діаграмі (рис. 4.5)

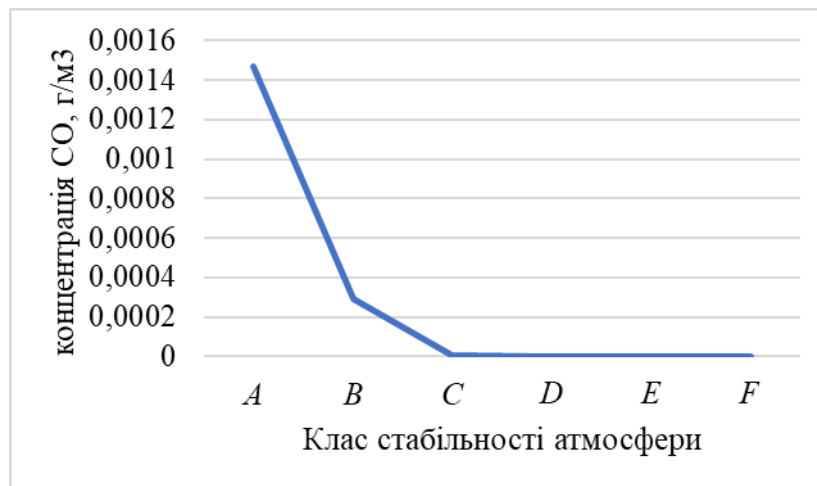


Рис. 4.5. Концентрація CO ($x = 100$ м) на рівні зросту людини стосовно різних класів стабільності атмосфери

Як бачимо, найбільше забруднення спостерігається в умовах стабільності атмосфери класу *A*. Коли стан атмосфери відповідає класу *E* або *F*, то забруднення немає.

Тепер розглянемо, як впливає на концентрацію забруднювача відстань від його джерела. Для цього розрахуємо концентрацію CO на різній відстані, стосовно рівня зросту людини (2 м) і класу стабільності атмосфери *A* (за умовами завдання).

Таблиця 4.8

Дані про концентрацію CO залежно від відстані до джерела забруднення (клас стабільності атмосфери *A*, на висоті 2 м)

Відстань від джерела забруднення, м	Концентрація CO, мг/м³
10	$3,82E - 56$
100	0,001467
200	0,001065
300	0,00058
400	0,000352
500	0,000233
600	0,000166
700	0,000124
800	$9,58 E - 05$
900	$7,64 E - 05$
1000	$6,24 E - 05$

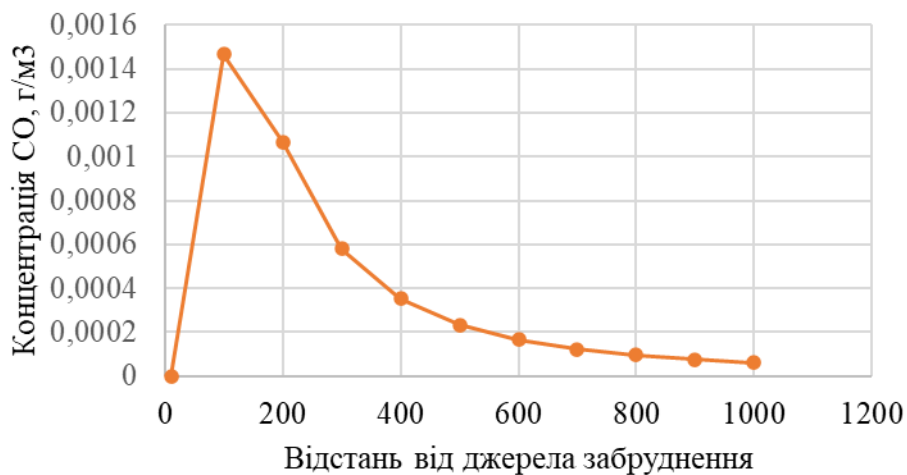


Рис. 4.6. Графік зміни концентрації CO зі збільшенням відстані від джерела забруднення (клас стабільності атмосфери А, висота 2 м)

Як показує графік, найбільша концентрація забруднювальної речовини спостерігається, коли відстань від джерела становить 100 м. Далі вона спадає і на відстані 1000 м близька до 0.

Завдання II

Викид газів, які містять CO, відбувається з димаря, розміщеного на даху будинку (рис. 4.3).

Вхідні дані:

Висота будинку $H_{\text{буд}} = 10$ м;

Висота димаря $h_{\text{д}} = 2$ м;

Діаметр устя димаря $d = 0.5$ м;

Швидкість виходу газів з димаря $\omega = 3$ м/с;

Швидкість вітру на рівні флюгера $V = 4$ м/с;

Інтенсивність викиду CO $Q = 20$ г/с;

Довжина будинку 10 м, ширина 15 м.

Необхідно визначити максимальну приземну концентрацію CO за різними методиками, а також розрахувати її зміни, якщо висоту димаря на даху $h_{\text{д}}$ збільшити у 1,5 раза, у 2 рази.

Виконання розрахунків

Методика Агентства з охорони навколишнього середовища (VSEPA, 1977)

Припустимо, що будинок розташований таким чином, що його ширина в напрямку поперек вітру відповідає дійсній його ширині, тобто 15 м. Тоді

$$\varphi_{\max} = \frac{Q}{a \cdot W_b \cdot H \cdot V} = \frac{20}{1,5 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 3} = 0,026144,$$

тут a – емпіричний коефіцієнт ($a \approx 1,5$), Q – інтенсивність викиду, W_b – ширина будинку (напрямок поперек вітру), H – висота джерела забруднення ($H = H_{\text{бвд}} + h_d$), V – мінімальна швидкість вітру, коли відбувається притискання струменя, який виходить з димаря, до поверхні землі, оскільки інформації не маємо, припустимо, що $V \approx 3$ м/с.

Методика розрахунку максимальної приземної концентрації домішки при її викиді на даху будинку

Скористаємось описаним вище (див. короткі теоретичні відомості) алгоритмом.

1. Розраховуємо такий параметр: $h = \frac{h_{mp} - H_{\text{бвд}}}{H_{\text{бвд}}} = \frac{2}{10} = 0,2$,

тут h_{mp} – висота димаря, вимірювана від землі, м; $H_{\text{бвд}}$ – висота будинку, м.

2. За даними табл. 4.4 визначаємо коефіцієнт φ взаємного впливу між висотою димаря і висотою будинку, на якому він розташовується. У нашому випадку $h = 0,2$, отже, $\varphi = 0,95$.

3. Визначимо висоту підйому струменя газу над джерелом викиду за такою формулою:

$$\Delta h = \frac{\alpha \cdot d \cdot \omega}{\varphi \cdot V} = \frac{1,9 \cdot 0,5 \cdot 3}{0,95 \cdot 4} = 0,75,$$

тут коефіцієнт $\alpha \approx 1,9$, d – діаметр устя димаря, м; ω – вертикальна швидкість виходу газового потоку з димаря, м/с; V – швидкість вітру на рівні флюгера (тобто на висоті 10 м), м/с.

4. Розраховуємо параметр h_e , а саме:

$$h_e = \frac{h_d - H_{\text{бвд}} + \Delta h}{H_{\text{бвд}}} = 0,275.$$

5. Визначимо допоміжний коефіцієнт впливу висоти викиду:

$$K_h = 2,05 \exp(-0,61h_e^{-2}) = 0,000643701.$$

6. Обчислимо відносну довжину будинку, тобто $\frac{L}{H_{\text{бвд}}} = \frac{15}{10} = 1,5$, і за

даними табл. 4.5 визначимо, що коефіцієнт $K_e = 1,25$. Тепер розраховуємо коефіцієнт корекції, а саме:

$$K = K_h \cdot K_e = 0,000804627.$$

7. Знаходимо максимальну приземну концентрацію забруднення, тобто

$$\varphi_{max} = \frac{K \cdot Q}{V \cdot H_B^2} = 4,0231E-05, \text{ г/м}^3.$$

тут Q – інтенсивність викиду, мг/с.

Зауважимо, що за умовами завдання висота джерела викиду над дахом $H = 12, (13, 14)$. Це менше від величини $2,5H_{б\gamma\delta}$ ($2,5H_{б\gamma\delta} = 25$), де $H_{б\gamma\delta}$ – висота будинку, отже, будинок впливає на процес поширення домішки й отримані результати не є достовірними, для розрахунку необхідно використовувати інші методики.

Модель Гаусса для розрахунку забруднення атмосфери унаслідок викидів з низьких джерел

Скористаємось описаним вище (див. гороткі теоретичні відомості) алгоритмом.

1. Визначимо умовну ширину будівлі, тобто параметр h_w , у цій моделі він дорівнює діаметру кола, описаного навколо будівлі. Отже, $h_w = 18,02776$.

2. Визначимо тип будівлі (низька чи висока), для якої здійснюється прогноз. Для цього порівнюємо значення її умовної ширини h_w та висоти $H_{б\gamma\delta}$.

За нашими даними $h_w \geq H_{б\gamma\delta}$, отже, будівля низька.

Тепер виберемо відстань x від джерела забруднення, стосовно якої будуть проведені обчислення. Вона має відповідати такій умові:

$$3H_{б\gamma\delta} < x < 10H_{б\gamma\delta}, \text{ тобто } 30 < x < 100.$$

Отже, будемо визначати рівень забруднення, коли $x = 50$ м.

3. За формулою (4.1) розраховуємо висоту Δh підйому струменя газу над димарем, який розташований на даху будівлі (завдання I), тобто $\Delta h = 0,7125$.

4. Визначимо висоту джерела забруднення, а саме:

$$H = H_{б\gamma\delta} + h_\delta + \Delta h = 12,7125,$$

де h_δ – висота димаря над дахом, м.

5. Порівняємо висоту будівлі ($H_{б\gamma\delta} = 10$) та висоту джерела забруднення ($H = 12,7125$).

Як бачимо,

$$1,2H_{б\gamma\delta} < H \leq 2,5H_{б\gamma\delta},$$

тому необхідно розрахувати модифіковані значення параметрів дисперсії σ_y, σ_z які використовуються в моделі Гаусса, а саме:

$$\sigma'_y = 0,35h_w + 0,067 (x - 3 H_{б\gamma\delta}) = 19,70971473,$$

$$\sigma'_z = 0,7h_w + 0,067 (x - 3h_w) = 13,95942946.$$

6. Обчислюємо приземну концентрацію забруднювача за моделлю Гаусса таким чином:

$$\varphi(x, y = 0, z = 0, H) = \frac{Q}{\pi\sigma'_y\sigma'_z \cdot V} \cdot \exp\left[-\frac{H^2}{2\sigma_z'^2}\right] = 0,008761506,$$

де V – швидкість вітру; Q – інтенсивність викиду забруднювача.

Аналогічно виконуємо обчислення, коли у вхідних даних висоту димаря збільшено у 1,5 та 2 рази і записуємо всі результати в таблицю.

Висота димаря, h_d	Концентрація забруднювача, обчислена за різними методиками		
	За методикою VSEPA	За методикою розрахунку максимальної приземної концентрації	За моделлю Гаусса
h_1	0,026144	0,00002793	0,0087615
h_2	0,024691358	0,0009905	0,009376166
h_3	0,023391813	0,0043774	0,010085571

Як бачимо, обчислення різними методиками дає неоднакові результати. Це пояснюється тим, що в кожній з них передбачено різні припущення. Наприклад, у методиці максимальної приземної концентрації та в моделі Гаусса обчислено забруднення на приземному рівні. А методика VSEPA – на рівні зросту людини. Крім того, як показали обчислення, використання другої методики не буде коректним у цьому завданні, з огляду на висоту будинку. Модель Гаусса також використовується, коли навколо немає забудови і до того ж, у ній не враховано форму будинку.

Контрольні питання

1. Поясніть роль моделювання та прогнозування забруднень атмосфери у сфері управління якістю життя;
2. Охарактеризуйте соціоекологічні завдання захисту повітря від забруднень.
3. Які існують основні джерела забруднення атмосфери?
4. Охарактеризуйте фізичні основи прогнозування процесів забруднення атмосфери;
5. Яким може бути вплив джерел викиду забруднювача на атмосферу?
6. Охарактеризуйте особливості застосування моделей Гаусса.
7. Охарактеризуйте особливості застосування таких моделей визначення забруднення атмосфери:
 - методика Агентства з охорони навколишнього середовища (VSEPA, 1977);

- методика розрахунку максимальної приземної концентрації забруднювача від джерела на даху будинку;
- модель Гаусса для розрахунку забруднення атмосфери внаслідок викиду забруднювача з низьких джерел.

8. Охарактеризуйте особливості застосування моделі П.І. Андрєєва і Бріггса.

Критерії оцінювання індивідуального завдання

При оцінюванні індивідуального завдання враховується правильність його виконання (50 %), пояснення до обраних методів, особливостей їх застосування і правил обчислення, знання визначень і термінології (40 %), своєчасне подання виконаного завдання на перевірку (10 %). Самостійно написана програма для обчислення концентрації забруднення оцінюється додатковим балом.

Варіанти індивідуальних завдань

№ варіанта	Завдання I	Завдання II
1	Клас стабільності атмосфери A	Висота будинку $H_{\text{бвд}} = 22$ м
	Інтенсивність викиду CO $Q = 25$ г/с	Висота димаря $h_{\text{д}} = 2$ м
	Швидкість вітру $V = 5$ м/с	Діаметр устя димаря $d = 0,5$ м
	Висота труби $H = 25$ м	Швидкість виходу газів з димаря $\omega = 3$ м/с
	Радіус устя труби $R_0 = 0,5$ м	Швидкість вітру на рівні флюгера $V = 4$ м/с
	Швидкість потоку газів на виході з труби $\omega_0 = 3$ м/с	Інтенсивність викиду CO $Q = 20$ г/с
	Місцевість відкрита	Довжина будинку 20 м, ширина 25 м
2	Клас стабільності атмосфери B	Висота будинку $H_{\text{бвд}} = 30$ м
	Інтенсивність викиду CO $Q = 10$ г/с	Висота димаря $h_{\text{д}} = 2$ м
	Швидкість вітру $V = 2$ м/с	Діаметр устя димаря $d = 0,5$ м
	Висота труби $H = 20$ м	Швидкість виходу газів з димаря $\omega = 1$ м/с
	Радіус устя труби $R_0 = 0,5$ м	Швидкість вітру на рівні флюгера $V =$ м/с
	Швидкість потоку газів на виході з труби $\omega_0 = 3$ м/с	Інтенсивність викиду CO $Q = 15$ г/с
	Місцевість відкрита	Довжина будинку 20 м, ширина 25 м
3	Клас стабільності атмосфери A	Висота будинку $H_{\text{бвд}} = 20$ м
	Інтенсивність викиду CO $Q = 15$ г/с	Висота димаря $h_{\text{д}} = 2$ м
	Швидкість вітру $V = 1$ м/с	Діаметр устя димаря $d = 0,5$ м
	Висота труби $H = 15$ м	Швидкість виходу газів з димаря $\omega = 1,5$ м/с
	Радіус устя труби $R_0 = 0,5$ м	Швидкість вітру на рівні флюгера $V =$ м/с
	Швидкість потоку газів на виході з труби $\omega_0 = 3$ м/с	Інтенсивність викиду CO $Q = 15$ г/с
	Місцевість відкрита	Довжина будинку 10 м, ширина 25 м

№ варіанта	Завдання I	Завдання II
4	Клас стабільності атмосфери C	Висота будинку $H_{\text{буд}} = 5$ м
	Інтенсивність викиду CO $Q = 15$ г/с	Висота димаря $h_{\text{д}} = 1,5$ м
	Швидкість вітру $V = 2$ м/с	Діаметр устя димаря $d = 0,5$ м
	Висота труби $H = 23$ м	Швидкість виходу газів з димаря $\omega = 2$ м/с
	Радіус устя труби $R_0 = 0,5$ м	Швидкість вітру на рівні флюгера $V = 2$ м/с
	Швидкість потоку газів на виході з труби $\omega_0 = 2$ м/с	Інтенсивність викиду CO $Q = 15$ г/с
	Місцевість відкрита	Довжина будинку 10 м, ширина 15 м
5	Клас стабільності атмосфери C	Висота будинку $H_{\text{буд}} = 15$ м
	Інтенсивність викиду CO $Q = 25$ г/с	Висота димаря $h_{\text{д}} = 1$ м
	Швидкість вітру $V = 5$ м/с	Діаметр устя димаря $d = 0,5$ м
	Висота труби $H = 35$ м	Швидкість виходу газів з димаря $\omega = 2$ м/с
	Радіус устя труби $R_0 = 0,5$ м	Швидкість вітру на рівні флюгера $V = 5$ м/с
	Швидкість потоку газів на виході з труби $\omega_0 = 4$ м/с	Інтенсивність викиду CO $Q = 20$ г/с
	Місцевість відкрита	Довжина будинку 15 м, ширина 10 м
6	Клас стабільності атмосфери A	Висота будинку $H_{\text{буд}} = 10$ м
	Інтенсивність викиду CO $Q = 25$ г/с	Висота димаря $h_{\text{д}} = 1$ м
	Швидкість вітру $V = 5$ м/с	Діаметр устя димаря $d = 0,5$ м
	Висота труби $H = 27$ м	Швидкість виходу газів з димаря $\omega = 1$ м/с
	Радіус устя труби $R_0 = 0,5$ м	Швидкість вітру на рівні флюгера $V = 2$ м/с
	Швидкість потоку газів на виході з труби $\omega_0 = 3,5$ м/с	Інтенсивність викиду CO $Q = 20$ г/с
	Місцевість відкрита	Довжина будинку 10 м, ширина 10 м

№ варіанта	Завдання I	Завдання II
7	Клас стабільності атмосфери B	Висота будинку $H_{\text{буд}} = 15$ м
	Інтенсивність викиду CO $Q = 25$ г/с	Висота димаря $h_{\text{д}} = 2$ м
	Швидкість вітру $V = 3$ м/с	Діаметр устя димаря $d = 0,5$ м
	Висота труби $H = 35$ м	Швидкість виходу газів з димаря $\omega = 4$ м/с
	Радіус устя труби $R_0 = 1$ м	Швидкість вітру на рівні флюгера $V = 5$ м/с
	Швидкість потоку газів на виході з труби $\omega_0 = 4$ м/с	Інтенсивність викиду CO $Q = 20$ г/с
	Місцевість відкрита	Довжина будинку 10 м, ширина 10 м
8	Клас стабільності атмосфери B	Висота будинку $H_{\text{буд}} = 10$ м
	Інтенсивність викиду CO $Q = 25$ г/с	Висота димаря $h_{\text{д}} = 1$ м
	Швидкість вітру $V = 5$ м/с	Діаметр устя димаря $d = 0,5$ м
	Висота труби $H = 27$ м	Швидкість виходу газів з димаря $\omega = 1$ м/с
	Радіус устя труби $R_0 = 1$ м	Швидкість вітру на рівні флюгера $V = 2$ м/с
	Швидкість потоку газів на виході з труби $\omega_0 = 4,5$ м/с	Інтенсивність викиду CO $Q = 20$ г/с
	Місцевість відкрита	Довжина будинку 10 м, ширина 10 м
9	Клас стабільності атмосфери A	Висота будинку $H_{\text{буд}} = 10$ м
	Інтенсивність викиду CO $Q = 20$ г/с	Висота димаря $h_{\text{д}} = 1$ м
	Швидкість вітру $V = 3$ м/с	Діаметр устя димаря $d = 0,5$ м
	Висота труби $H = 35$ м	Швидкість виходу газів з димаря $\omega = 1$ м/с
	Радіус устя труби $R_0 = 1$ м	Швидкість вітру на рівні флюгера $V = 3$ м/с
	Швидкість потоку газів на виході з труби $\omega_0 = 4,5$ м/с	Інтенсивність викиду CO $Q = 20$ г/с
	Місцевість відкрита	Довжина будинку 20 м, ширина 10 м

Рекомендована література

1. Багрій В.М. Моделювання та прогнозування якості навколишнього середовища / В.М. Багрій, М.М. Біляєв, І.І. Дуднікова, Є.Д. Коренюк, В.К. Хрущ. – Дніпро : Наука і освіта. – 2004. – 236 с.
2. Бараннік В.О. Моделювання і прогнозування стану довкілля: навч. посіб. / В.О.Бараннік / М-во освіти і науки України, Харк. нац. акад. міськ. госп. – Харків : ХНАМГ, 2017. – 85 с.
3. Ковальчук П. І. Моделювання і прогнозування стану навколишнього середовища: навч. посіб. / П.І Ковальчук. – Київ : Либідь, 2003. – 208 с.
4. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології / В.І. Лаврик. – Київ : Фітоцентр, 1998. – 132 с.
5. Моделювання та реінжиніринг бізнес-процесів: навч. посіб. / С.В. Козир, В.В. Слесарєв, С.А. Ус, Т.В. Хом'як; М-во освіти і науки України, нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2022. – 163 с.
6. Новицький І.В. Теорія ймовірності й математична статистика: навч. посіб. / І.В.Новицький, С.А. Ус. / М-во освіти і науки України, Нац. гірн.ун-т. – Дніпро : НГУ. – 2010. – 179 с.
7. Ус С. А. Моделювання сталого розвитку: навч. посіб. / С. А. Ус, Л. Л. Палєхова; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т. «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», – 2022. – 144 с.

Світлана Альбертівна Ус

**МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ І
СОЦІАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ З ДИСЦИПЛІНИ**

студентами спеціальності 124 «Системний аналіз»

Редактор О.Н. Ільченко

Підписано до друку 26.04.2023. Формат 30x42/4.

Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 4,8.

Обл.-вид. арк. 6,0. Тираж 50 пр. Зам. №

НТУ «Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19