

Веніамін Кубенко¹

¹Завідувач відділу, доктор фіз.-мат. наук, професор, Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна, e-mail: vdk@inmech.kyiv.ua

НЕСТАЦІОНАРНІ ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ В АКУСТИЧНОМУ ШАРІ – ПЛОСКА І ВІСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧІ

Анотація. Побудовано розв'язки задач про дію нестационарного навантаження на поверхні акустичного шару, у плоскому і осесиметричному випадку. Застосовуються методи інтегральних перетворень Лапласа і Фур'є або Ханкеля. Із використанням табличних співвідношень, теорем згортки і апарату узагальнених функцій одержано точні аналітичні вирази для хвильового потенціалу, тиску і швидкості. Проаналізовані особливості хвильових процесів.

Ключові слова: нестационарне навантаження, акустичний шар, хвильові процеси.

Суттєвою відмінністю хвильових процесів в шаруватому середовищі від таких, що мають місце у безмежному просторі чи у півпросторі, є наявність багатократно відбитих граничними поверхнями хвиль. Система таких хвиль формує в шарі складне сумарне хвильове поле, яке необхідно дослідити з метою визначення характеристик процесу – тиску і швидкостей як функцій часу і просторових координат. Переважна більшість відомих досліджень поширення і дифракції хвиль в шаруватому середовищі стосується усталених процесів. В даній доповіді на основі методів інтегральних перетворень розвивається підхід до точного розв'язку відповідних граничних задач для скалярного хвильового рівняння, що описує нестационарні процеси в акустичному шарі.

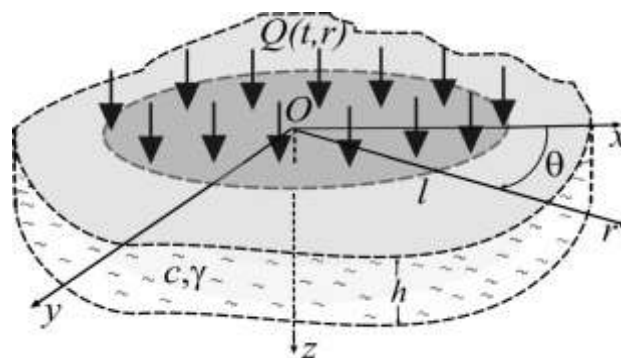


Рис. 1 Схема задачі



Розглядається шар товщини h , фізико-механічні властивості якого задані швидкістю поширення звуку c і густиною γ . У випадку осевої симетрії задачі віднесемо шар до системи циліндричних координат $Or\theta z$ – Рис. 1. На його вільній поверхні в крузі радіуса l задане раптово прикладене нестационарне навантаження

$$Q(t, r) = P_0 H(t) f(r).$$

Тут P_0 – амплітуда, $H(t)$ – одинична функція Хевісайда, $f(r)$ задає розподіл навантаження уздовж радіуса. Протилежна поверхня шару жорстко фіксована.

Дослідження ведеться в безрозмірних позначаннях, розмірними одиницями служать $h, c, \gamma c^2$.

Шукається розв'язок хвильового рівняння стосовно потенціала Φ

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

що пов'язаний із тиском p і швидкістю V співвідношеннями

$$p = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \vec{V} = \text{grad} \Phi. \quad (2)$$

Хвильовий потенціал має задовольняти вказаним вище граничним умовам на поверхнях шару, умовам на нескінченності і в нулі, та нульовим початковим умовам.

У випадку осевої симетрії застосовуються інтегральні перетворення Лапласа по часу t (з параметром s) і Ханкеля по радіальній координаті r (з параметром ξ).

Задоволення граничних умов дозволяє в просторі зображень отримати наступні вирази для тиску і швидкості:

$$p^{LB} = Q^{LB}(s, \xi) \frac{e^{-z\sqrt{s^2+\xi^2}} + e^{-(2h-z)\sqrt{s^2+\xi^2}}}{1 + e^{-2h\sqrt{s^2+\xi^2}}}. \quad (4)$$

$$V_z^{LB} = Q^{LB}(s, \xi) \frac{\sqrt{s^2+\xi^2}}{s} \frac{e^{-z\sqrt{s^2+\xi^2}} - e^{-(2h-z)\sqrt{s^2+\xi^2}}}{1 + e^{-2h\sqrt{s^2+\xi^2}}}. \quad (5)$$

Тут верхні індекси L і B позначають зображення по Лапласу і Ханкелю відповідно.

Обернення інтегральних перетворень відбувається із застосуванням табличних співвідношень, теорем згортки і апарату узагальнених функцій. Тиск і швидкість шукаються у вигляді рядів по відбитим хвилям: n -й член такого ряду відповідає хвилі, що n раз відбилась від нижньої або верхньої границі. Для випадку, коли навантаження



діє в колі фіксованого радіуса, одержано вираз для тиску в довільній точці шару в довільний момент часу у вигляді суми

$$p(t, r, z) = p_H(t, r, z) + p_\delta(t, r, z), \quad (6)$$

складові якої мають вид

$$p_H(t, r, z) = \frac{P_0}{\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H(t - Z(r, z_{nj})) \int_{X(r)}^{Y(t, r, z_{nj})} \frac{z_{nj}}{(\rho^2 + z_{nj}^2)^{3/2}} \theta^*(r, \rho) \rho d\rho. \quad (7)$$

$$p_\delta(t, r, z) = P_0 \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H[t - Z(r, z_{nj})] H\left(\sqrt{z_{nj}^2 + (r+l)^2} - t\right) \frac{z_{nj}}{\pi t} \theta^*\left(r, \sqrt{t^2 - z_{nj}^2}\right). \quad (8)$$

$$Y(t, r, z_{nj}) = \min\left(r+l; \sqrt{t^2 - z_{nj}^2}\right); \quad X(r) = \max(0; r-l);$$

$$z_{n1} = 2nh + z; \quad z_{n2} = 2(n+1)h - z; \quad Z(r, z_{nj}) = \sqrt{[X(r)]^2 + z_{nj}^2}.$$

$$\theta^*(r, \rho) = \begin{cases} \arccos \frac{\rho^2 + (r^2 - l^2)}{2r\rho}, & \left| \frac{\rho^2 + (r^2 - l^2)}{2r\rho} \right| \leq 1, \\ \pi, & \frac{\rho^2 + (r^2 - l^2)}{2r\rho} < -1. \end{cases}$$

Співвідношення (6) – (8) є шуканий точний розв'язок сформульованої задачі.

Аналогічно обчислюється швидкість V_z .

Має місце наступна фізична картина процесу, що розглядається. Збуджена в крузі $r=l$ первинна плоска хвиля рухається в межах циліндричного об'єму $r < l$, $z > 0$. Одночасно на контурі $r=l$, $z=0$ виникає хвиля розрідження, що має тороїдальний фронт. Вказана хвиля є розбіжною у області $r > l$, $z > 0$ і одночасно збігається до осі симетрії. Досягнувши осі, вона відбивається і породжує вторинну (відбиту) хвилю розрідження. Система вказаних хвиль рухається уздовж осі до протилежної границі, при взаємодії з якою породжує відбиті хвилі, що рухаються в зворотному напрямі. Процес послідовних відбиттів за відсутності енергетичних втрат продовжується без обмежень. Отриманий розв'язок дозволяє, утримуючи в рядах (7), (8) відповідну скінчену кількість членів, обчислити шукану характеристику хвильового поля на бажаному відрізку часу.

Формули (6) – (8) програмуються і обчислення виконуються за допомогою складеної програми в системі комп'ютерної алгебри. В доповіді представлені результати обчислень розподілу тиску і швидкостей за часовою і просторовими змінними у вигляді



графічних зображень і шляхом візуалізації розвитку фізичних характеристик з часом у відповідних відеоматеріалах.

Аналогічна за постановкою плоска задача про дію нестационарного навантаження на поверхні півплощини розв'язана із застосуванням інтегральних перетворень Лапласа і Фур'є. Розв'язок цієї задачі також одержаний у вигляді ряду по відбитим хвилям. Результати обчислень наведені в доповіді.

