

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»

Навчально-науковий інститут електроенергетики
Факультет інформаційних технологій
(факультет)
Кафедра інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії
(повна назва)

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА
кваліфікаційної роботи ступеня бакалавра

здобувача Ластовченка Владислава Сергійовича
(ПІБ)
академічної групи 123-22ск-1
(шифр)
спеціальності 123 Комп'ютерна інженерія
(код і назва спеціальності)
за освітньо-професійною програмою 123 Комп'ютерна інженерія
(офіційна назва)
на тему «Моделювання мобільного CDMA-трафіку за допомогою
фрактальних методів»
(назва за наказом ректора)

Керівники	Прізвище, ініціали	Оцінка за шкалою		Підпис
		рейтинговою	інституційною	
кваліфікаційної роботи	доц. Суцєвський Д.В.			
Рецензент				
Нормоконтролер	проф. Цвіркун Л.І.			

Дніпро
2025

ЗАТВЕРДЖЕНО:

завідувач кафедри
інформаційних технологій
та комп'ютерної інженерії
 (повна назва)
Гнатушенко В.В.

"__" 2025 року

ЗАВДАННЯ
на кваліфікаційну роботу ступеня бакалавр

здобувача Ластовченка Владислава Сергійовича

академічної групи 123-22ск-1

спеціальності 123 Комп'ютерна інженерія

за освітньо-професійною програмою Комп'ютерна інженерія

(офіційна назва)

на тему «Моделювання мобільного CDMA-трафіку за допомогою
 фрактальних методів»

затверджену наказом ректора НТУ «Дніпровська політехніка»
 від 05.05.2025 №336-с

Розділ	Зміст	Термін виконання
Загальна частина	На основі матеріалів виробничих практик, інших науково-технічних джерел показати актуальність завдання, сформулювати мету та задачі виконання кваліфікаційної роботи	10.03.2025
Спеціальна частина	дослідити телетрафік бездротової мережі передачі даних за технологією CDMA	09.06.2025

Завдання видано _____

(підпис керівника)

(прізвище, ініціали)

доц. Суцєвський Д.В.

Дата видачі 10.03.2025

Дата подання до екзаменаційної комісії 10.06.2025 р.

Прийнято до виконання _____ Ластовченко В.С.

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 58 стор., 24 рисунки, 3 таблиці, 10 джерел.

CDMA, ТРАФІК, ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ, КОЕФІЦІЄНТ ХЬОРСТА, ФРАКТАЛЬНА РОЗМІРНІСТЬ, САМОПОДІБНІСТЬ, R/S-АНАЛІЗ, МОДЕЛЮВАННЯ ТРАФІКУ.

Об'єкт дослідження — процеси передачі даних у бездротових мережах стільникового зв'язку, зокрема телетрафік у мережах, що працюють за технологією CDMA.

Предмет дослідження — фрактальні властивості мобільного CDMA-трафіку та методи його математичного моделювання з урахуванням самоподібності та антиперсистентності.

Мета роботи — дослідити та змоделювати характеристики мобільного CDMA-трафіку з використанням фрактальних методів, з метою виявлення самоподібності та можливості ефективного представлення і стиснення телетрафіку.

Методи дослідження — теорія обробки сигналів, R/S-аналіз, обчислення коефіцієнта Хьорста, математичне моделювання фрактальних процесів.

У випускній кваліфікаційній роботі досліджено характеристики телетрафіку бездротової мережі передачі даних за технологією CDMA з використанням фрактальних методів аналізу. Проведено візуальний та кількісний аналіз трафіку, що виявив його антиперсистентний характер і нерівномірність, притаманну процесам з «важкими хвостами» у розподілах. Методом R/S-аналізу визначено коефіцієнт Хьорста ($H = 0.321$), що підтверджує складну динаміку зміни напрямку сигналу. Запропоновано та перевірено гіпотезу щодо фрактальних властивостей трафіку шляхом обчислення фрактальної розмірності трьома різними методами, що дало середнє значення $D = 1.91$ при похибці 1.5%.

Отримані результати доводять самоподібність телетрафіку, що відкриває перспективи для його більш ефективного збереження та стиснення за допомогою фрактальних алгоритмів.

Для розрахунку фрактальної розмірності та коефіцієнта Хьорста розроблено програмне забезпечення з використанням модульної архітектури, що забезпечує чітке розділення відповідальності, легкість підтримки та розширення.

ЗМІСТ

Вступ.....	6
1 Теоретична частина.....	8
1.1 Поняття фрактальності	8
1.1.1 Канторовська множина.....	10
1.2 Самоподібний телетрафік.....	11
1.2.1 Проблема самоподібного телетрафіка	11
1.2.2 Визначення самоподібного процесу.....	12
1.3 Основні властивості самоподібних процесів	15
1.3.1 Поняття показника Хьорста	18
1.3.2 Поняття фрактальної розмірності та її зв'язок з показником Хьорста.....	21
1.4 Методи визначення фрактальної розмірності	25
1.4.1 Метод R/S - аналізу	25
1.4.2 Метод BOX COUNTING.....	26
1.4.3 Метод розкладання в ряд Фур'є.....	27
1.5 Постановка задачі дослідження	29
2 Практична частина	30
2.1 Аналіз реалізації мережевого трафіку.....	30
2.2 Розрахунок фрактальної розмірності	35
2.2.1 Метод R/S - аналізу	37
2.2.2 Метод BOX COUNTING.....	39
2.2.3 Метод розкладання в ряд Фур'є.....	41
2.2.4 Метод агрегування	43
2.3 Розробка графічного інтерфейсу	46
Висновки	49
Додаток А.....	52

ВСТУП

CDMA (англ. Code Division Multiple Access — множинний доступ з кодовим розділом) — технологія мобільного зв'язку, у якій канали передачі мають спільну смугу частот, але різну кодову модуляцію [1-10].

Використання спільної смуги частот багатьма каналами нагадує процеси утворення природних фрактальних систем, що формуються як сукупна дія багатьох елементів, які надають системі складні властивості. Наприклад, фрактальна поверхня металу, що є двомірним фрактальним сигналом, сформована синергетичною взаємодією мікрочисталів, неметалевих домішок, тощо. Таким чином, доцільно буде використовувати методи фрактального аналізу сигналів для дослідження поведінки трафіку у мережах CDMA.

До недавнього часу теоретичну базу для проектування систем розподілу інформації складала теорія масового обслуговування. Моделлю потоку викликів (даних) у цій теорії є найпростіший потік. У 1993 році група американських дослідників: W. Leland, M. Taqqu, W. Willinger і D. Wilson опублікували результати роботи, яка докорінно змінила уявлення про процеси, що відбуваються в телекомунікаційних мережах з комутацією пакетів. Виявилось, що потоки в сучасних мережах не можна апроксимувати найпростішими, оскільки вони мають іншу структуру, ніж прийнято в класичній теорії телетрафіка. Було встановлено, що трафік мережі має властивість самоподібності (масштабної інваріантності), має пам'ять (післядія), а також має високу пульсацію. З цієї причини розрахунок параметрів системи розподілу інформації, призначеної для обробки мережевого трафіку, за класичними формулами дає некоректні, не виправдано оптимістичні результати [1-10].

Алгоритми обробки трафіка, створені для роботи з найпростішим потоком неефективні для фрактальних потоків з самоподібністю. Статистичні характеристики (середнє значення, спектральна щільність,

автокореляційна функція та ін.) самоподібного трафіку мають характер спаду сильно відрізняється від експоненціального. Тому вимагають коректування вихідні передумови, які робилися раніше при розробці багатьох мережних пристроїв.

Незважаючи на тривалий період вивчення проблеми самоподібності телетрафіка, залишається ряд невіршених завдань:

- Фактично відсутня суворя теоретична база, яка прийшла б на зміну класичної теорії масового обслуговування при проектуванні сучасних систем розподілу інформації з самоподібним трафіком;

- Немає єдиної загальноновизнаної моделі самоподібного трафіку;

- Не існує достовірної та визнаної методики розрахунку параметрів та показників якості систем розподілу інформації при впливі ефекту самоподібності;

- Відсутні алгоритми і механізми, що забезпечують якість обслуговування в умовах самоподібного трафіку.

Вирішення зазначених завдань має не тільки теоретичне, але й практичне значення. Більшість сучасних додатків є синхронними і пред'являють високі вимоги до якості з'єднання. Скоротити затримку передачі даних у порівнянні з протоколом TCP, дозволяє протокол без гарантованої доставки UDP. Однак, забезпечити підвищені вимоги до якості з'єднання лише з допомогою транспортного протоколу (UDP або TCP) важко, оскільки причини, що призводять до великих затримок, більшою частиною знаходяться на мережевому рівні.

Ситуація, що склалася в сучасних глобальних комп'ютерних мережах, наявність великої кількості мережних маршрутів на яких періодично виникають різкі коливання затримки в передачі даних і великий відсоток втрат пакетів, поява нових властивостей мережного трафіку, необхідність забезпечення високої якості обслуговування різних категорій й додатків, роблять актуальним завдання дослідження фрактального трафіку.

1 ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

1.1 Поняття фрактальності

Поняття фрактал було вперше введено Бенуа Мандельброт в 1975 році. Слово утворено від латинського fractus – що складається із фрагментів. З математичної точки зору фрактальний об'єкт, перш за все, має дробову (неціле) розмірність.

Відомо, що точка (з математичної точки зору) має розмірність, рівну нулю, відрізок прямої й окружність (характеризуються довжиною) й одиниці, коло і сфера (характеризуються площею) й двом, і т.д. Однак, що представляє собою безліч об'єктів з розмірністю, скажімо, 1.5? Мабуть, для цього опису потрібно щось середнє між довжиною і площею. Ще раніше, в 1919 році, Ф. Гаусдорф привів перші приклади об'єктів, що володіють дробовою розмірністю (Множина Кантора, крива фон Коха та ін.)

Інше важливе властивість, яким володіють майже всі фрактали - властивість самоподібності (масштабна інваріантність). Виявляється, фрактал можна розбити на як завгодно малі частини так, що кожна частина виявиться просто зменшеною частиною цілого. Іншими словами, якщо подивитися на фрактал в мікроскоп, то ми побачимо ту ж саму картинку, що і без мікроскопа! Прикладом природного фрактального об'єкта є представлений на рисунку 1.1 лист папоротника.

Природа створювала фрактали протягом мільйонів років. Фактично більшість об'єктів в природі при більш ретельному розгляді не є колами, квадратами або простими лініями.

Замість цього вони, по суті, є фрактали, і походження фракталов зазвичай зв'язується з рівняннями хаосу. Хаос і фрактальна краса представляють природу реальності. Одним з таких самоподібних (фрактальних) процесів є телетрафік. Тому застосування апарату теорії нелінійних динамічних процесів (зокрема, теорії хаосу) для дослідження

самоподібного телетрафіка представляється також досить перспективним напрямком і розумним розвитком ідей фрактального дослідження трафіку.



Рисунок 1.1 – Приклад фрактального об'єкта в природі є лист папороті

Зауважимо, що часто використовується в літературі термін хаос на увазі під собою словосполучення детермінований хаос, щоб підкреслити відмінність такого процесу від чисто випадкового, проте в розмовній мові слово "детермінований" для стислості часто опускається. У цьому сенсі принцип детермінованості потенційно може відігравати значну роль не тільки в мережевому трафіку, а й у багатьох аналогічних процесах, що здаються на перший погляд випадковими.

На відміну від детермінованих фракталів стохастичні фрактальні об'єкти (процеси), як правило, описуються масштабною інваріантністю (самоподібністю) статистичних характеристик другого порядку

(властивість незмінності коефіцієнта кореляції при масштабуванні). Як раз з такими стохастичними фракталами ми зіткнемося нижче при вивченні характеристик мережевого трафіку. У зв'язку з цим в літературі поняття фрактального і самоподібного телетрафіка часто використовуються як синоніми [1].

1.1.1 Канторовська множина

Рецепт його побудови полягає в наступному (див. рис. 1.2). Спочатку береться відрізок прямої одиничної довжини. Потім він ділиться на три рівні частини, і виймається відрізок в середині, що знаходиться між точками $1/3$ та $2/3$. Це перший крок ітераційної процедури. На другому кроці подібною ж процедурою поділу на три частини і подальшого видалення середини піддається кожен з двох, що залишилися відрізків. Так продовжується до нескінченності. Неважко бачити, що сумарна довжина отримана в межах відрізків дорівнює нулю, оскільки ми виключили в результаті довжину, що дорівнює 1:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1. \quad (1.1)$$

Отже, виникне на множина являє собою нескінченне число ізольованих точок, яке і отримало назву канторовської множини.

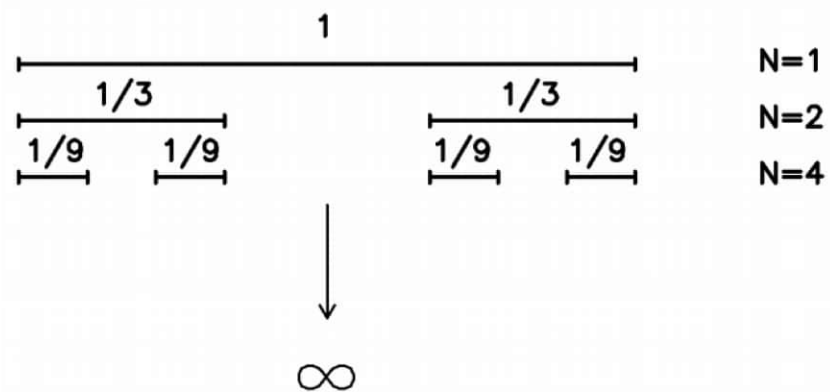


Рисунок 1.2 – Канторовська множина

Обчислимо тепер фрактальну розмірність цієї множини. Скористаємося для цього, наприклад, формулою (1.2). Очевидно, що на n -му кроці нашої побудови ми маємо 2^n відрізків довжиною $1/3^n$ кожен. Тому як $N(l)$ на цьому кроці ми можемо взяти величину 2^n , а в якості l - величину $1/3^n$. Межа $l \rightarrow 0$ відповідає межі $n \rightarrow \infty$. Тому фрактальна розмірність дорівнює

$$D = - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l}. \quad (1.2)$$

$$D = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln(1/3^n)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309. \quad (1.3)$$

Вона виявилася менше Евклідової розмірності простору ($d = 1$), в якому розташовується ця множина (тобто його довжина дорівнює нулю), але все-таки відмінна від нуля, тобто більше топологічеські розмірності елементів (точок) цієї множини. За математичної термінології даний об'єкт являє собою незліченну безліч точок, що володіє потужністю континууму [3].

1.2 Самоподібний телетрафік

1.2.1 Проблема самоподібного телетрафіка

Вперше про самоподібний телетрафік заговорили з моменту його виявлення в 1993 році групою вчених (W. Leland, M. Taqqu, W. Willinger і D. Wilson), які досліджували Ethernet-трафік у мережі корпорації Bellcore і виявили, що він має властивість самоподібності, тобто виглядає якісно однаково при майже будь-яких масштабах часової осі. При цьому виявилось, що в умовах самоподібного трафіку методи розрахунку сучасних комп'ютерних мереж (пропускної спроможності каналів, ємності буферів), засновані на пуассонівських моделях і формулах Ерланга, які з успіхом використовуються при проектуванні телефонних мереж, дають

невиправдано оптимістичні рішення і приводять до недооцінки реального навантаження. Різниця між комп'ютерною та телефонною мережами тут слід розуміти у наступному значенні: так уже історично склалося, що телефонні мережі спочатку будувалися за принципом комутації каналів. Характеристики трафіку в даних мережах добре вивчені, а також розроблені суворі методики розрахунків. В основу комп'ютерних мереж, як правило, був покладений принцип комутації пакетів, а методики розрахунків, можливо, внаслідок деякого відставання теоретичної бази від бурхливо розвиваючих технологій залишилися практично тими ж, що і призвело до виникнення "проблеми самоподібності". Крім того, в даний час все більшого поширення отримують способи передачі мовної інформації по мережах з комутацією пакетів VoIP, трафік яких також є самоподібний.

1.2.2 Визначення самоподібного процесу

Дамо визначення строго і асимптотично самоподібних в широкому сенсі випадкових процесів дискретного аргументу і вкажемо їх зв'язок з процесами, самоподібними у вузькому сенсі, і з процесами з повільно спадною залежністю. Слід зауважити, що теорія самоподібного телетрафіка проходить відносно ранню стадію свого розвитку, за цієї причини існують деякі відмінності в термінології і навіть у визначеннях.

Визначення. Нехай $X = (X_1, X_2, \dots)$ - напівбезмежний відрізок стаціонарного в широкому сенсі випадкового процесу дискретного аргументу (часу), $t \in \mathbb{N} \stackrel{\Delta}{=} \{1, 2, \dots\}$. Позначимо через $\mu < \infty$ та $\infty < \sigma^2$ середнє і дисперсію процесу X відповідно, а через

$$r(k) \stackrel{\Delta}{=} \frac{\overline{(X_{t+k} - \mu)(X_t - \mu)}}{\sigma^2},$$

$$b(k) \stackrel{\Delta}{=} \sigma^2 r(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+ \stackrel{\Delta}{=} \{0, 1, 2, \dots\}$$

автокореляційну функцію і автоковаріацію процесу X . Оскільки процес X - стаціонарний в широкому сенсі, середнє $M[X]=\mu$, дисперсія $M[X]=\sigma^2=b(0)$, коефіцієнт кореляції $r(k)$ та автоковаріація $b(k)$ не залежать від часу t і $r(k)=r(-k)$, $b(k)=b(-k)$.

Припустимо, що процес X має автокореляційну функцію наступного вигляду:

$$r(k) \sim k^{-\beta} L_1(k), \quad k \rightarrow \infty, \quad (1.4)$$

де $0 < \beta < 1$ і L_1 - повільно змінююча функція,

тобто $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_1(tx)}{L_1(t)} = 1$ для всіх $x > 0$ (прикладом повільно змінюючої

функції можуть служити $L_1(t) = \text{const}$, $L_1(t) = \log(t)$).

Позначимо через

$$X^{(m)} = (X_1^{(m)}, X_2^{(m)}, \dots)$$

усереднений по блоках довжини m процес X , компоненти якого визначаються рівністю

$$X_t^{(m)} = \frac{1}{m} (X_{tm-m+1} + \dots + X_{tm}), \quad m, t \in \mathbb{N}. \quad (1.5)$$

У подальшому викладі, будемо називати такий ряд агрегованим. Позначимо через $r_m(k)$, $b_m(k)$ і $V_m = b_m(0)$ коефіцієнт кореляції, автоковаріацію та дисперсію процесу $X^{(m)}$ відповідно. Наведемо нижче визначення суворо самоподібного в широкому сенсі процесу.

Визначення. Процес X називається строго самоподібним в широкому сенсі [ССШС] (exactly second-order self-similar) з параметром $H = 1 - (\beta / 2)$, $0 < \beta < 1$, якщо

$$r_m(k) = r(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad m \in \{2, 3, \dots\}, \quad (1.6)$$

тобто ССШС процес не змінює свій коефіцієнт кореляції після усереднення по блоках довжини m [4]. Іншими словами, $X \in \text{ССШС}$, якщо

агрегований процес $X^{(m)}$ відрізняється від вихідного процесу X , як мінімум відносно статистичних характеристик другого порядку.

Параметр H , званий коефіцієнт Хьорста [Hurst parameter], має принципове значення в теорії самоподібних процесів. Він є індикатором ступеня самоподібності процесу, а також свідчить про наявність у нього таких властивостей як персистентність/антиперсистентність і тривала пам'ять. Більш детально ми розглянемо цей параметр у розділі 1.3.1.

Визначення. Процес X називається асимптотично самоподібний в широкому сенсі (АСШС) [second-order asymptotical self-similarity] з параметром $H = 1 - (\beta / 2)$, $0 < \beta < 1$, якщо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m(k) = g(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.7)$$

де $g(k) = 1/2 [(k - 1)^{2 - \beta} - 2k^{2 - \beta} + (k + 1)^{2 - \beta}]$ - коефіцієнт кореляції СШС.

Сенс цього визначення полягає в тому, що X є АСШС процесом, якщо після усереднення по блоках довжини m і при $m \rightarrow \infty$ він сходиться до СШС процесу.

Разом з поняттям СШС існує поняття просто самоподібного процесу, яке для більшої термінологічної відмінності ми будемо називати самоподібним у вузькому сенсі процесом (СВС).

Визначення. Процес X називається самоподібним у вузькому сенсі (СВС) [strictly self-similarity] з параметром $H = 1 - (\beta / 2)$, $0 < \beta < 1$, якщо

справедливий вираз

$$m^{1-H} X^{(m)} \stackrel{\bullet}{=} X, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1.8)$$

який розуміється в сенсі рівності розподілів. Зв'язок між процесами СШС і СВС аналогічний зв'язку між процесами, стаціонарними в широкому та вузькому значеннях. Необхідна та достатня умова того, що процес називається СШС.

Дослідники відзначили однаковість розподілів вихідного і агрегованого процесів (при значному інтервалі зміни m), вимірили параметр H (параметр Хьорста) і виявили, що останній для мережевого трафіку знаходиться в інтервалі $(0.5, 1)$. На якісному рівні такий самоподібний трафік має постійний "взривной" характер [burstiness], тобто має високу пачечність на багатьох масштабах часової осі. Нагадаємо, що коефіцієнт пачечності (пачечність) для заданого процесу відповідає відношенню пікової інтенсивності процесу надходження заявок на обслуговування до його середнього значення.

1.3 Основні властивості самоподібних процесів

Найбільш цікава риса самоподібних процесів – повільне спадання автокореляційної функції агрегованого процесу $X^{(m)}$ при $\infty \rightarrow m$ на відміну від поширених стохастичних моделей, для яких виконується (1.9):

$$r_m(k) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, k \in \mathbb{N}. \quad (1.9)$$

У 1984 році Сох показав, що завдання АКФ у вигляді (1.4) або завдання

спектральної щільності у вигляді (1.11) прирівнюється до визначення процесу з наступною дисперсією:

$$\sigma^2 \sim am^{-\beta}, m \rightarrow \infty, \quad (1.10)$$

де a - кінцева позитивна константа, яка не залежить від m , та $0 < \beta < 1$.

$$f(\lambda) \sim \lambda^{\beta-1} L_2(\lambda), \lambda \rightarrow 0, 0 < \beta < 1. \quad (1.11)$$

З іншого боку, для процесів, що задовольняють (1.9), можна показати виконання

$$\sigma^2 \sim am^{-1}, m \rightarrow \infty, \quad (1.12)$$

де b - кінцева позитивна константа, яка не залежить від m .

На якісному рівні у відповідності з властивостями (1.10) і (1.12) можна припустити, що самоподібний процес при досить великих m виглядає менш згладженим, більш нерівномірним, (тобто має більшу дисперсією) ніж процес, що задовольняє (1.9). Дійсно, достатньо поглянути на рис. 1.3, щоб у цьому переконатися.

Слід зауважити, що процес X не може бути самоподібний у вузькому сенсі, якщо його середнє значення не дорівнює нулю. Дійсно, в силу

$$M[X] = m^{1-H} M[X]^{(m)}. \quad (1.13)$$

Можна показати, що в силу (1.5) $M[X^{(m)}] = M[X]$, тоді (1.13) виконується тільки у випадку $M[X] = 0$.

Поведінка процесу X при агрегуванні (1.5) має принципове значення, оскільки деякі механізми в теорії систем розподілу інформації, наприклад, розподіл пропускнуої здатності, часто розглядаються стосовно до агрегованого процесу. Щоб представляти особливості, які можуть виявлятися у агрегованих процесах, наведемо простий приклад.

Нехай прирости ε (тобто перші різниці) часового ряду X є випадковими. Тоді перші m членів ряду можна записати:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1, \\ X_2 &= X_1 + \varepsilon_1, \\ X_3 &= X_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ &\dots \\ X_m &= X_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{m-1} \end{aligned}$$

а другий набір з m членів - як

$$\left. \begin{aligned} X_{m+1} &= X_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m \\ X_{m+2} &= X_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m + \varepsilon_{m+1} \\ X_{m+3} &= X_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m + \varepsilon_{m+1} + \varepsilon_{m+2} \\ &\dots \\ X_{2m} &= X_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{2m-1} \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

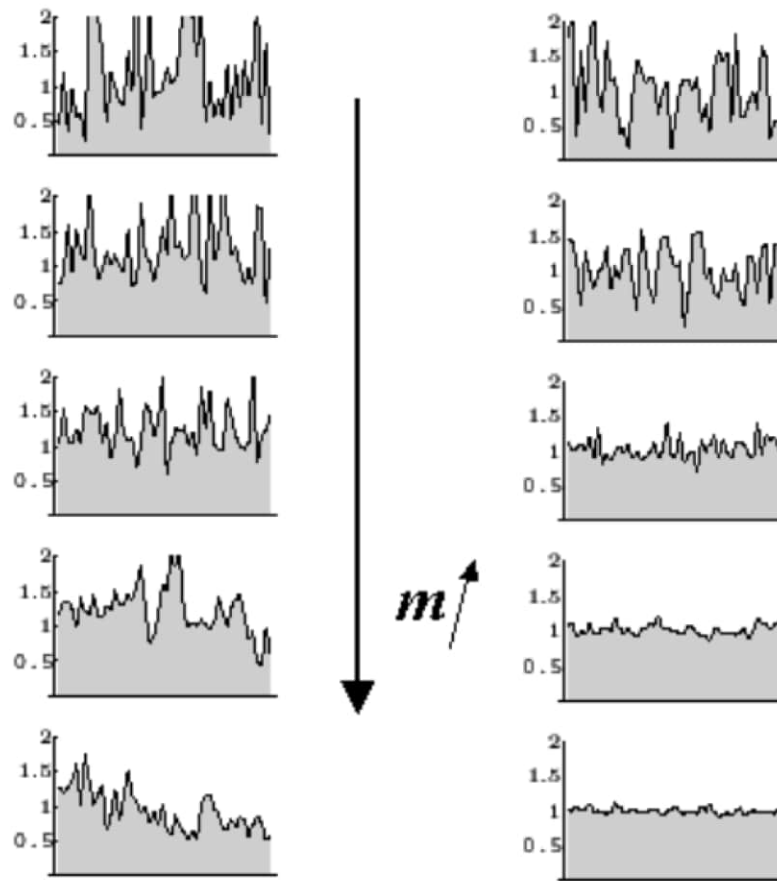


Рисунок 1.3 - Часові реалізації реального мережного (самоподібного) трафіку (ліворуч) і традиційної несамоподібної (Пуассонівської) моделі телетрафіку (праворуч) при різних масштабах часової осі. Зверху вниз масштаб часової осі укрупнюється

Якщо обчислити різницю між середнім другого і першого наборів, то отримаємо

$$d = (1/m) (\epsilon_1 + 2 \epsilon_2 + \dots + (m - 1) \epsilon_{m-1} + m \epsilon_m + (m - 1) \epsilon_{m+1} + \dots + \epsilon_{2m-1}). \quad (1.15)$$

Зауважимо, що d представляє собою першу різницю агрегованого ряду, визначеного відповідно до (1.5). Знайдемо дисперсію часового ряду d :

$$\begin{aligned} D[d] &= D[\epsilon] * 1/m^2(1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (m - 1)^2 + m^2 + (m - 1)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1) = \\ &= D[\epsilon] * 1/m^2(2 * \sum_{j=0}^{m-1} j^2 + m^2). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Знайдемо коваріацію двох послідовних різниць агрегованого ряду. Для цього помножимо вираз (1.15) на аналогічний вираз, зрушенев часі на m , і обчислимо середнє:

$$b_m = D[\varepsilon] \cdot \frac{1}{m^2} \left(\sum_{j=1}^{m-1} j(j-1) + m(m-1) \right) = \frac{m^2 - 1}{6m} \cdot D[\varepsilon], \quad (1.17)$$

тоді кореляція $R(m)$ між послідовними різницями агрегованого ряду дорівнює

$$R(m) = \frac{m^2 - 1}{2(2m^2 + 1)}. \quad (1.18)$$

Таким чином, незважаючи на те, що перші різниці вихідного ряду незалежні, перші різниці агрегованого ряду не є такими.

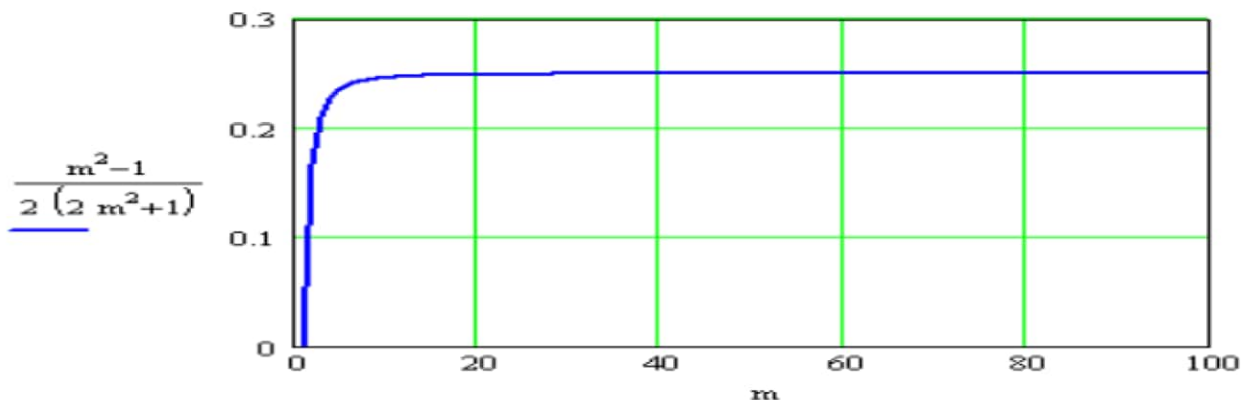


Рисунок 1.4 – Залежність кореляції між сусідніми першими різницями агрегованого ряду від значення m

1.3.1 Поняття показника Хьорста

Гарольд Едвін Хьорст, будучи британським чиновником в Каїрі (1906 рік), брав участь в гідротехнічних проектах на річці Ніл. Слід зауважити, що протягом століть щорічні розливи Нілу були основою сільського господарства багатьох відомих цивілізацій Африки. Гарне зрошення означало хороший урожай, у той час як мала вода приводила до недорід і браку продовольства. Крім того, щорічно в долині річки на всій затоплюваній території відкладається родючий шар червоного алювію,

який надає червонуватий відтінок водам Нілу. Переглянувши літопису за 800 років на предмет розливів Нілу, Хьорст виявив, що існувала тенденція, коли за роком хорошого повені прямував ще один родючий рік, і, навпаки, за роком малої води прямував ще один "голодний" рік. Іншими словами, здавалося, що поява голодних і родючих років - не випадково. Для підтвердження даного факту, Хьорст ввів коефіцієнт $0 < H < 1$, який на його честь зараз називається коефіцієнтом (експонентою) Хьорста. У разі незалежності один від одного рівнів щорічних розливів, логічно було б уявити процес розливів звичайним броунівським рухом з незалежними приростами, яка була розглянута раніше, при цьому коефіцієнт Хьорста $H = 0.5$. Однак, як виявив Хьорст, для Ніла - $H = 0.7$.

Одним із способів обчислення коефіцієнта H є аналіз так званої R/S статистики (нормованого розмаху). Позначимо ξ - щорічний рівень води в Нілі, тоді середній рівень води за τ років:

$$M[\xi] = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} \xi_i \quad (1.19)$$

Отримаємо новий (кумулятивний) ряд, що представляє суму за час t щорічних коливань рівня Нілу щодо середнього $M[\xi]$:

$$X(t, \tau) = \sum_{i=1}^t (\xi_i - M[\xi]), \quad 1 \leq t \leq \tau \quad (1.20)$$

При цьому діапазон між максимальним і мінімальним значенням $X(t, \tau)$ за час τ позначається $R(\tau)$:

$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) \quad (1.21)$$

Тоді R / S статистика визначається безрозмірним ставленням діапазону $R(\tau)$ до стандартного відхилення ξ :

$$\frac{R}{S} = \frac{R(\tau)}{S(\tau)} = \frac{R(\tau)}{\sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} (\xi_i - M[\xi])^2}} \quad (1.22)$$

Хьорст показав, що для багатьох природних явищ справедлива залежність:

$$M \left[\frac{R(\tau)}{S(\tau)} \right] \sim c\tau^H, \tau \rightarrow \infty \quad (1.23)$$

де c - позитивна константа, яка не залежить від τ .

Зокрема, якщо збільшення досліджуваного часового ряду (1.21) незалежні, тобто ряд представляє собою БД з незалежними приростами, то, як вже згадувалося раніше, коефіцієнт Хьорста в (1.23) $H = 0.5$. Однак Хьорст виявив для Ніла $H \approx 7.0$, що підтверджувало присутність деякої залежності між послідовністю відліку ξ_i і ξ_{i+1} !

Слід зауважити, що у випадку $0.5 < H < 1$ говорять про персистентну (підтримуючу) поведінку процесу, або про те, що процес має тривалої пам'яттю. Іншими словами, якщо протягом деякого часу в минулому спостерігалися позитивні прирости процесу, тобто відбувалося збільшення, то й надалі в середньому буде відбуватися збільшення. Інакше кажучи, ймовірність того, що процес на $i+1$ кроці відхиляється від середнього в тому ж напрямку, що й на i кроці настільки велика, наскільки параметр H близький до 1. Таким чином, персистентні стохастичні процеси виявляють чітко виражені тенденції зміни при відносно малому "шумі".

У разі $0 < H < 0.5$ говорять про антиперсистентність процесу. Тут високі значення процесу слідує за низькими, і навпаки. Іншими словами, ймовірність того, що на $i+1$ кроці процес відхиляється від середнього в протилежному напрямку (по відношенню до відхилення на i -му кроці) настільки велика, наскільки параметр H близький до 0.

При $H=0.5$ відхилення процесу від середнього є дійсно випадковим і не залежать від попередніх значень, що відповідає випадку БД.

Зауважимо, що саме властивість персистентності виправдовує застосування для моделювання і пророкування самоподібних рядів AR (Авторегресійних) моделей виду:

$$X_n = \varphi_0 + \sum_{r=1}^p \varphi_r * X_{n-r} + \varepsilon_n \quad (1.24)$$

де φ_i - константи, ε_n - некорельовані випадкові змінні (білий шум) з нульовим середнім. Вираз (1.24) показує, як, знаючи минуле процесу, передбачити його майбутнє. Зокрема, набули широкого поширення такі авторегресійні моделі, як ARMA (процес ковзаючого середнього), ARIMA (інтегральний процес ковзаючого середнього) і FARIMA (фрактальний інтегральний процес ковзаючого середнього).

Властивість тривалої пам'яті характерно для повеней Нілу, мережевого трафіку, процесів, що відбуваються на фінансових ринках і т.д.

Співвідношення (1.23) може використовуватися для оцінки коефіцієнта H з часового ряду. Для цього необхідно прологарифмувати обидві частини (1.24)

$$\log\left(M\left[\frac{R(\tau)}{S(\tau)}\right]\right) \sim H \log(\tau) + \log c, \quad \tau \rightarrow \infty \quad (1.25)$$

і побудувати графік залежності $\log\left(M\left[\frac{R(\tau)}{S(\tau)}\right]\right)$ від $\log(\tau)$. Нахил прямої, апроксимуючої дану залежність, і є коефіцієнт Хьорста, характеризує досліджуваний часовий ряд.

Для оцінки параметра Хьорста часового ряду існує безліч методів: R/S статистика, аналіз графіка зміни дисперсії, оцінка Віттла, вейвлет-аналіз, аналіз індексу дисперсії і ін. [1].

1.3.2 Поняття фрактальної розмірності та її зв'язок з показником Хьорста

Як вже згадувалося, мережевий трафік відноситься до класу фрактальних процесів, що мають властивість статистичної самоподібності характеристик другого порядку, і, отже, може характеризуватися фрактальною розмірністю.

Відомо, що довжина кривої лінії L_0 в Евклідовому просторі визначається числом $N(\delta)$ відрізків довжини δ прямої, необхідних для

покриття її повністю. Міру L довжини кривої можна ввести за допомогою наступного співвідношення:

$$L = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) * \delta = \frac{L_0}{\delta} * \delta = L_0 \quad (1.26)$$

Як випливає з (1.26), в межі при зменшенні δ міра L стає рівною довжині кривої L_0 , і при цьому її значення не залежить від δ . Формально, безлічі точок, відповідних розглянутої кривої, можна зіставити другий вимірювальний елемент, наприклад квадрат зі стороною δ . Площа такого вимірювального елемента дорівнює δ^2 . Якщо для покриття кривої потрібно $N(\delta)$ квадратів, то результуюча міра ("площа") кривої буде дорівнювати

$$S = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) * \delta^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{L_0}{\delta} * \delta^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} L_0 \delta \quad (1.27)$$

При $\delta \rightarrow 0$ величина $S \rightarrow 0$. Тому, з практичної точки зору, єдиною представляючою інтерес мірою кривий є її довжина L , а не "площа" S .

Аналогічним чином, безлічі точок, що утворюють площу поверхні S_0 , можна зіставити міру площі

$$S = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) * \delta^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{S_0}{\delta^2} * \delta^2 = S_0 \quad (1.28)$$

З іншого боку, формально евклідової поверхні S_0 можна також поставити у відповідність будь-яку довжину кривої, що покриває цю поверхню

$$S = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) * \delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{S_0}{\delta^2} * \delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{S_0}{\delta} \quad (1.29)$$

Однак, при $\delta \rightarrow 0$ такий захід поверхні розходиться, тобто для покриття поверхні потрібно крива нескінченної довжини.

Для загального випадку заходи можна записати

$$M = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) \cdot \delta^\beta = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{M_0}{\delta^D} \cdot \delta^\beta = \lim_{\delta \rightarrow 0} M_0 \cdot \delta^{\beta-D} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, \beta > D \\ \infty, \beta < D \end{cases}, \quad (1.30)$$

де β - розмірність вибраної міри.

Величина $\beta = D$, при якій M змінюється стрибком, розглядається як розмірність Хаусдорфа. Якщо β - неціле число, то відповідна міра називається фрактальною.

Найпростішим фрактальним і самоподібним об'єктом, який використовується в якості моделі складних процесів, є множина Кантора (або Канторов пил).

Фрактальна розмірність D може розглядатися як міра нерівності, порізаності поверхні об'єкта при $D \in [n, n+1)$ для поверхні в n -розмірному просторі, причому більш нерівні, "шорсткуваті" поверхні відповідають більш високим значенням D . Ефект Хьорста характеризує тривалу пам'ять, або персистентність процесу. У принципі, фрактальна розмірність і коефіцієнт Хьорста можуть розглядатися незалежно один від одного: фрактальна розмірність характеризує локальну властивість, а тривала пам'ять - глобальна характеристика всього процесу. Тим не менш, у науковій літературі ці поняття тісно пов'язані, головним чином, завдяки фрактальному гауському шуму та фрактальному броунівському руху, які проявляють обидві властивості.

Отже, для самоподібного процесу локальні властивості відображаються на глобальних відповідно до відомого співвідношення

$$D = n + 1 - H \quad (1.31)$$

між фрактальною розмірністю і коефіцієнтом Хьорста для самоподібного об'єкта в n -мірному просторі. Для часового ряду $n = 1$, і, відповідно,

$$D = 2 - H \quad (1.32)$$

Тому властивість повільно спадаючої залежності, що асоціюється з $0.5 < H < 1$, відповідає низькій фрактальній розмірності. Випадок "шорсткуваті" поверхні, що володіє високою фрактальною розмірністю, відповідають антиперсистентному процесу з $0 < H < 0.5$.

Розглянемо як приклад стаціонарний в широкому сенсі випадковий процес X з нульовим середнім і дисперсією, рівною одиниці. Поведінка кореляційної функції даного процесу характеризує локальні властивості реалізації, тобто якщо виконується співвідношення

$$1 - r(k) \sim |k|^{\alpha}, \text{ при } k \rightarrow 0, \quad (1.33)$$

де, $\alpha \in (0, 2]$, то реалізація випадкового процесу має фрактальну розмірність

$$D = n + 1 - \frac{\alpha}{2}. \quad (1.34)$$

Якщо процес X при цьому має персистентність, то він характеризується раніше розглянутою поведінкою кореляційної функції

$$r(k) \sim |k|^{-\beta}, \quad (1.35)$$

де $\beta \in (0, 2)$, з урахуванням взаємозв'язку з коефіцієнтом Хьорста

$$H = 1 - \frac{\beta}{2} \text{ и } \beta = 2 - 2H. \quad (1.36)$$

Для фрактального гауського шуму - класичного стаціонарного самоподібного стохастичного процесу, розглянутого раніше, кореляційний функція якого задовольняє (1.37):

$$r(k) = \frac{1}{2} [|k+1|^{2H} - |2k|^{2H} + |k-1|^{2H}], \quad k \in N, \quad (1.37)$$

можна показати, що

$$r(k) \sim H(2H-1) |k|^{(2-2H)}, \quad |k| \rightarrow \infty \quad (1.38)$$

та

$$1 - r(k) \sim |k|^{2H}, \quad |k| \rightarrow 0. \quad (1.39)$$

Порівнюючи (1.33) і (1.39), укладаємо, що співвідношення (1.34) виконується при $n = 1$.

Таким чином, припущення самоподібності процесу X визначає взаємозв'язок між фрактальною розмірністю і коефіцієнтом Хьорста (або локальною і глобальною поведінкою) процесу. Разом з тим, для

несамоподобних процесів співвідношення (1.34) може не виконуватися і, отже, параметри H і D можуть у такому разі змінюватися незалежно [1].

1.4 Методи визначення фрактальної розмірності

1.4.1 Метод R/S - аналізу

Запропонований спочатку Хьорстом для аналізу часової залежності стоку води з різних річок і озер, може бути застосований для визначення фрактальної розмірності D і інших часових рядів і однозначних самоафінних кривих. При розгляді цього методу будемо користуватися позначеннями, запропонованими Хьорстом.

Нехай $X(t)$ - досліджувана часова залежність деякої величини X , вимірної в дискретні цілочисельні моменти часу t . Уявімо собі, що X є деякою накопиченою величиною і може бути представлена як сума елементарних деяких вкладів $\xi(t)$. Наприклад, якщо X - координата броунівської частинки, то ξ - це елементарні зміщення такої частки.

Розглянемо поведінку величин X і ξ лише в деякому обмеженому інтервалі часу t від 1 до τ . Для цього інтервалу часу можна обчислити середню величину приростів ξ :

$$\langle \xi \rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t) \quad (1.40)$$

Для того ж інтервалу часу можна побудувати нову величину $X(t, \tau)$, яка буде мати сенс накопичених відхилень від середнього за даний період:

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t \{ \xi(u) - \langle \xi \rangle_{\tau} \} \quad (1.41)$$

Неважко помітити, що $X(0, \tau) = X(\tau, \tau) = 0$, оскільки сумарна відхилення від середнього за час, протягом котрого це середнє вимірювалося, точно дорівнює 0. Розмахом $R(\tau)$ для залежності $X(t, \tau)$ називається величина максимального зміни $X(t, \tau)$ називається величина максимальної зміни $X(t, \tau)$ за розглянутий інтервал часу (формула 1.21).

Для аналізу фрактальної розмірності D вихідної кривої $X(t)$ необхідно побудувати залежність безрозмірного відношення R/S від величини часового інтервалу τ , де S - середньоквадратичне відхилення ξ від середнього за той же інтервал часу:

$$S(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \{\xi(t) - \langle \xi \rangle_{\tau}\}^2} \quad (1.42)$$

Хьорстом був встановлений наступний емпіричний закон:

$$R(\tau) / S(\tau) \sim \tau^H \quad (1.43)$$

де H – показник Херста, пов'язаний з фрактальною розмірністю D кривої співвідношенням (1.32).

Таким чином, для визначення фрактальної розмірності D необхідно побудувати залежність $R/S(\tau)$ у подвійному логарифмічному масштабі і провести лінійну апроксимацію. Тангенс кута нахилу β безпосередньо дає значення показника Хьорста $H = \beta$, пов'язаного з величиною фрактальної розмірності D співвідношенням (1.32).

У викладеній вище реалізації методу Хьорста залежності $R(\tau)$ і $S(\tau)$ завжди розраховуються тільки для початкового інтервалу часу τ . Метод може бути вдосконалений, якщо проводити усереднення $R(\tau)$ і $S(\tau)$ за кільком часовим вікнам тривалістю τ , узятим в різних положеннях на аналізованій кривій $X(t)$.

1.4.2 Метод BOX COUNTING

Ідея методу полягає у вимірюванні довжини кривої при різному ступені огрублення її подання. З цією метою площину, на якій представлена крива, розбивається на квадратну сітку з кроком, відповідним найбільшому просторовому масштабу, з яким задана крива. Оцінка довжини кривої здійснюється підрахунком числа елементів сітки, через які проходить ця крива:

$$L(a) \sim N(a) \cdot a, \quad (1.44)$$

де a - розмір елемента сітки.

Потім сітка огрубляється вдвічі і розрахунок довжини кривої повторюється. Природно, що після огрублення довжина кривої виявиться менше, оскільки ця процедура призводить до втрати інформації про дрібні деталі геометрії кривої. Таким чином, величина L розраховується для різного кроку сітки a (для різного ступеня огрублення).

Для визначення фрактальної розмірності D досліджуваної кривий залежність $L(a)$ будують в подвійному логарифмічному масштабі, тобто будують залежність $\log L$ ($\log a$) та проводять лінійної апроксимацію. Тангенс кута нахилу β лінійної апроксимації пов'язаний з величиною $D=1-\beta$.

1.4.3 Метод розкладання в ряд Фур'є

Цей метод є найбільш швидким способом визначення фрактальної розмірності самоафінних кривих, оскільки швидке Фур'є перетворення присутнє в переважній більшості математичних пакетів. Однак, разом з тим, цей метод є одним з найменш точних.

Процедура розкладу в ряд Фур'є дає на виході значення амплітуди c і f фази для деякого фіксованого ряду частот f , за яким відбувається розкладання аналізованої кривий $y(t)$. Вид розкладу збігається з представленим у виразі. Аналіз частотної спектру потужності $c^2(f)$ дозволяє одержати величину фрактальної розмірності D для досліджуваної кривої. Лінійна апроксимації залежності $c^2(f)$, представленої у подвійному логарифмічному масштабі, дає тангенс кута нахилу, пов'язаний з $D=(4+k)/2$.

1.4.4 Метод агрегування

Розглянемо вихідний ряд на рисунку 1.5.

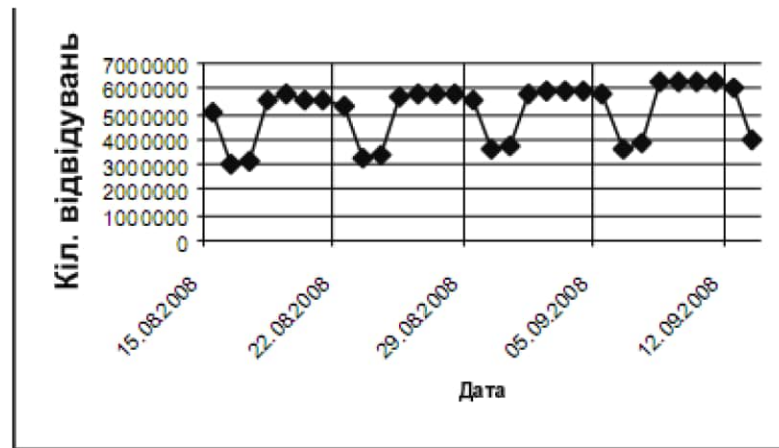


Рисунок 1.5 – Вихідний ряд

Для нього здійснено наступний агрегаційний процес. Виконано зменшення розміру шкали спостережень у 2 рази. Для цього сформований новий ряд, отриманий за допомогою операції знаходження середнього кожних двох послідовних вихідних спостережень. Отриманий ряд складається з 15 подій. Відбулося зменшення розглянутої шкали в 2 рази: кожне одиничний поділ нової шкали містить 2 одиниці вихідного. Потім аналогічно виконано зменшення розміру вихідної шкали спостережень у m разів, для $m = 3$, $m = 5$, $m = 6$ і $m = 10$. Кожне поділ нової шкали містить m одиниць вихідної. Структура отриманих рядів подібна структурі вихідного ряду.

Для кожного часового ряду обчислимо коефіцієнти варіації за формулою (1.45), де D_m - дисперсія, μ - середнє значення, однакове для всіх рядів.

$$CV_m = \frac{(D_m)^{0,5}}{\mu} \quad (1.45)$$

Графік залежності $\ln(CV_m)$ від $\ln(m)$ представляє собою пряму з нахилом, рівним $(-\gamma)$. Фрактальна розмірність D часового ряду дорівнює $D=1+\gamma$. Побудувавши графік залежності і лінію тренда, як показано на рисунку 1.6, визначимо апроксимоване значення γ : $\gamma=0,194$. Отже, $D=1+0,194=1,194$ та $H=2-D=0,806$ [5].

1.5 Постановка задачі дослідження

Як було зазначено вище, традиційні методи аналізу телетрафіку недоцільно застосовувати для систем з комутацією пакетів, до яких належить технологія мобільного зв'язку CDMA. Властивість масштабної інваріантності мережевого трафіку, що можна бачити в цій мережі, дозволяє застосовувати методи фрактального аналізу сигналів для прогнозування їх поведінки. Таким чином аналіз трафіку на відносно невеликому відрізку часу дозволить передбачити його поведінку на більш тривалих інтервалах. Використовуючи такі прогнози, можна буде створювати більш ефективні методи управління пропускнуою здатністю, що дозволить скоротити затримки передачі даних по мережі і втрати пакетів.

2 ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

2.1 Аналіз реалізації мережевого трафіку

Проведемо аналіз трафіку бездротової мережі передачі даних за технологією CDMA. Збір інформації з передачі трафіку тривав протягом трьох діб.

Дані представлені двома колонками чисел, перша колонка це час у секундах, а друга це кількість байт переданих за секунду.

Лістинг 1. Трафік. Початок першого дня

1 день

0	52822
1	42195
2	21880
3	10002
4	47509
5	42195
6	13753
7	52822
8	15316
9	53822
10	11253
11	10315
12	17191
13	46258
14	47821
15	47509
16	12503

Подивимося залежність розміру трафіку від часу у вигляді графіка (рисунок 2.1).

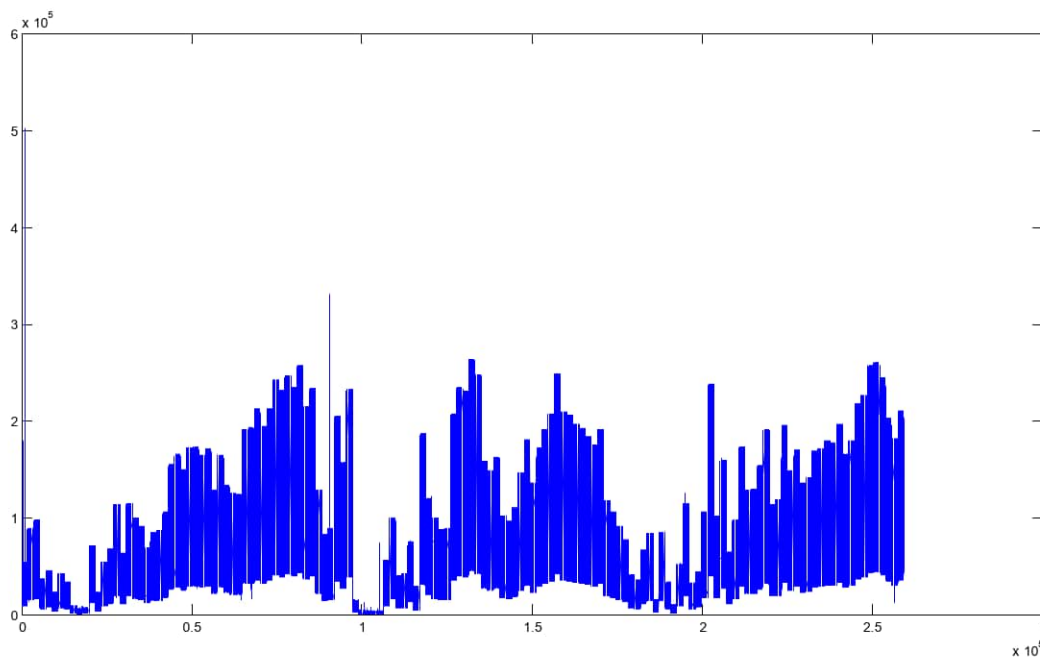


Рисунок 2.1 – Залежність розміру трафіку від часу

Аналізуючи візуально графік, наведений на рисунку 2.1 можна помітити, що Інтернет - трафік є значно нерівномірним процесом: є викиди досить сильною амплітуди, в той час як середнє значення трафіку - відносно мале. Описуючи таку поведінку, часто говорять, що даний процес підпорядковується одному із законів розподілу з "важкими хвостами" (типу Парето) або має "берстну" структуру (високу пачечність).

Для більш детального розгляду залежності розіб'ємо графік на три частини по 24 години.

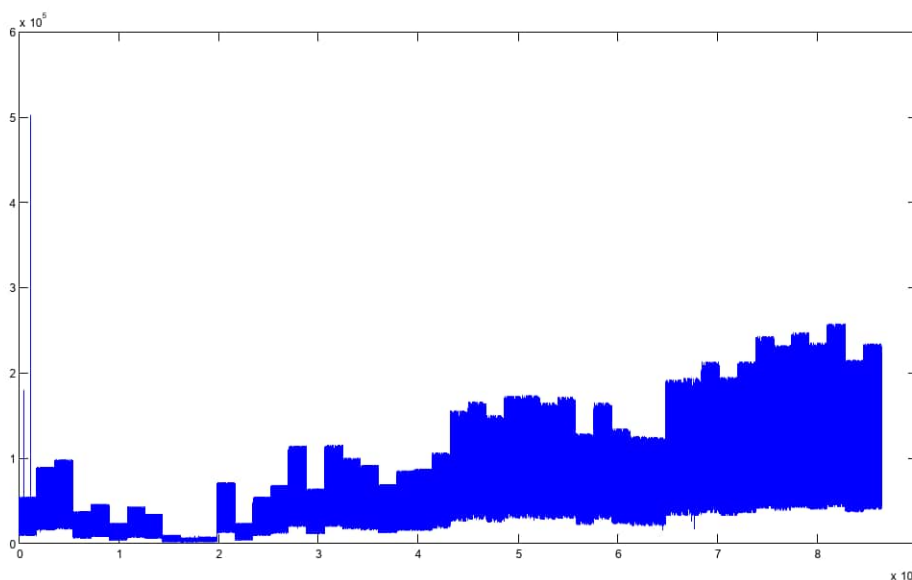


Рисунок 2.2 – Графік залежність розміру трафіку від часу розбитий на три під графіка, тривалість кожного складає 24 години

Проведемо агрегування трафіку по хвилині та отримаємо:

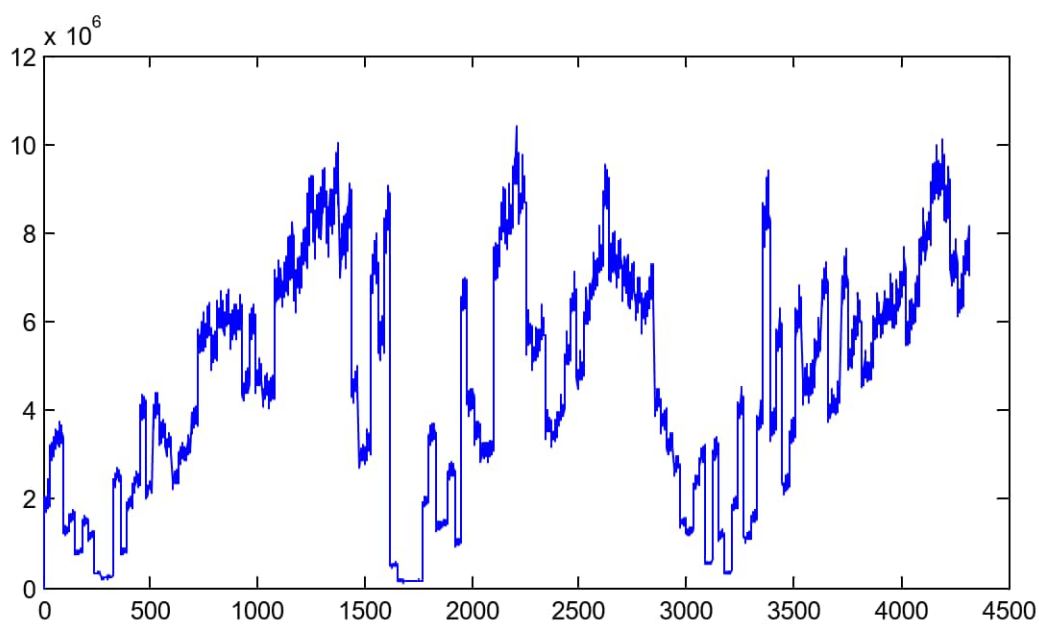


Рисунок 2.3 – Агрегація трафіку похвилинно

Після агрегування трафіку з графіка (Рисунок 2.3) видно, що присутні незначні гармонійні складові.

Побудуємо гістограму розподілу трафіку:

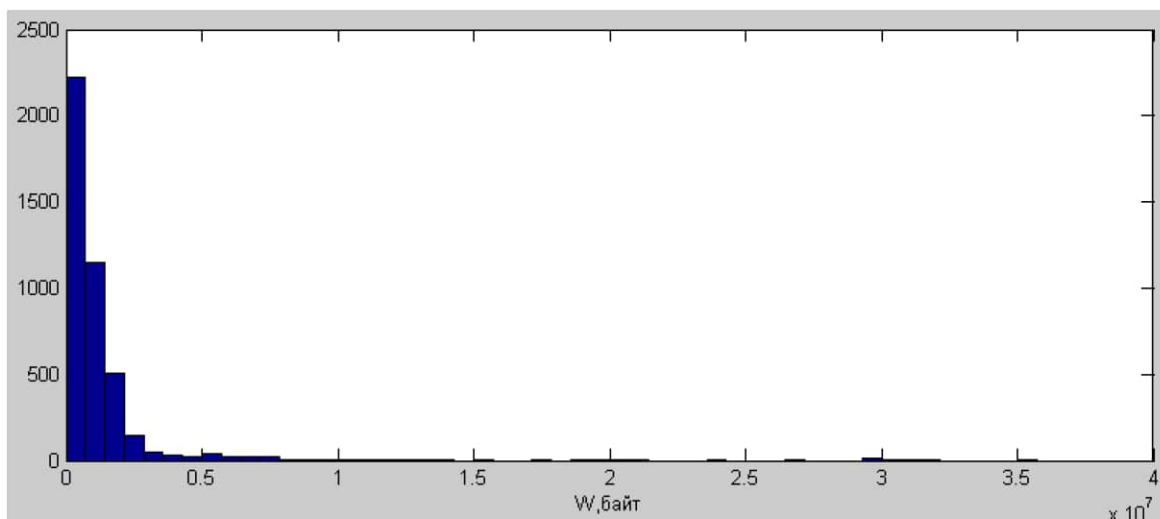


Рисунок 2.4 – Гістограма розподілу трафіку після похвилинного агрегування

З гістограми видно, що більшість трафіку має розмір від 0 до 2143510 байт.

Для більш детального аналізу розподілу трафіку по хвилині, побудуємо гістограму розподілу трафіку від 0 до 2143510 байт.

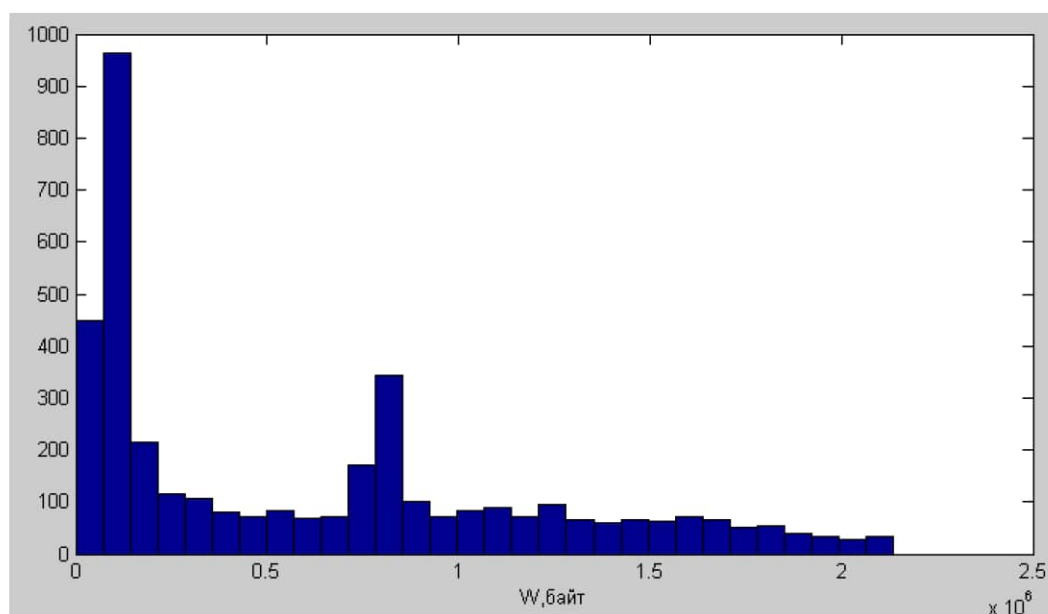


Рисунок 2.5 – Гістограма розподілу трафіку при агрегування похвилинно, де трафік враховувався від 0 до 2143510 байт

З гістограми видно, що більшість трафіку потрапляє в інтервал від 71450 до 142 900 байт.

Далі проведемо агрегування трафіку по півгодини.

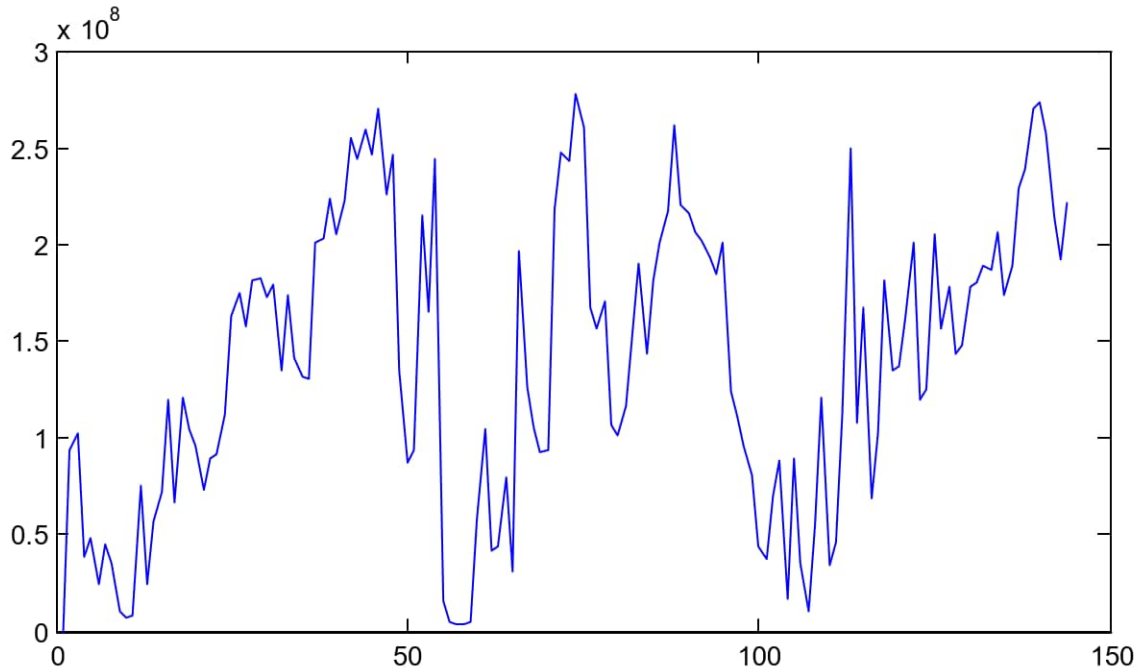


Рисунок 2.6 – Графік залежності розміру трафіку від часу після погодинного агрегування

З візуального аналізу графіка видно, що активність користування Інтернетом починається о 8 годині і закінчується в межах від 20 до 22 годин вечора.

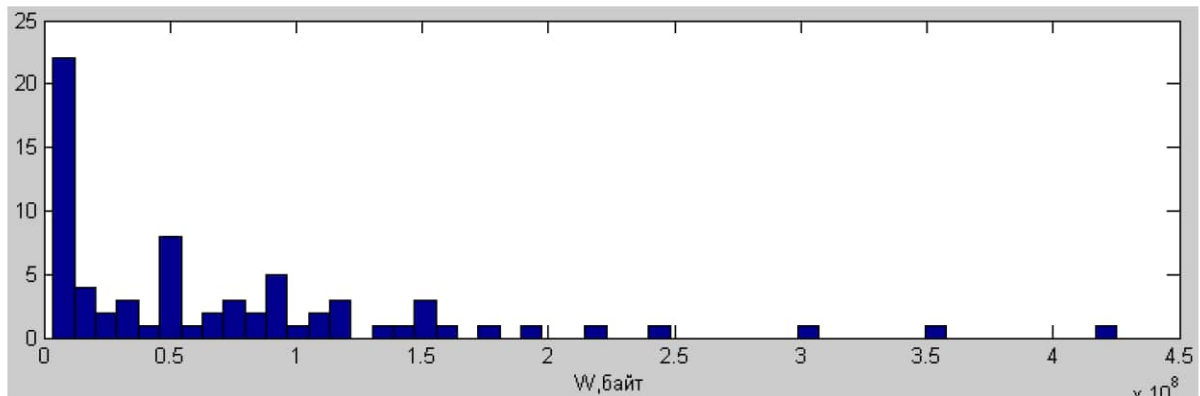


Рисунок 2.7 – Гістограма розподілу трафіку при агрегуванні по годині

З гістограми видно, що більшість переданого трафіку має розмір від 3750670 до 161 508 400 байт.

Для наочності розподілу трафіку при агрегуванні по години, побудуємо гістограму розподілу трафіку від 3750670 до 161 508 400 байт.

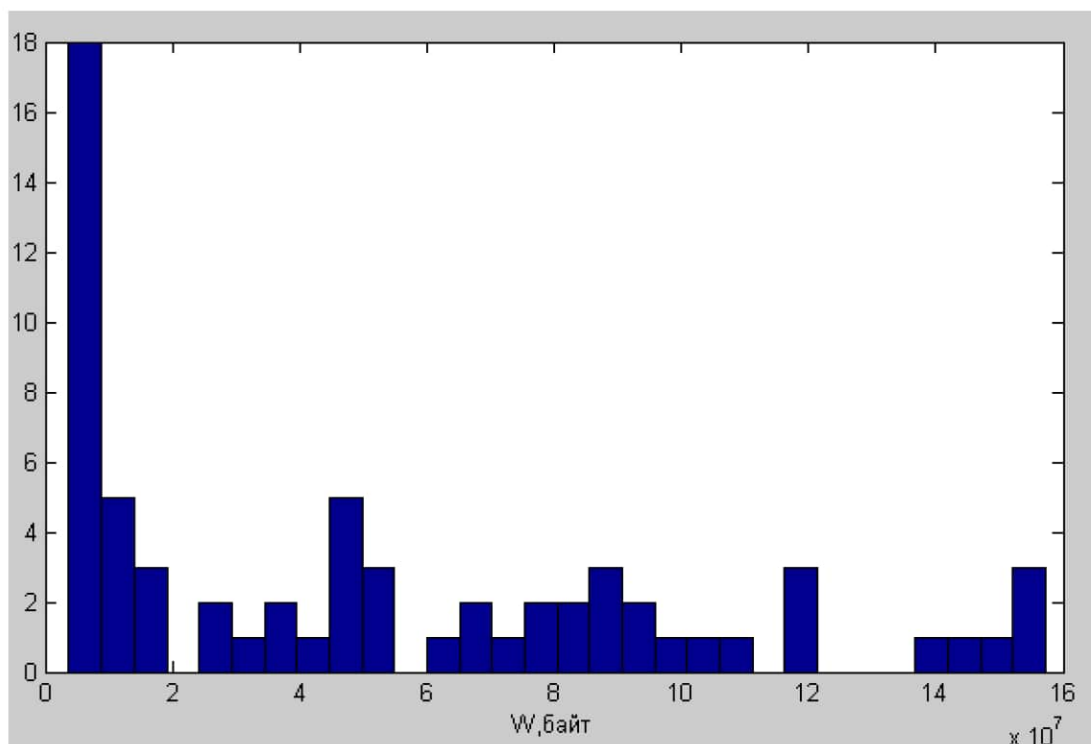


Рисунок 2.8 – Гістограма розподілу трафіку при агрегації по півгодини, де трафік враховувався від 3750670 до 161 508 400 байт.

З гістограми видно, що більшість переданого трафіку має розмір від 3750670 до 5383620 байт.

2.2 Розрахунок фрактальної розмірності

Для визначення більш підходящого метода розрахунку фрактальної розмірності, розрахуємо спочатку фрактальну розмірність Броунівського руху різними методами, знаючи теоретичну розмірність.

Згенеруємо Броунівський рух, з коефіцієнтом Хьорста $H=0.5$, та отримаємо наступний ряд:

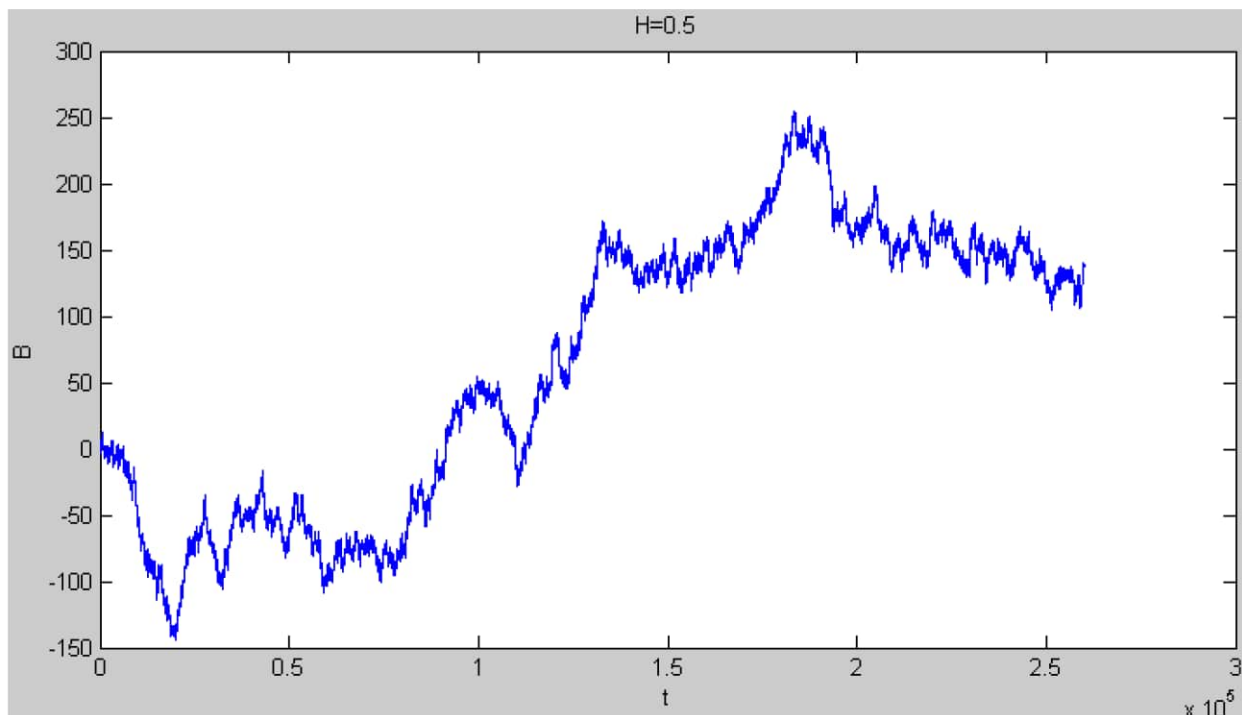


Рисунок 2.9 – Броунівський рух

Оскільки $H=0.5$, можемо знайти фрактальну розмірність $D=1.5$. Далі отримаємо наступні результати тестування:

Таблиця 2.1 – Похибки розрахунку фрактальної розмірності за різними методами

Метод розрахунку	Оцінка	Відхилення від теоретичного значення		Похибка метода
		Абсолютне	Відносне, відсотки	
Метод R/S - аналізу	$D=1.4914$	$\Delta=0.0086$	0.5733	8.9252
Box-counting	$D=1.3328$	$\Delta=0.1672$	11.1466	13.2741
Метод розкладання в ряд Фур'є	$D=1.6177$	$\Delta=0.1177$	7.8466	27.7369
Метод агрегування	$D=1.9098$	$\Delta=0.4098$	27.32	0.6021

З результатів тестування видно, що для подібного виду сигналу актуально використовувати метод R/S - аналізу.

Далі будемо розраховувати фрактальну розмірність трафіку реалізації різними методами.

2.2.1 Метод R/S - аналізу

У слідстві розрахунку показника Хьорста для трафіку розробленим методом на основі пункту 1.4.1 в даній роботі отримали:

$$H = 0.321$$



Рисунок 2.10 – Блок схема визначення показника Хьорста

Показник Хьорста знаходиться в межах $0 < H < 0.5$, це говорить про те, що мережевий трафік відноситься до класу антиперсистентних процесів.

Знаючи показник Хьорста можемо розрахувати фрактальну розмірність по формулі (1.45), та отримаємо:

$$D = 2 - 0.321 = 1.679.$$

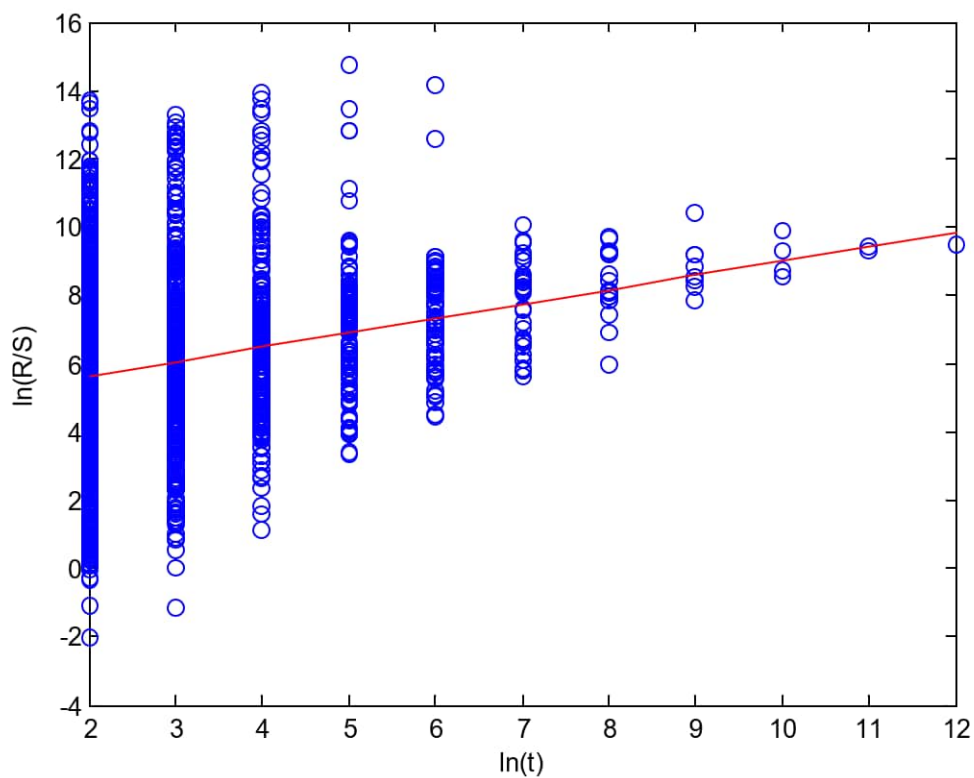


Рисунок 2.11 – Залежність $\ln(R/S)$ від $\ln(t)$

2.2.2 Метод BOX COUNTING

При розрахунку фрактальної розмірності розробленим методом на основі пункту 1.4.2 в даній роботі отримали наступний графік:

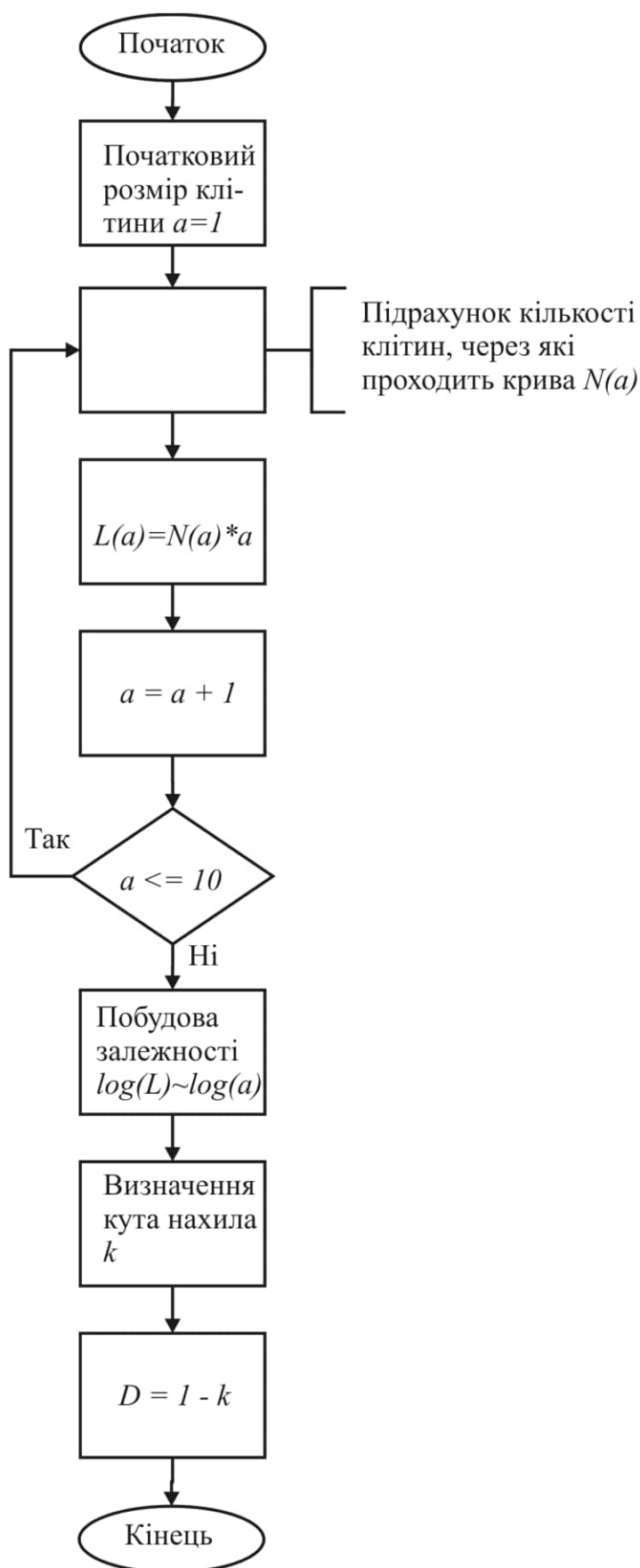


Рисунок 2.12 - Блок схема реалізації метода BOX COUNTING

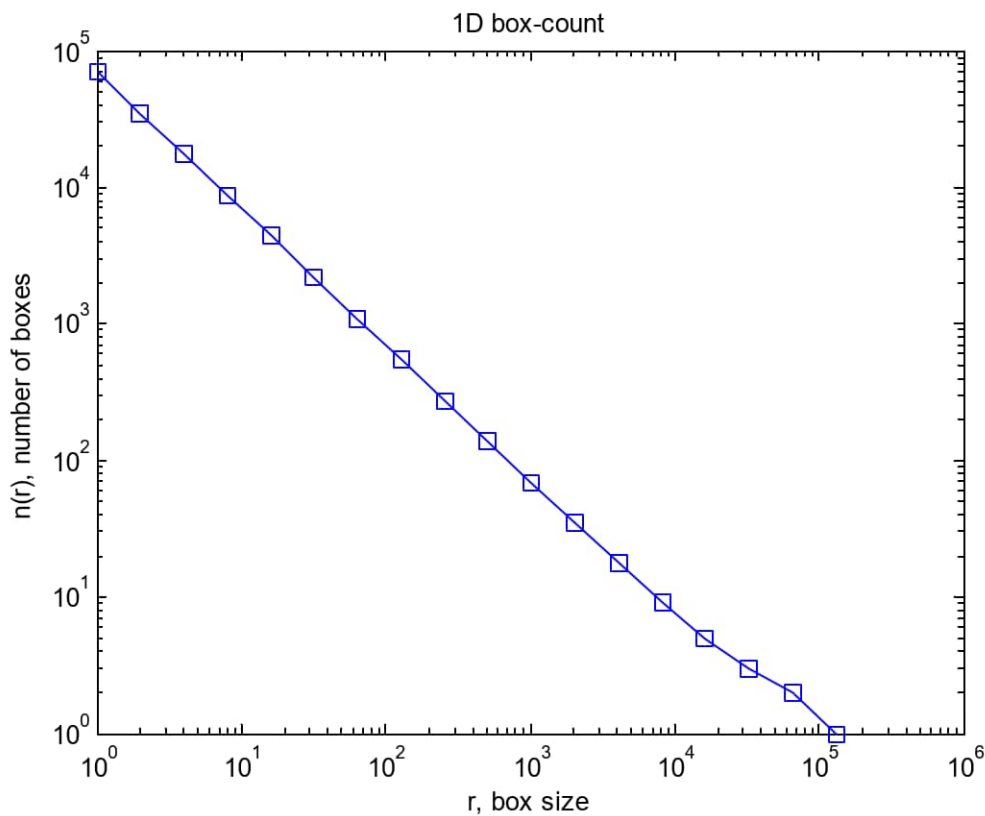


Рисунок 2.13 – Графік залежності $N(r)$ від r в логарифмічному масштабі
В результаті розрахунку отримали: $D= 1.917$

2.2.3 Метод розкладання в ряд Фур'є

При розрахунку фрактальної розмірності розробленим методом на основі пункту 1.4.3 в даній роботі отримали наступний графік:

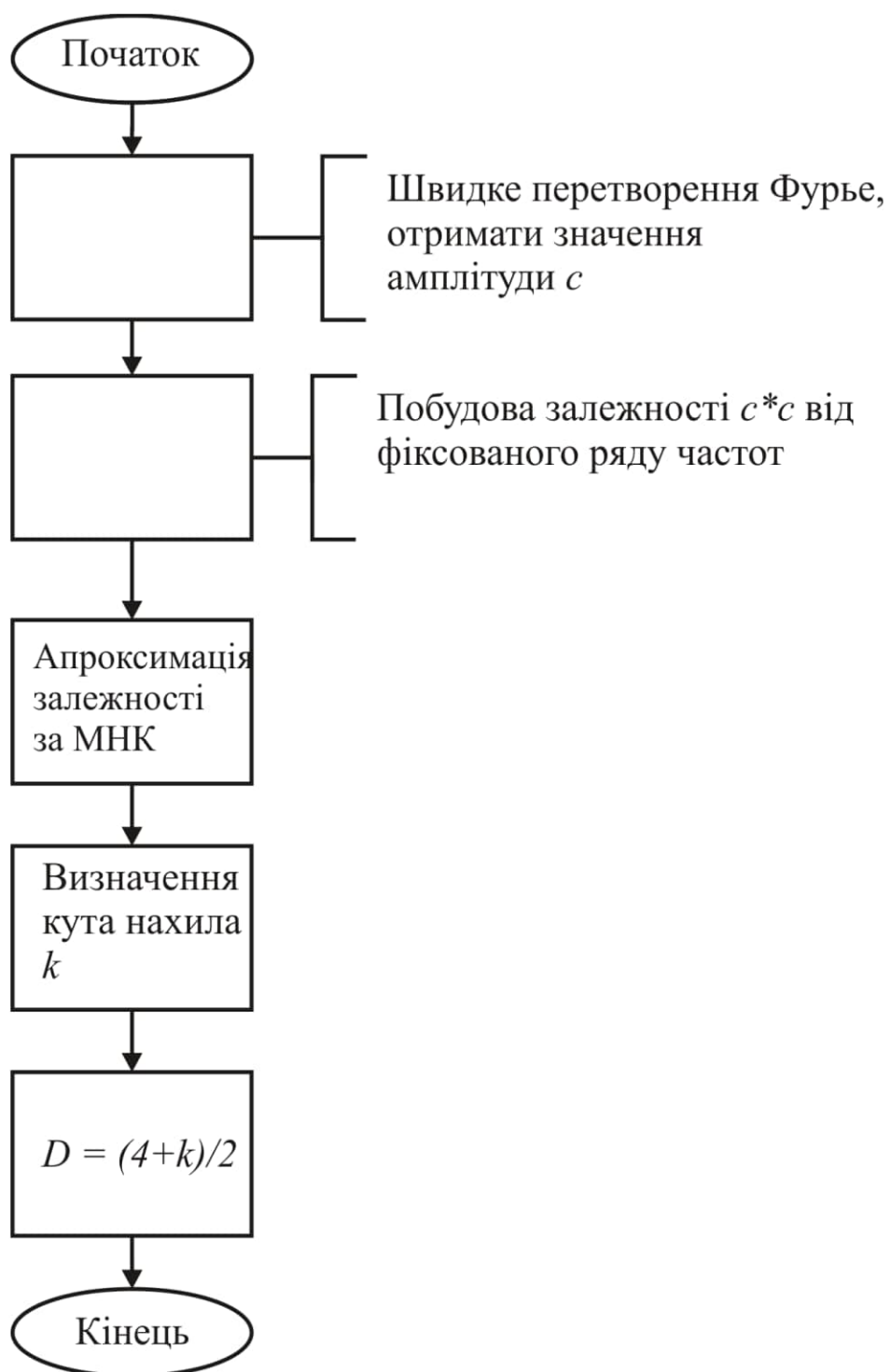


Рисунок 2.14 – Блок схема реалізації метода розкладання в ряд Фур'є

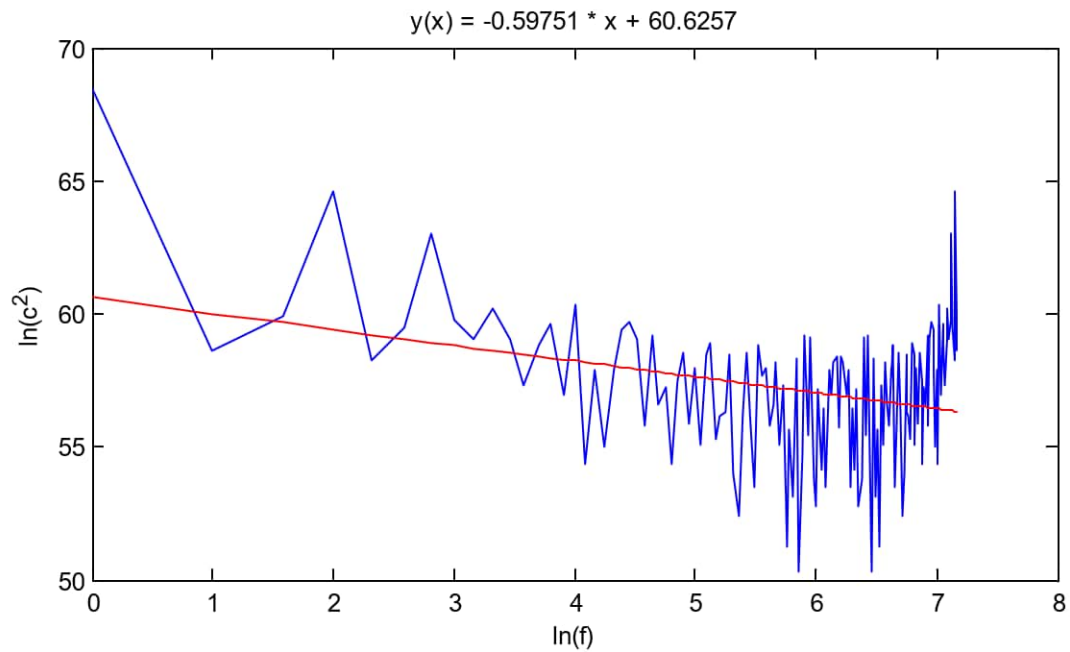


Рисунок 2.15 – Спектр потужності $c^2(f)$ в подвійному логарифмічному масштабі, отриманий в результаті розкладання в ряд Фур'є

В результаті розрахунку отримали: $D=1.9246$.

2.2.4 Метод агрегування

При розрахунку фрактальної розмірності розробленим методом на основі пункту 1.4.4 в даній роботі отримали наступний графік:

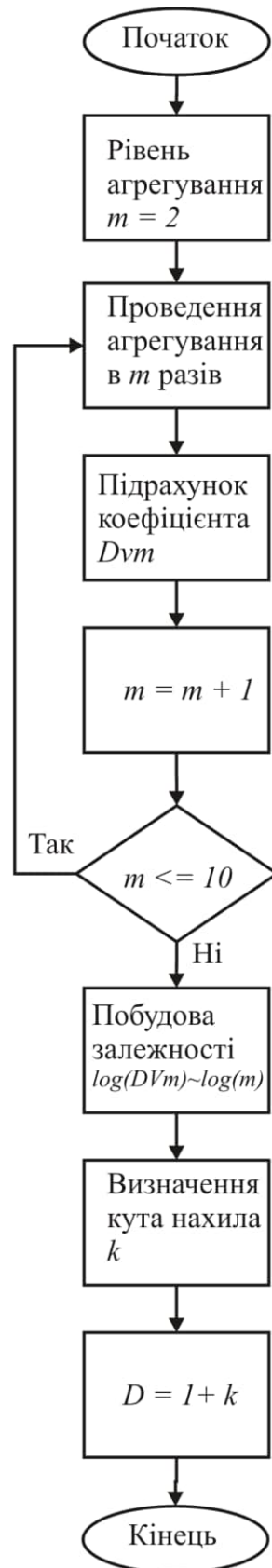


Рисунок 2.16 – Блок схема реалізації метода агрегування

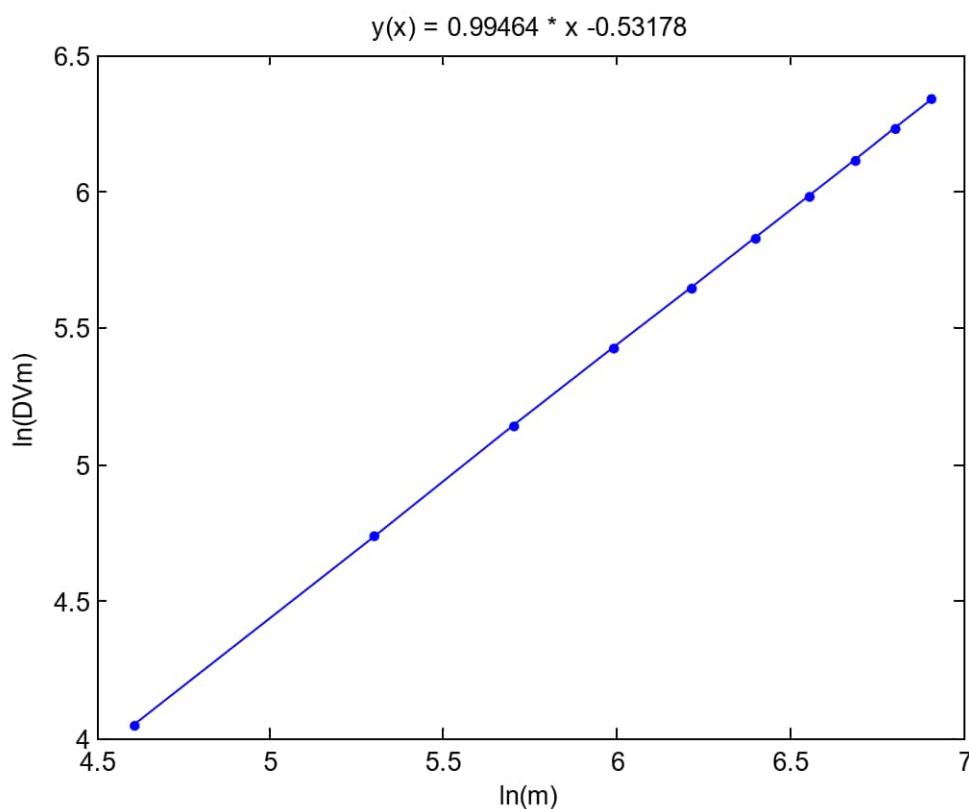


Рисунок 2.17 – Графік залежності DV_m від m в логарифмічному масштабі
В результаті розрахунку отримали: $D= 1.9225$

Таблиця 2.2 – Результати розрахунку фрактальної розмірності за різними методами

Метод розрахунку	Оцінка
Box-counting	$D=1.917$
Метод розкладання в ряд Фур'є	$D=1.9246$
Метод агрегування	$D=1.9225$

2.3 Розробка графічного інтерфейсу

Програмне забезпечення для розрахунку фрактальної розмірності та коефіцієнта Хьорста розроблено з використанням модульної архітектури, що забезпечує чітке розділення відповідальності, легкість підтримки та розширення. Системно програма поділена на два основні функціональні компоненти.

Перший – це Модуль обчислень (`fractal_calculations.py`), який містить всі математичні функції для реалізації чотирьох вибраних методів: коефіцієнта Хьорста (Rescaled Range - R/S аналіз), фрактальної розмірності методом Вох-Counting, методом розкладання в ряд Фур'є та методом Агрегування. Кожна функція цього модуля приймає вхідні числові дані (часовий ряд або 2D-матрицю) і повертає розраховане значення та об'єкт `matplotlib.figure.Figure` для подальшої візуалізації. Таке розділення дозволяє перевіряти та використовувати обчислювальні функції незалежно від графічного інтерфейсу, забезпечуючи високу модульність та можливість подальшого розширення алгоритмічної бази без необхідності модифікації інтерфейсної частини.

Другий компонент – це Модуль графічного інтерфейсу користувача (рис.2.18) (`main_tkinter.py`), який відповідає за створення візуального інтерфейсу, взаємодію з користувачем та відображення результатів аналізу. Цей модуль побудований на базі стандартної для Python бібліотеки Tkinter, яка надає крос-платформний набір віджетів для створення десктопних застосунків. Для інтеграції візуалізацій, згенерованих математичним модулем, використано бібліотеку Matplotlib та її специфічний бекенд для Tkinter (`matplotlib.backends.backend_tkagg`).

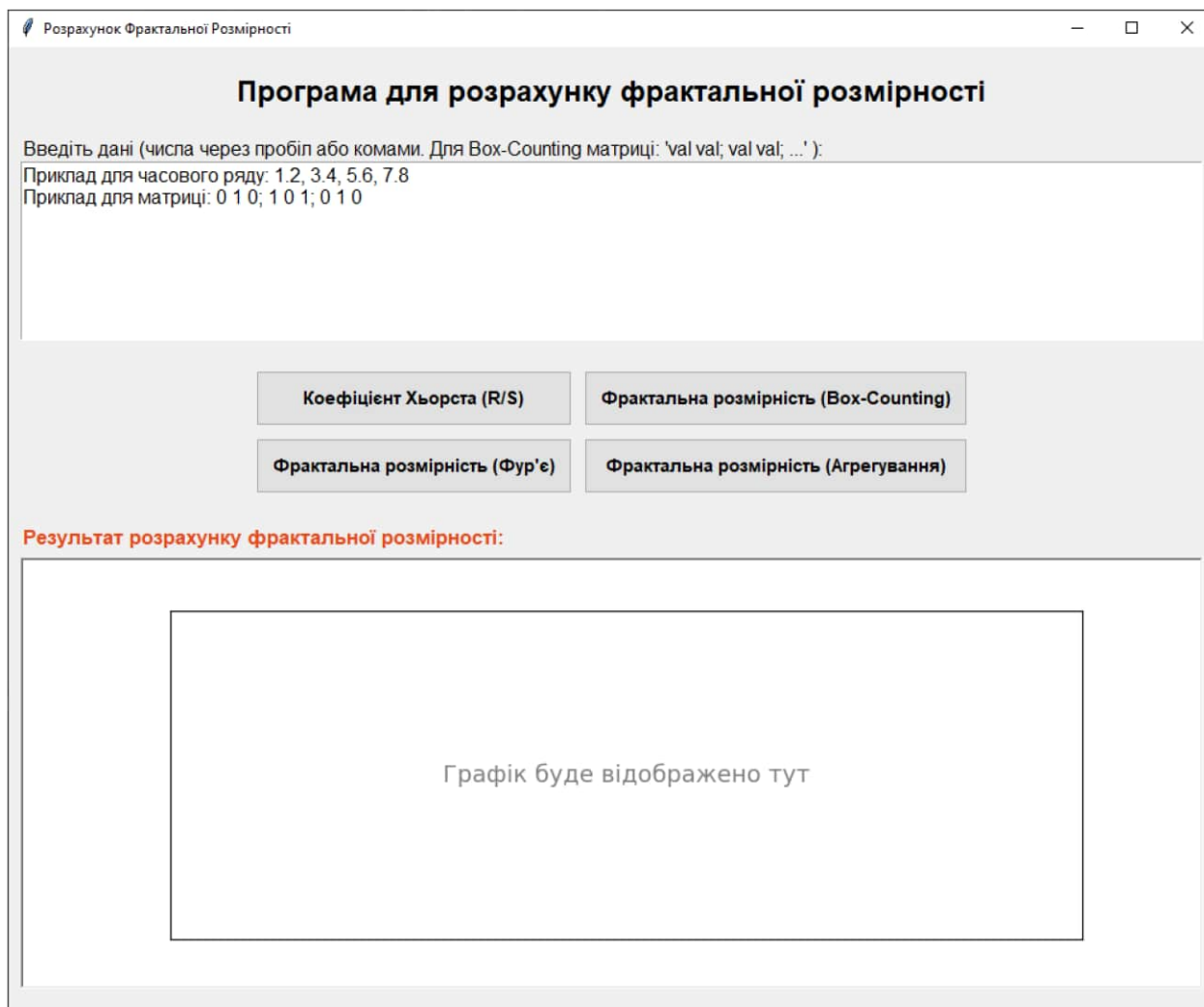


Рисунок 2.18 – Графічний інтерфейс

Процес створення графічного інтерфейсу включав інтеграцію ключових елементів для забезпечення функціональності та зручності користування. Головне вікно застосунку (tk.Tk) слугує основним контейнером, в якому розміщені всі інші елементи керування. Воно має встановлений заголовок "Розрахунок Фрактальної Розмірності" (рис.2.19) та визначені початкові розміри вікна для оптимального відображення. Для введення даних передбачено багаторядкове текстове поле (tk.Text), що дозволяє користувачеві вводити числові послідовності або матриці. Для полегшення роботи користувача у полі введення надано приклади форматів даних: числа, розділені пробілами або комами для часових рядів, та матриці, де рядки розділені символом ;, а числа в рядку – пробілами. Чотири кнопки (tk.Button), кожна з яких відповідає одному з методів

розрахунку, забезпечують вибір бажаної операції. Використання ttk (Themed Tkinter) надає кнопкам більш сучасний вигляд. Для відображення розрахованого числового результату відведено окрему мітку (ttk.Label). Ключовим елементом візуалізації є контейнер для графіків Matplotlib (ttk.Frame), в який динамічно вбудовуються згенеровані фігури за допомогою FigureCanvasTkAgg. Додатково інтегровано панель інструментів NavigationToolbar2Tk, що дозволяє користувачеві взаємодіяти з графіком: масштабувати, панорамувати та зберігати зображення.

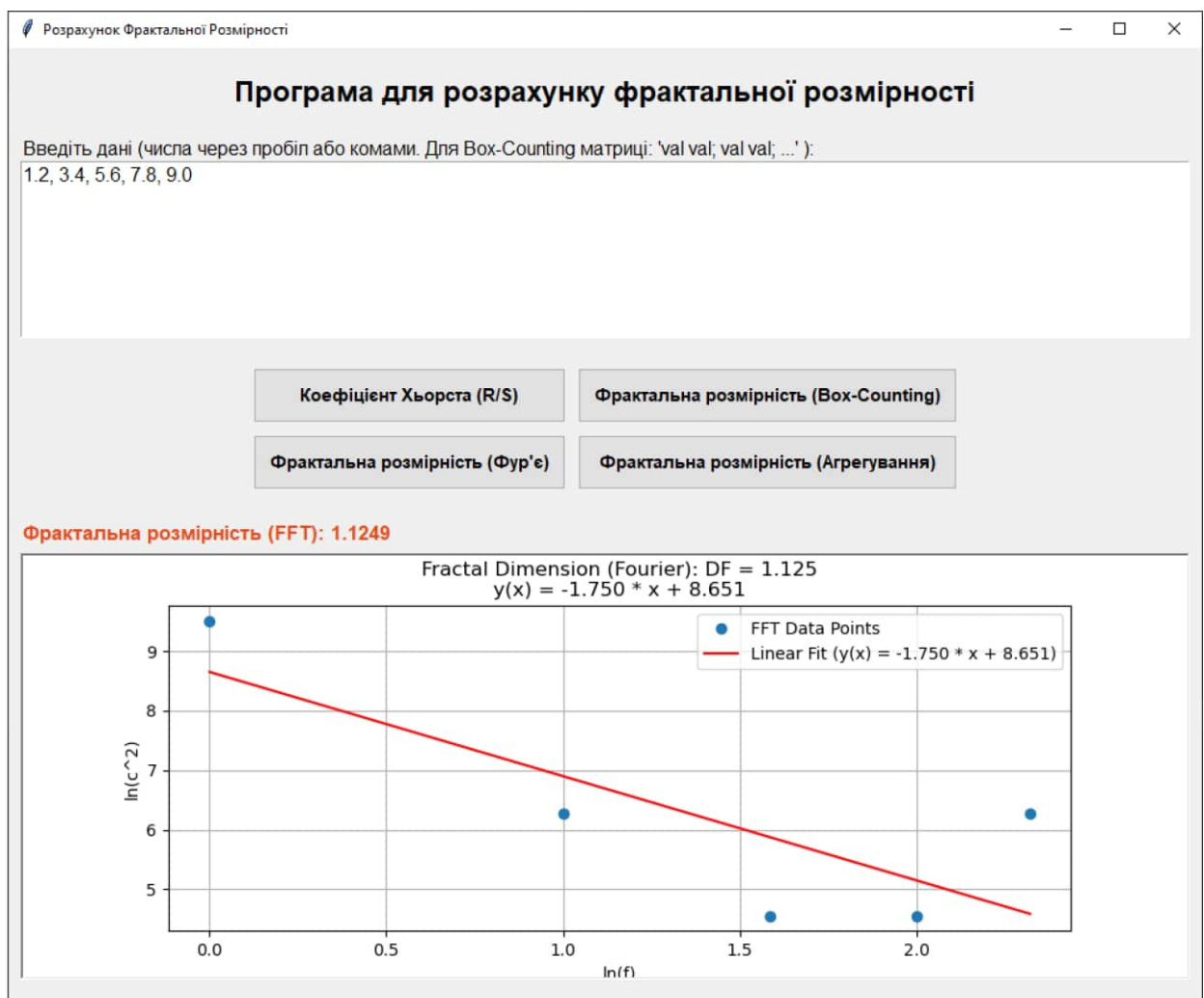


Рисунок 2.19 – Результат визначення фрактальної розмірності

ВИСНОВКИ

В кваліфікаційній випускній роботі було досліджено телетрафік бездротової мережі передачі даних за технологією CDMA. Візуальний аналіз графіків показав, що мережевий трафік є значно нерівномірним процесом, є викиди досить сильної амплітуди. Описуючи таку поведінку, часто говорять, що даний процес підпорядковується одному із законів розподілу з "важкими хвостами".

В роботі виконано R/S -аналіз телетрафіку. Значення коефіцієнту Хьорста ($H = 0.321$) вказує, що сигнал трафіку описує процес, що відноситься до класу антиперсистентних, тобто доволі часто змінює свій попередній напрямок. Цей факт пояснив досить складний характер сигналу, що ускладнює його аналіз традиційними методами. Була запропонована гіпотеза про фрактальні властивості телетрафіку. Її підтвердження було виконано шляхом встановлення значення фрактальної розмірності. Розрахунок відбувався трьома методами, які дали середнє значення $D = 1.91$. Похибка розрахунку 1.5%.

Встановлення факту самоподібності телетрафіку дозволяє більш ефективно зберігати дані трафіку, при необхідності стискаючи їх фрактальними алгоритмами.

Для розрахунку фрактальної розмірності та коефіцієнта Хьорста розроблено програмне забезпечення з використанням модульної архітектури, що забезпечує чітке розділення відповідальності, легкість підтримки та розширення.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Li L., Li Zh., Zhang Y., Chen Yudong. A Mixed-Fractal Traffic Flow Model Whose Hurst Exponent Appears Crossover [Електронний ресурс] // ResearchGate. – 2020. – Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/45854558_A_Mixed-Fractal_Model_for_Network_Traffic – Дата звернення: 20.05.2025.
2. Millán G. On the LRD of the Aggregated Traffic Flows in High-Speed Computer Networks [Електронний ресурс] // arXiv preprint. – 2021. – arXiv:2103.03981 – Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/2103.03981> – Дата звернення: 18.05.2025.
3. Algorithm to Calculate the Fractal Dimension and Numerical Integration of Fluctuating Continuous Functions [Електронний ресурс] // ResearchGate. – пп2024 (опубл. 7 міс. тому). – Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/353391390_Algorithm_to_calculate_the_fractal_dimension_and_numerical_integration_of_fluctuating_continuous_functions – Дата звернення: 22.05.2025.
4. Kantelhardt J. W., Zschiegner S. A., Koscielny-Bunde E. et al. Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Nonstationary Time Series // Physica A. – 2002. – Vol. 316. – P. 87–114. (Класичний, але широко застосовується і в сучасних дослідженнях)
5. Park K., Willinger W. (Eds.). Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation. – New York: Wiley-Interscience, 2000. – 560 p.
6. Abry P., Veitch D., Flandrin P. Long-Range Dependence: Revisiting Aggregation with Wavelets // Journal of Time Series Analysis. – 2000. – Vol. 24, No. 4. – P. 353–375.
7. Erramilli A., Narayan O., Willinger W. Experimental Queueing Analysis with Long-Range Dependent Packet Traffic // IEEE/ACM Transactions on Networking. – 1996. – Vol. 4, No. 2. – P. 209–223.

8. Daradkeh E. Y. M., Kirichenko L., Radivilova T. Development of QoS Methods in Information Networks with Fractal Traffic [Электронный ресурс] // arXiv preprint. – 2019. – Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/1904.05202> – Дата звернення: 21.05.2025.
9. Wikipedia contributors. Self-Similarity of Network Data Analysis [Электронный ресурс] // Wikipedia. – 2021. – Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Self-Similarity_of_Network_Data_Analysis – Дата звернення: 19.05.2025.
10. Chen Y., Tang Yuqing. Multifractal Scaling Analyses of Urban Street Network Structure... [Электронный ресурс] // arXiv preprint. – 2020. – arXiv:2004.05545 – Дата звернення: 17.05.2025.

ДОДАТОК А

```

Main.py
import tkinter as tk
from tkinter import ttk, messagebox
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.backends.backend_tkagg import FigureCanvasTkAgg,
NavigationToolbar2Tk

# Імпортуємо функції розрахунку з окремого файлу
from fractal_calculations import calculate_hurst, calculate_box_counting_dim, \
    calculate_fft_fractal_dim, calculate_aggregation_fractal_dim

class FractalDimensionApp:
    def __init__(self, root):
        self.root = root
        self.root.title("Розрахунок Фрактальної Розмірності")
        self.root.geometry("1000x800") # Початковий розмір вікна

        # Створення головного фрейму
        main_frame = ttk.Frame(root, padding="10")
        main_frame.pack(fill=tk.BOTH, expand=True)

        # 1. Заголовок програми
        title_label = ttk.Label(main_frame, text="Програма для розрахунку
фрактальної розмірності",
                               font=("Arial", 18, "bold"))
        title_label.pack(pady=10)

        # 2. Поле для введення даних
        input_label = ttk.Label(main_frame,
                               text="Введіть дані (числа через пробіл або комами. Для
Box-Counting матриці: 'val val; val val; ...'):",
                               font=("Arial", 12))
        input_label.pack(pady=(10, 0), anchor=tk.W)

        self.input_data_text = tk.Text(main_frame, height=8, width=70,
font=("Arial", 12))
        self.input_data_text.pack(pady=(0, 10), fill=tk.X)

```

```

self.input_data_text.insert(tk.END,
                             "Приклад для часового ряду: 1.2, 3.4, 5.6,
7.8\nПриклад для матриці: 0 1 0; 1 0 1; 0 1 0")

# 3. Кнопки для вибору методу розрахунку
button_frame = ttk.Frame(main_frame)
button_frame.pack(pady=10)

style = ttk.Style()
style.configure("TButton", font=("Arial", 11, "bold"), padding=10)
style.map("TButton", background=[('active', '#e0e0e0')]) # Hover effect

btn_hurst = ttk.Button(button_frame, text="Коефіцієнт Хьорста (R/S)",
command=self.calculate_hurst_exponent)
btn_hurst.grid(row=0, column=0, padx=5, pady=5, sticky="ew")

btn_box = ttk.Button(button_frame, text="Фрактальна розмірність (Box-
Counting)",
                    command=self.calculate_box_counting)
btn_box.grid(row=0, column=1, padx=5, pady=5, sticky="ew")

btn_fft = ttk.Button(button_frame, text="Фрактальна розмірність (Фур'є)",
                    command=self.calculate_fft_fractal_dimension)
btn_fft.grid(row=1, column=0, padx=5, pady=5, sticky="ew")

btn_agg = ttk.Button(button_frame, text="Фрактальна розмірність
(Агрегування)",
                    command=self.calculate_aggregation_fractal_dimension)
btn_agg.grid(row=1, column=1, padx=5, pady=5, sticky="ew")

# 4. Поле для виведення результату
self.result_label = ttk.Label(main_frame, text="Результат розрахунку
фрактальної розмірності:",
                              font=("Arial", 13, "bold"), foreground="#E64A19")
self.result_label.pack(pady=(10, 5), anchor=tk.W)

# 5. Контейнер для графіків Matplotlib
self.plot_frame = ttk.Frame(main_frame, relief=tk.SUNKEN,
borderwidth=2)
self.plot_frame.pack(fill=tk.BOTH, expand=True, pady=(0, 10))

# Початкове порожнє місце для графіку
self.fig = plt.Figure(figsize=(8, 6), dpi=100)
self.canvas = FigureCanvasTkAgg(self.fig, master=self.plot_frame)

```

```

self.canvas_widget = self.canvas.get_tk_widget()
self.canvas_widget.pack(side=tk.TOP, fill=tk.BOTH, expand=True)

self.toolbar = NavigationToolbar2Tk(self.canvas, self.plot_frame)
self.toolbar.update()
self.canvas_widget.pack(side=tk.TOP, fill=tk.BOTH, expand=True)

self.clear_plot() # Очистити графік при запуску

def clear_plot(self):
    """Очищає поточний графік."""
    self.fig.clear()
    ax = self.fig.add_subplot(111)
    ax.text(0.5, 0.5, "Графік буде відображено тут",
horizontalalignment='center', verticalalignment='center',
          transform=ax.transAxes, fontsize=14, color='gray')
    ax.set_xticks([])
    ax.set_yticks([])
    self.canvas.draw()

def _display_result(self, result_text, fig=None):
    """Допоміжна функція для відображення результату та графіка."""
    self.result_label.config(text=result_text)

    # Очистити попередній графік
    for widget in self.plot_frame.wininfo_children():
        if isinstance(widget, tk.Canvas) or isinstance(widget,
NavigationToolbar2Tk):
            widget.destroy()

    if fig:
        self.canvas = FigureCanvasTkAgg(fig, master=self.plot_frame)
        self.canvas_widget = self.canvas.get_tk_widget()
        self.canvas_widget.pack(side=tk.TOP, fill=tk.BOTH, expand=True)

        self.toolbar = NavigationToolbar2Tk(self.canvas, self.plot_frame)
        self.toolbar.update()
        self.canvas_widget.pack(side=tk.TOP, fill=tk.BOTH, expand=True)
        self.canvas.draw()
        plt.close(fig) # Закриваємо фігуру Matplotlib, щоб уникнути витоків
пам'яті
    else:
        self.clear_plot() # Якщо графік не надано, відображаємо порожній
напис

```

```

def _parse_input_data_1d(self):
    """Парсить вхідні дані для 1D масивів."""
    data_str = self.input_data_text.get("1.0", tk.END).strip()
    if not data_str or data_str.startswith("Приклад для"): # Очистити
приклад тексту
        raise ValueError("Будь ласка, введіть дані.")

    # Замінюємо коми на пробіли, потім розділяємо за пробілами
    cleaned_str = data_str.replace(',', ' ').strip()
    if not cleaned_str:
        raise ValueError("Введені дані порожні або містять лише
розділювачі.")

    data_list = [float(x.strip()) for x in cleaned_str.split() if x.strip()]
    if not data_list:
        raise ValueError("Не вдалося розпізнати числа у введених даних.")
    return np.array(data_list)

def _parse_input_data_2d(self):
    """Парсить вхідні дані для 2D матриць (Box-Counting)."""
    data_str = self.input_data_text.get("1.0", tk.END).strip()
    if not data_str or data_str.startswith("Приклад для"): # Очистити
приклад тексту
        raise ValueError("Будь ласка, введіть дані.")

    rows_str = [row.strip() for row in data_str.split(';') if row.strip()]
    if not rows_str:
        raise ValueError("Некоректний формат матриці. Використовуйте 'val
val; val val; ...'.")

    rows_data = []
    for r_str in rows_str:
        try:
            row_values = list(map(float, r_str.split()))
            if not row_values: # Рядок може бути порожнім після split()
                raise ValueError("Порожній рядок у матриці.")
            rows_data.append(row_values)
        except ValueError:
            raise ValueError(f"Некоректні дані в рядку матриці: '{r_str}'.
Перевірте числа.")

    if not rows_data:
        raise ValueError("Матриця не містить даних.")

```

```

# Перевірка на рівну кількість стовпців
num_cols = len(rows_data[0])
if not all(len(row) == num_cols for row in rows_data):
    raise ValueError("Нерівна кількість стовпців у матриці.")

return np.array(rows_data)

def calculate_hurst_exponent(self):
    try:
        data_array = self._parse_input_data_1d()
        hurst_h, fig = calculate_hurst(data_array)
        if np.isnan(hurst_h):
            self._display_result(f"Коефіцієнт Хьорста (H): Не визначено.", fig)
        else:
            self._display_result(f"Коефіцієнт Хьорста (H): {hurst_h:.4f}", fig)
    except ValueError as e:
        messagebox.showerror("Помилка введення даних", str(e))
        self._display_result("Результат: Помилка введення даних.")
        self.clear_plot()
    except Exception as e:
        messagebox.showerror("Помилка розрахунку", f"Виникла помилка:
{e}")

        self._display_result("Результат: Помилка розрахунку.")
        self.clear_plot()

def calculate_box_counting(self):
    try:
        data_matrix = self._parse_input_data_2d()
        box_dim, fig = calculate_box_counting_dim(data_matrix)
        if np.isnan(box_dim):
            self._display_result(f"Фрактальна розмірність (Box-Counting): Не
визначено.", fig)
        else:
            self._display_result(f"Фрактальна розмірність (Box-Counting):
{box_dim:.4f}", fig)
    except ValueError as e:
        messagebox.showerror("Помилка введення даних", str(e))
        self._display_result("Результат: Помилка введення даних.")
        self.clear_plot()
    except Exception as e:
        messagebox.showerror("Помилка розрахунку", f"Виникла помилка:
{e}")

        self._display_result("Результат: Помилка розрахунку.")

```

```

self.clear_plot()

def calculate_fft_fractal_dimension(self):
    try:
        data_array = self._parse_input_data_1d()
        fft_dim, fig = calculate_fft_fractal_dim(data_array)
        if np.isnan(fft_dim):
            self._display_result(f"Фрактальна розмірність (FFT): Не визначено.", fig)
        else:
            self._display_result(f"Фрактальна розмірність (FFT): {fft_dim:.4f}", fig)
    except ValueError as e:
        messagebox.showerror("Помилка введення даних", str(e))
        self._display_result("Результат: Помилка введення даних.")
        self.clear_plot()
    except Exception as e:
        messagebox.showerror("Помилка розрахунку", f"Виникла помилка: {e}")

        self._display_result("Результат: Помилка розрахунку.")
        self.clear_plot()

def calculate_aggregation_fractal_dimension(self):
    try:
        data_array = self._parse_input_data_1d()
        agg_dim, fig = calculate_aggregation_fractal_dim(data_array)
        if np.isnan(agg_dim):
            self._display_result(f"Фрактальна розмірність (Агрегування): Не визначено.", fig)
        else:
            self._display_result(f"Фрактальна розмірність (Агрегування): {agg_dim:.4f}", fig)
    except ValueError as e:
        messagebox.showerror("Помилка введення даних", str(e))
        self._display_result("Результат: Помилка введення даних.")
        self.clear_plot()
    except Exception as e:
        messagebox.showerror("Помилка розрахунку", f"Виникла помилка: {e}")

        self._display_result("Результат: Помилка розрахунку.")
        self.clear_plot()

if __name__ == "__main__":

```

```
plt.close('all') # Закриваємо всі попередні фігури Matplotlib  
root = tk.Tk()  
app = FractalDimensionApp(root)  
root.mainloop()
```