

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ  
Кафедра системного аналізу та управління

Л.С. Коряшкіна, В.М. Горєв, К.С. Хабарлак

**МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ**  
**Конспект лекцій**  
для здобувачів ступеня бакалавра  
спеціальності  
F4 Системний аналіз та наука про дані

Дніпро  
НТУ «ДП»  
2025

**Математичний** аналіз [Електронний ресурс]: конспект лекцій для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності F4 Системний аналіз та наука про дані / уклад.: Л.С. Коряшкіна, В.М. Горєв, К.С. Хабарлак ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2025. – 220 с.

Укладачі:

Л.С. Коряшкіна, д-р техн. наук, доц.;

В.М. Горєв, канд. фіз.-мат. наук, доц.;

К.С. Хабарлак, д-р філософії, доц.

Затверджено науково-методичною комісією зі спеціальності F4 Системний аналіз та наука про дані (протокол № 7 від 28.10.2025) за поданням кафедри системного аналізу та управління (протокол № 13 від 28.10.2025).

Наведено матеріал лекційних занять відповідно до освітньо-професійних програм підготовки бакалаврів зі спеціальності F4 Системний аналіз та наука про дані.

Орієнтовано на активізацію навчальної діяльності та закріплення практичних навичок у засвоєнні дисципліни «Математичний аналіз» здобувачів ступеня бакалавра спеціальності F4 Системний аналіз та наука про дані.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри системного аналізу та управління Т.А. Желдак, канд. техн. наук, доц.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
РОЗДІЛ I. БАЗОВІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ .....	9
Лекція 1. Елементи теорії множин.....	9
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 1 .....	14
Лекція 2. Нескінченно великі та нескінченно малі послідовності. Основні теореми про границі. Монотонні послідовності.....	15
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 2 .....	19
Лекція 3. Поняття функції. Елементарні функції. Обмежені зверху (знизу) функції.....	20
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 3 .....	25
Лекція 4. Важливі границі. Поняття нескінченно малих і нескінченно великих функцій. Еквівалентні нескінченно малі функції. Розкриття невизначеностей .....	25
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 4 .....	29
Лекція 5. Неперервність функції в точці. Точки розриву. Властивості неперервних функцій. Рівномірна неперервність. Теорема Кантора .....	30
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 5 .....	35
РОЗДІЛ II. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.....	36
Лекція 6. Поняття похідної та диференціалу функції в точці .....	36
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 6 .....	38
Лекція 7. Односторонні похідні функції в точці. Правила обчислення похідних. Таблиця похідних елементарних функцій. Похідна оберненої функції.....	38
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 7 .....	43
Лекція 8. Похідна складної функції, функції, заданої неявно. Інваріантність форми першого диференціалу функції однієї змінної. Формула Лейбніца .....	44
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 8 .....	47
Лекція 9. Основні теореми диференціального числення: теореми Ролля, Лагранжа, Коші. Правило Лопітала.....	48
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 9 .....	52
Лекції 10. Формула Тейлора. Подання деяких функцій формулами Маклорена. Застосування формули Маклорена до наближених обчислень .....	52
Питання та завдання для самоконтролю до лекцій 10 .....	60
Лекція 11. Метод виділення головної частини. Екстремум функції однієї змінної. Друга достатня умова існування екстремуму .....	60
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 11 .....	65

Лекція 12. Точки перегину графіка функції. Асимптоти графіка функції. Схема повного дослідження функції.....	65
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 12 .....	70
<b>РОЗДІЛ III. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.....</b>	<b>71</b>
Лекція 13. Невизначений інтеграл. Основні правила інтегрування .....	71
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 13 .....	74
Лекції 14. Інтегрування раціональних функцій.....	75
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 14 .....	80
Лекції 15. Інтегрування тригонометричних функцій.....	81
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 15 .....	83
Лекція 16. Інтегрування дробово-лінійних ірраціональностей. Інтегрування квадратичних ірраціональностей. Інтегрування диференціального біному .....	84
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 16 .....	87
Лекція 17. Визначений інтеграл за Ріманом.....	87
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 17 .....	91
Лекція 18. Властивості визначеного інтеграла. Теорема про середнє .....	91
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 18 .....	95
Лекція 19. Заміна змінних під знаком визначеного інтеграла. Інтегрування визначених інтегралів частинами. Невласні інтеграли I-го та II-го роду .....	95
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 19 .....	100
Лекція 20. Геометричні застосування визначеного інтеграла .....	101
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 20 .....	105
Лекція 21. Геометричні застосування визначеного інтегралу: довжина дуги кривої, площа поверхні обертання .....	106
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 21 .....	110
Лекція 22. Застосування визначеного інтеграла до задач фізики .....	110
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 22 .....	113
Лекція 23. Сила тиску на плоску пластину. Задача про час витікання рідини з посудини з отвором .....	114
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 23 .....	116
<b>РОЗДІЛ IV. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ.....</b>	<b>117</b>
Лекція 24. Поняття функції декількох змінних. Область визначення, область значень .....	117
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 24 .....	120
Лекція 25. Границя функції декількох змінних. Повторні граничні значення. Неперервність ФДЗ. Частинні похідні ФДЗ .....	121
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 25 .....	124

Лекція 26. Повний диференціал. Похідна від суперпозиції ФДЗ. Дотична площина й нормаль до поверхні .....	125
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 26 .....	129
Лекція 27. Похідні від функцій, заданих неявно. Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Формула Тейлора для функції двох змінних. Екстремуми.....	129
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 27 .....	132
Лекція 28. Достатня ознака існування екстремуму. Умовний екстремум .....	133
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 28 .....	137
Лекція 29. Найбільше й найменше значення функції в замкненій області. Задача про об'єм криволінійного циліндра .....	138
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 29 .....	141
Лекція 30. Задача про визначення маси неоднорідного тіла. Теорема про існування кратного інтеграла. Властивості кратних інтегралів. Приклади обчислення кратних інтегралів.....	141
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 30 .....	145
Лекція 31. Заміна змінних у кратних інтегралах .....	145
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 31 .....	150
Лекція 32. Застосування кратних інтегралів до задач фізики .....	150
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 32 .....	154
Лекція 33. Геометричний зміст похідної вектор-функції. Дотична й нормальна площини до кривої в просторі. Механічний зміст похідної вектор-функції.....	154
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 33 .....	158
Лекція 34. Зв'язок криволінійних інтегралів за координатами і довжиною дуги. Властивості криволінійних інтегралів .....	159
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 34 .....	164
Лекція 35. Формула Гріна. Механічні застосування криволінійного інтеграла за довжиною дуги.	164
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 35 .....	168
<b>РОЗДІЛ V. ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ .....</b>	<b>169</b>
Лекція 36. Поняття числового ряду. Збіжні і розбіжні числові ряди. Найпростіші властивості збіжних рядів. Ознаки збіжності додатних рядів .....	169
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 36 .....	176
Лекція 37. Інтегральна ознака Коші-Маклорена для додатних рядів. Ряди з довільними членами. Знакозмінні ряди .....	177
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 37 .....	182
Лекція 38. Функціональні ряди. Збіжність і рівномірна збіжність функціонального ряду. Ознака Вейєрштрасса .....	182
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 38 .....	185

Лекція 39. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Властивості степеневого ряду.....	186
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 39 .....	190
Лекція 40. Формула і ряд Тейлора .....	190
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 40 .....	194
Лекція 41. Застосування степеневих рядів .....	195
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 41 .....	200
Лекція 42. Ряди Фур'є .....	200
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 42 .....	206
Лекція 43. Ряди Фур'є для парних і непарних функцій. Узагальнені ряди Фур'є .....	207
Питання та завдання для самоконтролю до лекції 43 .....	218
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	219

## ВСТУП

Природа — відкрита книга. Але тільки той зможе прочитати цю книгу, хто вивчить мову, якою вона написана. А написана вона мовою математики. (Г. Галілей)

Математичні методи давно й успішно використовують в усіх сферах людської діяльності, у точних науках. Сучасна математика сформувалась приблизно 400 років тому в наукових працях Галілея, Кеплера, Гюйгенса, Ньютона, Лейбніца, одним з основних стимулів для яких було пізнання законів руху тіл. В роботах цих вчених математика й фізика поєднувались в одне ціле. На основі інтеграції (синтезу) математики і наук про природу на початку ХХ сторіччя зародились теорія відносності та квантова механіка. З ХVІІІ ст., з часів Ейлера та Лагранжа, математика слугує базою для інженерних наук. Усі великі досягнення – від спорудження будівель й мостів до вивільнення атомної енергії, надзвукової авіації й космічних польотів – були б неможливі без математики. Останнім часом розширюється застосування математичних методів в економіці, медицині, психології, біології, лінгвістиці, правознавстві тощо. Математика основа кожної цифрової технології, які зараз існують і виникатимуть надалі.

В технічних університетах України протягом останніх років відбуваються зміни у програмах та методиках викладання курсу математичного аналізу, що пов'язані з необхідністю наблизити курс до потреб інженерних дисциплін, водночас зберігаючи високий рівень фундаментальної освіти.

Конспект лекцій містить теоретичний матеріал, необхідні визначення, формулювання теорем, формули. Він ілюструється розібраними прикладами і вправами, виконання яких сприяє засвоєнню таких фундаментальних понять математичного аналізу, як границя послідовності та функції, неперервність, диференційованість, інтеграл, характер збіжності функціонального ряду тощо.

Вивчення лекційного матеріалу допомагає при виконанні аудиторної і домашньої роботи, але не виключає необхідності роботи з підручником і конспектом.

**Метою дисципліни** є ознайомлення здобувачів спеціальності «Системний аналіз та наука про дані» з класичними поняттями і методами аналізу функцій, надання навичок застосування математичних методів аналізу при дослідженні моделей реальних процесів.

В ході опанування дисципліною «Математичний аналіз» у здобувачів формуються загальні та фахові компетентності:

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;
- знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності;

– здатність використовувати системний аналіз як сучасну міждисциплінарну методологію, що базується на прикладних математичних методах та сучасних інформаційних технологіях і орієнтована на вирішення задач аналізу і синтезу технічних, економічних, соціальних, екологічних та інших складних систем;

– здатність формалізувати проблеми, описані природною мовою, у тому числі за допомогою математичних методів, застосовувати загальні підходи до математичного моделювання конкретних процесів;

– здатність будувати математично коректні моделі статичних та динамічних процесів і систем із зосередженими та розподіленими параметрами із врахуванням невизначеності зовнішніх та внутрішніх факторів;

– здатність формулювати задачі оптимізації при проектуванні систем управління та прийняття рішень, а саме: математичні моделі, критерії оптимальності, обмеження, цілі управління; обирати раціональні методи та алгоритми розв'язання задач оптимізації та оптимального керування;

– здатність організовувати роботу з аналізу та проектування складних систем, створення відповідних інформаційних технологій та програмного забезпечення;

– здатність формулювати та досліджувати математичні моделі природних, техногенних, економічних і соціальних об'єктів та процесів.

Програмні результати навчання після засвоєння дисципліни спрямовані на набуття ряду знань, умінь і навичок вирішення складних спеціалізованих задач та практичних проблем фахівцями-аналітиками:

– знати і вміти застосовувати на практиці диференціальне та інтегральне числення, ряди та інтеграл Фур'є, аналітичну геометрію, лінійну алгебру та векторний аналіз, функціональний аналіз та дискретну математику в обсязі необхідному для вирішення типових завдань системного аналізу;

– знати та вміти застосовувати базові методи якісного аналізу та інтегрування звичайних диференціальних рівнянь і систем; диференціальних рівнянь в частинних похідних, в тому числі рівнянь математичної фізики;

– знати основи математичного моделювання, вміти будувати та досліджувати математичні моделі природних, техногенних, економічних і соціальних об'єктів та процесів.

# РОЗДІЛ I. БАЗОВІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ

## Лекція 1. Елементи теорії множин

**Мета:** нагадати з шкільного курсу алгебри й початку аналізу поняття натуральних, раціональних, дійсних чисел, дій над ними. Ознайомити з логічними символами для запису математичних висловлень. Визначити поняття послідовності чисел, її збіжності, границі.

### План

1. Множини. Дійсні числа.
2. Логічні символи.
3. Верхня й нижня межі множини дійсних чисел.
4. Числова послідовність і її границя.

Поняття множини є одним з найголовніших первісних понять, тобто таких, які неможна виразити через простіші поняття. Г. Кантор, який створив теорію множин, використовував таке «означення»: «Множина або сукупність – це зібрання певних та різних об'єктів нашої інтуїції чи інтелекту, мислимий як ціле». Об'єкти, що складають множину, називаються елементами цієї множини. Будемо вважати множину визначеною, якщо про кожний об'єкт можна сказати, що він або належить, або не належить цій множині.

Той факт, що елемент  $a$  належить множині  $A$ , будемо позначати « $a \in A$ » або « $A \ni a$ ».

Той факт, що елемент  $a$  не належить множині  $A$ , позначається як « $a \notin A$ » або « $a \bar{\in} A$ ».

Множину можна задати кількома способами.

### Опис множини за допомогою переліку її елементів

1. Множина натуральних чисел:  $N = \{1, 2, \dots\}$ .

2. Множина цілих чисел:  $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .

3. Множина раціональних чисел:

$$Q = \{q\} = \left\{ \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N \right\}.$$

4. Множина дійсних чисел:  $R = \{x\}$  (усі раціональні й ірраціональні числа).

5. Множина комплексних чисел

$$C = \{z\} = \{x + iy; x, y \in R, i = \sqrt{-1}\}.$$

Типологія дійсних чисел представлена на рис. 1.

### Опис множини вказівкою на властивості її елементів.

Приклад:

$$A = \{x \in Z: |x| \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

#### Зауваження

1. Усі раціональні й ірраціональні числа геометрично зображуються точкою на числовій осі.
2. Усі раціональні числа подаються кінцевим або нескінченним періодичним десятковим дробом.
3. Усі ірраціональні числа подаються нескінченним неперіодичним десятковим дробом.

$$(\pi = 3,14\dots; e = 2,718\dots)$$

<b>Натуральні:</b> 1, 2, 3, 4 ...	
<b>Цілі:</b> ...-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 ...	<b>Дробові</b>
<b>Раціональні:</b> ... - 3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4;... $\frac{1}{2}$ ; $\frac{5}{3}$ ; -0,123; 0,34(567) та ін.	<b>Ірраціональні:</b> $-\sqrt{2}$ ; $\sqrt[3]{345}$ ; 13,1286074906...
<b>Алгебраїчні:</b> Корені рівняння вигляду $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ , де $a_s$ – цілі числа	<b>Трансцендентні:</b> $\pi, e, \dots$
<b>Дійсні</b>	

Рис. 1. Типологія дійсних чисел

Далі математичні висловлювання, теореми, леми будемо формулювати й записувати, використовуючи наступні логічні символи:

□ – нехай,

∀ – кожний, усякий, будь-який (квантор всілякості),

∃ – існує (квантор існування),

$\exists!$  – «існує єдиний»;

$\Rightarrow$  – «впливає»;

$\Leftrightarrow$  – «тоді й тільки тоді», «рівносильно»;

$\wedge$  – «і» (символ кон'юнкції);

$\vee$  – «або» (символ диз'юнкції);

$:=, \stackrel{\text{def}}{=}$  – «за означенням»;

$(\cdot)$  – точка.

**Означення:** Абсолютна величина дійсного числа  $a$ :

$$|a| = \text{mod } a = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0 \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

**Зауваження:**

$$1) |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b \text{ або } \begin{cases} a < b \\ a > -b \end{cases}$$

$$2) |a| > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > b \\ a < -b \end{cases}$$

### Верхня й нижня межі множини дійсних чисел

Нехай  $X = \{x\}$  нескінченна множина дійсних чисел, тобто  $X \subset \mathbb{R}$ .

**Означення.** Якщо  $\forall x \in X$  задовольняє нерівність  $x \leq M$ , то  $M$  називають *верхньою межею* множини  $X$ , а саму множину  $X$  *обмеженою зверху*.

Аналогічно визначається  $m$  – *нижня межа* множини  $X$ .

Якщо множина обмежена зверху й знизу, то її називають *обмеженою*.

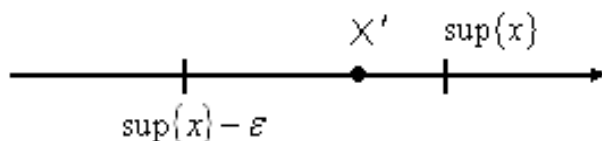
**Означення.** Найменше з усіх  $M$  називають  $\sup\{x\}$ , (supremum – точна верхня межа множини  $X$ ). Найбільше з усіх  $m$  –  $\inf\{x\}$  (infimum – точна нижня межа множини  $X$ ).

**Теорема:** якщо не порожні множини дійсних чисел обмежені зверху (знизу), то вони мають точну верхню (нижню) грань.

**Зауваження:** З визначення супремуму випливає:

а)  $\forall x \leq \sup\{x\}$ ;

б) для  $\forall \varepsilon > 0$  існує хоча б один елемент  $x' \in X$  такий, що  $x' > \sup\{x\} - \varepsilon$



Аналогічно для інфімуму:

а)  $\forall x \geq \inf\{x\}$ ;

б) для  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  хоча б один елемент  $x'' \in X$  такий, що  $x'' < \inf\{x\} + \varepsilon$ .

Якщо множина  $X$  не обмежена зверху (знизу), то вважають, що  $\sup\{x\} = +\infty$ , ( $\inf\{x\} = -\infty$ ).

## Числова послідовність і її границя

**Означення.** Множина занумерованих дійсних чисел, розміщених у порядку зростання номерів, називається *числовою послідовністю*.

**Приклади:**  $\{a_n\} = \{a_1 + (n-1)d\}$ ,  $\{b_n\} = \{b_1 q^{n-1}\}$ ,  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ; арифметична і геометрична прогресії.

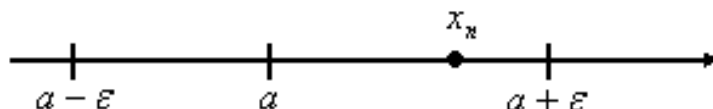
**Означення.** Послідовність називається *обмеженою*, якщо обмежено множину її значень.

**Означення.** Якщо для будь-якого як завгодно малого числа  $\varepsilon > 0$  знайдеться номер  $N = N(\varepsilon) > 0$  такий, що при  $n > N$ ,  $|x_n - a| < \varepsilon$ , то кажуть, що  $a$  *границя послідовності*, і записують  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  або  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ .

**Зауваження:**

1.  $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ .

Кажуть, що  $x_n \in \varepsilon(a)$  (належить  $\varepsilon$ -околу числа  $a$ ).



2. Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то яким би малим не було число  $\varepsilon$ , в  $\varepsilon$ -околі числа  $a$  буде нескінченна множина значень  $x_n$ .

**Означення.** Якщо будь-якому великому числу  $M > 0$  знайдеться номер  $N = N(\varepsilon) > 0$  такий, що при  $n > N$   $|x_n| > M$ , то кажуть, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$ . У цьому випадку послідовність називають *нескінченно великою (н.в.п.)*, якщо ж  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , то послідовність називають *нескінченно малою (н.м.п.)*

**Приклади:**

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \left\{\frac{1}{n}\right\}$  – н. м. п.

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - n^2) = \{\infty - \infty\} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n} - 1\right) = -\infty \Rightarrow \{n - n^2\}$  – н. в. п.

**Означення.** Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $a$  – скінченне число, то послідовність називається *збіжною*, в інших випадках – *розбіжною*.



### Приклади:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n + 3}{4n - 5} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( 8 + \frac{3}{n} \right)}{n \left( 4 - \frac{5}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 8 + \frac{3}{n} \right)}{\left( 4 - \frac{5}{n} \right)} = 2,$$

отже, послідовність  $\left\{ \frac{2n+1}{n-5} \right\}$  збігається до числа 2.

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \text{не } \exists.$$

Але  $\{(-1)^n\}$  обмежена й  $\sup\{(-1)^n\} = 1$ ,  $\inf\{(-1)^n\} = -1$ , отже  $\{(-1)^n\}$  – розбігається.

**Теорема** (про єдину границю числової послідовності). Якщо границя числової послідовності  $\{x_n\}$  існує, то вона єдина.

**Доведення** методом «від супротивного»:

$$\prod \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b, \quad a \neq b.$$

Наприклад,  $a < b$ . За визначенням границі  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 > 0, N_2 > 0$  такі, що при  $n > N_1$   $|x_n - a| < \varepsilon$ , при  $n > N_2$   $|x_n - b| < \varepsilon$ .

$\prod \varepsilon = \frac{b-a}{2}$ , а  $N = \text{найб}\{N_1, N_2\}$ , тоді

$$\begin{aligned} a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \\ b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \end{aligned}$$

або

$$\frac{a+b}{2} < x_n < \frac{a+b}{2}.$$

Звідси випливає суперечність, тоді  $a = b$ .

**Лема.** Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$ , то починаючи з деякого номера послідовність  $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}_{n=N}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{x_{N+1}}, \frac{1}{x_{N+2}}, \dots \right\}$  обмежена.

**Доведення.**

Візьмемо  $\varepsilon < |a|$ , визначимо номер  $N$  такий, що при  $n > N$   $|x_n - a| < \varepsilon$ :

$$|x_n| = |x_n - a + a| = |a + (x_n - a)| \geq |a| - |x_n - a| > |a| - \varepsilon.$$

Тоді  $\left| \frac{1}{x_n} \right| < \frac{1}{|a| - \varepsilon}$ , тобто починаючи з  $n > N$  послідовність  $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$  обмежена числом  $\frac{1}{|a| - \varepsilon}$ .

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 1

1. Які логічні символи використовуються для запису математичних тверджень?

2. Якими способами описуються множини?
3. Що таке порожня множина?
4. Які числа називаються ірраціональними?
5. Які числа називаються раціональними?
6. Чи є число  $\sqrt{3}$  раціональним? Чому?
7. Яка числова послідовність називається збіжною?
8. Сформулюйте визначення точної нижньої (верхньої) границі числової послідовності.
9. Наведіть приклади збіжної і розбіжної числової послідовності.
10. Яка ідея методу супротивного? Де використовується?

## Лекція 2. Нескінченно великі та нескінченно малі послідовності. Основні теореми про границі. Монотонні послідовності

**Мета:** визначити нескінченно великі й нескінченно малі послідовності. Розглянути основні теореми про границі. Ознайомити з монотонними послідовностями, їх властивостями.

### План

1. Нескінченно великі та нескінченно малі послідовності.
2. Границі суми, різниці, добутку, частки послідовностей.
3. Монотонні послідовності.
4. Приклади обчислень границь послідовності. Число  $e$ .

### Нескінченно великі й нескінченно малі послідовності

**Теорема** (про зв'язок нескінченно великих (н. в. п.) і нескінченно малих послідовностей (н. м. п.))  $\prod x_n = \frac{1}{\alpha_n}$  при  $\forall n \in N$ .  $\{x_n\}$  – н. в. п. при  $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \{\alpha_n\}$  – н. м. п. при  $n \rightarrow \infty$ .

#### Доведення:

а) Дано:  $\{x_n\}$  – н. в. п.  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm \infty$  або  $\forall M > 0 \exists N = N(M) > 0$  такий, що при  $n > N$   $|x_n| > M$ . Звідси  $\left| \frac{1}{x_n} \right| = |\alpha_n| < \frac{1}{M} = \varepsilon$ , тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ .

б) Дано:  $\{\alpha_n\}$  – н. м. п., це означає  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ , або  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0$  такий, що при  $n > N$   $|\alpha_n| < \varepsilon$ . Звідси  $\left| \frac{1}{\alpha_n} \right| = |x_n| > \frac{1}{\varepsilon} = M$ .

Уведемо символічний запис  $\frac{1}{\infty} = 0$ ,  $\frac{1}{0} = \infty$ .

**Теорема** (про подання збіжної послідовності через границю і н. м. п.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n,$$

де  $\{\alpha_n\}$  – н. м. п. при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доведення:**

Позначимо  $a + \alpha_n = x_n$ .

а) Дано:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0,$$

що при  $n > N$   $|x_n - a| < \varepsilon$  або  $|\alpha_n| < \varepsilon$ , тобто  $\{\alpha_n\}$  – н. м. п. при  $n \rightarrow \infty$ .

б) Дано:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0,$$

що при  $n > N$   $|\alpha_n| < \varepsilon$  або  $|x_n - a| < \varepsilon$ , тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

**Теорема:** (про добуток н. м. п. на обмежену послідовність).

Добуток н. м. п. при  $n \rightarrow \infty$  на обмежену послідовність є н. м. п. при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доведення**

$\square \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  і  $|x_n| < M$  при  $\forall n$ .

$$\forall \frac{\varepsilon}{M} > 0 \exists N = N\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) > 0, \text{ що при } n > N |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow$$

$$|\alpha_n x_n| = |\alpha_n| |x_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n x_n) = 0.$$

## Основні теореми про границі послідовностей

$$\square \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, \quad c - const,$$

тоді:

$$\text{Теорема 1: } \lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ca.$$

$$\text{Теорема 2: } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a + b.$$

$$\text{Теорема 3: } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = ab.$$

$$\text{Теорема 4: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b}, \text{ якщо } \forall y_n, b \neq 0.$$

**Доведення Т4** (інші довести самостійно).

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{y_n} \left( x_n - \frac{a}{b} y_n \right) = \frac{1}{y_n} \left( a + \alpha_n - \frac{a}{b} (b + \beta_n) \right)$$

за теоремою про подання збіжної послідовності через н. м. п.  $(\alpha_n, \beta_n -$  н. м. п. при  $n \rightarrow \infty)$ .

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{y_n} \left( \alpha_n - \frac{a}{b} \beta_n \right);$$

$\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}$  – обмежена послідовність (див. лему),  $\left( \alpha_n - \frac{a}{b} \beta_n \right)$  – н. м. п. при  $n \rightarrow \infty$ . За теоремою про добуток н. м. п. на обмежену  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right\}$  – н. м. п. при  $n \rightarrow \infty$ , тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

### Граничний перехід у нерівностях

**Теорема** (про граничний перехід у нерівностях).

$\square$   $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  і при  $\forall n$   $x_n \leq y_n$ , тоді  $a \leq b$ .

**Доведення** (від супротивного)

$\square$   $a > b$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = a - b$  (за основними теоремами про границі)  $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0$ , що при  $n > N$   $|(x_n - y_n) - (a - b)| < \varepsilon$ .

$\square$   $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ , тоді

$$(a - b) - \varepsilon < x_n - y_n < (a - b) + \varepsilon$$

або

$$0 < \frac{a-b}{2} < x_n - y_n < \frac{3}{2}(a-b) \Rightarrow x_n - y_n > 0,$$

$x_n > y_n$  – суперечність, отже  $a \leq b$ .

**Зауваження.** Якщо при  $\forall n$   $x_n < y_n$  то  $a \leq b$  доведення аналогічне.

**Теорема** (про границю проміжної послідовності).

$\square$  при  $\forall n$   $x_n \leq y_n \leq z_n$  й  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ . Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$

**Доведення**

Зробимо граничний перехід у нерівності:

$$a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$

### Монотонні послідовності

**Означення.** Послідовність  $\{x_n\}$  називають монотонно зростаючою, якщо для  $\forall n \in N$   $x_n \leq x_{n+1}$ , і монотонно спадною, якщо для  $\forall n \in N$   $x_n \geq x_{n+1}$ .

**Теорема Вейерштрасса.** Якщо послідовність  $\{x_n\}$  монотонно зростає (спадає) і обмежена зверху (знизу), то вона має скінченну границю.

### Доведення

Нехай послідовність  $\{x_n\}$  монотонно зростає й обмежена зверху й  $\sup\{x_n\} = a$ . Із зауваження до точної верхньої границі для  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  хоча б один  $x_N \in \{x_n\}$ , що  $\sup\{x_n\} - \varepsilon < x_N < \sup\{x_n\}$  або

$$a - \varepsilon < x_N < a < a + \varepsilon \Rightarrow |x_N - a| < \varepsilon.$$

Оскільки послідовність монотонно зростає, то  $x_{N+1} \geq x_N$  й  $x_{N+1} < a \Rightarrow x_N \leq x_{N+1} \leq x_{N+2} \leq \dots < a$ , для всіх цих номерів

$$|x_N - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Аналогічно доводиться друга частина теореми.

**Приклад.** Довести, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, (a > 0).$$

Розглянемо послідовність  $\{x_n\} = \left\{ \frac{a^n}{n!} \right\}$ .

$$x_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = x_n \cdot \frac{a}{n+1}.$$

Оскільки при досить великих  $n$ ,  $\frac{a}{n+1} < 1$ , тоді  $x_{n+1} < x_n$ , тобто послідовність монотонно спадає й обмежена знизу нулем. За теоремою Вейерштрасса ця послідовність має скінченну границю  $A$ .

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = A \cdot 0 = 0.$$

Таким чином,  $A = 0$ , що й було потрібно довести.

### Число $e$

Розглянемо послідовність

$$\left\{ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\} = \left\{ 2; \frac{9}{4}; \frac{64}{27}; \frac{625}{256}; \dots \right\} = \{2; 2,25; 2, (370)\dots; 2,44\dots; \dots\}.$$

За допомогою методу математичної індукції, використовуючи біном Ньютона, можна довести, що послідовність монотонно зростає й обмежена числом 3. Тоді за теоремою Вейерштрасса існує скінченна границя, яку позначимо буквою  $e$  ( $2 < e < 3$ ).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

$e = 2,718281828\dots$  – ірраціональне число.

Логарифм з основою  $e$  називають натуральним і позначають

$$\log_e x = \ln x.$$

### Приклади

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 6}{n^2 + 4} \right)^{2n^2} &= \{1^\infty\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 6}{n^2 + 4} + 1 - 1 \right)^{2n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{2}{n^2 + 4} \right)^{\frac{n^2 + 4}{2}} \right)^{2n^2 \cdot \frac{2}{n^2 + 4}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{n^2 + 4}} = e^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n - 1}{6 - 5n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \left( \frac{5n - 1}{5n - 6} \right)^n = \{1^\infty\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \left( \frac{5n - 1}{5n - 6} - 1 + 1 \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \left( \left( 1 + \frac{1}{5n - 6} \right)^{\frac{5n - 6}{5}} \right)^{\frac{5n}{5n - 6}} = \\ &= e^1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \text{не}\exists. \end{aligned}$$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n = 0$  за теоремою про добуток н. м. п. на обмежену.

При розв'язуванні прикладів 1, 2 використовувались теореми:

**Теорема 1.** Послідовність  $\{\alpha_n\}$  – н.м. при  $n \rightarrow \infty$  тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\alpha_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n} = 1.$$

**Теорема 2.** Якщо  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\forall x_n$  і  $\alpha > 0$ , тоді

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \ln(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \ln a.$$

**Теорема 3.** Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ ,  $\forall x_n$  і  $\alpha > 0$ , тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{y_n} = a^b.$$

Доведення даних теорем наведені нижче.

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 2

1. Сформулюйте теорему Веєрштрасса?
2. Який логарифм називають натуральним?

3. Що таке число  $e$ ?
4. Які теореми використовуються при обчисленні границь числових послідовностей?
5. Які послідовності називаються нескінченно малими (нескінченно великими)?
6. Який зв'язок існує між послідовностями нескінченно малими і нескінченно великими?
7. Яка числова послідовність називається обмеженою зверху (знизу)?
8. Записати за допомогою кванторів визначення необмеженої зверху (знизу) числової послідовності.
9. Наведіть приклади монотонної числової послідовності.
10. Наведіть приклади нескінченно малої числової послідовності?

### **Лекція 3. Поняття функції. Елементарні функції. Обмежені зверху (знизу) функції**

**Мета:** визначити поняття відображення, ін'єкції, бієкції, сюр'єкції, функції однієї змінної. Навести приклади елементарних функцій, їх властивості, графіки. Ознайомити з поняттям обмеженої зверху/знизу функції на множині.

#### **План**

1. Поняття функції. Способи задання функції.
2. Елементарні функції та їх властивості.
3. Обмежені на множині функції.
4. Гіперболічні функції, їх властивості.
5. Поняття границі функції в точці, на нескінченності.

#### **Поняття функції. Способи задання функції**

**Означення.** Якщо  $\forall x \in X$  за певним правилом ставиться у відповідність  $y \in Y$ , то кажуть, що на множині  $X$  задана функція  $y = f(x)$ , або задане **відображення** множини  $X$  на множину  $Y$ .

$X$  – область визначення функції.  $Y$  – область значень функції.

У математичному аналізі, якщо заздалегідь не зазначено, розглядають **взаємно однозначну** відповідність множин  $X$  і  $Y$ , тобто  $\forall x \in X$  ставиться у відповідність тільки один елемент множини  $Y$  і навпаки.

Правило  $f$  може бути задано формулою (аналітичне завдання функції), таблицею, графіком, алгоритмом.

**Зауваження.** Будь-яка послідовність є функцією цілочислового аргументу:  $x_n = f(n), n \in N$ .

### Елементарні функції та їх властивості

Крім функцій, які розглядаються в шкільному курсі, ми будемо ще розглядати такі функції:

1. Ціла раціональна функція, або многочлен (поліном),

$$y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$

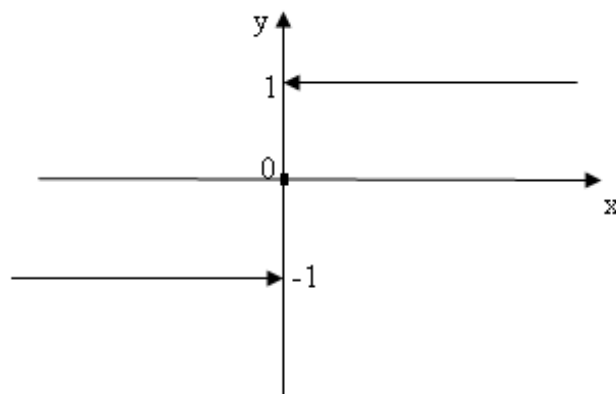
де числа  $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ .

2. Дробово-раціональна функція

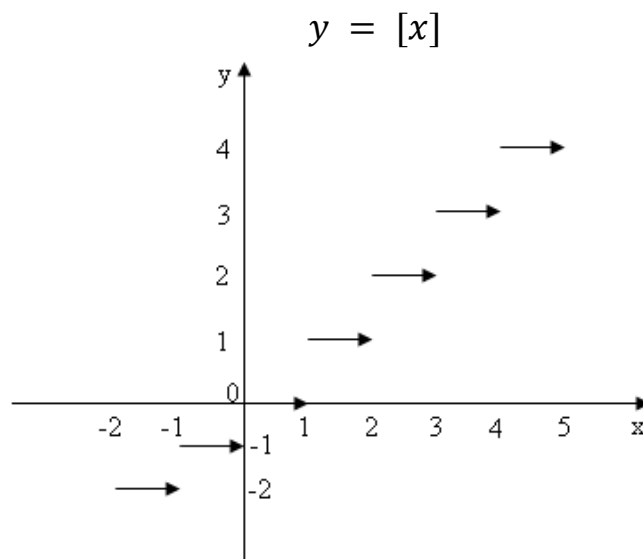
$$y = \frac{P_n(x)}{R_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}.$$

3. Функція знаку або сінгнум-функція, знакова функція

$$y = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0 \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \\ -1, & \text{якщо } x < 0 \end{cases}$$



4. Ціла частина числа



## 5. Функція Діріхле

$$y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x - \text{іраціональне} \\ 1, & \text{якщо } x - \text{раціональне} \end{cases}$$

та інші функції.

### Означення і позначення

1. Функція називається **обмеженою зверху (знизу)**, якщо множина її значень  $Y$  обмежена зверху (знизу).

2. Найменша верхня границя –  $\sup_{x \in X} f(x)$ , а найбільша нижня границя –  $\inf_{x \in X} f(x)$ .

3. Функція  $y = f(x)$  називається **монотонно зростаючою (спадною)**, якщо при

$$x \leq z \quad f(x) \leq f(z) \quad (f(x) \geq f(z)).$$

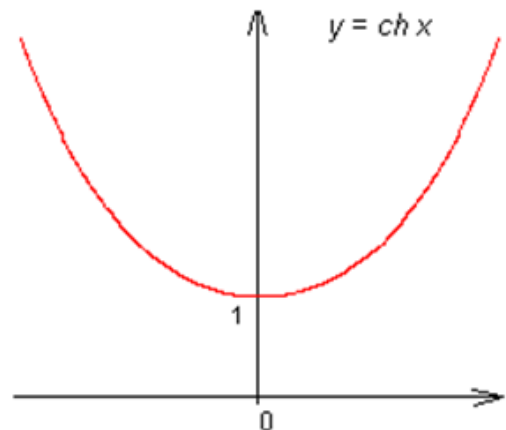
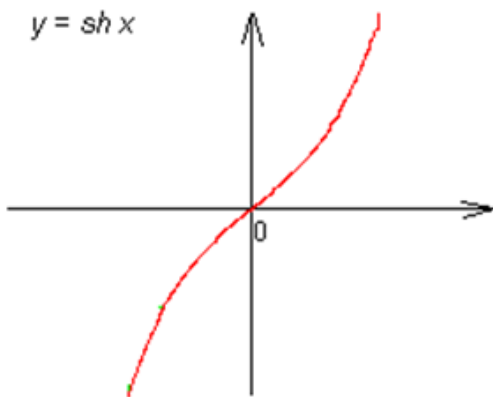
### Гіперболічні функції

Гіперболічний синус

$$y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

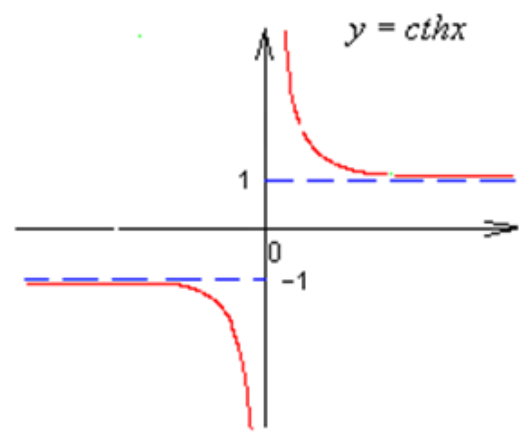
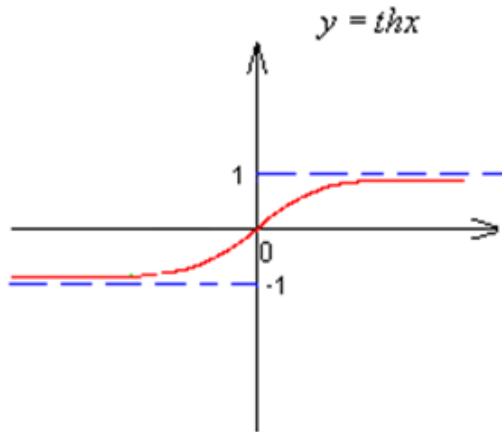
гіперболічний косинус

$$y = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$



гіперболічний тангенс і котангенс

$$y = thx = \frac{shx}{chx}, \quad y = cthx = \frac{chx}{shx}.$$



Зауважимо, що

$$\begin{aligned} ch^2x - sh^2x &= 1, \\ ch^2x + sh^2x &= ch2x, \\ 2shx \cdot chx &= sh2x, \\ thx \cdot cthx &= 1. \end{aligned}$$

### Границя функції в точці, на нескінченності

**Означення** (за Коші) Якщо

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  таке, що при  $0 < |x - x_0| < \delta$   $|f(x) - a| < \varepsilon$ , то кажуть, що  $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

**Зауваження.** Якщо  $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , то при  $x \in \delta(x_0)$   $f(x) \in \varepsilon(a)$ , тобто яким би маленьким не було число  $\varepsilon$ , в  $\varepsilon$  – околі точки  $a$  буде незліченна множина значень функції.

**Означення** (за Гейне). Якщо  $\forall$  послідовності  $\{x_n\} \subset X$ , що збігається до  $x_0$  ( $\forall x_n \neq x_0$ )  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ , то число  $a$  називається **границею функції  $f(x)$**  при  $x \rightarrow x_0$ .

Можна довести, що визначення за Коші й за Гейне еквівалентні, тобто з одного випливає інше.

Аналогічно можна дати визначення за Коші й за Гейне у випадку, якщо  $a = \pm\infty$  або  $x_0 = \pm\infty$ .

**ВПРАВА:** дати визначення за Коші й за Гейне у випадку, якщо  $a = \pm\infty$  або  $x_0 = \pm\infty$ ). Сформулювати визначення необмеженої на нескінченності функції.

## Теореми про границі функції

Оскільки визначення границі функції за Коші й за Гейне еквівалентні, то всі теореми, розглянуті для послідовностей, справедливі й для функцій.

Наприклад, **теорема про вираження функції через межу й н.м.ф.**: якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , то  $f(x) = a + \alpha(x)$ , де  $\alpha(x)$  н.м.ф. при  $x \rightarrow x_0$  і навпаки.

Або **теорема про границю проміжної функції**: якщо при  $\forall x \in X$   $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$  і  $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = a$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ .

## Односторонні границі

**Означення.**  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \forall x > x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A^+$  називається **правосторонньою** границею;  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \forall x < x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A^-$  називається **лівосторонньою** границею.

### Приклади:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \frac{1-(1-0)}{1+(1-0)} = \ln \frac{+0}{2} = \ln(+0) = -\infty$$

(використовувався символічний запис);

$$2) \lim_{x \rightarrow 1+0} \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \frac{1-(1+0)}{1+(1+0)} = \ln \frac{-0}{2} = \ln(-0) = \text{не}\exists.$$

**Теорема.**  $A^+ = A^- = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

### Доведення:

$$a) \quad \text{II} \quad A^+ = A^- = A$$

Для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$  така, що при  $x_0 < x < x_0 + \delta_1$

$$|f(x) - A^+| = |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$  така, що при  $x_0 - \delta_2 < x < x_0$

$$|f(x) - A^-| = |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\text{II} \quad \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta$ , отже:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A;$$

б)  $\text{II} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такий, що

$$\text{при } 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Візьмемо  $x_0 < x < x_0 + \delta$ , тоді при  $0 < x - x_0 < \delta$   $|f(x) - A| < \varepsilon$ , тобто  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A = A^+$ .

Аналогічно для  $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A = A^-$ .

## Суперпозиція функцій і її границя

**Означення.** Якщо функції  $y = f(u)$ ,  $u \in U$ ,  $y \in Y$ , функція  $u = \varphi(x)$ ,  $x \in X$ ,  $u \in U$ . Тоді  $y = f(\varphi(x))$ , де  $x \in X$ ,  $y \in Y$  називається **суперпозицією** функцій, або **складеною** функцією, а  $u$  – проміжним аргументом.

**Теорема.** Якщо  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = a$ .

**Доведення**

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1(\varepsilon) > 0$  така, що при  $0 < |u - u_0| < \delta_1$   $|f(u) - a| < \varepsilon$ .

$\forall \delta_1 > 0 \exists \delta(\delta_1) > 0$  така, що при  $0 < |x - x_0| < \delta$ ,  $|\varphi(x) - u_0| < \delta_1$ .

Звідси  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\delta_1(\varepsilon)) = \delta(\varepsilon) > 0$  така, що при  $0 < |x - x_0| < \delta$   $|f(\varphi(x)) - a| < \varepsilon$ .

Таким чином  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = a$ .

**Висновок.** При обчисленні границі суперпозиції можна робити заміну змінних (або підстановку):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = \left. \begin{array}{l} \varphi(x) = u \\ u \rightarrow u_0 \text{ при } x \rightarrow x_0 \end{array} \right\} = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = a.$$

## Питання та завдання для самоконтролю до лекції 3

1. Що таке функція? Що таке відображення?
2. Якими способами задаються функції?
3. Що таке область визначення функції? Наведіть приклади.
4. Що є областю значень функції? Наведіть приклади.
5. Сформулюйте означення границі функції в точці мовою Гейне.
6. Сформулюйте означення границі функції в точці мовою послідовностей.
7. Що таке суперпозиція функцій?
8. Сформулюйте теорему про границю суперпозиції функцій.
9. Наведіть приклади існування границі функції в точці, на нескінченності.
10. Що таке лівостороння (правостороння) границя функції в точці?

## Лекція 4. Важливі границі. Поняття нескінченно малих і нескінченно великих функцій. Еквівалентні нескінченно малі функції. Розкриття невизначеностей

**Мета:** ознайомитись з I – V важливими (примітними) границями та їх наслідками. Навчитися порівнювати нескінченно малі функції. Навчитися розкривати невизначеності.

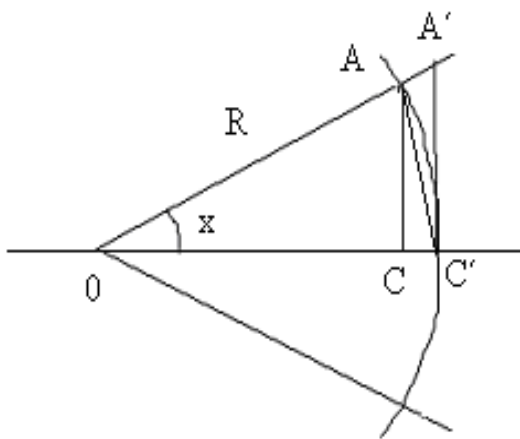
## План

1. Перша важлива границя
2. Друга важлива границя
3. Порівняння нескінченно малих функцій. Таблиця еквівалентних
4. Розкриття невизначеностей

### Перша важлива (визначна, примітна) границя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доведення:



$$AC = R |\sin x|,$$

$$A'C' = R |tg x|,$$

$$AC' = R|x| - \text{довжина дуги.}$$

$$S_{\triangle OAC'} < S_{\text{сек}} < S_{\triangle OA'C'}$$

$$\frac{R \cdot R |\sin x|}{2} < \frac{R \cdot R|x|}{2} < \frac{R \cdot R |tg x|}{2},$$

$$|\sin x| < |x| < |tg x|$$

$$1 < \frac{|x|}{|\sin x|} < \frac{1}{|\cos x|} \Rightarrow |\cos x| <$$

$$\frac{|\sin x|}{|x|} < 1 \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

тому що в I і IV чвертях  $\cos x \geq 0$ ,  $\frac{\sin x}{x} > 0$  при  $\forall x \neq 0$ .

Оскільки  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ , то за зауваженням до теореми про граничний перехід у нерівностях

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

### Друга важлива границя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Доведення

$\square [x] = n \Rightarrow$  при  $x \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$  і  $n \leq x < n + 1$ . Тоді

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$

й

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

або

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

За зауваженням до теореми про граничний перехід у нерівностях: при  $x \rightarrow \infty$

$$\frac{e}{1} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq e \cdot 1,$$

тобто

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

**Зауваження:**

$$1. e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} = a \\ a \rightarrow +0 \end{array} \right\} = \lim_{a \rightarrow +0} (1 + a)^{\frac{1}{a}}, \text{ таким чином,}$$

$$\lim_{a \rightarrow +0} (1 + a)^{\frac{1}{a}} = e;$$

$$2. \lim_{a \rightarrow -0} (1 + a)^{\frac{1}{a}} = \left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{y}{1+y} \Rightarrow y = -\frac{a}{1+a} \\ \text{при } a \rightarrow -0, y \rightarrow +0 \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +0} \left(1 - \frac{y}{1+y}\right)^{-(1+y)/y} = \lim_{y \rightarrow +0} \left(\frac{1}{1+y}\right)^{-(\frac{1}{y}+1)} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +0} (1+y)^{1/y} (1+y)^1 = e \cdot 1 = e \Rightarrow \lim_{y \rightarrow +0} (1+y)^{1/y} (1+y)^1 = e \Rightarrow \lim_{a \rightarrow -0} (1+a)^{\frac{1}{a}} = e;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \left\{ \frac{k}{x} = t, t \rightarrow 0 \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{k}{t}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{1/t}\right]^k = e^k \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

## Порівняння нескінченно малих функцій. Таблиця еквівалентних

$\square \alpha(x)$  і  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  – н.м.ф.

**Означення:**

1. Якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ , то  $\alpha(x)$  називають н.м.ф. *більш високого порядку малості*, ніж  $\beta(x)$ , і позначають  $\alpha(x) = o(\beta(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ .

2. Якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A = \text{const} \neq 0$ , то кажуть, що  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$  одного порядку малості при  $x \rightarrow x_0$ , і позначають  $\alpha(x) = O(\beta(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ .

3. Якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , то  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$  еквівалентні при  $x \rightarrow x_0$ , й позначають  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ . Найчастіше за  $\beta(x)$  беруть  $(x - x_0)^m$  ( $m > 0$ ).

4. Якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(x - x_0)^m} = A \neq 0$ , то кажуть, що  $\alpha(x)$  – н.м.ф.  $m$ -того порядку малості, а  $A(x - x_0)^m$  – головна частина н.м.ф.  $\alpha(x)$ .

**Теорема.** Якщо  $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ ,  $\beta(x) \sim \beta_1(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

**Доведення**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \right) = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot 1.$$

### Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

При  $x \rightarrow 0$  справедливі такі еквівалентності :

$\alpha(x)$	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\arcsin x$	$\operatorname{arctg} x$	$a^x - 1$	$\ln(1 + x)$	$(1 + x)^a - 1$
$\beta(x)$	$x$	$x$	$x$	$x$	$ax$	$x$	$ax$

Перші дві еквівалентні випливають із першої важливої границі. Третя і четверта доводяться за допомогою методу підстановки.

**Доведення інших**

За визначенням

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln a}{a^x - 1} = \left\{ \begin{array}{l} a^x - 1 = y, y \rightarrow 0 \\ x = \frac{\ln(1 + y)}{\ln a} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y) \cdot \ln a}{\ln a \cdot y} = \lim_{y \rightarrow 0} \ln(1 + y)^{1/y} = \ln e = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x)^{1/x} = \ln e = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(1+x)^a} - 1}{ax} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)^a \cdot \ln e}{ax} = \frac{a \ln(1+x)}{ax} = 1, (a \in R).$$

### Приклади:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{4}}{x^2} = \frac{1}{2}, \text{ отже,}$$

$$1 - \cos x = \frac{1}{2} x^2 + o(x^2) \text{ при } x \rightarrow 0,$$

тобто  $\frac{1}{2} x^2$  – головна частина виразу  $1 - \cos x$  при  $x \rightarrow 0$ .

2. Оскільки  $(1+x)^a - 1 \sim ax$  при  $x \rightarrow 0$ , то головна частина виразу  $(1+x)^a - 1$  при  $x \rightarrow 0$  є  $ax$ , або  $(1+x)^a = 1 + ax + o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ .

### Розкриття невизначеностей

Якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \infty$  й ми визначаємо  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)}$ , то кажуть, що вираз  $\frac{f(x)}{\phi(x)}$  представляє невизначеність  $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$  при  $x \rightarrow x_0$ . Існує сім типів невизначеностей:  $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ ,  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ ,  $\{\infty - \infty\}$ ,  $\{\infty \cdot 0\}$ ,  $\{0^0\}$ ,  $\{1^\infty\}$ ,  $\{\infty^0\}$ . Наприклад, перша важлива границя розкриває невизначеність  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ , а друга –  $\{1^\infty\}$ . Оскільки  $\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty$ , а  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ , то умовно можна записати, що  $\ln 0 = -\infty$ ,  $\ln \infty = \infty$ .

Прологарифмуємо останні три типи невизначеностей:  $\{\ln 0^0\} = \{0 \ln 0\} = \{0 \cdot -\infty\}$ ;

$$\{\ln \infty^0\} = \{0 \ln \infty\} = \{0 \cdot \infty\};$$

$$\{\ln(1^\infty)\} = \{\infty \ln 1\} = \{\infty \cdot 0\}.$$

Це говорить про те, що шляхом елементарних перетворень один тип невизначеності можна звести в інший. Результат же розкриття невизначеності цілком залежить від закону зміни аргументу. Але все-таки є ряд загальних положень. Наприклад, при розкритті невизначеності  $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$  бажано в чисельнику й знаменнику винести за дужки старший ступінь і скоротити; при розкритті невизначеності  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$  бажано чисельник і знаменник розкласти на множники; при розкритті невизначеності  $\{1^\infty\}$  – використовувати другу важливу границю.

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 4

1. Які наслідки випливають з першої примітної границі?

2. Яку невизначеність розкриває перша примітна границя?
3. Яку невизначеність розкриває друга примітна границя?
4. Назвіть пари еквівалентних нескінченно малих функцій, при прямуванні до якого числа вони визначені?
5. Що означає еквівалентність двох нескінченно малих функцій?
6. Яку функцію називають нескінченно малою більш високого порядку, ніж інша?
7. Яку функцію називають нескінченно великою?
8. Який вигляд має третя примітна границя?
9. Яка примітна границя є наслідком ( або доводиться за допомогою) другої примітної границі?
10. Надати геометричну інтерпретацію першій примітній границі.

## **Лекція 5. Неперервність функції в точці. Точки розриву. Властивості неперервних функцій. Рівномірна неперервність. Теорема Кантора**

**Мета:** визначити поняття неперервності функції в точці, на відрізку. Ознайомити з властивостями неперервних функцій, точками розриву I-го і II-го роду функції.

### **План**

1. Неперервність функції
2. Точки розриву функції
3. Неперервність деяких функцій
4. Властивості функцій, неперервних на відрізку
5. Поняття оберненої функції
6. Теорема про існування неперервної оберненої функції
7. Рівномірна неперервність. Формулювання теореми Кантора

### **Неперервність функції**

**Означення.** Функція називається **неперервною** в точці  $x_0$ , якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Функція називається **неперервною** праворуч (ліворуч), якщо

$$A^+ = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0) \quad (A^- = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)).$$

Для неперервної в точці  $x_0$  функції  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ .

□  $x = x_0 + \Delta x$ , тоді

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Тобто в  $\delta(x_0)$  – околі малому приросту аргументу відповідає малий приріст функції.

Із властивостей границь впливають такі властивості неперервних функцій:

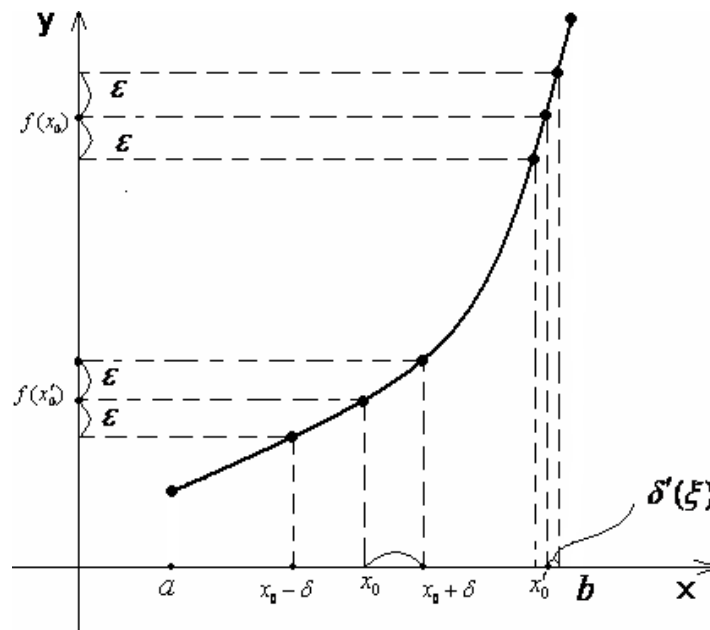
якщо неперервні в точці  $x_0$  функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$ , то  $f(x) + \varphi(x)$ ,  $f(x) \cdot \varphi(x)$ ,  $c \cdot f(x)$  – неперервні в точці  $x_0$ , а дріб  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  – неперервний у точці  $x_0$ , якщо  $\varphi(x_0) \neq 0$ .

**Означення.** Якщо функція неперервна у всіх точках відрізка  $[a;b]$ , то кажуть, що вона неперервна на цьому відрізку й позначають  $f(x) \in C[a;b]$  ( $C$  – множина неперервних функцій).

$$\Pi y = f(x) \in C[a; b], (\cdot) x_0 \in (a; b)$$

За визначенням границі:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  такий, що при  $|x - x_0| < \delta$   $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

З рисунка видно, що при тому самому  $\varepsilon$  чим крутіший графік, тим менше  $\delta$ , таким чином,  $\delta(\varepsilon; x_0)$ .



**Теорема.** Суперпозицією двох неперервних функцій є функція неперервна.

**Доведення**

$$\Pi y = f(U) \text{ неперервна в } T(\cdot) U_0, U = \phi(x) \text{ і } U_0 = \phi(x_0).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\phi(x)) = \left\{ \begin{array}{l} U = \phi(x) \\ U \rightarrow U_0 \end{array} \right\} = \lim_{U \rightarrow U_0} f(U) = f(U_0) = f(\phi(x_0)),$$

таким чином,  $y = f(\phi(x))$  неперервна в точці  $x_0$ .

## Точки розриву функції

Якщо функція неперервна в точці  $x_0$ , то  $A^+ = A^- = f(x_0)$ .

**Означення.** Якщо рівність  $A^+ = A^- = f(x_0)$  порушується, то в точці  $x_0$  розрив.

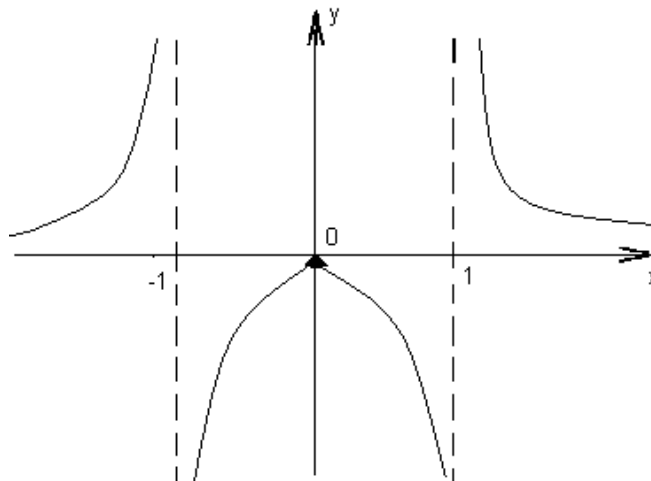
1. Якщо  $A^+ = A^- \neq f(x_0)$  і  $A^+$ ,  $A^-$  – скінченні, то в точці  $x_0$  розрив називається *усувним*.

2. Якщо  $A^+ \neq A^-$  і обидві скінченні, то в точці  $x_0$  розрив називається *неусувним 1-ого роду*.

3. Якщо хоча б одна з меж  $A^+$ ,  $A^-$  дорівнює нескінченності або не існує, то в точці  $x_0$  розрив називається *неусувним 2-ого роду*.

### Приклад

$$y = \frac{1}{\ln|x|}$$



У точці  $x = \pm 1$  неусувний розрив 2-го роду.

У точці  $x = 0$  усувний розрив, тобто якщо

$$y = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|}, & \text{при } x \neq 0 \\ 0, & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

то нова функція в точці  $x = 0$  буде неперервною.

**Означення.** Функція  $y = f(x)$  називається кусково-неперервною на  $[a; b]$ , якщо на  $(a; b)$  вона неперервна, крім нескінченного числа точок усувного розриву або неусувного розриву 1-го роду, причому  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  і  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$  – скінченні.

## Неперервність деяких функцій

Елементарні функції типу:  $y = x^\alpha$  ( $\alpha \in R$ ),  $y = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ),  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ), всі тригонометричні, обернені тригонометричні неперервні на своїх ОДЗ.

**Наприклад:**  $y = \operatorname{tg} x$ , ОДЗ  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ .

$$\Delta y = \operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x = \frac{\sin \Delta x}{\cos(x + \Delta x) \cos x},$$

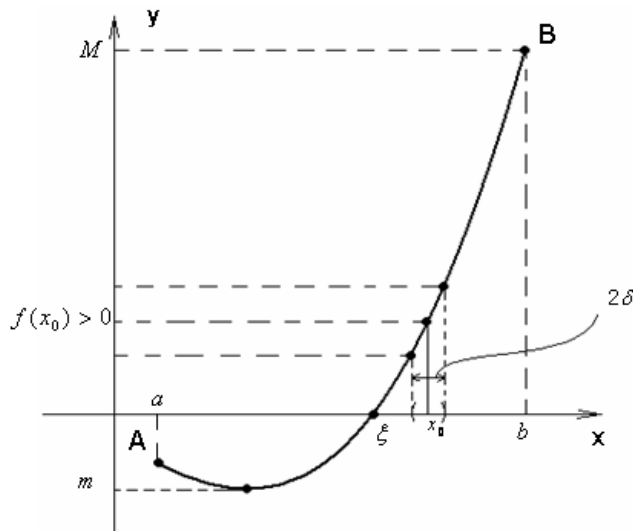
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\cos(x + \Delta x) \cos x} = \frac{0}{\cos^2 x} = 0,$$

якщо  $\cos x \neq 0$ , тобто  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ , що збігається з ОДЗ.

## Властивості функцій, неперервних на відрізку

□  $y = f(x) \in C[a; b]$ , тоді

1.  $\exists \delta(x_0)$ , у якій  $f(x)$  зберігає знак  $f(x_0)$  ( $f(x) \cdot f(x_0) > 0$ ),
2.  $\exists$  хоча б одна  $(\cdot) \xi \in (a; b)$ , що  $f(x)$  набуває проміжного значення між  $f(a)$  і  $f(b)$  (наприклад, якщо  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , то  $f(\xi) = 0$ ),
3.  $f(x)$  обмежена своїми найменшим і найбільшим значеннями, тобто  $m \leq f(x) \leq M$ .



## Поняття оберненої функції

□  $y = f(x)$ , аргумент  $x \in X$ , значення функції  $y \in Y$  й між множинами  $X, Y$  взаємно однозначна відповідність.

Якщо ж у вважати аргументом, а  $x$  — значенням функції, то одержимо нову функцію, задану в неявному вигляді. Іноді  $x$  можна виразити через  $y$ , тобто  $x = \phi(y)$ .

**Означення.** Функція  $y = \phi(x)$ ,  $x \in Y$ ,  $y \in X$  називається **оберненою функцією** відносно  $y = f(x)$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ .

**Приклад:**  $y = -\sqrt{x}$ ,  $x \in [0; \infty)$ ,  $y \in (-\infty; 0]$  і  $y = x^2$ ,  $x \in (-\infty; 0]$ ,  $y \in [0; +\infty)$  взаємно обернені функції.

### Зауваження

1. Графіки прямої й оберненої функцій симетричні відносно прямої

$$y = x.$$

2. Обернені тригонометричні функції  $y = \arcsin x$  й т.д. є оберненими не для  $y = \sin x$  й т.д., а тільки для їхніх частин, що відповідають головним значенням аргументу  $x$ ;

**Приклад:**  $y = \operatorname{tg} x$  тільки при  $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ ,  $y \in (-\infty; +\infty)$  має обернену функцію  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $x \in (-\infty; \infty)$ ,  $y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ .

3. Графіки прямої й оберненої функцій симетричні відносно прямої  $y = x$ .

4. Обернені тригонометричні функції  $y = \arcsin x$  й т.д. є оберненими не для  $y = \sin x$  й т.д., а тільки для їхніх частин, що відповідають головним значенням аргументу  $x$ ;

**Приклад:**  $y = \operatorname{tg} x$  тільки при  $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ ,  $y \in (-\infty; +\infty)$  має обернену функцію  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $x \in (-\infty; \infty)$ ,  $y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ .

### Теорема про існування неперервної оберненої функції

**Означення.** Функція  $y = f(x)$  називається **строго монотонно зростаючою** (спадною) на множині  $X$ , якщо для будь-яких  $x_1 < x_2$  з  $X$

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (} f(x_1) > f(x_2) \text{)}.$$

**Теорема.** Якщо функція  $y = f(x)$ ,  $x \in [a; b]$ ,  $y \in [c; d]$  строго монотонно зростає (спадає) і неперервна, то існує однозначна неперервна строго монотонно зростаюча (спадна) обернена до неї функція  $y = \phi(x)$ ,  $x \in [c; d]$ ,  $y \in [a; b]$ .

### Доведення

Випливає з того, що функція  $y = f(x)$  встановлює між відрізками  $[a; b]$  і  $[c; d]$  взаємно однозначну відповідність і для всіх  $x_1 < x_2$  буде  $y_1 < y_2$  (якщо функція зростає).

Аналогічно для строго монотонно спадної функції.

## Рівномірна неперервність. Формулювання теореми Кантора

**Означення.** Функція  $y = f(x)$  називається **рівномірно неперервною**, якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  одне для  $\forall x, x_0 \in X$  і таке, що при  $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

**Приклад:**  $y = \sqrt{x}$  рівномірно неперервна на  $[1; +\infty)$ .

$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$ , оскільки  $\forall x, x_0 \geq 1$ , то

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{1}{2}.$$

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{2}.$$

Щоб  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , потрібно  $\frac{|x-x_0|}{2} < \varepsilon$ , тобто  $|x - x_0| < 2\varepsilon$ , таким чином,  $\delta = 2\varepsilon$ .

**Теорема Кантора.** Якщо функція  $y = f(x)$  визначена і неперервна на відрізку  $[a; b]$ , то вона рівномірно неперервна на цьому відрізку.

## Питання та завдання для самоконтролю до лекції 5

1. Надайте визначення функції, неперервної в точці?
2. Наведіть приклади неперервних на всій числовій осі.
3. Наведіть приклад функції, яка має розрив I-го роду.
4. Наведіть приклад функції, яка має розрив II-го роду.
5. Яка точка називається точкою усувного розриву?
6. Які відмінності неперервної і рівномірно неперервної функцій?
7. Дайте визначення рівномірно неперервної функції на відрізку.
8. Наведіть приклади неперервної, але не рівномірно неперервної функції.

## РОЗДІЛ II. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

### Лекція 6. Поняття похідної та диференціалу функції в точці

**Мета:** визначити нескінченно великі й нескінченно малі послідовності. Розглянути основні теореми про границі. Ознайомити з монотонними послідовностями.

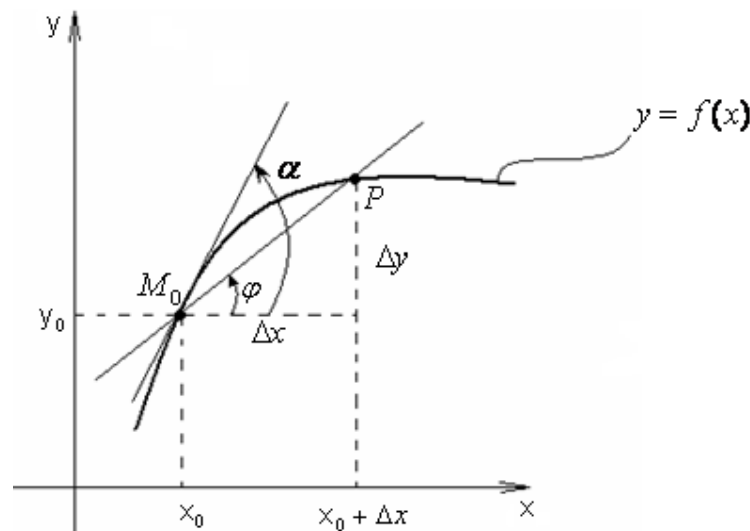
#### План

1. Похідна та її геометричний зміст
2. Диференціал функції

#### Похідна та її геометричний зміст

**Означення.** Якщо функція  $y = f(x)$   $\exists$  в  $\delta(x_0)$  й існує  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ , то вона називається **похідною функції**  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  і позначається  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{\phi \rightarrow \alpha \\ \Delta x \rightarrow 0}} \operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg} \alpha. \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



**Означення.** Граничне положення січної  $M_0P$ , коли точка  $P \rightarrow$  точка  $M_0$ , рухаючись по кривій  $y = f(x)$ , називається **дотичним променем**, проведеним до графіка функції  $y = f(x)$  в точку  $M_0$ .

Якщо дотичні промені праворуч і ліворуч від точки  $M_0$  (тобто спрямовані в різні сторони) лежать на одній і тій самій прямій, то вона називається

**дотичною.** А пряма, що проходить через точку  $M_0$  і перпендикулярна до дотичної, називається **нормаллю**.

Геометричний зміст похідної полягає в тому, що похідна, обчислена в точці дотику, дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної. Тоді

рівняння дотичної:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

рівняння нормалі:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

## Диференціал функції

Нехай  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A \neq \infty$ , тоді  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$ , де  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$ ,  $\Delta y = A \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x)$ ;

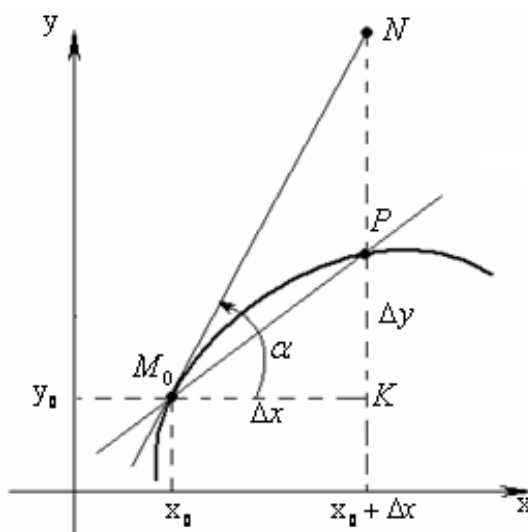
$\Delta x \cdot \alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , а  $A \cdot \Delta x$  – головна частина приросту функції в точці  $M_0$ .

**Означення.** Якщо рівність  $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  виконується, то функція  $y = f(x)$  називають **диференційованою** в точці  $x_0$ , а головна частина приросту функції, лінійна щодо приросту аргументу, називається **диференціалом функції**:

$$dy = A \cdot \Delta x = f'(x_0)\Delta x = y'(x_0)\Delta x.$$

**Зауваження.** Якщо  $u = x$ , то за визначенням  $du = 1 \cdot \Delta x$ , з іншого боку,  $du = dx$ , отже  $dx = \Delta x$  і  $dy = y' \cdot dx$ ,  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{KN}{M_0K} = \frac{KN}{\Delta x} \Rightarrow KN = f'(x_0)\Delta x = dy.$$



Таким чином, алгебраїчна величина відрізка  $KN$  – диференціал функції.

**Теорема.** Якщо функція диференційована в  $M_0$ , то вона й неперервна в цій точці.

**Доведення**

Оскільки

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

та

$$f'(x_0) = A \neq \infty$$
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = 0.$$

Оскільки малому приросту аргументу відповідає малий приріст функції, то функція неперервна.

**Зауваження.** Якщо функція неперервна в точці, то вона може бути й недиференційованою в цій точці.

**Наприклад:**

$$y = |x|, \text{ при } x = 0 \quad y'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|0 + \Delta x| + 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \text{не}\exists,$$

тому що  $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$ ,  $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$ .

**Зауваження.**  $\Delta y = dy + o(\Delta x)$ , тобто приріст відрізняється від диференціала на н.м.ф. при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Тоді  $dy \approx \Delta y$  або  $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$ .

## Питання та завдання для самоконтролю до лекції 6

1. Дайте визначення диференціалу функції в точці
2. Наведіть геометричну інтерпретацію диференціала функції в точці.
3. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції в точці.
4. Чому дорівнює кутковий коефіцієнт нормалі до графіка функції в точці?
5. Наведіть приклад застосування диференціалу функції для наближеного обчислення значення функції в точці.

## Лекція 7. Односторонні похідні функції в точці. Правила обчислення похідних. Таблиця похідних елементарних функцій. Похідна оберненої функції

**Мета:** Ознайомити з поняттям односторонніх похідних, нескінченних похідних функції в точці, геометричним змістом цих понять. Навчити

користуватися таблицею похідних елементарних функцій. Ознайомити з теоремою про похідні взаємно обернених функцій

### План

1. Односторонні похідні. Нескінченні похідні
2. Правила обчислення похідних
3. Таблиця похідних
4. Теорема про похідні взаємно обернених функцій

### Односторонні похідні. Нескінченні похідні

Це питання розглянемо на прикладах.

1)  $\square y = |x|, x \in (-\infty; +\infty)$ , тому що  $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$ , то  $y' = (+0) = 1$ , і оскільки  $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$ , то  $y'(-0) = -1$ , у цьому прикладі односторонні похідні існують, але не рівні між собою.

2)  $\square y = \sqrt{x}, x \in [0; +\infty)$ ,

$$y'(+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{0 + \Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty,$$

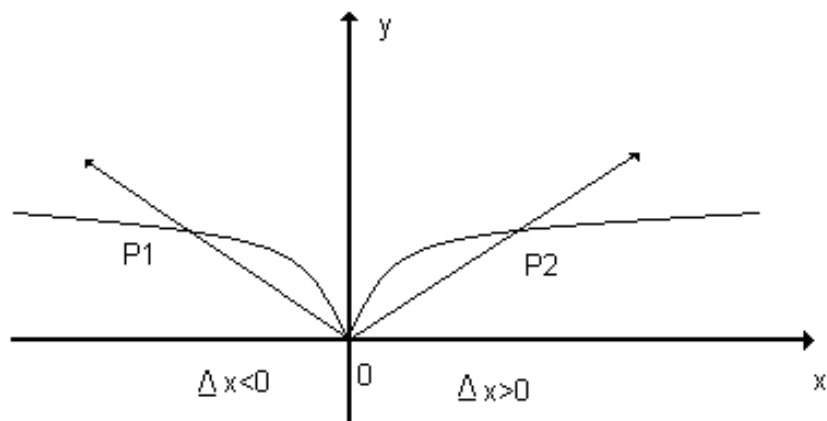
таким чином,  $y'(+0) = +\infty$ , тут похідна не тільки одностороння, але й нескінченна.

3)  $\square y = x^{\frac{2}{3}}, x \in (-\infty; +\infty)$ ,

$$y'(+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{(x)^{\frac{2}{3}} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}} = +\infty,$$

$$y'(-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}} = -\infty, \text{ таким чином, } y'(0) \text{ не } \exists.$$

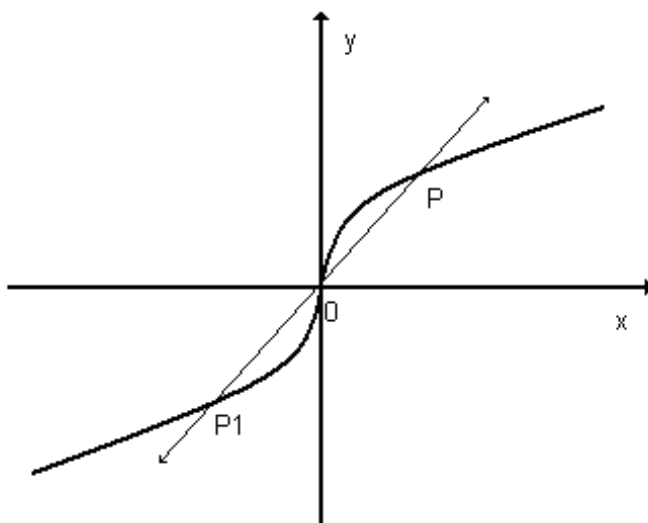
Дотичні промені лежать на одній прямій і спрямовані в один бік (див. рисунок).



4) Нехай  $y = x^{1/3}$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ , тоді

$$y'(+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{(\Delta x)^{1/3} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} = +\infty,$$

$$y'(-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} = +\infty.$$



### Правила обчислення похідних

**Означення.** Функція диференційована на множині  $X$ , якщо вона диференційована в кожній точці цієї множини.

Нехай функції  $u(x)$  і  $v(x)$  диференційовані на множині  $X$ , а  $c = const$ , тоді:

1)  $(cu)' = cu'$ ;

2)  $(u + v)' = u' + v'$ ;

3)  $(uv)' = u'v + uv'$ ;

4)  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ , якщо  $v \neq 0$  при  $\forall x \in X$ .

Доведення правила 4):

$$\begin{aligned} \text{II } y &= \frac{u(x)}{v(x)}, \\ \Delta y &= \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x)v(x + \Delta x)} = \\ &= \frac{(u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x)) - (u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x))}{v(x)v(x + \Delta x)} = \\ &= \frac{\Delta u \cdot v(x) - u(x) \cdot \Delta v}{v(x)v(x + \Delta x)}; \\ y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) - u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)v(x + \Delta x)} = \\ &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \end{aligned}$$

Аналогічно доводяться інші три формули. (Довести самостійно).

### Таблиця похідних

$(x^a)' = ax^{a-1} \ (a \in \mathbb{R})$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ ( x  < 1)$
$(a^x)' = a^x \ln a \ (a > 0, a \neq 1)$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ ( x  < 1)$
$(e^x)' = e^x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x} \ (x > 0)$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \ (a > 0, a \neq 1, x > 0)$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \ x \neq \frac{\pi(2n+1)}{2}, \ n \in \mathbb{Z}$	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \ (x \neq 0)$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \ (x \neq \pi n, \ n \in \mathbb{Z}).$	

Виведення деяких формул з таблиці:

1)  $\text{II } y = x^a \ (a \in \mathbb{R}, a \neq 0), \quad \text{II } x \neq 0, \text{ тоді}$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^a - x^a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^a \left( \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1 \right)}{\Delta x} =$$

$$= x^a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1},$$

(з таблиці еквівалентних  $(1 + x)^a - 1 \sim ax$  при  $x \rightarrow 0$ )

□  $x = 0$ , тоді

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^{1-a}} = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & a < 1 \end{cases}$$

2) □  $y = \ln x$ ,  $x \in (0; +\infty)$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x};$$

(оскільки  $\ln(1 + x) \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ );

3)  $y = \sin x$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x,$$

(оскільки  $\sin x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ).

### Теорема про похідні взаємно обернених функцій

Якщо функції  $y = f(x)$  й  $x = \phi(y)$  взаємно обернені, диференційовані та  $f'(x) \neq 0$  при  $\forall x \in X$ , то  $\phi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ , або  $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ .

Доведення

$$\phi'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Оскільки функція  $x = \phi(y)$  диференційована, то вона й неперервна, тобто при  $\Delta y \rightarrow 0 \Delta x \rightarrow 0$ , тоді  $\phi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ , або  $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ .

**Приклад:**  $y = \arcsin x$ ,  $x \in [-1; 1]$ ,  $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , обернена функція  $x = \sin y$ .

□  $x \neq \pm 1$ , тоді

$$\begin{aligned} y' &= (\arcsin x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{□ } x = -1, \quad y'(-1+0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\arcsin(-1 + \Delta x) - \arcsin(-1)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\arcsin(-1 + \Delta x) + \frac{\pi}{2}}{\Delta x} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \arcsin(-1 + \Delta x) + \frac{\pi}{2} = \varphi \Rightarrow \Delta x = 1 - \cos \varphi \\ \text{при } \Delta x \rightarrow +0 \quad \varphi \rightarrow +0 \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow +0} \frac{\varphi}{1 - \cos \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow +0} \frac{\varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = +\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{□ } x = 1, \quad y'(1-0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\arcsin(1 - \Delta x) - \arcsin 1}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\arcsin(1 - \Delta x) - \frac{\pi}{2}}{\Delta x} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \arcsin(1 - \Delta x) - \frac{\pi}{2} = \varphi \Rightarrow \Delta x = 1 - \cos \varphi \\ \text{при } \Delta x \rightarrow +0 \quad \varphi \rightarrow +0 \end{array} \right\} = \lim_{\varphi \rightarrow +0} \frac{\varphi}{1 - \cos \varphi} \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow +0} \frac{\varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = +\infty. \end{aligned}$$

**Питання та завдання для самоконтролю до лекції 7**

1. Наведіть поняття лівосторонньої похідної функції в точці і геометричну її інтерпретацію.
2. Наведіть поняття правосторонньої похідної функції в точці і геометричну її інтерпретацію.
3. Що означає нескінченність похідної функції в точці?
4. Чому дорівнює похідна добутку трьох функцій?
5. Наведіть формулу для обчислення похідної частки двох функцій.
6. Доведіть формулу для обчислення похідної оберненої функції.
7. Наведіть приклад застосування похідної оберненої функції.

**Лекція 8. Похідна складної функції, функції, заданої неявно.  
Інваріантність форми першого диференціалу функції однієї змінної.  
Формула Лейбніца**

**Мета:** визначити правила обчислення логарифмічної похідної, похідної складної функції. Довести інваріантність форми першого диференціалу функції однієї змінної. Ознайомити з формулою Лейбніца і способом обчислення похідної функції, заданої неявно.

**План**

1. Похідна суперпозиції
2. Логарифмічне диференціювання
3. Інваріантність форми диференціала першого порядку
4. Похідні й диференціали вищих порядків
5. Формула Лейбніца
6. Диференціювання функцій, заданих параметрично й неявно

**Похідна суперпозиції**

□  $y = f(u), u = \phi(x), x_0 \in X, u_0 \in U, u_0 = \phi(x_0)$ .

**Теорема.** Якщо  $y = f(u), u = \phi(x)$  диференційовані при  $x = x_0, u = u_0$ , то суперпозиція  $y = f(\phi(x))$  теж диференційована в точці  $x_0$ , при цьому

$$f'(\phi(x_0)) = f'_u(u_0) \times \phi'(x_0).$$

**Доведення.**

$$\begin{aligned} f'(\phi(x_0)) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\phi(x_0 + \Delta x)) - f(\phi(x_0))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)}{\Delta x} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta u \rightarrow 0}} \frac{f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)}{\Delta u} \times \frac{\phi(x_0 + \Delta x) - \phi(x_0)}{\Delta x} = \\ = f'_u(u_0) \times \phi'_x(x_0).$$

$\Delta u \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , тому що диференційована в точці  $x_0$  функція є й неперервною в цій самій точці.

**Правило.** Похідна суперпозиції функції дорівнює добутку похідної функції по проміжному аргументу на похідну проміжного аргументу по незалежній змінній.

**Приклад.**  $(\sin(3x^2 + 2x - 1))' = (\cos(3x^2 + 2x - 1)) \times (6x + 2)$ .

### Логарифмічне диференціювання

□  $y = (u(x))^{v(x)}$ , де  $u(x) > 0$  й обидві функції  $u(x), v(x)$  диференційовані в області  $X$ .

$$\ln y = v(x) \ln u(x), \\ \frac{1}{y} y' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}, \\ y' = y \left( v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right).$$

Остаточно

$$y' = (u(x))^{v(x)} \left( v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)} \right).$$

### Інваріантність форми диференціала першого порядку

□  $y = f(x), x \in X, y \in Y, x$  – незалежна змінна. Тоді  $dy = \underline{f'(x)dx}$ .

□  $y = f(\phi(x)), x \in X, u = \phi(x) \in U, y \in Y$ , тобто  $u$  - залежна змінна.

$$dy = (f(\phi(x)))' du = f'(u) \cdot u'(x) dx = f'(u) du.$$

Таким чином, форма запису диференціала першого порядку не змінюється від того, чи є аргумент незалежною змінною або функцією.

### Похідні й диференціали вищих порядків

*Означення.* Якщо функція  $y' = f'(x)$  диференційована на  $X$ , то  $(y')' = (f'(x))'$  називається похідною другого порядку від функції  $y = f(x)$  й позначається  $y^{(2)} = y'' = f''(x)$ . Аналогічно визначається диференціал другого порядку як диференціал від диференціалу першого порядку, тобто:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (df'(x))dx + f'(x)d(dx) =$$

$$= f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

Аналогічно визначаються похідні й диференціали третього й вище порядків.

### Зауваження.

1. Якщо  $x$  є незалежною змінною, то  $dx = \Delta x = \text{const}$  й тоді  $d^2x = d(\Delta x) = 0$ , тобто  $d^2y = f''(x)(dx)^2$ , таким чином, диференціал другого порядку не є інваріантним.

2. З останньої формули одержимо  $f''(x) = \frac{d^2y}{(dx)^2}$ . (Де два ігрек по де ікс двічі).

### Формула Лейбніца

$$(uv)' = u'v + uv',$$

$$(uv)'' = (u'v + uv')' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''''.$$

За допомогою методу математичної індукції можна довести, що

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)},$$

де

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Приклад.** □  $y = x \ln x$ , визначити  $y^{(10)}$ .

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= C_{10}^0 x (\ln x)^{(10)} + C_{10}^1 x' (\ln x)^{(9)} + C_{10}^2 x'' (\ln x)^{(8)} + \dots + C_{10}^{10} x^{(10)} \ln x = \\ &= 1 \cdot x (\ln x)^{(10)} + 10 \cdot 1 \cdot (\ln x)^{(9)} + \\ &+ \frac{10 \cdot 9}{2!} \cdot 0 \cdot (\ln x)^{(8)} + \dots + 0 = x (\ln x)^{(10)} + 10 (\ln x)^{(9)}, (\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}, \end{aligned}$$

$$(\ln x)'' = -1x^{-2}, (\ln x)''' = (-1)(-2)x^{-3},$$

,...,

$$(\ln x)^{(9)} = (-1)(-2)\dots(-8)x^{-9} = (-1)^8 8! x^{-9} = 8! x^{-9},$$

$$(\ln x)^{(10)} = -9! x^{-10} \dots$$

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= x(-1) \cdot 9! x^{-10} + 10 \cdot 8! x^{-9} = -x^{-9} \cdot 9! + x^{-9} \cdot 10 \cdot 8! = \\ &= 8! x^{-9} (10 - 9) = 8! x^{-9}. \end{aligned}$$

## Диференціювання функцій, заданих параметрично й неявно

1.  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  і  $t \in [\alpha; \beta]$ ,  $x(t), y(t)$  диференційовані за параметром  $t$ .

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t dt}{x'_t dt} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Аналогічно визначається

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{(y'_x)'_t dt}{x'_t dt} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

і т.д.

**Приклад.** Коло радіуса  $R$  із центром у точці  $O$  параметрично задається системою рівнянь.

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}, t \in [0; 2\pi).$$

$$y'_x = \frac{R \cos t}{-R \sin t} = -ctgt, t \in (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi).$$

$$y''_{xx} = \frac{(-ctgt)'_t}{-R \sin t} = -\frac{1}{R \sin^3 t}, t \in (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi).$$

2. Випадок неявного завдання функції ми розглянемо на прикладі.

$$\square \sin(xy) - e^y + 2x = 0.$$

Диференціюємо ліву й праву частини рівності:

$$\cos(xy)(1 \cdot y + xy') - e^y y' + 2 = 0,$$

$$xy' \cos(xy) - e^y y' = -2 - y \cos(xy),$$

$$y' = \frac{2 + y \cos(xy)}{e^y - x \cos(xy)}.$$

## Питання та завдання для самоконтролю до лекції 8

1. Як визначається похідна складної функції?
2. Яким способом обчислюється похідна функції, заданої неявно?
3. Надати геометричний зміст похідної функції в точці?
4. У чому полягає механічний зміст похідної функції?
5. Для диференціювання якої функції застосовується формула Лейбніца?
6. Як обчислюється похідна функції другого порядку?
7. Наведіть приклади застосування формули Лейбніца.
8. Наведіть приклад обчислення похідної від суперпозиції двох функцій.
9. Наведіть приклад обчислення похідної від суперпозиції трьох функцій.

10. Наведіть приклад обчислення похідної функції, заданої неявно.

## Лекція 9. Основні теореми диференціального числення: теореми Ролля, Лагранжа, Коші. Правило Лопіталя

**Мета:** Ознайомити здобувачів з основними теоремами диференціального числення – теоремою Ролля, теоремою Лагранжа (формулою кінцевих приростів), теоремою Коші. Навчити користуватися правилом Лопіталя розкриття невизначеностей.

### План

1. Основні теореми диференціального числення
2. Правило Лопіталя

### Основні теореми диференціального числення

#### Теорема (Ролля).

Якщо  $y = f(x) \in C[a, b]$ , диференційована у внутрішніх точках цього відрізка і  $f(a) = f(b)$ , то  $\exists$  хоча б одна точка  $\zeta \in (a, b)$  така, що  $f'(\zeta) = 0$ .

#### Доведення.

□  $M = \max_{[a;b]} f(x)$ ,  $m = \min_{[a;b]} f(x)$ .

1. Якщо  $m = M \Rightarrow f(x) = const$  і тоді  $f'(x) = 0$  при  $\forall x \in [a; b]$ .
2. Якщо  $m > M$ , то хоч один із них лежить усередині відрізка  $[a; b]$ , тому що  $f(a) = f(b)$ .

□ це буде  $M = f(\zeta)$ , де  $\zeta \in (a; b)$ .

Тоді  $f(\zeta) \geq f(\zeta + \Delta x)$  при  $\forall \Delta x$ .

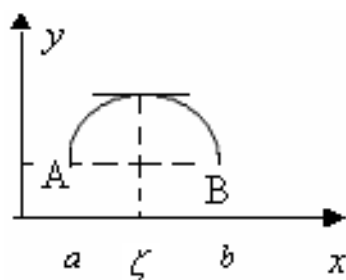
$$f'(\zeta + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(\zeta + \Delta x) - f(\zeta)}{\Delta x} \leq 0,$$

$$f'(\zeta - 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(\zeta + \Delta x) - f(\zeta)}{\Delta x} \geq 0,$$

унаслідок теореми про граничний перехід у нерівностях.

Оскільки  $y = f(x)$  диференційована у внутрішніх точках відрізка, то  $f'(\zeta + 0) = f'(\zeta - 0) = f'(\zeta)$ , тобто  $f'(\zeta) = 0$

Таким чином, при  $x = \zeta$  дотична паралельна осі  $OX$ .



### Теорема (Лагранжа).

Якщо  $y = f(x) \in C[a; b]$  і диференційована у внутрішніх точках цього відрізка, то  $\exists$  хоча б одна така точка  $\zeta \in (a, b)$ , що

$$f'(\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

### Доведення

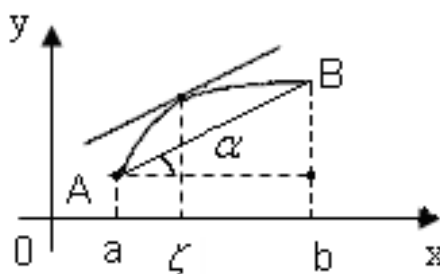
II  $F(x) = f(x) + \lambda x$  і така, що  $F(a) = F(b)$ , тобто

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b \Rightarrow \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

За теоремою Ролля  $F'(\zeta) = 0$ , або

$$f'(\zeta) + \lambda = 0 \Rightarrow f'(\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Отже, дотична паралельна до січної.



### Теорема (Коші)

II  $y = f(x)$  і  $y = g(x) \in C[a; b]$  й диференційовані у внутрішніх точках цього відрізка,  $g'(x) \neq 0$  при  $\forall x \in (a; b)$ . Тоді  $\exists$  хоча б одна точка  $\zeta \in (a, b)$  така, що

$$\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

### Доведення

II  $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$  і така, що  $F(b) = F(a)$ , тобто

$$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b) \Rightarrow \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad (g(b) \neq g(a)),$$

оскільки у протилежному разі за теоремою Ролля  $g'(\zeta) = 0$ , що суперечить умові теореми Коші).

За теоремою Ролля  $F'(\zeta) = 0$ , тобто

$$f'(\zeta) + \lambda g(\zeta) = 0,$$

або

$$\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} = -\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

### Правило Лопіталя

**Теорема.** Якщо  $f(x)$  і  $g(x)$  задовольняють всі умови теореми Коші на  $[a; b]$  можливо, крім точки  $x_0 \in (a; b)$  і  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , тоді, якщо

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$  (скінченний або нескінченний), то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = A$ .

#### Доведення

Довизначимо  $f(x)$  і  $g(x)$  в точці  $x_0$  їхніми граничними значеннями й тоді ці функції будуть неперервними в  $\delta(x_0)$ . За теоремою Коші в  $\delta(x_0)$   $\exists (\cdot)$  між  $x_0$  і  $x_0 + \Delta x$  така, що

$$\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)} = \frac{f(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)},$$

При  $x = x_0 + \Delta x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow x_0$ ,  $\zeta \rightarrow x_0$  і

$$\lim_{\zeta \rightarrow x_0} \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

або

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

Аналогічну теорему можна довести й при  $x \rightarrow \infty$ , і у випадку невизначеності  $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ .

**Зауваження.** Якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \text{не}\exists$ , то за правилом Лопіталя ніяких висновків про  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  не впливає.

### Розкриття невизначеностей за допомогою правила Лопіталя

Правило Лопіталя істотно полегшує розкриття всіх типів невизначеностей, особливо  $\{1^\infty\}$ ,  $\{0^0\}$ ,  $\{\infty^0\}$ .

## Приклади

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x}{\ln x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (9x^3 + 2x) = \infty.$$

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x}{\ln x} = \infty.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^x = \{\infty^0\} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln \operatorname{ctg} x};$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{x^{-1}} &= \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x} \left( -\frac{1}{\sin^2 x} \right)}{-\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos x \cdot \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Таким чином,  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^x = e^0 = 1$ .

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \{\infty^0\} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln n};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = e^0 = 1.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} \quad (a > 1, k \in \mathbb{Z}),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{kn^{k-1}}{a^n \ln a} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(k-1)n^{k-2}}{a^n \ln^2 a}; \dots; \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(k-1)\dots(k-(k-1))n^0}{a^n \ln^k a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k!}{a^n \ln^k a} = \frac{k!}{\ln^k a} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = 0,$$

тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1, k \in \mathbb{Z}).$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \text{не } \exists, \text{ таким чином, правило Лопіталя в}$$

цьому прикладі застосовувати не можна.

Але

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x} \sin x\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \sin x\right)} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1,$$

тому що  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = 0$  (за теоремою про добуток н.м.ф. на обмежену функцію).

Отже, границя функції може існувати, хоча границя відношення похідних і не існує.

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 9

1. Які невизначеності можна розкрити за допомогою правила Лопіталя?
2. Сформулюйте теорему Ролля.
3. Сформулюйте теорему Лагранжа. Чому її друга назва – формула кінцевих приростів?
4. Надайте геометричну інтерпретацію теореми Ролля.
5. Сформулюйте теорему Коші.
6. Надайте геометричну інтерпретацію теореми Лагранжа.
7. Наведіть геометричний зміст теореми Коші.
8. На яку теорему спирається доведення теореми Лагранжа?
9. Яка теорема застосовується при доведенні теореми Коші?
10. Покажіть, як скористатися правилом Лопіталя для визначення третьої важливої границі.

### Лекції 10. Формула Тейлора. Подання деяких функцій формулами Маклорена. Застосування формули Маклорена до наближених обчислень

**Мета:** вивести формулу Тейлора розкладання функції в степеневий ряд. Визначити залишок формули Тейлора. Навести формулу Тейлора в диференціалах. Подати деякі функції формулами Маклорена. Навчити застосовувати формули Маклорена до наближених обчислень значень функцій.

#### План

1. Формула Тейлора
2. Залишок формули Тейлора. Формула Тейлора в диференціалах
3. Подання деяких функцій формулами Маклорена
4. Застосування формули Маклорена до наближених обчислень

## Формула Тейлора

Розглянемо многочлен

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + C_3(x - a)^3 + \dots + C_n(x - a)^n,$$

$$P'_n(x) = C_1 + 2C_2(x - a) + 3C_3(x - a)^2 + \dots + nC_n(x - a)^{n-1},$$

$$P''_n(x) = 2C_2 + 3 \cdot 2 \cdot C_3(x - a) + \dots + n(n - 1)C_n(x - a)^{n-2},$$

$$P'''_n(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot C_3 + \dots + n(n - 1)(n - 2)C_n(x - a)^{n-3},$$

.....

$$P_n^{(n)}(x) = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - (n - 1))C_n,$$

$$P_n^{(n+1)}(x) = 0,$$

$$P_n(a) = C_0,$$

$$P'_n(a) = C_1,$$

$$P''_n(a) = 2C_2,$$

$$P'''_n(a) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot C_3,$$

.....

$$P_n^{(n)}(a) = n(n - 1)(n - 2) \dots 1 \cdot C_n.$$

Таким чином,

$$C_0 = \frac{P_n(a)}{0!},$$

$$C_1 = \frac{P'_n(a)}{1!},$$

$$C_2 = \frac{P''_n(a)}{2!},$$

$$C_3 = \frac{P'''_n(a)}{3!}, \dots, C_n = \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}.$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Нехай  $y = f(x)$  диференційована  $(n+1)$  раз у  $\delta(a)$ . Побудуємо для неї многочлен  $P_n(x)$  так, щоб

$$\forall P_n^k(a) = f^{(k)}(a), \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Тоді

$$C_k = \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!} = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

і

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

– многочлен Тейлора,

$f(x) - P_n(x) = R_{n+1}(x)$  називається **залишком**, а

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{n+1}(x)$$

– формулою Тейлора.

**Зауваження:** якщо  $a = 0$ , то

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{n+1}(x)$$

називається **формулою Маклорена**.

### **Залишок формули Тейлора. Формула Тейлора в диференціалах**

Визначимо

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}.$$

Застосуємо правило Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - P'_n(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$$

.....

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(k)}(x) - P^{(k)}_n(x)}{n(n-1)\dots(n-k+1)(x-a)^{n-k}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

.....

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x) - P^{(n)}_n(x)}{n!} = 0, \quad \text{оскільки} \quad f^{(n)}(a) = P^{(n)}_n(a).$$

Позаяк за правилом Лопітала  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = 0$ , то  $R_{n+1}(x)$  якщо  $x \rightarrow a$  є нескінченно малою більш високого порядку малості, ніж  $(x-a)^n$ . У цьому випадку  $R_{n+1}(x) = O((x-a)^n)$  називають **залишком у формі Пеано**.

Для оцінки залишку частіше за все використовують формулу

$$R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

де  $\xi$  лежить між  $x$  і  $a$  – тобто **залишок формули Тейлора в формі Лагранжа**.

Нехай  $x - a = \Delta x$ , тоді формула Тейлора набере вигляду:

$$f(a + \Delta x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(\Delta x) + \frac{f''}{2!} \frac{f^{(n)}(a)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1},$$

тут залишок у формі Лагранжа

$$f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta y|_{x=a} = \sum_{k=1}^n \frac{d^{(k)}y(a)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}$$

або

$$\Delta y|_{x=a} = \sum_{k=1}^n \frac{d^{(k)}y(a)}{k!} + \frac{d^{(n+1)}y(\xi)}{(n+1)!}$$

– формула Тейлора в диференціалах.

### Подання деяких функцій формулами Маклорена

**Теорема.** Якщо всі похідні функції  $y = f(x)$  до  $(n+1)$ -го порядку включно обмежені одним і тим самим числом  $M$  для  $\forall x \in \delta(0)$ , то цю функцію з великою точністю можна замінити многочленом Маклорена .

**Доведення**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''}{2!} \frac{f^{(n)}(0)^n}{n!} \quad n+1$$

де  $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ .

$$0 \leq |R_{n+1}(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{M\delta^{n+1}}{(n+1)!}$$

Оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ , то за [теоремою про границю проміжної послідовності](#)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(x) = 0,$$

тобто для досить великих  $n$  і  $\forall x \in \delta(0)$

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

**Приклади**

1. $y = \sin x,$	$y(0) = 0,$
$y' = \cos x,$	$y'(0) = 1,$
$y'' = -\sin x,$	$y''(0) = 0,$

$$y''' = -\cos x, \quad y'''(0) = -1,$$

.....

.....

Помітимо, що всі похідні парного порядку дорівнюють нулю, а непарного рівні  $\pm 1$ , тобто всі вони обмежені числом 1, тоді

$$\sin x \approx 0 + \frac{1}{1!}x + 0 + \frac{-1}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1},$$

$$\sin x \approx \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

для  $\forall x \in \delta(0)$ .

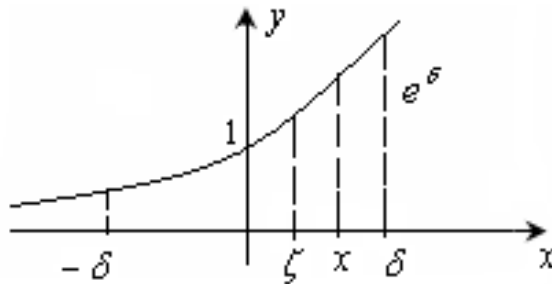
Аналогічно

$$\cos x \approx \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

для  $\forall x \in \delta(0)$ .

2.  $y = e^x$ , тому що всі похідні  $y^{(k)} = e^x$ , то  $y^{(k)}(0) = 1$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ); оцінимо залишок

$$0 \leq |R_{n+1}(x)| = \frac{e^\zeta |x|^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^\delta \delta^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$



Тоді

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

$$e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

для  $\forall x \in \delta(0)$ .

$$\begin{aligned}
3. \quad y &= \ln(1+x), & y(0) &= 0, \\
y' &= \frac{1}{x+1} = (1+x)^{-1}, & y'(0) &= 1, \\
y'' &= -(1+x)^{-2}, & y''(0) &= -1, \\
y''' &= (-1)(-2)(1+x)^{-3}, & y'''(0) &= 2!
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\dots \\
y^{(n)} &= (-1)(-2) \dots (-n+1)(1+x)^{-n}, \\
y^{(n)} &= (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}, \quad y^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{aligned}$$

Тобто

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \frac{x}{1!} - \frac{1!x^2}{2!} + \frac{2!x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!x^n}{n!} + R_{n+1}(x) = \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Оцінімо залишок :

$$\begin{aligned}
R_{n+1}(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(-1)^n n! (1+\xi)^{-(n+1)}}{(n+1)!} x^{n+1} = \\
&= (-1)^n \frac{1}{n+1} \left( \frac{x}{1+\zeta} \right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Можна довести, що  $\left| \frac{x}{1+\zeta} \right| < 1$  для  $\forall x \in (-1; 1]$ , тоді



$$0 \leq |R_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1} \left| \frac{x}{1+\xi} \right|^{n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Переходячи до границі в нерівності, одержуємо, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} R(x) = 0$ . Тоді для досить великих  $n$   $\ln(1+x) \approx \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$  при  $\forall x \in \delta(0)$ , де  $\delta < 1$ .

$$\begin{aligned}
4. \quad y &= (1+x)^a \quad (a \in \mathbb{R}) & y(0) &= 1 \\
y' &= a(1+x)^{a-1} & y'(0) &= a \\
y'' &= a(a-1)(1+x)^{a-2} & y''(0) &= a(a-1) \\
&\dots\dots\dots \\
y^{(n)} &= a(a-1)\dots(a-n+1)(1+x)^{a-n}
\end{aligned}$$

$$y^{(n)}(0) = a(a-1)\dots(a-n+1),$$

Тобто

$$(1+x)^a \approx 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)x^n}{n!},$$

або

$$(1+x)^a \approx 1 + \sum_{k=1}^n \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} x^k$$

для  $\forall x \in \delta(0)$ , де  $\delta < 1$ .

Оцінимо залишок:

$$\begin{aligned} 0 \leq |R_{n+1}(x)| &\leq \left| \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{(n+1)!} (1+\zeta)^{a-(n+1)} x^{n+1} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{a}{1} \frac{a-1}{2} \dots \frac{a-n}{n+1} \right| (1+\zeta)^a \left| \frac{x}{1+\zeta} \right|^{n+1}. \end{aligned}$$

$(1+\zeta)^a$  не залежить від  $n$ , тобто константа;

$$\left| \frac{x}{1+\zeta} \right| < 1 \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{1+\zeta} \right|^{n+1} = 0,$$

$$\left| \frac{a}{1} \right| \left| \frac{a-1}{2} \right| \dots \left| \frac{a-n}{n+1} \right| - \text{для досить великих } n \quad \left| \frac{a-n}{n+1} \right| < 1,$$

тобто  $\left\{ \left| \frac{a}{1} \frac{a-1}{2} \dots \frac{a-n}{n+1} \right| \right\}$  монотонно спадає, таким чином, за теоремою про границю проміжної послідовності  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$ .

### Зауваження

1. Якщо  $a = n$ , то  $y^{(n+1)} = 0$  і  $R_{n+1}(x) = 0$  тобто

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} x^k = \\ &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)x^k}{k!}, \end{aligned}$$

зауважимо, що

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots n}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!},$$

отже,

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$

– формула бінома Ньютона.

2. Якщо  $a = -1$ , то

$$(1+x)^{-1} \approx 1 - x - x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n,$$

або  $\frac{1}{1+x} \approx \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$ . Тобто для досить великого  $n$  суму перших членів спадної геометричної прогресії можна замінити сумою тієї самої нескінченно спадної геометричної прогресії.

**Самостійно відповісти:** чому геометрична прогресія спадна?

### Застосування формули Маклорена до наближених обчислень

1. Визначити числове значення  $\ln(1,01)$  з точністю до  $10e - 5$

$$\ln(1 + 0,01) \approx 0,01 - \frac{(0,01)^2}{2} + \frac{(0,01)^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(0,01)^n}{n}.$$

За заданою точністю визначимо потрібну кількість доданків :

$$|R_{n+1}(0,01)| = \left| \frac{1}{n+1} \left( \frac{0,01}{1+\zeta} \right)^{n+1} \right| < \frac{(0,01)^{n+1}}{n+1} < 10e - 5,$$

оскільки  $0 < \zeta < 0,01$ .

Нехай  $n = 1 \Rightarrow$

$$\frac{(0,01)^2}{2} = \frac{0,0001}{2} = 0,00005 > 10^{-5}.$$

Нехай  $n = 2 \Rightarrow$

$$\frac{(0,01)^3}{3} = \frac{0,000001}{3} = 0,000000(3)\dots < 10^{-5}.$$

Тоді  $n = 2$  і

$$\ln(1 + 0,01) \approx 0,01 - \frac{(0,01)^2}{2} = 0,01 - 0,00005 = 0,00995,$$

$\ln(1,01) \approx 0,00995$  з точністю до  $10e - 5$ .

2. Визначити числове значення  $e^{-0,02}$  з точністю до  $10e - 4$

$$e^{-0,02} \approx 1 + \frac{(-0,02)}{1!} + \frac{(-0,02)^2}{2!} + \frac{(-0,02)^3}{3!} + \dots + \frac{(-0,02)^n}{n!}.$$

За заданою точністю визначимо потрібну кількість доданків :

$$|R_{n+1}(-0,02)| = \left| \frac{e^\zeta (-0,02)^{n+1}}{(n+1)!} \right| < \frac{(0,02)^{n+1}}{(n+1)!} < 10e - 4,$$

оскільки  $-0,02 < \zeta < 0$ ;  $e^{-0,02} < e^\zeta < 1$ .

Нехай  $n = 1 \Rightarrow$

$$\frac{(0,02)^2}{2!} = \frac{0,0004}{2} = 0,0002 < 10^{-4}.$$

Нехай  $n = 2 \Rightarrow$

$$\frac{(0,02)^3}{3!} = \frac{0,000008}{6} = 0,000001(3) \dots < 10^{-4}.$$

Оскільки  $n=2$ , то

$$e^{-0,02} \approx 1 - 0,02 + \frac{(0,02)^2}{2} = 0,98 + 0,0002 = 0,9802.$$

З точністю до  $10^{-4}$   $e^{-0,02} \approx 0,9802$ .

### Питання та завдання для самоконтролю до лекцій 10

1. Наведіть формулу Тейлора розкладання функції в ряд за степенями змінної.
2. Як записується залишок формули Тейлора у формі Пеано?
3. Як записується залишок формули Тейлора у форму Лагранжа?
4. Як пов'язані між собою ряди Тейлора і Маклорена?
5. Розкладіть функцію  $y = \sqrt{x - 2}$  за степенями  $(x - 3)$ ?

### Лекція 11. Метод виділення головної частини. Екстремум функції однієї змінної. Друга достатня умова існування екстремуму

**Мета:** Ознайомити з методом виділення головної частини у функції. Надати поняття екстремуму функції однієї змінної. Сформулювати другу достатню умову існування екстремуму.

#### План

1. Метод виділення головної частини
2. Екстремум функції однієї змінної
3. Друга достатня умова існування екстремуму

#### Метод виділення головної частини

Нагадаємо, що якщо  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{A(x-a)^k} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$ , то н.м.ф.  $A(x-a)^k$  називається **головною частиною** н.м.ф.  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ .

Нехай  $\forall f^{(m)}(a) = 0, m = 0, 1, 2, \dots, k-1, f^{(k)}(a) \neq 0$ , тоді за формулою Тейлора  $f(x) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + O((x-a)^k)$ .

Обчислимо границю:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k} = \lim_{x \rightarrow a} \left( 1 + \frac{O((x-a)^k)}{\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k} \right) = 1 + 0.$$

**Висновок.** Перший відмінний від нуля доданок у розкладанні функції  $y = f(x)$  за формулою Тейлора є її головною частиною при  $x \rightarrow a$ .

Обчислимо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{\frac{g^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m} = \frac{f^{(k)}(a)}{g^{(m)}(a)} \frac{m!}{k!} \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^{k-m} = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } k-m > 0 \\ \pm\infty, & \text{якщо } k-m < 0 \\ \frac{f^{(k)}(a)}{g^{(k)}(a)}, & \text{якщо } k=m. \end{cases} \end{aligned}$$

**Приклад**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\}, \\ e^x - e^{-x} - 2x &= \left( 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^3) \right) - \\ - \left( 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + O(x^3) \right) - 2x &= 2x + 2\frac{x^3}{3!} - 2x + O(x^3) = \frac{x^3}{3} + O(x^3), \\ x - \sin x &= x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + O(x^3) \right) = \frac{x^3}{6} + O(x^3). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{6}} = 2.$$

**Екстремум функції однієї змінної. Друга достатня умова існування екстремуму**

**Означення.** Точка  $M_0(x_0; y_0)$  називається **максимальною** на кривій  $y = f(x)$ , якщо для  $\forall x \in \delta(x_0)$  й  $x \neq x_0, f(x_0) > f(x)$ . При цьому  $y_0 = y_{max}$ .

Аналогічно визначається  $y_{min}$ .

Точки максимуму й мінімуму називають **екстремальними**.

### Повторення шкільного матеріалу

Нехай  $f(x) \in C(\delta(x_0))$ .

1. **Необхідна умова** існування екстремуму:

якщо в точці  $M_0$  екстремум, то  $f'(x_0)$  або дорівнює нулю, або нескінченності, або не існує.

2. **Перша достатня умова** існування екстремуму:

якщо  $f'(x_0)$  або дорівнює нулю, або нескінченності, або не існує й при переході через точку  $x_0$   $f'(x)$  змінює знак з (+) на (-), то  $f(x_0) = y_{max}$ , а з (-) на (+), то  $f(x_0) = y_{min}$ .

**Теорема** (друга достатня умова існування екстремуму)

□  $y = f(x) \in C(\delta(x_0))$  і диференційована в  $(.) x_0$   $n$  раз, причому  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ,  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ .

Тоді

1) якщо  $n = 2k$  й  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , то  $y_0 = y_{min}$ ,

якщо  $n = 2k$  й  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , то  $y_0 = y_{max}$ ;

2) якщо  $n = 2k + 1$  й  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , то в  $\delta(x_0)$   $f(x)$  монотонно зростає,

якщо  $n = 2k + 1$  й  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , то в  $\delta(x_0)$   $f(x)$  монотонно спадає.

**Доведення.**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Тоді  $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$  – головна частина приросту  $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ , яка визначає знак цього приросту.

1. Якщо  $n = 2k$  й  $f^{(n)}(x_0) > 0$ ,  $(x - x_0)^{2k} > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0$  при  $\forall x \in \delta(x_0)$ , тобто  $y_0 = f(x_0) = y_{min}$ . Аналогічно визначається  $y_{max}$ .

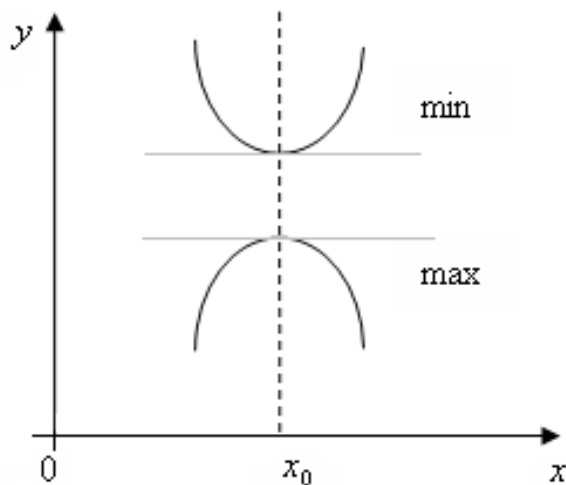
2. Якщо  $n = 2k + 1$  й  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , таким чином, при  $x - x_0 > 0$   $f(x) - f(x_0) > 0$ , а при  $x - x_0 < 0$   $f(x) - f(x_0) < 0$ , тобто більшому аргументу відповідає більше значення функції, отже,  $y = f(x)$  монотонно зростає в  $\delta(x_0)$  Аналогічно доводиться й монотонне спадання.

### Зауваження

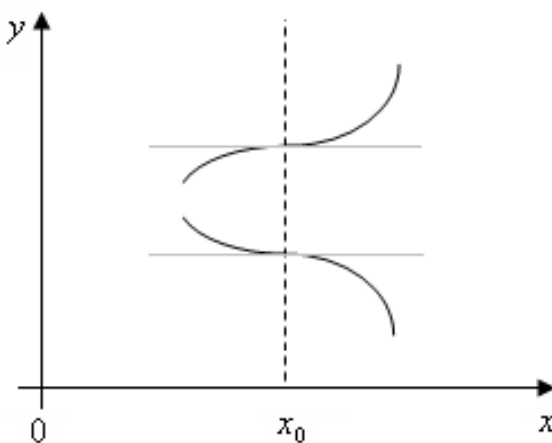
Геометрична ілюстрація необхідної ознаки існування екстремуму:

1)  $f'(x_0) = 0$

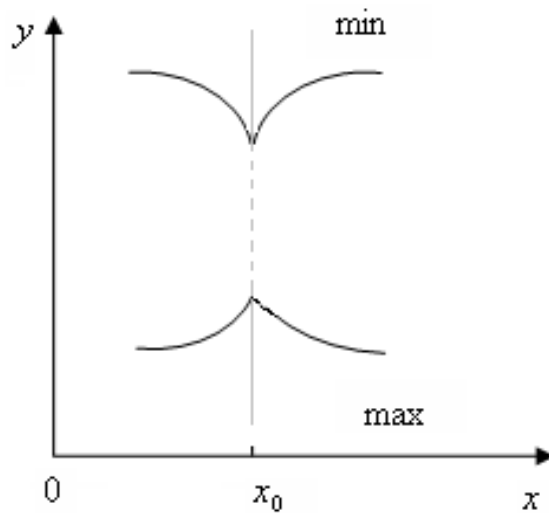
Екстремум є:



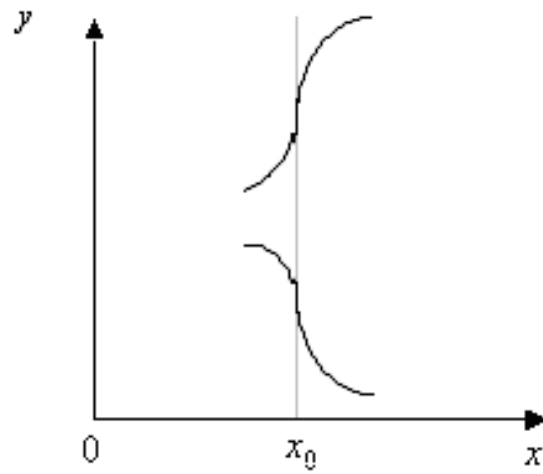
Екстремуму немає:



2)  $f'(x_0) = \pm\infty$

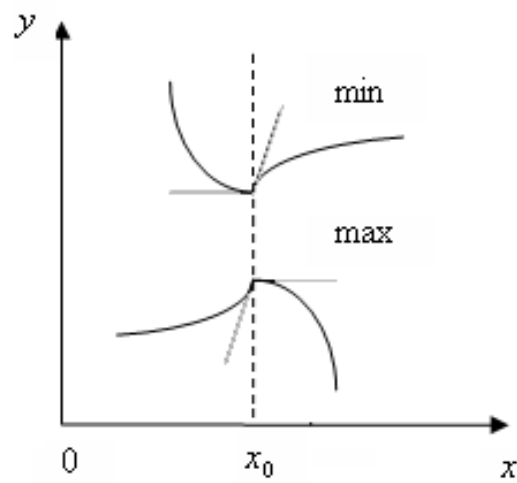


Екстремуму немає.

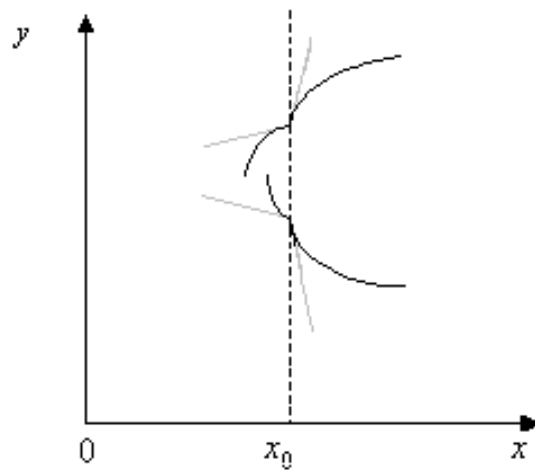


3)  $f'(x_0) = \text{не } \exists$ .

Екстремум є:



Екстремуму немає:



## Питання та завдання для самоконтролю до лекції 11

1. Що визначає головну частину функції?
2. Яка точка називається точкою максимуму? Точкою мінімуму функції?
3. Які умови є необхідними для того, щоб точка була екстремальною?
4. Наведіть приклад функції, яка має точку мінімуму (максимуму).
5. Наведіть приклад функції, яка має точку екстремуму, але не є диференційовною в цій точці.
6. У чому полягають достатні умови точки мінімуму (максимуму)?
7. Що означає нескінченність похідної функції в точці?

## Лекція 12. Точки перегину графіка функції. Асимптоти графіка функції. Схема повного дослідження функції

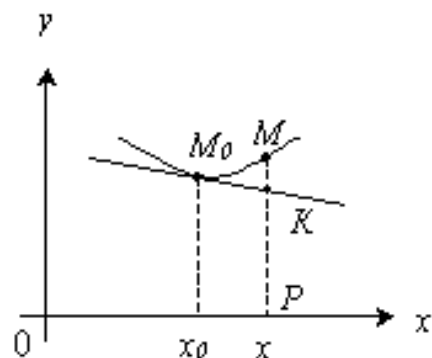
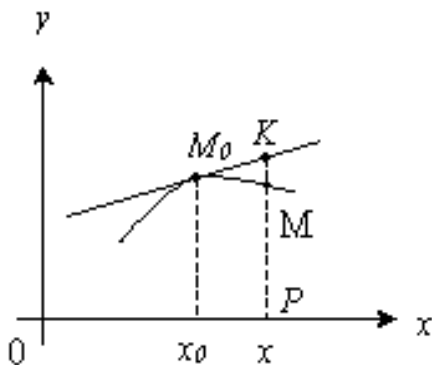
**Мета:** Ввести поняття точки перегину графіка функції. Сформулювати необхідні і достатні умови точки перегину. Ознайомити з поняттям асимптоти графіка функції. Типи асимптот і способи їх визначення. Навчити досліджувати функцію і будувати графік за допомогою диференціального числення.

### План

1. Точки перегину
2. Асимптоти
3. Схема повного дослідження функції

### Точки перегину

**Означення.** Графік функції диференційованої в  $\delta(x_0)$  називається **опуклим** у точці  $M_0$  якщо для  $\forall x \in \delta(x_0)$ ,  $x \neq x_0$   $y_{\text{дот}} - f(x) > 0$ , і **угнутим**, якщо  $y_{\text{дот}} - f(x) < 0$ . Тут  $y_{\text{дот}} = KP$ ,  $f(x) = MP$ .



**Означення.** Якщо в точці  $M_0$  графік функції  $y = f(x)$  змінює опуклість на увігнутість (або навпаки), то точка  $M_0$  називається **точкою перегину**.

**Теорема.** Якщо функція  $y = f(x)$  двічі неперервно диференційована в  $\delta(x_0)$  і  $f''(x) > 0$  у цьому околі, то крива в  $\delta(x_0)$  увігнута, а при  $f''(x) < 0$  – опукла.

### Доведення

$$\begin{aligned} y_{\text{дот}} - f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - f(x) = \\ &= f'(x_0)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0)) = \\ &= f'(x_0)(x - x_0) - f'(\xi)(x - x_0) = (f'(x_0) - f'(\xi))(x - x_0) = \\ &= f''(\zeta)(x_0 - \xi)(x - x_0). \end{aligned}$$

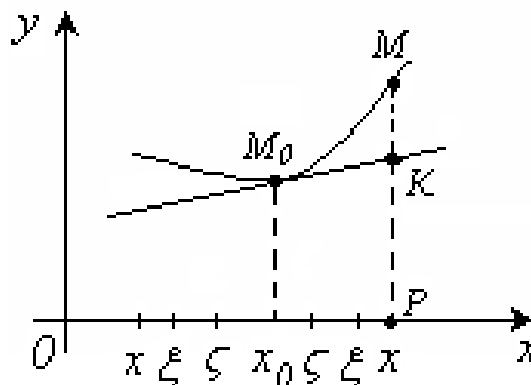
Тут використовувалася теорема Лагранжа.

II  $f''(x) > 0$

а) якщо  $x - x_0 > 0$ , то  $x_0 - \xi < 0$  й  $y_{\text{кас}} - f(x) < 0$ ,

б) якщо  $x - x_0 < 0$ , то  $x_0 - \xi > 0$  й  $y_{\text{кас}} - f(x) < 0$ .

Отже, графік увігнутий.



Аналогічно при  $f''(x) < 0$  визначається опуклість графіка.

### Висновки

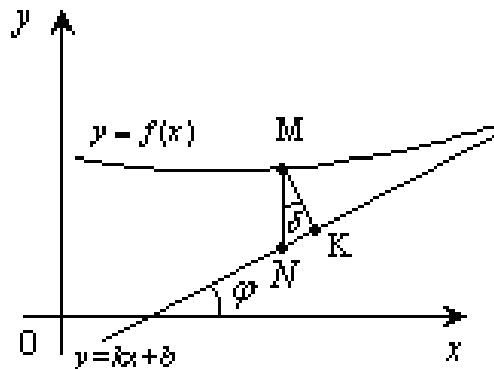
1. Необхідна умова існування точки перегину: якщо в точці  $M_0$  перегин, то  $f''(x_0)$  або дорівнює нулю, або  $\pm\infty$ , або не  $\exists$ .

2. Достатня умова існування точки перегину, якщо  $f''(x_0)$  дорівнює нулю, або  $\pm\infty$ , або не  $\exists$  й  $f''(x)$  при переході через точку  $x_0$  змінює знак, то в точці  $M_0$  перегин.

### Асимптоти

**Означення.** Якщо відстань  $\delta$  від точки кривої  $M$  до прямої прямує до нуля при русі точки  $M$  по кривій у нескінченність, то пряма називається **асимптотою**.

$$\text{a) } \text{II } \phi \neq \frac{\pi}{2}, \delta = |MK| = |MN| \cos \phi = |f(x) - (kx + b)| \cos \phi.$$



Оскільки  $\cos \phi = \text{const} \neq 0$  і  $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta = 0$  (за означенням асимптоти), тоді

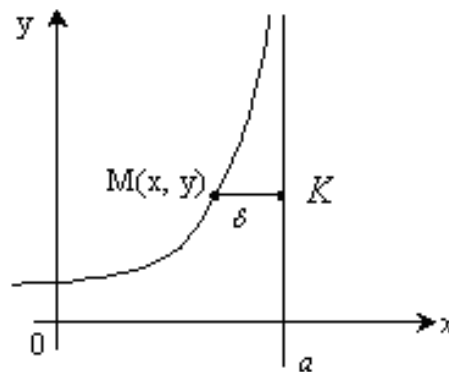
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + b)) = 0 \text{ або } b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx). \text{ Розглянемо}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (kx + b)}{x} = 0,$$

або

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} = 0 \Rightarrow k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x};$$

$$\text{б) } \text{II } \phi = \frac{\pi}{2},$$



$$\delta = |MK|,$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} |MK| = \lim_{y \rightarrow \infty} \delta = \lim_{y \rightarrow \infty} |x - a| = 0$$

$$\text{або } \lim_{x \rightarrow a-0} y = \infty.$$

Аналогічно визначається рівняння вертикальної асимптоти  $x = a$ , якщо  $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \pm \infty$ .

**Зауваження.** Якщо при  $x=a$  функція зазнає неусувного розриву 2-го роду, то графік цієї функції має вертикальну асимптоту  $x = a$ .

## Схема повного дослідження функції

1. ОДЗ.
2. Дослідити поведінку функції на кінцях ОДЗ і в околі точок розриву.
3. Визначити асимптоти.
4. Визначити точки перетину графіка з осями координат.
5. Дослідити функцію на парність і періодичність.
6. Визначити  $y'$  й точки, «підозрілі» на екстремум. За першою достатньою умовою визначити екстремум функції.
7. Визначити  $y''$  й точки, «підозрілі» на перегин. Дослідити  $y''$  на зміну знака похідної при переході через точки, «підозрілі» на перегин.

### Приклад

$$y = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}.$$

1. ОДЗ:  $(-\infty, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} 2. \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{\frac{2}{3}} \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{3}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{1 + \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{3}} + \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{0}{3} = 0 \end{aligned}$$

(помножили чисельник і знаменник дробу на неповний квадрат суми).

3. Вертикальних асимптот немає.

$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}}{x} = 0;$$

$$b_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} - 0 \cdot x \right) = 0.$$

Горизонтальна асимптота  $y = 0$ .

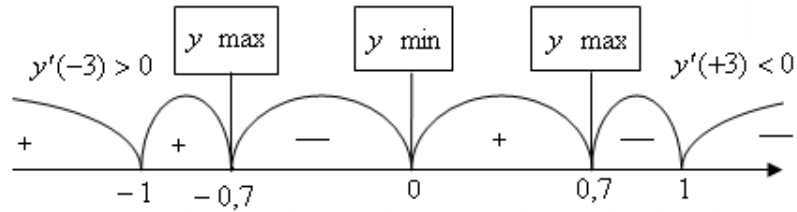
4. При  $x = 0$ ,  $y = 1$ ; при  $y = 0$ ,  $x^{\frac{2}{3}} = (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x^2 = x^2 - 1$ ;  $0 = -1$ . Розв'язку немає.

5. Функція парна, тому що ОДЗ симетрична й  $y(-x) = y(x)$ .

6. Дослідимо функцію на екстремум

$$y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} (x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2}{3} \frac{(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}.$$

Точки «підозрілі» на екстремум  $x_1 = 0$ ,  $x_{2,3} = \pm 1$ ,  $x_{4,5} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0,7$

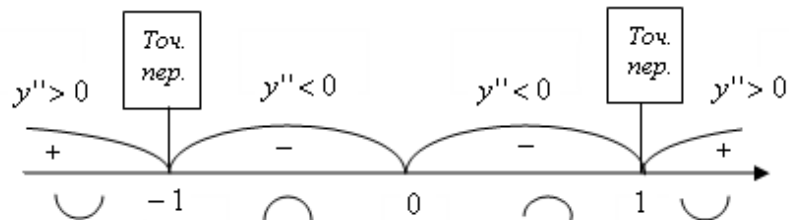


$$y_{min}, y\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt[3]{4} \quad y_{max}$$

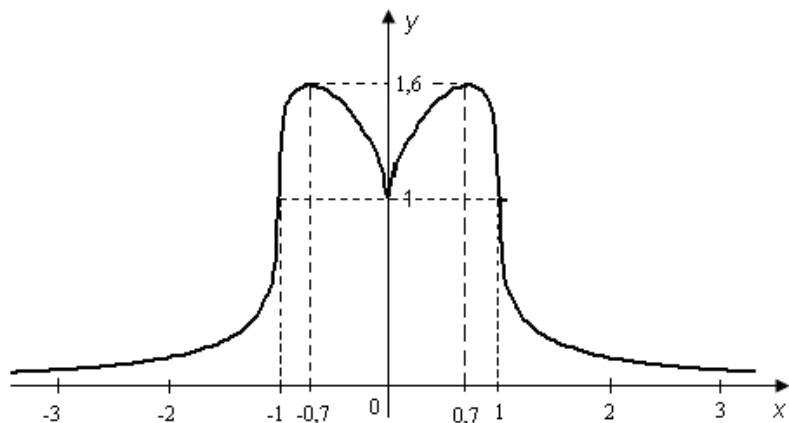
7. Дослідимо функцію на опуклість, наявність точок перегину:

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}\left((x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} + x\left(-\frac{2}{3}\right)(x^2 - 1)^{-\frac{5}{3}}2x\right) = \\ &= -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}} - \frac{4x^2}{3(x^2 - 1)^{\frac{5}{3}}}\right) = \\ &= -\frac{2}{9}\left(\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} + \frac{3(x^2 - 1) - 4x^2}{(x^2 - 1)^{\frac{5}{3}}}\right) = -\frac{2}{9}\frac{(x^2 - 1)^{\frac{5}{3}} - (x^2 + 3)x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}(x^2 - 1)^{\frac{5}{3}}} = \\ &= \frac{2}{9}\frac{(x^2 + 3)x^{\frac{4}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}(x^2 - 1)^{\frac{5}{3}}}. \end{aligned}$$

Чисельник в області дійсних чисел коренів не має. Точки «підозрілі» на перегин:  $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 1$ .



$$y_{перег.} = y(\pm 1) = 1.$$



## Питання та завдання для самоконтролю до лекції 12

1. Яка функція називається опуклою?
2. Яка точка називається точкою перегину функції?
3. Які бувають асимптоти графіка функції?
4. Як знайти рівняння горизонтальної асимптоти?
5. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт похилої асимптоти графіка функції?
6. Наведіть приклад функції, яка має горизонтальну асимптоту? вертикальну асимптоту? похилу асимптоту?

## РОЗДІЛ III. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

### Лекція 13. Невизначений інтеграл. Основні правила інтегрування

**Мета:** визначити первісну для функції. Ознайомити з невизначеним інтегралом від функції. Навчити користуватися основними правилами інтегрування. Навести основні формули інтегрування

#### План

1. Первісна
2. Невизначений інтеграл
3. Основні правила інтегрування
4. Основні формули інтегрування

#### Невизначений інтеграл

Розглянемо задачу про відновлення функції за її похідною.

**Означення.** Функція  $F(x)$  називається **первісною** для функції  $f(x)$  на проміжку  $X$ , якщо для кожної точки цієї множини виконується рівність

$$F'(x) = f(x).$$

**Зауваження.** Множина  $X$  є загальною частиною ОДЗ функцій  $F(x)$  і  $f(x)$ .

Ясно, що  $\Phi(x) = F(x) + c$  так само є первісною для функції  $f(x)$ .

**Означення.** Множина первісних  $\Phi(x)$  на  $X$  називається *інтегралом* від функції  $f(x)$  по  $dx$  і позначається

$$\Phi(x) = \int f(x)dx = F(x) + c.$$

#### Приклад.

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ , якщо  $X = (0; \infty)$ ;  $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + c$ , якщо  $X = (-\infty; +0)$ , тому що  $(\ln(-x) + c)' = -\frac{1}{x}(-1) + 0 = \frac{1}{x}$ .

Таким чином  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$  при  $\forall x \neq 0$ .

#### Основні властивості невизначеного інтеграла

1.  $\int dF(x) = F(x) + c$ .

#### Доведення:

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \text{ і } \int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + c.$$

$$2. d \int f(x)dx = f(x)dx \text{ або } (\int f(x)dx)' = f(x).$$

**Доведення:**

$$d \int f(x)dx = d(F(x) + c) = F'(x)dx = f(x)dx,$$

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x).$$

$$3. \int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx, \text{ де } c_1, c_2 - \text{const.}$$

**Доведення:**

$$(c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx)' = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x).$$

Таким чином, інтеграл від лінійної комбінації функцій дорівнює лінійній комбінації первісних цих функцій.

#### Таблиця похідних / інтегралів

$y' = f'(x)$	$\int f(x)dx = F(x) + c$
$(x^{n+1})' = (n+1)x^n \quad (n \neq -1)$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1)$
$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1)$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c \quad (x \neq 0)$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(x \neq \frac{\pi(2n+1)}{2}, n \in \mathbb{Z})$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$ $(x \neq \frac{\pi(2n+1)}{2}, n \in \mathbb{Z})$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z})$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$ $(x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z})$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $( x  < 1)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$ $( x  < 1)$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ( $ x  < 1$ )	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$ ( $ x  < a$ )
$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + c$
$(\text{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + c$
$(shx)' = chx$	$\int chx dx = shx + c$
$(chx)' = shx$	$\int shx dx = chx + c$
$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$	$\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + c$
$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x} \quad (x \neq 0)$	$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + c \quad (x \neq 0)$
	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + c$ ( $x \neq \pm a$ )
	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + c,$ (для знака (-) $ x  > a$ )

Таблицю інтегралів легко довести за властивістю 2.

**Основними методами інтегрування є:** метод безпосереднього інтегрування; метод інтегрування заміною змінної, (уведення функції під знак диференціала); метод інтегрування частинами.

На відміну від диференціального числення, де, користуючись правилами й формулами диференціювання, можна знайти похідну будь-якої заданої функції, в інтегральному численні немає загальних прийомів знаходження невизначених інтегралів, а є лише окремі методи, що дозволяють зводити заданий інтеграл до табличного.

### **Заміна змінних у невизначених інтегралах**

**Теорема.**  $\prod \int f(x) = F(x) + c$  і мають сенс суперпозиції функцій  $f(\phi(x)), F(\phi(x))$ , де  $\phi(x)$  диференційована в  $X$ , тоді

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = F(\phi(x)) + c.$$

Доведення за властивістю 2.

**Висновок**  $\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} \phi(x) = t \\ \phi'(x)dx = dt \end{array} \right\} = \int f(t)dt = F(t) + c = F(\phi(x)) + c$

**Приклад «Золоте правило»**

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = t \\ f'(x)dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|f(x)| + c,$$

тобто якщо в чисельнику знаходиться похідна знаменника, то інтеграл дорівнює логарифму модуля знаменника.

**Інтегрування частинами**

**Теорема.** Якщо  $u(x), V(x)$  – диференційовані й існує  $\int V(x)du(x)$ , то  $\int u(x)dV(x)$  теж існує й  $\int udV = uV - \int Vdu$ .

**Доведення.**

За властивістю 2

$d(\int udV) = d(uV) - d \int Vdu$ ;  $udV = u dV + V du - V du$ , що й треба було довести.

**Приклад**

$$\int x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dV = \cos x dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = dx \\ V = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right\} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c.$$

**Зауваження**

1. За  $u(x)$  зручніше брати ту функцію, похідна якої простіша, ніж  $u(x)$ , наприклад:  $\int x^2 \ln x dx \Rightarrow u = \ln x$ ,

$$\int x^2 \sin x dx \Rightarrow u = x^2.$$

2. У деяких випадках доводиться інтегрувати частинами кілька разів.

**Питання та завдання для самоконтролю до лекції 13**

1. У чому полягає операція інтегрування функції?
2. Що є первісною для функції?
3. Скільки первісних є у неперервної функції?
4. Що є невизначеним інтегралом від функції?
5. На якій формулі диференціального числення заснована формула інтегрування по частинах?
6. Яка функція є первісною константи?
7. У чому полягає золоте правило інтегрування?



$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1}. \quad (*)$$

Використовуючи формулу (\*) кілька разів, приходимо до інтеграла

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

**Приклад.**  $\square n = 3.$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{x}{2a^2 \cdot 2(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{2a^2 \cdot 2} I_2 = \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + \\ &+ \frac{3}{4a^2} \left( \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} I_1 \right) = \\ &= \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(x^2+a^2)} + \frac{3}{8a^4} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

### Інтегрування найпростіших раціональних дробів

1) узагальнення табличного інтегралу

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C, \text{ тут } A, a - \text{const};$$

2) за допомогою безпосереднього інтегрування

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx \quad (n \neq 1) = \frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C;$$

3) за допомогою внесення під знак диференціала функції

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx &= \left\{ \begin{array}{l} D < 0 \\ (x^2+px+q)' = 2x+p \end{array} \right\} = \\ \frac{B}{2} \int \frac{(2x+p) - p + \frac{2C}{B}}{x^2+px+q} dx &= \frac{B}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \\ + \frac{B}{2} \left( \frac{2C}{B} - p \right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} &= \frac{B}{2} \ln(x^2+px+q) + \\ + \left( C - \frac{Bp}{2} \right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} &= \frac{B}{2} \ln(x^2+px+q) + \\ + \left( C - \frac{Bp}{2} \right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (-D)} &= \frac{B}{2} \ln(x^2+px+q) + \\ + \left( C - \frac{Bp}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{-D}} &+ C \quad (-D > 0) = \frac{B}{2} \ln(x^2+px+q) + \end{aligned}$$

$$+(C - \frac{Bp}{2}) \frac{1}{\sqrt{|D|}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{2\sqrt{|D|}} + C;$$

4)

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} dx \left( \begin{array}{l} n \neq 1 \\ D < 0 \end{array} \right) &= \\ &= \frac{B}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx + \\ &+ \left( C - \frac{Bp}{2} \right) \int \frac{dx}{\left( \left( x + \frac{p}{2} \right)^2 + (-D) \right)^n} = \\ &= \frac{B}{2} \frac{(x^2+px+q)^{-n+1}}{-n+1} + \left( C - \frac{Bp}{2} \right) \int \frac{dy}{(y^2+a^2)^n}, \end{aligned}$$

тут  $y = x + \frac{p}{2}$ ,  $-D = a^2$ .

Таким чином,

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} dx = \frac{-B}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left( C - \frac{Bp}{2} \right) I_n,$$

де  $I_n$  визначається за допомогою формули (\*).

### Розкладання раціональних дробів на найпростіші

Розглянемо дробово-раціональну функцію

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0},$$

де коефіцієнти  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$  – дійсні числа.

**Означення.** Дріб  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  називається **правильним**, якщо  $n < m$ , і **неправильним**, якщо  $n \geq m$ .

Нехай дріб неправильний, тоді діленням чисельника на знаменник виділяємо цілу частину, тобто

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)} \quad (k < m),$$

$P_{n-m}(x)$  – ціла частина.

Дріб  $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$  – дріб правильний.

Розкладемо знаменник на множники й подамо цей правильний дріб у вигляді суми найпростіших з невизначеними коефіцієнтами:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_l}{(x-a)} + \frac{B_1}{(x-b)^m} + \frac{B_2}{(x-b)^{m-1}} + \dots +$$

$$+ \frac{B_2}{(x-b)^{m-1}} \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + \dots + \frac{M_kx + N_k}{x^2 + px + q}.$$

Визначимо числові значення коефіцієнтів.

**Приклад.**

$$\frac{2x^3 + 6x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2}$$

– дріб неправильний.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 6x^2 + 3x + 2 & x^3 + x^2 \\ \underline{2x^3 + 2x^2} & 2 \\ \hline & 4x^2 + 3x + 2 \end{array}$$

Тоді ціла частина – 2, залишок дорівнює  $4x^2 + 3x + 2$ . Тобто

$$\frac{2x^3 + 6x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2} = 2 + \frac{4x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2} = 2 + \frac{4x^2 + 3x + 2}{x^2(x+1)}.$$

$$\frac{4x^2 + 3x + 2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

(корінь  $x = 0$  кратності 2).

$$\frac{4x^2 + 3x + 2}{x^2(x+1)} = \frac{Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)}$$

або

$$4x^2 + 3x + 2 \equiv Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

$$x = 0 \quad 2 = B$$

$$x = -1 \quad 4 - 3 + 2 = C, \quad C = 3$$

$$x = 1 \quad 4 + 3 + 2 = 2A + 2B + C = 2A + 4 + 3, \quad 2A = 2, \quad A = 1.$$

Тоді

$$\frac{2x^3 + 6x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2} = 2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x+1}.$$

## Схема інтегрування раціональних функцій

1. У неправильному раціональному дробі за допомогою ділення „кутом” виділяємо цілу частину.
2. У правильному раціональному дробі знаменник розкладаємо на множники.
3. За допомогою методу невизначених коефіцієнтів розписуємо правильний нескоротний раціональний дріб на суму найпростіших.
4. Цілу частину і найпростіші дробу інтегруємо.

### Приклад.

$$\int \frac{5x^2 - 9x + 7}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} dx.$$

Підінтегральна функція – правильний нескоротний раціональний дріб.

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \quad | \quad x - 2 \\ -x^3 - 2x^2 \phantom{+ 3x - 2} \\ \hline -x^2 + 3x - 2 \\ -x^2 + 2x \phantom{- 2} \\ \hline -x - 2 \\ -x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 - 9x + 7}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} dx &= \int \frac{5x^2 - 9x + 7}{(x - 2)(x^2 - x + 1)} dx. \\ \frac{5x^2 - 9x + 7}{(x - 2)(x^2 - x + 1)} &= \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1} = \\ &= \frac{A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x - 2)}{(x - 2)(x^2 - x + 1)}, \end{aligned}$$

тобто  $5x^2 - 9x + 7 \equiv A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x - 2)$ .

$$x = 2 \quad 20 - 18 + 7 = A(4 - 2 + 1), \quad A = \frac{9}{3} = 3.$$

$$x = 0 \quad 7 = A + C(-2) = 3 - 2C, \quad 2C = -4, \quad C = -2.$$

$$\begin{aligned} x = 1 \quad 5 - 9 + 7 &= A(1 - 1 + 1) + (B + C)(1 - 2) = A - B - C \\ 3 &= 3 - B + 2, \quad B = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 - 9x + 7}{(x - 2)(x^2 - x + 1)} &= \frac{3}{x - 2} + \frac{2x - 2}{x^2 - x + 1} = \\ &= \int \frac{5x^2 - 9x + 7}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} dx = \int \frac{3}{x - 2} dx + \int \frac{2x - 2}{x^2 - x + 1} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \ln|x - 2| + \int \frac{(2x - 1)dx}{x^2 - x + 1} - \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = 3 \ln|x - 2| + \\
&+ \ln(x^2 - x + 1) - \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \ln|(x - 2)^3 (x^2 - x + 1)| - \\
&- \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + C = \ln|(x - 2)^3 (x^2 - x + 1)| - \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

**Приклади.**

$$\begin{aligned}
1) \int \cos^2 x \sin^4 x dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \\
&= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) dx = \\
&= \frac{1}{8} \left( x - \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx + \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x dx \right) = \\
&= \frac{1}{8} \left( x - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2} x - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6} \right) + C = \\
&= \frac{1}{8} \left( \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} - \frac{\sin^3 2x}{6} \right) + C;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \int \frac{dx}{5 + \sin x} &= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}; dx = \frac{2dt}{1 + t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{5 + \frac{2t}{1 + t^2}} dt = \\
&= 2 \int \frac{dt}{5t^2 + 2t + 5} = \frac{2}{5} \int \frac{dt}{t^2 + 2t \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \left(1 - \frac{1}{25}\right)} = \\
&= \frac{2}{5} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{24}{25}} = \frac{2}{5} \frac{1}{\sqrt{\frac{24}{25}}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{24}{25}}} + C = \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{5t + 1}{2\sqrt{6}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2\sqrt{6}} + C.
\end{aligned}$$

**Питання та завдання для самоконтролю до лекції 14**

1. Для інтегрування яких функцій застосовуються рекурентні формули?

2. Яку функцію називають раціональною?
3. Назвіть основні правила розкладання раціональної функції на елементарні дроби
4. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів
5. Назвіть основні етапи інтегрування раціональних функцій.

## Лекції 15. Інтегрування тригонометричних функцій

**Мета:** Навчити методам інтегрування тригонометричних функцій, користуванню універсальною тригонометричною підстановкою. Ознайомити з іншими тригонометричними підстановками і випадками їх застосування

### План

1. Інтегрування тригонометричних функцій
2. Приклади застосування універсальної тригонометричної підстановки, інших способів пошуку первісних для тригонометричних функцій

### Інтегрування тригонометричних функцій

$\square R(u, v)$  – раціональна функція своїх аргументів,  $\square u = \sin x$ ,  $v = \cos x$ .

Розглянемо інтеграл від суперпозиції функцій  $\int R(\sin x; \cos x) dx$  (\*).

За допомогою деяких тригонометричних підстановок інтеграл (\*) зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції. А далі застосовуємо методи попередніх пунктів.

#### 1. Універсальна тригонометрична підстановка

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t \text{ і } dx = \frac{2dt}{1 + t^2},$$

$$\int R(\sin x; \cos x) dx = \int R \left( \frac{2t}{1 + t^2}; \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right) \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

2. Якщо  $R(-u, -v) = R(u, v)$ , то можна використовувати **підстановку**  
 $tgx = t \Rightarrow \sin x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ ,

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad x = \operatorname{arctg} t \text{ і } dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

$$\int R(\sin x; \cos x) dx = \int R\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

3. При обчисленні  $\int \sin^n x \cos^m x dx$  зручно, якщо  $n = 2k + 1$ , зробити **підстановку**  $\cos x = t$ , а якщо  $m = 2k + 1$  то  $\sin x = t$ .

**Наприклад:**

$$\int \sin^n x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^n x \cos^{2k} x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} =$$

$= \int t^n (1-t^2)^k dt$ . Далі розкриваємо дужки й кожний доданок інтегруємо.

Якщо  $(m+n)$  – парне, то за допомогою формул  $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ ,  
 $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ ,  $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$  – **знижуємо степінь**.

**Приклади застосування універсальної тригонометричної підстановки, інших способів пошуку первісних для тригонометричних функцій**

**Приклад 1:**

$$\int \frac{dx}{4-5\sin x} = \left. \begin{array}{l} tg \frac{x}{2} = t \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \quad x = 2\operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{4-5\frac{2t}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{4 + 4t^2 - 10t} =$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{5}{2}t + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t^2 - 2\frac{5}{4}t + \frac{25}{16}\right) - \frac{9}{16}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{4}} \ln \left| \frac{\left(t - \frac{5}{4}\right) - \frac{3}{4}}{\left(t - \frac{5}{4}\right) + \frac{3}{4}} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t-2}{t-\frac{1}{2}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2}} \right| + C .$$

### Приклад 2:

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \cdot \sin^2 x \cdot dx &= \int \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x)(1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x + 2 \cos 2x - 2 \cos^2 2x + \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx = \frac{1}{8} \left[ x + \frac{1}{2} \sin 2x - \right. \\ &\quad \left. - \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx - \int \cos^2 2x \cos 2x dx \right] = \frac{1}{8} \left[ x + \frac{1}{2} \sin 2x - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x - \int (1 - \sin^2 2x) \cdot \frac{1}{2} d(\sin 2x) \right] = \\ &= \frac{1}{8} \left[ \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} - \frac{1}{2} \int (1 - t^2) dt \right] = \\ &= \frac{1}{8} \left[ \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} - \frac{1}{2} \left( t - \frac{t^3}{3} \right) \right] + C = \\ &= \frac{1}{8} \left[ \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sin^3 2x}{6} \right] + C = \\ &= \frac{1}{8} \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin^3 2x}{6} \right] + C . \end{aligned}$$

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 15

1. У чому полягає універсальна тригонометрична підстановка?
2. Для інтегрування яких функцій застосовується підстановка  $\cos x = t$ ?  
Підстановка  $\sin x = t$ ?
3. Назвіть формули тригонометрії, які найчастіше застосовуються під час інтегрування тригонометричних функцій.
4. Знайдіть невизначені інтеграли

$$\begin{aligned}
& 1. \int \sin^2 x \cos^3 x dx; & 2. \int \sin^3 5x \cos^5 5x dx; & 3. \int \sin^4 x \cos^2 x dx; \\
& 4. \int \cos x \cos 2x dx; & 5. \int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}; & 6. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}; \\
& 7. \int \frac{dx}{\sin^4 2x \cos^2 2x}; & 8. \int \frac{dx}{1 + 2 \sin x}; & 9. \int \sin^3 x \cos^4 x dx; & 10. \int \frac{dx}{\sin^4 x}.
\end{aligned}$$

**Лекція 16. Інтегрування дробово-лінійних ірраціональностей.  
Інтегрування квадратичних ірраціональностей. Інтегрування  
диференціального біному**

**Мета:** визначити нескінченно великі й нескінченно малі послідовності. Розглянути основні теореми про границі. Ознайомити з монотонними послідовностями.

**План**

1. Інтегрування ірраціональних функцій
2. Інтегрування квадратичних ірраціональностей
3. Інтегрування диференціального біному

**Інтегрування ірраціональних функцій**

**Основна ідея:** за допомогою підстановки звести підінтегральну функцію до дробово-раціональної або до раціональної функції від тригонометричних аргументів.

1. В інтегралі  $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx$  зробимо підстановку  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^{\text{Н.С.К.}(n, \dots, s)}$ .

Н.С.К.- найменше спільне кратне знаменників  $n, \dots, s$ .

*Наприклад:*

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{x} + 1}{x(\sqrt[3]{x} - 1)} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^3 + 1}{t^6(t^2 - 1)} 6t^5 dt = \\
&= 6 \int \frac{t^2 - t + 1}{t(t - 1)} dt = 6 \int \frac{t^2 - t + 1}{t^2 - t} dt = 6 \int \left(1 + \frac{1}{t^2 - t}\right) dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 6 \left( t + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln \left| \frac{t - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right| \right) + c = 6 \cdot \left( t + \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| \right) + c = \\
&= 6 \left( \sqrt[6]{x} + \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x}} \right| \right) + c.
\end{aligned}$$

## Інтегрування квадратичних ірраціональностей

2. В інтегралі вигляду

$$\int R(x; \sqrt{\pm(x^2 + px + q)}) dx = \int R(x; \sqrt{\pm \left( \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) \right)}) dx$$

після виділення повного квадрата робимо підстановку  $x + \frac{p}{2} = y$ ,

$$\left| q - \frac{p^2}{4} \right| = a^2.$$

Приходимо до інтеграла  $\int R(y - \frac{p}{2}; \sqrt{\pm(y^2 \pm a^2)}) dy$ .

- Для кореня  $\sqrt{y^2 + a^2}$  робимо підстановку  $y = atg\phi$ .
- Для кореня  $\sqrt{y^2 - a^2}$  робимо підстановку  $y = \frac{a}{\sin\phi}$ .
- Для кореня  $\sqrt{a^2 - y^2}$  робимо підстановку  $y = a \sin\phi$ .
- Інтеграл з коренем  $\sqrt{-y^2 - a^2}$  в області дійсних чисел не існує.

**Приклад:**

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{(x+1)^2 + 1}} = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} x+1 = tg\phi \\ dx = \frac{1}{\cos^2\phi} d\phi \end{array} \right\} = \int \frac{d\phi}{\cos^2\phi \cdot tg^2\phi \sqrt{tg^2\phi + 1}} = \int \frac{\cos\phi d\phi}{\sin^2\phi} = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \sin\phi = t \\ \cos\phi d\phi = dt \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + c = \frac{-1}{\sin\phi} + c = -\frac{\sqrt{1+tg^2\phi}}{tg\phi} + c \\
&= -\frac{\sqrt{1+(x+1)^2}}{x+1} + c.
\end{aligned}$$

**Зауваження.**

Цей інтеграл можна знайти простіше, за допомогою підстановки  $x + 1 = \frac{1}{t}$ .

## Інтеграли від диференціальних біномів

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx.$$

П.Л. Чебишев довів, що якщо хоча б одне із чисел  $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$  є цілим, то інтеграл від диференціального бінома виражається через елементарні функції. В інших випадках інтеграл не виражається через елементарні функції.

### За теоремою Чебишева:

1) якщо  $p$  - ціле,  $m = \frac{r}{s}, n = \frac{l}{k}$ , ( $m, n$  - нескоротні дроби), то робимо підстановку  $x = t^{H.C.K.(S,K)}$ .

2) якщо  $p = \frac{r}{s}, \frac{m+1}{n}$  - ціле, то робимо підстановку  $a + bx^n = t^s$ .

3) якщо  $p = \frac{r}{s}, \frac{m+1}{n} + p$  - ціле, то робимо підстановку  $\frac{a+bx^n}{x^n} = t^s$ .

Наприклад:

$$I = \int x\sqrt{1+x^2} dx = \left. \begin{array}{l} m = 1, n = 2, p = \frac{1}{2} \\ \frac{m+1}{n} = 1 - \text{целое} \Rightarrow x^2 + 1 = t^2; x dx = t dt \end{array} \right| = \\ = \int t \cdot t dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\sqrt{x^2+1})^3}{3} + C$$

## Підстановки Ейлера

Розглянемо інтеграл  $\int R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ .

1. Якщо  $a > 0$ , то  $t - x\sqrt{a} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$  - **перша підстановка Ейлера** Тоді  $x = \frac{t^2 - c}{2t\sqrt{a} + b}$ .

2. Якщо  $D > 0$ , то  $t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - x_1}$  ( $x_1$  - один із коренів рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ ) - **друга підстановка Ейлера**. Тоді

$$x = \frac{t^2 x_1 - a x_2}{t^2 - a}.$$

Приклад

$$\int \frac{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t - x = \sqrt{x^2 + 2x + 3} \\ x = \frac{t^2 - 3}{2t + 2}; dx = \frac{1}{2} \frac{t^2 + 2t + 3}{(t + 1)^2} dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{t+1}{t - \frac{t^2-3}{2t+2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{t^2+2t+3}{(t+1)^2} dt =$$

$$= \int dt = t + c = x + \sqrt{x^2 + 2x + 3} + c.$$

Приклади інтегралів, що не виражаються через елементарні функції :

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{e^x}{x^n} dx \ (n \geq 1), \quad \int \frac{\sin x}{x^n} dx \ (n \geq 1),$$

$$\int \frac{\cos x}{x^n} dx \ (n \geq 1), \quad \int R(x; \sqrt{P_n(x)}) dx \ (n \geq 3),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} \ (k \neq 0; 1), \quad \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx \ (k \neq 0; 1) \text{ і т.д.}$$

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 16

1. Яка функція називається дробово-лінійною ірраціональністю?
2. Яка функція є квадратичною ірраціональністю?
3. Які функції інтегруються за допомогою підстановок Чебишева?
4. Як виглядає підстановка Ейлера і для інтегрування яких функцій її використовують?

### Лекція 17. Визначений інтеграл за Ріманом

**Мета:** користуючись спеціальним граничним переходом, запровадити поняття інтеграла за найпростішим геометричним об'єктом – за відрізком і за допомогою визначеного інтеграла розв'язати задачу знаходження площі криволінійної трапеції.

#### План

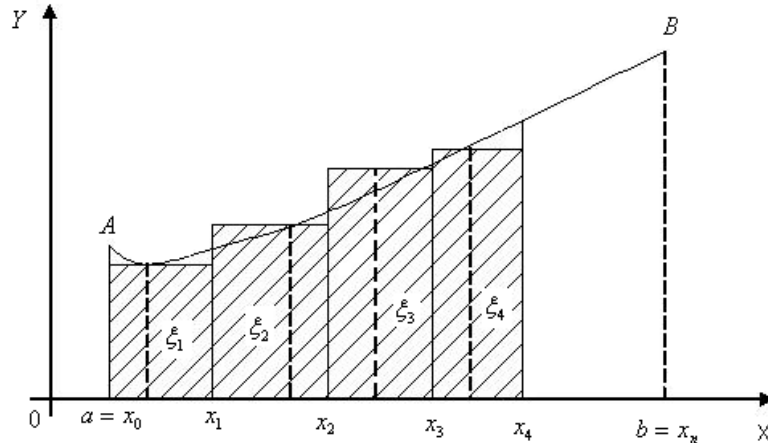
1. Задача про площу плоскої фігури
2. Поняття визначеного інтеграла за відрізком
3. Умови інтегровності

#### Визначений інтеграл за Ріманом

$$\square y = f(x) \in C [a; b] \text{ і } f(x) \geq 0.$$

Довільним чином розбиваємо відрізок  $[a; b]$  на  $n$  частин точками  $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$ . Довжина кожного відрізка визначається за формулою  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )... На кожному відрізку розбиття  $[x_{i-1}; x_i]$  довільним

чином вибирається точка  $\xi_i$  і визначається значення функції в цій точці  $f(\xi_i)$ . Складаємо суму  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ , що виражає площу заштрихованої області, ця сума називається *n-ю інтегральною*, вона залежить від способу розбиття відрізка  $[a;b]$  і вибору точок  $\xi_i$ .



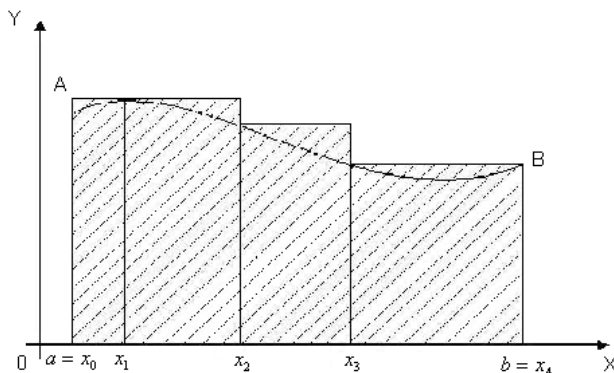
Площа криволінійної трапеції  $S_{abBA} \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ , число  $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$  називається *рангом розбиття* й характеризує дрібність розбиття відрізка  $[a; b]$ . Чим дрібніше розбиття відрізка  $[a; b]$ , тим точніше рівність  $S_{abBA} \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ . І, якщо  $\lambda \rightarrow 0$ , то  $n \rightarrow \infty$  (але не навпаки).

$$\text{II } I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

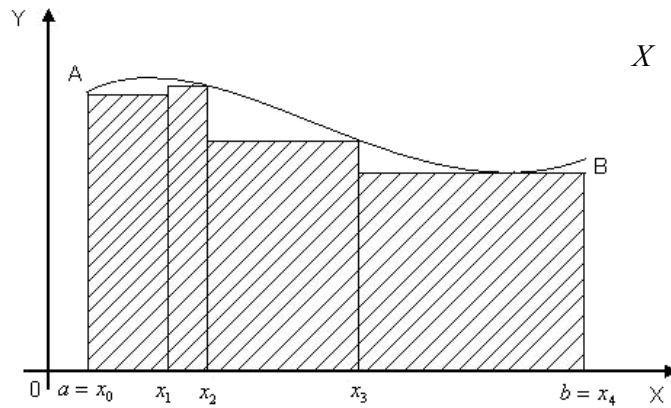
**Означення.** Якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , що для будь-якого розбиття відрізка  $[a; b]$  і довільного вибору точок  $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$  при  $\lambda < \delta$   $|I_n - I| < \varepsilon$ , то говорять, що  $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} I_n$ .  $I$  називають **визначенням інтегралом за Ріманом** і позначають

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

### Верхня й нижня суми Дарбу



$\square y = f(x) \in C [a;b]$  і  $M_i = \sup_{[x_{i-1};x_i]} f(x)$ ,  $m_i = \inf_{[x_{i-1};x_i]} f(x)$ . Тоді  $S_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$  – верхня сума Дарбу, а  $s_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$  – нижня сума Дарбу.



На рисунках зображений випадок, коли  $n = 4$ .

Оскільки  $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ , то

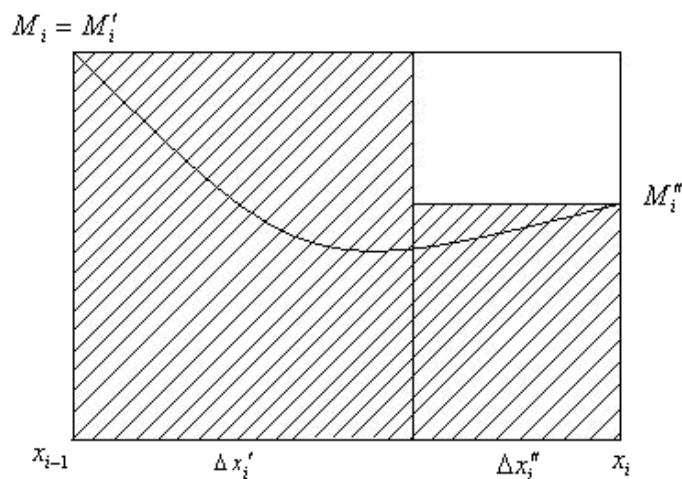
$$s_n \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq S_n.$$

### Теорема 1

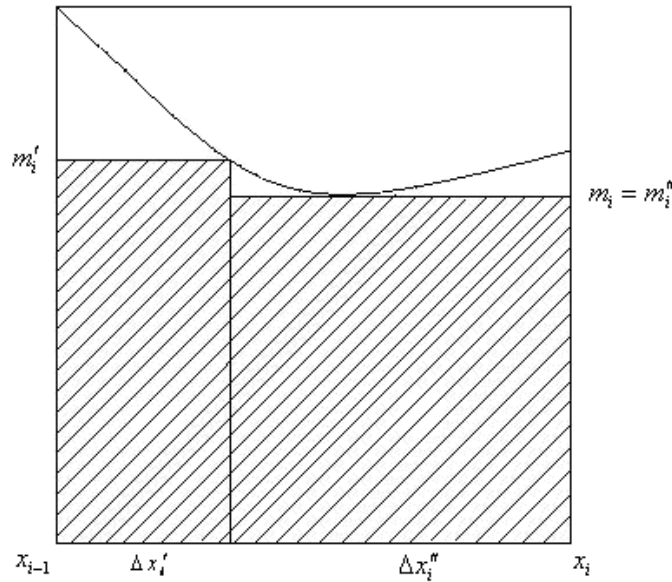
Якщо  $y = f(x) \in C[a; b]$ , то послідовності нижніх і верхніх сум Дарбу мають скінченні границі при  $\lambda \rightarrow 0$ .

### Доведення

Розглянемо елемент розбиття  $[x_{i-1}; x_i]$ . Нехай нове розбиття одержано шляхом додавання до старих точок нових, тоді  $\Delta x_i = \Delta x'_i + \Delta x''_i$ .  $M'_i \Delta x'_i + M''_i \Delta x''_i \leq M_i \Delta x_i$ .



$m'_i \Delta x'_i + m''_i \Delta x''_i \geq m_i \Delta x_i$ , тому що  $M'_i \leq M_i$ ,  $M''_i \leq M_i$ ,  $m'_i \geq m_i$ ,  $m''_i \geq m_i$ .



Отже, послідовність верхніх сум Дарбу монотонно спадає, а нижніх-монотонно зростає при  $\lambda \rightarrow 0$ . Якщо

$$M = \sup_{[a;b]} f(x) \text{ й } m = \inf_{[a;b]} f(x),$$

то

$$m(b-a) \leq s_n \leq S_n \leq M(b-a),$$

тобто послідовність верхніх сум Дарбу обмежена знизу числом  $m(b-a)$ , а нижніх – обмежена зверху числом  $M(b-a)$ . Тоді за теоремою Вейерштрасса ці послідовності мають скінченні границі:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n, \quad s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s_n.$$

## Теорема 2

Якщо  $y = f(x) \in C[a; b]$ , то вона там і інтегрована.

### Доведення

За теоремою Кантора, якщо функція неперервна на відрізку, то вона на цьому самому відрізку рівномірно неперервна. За визначенням рівномірної неперервності

$$\forall \frac{\varepsilon}{b-a} > 0 \exists \delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right) > 0,$$

що при  $\forall x, x'' \in [a; b]$  якщо  $|x' - x''| < \delta$ , то

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

А оскільки  $\lambda \rightarrow 0$ , то розглянемо тільки ті розбиття, для яких  $\lambda < \delta$ , тобто  $\forall \Delta x_i < \delta$ , тоді

$$\begin{aligned}
|M_i - m_i| &< \frac{\varepsilon}{b-a} |S_n - s_n| \leq \sum_{i=1}^n |M_i - m_i| \Delta x_i < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i = \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Таким чином, одержали, що  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , що при  $\lambda < \delta$

$$|S_n - s_n| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} (S_n - s_n) = 0,$$

або  $S = s$ .

Але

$$s_n \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq S_n$$

й за теоремою про границю проміжної функції  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = S = s$ .

**Висновок.** Визначений інтеграл для неперервної на відрізку функції існує, не залежить від способу розбиття відрізка  $[a; b]$  і вибору точок  $\xi_i$ .

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 17

1. Що називається визначеним інтегралом від функції за відрізком?
2. Що таке верхня сума Дарбу? Нижня сума Дарбу?
3. У чому полягають умови інтегрованості функції за відрізком?
4. Надайте геометричний зміст визначеного інтеграла від функції за відрізком.

### Лекція 18. Властивості визначеного інтеграла. Теорема про середнє

**Мета:** визначити властивості визначеного інтеграла. Ознайомити з теоремою про середнє для визначеного інтегралу.

#### План

1. Властивості визначеного інтеграла
2. Оцінки визначеного інтеграла. Теорема про середнє
3. Інтеграл Ньютона-Лейбніца

## Основні властивості визначеного інтеграла

$$1. \int_a^b dx = b - a.$$

Доведення

$$\int_a^b 1 \cdot dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (b - a) = b - a.$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Доведення

Знак змінюється, тому що  $\forall \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  для інтеграла  $\int_a^b f(x) dx$  змінюється знак на протилежний для  $\int_b^a f(x) dx$ .

$$3. \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Доведення

Оскільки  $\forall \Delta x_i = 0$ , і  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} 0 = 0$ .

$$4. \int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx.$$

Доведення

Впливає з аналогічної властивості границь.

$$5. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Доведення

$$\text{II } a < c < b.$$

Якщо точка  $c$  не збіглася із точкою розбиття, то в наступному розбитті точку  $c$  візьмемо за одну з нових точок розбиття.

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n_2} f(\xi_i) \Delta x_i, \text{ де } n_1 + n_2 = n,$$

$[a;c] \qquad \qquad \qquad [c;b]$

$\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ , тоді

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n_2} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

тобто

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

II  $a < b < c$ , тоді

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Аналогічно доводиться для випадку  $c < a < b$ .

6. Якщо  $f(x) \in C[a; b]$  і  $f(x) \geq 0$ , то геометричний зміст  $\int_a^b f(x) dx$  – площа криволінійної трапеції АВба.

### Теорема про середнє

Якщо  $f(x) \in C [a; b]$ , то  $\exists$  хоча б одна точка  $\xi \in [a; b]$  така, що

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

### Доведення

Якщо функція обмежена зверху і знизу на відрізку, то для інтегральної суми справедлива наступна оцінка:

$$m(b - a) \leq s_n \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \leq S_n \leq M(b - a).$$

Переходимо до границі в цій нерівності при  $\lambda \rightarrow 0$ :

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a),$$

або

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Але оскільки  $f(x) \in C [a; b]$ , то  $\exists$  хоча б одна точка  $\xi$ , що  $m \leq f(\xi) \leq M$  і

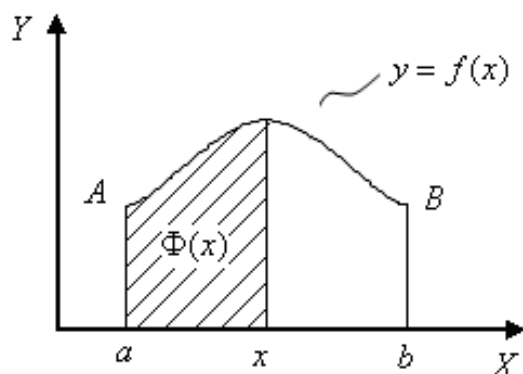
$$f(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx.$$

### Зауваження

Якщо  $f(x) \in C [a; b]$  і  $\forall f(x) \leq 0$ , то  $\int_a^b f(x) dx \leq 0$ . (Впливає з теореми про середнє).

### Інтеграл Ньютона-Лейбніца

Розглянемо  $\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx$ ,  $x \in [a; b]$  – інтеграл зі змінною верхньою межею.



### Теорема

Похідна від інтеграла по змінній верхній межі дорівнює підінтегральній функції.

### Доведення

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x) dx}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi), \end{aligned}$$

де  $x \leq \xi \leq x + \Delta x$  за теоремою про середнє, тоді при  $\Delta x \rightarrow 0$   $\xi \rightarrow x$ , оскільки  $f(x) \in C [a; b]$ , то  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow x}} f(\xi) = f(x)$ , що й було потрібно довести.

### Висновок

Таким чином,  $\Phi(x)$  – первісна для функції  $y = f(x)$ ,  $\Phi(x) = F(x) + C$  або  $\int_a^x f(x) dx = F(x) + C$ .

$$\int_a^a f(x) dx = 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a).$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

Остаточно одержимо **формулу Ньютона-Лейбніца**:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

### Приклади:

1.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (4\sqrt[3]{x} + 6x^2\sqrt{x} - 7\sqrt{x^3}) dx &= \left[ 4\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + 6\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - 7\frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} \right]_0^1 = \\ &= \left[ 3x^{\frac{4}{3}} + 6\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 7\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} \right]_0^1 = \left[ 3x\sqrt[3]{x} + \frac{12}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{35}{8}x^5\sqrt{x^3} \right]_0^1 = \\ &= 3 + \frac{12}{7} - \frac{35}{8} - 0 = \frac{19}{56}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \sin 3x dx &= -\frac{\cos 3x}{3} \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{1}{3}(\cos \frac{3\pi}{4} - \cos 0) = -\frac{1}{3}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) = \\ &= \frac{2 + \sqrt{2}}{6}.\end{aligned}$$

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 18

1. Назвіть основні властивості визначеного інтеграла.
2. У чому полягає теорема про середнє для визначеного інтеграла?
3. Доведіть справедливості формули Ньютона-Лейбніца.
4. Наведіть приклад використання теореми про середнє для визначеного інтеграла.
5. Чому дорівнює похідна від інтеграла по змінній верхній межі?

### Лекція 19. Заміна змінних під знаком визначеного інтеграла. Інтегрування визначених інтегралів частинами. Невласні інтеграли I-го та II-го роду

**Мета:** Ознайомити з методами інтегрування заміною змінних, по частинах. Навчити досліджувати на збіжність невластні інтеграли

#### План

1. Заміна змінних. Інтегрування визначених інтегралів частинами.
2. Невласні інтеграли.

## Заміна змінних. Інтегрування визначених інтегралів частинами

### Теорема

$$\square 1) \quad \phi'(x) \in C [a; b] \quad i \quad \phi(a) = \alpha, \quad \phi(b) = \beta,$$

$$2) \quad f(t) \in C [\alpha; \beta],$$

$$3) \quad \int f(t) dt = F(t) + C, \text{ тоді}$$

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

### Доведення

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \left. \begin{matrix} \phi(x) = t \\ \phi'(x)dx = dt \end{matrix} \right\} = \int f(t)dt = F(t) + C = = F(\phi(x)) + C.$$

За формулою Ньютона - Лейбніца

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = F(\phi(x)) \Big|_a^b = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Таким чином, у визначеному інтегралі теж можна провести заміну змінних за правилом

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx &= \left. \begin{matrix} \phi(x) = t & x \Big|_a^b \\ \phi'(x)dx = dt & \Big|_{\alpha}^{\beta} \end{matrix} \right\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \\ &= F(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha). \end{aligned}$$

**Зауваження.** Щоб уникнути помилок при заміні змінної у визначеному інтегралі, краще використовувати функції із взаємно однозначною відповідністю множин  $[a; b]$  і  $[\alpha; \beta]$ .

### Теорема

$$\int_a^b u(x)dV(x) = [u(x)V(x)]_a^b - \int_a^b V(x)du(x).$$

### Доведення

$$\begin{aligned} \int_a^b d(u(x)V(x)) &= [u(x)V(x)]_a^b, \\ \int_a^b d(u(x)V(x)) &= \int_a^b u(x)dV(x) + \int_a^b V(x)du(x), \end{aligned}$$

що й треба було довести.

### Приклад

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt[3]{\arctg x}}{1+x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \arctg x = t^3 \\ \frac{dx}{1+x^2} = 3t^2 dt \end{array} \quad \frac{x}{t} \Big|_{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt[3]{-\frac{\pi}{4}}} \right\} =$$
$$= \int_{-\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} t \cdot 3t^2 dt = 3 \frac{t^4}{4} \Big|_{-\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} = \frac{3}{4} \left( \frac{\pi}{4} \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4} \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} \right) = 0.$$

### Невласні інтеграли

За теоремою про існування визначеного інтеграла  $f(x) \in C[a; b]$  (див. теор.2 лекції 18).

1.  $\amalg y = f(x) \in C[a; +\infty)$ .

**Означення.**  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$  називають **невласним інтегралом 1-го роду** й позначають  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

Аналогічно визначаються через границі такі невластні інтеграли:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx;$$
$$\int_{-\infty}^{-\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx.$$

### Приклад

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b =$$
$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b - \arctg 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Якщо границя в невластному інтегралі дорівнює скінченному числу, то інтеграл називається **збіжним**, у протилежному разі – **розбіжним**.

2.  $\amalg y = f(x) \in C[a; b); \quad \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \pm\infty$ .

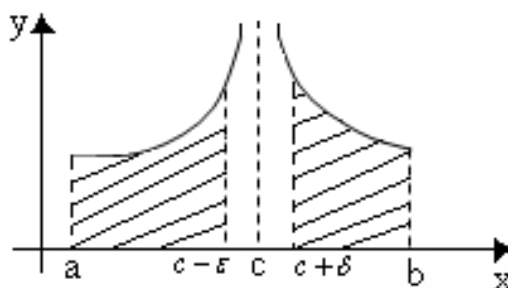
**Означення.**  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$  називають **невласним інтегралом 2-го роду**

й позначають  $\int_a^b f(x) dx$ .

Інтеграл **збігається**, якщо границя дорівнює скінченному числу й **розбігається**, якщо він дорівнює нескінченності або не існує. Аналогічно визначаються невідладні інтеграли, коли  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$  або в точці  $c \in (a; b)$

неусувний розрив 2-го роду:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx.$$



**Зауваження.** В останньому випадку, якщо **хоча б одна** з границь дорівнює нескінченності або не існує, то  $\int_a^b f(x) dx$  **розбігається**.

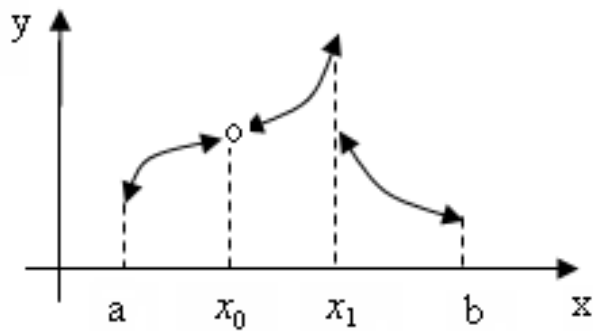
### Приклад 1

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln|x| \Big|_{\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln 2 - \ln \varepsilon) = \\ &= \ln 2 + \infty = \infty - \text{інтеграл розбіжний.} \end{aligned}$$

**Зауваження.** Інтегрування кусково-неперервних функцій: якщо функція  $y = f(x) \in C(a; b)$  можливе, крім **скінченного числа** точок з усувними і неусувними розривами 1-го роду й  $f(a+0), f(b-0)$  – скінченні, то інтеграл

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^b f(x) dx,$$

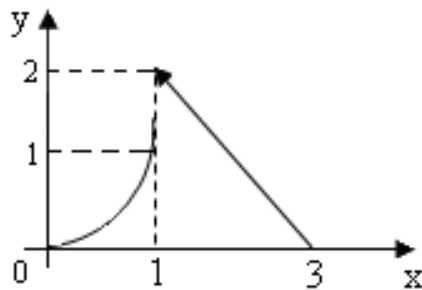
тобто до визначаємо функцію ліворуч або праворуч її граничними значеннями та обчислюємо звичайні визначені інтеграли.



### Приклад 2

$$y = \begin{cases} x^2, & x \in [0; 1] \\ 3 - x, & x \in (1; 3] \end{cases}$$

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^3 (3 - x) dx = \frac{1}{3} + [3x - \frac{x^2}{2}]_1^3 = \frac{1}{3} + 6 - 4 = 2\frac{1}{3}.$$



Задана функція в точці  $x=1$  має розрив I роду.

### Приклад 3. Дослідити на збіжність інтеграл

$$I(p) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}.$$

а)  $p \neq 1$ . Маємо

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} &= \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_1^{\xi} \frac{dx}{x^p} = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^{\xi} = \frac{1}{p-1} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (1 - \xi^{1-p}) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Звідси випливає, що  $I(p)$  збігається, коли  $p > 1$  та розбігається, коли  $p < 1$ .

б)  $p = 1$ . Тоді

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_1^{\xi} \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \ln \xi = +\infty.$$

Таким чином, інтеграл  $I(1)$  розбігається.

**Відповідь:** інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  збігається при  $p > 1$  і розбігається при  $p \leq 1$ .

**Приклад 4.** Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \cos x \, dx.$$

Маємо

$$\int_0^{+\infty} \cos x \, dx = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_0^{\xi} \cos x \, dx = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_0^{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \sin \xi - \text{не існує.}$$

**Приклад 5.** Дослідити збіжність інтегралу

$$I(p) = \int_0^1 \frac{dx}{x^p}.$$

а)  $p \neq 1$ . Маємо

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^p} &= \lim_{\xi \rightarrow +0} \int_{\xi}^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{\xi}^1 = \frac{1}{1-p} \lim_{\xi \rightarrow +0} (1 - \xi^{1-p}) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-p}, p < 1, \\ +\infty, p > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Звідси випливає, що інтеграл  $I(p)$  збігається при  $p < 1$  і розбігається при  $p > 1$ .

б)  $p = 1$ .

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \rightarrow +0} \int_{\xi}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \rightarrow +0} \ln x \Big|_{\xi}^1 = \lim_{\xi \rightarrow +0} (-\ln \xi) = +\infty.$$

Таким чином, інтеграл  $I(1)$  розбігається.

**Відповідь:** інтеграл  $I(p) = \int_0^1 \frac{dx}{x^p}$  збігається при  $p < 1$  і розбігається при  $p \geq 1$ .

## Питання та завдання для самоконтролю до лекції 19

1. Які особливості застосування заміни змінних у визначеному інтегралі?

2. Наведіть формулу інтегрування визначених інтегралів частинами.
3. Який інтеграл називають невласним I-го роду?
4. Який інтеграл називають невласним II-го роду?
5. Наведіть приклад невласного інтегралу I роду, який є збіжним.
6. Наведіть приклад невласного інтегралу II роду, який є збіжним.
7. Наведіть приклад невласного інтегралу I роду, який є розбіжним.
8. Наведіть приклад невласного інтегралу II роду, який є розбіжним.

## Лекція 20. Геометричні застосування визначеного інтеграла

**Мета:** Ознайомити з геометричними застосуваннями визначеного інтегралу: площа плоскої області, площа сектора, об'єм тіла обертання. Навчити користуватися формулами площі області, об'єму тіла обертання

### План

1. Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії. Площа плоскої області
2. Площа криволінійного сектора
3. Об'єм тіла обертання

### Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії

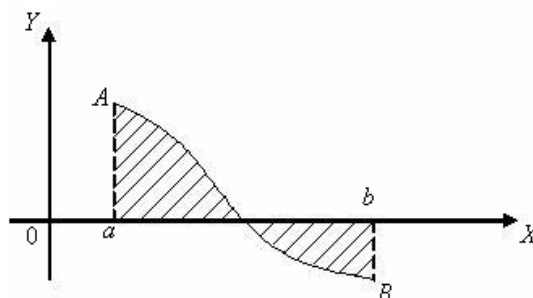
#### Визначення площі плоскої області

1. Якщо  $y = f(x) \in C[a; b]$  і  $f(x) \geq 0$ , то (див. лекцію 19)

$$S_{\text{кр.трапеції}} = \int_a^b f(x) dx.$$

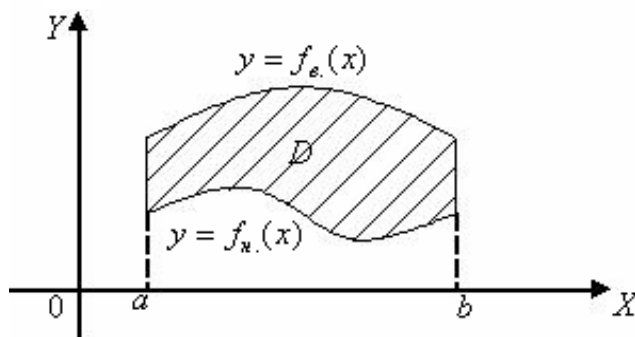
2. Якщо  $y = f(x) \in C[a; b]$ , але змінює знак, то площа заштрихованої області визначається за формулою

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$



3. Якщо область  $D$  обмежена лініями  $y = f_{\text{верх.}}(x)$ ,  $y = f_{\text{ниж.}}(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ , то

$$S_D = \int_a^b f_{\text{верх.}}(x) dx - \int_a^b f_{\text{ниж.}}(x) dx = \int_a^b (y_{\text{верх.}} - y_{\text{ниж.}}) dx.$$

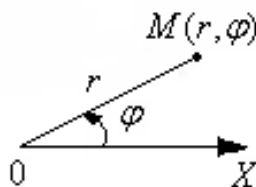


4. Якщо в криволінійній трапеції крива  $AB$  задається параметрично  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ,  $t \in [t_a; t_b]$ ,  $y \geq 0$ , то

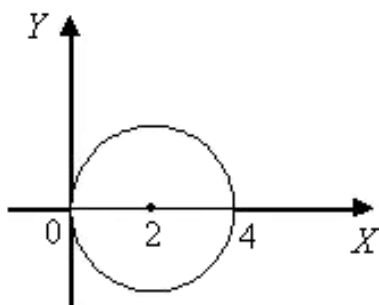
$$S_{\text{кр.трап.}} = \int_a^b y dx = \int_{t_a}^{t_b} y(t) x'_t dt.$$

### Площа криволінійного сектора

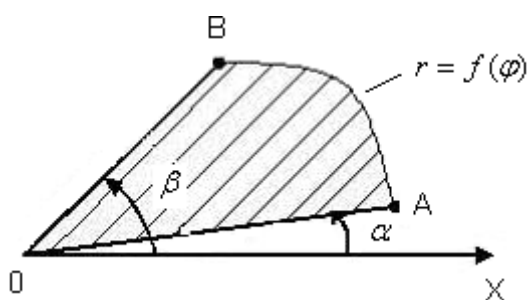
Розглянемо полярну систему координат:



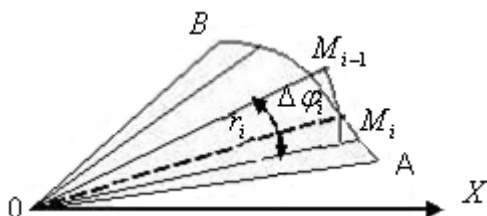
Якщо вся додатна частина осі  $x$  декартової системи координат збігається з полярною піввіссю  $Ox$ , початок відліку – з полюсом  $O$ , а вісь  $y$  буде перпендикулярна до осі  $x$ , то формули переходу з полярної в декартову систему координат матимуть вигляд:  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ . Крива в полярній системі координат задається рівнянням  $r = f(\phi)$ . Наприклад, рівняння кола із центром у точці  $O$  і радіусом  $2$  у декартовій системі координат  $x^2 + y^2 = 4$ , у полярній системі  $r=2$ ,  $\phi \in [0; 2\pi)$ . А коло із центром у точці  $M_0(2; 0)$  й радіусом  $2$  у декартовій системі координат  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$  або  $x^2 + y^2 = 4x$ , у полярній системі  $r = 4 \cos \phi$ ,  $\phi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .



Розглянемо криволінійний сектор, обмежений лініями  $r = f(\phi)$ ,  $\phi = \alpha$ ,  $\phi = \beta$ .



Для визначення площі криволінійного сектора розіб'ємо відрізок  $[\alpha; \beta]$  довільним чином на  $n$  частин  $\alpha = \phi_0 < \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_n = \beta$  і в кожному інтервалі довільно виберемо кут  $\theta_i$  ( $\phi_{i-1} \leq \theta_i \leq \phi_i$ ). Обчислимо значення функції  $r_i = f(\theta_i)$ .



Позначимо площу нескінченно малого криволінійного сектора за  $\Delta S_i$ . Тоді

$$\Delta S_i \approx \frac{1}{2} r_i^2 \Delta \phi_i,$$

$$S_{\text{кр.сек.}} \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} r_i^2 \Delta \phi_i$$

–  $n$ -а інтегральна сума для функції  $\frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{2} f^2(\phi)$ .

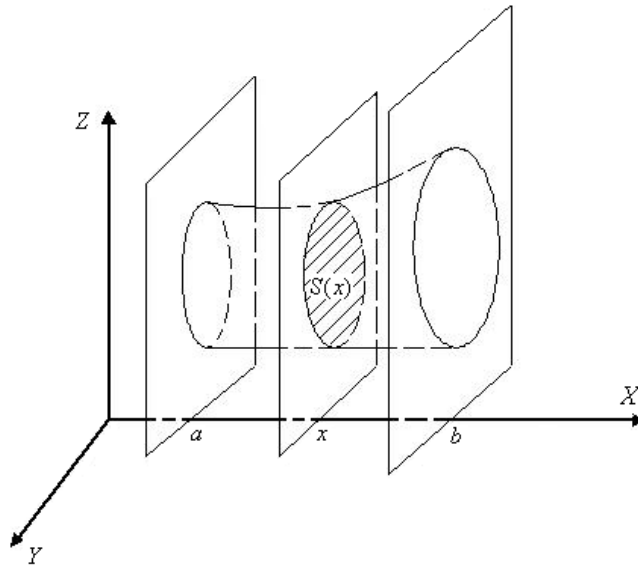
Уведемо ранг розбиття  $\lambda = \text{найб.}\{\Delta \phi_i\}$ , що характеризує дрібність розбиття, причому при  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Якщо  $r = f(\phi) \in C[\alpha, \beta]$ , то за теоремою 2 лекції 18 маємо:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(\theta_i) \Delta\phi_i = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f^2(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\phi,$$

тобто

$$S_{\text{кр.сектора}} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\phi.$$

## Об'єм тіла обертання



□ Для тіла  $V$  відома площа будь-якого перпендикулярного до осі  $OX$  перерізу  $S(x) \in C[a; b]$ . Визначимо об'єм такого тіла. Розіб'ємо відрізок  $[a; b]$  довільним чином на  $n$  частин:  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Через ці точки проведемо площини, перпендикулярні до осі  $OX$ . На кожному інтервалі  $[x_{i-1}; x_i]$  вибираємо точку  $\xi_i$  й обчислюємо площу перерізу  $S_i = S(\xi_i)$ . Об'єм  $\Delta V_i$  між площинами  $x = x_{i-1}$ ,  $x = x_i$  визначимо за формулою  $\Delta V_i \approx S(\xi_i) \Delta x_i$ , а весь об'єм

$$V \approx \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i$$

і чим дрібнішим є розбиття, тим точнішою є остання формула. Ранг розбиття  $\lambda = \max \{ \Delta x_i \}$ , якщо  $\lambda \rightarrow 0$ , то  $n \rightarrow \infty$  (але не навпаки). Ясно, що

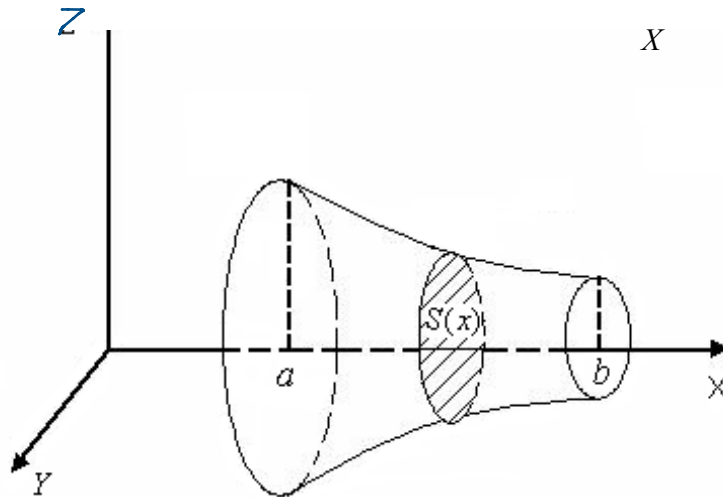
$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b S(x) dx$$

за теоремою 2 лекції 18. Отже,

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Розглянемо тіло обертання навколо осі  $OX$ .

Обертаючи криву  $y = f(x) \in C[a; b]$  навколо осі  $OX$ , одержимо тіло обертання.



Оскільки  $S(x) = \pi \cdot y^2 = \pi \cdot f^2(x)$ , тоді

$$V_x = \int_a^b \pi \cdot y^2 dx.$$

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 20

1. Які величини можна обчислити за допомогою визначеного інтегралу?
2. Наведіть приклад застосування визначеного інтегралу для обчислення площі плоскої фігури.
3. Наведіть приклад застосування визначеного інтеграла для обчислення площі сектора, заданого в полярній системі координат.
4. Наведіть приклад обчислення об'єму тіла обертання, отриманого обертанням кривої навколо осі  $Ox$ , осі  $Oy$ .

## Лекція 21. Геометричні застосування визначеного інтегралу: довжина дуги кривої, площа поверхні обертання

**Мета:** визначити нескінченно великі й нескінченно малі послідовності. Розглянути основні теореми про границі. Ознайомити з монотонними послідовностями.

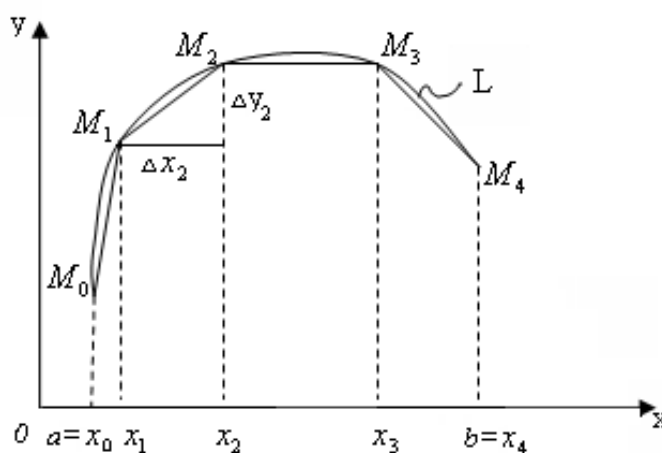
### План

1. Довжина дуги кривої, заданої явно, у полярних координатах
2. Довжина дуги кривої, заданої параметрично
3. Площа тіла обертання

### Довжина дуги кривої

Нехай крива  $L$  задана на відрізку  $[a; b]$  рівнянням  $y = f(x)$ .

**Означення.** Крива на відрізку  $[a; b]$  називається **гладкою**, якщо  $\exists f'(x) \in C[a; b]$ . Визначимо довжину дуги гладкої кривої  $L$ .



Довільним чином розбиваємо відрізок  $[a; b]$  на  $n$  частин:  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  (на рисунку  $n = 4$ ). На дузі кривої  $L$  даному розбиттю відповідають точки  $M_i(x_i; y_i)$ , де  $y_i = f(x_i)$ .

Довжина хорди

$$\begin{aligned} |M_{i-1}M_i| &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i. \end{aligned}$$

За теоремою Лагранжа

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = y'(\xi_i),$$

де  $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ .

Тоді

$$|M_{i-1}M_i| = \sqrt{1 + y'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Довжина вписаної ламаної

$$L_{\text{лам}} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + y'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Щоб визначити довжину дуги кривої  $L$ , переходимо до границі, коли довжина найбільшої хорди прямує до нуля.

З формули (1) випливає, що якщо  $|M_{i-1}M_i| \rightarrow 0$ , то  $\Delta x_i \rightarrow 0$ .

Позначимо *найб.* $\{\Delta x_i\} = \lambda$  – ранг розбиття.

Таким чином,

$$L = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + y'^2(\xi_i)} \Delta x_i,$$

а оскільки функція  $\sqrt{1 + y'^2} \in C[a; b]$ , то за теоремою 2 лекції 18 границя  $n$ -ї інтегральної суми не залежить від способу розбиття відрізка  $[a; b]$ , вибору точок  $\xi_i$  і дорівнює скінченному числу, тобто

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

### **Довжина дуги, якщо крива $L$ задана параметрично**

Якщо плоска крива  $L$  задана параметрично:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha; \beta], \quad x(\alpha) = a, \quad x(\beta) = b,$$

$$x'_t, y'_t \in C[\alpha; \beta] \text{ і } x'_t(t) \neq 0 \text{ при } \forall t \in [\alpha; \beta],$$

то в інтегралі  $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$  можна зробити заміну змінної  $x = x(t)$ ,  $dx = x'_t dt$  і  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ :

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} x'_t dt. = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} dt. (*)$$

**Зауваження.** Якщо крива  $L$  лежить у просторі, тобто  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$  і  $x'_t, y'_t, z'_t \in C[\alpha; \beta]$ , то можна довести, що довжина дуги кривої визначається за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt.$$

Тут підінтегральний вираз

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt$$

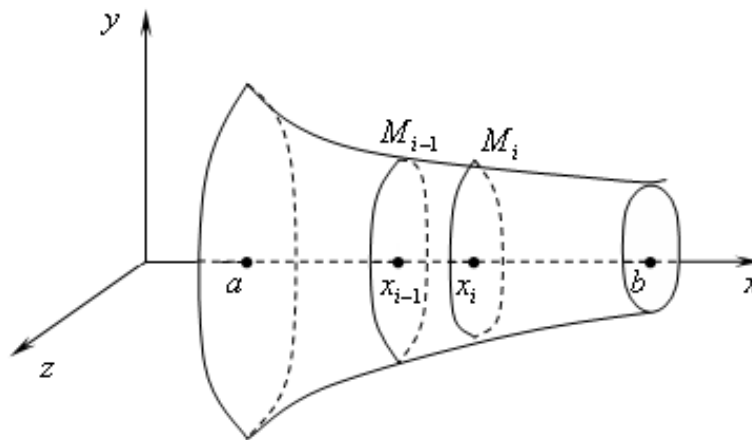
називають **диференціалом довжини дуги**.

### Площа поверхні обертання

Нехай гладка крива  $L$  лежить у площині  $xOy$  і задана рівнянням  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $f'(x) \in C[a; b]$ . Тоді площа поверхні обертання кривої  $L$  навколо осі  $Ox$  визначається за формулою

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx (**)$$

**Доведення.**



Розіб'ємо відрізок  $[a; b]$  довільним чином на  $n$  частин  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Площини  $x = x_i$  розбивають поверхню обертання на  $n$  частин, площа бічної поверхні кожної частини як площа бічної поверхні зрізаного конуса дорівнює

$$\begin{aligned} \Delta S_i &\approx 2\pi \frac{y(x_i) + y(x_{i-1})}{2} |M_{i-1}M_i| = \\ &= \pi(y(x_i) + y(x_{i-1})) \sqrt{1 + y'^2(\xi_i)} \Delta x_i. \end{aligned}$$

Площа всієї поверхні обертання

$$S_x \approx \sum_{i=1}^n \pi(y(x_i) + y(x_{i-1})) \sqrt{1 + y'^2(\xi_i)} \Delta x_i,$$

$$y(x_i) + y(x_{i-1}) \approx 2y(\xi_i),$$

оскільки  $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ ,  $\Delta x_i \rightarrow 0$  і  $\xi_i$  лежить між  $x_i$  і  $x_{i-1}$ .

Таким чином,  $S_x \approx \sum_{i=1}^n 2\pi y(\xi_i) \sqrt{1 + y'^2(\xi_i)} \Delta x_i$  і чим дрібніше розбиття, тим точніша остання формула. Введемо ранг розбиття  $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$  і

$$S_x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi y(\xi_i) \sqrt{1 + y'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Повторюючи аналогічні розмірковування з п.71, дійдемо формули

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

**Зауваження.** Якщо гладка крива  $L$  задана параметрично, тобто  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ ,

$x(\alpha) = a$ ,  $x(\beta) = b$ ,  $x'_t, y'_t \in C[\alpha; \beta]$  і  $x'_t(t) \neq 0$  при  $\forall t \in [\alpha; \beta]$ , то

$$S_x = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} dt.$$

### Довжина дуги кривої у полярній системі координат

□ крива  $L$  задана рівнянням  $r = f(\phi)$ ,  $\phi \in [\alpha, \beta]$ ,  $r'(\phi) \in C[\alpha; \beta]$ . Тоді за параметр  $t$  візьмемо  $\phi$  й формула (\*) набере вигляду

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'^2_\phi + r^2} d\phi.$$

**Доведення**

Оскільки  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ , то  $x = f(\phi) \cos \phi$ ,  $y = f(\phi) \sin \phi$ ,

$$\begin{aligned} L &= \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2_\phi + y'^2_\phi} d\phi = \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{(f'(\phi) \cos \phi - f(\phi) \sin \phi)^2 + (f'(\phi) \sin \phi + f(\phi) \cos \phi)^2} d\phi = \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{r'^2_\phi + r^2} d\phi. \end{aligned}$$

## Питання та завдання для самоконтролю до лекції 21

1. Яка формула для обчислення довжини дуги кривої, що задана параметрично?
2. Як обчислюється довжина дуги кривої, що задана в полярних координатах?
3. Наведіть формулу для обчислення довжини дуги кривої, заданої в декартових координатах?
4. Як знайти площу тіла обертання кривої навколо осей координат?

## Лекція 22. Застосування визначеного інтеграла до задач фізики

**Мета:** навчити застосовувати визначений інтеграл для розв'язання фізичних задач: обчислення маси дуги кривої, моментів інерції, статичного моменту дуги кривої, координат центра мас, роботи сили.

### План

1. Обчислення маси дуги кривої
2. Момент інерції дуги кривої
3. Статичний момент дуги кривої, координати центра мас
4. Робота сили

## Застосування визначеного інтеграла до задач фізики

### Маса дуги кривої

Проаналізуємо отримані формули при розв'язанні геометричних задач:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt,$$

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt,$$

$$S_x = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt,$$

$$dS_x = 2\pi y \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt,$$

$$V = \int_a^b S(x) dx,$$

$$dV = S(x) dx,$$

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 dx,$$

$$dV_x = \pi y^2 dx,$$

$$S_{\text{кр.тр.}} = \int_a^b y dx,$$

$$dS = y dx.$$

Отже, підінтегральні вирази - це диференціали, складені для відповідного нескінченно малого елемента. Тому, щоб уникнути більших викладень, розглянемо на задачах з фізики новий метод.

Нехай у просторі задана крива

$$L: x = x(t), y = y(t), z = z(t) \text{ при } t \in [\alpha; \beta], \quad x'_t, y'_t, z'_t \in C[\alpha; \beta]$$

У кожній точці кривої задана погонна густина

$$\rho = \rho(t) \in C[\alpha; \beta] \left( [\rho] = \frac{[m]}{[l]} \right).$$

Маса нескінченно малого елемента

$$dm = \rho(t)dl = \rho(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}dt,$$

тоді

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}dt.$$

### Статичний момент дуги кривої. Координати центра мас

З фізики відомо, що статичний момент  $M$  матеріальної точки маси  $m$  щодо деякої осі дорівнює  $M = md$ , де  $d$  - відстань від точки до осі.

Нехай у площині задана крива

$$L: x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha; \beta], x'_t, y'_t, \rho(t) \in C[\alpha; \beta],$$

де  $\rho(t)$  – погонна щільність. Для н.м. елемента дуги кривої статичний момент щодо осі  $OX$ :

$$dM_x = \rho y dl = \rho y \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt,$$

а статичний момент всієї кривої

$$M_x = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t)y(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt.$$

Аналогічно визначається статичний момент щодо осі  $OY$ :

$$M_y = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t)x(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt.$$

Центр мас точка  $C(x_c, y_c)$  має таку властивість, що якщо в цій точці зосередити всю масу кривої  $L$ , то статичний момент цієї маси щодо осі  $OX(OY)$  збігається зі статичним моментом кривої  $L$  щодо осі  $OX(OY)$  (тобто з моментом маси розподіленої по цій кривій).

Таким чином,

$$x_c m = \int_{\alpha}^{\beta} \rho x \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt, y_c m = \int_{\alpha}^{\beta} \rho y \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt$$

або

$$x_c = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \rho x \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt}{\int_{\alpha}^{\beta} \rho \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt}, y_c = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \rho y \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt}{\int_{\alpha}^{\beta} \rho \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt}.$$

**Завдання:** Самостійно одержати координати центра мас, якщо крива  $L$  задана в декартовій або в полярній системі координат.

### Момент інерції дуги кривої

Момент інерції  $I$  матеріальної точки маси  $m$  щодо деякої осі дорівнює  $I = md^2$ , де  $d$  – відстань від точки до відповідної осі.

Нехай у площині задана крива  $L$  параметрично. Тоді момент інерції н.м. елемента дуги кривої щодо осі  $OX$ :

$$dI_x = \rho y^2(t) dl = \rho y^2(t) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt,$$

а для всієї кривої  $L$ :

$$I_x = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) y^2(t) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt.$$

Аналогічно визначається момент інерції щодо осі  $OY$ :

$$I_y = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) x^2(t) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt.$$

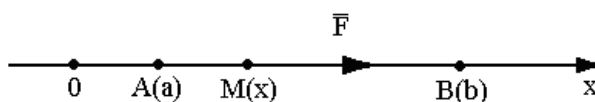
Полярний момент інерції розглядається щодо полюса  $O$ :

$$I_0 = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) (x^2 + y^2) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt.$$

Самостійно записати всі ці моменти в декартовій або в полярній системі координат.

### Робота змінної сили

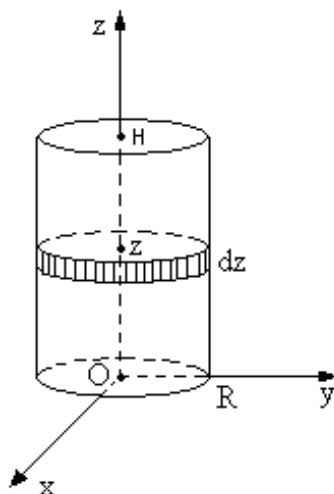
Нехай точка  $M$  рухається уздовж осі  $OX$  під дією сили  $\vec{F}(x)$ , що лежить на осі  $OX$ .



Коли точка  $M$  пройде н.м. елемент шляху  $dx$ , сила  $\vec{F}(x)$  зробить роботу  $dA = F(x)dx$ . Робота змінної сили  $\vec{F}(x)$  на відрізку  $[a; b]$  визначається за формулою  $A = \int_a^b F(x) dx$ .

### Робота з подолання сили тяжіння

Розглянемо це питання на прикладі про обчислення роботи, яку потрібно зробити, щоб викачати воду з вертикальної циліндричної діжки, що має радіус основи  $R$  й висоту  $H$ .



Щоб підняти н.м. шар води завтовшки  $dz$  до краю діжки, потрібно зробити роботу:

$$dA = (H - z)dP = (H - z)gdm = (H - z)g\rho dV = (H - z)g\rho\pi R^2 dz.$$

Тоді робота з викачування всієї води з діжки

$$\begin{aligned} A &= \int_0^H (H - z)g\rho\pi R^2 dz = g\rho\pi R^2 \int_0^H (H - z) dz = g\rho\pi R^2 \left( Hz - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^H = \\ &= g\rho\pi R^2 \frac{H^2}{2}. \end{aligned}$$

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 22

1. Як визначається маса дуги кривої?
2. Яка формула використовується для обчислення статистичного моменту дуги кривої?
3. Як обчислити моменти інерції дуги кривої?
4. Як знайти роботу змінної сили за допомогою визначеного інтегралу?

5. Наведіть приклад обчислення роботи, яку потрібно зробити, щоб викачати воду з вертикальної циліндричної діжки, що має радіус основи  $R$  й висоту  $H$ .

### Лекція 23. Сила тиску на плоску пластину. Задача про час витікання рідини з посудини з отвором

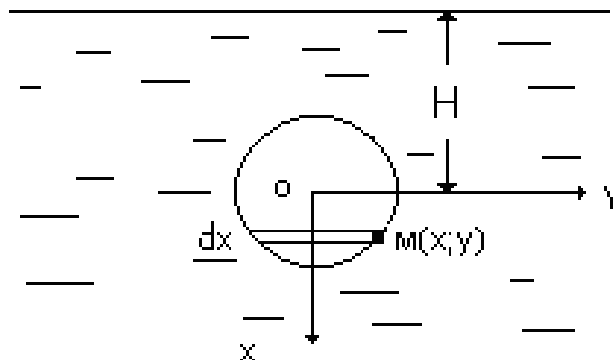
**Мета:** визначити нескінченно великі й нескінченно малі послідовності. Розглянути основні теореми про границі. Ознайомити з монотонними послідовностями.

#### План

1. Сила тиску на плоску пластину
2. Задача про час витікання рідини з посудини з отвором

#### Сила тиску на плоску пластину

Нехай круглу пластину радіуса  $R$  опустили вертикально у воду так, що її центр перебуває на глибині  $H$  під водою. Визначити силу тиску води на цю пластину.



Складемо диференціал сили тиску води на н.м. елемент пластини:

$dP = \gamma h dS$ ,  $\gamma$  – питома вага води,  $h$ - відстань від поверхні води до н.м. елемента пластини.

$$dS = 2y dx = 2\sqrt{R^2 - x^2} dx,$$

$$dP = \gamma(H + x)2\sqrt{R^2 - x^2} dx,$$

$$\begin{aligned}
P &= 2\gamma \int_{-R}^R (H+x)\sqrt{R^2-x^2} dx = \left. \begin{matrix} x = R \sin t & \begin{matrix} -R & R \\ t & -\pi/2 & \pi/2 \end{matrix} \\ dx = R \cos t dt \end{matrix} \right\} = \\
&= 2\gamma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (H + R \sin t) R \cos t R \cos t dt = \\
&= 2\gamma R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (H \cos^2 t + R \cos^2 t \sin t) dt = \\
&= 2\gamma R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( H \frac{1 + \cos 2t}{2} - R \cos^2 t (-\sin t) \right) dt = \\
&= 2\gamma R^2 \left( \frac{H}{2} t + \frac{H \sin 2t}{2} - R \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\gamma R^2 \frac{H}{2} \pi = \gamma \pi R^2 H.
\end{aligned}$$

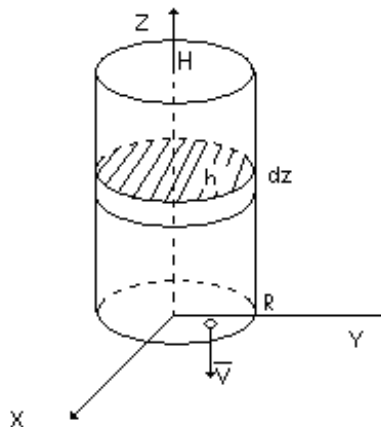
### Задача про час витікання рідини з посудини з отвором

□ на дні циліндра ( $H; R$ ) отвір площі  $s$ . Циліндрична посудина до країв наповнена рідиною. Якщо рідина нев'язка й силами поверхневого натягу можна знехтувати, то швидкість витікання рідини з отвору  $s$  за законом Торрічеллі  $v = \sqrt{2gh}$ , тут  $h$  – відстані від рівня рідини до отвору.

$svdt$  – об'єм рідини, що витікає.

$\pi R^2 dz$  – на такий об'єм понизиться рівень рідини в циліндрі ( $dV < 0$ ).

$$\pi R^2 dz = -s\sqrt{2gz}dt \Rightarrow dt = -\frac{\pi R^2 dz}{s\sqrt{2g}\sqrt{z}}$$



Тоді час витікання всієї рідини з посудини

$$t = \int_H^0 -\frac{\pi R^2 dz}{s\sqrt{2g}\sqrt{z}} = \frac{\pi R^2}{s\sqrt{2g}} 2\sqrt{z} \Big|_0^H = \frac{\pi R^2}{s\sqrt{2g}} 2\sqrt{H} = \frac{\pi R^2}{s} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

### **Питання та завдання для самоконтролю до лекції 23**

1. Згадайте формули щодо застосування визначеного інтегралу для обчислення площ плоских фігур та об'ємів тіл обертання?
2. Якими формулами користуються для обчислення маси дуги кривої, роботи сили?
3. Як обчислити силу тиску на плоску пластину?

## РОЗДІЛ IV. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

### Лекція 24. Поняття функції декількох змінних. Область визначення, область значень

**Мета:** ввести поняття функції декількох змінних. Навчити досліджувати й будувати області визначення ФДЗ.

#### План

1. Деякі поняття плоскої області  $D$
2. Функція декількох змінних
3. Область визначення ФДЗ. Область значень.
4. Побудова області допустимих значень для функцій двох змінних

### Функція декількох змінних

#### Деякі поняття плоскої області $D$

З геометрії відомо, що пара чисел  $(x, y)$  зображується точкою  $M$  на координатній площині  $xOy$ . Множина цих пар дає плоску область  $D$ .

Відстань між двома точками площини визначається за формулою  $\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ .

**Означення.** Множина точок площини, координати яких задовольняють нерівність  $\rho(M, M_0) < \delta$ , називається  $\delta$  – **околом точки**  $M_0$  й позначається  $\delta(M_0)$ . Геометрично це внутрішня частина кола із центром у точці  $M_0$  й радіусом  $\delta$ .

**Означення.** Точка  $M_0$  називається **внутрішньою** точкою області  $D$ , якщо існує  $\delta$  – окіл точки  $M_0$ , що повністю лежить в області  $D$ .

**Означення.** Точка  $M_0$  називається **граничною** точкою області  $D$ , якщо будь-який  $\delta$  – окіл цієї точки містить як точки, що належать області  $D$ , так і ті, що не належать їй.

**Означення.** Область  $D$  називається **відкритою**, якщо будь-яка точка цієї області є внутрішньою.

**Означення.** Область  $D$  називається **замкненою**, якщо кожна гранична точка області є так само точкою цієї області. Замкнену область, як правило, позначають  $\bar{D}$ .

**Означення.** Область  $D$  називається **обмеженою**, якщо її можна повністю помістити в деякий круг скінченного радіуса.

**Означення.** Область  $D$  називається **зв'язаною**, якщо дві її будь-які точки можна з'єднати неперервною кривою, що повністю лежить у цій області.

### Поняття функції декількох змінних

Поряд з поняттям функції однієї незалежної змінної  $y = f(x), x \in X, y \in Y$  можна розглянути функцію двох і більше незалежних змінних.

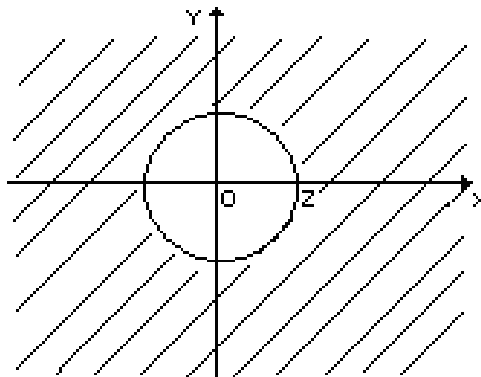
**Означення.** Якщо будь-якій точці  $M \in D$  за деяким законом  $f$  ставиться у відповідність число  $u \in U$ , то кажуть, що на області  $D$  задана функція  $u = f(M) = f(x; y)$ . Аналогічно можна дати визначення функції трьох і більше змінних.

### Приклади

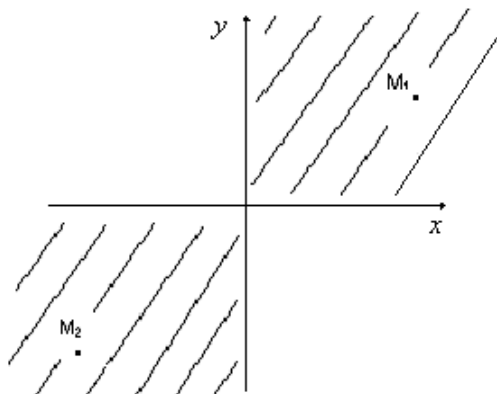
1. Нехай  $D$  – область існування функції

$$U = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$$

тоді вона визначається нерівністю  $x^2 + y^2 - 4 > 0$ ,  $x^2 + y^2 > 4 \Rightarrow$  зовнішня частина кола  $x^2 + y^2 = 4$ .  $D$  – необмежена, відкрита й зв'язана.



2.  $U = \ln(xy) \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$  або  $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$



$D$  – необмежена, відкрита й незв'язана, тому що точки  $M_1, M_2$  не можна з'єднати неперервною кривою, що повністю лежить у цій області.

4. Побудувати область визначення функції

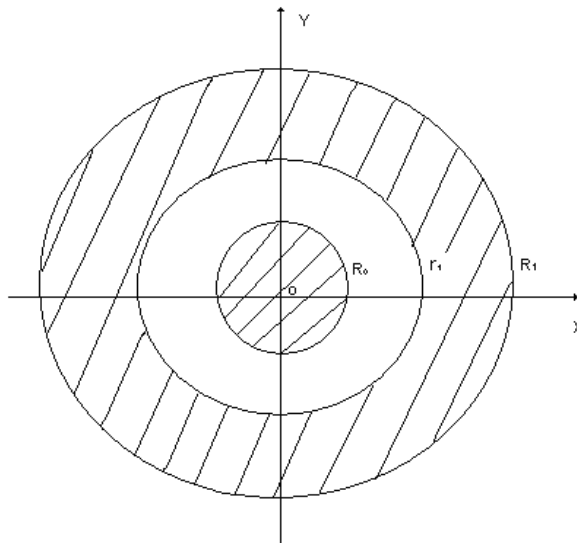
$$U = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}.$$

Якщо  $D$  – область визначення заданої функції, то

$$\cos(x^2 + y^2) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2},$$

$$2\pi n - \frac{\pi}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 2\pi n + \frac{\pi}{2} (n \in \mathbb{N}).$$

Область  $D$  – вкладені одне в одного кільця, радіуси яких  $r_0 = 0, R_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$   
 $r_n = \sqrt{4n - 1}R_0, R_n = \sqrt{4n + 1}R_0 (n \in \mathbb{N}).$



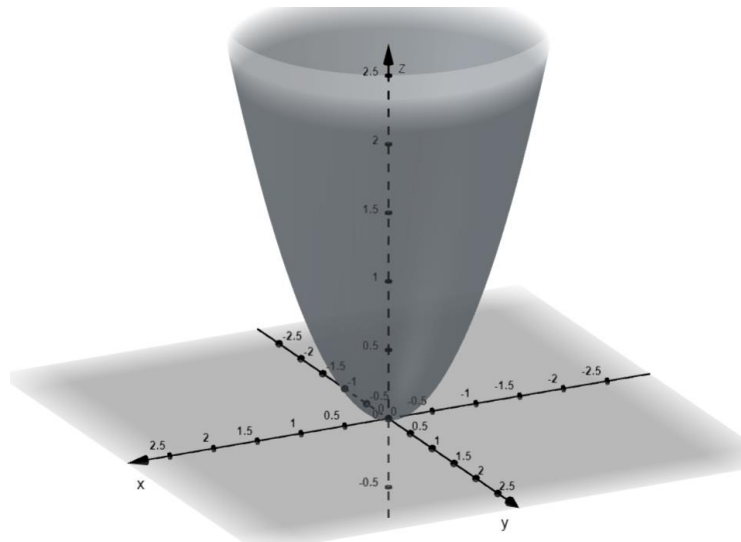
$D$  – необмежена, замкнена й незв'язана.

### Геометричне зображення функції декількох змінних (ФДЗ)

Просторовий графік функції двох змінних – геометричне місце точок  $(x, y, u)$ , тобто деяка поверхня, задана рівнянням  $u = f(x, y)$ .

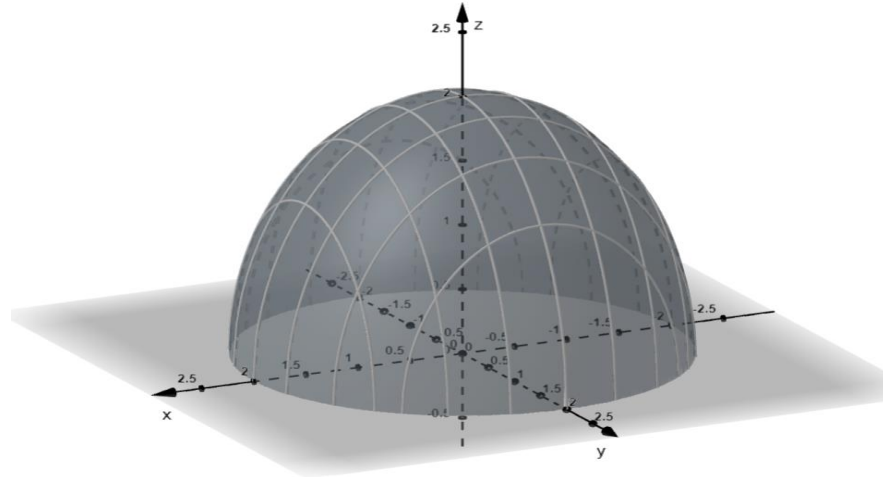
**Приклад:**

1.  $U = x^2 + y^2$  – параболоїд обертання.



Область  $D$  – проекція цієї поверхні на площину  $xoy$ , тобто вся площина  $xoy$ .

2.  $U = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  – верхня частина півсфери радіуса  $R = 2$ .



Область  $D$  – коло з радіусом  $R$ .

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 24

1. Яка область називається відкритою?
2. Яка точка називається граничною точкою області?
3. Чим відрізняються внутрішні і граничні точки області?
4. Як визначається окіл точки?
5. Яка область називається замкненою?
6. Наведіть означення функції трьох змінних?
7. Наведіть приклад функції двох змінних? Яку фізичну або геометричну, економічну величину вона може описувати?
8. Наведіть приклад функції трьох змінних? Яку фізичну або геометричну, економічну величину вона може описувати?
9. Наведіть приклад функції  $n$  змінних? Яку фізичну або геометричну, економічну величину вона може описувати?

## Лекція 25. Границя функції декількох змінних. Повторні граничні значення. Неперервність ФДЗ. Частинні похідні ФДЗ

**Мета:** визначити нескінченно великі й нескінченно малі послідовності. Розглянути основні теореми про границі. Ознайомити з монотонними послідовностями.

### План

1. Границя функції декількох змінних
2. Повторні граничні значення
3. Неперервність ФДЗ
4. Частинні похідні ФДЗ

### Границя функції декількох змінних

**Означення.** Число  $A$  називається **границею функції**  $U = f(M)$  при  $M \rightarrow M_0$ , якщо для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , що для всіх точок  $M$  з області завдання функції й задовольняючій нерівності  $0 < \rho(M, M_0) < \delta$   $|f(M) - A| < \varepsilon$ ,

Таким чином,  $A = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$  або  $A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y)$ .

**Означення.** Число  $A$  називається границею функції  $U = f(M)$  при  $M \rightarrow \infty$ , якщо для  $\forall \varepsilon > 0 \exists R = R(\varepsilon) > 0$ , що для всіх точок  $M$  з області завдання функції й задовольняючій нерівності  $\rho(M, 0) > R$   $|f(M) - A| < \varepsilon$ , таким чином,  $A = \lim_{M \rightarrow \infty} f(M)$ .

**Самостійно:** дати визначення границь  $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = \infty$  і  $\lim_{M \rightarrow \infty} f(M) = \infty$ .

### Приклади

1. Обчислити

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

ОДЗ цієї функції вся площина, крім точки  $O(0;0)$ . Розглянемо границю, коли точка  $M$  прямує до точки  $O$  по прямій  $y = kx$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot kx}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2},$$

тобто границя залежить від шляху, при різних  $k$ , набуває різних числових значень, отже вона не  $\exists$ .

Границя існує, якщо вона не залежить від шляху.

2. Обчислити

$$\lim_{M \rightarrow 0} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

Границя дорівнює нулю, тому що

$$0 \leq \left| (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}]{} 0.$$

У цьому прикладі була використана теорема про границю проміжної функції, що справедлива й для функцій декількох змінних.

### Повторні граничні значення

Для ФДЗ можна визначити граничне значення за однією зі змінних при фіксованих значеннях інших:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y = \text{const}}} f(x; y) = \phi(y).$$

Якщо  $\phi(y)$  існує, то можна повторити обчислення границі:  $\lim_{y \rightarrow y_0} \phi(y)$ .

Таким чином, ми прийдемо до поняття повторного граничного значення:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y).$$

### Приклад

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = \text{const}}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = 0,$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x = \text{const}}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = 0.$$

Зауважимо, що

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \text{не}\exists,$$

тому що при  $y = ax^2$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^4}{x^4 + a^2 x^4} = \frac{a}{1 + a^2}$$

тобто границя залежить від  $a$  і набуває різних числових значень, тобто не  $\exists$ .

**Теорема.** Якщо  $U = f(x; y)$  задано в  $\delta(M_0)$  і  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = A$ , крім цього,

існують

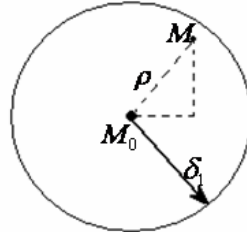
$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y = \text{const}}} f(x; y) = \phi(y), \quad \lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ x = \text{const}}} f(x; y) = \psi(x),$$

то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y) = A.$$

**Доведення**

За визначенням границі ФДЗ:  $\forall \frac{\varepsilon}{2} \exists \delta_1 = \delta_1(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$ , що при  $0 < \rho(M, M_0) < \delta_1$   $|f(x; y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ .



$$|f(x; y) - A| = |(f(x; y) - \phi(y)) + (\phi(y) - A)| \geq |\phi(y) - A| - |f(x; y) - \phi(y)| \Rightarrow |\phi(y) - A| \leq |f(x; y) - A| + |f(x; y) - \phi(y)|.$$

Далі розглядаємо тільки точки, що задовольняють нерівність

$$0 < \rho(M, M_0) < \delta_1.$$

Виберемо одну з них – точку  $M_1(x_1, y_1)$ . Оскільки

$$0 < |y - y_0| < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_1,$$

то  $|y_1 - y_0| < \delta_1$ .

З умови теореми маємо:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y = y_1 = \text{const}}} f(x; y_1) = \phi(y_1).$$

За визначенням границі функції однієї змінної:

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} \exists \delta_2 = \delta_2(\frac{\varepsilon}{2}) > 0, \text{ що при } |x - x_0| < \delta_2 \quad |f(x; y_1) - \phi(y_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

II  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , тоді при  $|y - y_0| < \delta$   $|\phi(y) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ , тобто

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \phi(y) = A.$$

Аналогічно доводиться, що  $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$ .

## Неперервність ФДЗ

**Означення.** Якщо функція  $U = f(M)$  задана в точці  $M_0$  й  $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$ , то кажуть, що функція  $U = f(M)$  **неперервна** в точці  $M_0$ .

**Означення.** Якщо функція  $U = f(M)$  неперервна в кожній точці множини  $D$ , то кажуть, що вона **неперервна на множині  $D$** :  $f(M) \in C(D)$ .

$\square$   $x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y$ , тоді  $f(x; y) - f(x_0; y_0) = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) = \Delta U$  – називають **повним приростом функції**  $U = f(x; y)$ .  
 Оскільки  $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$ , то  $\lim_{M \rightarrow M_0} (f(M) - f(M_0)) = 0$ , або  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta U = 0$ .

### Частинні похідні ФДЗ

Крім повного приросту ФДЗ

$$\Delta U = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y),$$

існують частинні прирости:

$$\Delta_x U = f(x + \Delta x; y) - f(x; y),$$

$$\Delta_y U = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

**Означення.** Якщо існує границя відношення частинного приросту ФДЗ до приросту відповідного аргументу, коли останній прямує до нуля, то його називають **частинною похідною** й позначають:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta x} = \frac{\partial U}{\partial x} = U'_x,$$

$$U'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

**Зауваження.** Частинну похідну  $\frac{\partial U}{\partial x}$  обчислюють як похідну функції однієї змінної за умови, що  $y$  зафіксовано, аналогічно для  $\frac{\partial U}{\partial y}$  –  $x$  зафіксовано.

**Приклад.** Знайти частинні похідні функції

$$U = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

$$U'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$U'_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

**Зауваження.** Взагалі з існування частинних похідних не впливає неперервність функції в даній точці, на відміну від функції однієї змінної.

## Питання та завдання для самоконтролю до лекції 25

1. Що називається границею функції декількох змінних

2. Які є способи обчислення границь функції декількох змінних.
3. Як обчислити повторні граничні значення?
4. Чи можна змінювати порядок обчислення границь ФДЗ?
5. Яка ФДЗ називається неперервною в точці?
6. Як обчислюються частинні похідні ФДЗ?

## Лекція 26. Повний диференціал. Похідна від суперпозиції ФДЗ. Дотична площина й нормаль до поверхні

**Мета:** визначити нескінченно великі й нескінченно малі послідовності. Розглянути основні теореми про границі. Ознайомити з монотонними послідовностями.

### План

1. Повний диференціал
2. Похідна від суперпозиції ФДЗ
3. Дотична площина й нормаль до поверхні

### Повний диференціал

**Означення.** Функція  $u = f(x; y)$  називається **неперервно диференційованою** в області  $D$ , якщо вона диференційована і  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in C(D)$ .

$U = f(x, y)$  неперервно диференційована в  $D$ .

$$\begin{aligned} \Delta U &= f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) = (f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y + \Delta y)) + \\ &+ ((f(x; y + \Delta y) - f(x; y))) = \{ \text{за теоремою Лагранжа} \} = \\ &= f'_x(\xi; y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x; \eta)\Delta y. \end{aligned}$$

Тут  $\xi$  між  $x$  і  $x + \Delta x$ ,  $\eta$  між  $y$  і  $y + \Delta y$ :

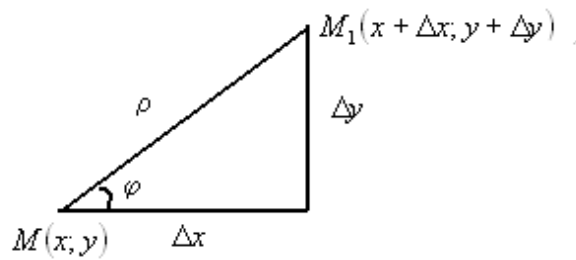
$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_x(\xi; y + \Delta y) = f'_x(x; y), \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_y(x; \eta) = f'_y(x; y).$$

Оскільки похідні неперервні в області  $D$ ,

$$\text{тоді } f'_x(\xi; y + \Delta y) = f'_x(x; y) + \alpha,$$

$$f'_y(x; \eta) = f'_y(x; y) + \beta, \text{ де } \alpha \text{ і } \beta - \text{ н. м. при } \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0.$$

$$\text{Тоді } \Delta U = f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y + (\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y).$$



Оскільки  $\Delta x = \rho \cos \phi$ ,  $\Delta y = \rho \sin \phi$ , то  $\alpha \Delta x + \beta \Delta y = \rho(\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi)$ :

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi) = 0,$$

ТАКИМ ЧИНОМ

$$\alpha \Delta x + \beta \Delta y = o(\rho), \quad \text{де } \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

**Висновок.** Повний приріст неперервно диференційованої ФДЗ  $\Delta U = f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y + o(\rho)$ .

**Означення.** Головна частина повного приросту неперервно диференційованої ФДЗ, лінійна щодо приросту аргументів, називається **повним диференціалом**, тобто  $dU = f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y$ .

**Зауваження.** Нехай  $U = x \Rightarrow dU = dx$  и  $dU = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y$ , тобто  $dx = \Delta x$ , аналогічно  $dy = \Delta y$  й  $du = f'_x(x; y)dx + f'_y(x; y)dy$ .

$$\text{Остаточнo, } dU = U'_x dx + U'_y dy.$$

$$\text{Оскільки } \Delta U|_{M_0} = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) = dU|_{M_0} + o(\rho),$$

то

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + U'_x(x_0; y_0)\Delta x + U'_y(x_0; y_0)\Delta y.$$

Ця формула дозволяє в наближених обчисленнях використовувати повний диференціал ФДЗ.

### Похідна від суперпозиції ФДЗ

1. Якщо функції  $U = f(x; y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $U$ ,  $x$ ,  $y$  є неперервно - диференційованими за своїми аргументами, тоді

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

#### Доведення

$$\Delta U = U'_x \Delta x + U'_y \Delta y + o(\rho),$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = U'_x \frac{\Delta x}{\Delta t} + U'_y \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{o(\rho)}{\Delta t}.$$

Перейдемо до границі при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\frac{dU}{dt} = U'_x \frac{dx}{dt} + U'_y \frac{dy}{dt} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{O(\rho)}{\Delta t},$$

$$\frac{O(\rho)}{\Delta t} = \frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\Delta t} = \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta t}, \text{ тому що } x(t), y(t) \text{ – неперервні, то}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta y = 0, \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0 \text{ при } \Delta t \rightarrow 0.$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{O(\rho)}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha \cdot x'_t + \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta \cdot y'_t = 0$$

Таким чином,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

2.  $\square z = f(x; y), x = x(U; V), y = y(U; V), z, x, y$  – неперервно диференційовані за своїми аргументами, тоді

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial U} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial U},$$

$$\frac{\partial z}{\partial V} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial V} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial V}.$$

Доведення аналогічне попередньому випадку 1.

**Приклад**

$$z = \ln(x^2 + 3y), \quad x = e^{u+v^2}, \quad y = U^3 + V,$$

$$\frac{\partial z}{\partial U} = \frac{2x}{x^2 + 3y} \cdot e^{u+v^2} + \frac{3}{x^2 + 3y} \cdot 3U^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial V} = \frac{2x}{x^2 + 3y} \cdot e^{u+v^2} \cdot 2V + \frac{3}{x^2 + 3y} \cdot 1.$$

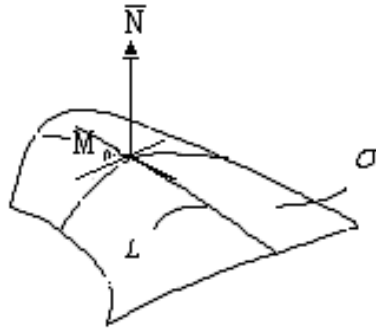
### Дотична площина й нормаль до поверхні

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}.$$

Нехай рівняння поверхні  $\sigma$  задане в неявному вигляді  $F(x, y, z) = 0$  й функція  $F(x, y, z)$  неперервно диференційована в  $(\cdot) M_0(x_0, y_0, z_0)$  й в  $\delta(M_0)$ .

Складемо вектор  $\vec{N} \left( \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_0}; \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_0}; \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_0} \right)$ .

Розглянемо тільки випадок, коли  $\vec{N} \neq \vec{0}$ .



Розглянемо будь-яку криву, що проходить через  $(\cdot) M_0$  і належить поверхні  $\sigma$ :

$$L \approx \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha; \beta].$$

Оскільки  $L \in \sigma$ , то  $F(x(t); y(t); z(t)) = 0$  при  $\forall t \in [\alpha; \beta]$ .  
Продиференціюємо ліву й праву частини рівності:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot \left( \frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} + \frac{dz}{dt} \bar{k} \right) = \bar{N} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}, \end{aligned}$$

де  $\bar{r} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ .

Відомо з диференціальної геометрії, що вектор  $\frac{d\bar{r}}{dt}$  дотичний вектор до кривої  $L$ . Таким чином, вектор  $\bar{N} \perp \frac{d\bar{r}}{dt}$  для будь-якої кривої  $L$ , що проходить через  $(\cdot) M_0$  і лежить на поверхні  $\sigma$ . А оскільки всі дотичні проходять через точку  $M_0$  і перпендикулярні до того самого вектора  $\bar{N}$ , то вони лежать в одній площині, що називається дотичною площиною, а вектор  $\bar{N}$  – нормальним вектором.

З аналітичної геометрії рівняння площини:  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ ,

Тоді

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{M_0} (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{M_0} (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{M_0} (z - z_0) = 0$$

– рівняння дотичної площини, рівняння прямої:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

тоді

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}\bigg|_{M_0}}$$

– рівняння нормалі.

**Зауваження.** Якщо рівняння поверхні  $\sigma$  задане в явному вигляді  $z = f(x; y)$ , або  $F(x, y, z) = f(x; y) - z = 0$ , то  $\vec{N}(z'_x(M_0), z'_y(M_0), -1)$  й рівняння дотичної площини й нормалі набере вигляду

$$z'_x(M_0)(x - x_0) + z'_y(M_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{z'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 26

1. Як визначається повний диференціал ФДЗ?
2. Чому дорівнює похідна від суперпозиції ФДЗ?
3. Як записується рівняння дотичної площини до поверхні функції двох змінних? й нормаль до поверхні
4. Як записується рівняння нормалі до поверхні функції двох змінних?

### Лекція 27. Похідні від функцій, заданих неявно. Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Формула Тейлора для функції двох змінних. Екстремуми

**Мета:** визначити частинні похідні функції багатьох змінних, яка задана неявно. Ознайомити з формулою Тейлора для функції багатьох змінних та прикладами її використання. Надати необхідну умову екстремуму ФДЗ.

#### План

1. Похідні від функцій, заданих неявно
2. Частинні похідні й диференціали вищих порядків
3. Формула Тейлора для функції двох змінних
4. Екстремум ФДЗ. Необхідна ознака існування екстремуму

#### Похідні від функцій, заданих неявно

1. Функція однієї змінної  $F(x; y) = 0$ .

$$0 = \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}.$$

2. Функція двох змінних  $F(x; y; z) = 0$ .

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z},$$

тому що  $\frac{dy}{dx} = 0$  ( $y$  – незалежна змінна).

Аналогічно,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z}.$$

### Частинні похідні й диференціали вищих порядків

**Означення.**  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  – називається **частинною похідною другого порядку** від функції  $u$  за аргументом  $x$  двічі. Аналогічно визначаються  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ .

**Теорема.** Якщо функція  $u = f(x; y)$  в  $\delta(M)$  має частинні похідні  $u'_x, u'_y, u''_{xy}, u''_{yx}; u''_{xy}, u''_{yx}$  – неперервні в точці  $M$ , то в цій самій точці вони й однакові  $u''_{xy} = u''_{yx}$  (без доведення).

**Зауваження.** З теореми випливає, що частинні похідні другого й вище порядків, які неперервні в точці  $M$ , не залежать від порядку диференціювання, тобто, наприклад,  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}$ .

**Означення.**  $d(du) = d^2u$  – називається **диференціалом другого порядку**.

$$\begin{aligned} d^2u &= d(u'_x dx + u'_y dy) = (du'_x) dx + u'_x d^2x + d(u'_y) dy + \\ &+ u'_y d^2y = (u''_{xx} dx + u''_{xy} dy) dx + (u''_{yx} dx + u''_{yy} dy) dy + (u'_x d^2x + u'_y d^2y) = \\ &= (u''_{xx} (dx)^2 + 2u''_{xy} dx dy + u''_{yy} (dy)^2) + (u'_x d^2x + u'_y d^2y). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$d^2u = (u''_{xx} (dx)^2 + 2u''_{xy} dx dy + u''_{yy} (dy)^2) + (u'_x d^2x + u'_y d^2y).$$

**Зауваження**

1. Якщо  $x, y$  – незалежні змінні, то  $d^2x = d(dx) = d(\Delta x) = 0$  й  $d^2y = 0$ , тоді  $d^2u = u''_{xx} (dx)^2 + 2u''_{xy} dx dy + u''_{yy} (dy)^2$ .

2. Якщо  $x, y$  – незалежні змінні, то  $d^3u = u_{xxx}''' (dx)^3 + 3u''_{xy}''' (dx)^2 dy + 3u''_{yy}''' dx (dy)^2 + u''_{yyy}''' (dy)^3$  й  $d^n u = \sum_{i=0}^n C_n^i u_{x^i y^{n-i}}^{(n)} (dx)^i (dy)^{n-i}$ .

### Формула Тейлора для функції двох змінних

Формула Тейлора для функції однієї змінної має такий вигляд:

$$\Delta y|_{x_0} = \frac{dy|_{x_0}}{1!} + \frac{d^2 y|_{x_0}}{2!} + \dots + \frac{d^n y|_{x_0}}{n!} + R_n(x, x_0),$$

де  $R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = \frac{d^{n+1} y|_{\xi}}{(n+1)!}$ ,  $\xi$  між  $x$  і  $x_0$ .

Розглянемо функцію  $u = f(x; y)$ , що має в  $\delta(M_0)$  неперервні частинні похідні до  $(n + 1)$  порядку включно.

□  $x = x_0 + \Delta x \cdot t, y = y_0 + \Delta y \cdot t, t \in [0; 1], x_0, y_0, \Delta x, \Delta y - const.$

$$u = f(x_0 + \Delta x \cdot t; y_0 + \Delta y \cdot t) = F(t)$$

$$\Delta u|_{M_0} = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) = F(1) - F(0) = \Delta F|_{t=0}.$$

За формулою Тейлора для функції однієї змінної:

$$\Delta F|_{t=0} = \frac{dF|_{t=0}}{1!} + \frac{d^2 F|_{t=0}}{2!} + \dots + \frac{d^n F|_{t=0}}{n!} + R_n(t; 0)$$

$$\begin{aligned} dF|_{t=0} &= F'_t|_{t=0} dt = (u'_x x'_t + u'_y y'_t)|_{t=0} dt = (u'_x dx + u'_y dy)|_{M_0} = \\ &= du|_{M_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 F|_{t=0} &= F''_{tt}|_{t=0} (dt)^2 = (u'_x x'_t + u'_y y'_t)'_t|_{t=0} (dt)^2 = \\ &= [(u'_x x'_t + u'_y y'_t)'_x x'_t + (u'_x x'_t + u'_y y'_t)'_y y'_t]_{t=0} (dt)^2 = \\ &= [(u''_{xx} x'_t + u''_{yx} y'_t) x'_t + (u''_{xy} x'_t + u''_{yy} y'_t) y'_t]_{t=0} (dt)^2 = \\ &= [u''_{xx} (dx)^2 + 2u''_{xy} dx dy + u''_{yy} (dy)^2]_{M_0} = d^2 u|_{M_0} \dots \end{aligned}$$

$$\Delta u|_{M_0} = \frac{du|_{M_0}}{1!} + \frac{d^2 u|_{M_0}}{2!} + \dots + \frac{d^n u|_{M_0}}{n!} + R_n(\xi; \eta),$$

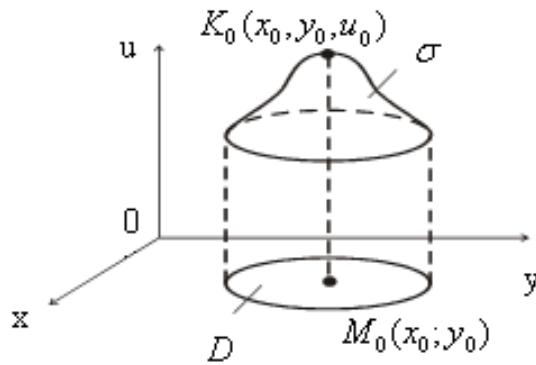
де  $R_n(\xi; \eta) = \frac{d^{n+1} u|_{(\xi, \eta)}}{(n+1)!}$ ,  $\xi$  між  $x_0, x_0 + \Delta x$ ,  $\eta$  між  $y_0, y_0 + \Delta y$ .

### Екстремум ФДЗ. Необхідна ознака існування екстремуму

**Означення.** Якщо для  $\forall$  точка  $M \in \delta(M_0), (M \neq M_0) f(M) < f(M_0)$ , то  $f(M_0) = u_{max}$ . Аналогічно визначається  $u_{min}$ ;  $u_{max}, u_{min}$  називаються екстремальними значеннями функції.

**Означення.** Точка  $M_0$  називається стаціонарною, якщо

$$u'_x|_{M_0} = u'_y|_{M_0} = 0.$$

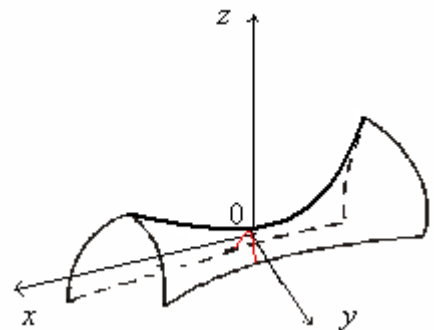
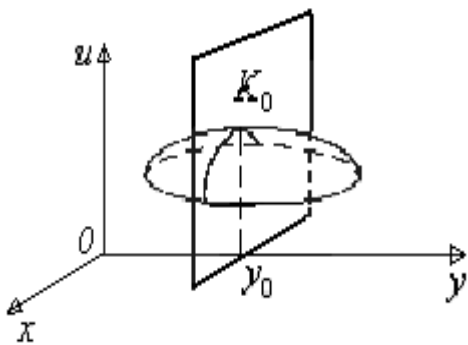


**Теорема (Необхідна ознака існування екстремуму)**

Якщо функція  $u = f(x; y)$  набуває у точці  $M_0$  свого екстремального значення, то  $u'_x, u'_y$  в точці  $M_0$  або дорівнюють нулю, або нескінченності, або не існують.

**Доведення**

II  $f(M_0) = u_{max}$  Крива  $L$  – лінія перетину поверхні  $u = f(x; y)$  й площини  $y = y_0$ , тоді  $L$  задана рівнянням  $u = f(x; y_0) \Rightarrow u'_x|_{M_0} = 0$ . Аналогічно доводиться, що  $u'_y|_{M_0} = 0$  й ін. випадки.



**Приклад**

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz, (p>0)$  – гіперболічний параболоїд.

$$z'_x = \frac{2x}{a^2} \cdot \frac{1}{2p} = \frac{x}{a^2p},$$

$$z'_y = -\frac{2y}{b^2} \cdot \frac{1}{2p} = -\frac{y}{b^2p}.$$

У точці  $O(0; 0)$   $z'_x|_0 = z'_y|_0 = 0$ , однак у точці  $O$  екстремуму немає, тому що в  $\delta(O)$  порушуються визначення максимуму, мінімуму.

**Питання та завдання для самоконтролю до лекції 27**

1. Яка схема обчислення частинних похідних від функцій, заданих неявно?

- Сформулюйте означення частинних похідних та диференціалів вищих порядків.
- Наведіть формулу Тейлора для функції двох змінних.
- Як записується формула Тейлора для функції трьох змінних?
- Якою є необхідна ознака існування екстремуму ФДЗ?

## Лекція 28. Достатня ознака існування екстремуму. Умовний екстремум

**Мета:** визначити достатню умову екстремуму ФДЗ. Ввести поняття умовного екстремуму функції. Надати схему дослідження ФДЗ на безумовний і умовний екстремум і навчити користуватися нею.

### План

- Достатня ознака існування екстремуму
- Умовний екстремум
- Схема дослідження ФДЗ на безумовний і умовний екстремум

### Достатня ознака існування екстремуму

**Теорема.** Нехай у  $\delta(M_0)$  функція  $U = f(x; y)$  має неперервні частинні похідні до 3-го порядку включно і точка  $M_0$  є стаціонарною, тоді:

- при  $\Delta > 0$  є екстремум, якщо  $A > 0$ , то в точці  $M_0$  *min*, якщо  $A < 0$ , то в точці  $M_0$  *max*;
- при  $\Delta < 0$  – екстремуму немає ;
- при  $\Delta = 0$  – потрібні додаткові дослідження.

Тут  $\Delta = AC - B^2$ ,  $A = U''_{xx}|_{M_0}$ ,  $B = U''_{xy}|_{M_0}$ ,  $C = U''_{yy}|_{M_0}$ .

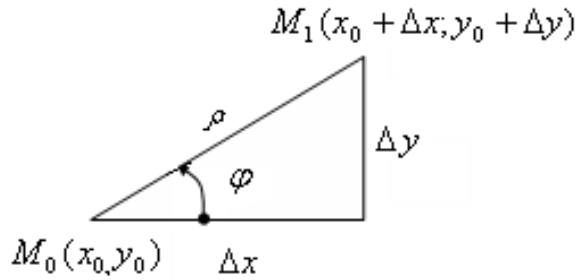
**Доведення.** За формулою Тейлора

$$\Delta U|_{M_0} = \frac{du|_{M_0}}{1!} + \frac{d^2u|_{M_0}}{2!} + R_3(\xi; \eta).$$

Оскільки точка  $M_0$  – стаціонарна, то  $du|_{M_0} = U'_x(M_0)dx + U'_y(M_0)dy = 0$ .

$$\Delta U|_{M_0} = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{d^2U|_{M_0}}{2!} + R_3(\xi; \eta).$$

$$R_3(\xi; \eta) = \frac{d^3U|_{(\xi; \eta)}}{3!} = \frac{1}{3!} (U'''_{xxx}(\xi; \eta)(dx)^3 + 3U'''_{xxy}(\xi; \eta)(dx^2)dy + \\ + 3U'''_{xyy}(\xi; \eta)dx(dy)^2 + U'''_{yyy}(\xi; \eta)(dy)^3).$$



$$dx = \Delta x = \rho \cos \phi,$$

$$dy = \Delta y = \rho \sin \phi.$$

$$\begin{aligned} R_3(\xi; \eta) &= \frac{1}{3!} (U'''_{xxx}(\xi; \eta) \rho^3 \cos^3 \phi + 3U'''_{xxy}(\xi; \eta) \rho^3 \cos^2 \phi \sin \phi + \\ &+ 3U'''_{xyy}(\xi; \eta) \rho^3 \cos \phi \sin^2 \phi + U'''_{yyy}(\xi; \eta) \rho^3 \sin^3 \phi) = \\ &= \frac{\rho^3}{3!} (U'''_{xxx} \cos^3 \phi + 3U'''_{xxy} \cos^2 \phi \sin \phi + \\ &+ 3U'''_{xyy} \cos \phi \sin^2 \phi + U'''_{yyy} \sin^3 \phi) |(\xi; \eta), \end{aligned}$$

оскільки похідні неперервні, то вони обмежені;  $\cos \phi$ ,  $\sin \phi$  – обмежені, то  $R_3(\xi; \eta) = O(\rho^2)$ .

Таким чином  $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{d^2 U|_{M_0}}{2!} + O(\rho^2)$ , отже:

- 1) якщо  $d^2 U|_{M_0} > 0$ , то  $f(M) > f(M_0)$  і в точці  $M_0$  *min*;
- 2) якщо  $d^2 U|_{M_0} < 0$ , то  $f(M) < f(M_0)$  і в точці  $M_0$  *max*;
- 3) якщо  $d^2 U|_{M_0} \leq 0$  ( $d^2 U|_{M_0} \geq 0$ ), то необхідні додаткові дослідження;
- 4) якщо  $d^2 U|_{M_0}$  змінює знак, то екстремуму немає, тому що порушується визначення максимуму, мінімуму.

Використовуючи означення других похідних, обчислених в точці  $M_0$ , одержимо:

$$\begin{aligned} d^2 U|_{M_0} &= \\ &= u''_{xx_0} + 2u''_{xy_0} + u''_{yy_0} = A\rho^2 \cos^2 \phi + 2B\rho^2 \cos \phi \sin \phi + C\rho^2 \sin^2 \phi = \\ &= A\rho^2 \left( \cos^2 \phi + \frac{2B}{A} \cos \phi \sin \phi + \frac{C}{A} \sin^2 \phi + \left(\frac{B}{A}\right)^2 \sin^2 \phi - \right. \\ &\left. - \left(\frac{B}{A}\right)^2 \sin^2 \phi \right) = A\rho^2 \left( \left( \cos \phi + \frac{B}{A} \sin \phi \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2} \sin^2 \phi \right) = \\ &= A\rho^2 \left( \left( \cos \phi + \frac{B}{A} \sin \phi \right)^2 + \frac{\Delta}{A^2} \sin^2 \phi \right), \quad \text{если } A \neq 0 \end{aligned}$$

- 1) якщо  $A > 0, \Delta > 0$ , то  $d^2 U|_{M_0} > 0 \Rightarrow$  точка  $M_0$  *min*;

якщо  $A < 0, \Delta > 0$ , то  $d^2U|_{M_0} < 0 \Rightarrow$  точка  $M_0$  *max*;

2) якщо  $\Delta < 0$ , то

при  $\varphi = 0$   $d^2u|_{M_0} = \rho^2 A \Rightarrow \operatorname{sgn} d^2u|_{M_0} = \operatorname{sgn} A$ ,

при  $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{B}{A}\right)$ , що є розв'язком рівняння

$$\cos \varphi + \frac{B}{A} \sin \varphi = 0 \quad (\varphi \neq 0), \quad d^2u|_{M_0} = \rho^2 \frac{\Delta}{A} \sin^2 \varphi,$$

$\operatorname{sgn} d^2u|_{M_0} = \operatorname{sgn} \frac{\Delta}{A} = -\operatorname{sgn} A$ . Таким чином,  $d^2u|_{M_0}$  змінює знак, отже, при  $\Delta < 0$  екстремуму немає;

3) якщо  $\Delta = 0$  – потрібні додаткові дослідження.

$d^2U|_{M_0} = A\rho^2(\cos \varphi + \frac{B}{A} \sin \varphi)^2$  і  $d^2U|_{M_0} \geq 0$  ( $d^2U|_{M_0} \leq 0$ ) залежно від знака  $A$  і значення кута  $\varphi$ .

### Приклад.

$$z = x^2 + 2xy + y^2, \quad \text{або} \quad z = (x + y)^2;$$

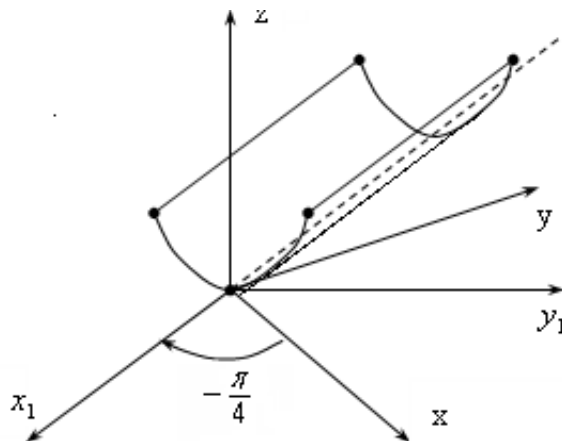
$$\left. \begin{aligned} z'_x &= 2x + 2y = 0 \\ z'_y &= 2x + 2y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = -x, \text{ всі точки прямої } y = -x \text{ підозрілі на}$$

екстремум.

$$z''_{xx} = z''_{yy} = z''_{xy} = 2$$

$$d^2z = 2(dx)^2 + 2 \cdot 2dx dy + 2(dy)^2 = 2(dx + dy)^2 =$$

$$= 2\rho^2(\cos \varphi + \sin \varphi)^2 \geq 0 \quad (\text{при } \varphi = -\frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{3\pi}{4}, d^2z = 0).$$



У цьому випадку екстремум будемо називати нестрогим, тобто в точках, що лежать на прямій  $y = -x$ , нестрогий мінімум.

**Зауваження.** Якщо осі  $x$ ,  $y$  розгорнути на кут  $\phi = -\frac{\pi}{4}$ , то, використовуючи формули переходу  $\begin{cases} x = x_1 \cos \phi - y_1 \sin \phi \\ y = x_1 \sin \phi + y_1 \cos \phi \end{cases}$  отримаємо

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} y_1 \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} y_1 \end{cases}. \text{ Тут } x_1, y_1 \text{ - нові координати.}$$

Рівняння  $z = (x + y)^2$  в новій системі координат:  $z = 2y_1^2$ , таким чином, ми розглядаємо параболічний циліндр.

### Умовний екстремум

Визначити екстремум функції  $U = f(x, y)$ , якщо змінні  $x$  і  $y$  зв'язані умовою  $\phi(x, y) = 0$ .

Тут функція  $U$  двічі диференційована по  $x$ ,  $y$  і  $\phi'_y \neq 0$ .

Оскільки з умови  $\phi(x, y) = 0 \Rightarrow y = y(x)$ , то  $U = f(x, y(x))$  – функція однієї змінної, з огляду на це визначимо точки, підозрілі на екстремум:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dx} = U'_x \frac{dx}{dx} + U'_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ \phi'_x \frac{dx}{dx} + \phi'_y \frac{dy}{dx} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'_x + U'_y y'_x = 0 \\ \phi'_x + \phi'_y y'_x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

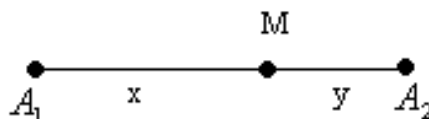
$$\Rightarrow U'_x + U'_y \left(-\frac{\phi'_x}{\phi'_y}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} U'_x \phi'_y - U'_y \phi'_x = 0 \\ \phi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) дозволяє визначити точки, підозрілі на екстремум, тому що використовували тільки необхідну умову існування екстремуму. Для достатньої умови існування екстремуму у точці  $M_0$  визначимо

$$\left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{M_0} = (U''_{xx} + 2U''_{xy} y' + U''_{yy} y'^2 + u'_y y'') \Big|_{M_0}.$$

і за знаком  $d^2 U|_{M_0}$  (див. вище) установлюємо наявність екстремуму і його вигляд.

**Приклад.** У точках  $A_1$  і  $A_2$  перебувають джерела світла інтенсивності  $E_1, E_2$  відповідно. Визначити точку, у якій висвітлення буде мінімальним. Нехай  $A_1 A_2 = l$ .



$$U = \frac{E_1}{x^2} + \frac{E_2}{y^2}, \quad \phi(x, y) = x + y - l = 0$$

$$(1) \begin{cases} -\frac{2E_1}{x^3} \cdot 1 + \frac{2E_2}{y^3} \cdot 1 = 0 \\ x + y - l = 0 \end{cases} \Rightarrow E_2 x^3 = E_1 (l - x)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{E_2} x = \sqrt[3]{E_1} (l - x),$$

$$x_0 = \frac{l \sqrt[3]{E_1}}{\sqrt[3]{E_1} + \sqrt[3]{E_2}}, \quad y_0 = \frac{l \sqrt[3]{E_2}}{\sqrt[3]{E_1} + \sqrt[3]{E_2}}.$$

Точка  $M_0(x_0, y_0)$  – підозріла на екстремум.

$$\left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{M_0} = \left( \frac{6E_1}{x^4} - 2 \cdot 0 + \frac{6E_2}{y^4} \right) \Big|_{M_0} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U \left( \frac{E_1}{l^2 \sqrt[3]{E_1^2}} + \frac{E_2}{l^2 \sqrt[3]{E_2^2}} \right) (\sqrt[3]{E_1} + \sqrt[3]{E_2})^2$$

*min*

$$= \frac{(\sqrt[3]{E_1} + \sqrt[3]{E_2})^3}{l^2}.$$

Відтак,

$$U_{min} = \frac{(\sqrt[3]{E_1} + \sqrt[3]{E_2})^3}{l^2}.$$

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 28

1. У чому полягає достатня ознака існування екстремуму?
2. Що таке умовний екстремум функції декількох змінних?
3. Наведіть схему дослідження ФДЗ на безумовний і умовний екстремум.
4. Наведіть схему дослідження ФДЗ на умовний екстремум.
5. Якими є необхідні умови умовного екстремуму функції декількох змінних?
6. Як використовується матриця других частинних похідних функції декількох змінних для визначення її екстремуму?

## Лекція 29. Найбільше й найменше значення функції в замкненій області. Задача про об'єм криволінійного циліндра

**Мета:** ознайомити зі схемою пошуку найбільшого й найменшого значення функції в замкненій області. Надати геометричну інтерпретацію подвійного інтегралу

### План

1. Найбільше й найменше значення функції в замкненій області
2. Задача про об'єм криволінійного циліндра

### Найбільше й найменше значення функції в замкненій області

**Схема визначення**  $u_{\text{найб.}}$ ,  $u_{\text{найм.}}$  в  $\bar{D}$

1. Для функції  $u = f(x; y)$  визначаємо точки, підозрілі на екстремум із системи

$$\begin{cases} u'_x = 0 \\ u'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1, M_2, \dots, M_n.$$

Визначаємо значення функції  $u$  в тих точках  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , які належать області  $\bar{D}$ .

2. Оскільки функція  $u = f(x; y)$  на границі  $\phi(x; y) = 0 \Rightarrow y = y(x)$  є функцією однієї змінної:  $u = f(x; y(x))$ ,  $x \in [a; b]$ , то найбільше й найменше значення цієї функції знаходяться на кінцях відрізка  $[a; b]$  або у внутрішніх точках, підозрілих на екстремум. Визначаємо значення функції в цих точках і на кінцях відрізка (для дослідження на границі можна використовувати пошук умовного екстремуму).

3. Із всіх отриманих значень функції  $u = f(x; y)$  вибираємо найбільше й найменше.

### Приклад

Знайди найбільше та найменше значення функції  $u$  в заданій області  $D$ :

$$u = x^2 - xy + y^2 - 4x.$$

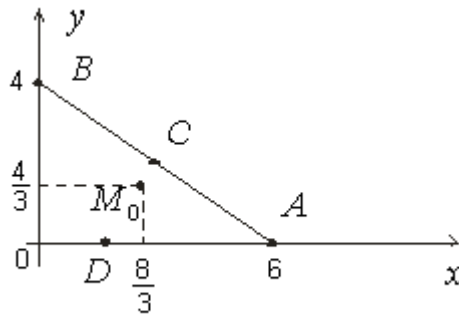
Область  $D$  обмежена лініями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $2x + 3y - 12 = 0$ .

1. Необхідні умови екстремуму

$$\begin{cases} u'_x = 2x - y - 4 = 0 \\ u'_y = -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{8}{3}, \quad y = \frac{4}{3}.$$

Точка  $M_0 \left( \frac{8}{3}; \frac{4}{3} \right)$  є підозрілою на екстремум і  $\in \bar{D}$ .

$$u(M_0) = u\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right) = -\frac{49}{9} \approx -5,3.$$



1) Границя області  $D$  розпадається на три частини.

$$AB \sim 2x + 3y - 12 = 0, \quad x \in [0; 6].$$

$$u = x^2 - x \frac{12-2x}{3} + \left(\frac{12-2x}{3}\right)^2 - 4x = \frac{1}{9}(19x^2 - 120x + 144),$$

$$u(A) = u(6) = 12, \quad u(B) = u(0) = \frac{144}{9} = 16,$$

$$u' = \frac{1}{9}(38x - 120) = 0, \quad x = \frac{60}{19} \approx 3,2 \in [0; 6].$$

Точка  $C\left(\frac{60}{19}\right)$ , що лежить на границі  $AB$ , підозріла на екстремум.

$$u(C) = u\left(\frac{60}{19}\right) = -\frac{96}{19} \approx -5,1,$$

$$OA \sim y = 0, \quad x \in [0; 6],$$

$$u = x^2 - 4x, \quad u'_x = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \in [0; 6].$$

Точка  $D(2)$ , що лежить на границі  $OA$ , підозріла на екстремум.

$$u(D) = u(2) = 4 - 8 = -4,$$

$$u(0) = 0, \quad u(A) = u(6) = 12,$$

$$OB \sim x = 0, \quad y \in [0; 4],$$

$$u = y^2 \quad u' = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \in [0; 4].$$

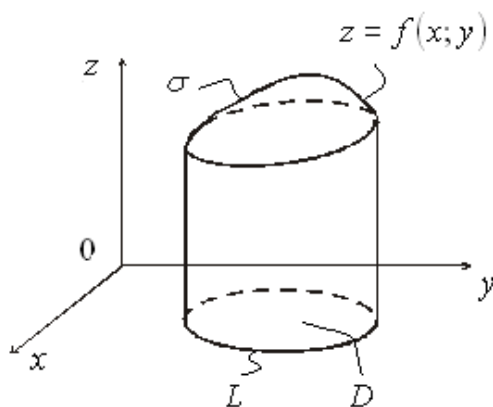
Цю точку ми вже досліджували, вивчаючи границю  $OA$ .

2) Вибираємо найменше й найбільше значення:

$$u_{\text{найб.}} = u(B) = 16; \quad u_{\text{найм.}} = u(M_0) \approx -5,3.$$

### Задача про об'єм криволінійного циліндра

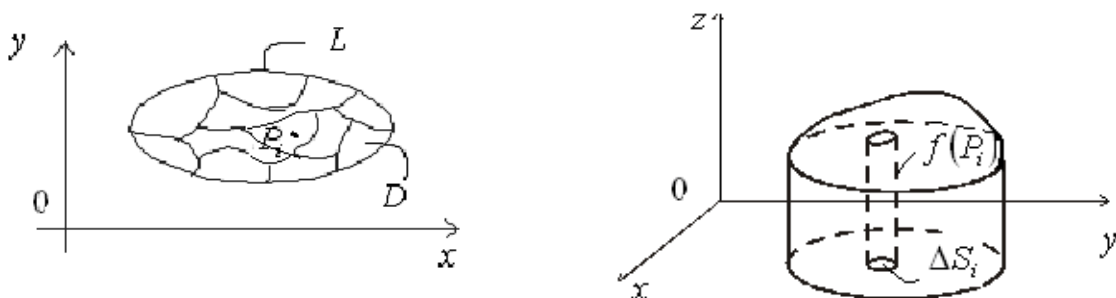
$$\square z = f(x; y) \geq 0.$$



**Криволінійний циліндр** – це тіло, що обмежене циліндричною поверхнею (напрямна – крива  $L$ , твірні паралельні осі  $OZ$ ), площиною  $xoy$  ( $z = 0$ ) й поверхнею  $\sigma(z = f(x; y))$ .

$$\text{II } z = f(x; y) \in C(D).$$

Для визначення об'єму криволінійного циліндра розіб'ємо область  $D$  довільним чином на  $n$  частин.



На кожній ділянці довільним чином вибираємо точки  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) й обчислюємо  $z_i = f(P_i)$ .

Позначимо площу кожної ділянки через  $\Delta S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Побудуємо прямі циліндри з нижньою основою  $\Delta S_i$  й висотою  $z_i = f(P_i) = \text{const}$ . Ясно, що об'єм криволінійного циліндра наближено дорівнює сумі об'ємів таких “волокон” – прямих циліндрів:  $V \approx \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i$  (\*).

Суму (\*) називають  $n$ -ю інтегральною й вона залежить від способу розбиття області  $D$  й вибору точок  $P_i$ , і чим дрібніше розбиття, тим точніша рівність (\*). Навколо кожного  $\Delta S_i$  опишемо коло з діаметром  $d_i$   $\lambda = \text{найб}\{d_i\}$  називається рангом розбиття. Якщо  $\lambda \rightarrow 0$ , то  $n \rightarrow \infty$  й усі  $\Delta S_i$  стягуються в точки.

$$V_{\text{кр.циліндра}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i.$$

**Означення.** Якщо границя послідовності  $n$ -х інтегральних сум (\*) при  $\lambda \rightarrow 0$  існує, то вона називається подвійним інтегралом від функції  $z = f(x; y)$  по області  $D$  й позначається  $\iint_D f(x; y) dS$ .

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 29

1. Якою є схема пошуку найбільшого й найменшого значення функції в замкненій області?
2. У чому полягає задача про об'єм криволінійного циліндра?
3. Які геометричні застосування подвійного інтегралу?
4. Наведіть приклад застосування кратних інтегралів для обчислення площ фігур, об'ємів тіл.

### Лекція 30. Задача про визначення маси неоднорідного тіла. Теорема про існування кратного інтеграла. Властивості кратних інтегралів. Приклади обчислення кратних інтегралів

**Мета:** Ознайомити з задачею про визначення маси неоднорідного тіла і існування кратного інтеграла. Навести приклади обчислення кратних інтегралів

#### План

1. Задача про визначення маси неоднорідного тіла
2. Формулювання теореми про існування кратного інтеграла
3. Властивості кратних інтегралів
4. Обчислення кратних інтегралів

#### Задача про визначення маси неоднорідного тіла

Нехай густина у кожній точці обмеженої області  $V$  описується неперервною й додатно визначеною функцією  $\rho = \rho(x; y; z)$ .

Розіб'ємо область  $V$  довільним чином на  $n$  частин і в кожній частині довільно виберемо точки  $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$ . Позначимо об'єм кожної частини через  $\Delta V_i (i = 1, 2, \dots, n)$ . Обчислимо густину  $\rho_i = \rho(P_i)$ . Оскільки  $\rho = \rho(M) \in C(V)$ , а об'єм  $\Delta V_i$  дуже малий, то можна вважати, що густина для цієї частини й дорівнює  $\rho_i = \rho(P_i)$ , тоді маса цього нескінченно малого елемента  $\Delta m_i \approx \rho(P_i)\Delta V_i$ , а маса всієї області

$$m_V \approx \sum_{i=1}^n \rho(P_i) \Delta V_i. \quad (**)$$

$n$ -а інтегральна сума (\*\*) залежить від способу розбиття області  $V$  і вибору точок  $P_i$ , чим дрібніше розбиття, тим точніша рівність (\*\*). Навколо кожної частини  $\Delta V_i$  опишемо сферу з діаметром  $d_i$ . Ранг розбиття  $\lambda = \max_V \{d_i\}$ , й чим дрібніше розбиття, тим ближче  $\lambda$  до нуля.

$$m_V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(P_i) \Delta V_i.$$

**Означення.** Якщо границя послідовності  $n$ -х інтегральних сум (\*\*) при  $\lambda \rightarrow 0$  існує, то він називається **потрійним інтегралом** від функції  $\rho = \rho(x; y; z)$  по області  $V$  і позначається  $\iiint_V \rho(x; y; z) dV$ .

**Зауваження.** Аналогічно можна визначити кратний інтеграл в  $n$ -мірному просторі, де точки  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  має  $n$  координат,  $\Omega$  - обмежена область  $n$ -вимірного простору, функція  $U = f(\rho) \in C(\Omega)$ :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(P_i) \Delta \Omega_i = \overbrace{\int \dots \int}_{\Omega}^n f(x_1, x_2, \dots, x_n) d\Omega,$$

тут  $\Delta \Omega_i$  – міра нескінченно малого елемента (н.м. елемента) довільного розбиття області  $\Omega$ ,  $P_i$  – довільна точка цього н.м. елемента,  $\lambda$  – ранг розбиття.

### Формулювання теореми про існування кратного інтеграла

Якщо  $U = f(M) \in C(\Omega)$ ,  $\Omega$  – зв'язана, обмежена й замкнена область, то  $f(M)$  інтегрована в області  $\Omega$ , тобто границя  $n$ -ї інтегральної суми існує, не залежить від способу розбиття області  $\Omega$  й вибору точок  $P_i$ .

**Зауваження.** В лекції 18 наведено доведення інтегрованості функції однієї змінної, яка є частковим випадком ФДЗ. Аналогічно доводиться й дана теорема, тобто шляхом визначення границь верхньої й нижньої сум Дарбу.

### Властивості кратних інтегралів

Виходячи із властивостей границь і кінцевих сум, можна записати такі властивості кратних інтегралів:

- 1)  $\int_{\Omega} C f(M) d\Omega = C \int_{\Omega} f(M) d\Omega$ , де  $C = \text{const}$ ;
- 2)  $\int_{\Omega} (f(M) + \phi(M)) d\Omega = \int_{\Omega} f(M) d\Omega + \int_{\Omega} \phi(M) d\Omega$ ;

3) якщо область  $\Omega$  розбивається на дві області  $\Omega_1$  й  $\Omega_2$  без спільних внутрішніх точок, то

$$\int_{\Omega} \dots \int f(M) d\Omega = \int_{\Omega_1} \dots \int f(M) d\Omega + \int_{\Omega_2} \dots \int f(M) d\Omega$$

(у доведенні останньої властивості беремо загальну границю областей  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  однієї з поверхонь розбиття);

4) якщо  $f(M) \equiv 1$ , то  $\int_{\Omega} \dots \int 1 \cdot d\Omega = \Omega$  – міра області інтегрування;

5) якщо  $m, M$  – найменше й найбільше значення підінтегральної функції  $f(M)$  в області інтегрування з мірою  $\Omega$ , то

$$m\Omega \leq \int_{\Omega} \dots \int f(M) d\Omega \leq M\Omega.$$

Доведення випливає зі справедливості нерівності:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k m \Delta\Omega_i \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(P_i) \Delta\Omega_i \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k M \Delta\Omega_i.$$

### Теорема про середнє

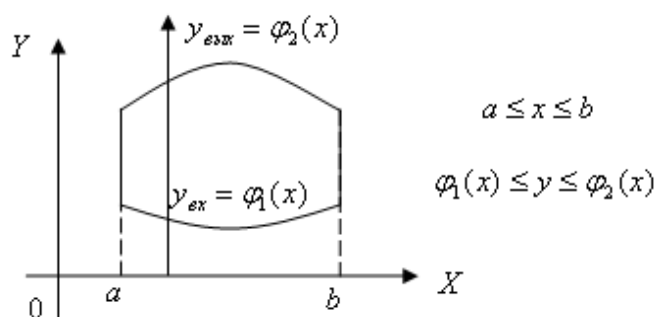
Якщо  $U = f(M) \in C(\Omega)$ ,  $\Omega$  – зв'язана, обмежена й замкнена область, то в  $\Omega$  знайдеться принаймні одна така точка  $\xi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , що

$$\int_{\Omega} \dots \int f(M) d\Omega = f(\xi)\Omega.$$

(доведення випливає із властивості 5 і неперервності функції  $U = f(M)$ , див. лекцію про визначений інтеграл).

### Обчислення кратних інтегралів

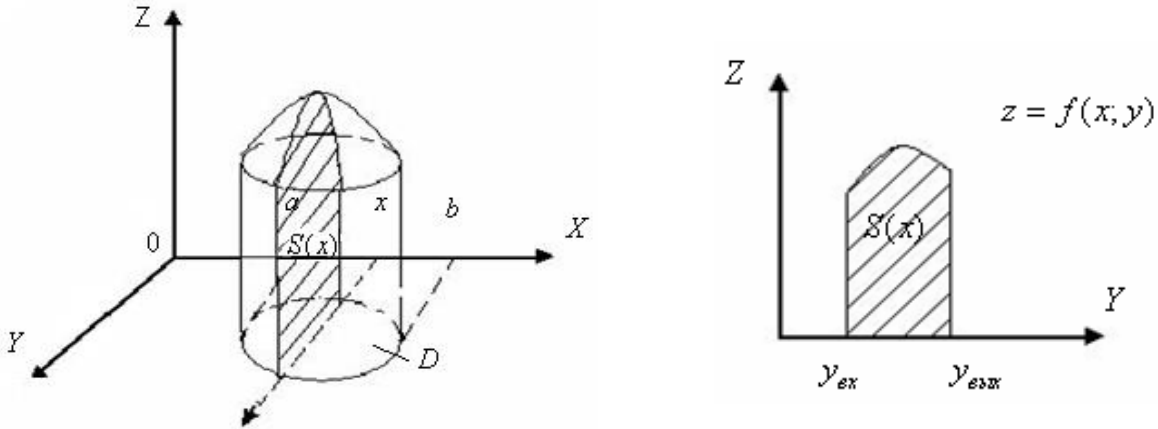
**Означення.** Плоска область  $D$  називається **правильною** в напрямку осі  $OY$ , якщо будь-яка пряма, паралельна осі  $OY$ , перетинає її границю не більш ніж у двох точках.



**Теорема.** Подвійний інтеграл від неперервної функції по правильній області  $D$  дорівнює повторному інтегралу від цієї функції по області  $D$ , тобто

$$\iint_D f(x; y) dS = \int_a^b \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x; y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x; y) dy.$$

**Доведення**



З одного боку,

$$V_{\text{кр.цил}} = \iint_D f(x; y) dS,$$

з іншого

$$V_{\text{кр.цил}} = \int_a^b S(x) dx,$$

$S(x) = \int_{y_{\text{вх}}}^{y_{\text{вых}}} f(x; y) dy$  – площа криволінійної трапеції.

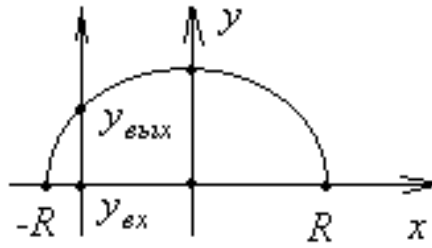
Остаточно:

$$\iint_D f(x; y) dS = \int_a^b \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x; y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x; y) dy.$$

**Приклад.** Обчислити

$$\iint_D (x + 1) y dS,$$

якщо  $D: x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0$ .



$$\begin{aligned}
 \iint_D (x+1)y dS &= \iint_D (x+1)y dx dy = \int_{-R}^R (x+1) dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy = \\
 &= \int_{-R}^R (x+1) \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} = \\
 &= \int_{-R}^R \left( \frac{x+1}{2} \right) (R^2 - x^2 - 0) dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R (R^2 x - x^3 + R^2 - x^2) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{R^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} + R^3 - \frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{2} + \frac{R^4}{4} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2}{3} R^3.
 \end{aligned}$$

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 30

1. Сформулюйте задачу про визначення маси неоднорідного тіла.
2. За яких умов існує кратний інтеграл?
3. Які властивості кратних інтегралів?
4. Як формулюється для кратних інтегралів теорема про середнє?
5. Наведіть приклад обчислення подвійного інтегралу.
6. Наведіть приклад обчислення потрійного інтегралу.

### Лекція 31. Заміна змінних у кратних інтегралах

**Мета:** навчити обчислювати кратні інтеграли за допомогою заміни змінних під знаком кратного інтегралу.

#### План

1. Заміна змінних у кратних інтегралах: декартова система координат
2. Заміна змінних у кратних інтегралах: полярна система координат
3. Заміна змінних у кратних інтегралах: сферична система координат
4. Заміна змінних у кратних інтегралах: циліндрична система координат

## Заміна змінних у кратних інтегралах

З теореми про існування кратних інтегралів випливає, що інтеграл не залежить від способу розбиття області  $D$ .

Розглянемо метод заміни змінних у кратних інтегралах в різних системах координат.

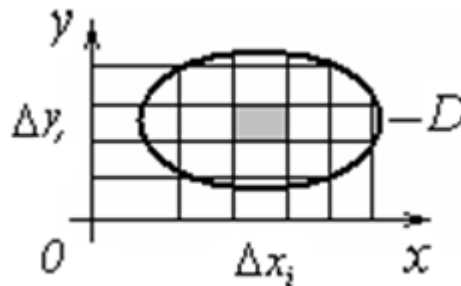
### Декартова система координат

Розбиваємо область  $D$  лініями  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ .

$$\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$$

$$\iint_D f(x; y) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta x_i \Delta y_i = \iint_D f(x; y) dx dy.$$

Таким чином, у декартовій системі координат  $dS = dx dy$ .

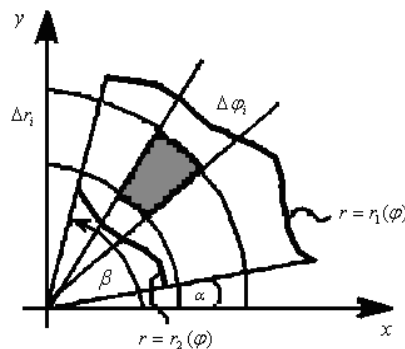


Для потрійного інтеграла  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$  – площини, які розбивають область  $V$  на нескінченно малі прямокутні паралелепіпеди й  $\Delta V_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i \Rightarrow dV = dx dy dz$ .

### Полярна система координат

У цій системі координат точка  $M(r; \phi)$ :  $x = r \cos \phi$ ;  $y = r \sin \phi$  формули переходу. У цьому випадку розбиваємо область  $D$  лініями  $r = \text{const}$ ,  $\phi = \text{const}$ , тобто концентричними колами й променями.

$$\begin{aligned} \Delta S_i &= \frac{(r_i + \Delta r_i)^2}{2} \Delta \phi_i - \frac{r_i^2}{2} \Delta \phi_i = r_i \Delta r_i \Delta \phi_i + \frac{1}{2} (\Delta r_i)^2 \Delta \phi_i \approx \\ &\approx r_i \Delta r_i \Delta \phi_i. \end{aligned}$$



Таким чином, з точністю до нескінченно малих другого порядку малості  $\Delta S_i \approx r_i \Delta r_i \Delta \phi_i$ .

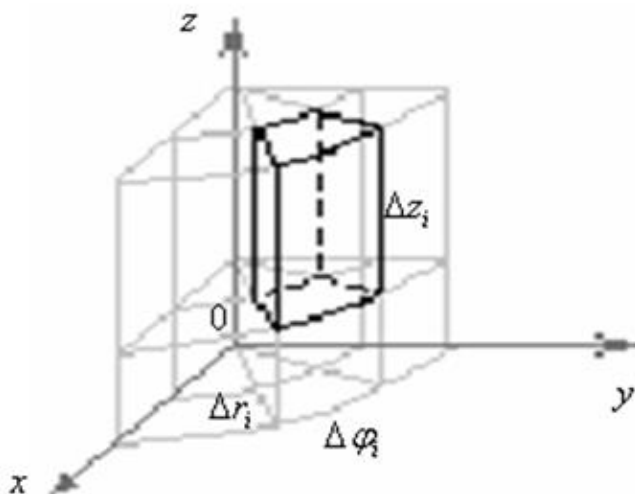
$$\begin{aligned} \iint_D f(x; y) dS &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(r_i \cos \phi_i; r_i \sin \phi_i) r_i \Delta r_i \Delta \phi_i = \iint_D f(r \cos \phi; r \sin \phi) r dr d\phi. \end{aligned}$$

Тобто  $dS = r dr d\phi$ .

**Зауваження.** Загальний випадок зміни змінної в подвійному інтегралі дивись далі.

### Циліндрична система координат

$M(r, \phi, z)$ , де  $x = r \cos \phi$ ;  $y = r \sin \phi$ ,  $z = z$  – формули переходу.



Розбиваємо область  $V$  поверхнями  $r = const$ ,  $\phi = const$ ,  $z = const$  концентричні циліндричні поверхні, напівплощини, що виходять із осі  $OZ$ , і площини, перпендикулярні до осі  $OZ$ .

$$\Delta V_i = \Delta S_i \cdot \Delta z_i \approx r_i \Delta r_i \Delta \phi_i \Delta z_i.$$

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x; y; z) dV &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta V_i = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(r_i \cos \phi_i; r_i \sin \phi_i; z_i) r_i \Delta r_i \Delta \phi_i \Delta z_i = \\ &= \iiint_V f(r \cos \phi; r \sin \phi; z) r dr d\phi dz, \end{aligned}$$

тобто в циліндричній системі координат  $dV = r dr d\phi dz$ .

**Зауваження.** Можна припустити, що при записуванні кратного інтеграла  $\int_{\Omega} \dots \int f(x_1, \dots, x_n) d\Omega$  в новій системі координат, де

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \\ x_2 &= x_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= x_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \end{aligned}$$

диференціал міри  $d\Omega = \mathfrak{J} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n$ , тут множник  $\mathfrak{J}$  називають **якобіаном**.

Доведено, що якобіан дорівнює:

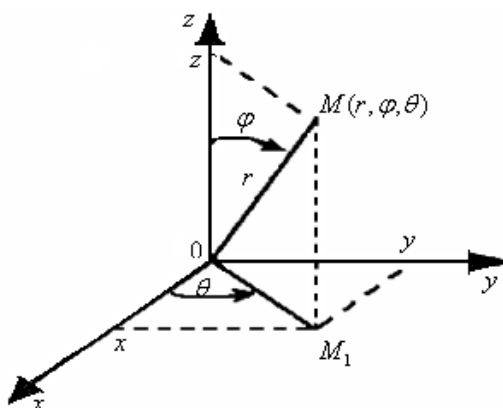
$$\mathfrak{J} = \text{mod} \begin{vmatrix} x'_{1\xi_1} & x'_{1\xi_2} & \dots & x'_{1\xi_n} \\ x'_{2\xi_1} & x'_{2\xi_2} & \dots & x'_{2\xi_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x'_{n\xi_1} & x'_{n\xi_2} & \dots & x'_{n\xi_n} \end{vmatrix}.$$

Наприклад, у циліндричній системі координат

$$\begin{aligned} dV &= \mathfrak{J} dr d\varphi dz = \text{mod} \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_z \\ y'_r & y'_\varphi & y'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} dr d\varphi dz = \\ &= \text{mod} \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dr d\varphi dz = \\ &= |r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi| dr d\varphi dz = r dr d\varphi dz. \end{aligned}$$

### Сферична система координат

Оскільки  $OM_1 = r \sin \phi$ , то формули переходу мають вигляд:  $x = r \sin \phi \cos \theta$ ,  $y = r \sin \phi \sin \theta$ ,  $z = r \cos \phi$ , при цьому  $0 \leq r < +\infty$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ .



Поверхні розбиття тіла  $V$  на нескінченно малі елементи:  $r = const$  – концентричні сфери,  $\phi = const$  – конічні поверхні з вершинами в точці  $O$ ,  $\theta = const$  – напівплощини, що виходять із осі  $OZ$ .

$$dV = \text{mod} \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{vmatrix} dr d\phi d\theta = \\ = r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta,$$

і тоді

$$\iiint_V f(x; y; z) dV = \iiint_V f(r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta.$$

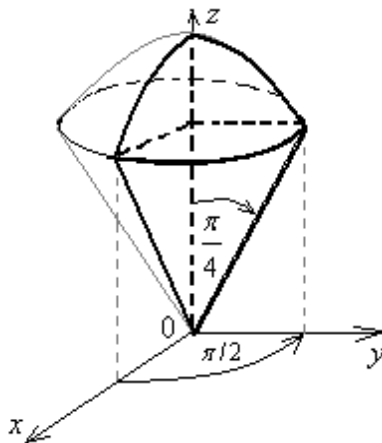
### Приклад

Обчислити інтеграл  $\iiint_V x dx$ , якщо

$$V \sim x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 = z^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

Обчислювати цей інтеграл зручніше у сферичній системі координат

$$\begin{aligned} \iiint_V x dx &= \iiint_V r \sin \phi \cos \theta \cdot r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \phi d\phi \int_0^R r^3 dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \phi d\phi \frac{R^4}{4} = \\ &= \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} d\phi = \frac{R^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \left[ \phi - \frac{\sin 2\phi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{R^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right] = \frac{R^4}{8} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^4(\pi - 2)}{32}. \end{aligned}$$



## Питання та завдання для самоконтролю до лекції 31

1. Що таке якобіан?
2. Які формули пов'язують декартову і полярну системи координат?
3. Які формули пов'язують декартову і циліндричну системи координат?
4. Які формули пов'язують декартову і сферичну системи координат?
5. Наведіть формулу заміни змінних під знаком подвійного інтегралу.
6. Наведіть формулу заміни змінних під знаком потрійного інтегралу.

## Лекція 32. Застосування кратних інтегралів до задач фізики

**Мета:** Навчити застосовувати кратні інтеграли до задач фізики.

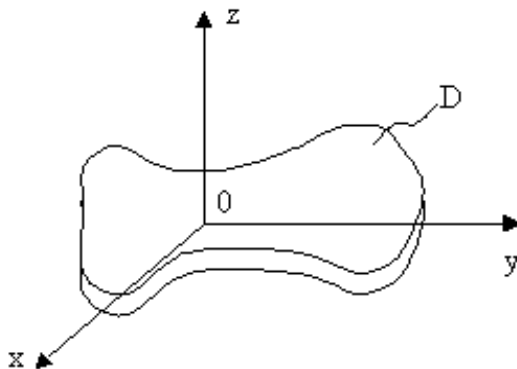
### План

1. Маса неоднорідної пластини
2. Момент інерції
3. Центр мас
4. Вектор-функція скалярного аргументу і її границя
5. Похідна від вектор-функції

### Застосування кратних інтегралів до задач фізики

#### 1. Маса неоднорідної пластини

Надалі під пластиною будемо мати на увазі тіло, що має форму прямого циліндра, для якого  $h \ll S$ , де  $h$  – висота циліндра,  $S$  – площа поперечного перерізу,  $h = \text{const}$ .



Оскільки  $h$  мале, то густина не залежить від змінної  $z$ , тобто вона не змінюється уздовж будь-якого перпендикуляра до площини  $x$ . Розмірність густини  $[\rho] = \frac{[m]}{[S]}$ .

Густина  $\rho = \rho(x; y) \in C(D)$ , а  $D$  – зв'язана, обмежена, замкнена область. Виділяємо елементарну частину області  $D$  з площиною  $dS$ , яка настільки мала, що можна вважати густину на цій ділянці сталою. Тоді маса елементарної частини  $dm = \rho(x; y)dS$ , а маса всієї пластини:

$$m_D = \iint_D \rho(x; y)dS.$$

Подібні міркування дозволяють уникнути побудови  $n$ -ї інтегральної суми й граничного переходу в кожній конкретній задачі.

**Зауваження.** До таких самих результатів можна прийти, якщо використовувати матеріалом попередніх лекцій:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_V \rho(x; y)dV = \iint_D \rho(x; y)dxdy \int_0^h dz = \iint_D \rho(x; y)dS z \Big|_0^h = \\ &= h \iint_D \rho(x; y) dS, \end{aligned}$$

тут розмірність густини  $[\rho] = \frac{[m]}{[V]}$ .

## 2. Момент інерції

З фізики відомо, що момент інерції матеріальної точки  $M(x; y)$  щодо осі  $Ox$ :  $I_x = md^2$ , де  $m$  – маса,  $d$  – відстань від точки до осі. Тоді момент інерції нескінченно малого елемента пластини  $D$  визначається за формулою

$$\begin{aligned} dI_x &= y^2 dm = y^2 \rho(x; y)dS \Rightarrow \\ I_x &= \iint_D y^2 \rho(x; y)dS. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x; y)dS.$$

**Зауваження.** Якщо розглядати неоднорідне тіло, то

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint_V z^2 \rho(x; y; z)dV, \\ I_{xz} &= \iiint_V y^2 \rho(x; y; z)dV, \end{aligned}$$

$$I_{yz} = \iiint_V x^2 \rho(x; y; z) dV$$

– моменти інерції щодо відповідних площин, а

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x; y; z) dV$$

– момент інерції щодо полюса O.

### 3. Центр мас

Позначимо центр мас неоднорідної пластини буквою C, тоді  $x_c = \frac{M_y}{m}$ ,  $y_c = \frac{M_x}{m}$ , де  $M_x$ ,  $M_y$  – статичні моменти пластини щодо відповідних осей,  $m$  – маса пластини.

Статичний момент нескінченно малого елемента пластини:

$$dM_x = y dm = y \rho(x; y) dS,$$

$$dM_y = x \rho(x; y) dS \Rightarrow$$

$$M_x = \iint_D y \rho(x; y) dS, \quad M_y = \iint_D x \rho(x; y) dS.$$

Отже,

$$x_c = \frac{\iint_D x \rho(x; y) dS}{\iint_D \rho(x; y) dS}, \quad y_c = \frac{\iint_D y \rho(x; y) dS}{\iint_D \rho(x; y) dS}.$$

**Зауваження.** Аналогічно визначаються координати центра мас неоднорідного тіла:

$$x_c = \frac{\iiint_V x \rho(x; y; z) dV}{\iiint_V \rho(x; y; z) dV},$$

$$y_c = \frac{\iiint_V y \rho(x; y; z) dV}{\iiint_V \rho(x; y; z) dV},$$

$$z_c = \frac{\iiint_V z \rho(x; y; z) dV}{\iiint_V \rho(x; y; z) dV}.$$

### Вектор-функція скалярного аргументу і її границя

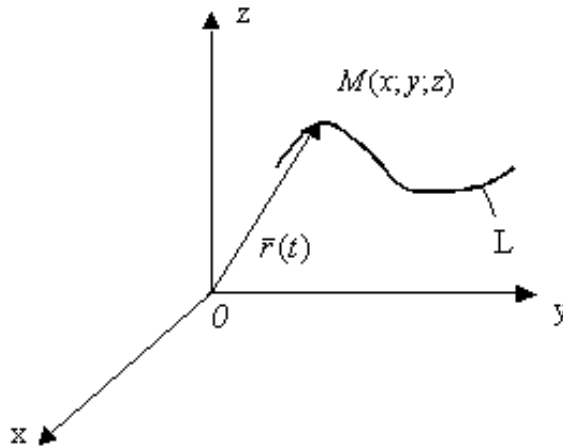
**Означення.** Якщо  $\forall t \in T$  відповідає певний вектор  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , то кажуть, що на множині  $T$  визначений вектор-функція скалярного аргументу

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

**Означення.** Лінія  $L$ , описувана кінцем радіуса-вектора  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , називається годографом вектор-функції.

**Зауваження.** Якщо  $t$  – час, то годограф – це траєкторія руху точки  $M(x; y; z)$ .

**Означення.** Якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  таке, що при  $\forall t \in \delta(t_0)$  й  $t \neq t_0$   $|\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$ , то  $\vec{a}$  називається границею вектор-функції  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  при  $t \rightarrow t_0$ , тобто  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$ .



**Наслідок.**  $\square \vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ , тоді

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| = \sqrt{(x(t) - a_x)^2 + (y(t) - a_y)^2 + (z(t) - a_z)^2}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} |x(t) - a_x| &< \sqrt{(x(t) - a_x)^2 + (y(t) - a_y)^2 + (z(t) - a_z)^2} = \\ &= |\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon, \end{aligned}$$

то

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a_x,$$

аналогічно

$$\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a_y, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = a_z.$$

Отже, для того, щоб  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$ , необхідно й достатньо, щоб

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a_x, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a_y, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = a_z.$$

**Означення.** Вектор-функція  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  називається неперервною в точці  $t_0$ , якщо  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ , тобто  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)) = 0$ , або  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{r} = 0$ .

## Похідна вектор-функції

**Означення.** Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

то вона називається похідною вектор-функції й позначається

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

**Наслідок.** Оскільки

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k},$$

то з існування  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow$  існування границь

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'_t, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'_t, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = z'_t$$

і навпаки.

Таким чином для того, щоб  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  мала похідну, необхідно й достатньо, щоб  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  були диференційовані.

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 32

1. Як визначається маса неоднорідної пластини?
2. Що таке момент інерції і як його обчислити?
3. Які формули застосовуються для визначення центру мас?
4. Дайте означення вектор-функції скалярного аргументу і її границі.
5. Як визначається похідна від вектор-функції?

### Лекція 33. Геометричний зміст похідної вектор-функції. Дотична й нормальна площини до кривої в просторі. Механічний зміст похідної вектор-функції

**Мета:** визначити геометричний зміст похідної вектор-функції, дотичну й нормальну площини до кривої в просторі. Надати механічний зміст похідної вектор-функції.

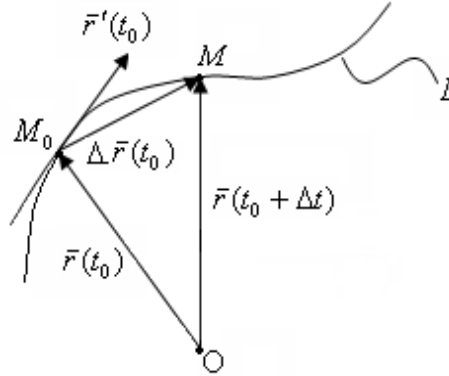
#### План

1. Геометричний зміст похідної вектор-функції
2. Дотична й нормальна площини до кривої в просторі
3. Механічний зміст похідної вектор-функції
4. Задача про визначення маси неоднорідної матеріальної лінії
5. Задача про роботу змінної сили під час руху точки по кривій

## Геометричний зміст похідної вектор-функції

При  $\Delta t \rightarrow 0$   $(.)M \rightarrow (.)M_0$  й хорда  $MM_0$  розвертається до положення дотичної:  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{M_0M}}{\Delta t} = \vec{r}'(t_0)$ .

Геометричний зміст похідної вектор-функції:  $\vec{r}'(t_0)$  лежить на дотичній, проведеній до годографа  $L$ , і напрямлена у бік зростання параметра  $t$ .



**Зауваження.** Годограф  $L$  можна розглядати як графік функції, заданої параметрично:

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in T \\ z = z(t) \end{cases}$$

**Означення.**  $(.)M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$  називається **особливою**, якщо  $\vec{r}'(t_0) = \vec{0}$  або не існує.

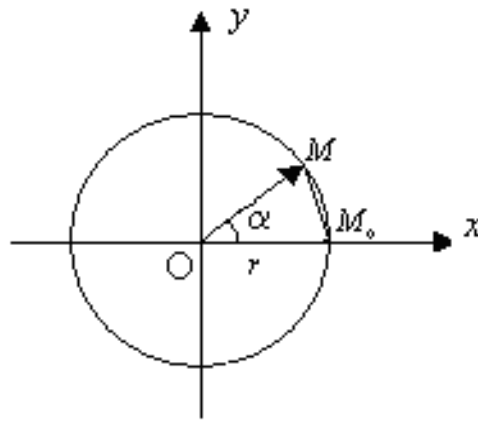
**Означення.** Крива  $L$  називається **гладкою**, якщо  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  неперервно диференційована функція без особливих точок.

**Теорема.** Довжина нескінченно малої дуги гладкої кривої еквівалентна стягуючій її хорді, тобто

$$\lim_{(.)M \rightarrow (.)M_0} \frac{|M_0M|}{\overline{M_0M}} = 1 \quad (\text{без доведення}).$$

**Зауваження.** Перша важлива границя є окремим випадком цієї теореми, тому що

$$1 = \lim_{(.)M \rightarrow (.)M_0} \frac{|M_0M|}{\overline{M_0M}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r \alpha}{2r \sin \frac{\alpha}{2}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\phi}{\sin \phi}.$$



### Дотична й нормальна площини до кривої в просторі

Нехай  $L$  – гладка крива. Оскільки вектор  $\vec{r}'(t_0)$  лежить на дотичній, то він є напрямним вектором цієї прямої.  $(.)M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$  – точка дотику.

Рівняння дотичної:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

У той же час вектор  $\vec{r}'(t_0)$  перпендикулярний до нормальної площини, тобто

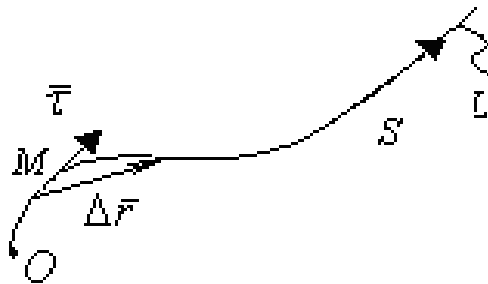
$$\vec{N}(A, B, C) = \vec{r}'(t_0)(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

й рівняння нормальної площини:

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0.$$

### Механічний зміст похідної вектор-функції

Нехай матеріальна точка  $M(x; y; z)$  рухається по годографу вектор-функції  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ .



Уведемо в розгляд початок відліку точку  $O$  і дугову координату  $S$ , що спрямована у напрямку руху  $(.)M$ . Тоді  $\vec{r} = \vec{r}(S(t))$  й  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}$ . Оскільки  $\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} = \vec{t}$ , тут  $\Delta \vec{r}$  – вектор-хорда,  $\Delta S$  – довжина дуги, то  $|\vec{t}| = 1$ , вектор  $\vec{t}$  лежить на дотичній, тобто  $\vec{t}$  – одиничний вектор дотичної, що спрямований у напрямку руху точки  $M$ , а  $\frac{ds}{dt} = |\vec{v}|$ . Отже,  $\frac{d\vec{r}}{dt} = |\vec{v}| \vec{t} = \vec{v}$ .

Механічним змістом похідної вектор-функції за часом  $t$  є вектор швидкості матеріальної точки  $M$  під час руху по кривій  $L$ .

### Задача про визначення маси неоднорідної матеріальної лінії

Нехай матеріальна лінія є гладкою кривою  $L$ , що задається вектор-функцією  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ . Погонна густина цієї лінії  $\rho = \rho(M) \in C(L)$ . Розмірність густини  $[\rho] = \frac{[m]}{[l]}$ , де  $[m]$ ,  $[l]$  - розмірності маси й довжини лінії.

Довільним чином ділимо криву  $L$  на  $n$  частин і на кожній дузі  $M_i M_{i+1}$  вибираємо точку  $P_i$ . Вважаємо густину на дузі  $M_i M_{i+1}$  рівною  $\rho(P_i)$ , тоді маса дуги  $M_i M_{i+1}$   $\Delta m_i \approx \rho(P_i) \Delta l_i$ , де  $\Delta l_i$  - довжина дуги  $M_i M_{i+1}$ .

Маса всієї матеріальної лінії  $L$

$$m \approx \sum_{i=1}^n \rho(P_i) \Delta l_i \quad (*).$$

І чим дрібніше розбиття, тим точніша ця рівність.

Найбільшу з довжин дуг  $M_i M_{i+1}$  позначимо буквою  $\lambda$  й назвемо рангом розбиття. Якщо  $\lambda \rightarrow 0$ , то дуги  $M_i M_{i+1}$  стягуються в точки, а  $n \rightarrow \infty$ . Сума (\*) залежить від способу розбиття лінії  $L$  й вибору точок  $P_i$ .

Визначимо  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(P_i) \Delta l_i$ , якщо він існує, то його називають криволінійним інтегралом по довжині дуги й позначають

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(P_i) \Delta l_i = \int_L \rho(M) dl.$$

Фізичний зміст криволінійного інтеграла по довжині дуги - маса матеріальної лінії

$$m = \int_L \rho(M) dl.$$

### Задача про роботу змінної сили під час руху точки по кривій

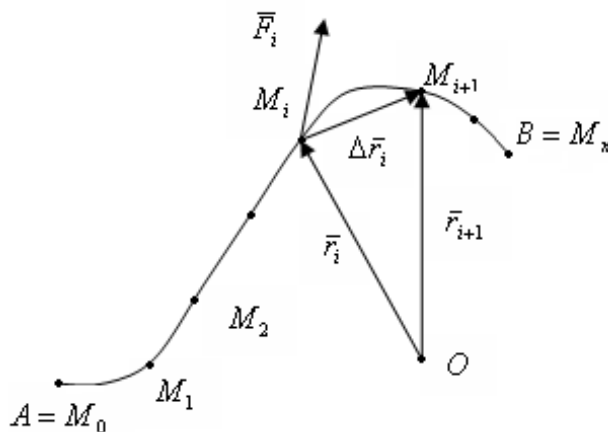
Нехай точка  $M(x; y; z)$  рухається уздовж кривої  $L$ , що є годографом вектор-функції  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . До точки прикладена сила

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = X(x; y; z)\vec{i} + Y(x; y; z)\vec{j} + Z(x; y; z)\vec{k}.$$

Визначити роботу сили  $\vec{F}$  при переміщенні  $(.)M$  з  $(.)A$  в  $(.)B$ ,  $\Pi L$  - гладка, а  $\vec{F}(M) \in C(L)$ . Довільним чином розбиваємо криву  $AB$  на  $n$  частин і на кожній дузі  $M_i M_{i+1}$  вибираємо точку  $P_i$ . Оскільки дуга  $M_i M_{i+1}$  досить мала, а  $\vec{F}(M)$  неперервна, то можна вважати, що на цій ділянці сила стала й  $\vec{F}_i \approx \vec{F}(P_i)$ . І тоді робота сили  $\vec{F}_i$  на ділянці  $M_i M_{i+1}$ :  $\Delta A_i \approx \vec{F}(P_i) \cdot \Delta \vec{r}_i$ .

А робота на всій кривій  $AB$ :  $A \approx \sum_{i=1}^n \bar{F}(P_i) \cdot \Delta \bar{r}_i$ , і чим дрібніше розбиття, тим точніша ця формула. Найбільшу з довжин дуг  $M_i M_{i+1}$  позначимо буквою  $\lambda$ , що називають рангом розбиття. Якщо  $\lambda \rightarrow 0$ , то  $n \rightarrow \infty$  (але не навпаки). Сума  $\sum_{i=1}^n \bar{F}(P_i) \cdot \Delta \bar{r}_i$  залежить від способу розбиття кривої  $AB$  й вибору точок  $P_i$ . Розглянемо

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{F}(P_i) \cdot \Delta \bar{r}_i = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (X(P_i)\bar{i} + Y(P_i)\bar{j} + Z(P_i)\bar{k}) \cdot (\Delta x_i \bar{i} + \Delta y_i \bar{j} + \Delta z_i \bar{k}) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (X(P_i)\Delta x_i + Y(P_i)\Delta y_i + Z(P_i)\Delta z_i). \quad (*) \end{aligned}$$



**Означення.** Якщо границя (\*) існує, то вона називається криволінійним інтегралом за координатами і позначається

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{F}(P_i) \cdot \Delta \bar{r}_i = \int_{AB} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{AB} X(M)dx + Y(M)dy + Z(M)dz.$$

Криву  $AB$  називають контуром інтегрування.

Таким чином, робота змінної сили  $\bar{F}$  під час руху точки по кривій  $AB$  дорівнює криволінійному інтегралу

$$A = \int_{AB} \bar{F} \cdot d\bar{r}.$$

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 33

1. У чому полягає геометричний зміст похідної вектор-функції?
2. Яке рівняння задає дотичну площину до кривої в просторі?

3. Яке рівняння задає нормальну площину до кривої в просторі?
4. У чому полягає механічний зміст похідної вектор-функції?
5. Як формулюється і розв'язується задача про визначення маси неоднорідної матеріальної лінії?
6. Як формулюється і розв'язується задача про роботу змінної сили під час руху точки по кривій?

### **Лекція 34. Зв'язок криволінійних інтегралів за координатами і довжиною дуги. Властивості криволінійних інтегралів**

**Мета:** визначити зв'язок криволінійних інтегралів за координатами і довжиною дуги. Ознайомити з теоремою існування криволінійного інтеграла, властивостями криволінійних інтегралів. Навчити обчислювати криволінійні інтеграли.

#### **План**

1. Зв'язок криволінійних інтегралів за координатами і довжиною дуги
2. Формулювання теореми існування криволінійного інтеграла
3. Дві основні властивості криволінійних інтегралів
4. Обчислення криволінійних інтегралів

#### **Зв'язок криволінійних інтегралів за координатами і довжиною дуги**

Нехай  $L$  – гладка крива, задана вектор-функцією

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [\alpha; \beta].$$

Розглянемо одиничний дотичний вектор  $\vec{\tau} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$ , вектор  $d\vec{r} = |d\vec{r}|\vec{\tau}$ .

$$\frac{dl}{|d\vec{r}|} = 1 \Rightarrow dl = |d\vec{r}| \Rightarrow d\vec{r} = \vec{\tau} dl.$$

Криволінійний інтеграл за координатами

$$\begin{aligned} \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_L \vec{F} \cdot \vec{\tau} dl = \\ &= \int_L (X(x; y; z) \cos \alpha + Y(x; y; z) \cos \beta + Z(x; y; z) \cos \gamma) dl = \\ &= \int_L f(x; y; z) dl, \end{aligned}$$

тут  $f(x; y; z) = (\bar{F} \cdot \bar{\tau})_{M(x; y; z)}$ .

Відтак, криволінійний інтеграл за координатами  $\int_L \bar{F} d\bar{r}$  існує, якщо існує криволінійний інтеграл за довжиною дуги  $\int_L f(x; y; z) dl$ , й навпаки.

### Формулювання теореми існування криволінійного інтеграла

**Теорема.** Якщо

$$L \sim \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), & t \in [\alpha; \beta] \\ z = z(t) \end{cases}$$

– гладка крива, а вектор-функція

$$\bar{F}(M) = X(M)\bar{i} + Y(M)\bar{j} + Z(M)\bar{k} \in C(L),$$

то існує криволінійний інтеграл за координатами

$$\int_L X(M)dx + Y(M)dy + Z(M)dz,$$

тобто існує границя n-ї інтегральної суми (\*), що не залежить від способу розбиття кривої L і вибору точок  $P_i$ .

**Зауваження.** Оскільки L – гладка, а  $F(M) \in C(L)$ , то  $f(x; y; z)$  теж неперервна на L.

**Доведення**

$$f(x; y; z) = \bar{F} \cdot \bar{\tau} = X(M) \cos \alpha + Y(M) \cos \beta + Z(M) \cos \gamma;$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \frac{d\bar{r}}{|d\bar{r}|} = \frac{\bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}dz}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}} = \\ &= \bar{i} \frac{x'_t}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}} + \bar{j} \frac{y'_t}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}} + \bar{k} \frac{z'_t}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}}, \end{aligned}$$

а оскільки крива L гладка, то  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  – неперервно диференційовані й без особливих точок, тобто  $\cos \alpha = \frac{x'_t}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}}$ , аналогічно  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  –

неперервні на L функції.

Отже,  $f(x; y; z) \in C(L)$ .

Із зауваження й формули зв'язку випливає, що якщо  $f(x; y; z) \in C(L)$  й L – гладка, то криволінійний інтеграл за довжиною дуги теж існує.

## Дві основні властивості криволінійних інтегралів

1. Криволінійний інтеграл за довжиною дуги АВ не залежить від вибору напрямку інтегрування, тобто

$$\int_{AB} f(M)dl = \int_{BA} f(M)dl.$$

### Доведення

За означенням

$$\int_{BA} f(M)dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta l_i,$$

$$\int_{AB} f(M)dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta l_i,$$

$\Delta l_i$  – довжина дуги  $M_iM_{i+1}$  не залежить від напрямку її виміру.

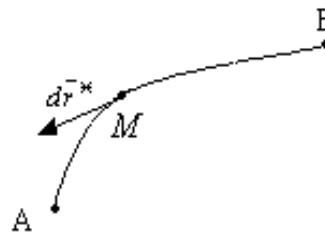
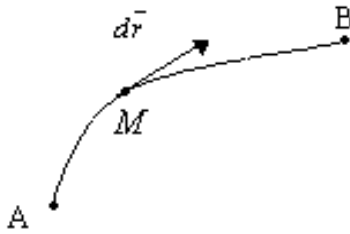
2. Криволінійний інтеграл за координатами залежить від вибору напрямку інтегрування, тобто

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{BA} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

### Доведення

За визначенням

$$A = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (X(p_i)\Delta x_i + Y(p_i)\Delta y_i + Z(p_i)\Delta z_i)$$



$$d\vec{r}^* = -d\vec{r},$$

$$A^* = \int_{BA} \vec{F} \cdot d\vec{r}^* = - \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

що й потрібно було довести.

**Зауваження.** Якщо контур АВ замкнений, то криволінійний інтеграл записують так:

$$\oint_L \bar{F} \cdot \overline{dr}.$$

### Обчислення криволінійних інтегралів

Почнемо із криволінійного інтеграла за координатами:

$$\int_{AB} \bar{F} \cdot \overline{dr} = \int_{AB} (X(x; y; z)dx + Y(x; y; z)dy + Z(x; y; z)dz).$$

$$\text{Обчислимо } \int_{AB} X(x; y; z)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X(P_i)\Delta x_i.$$

Крива АВ задана рівняннями  $x = x(t)$ ;  $y = y(t)$ ;  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ .

За теоремою Лагранжа  $\Delta x_i = x(t_i + \Delta t_i) - x(t_i) = x'_t(t_i^*)\Delta t_i$ , де  $t_i^*$  лежить між  $t_i$  і  $t_i + \Delta t_i$ ;  $\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \Delta x_i = 0$ , тому що  $x=x(t)$  – неперервна.

Оскільки інтеграл не залежить від вибору точок  $P_i$ , то нехай

$$P_i(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*))$$

тоді

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X(P_i)\Delta x_i &= \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X_i(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*))x'_t(t_i^*)\Delta t_i = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} X(x(t); y(t); z(t)) \cdot x'_t dt, \end{aligned}$$

тобто криволінійний інтеграл зводиться до визначеного.

Остаточно:

$$\int_{AB} X(x; y; z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} X(x(t); y(t); z(t)) \cdot x'_t dt.$$

Аналогічно:

$$\begin{aligned} \int_{AB} Y(x; y; z)dy &= \int_{\alpha}^{\beta} Y(x(t); y(t); z(t)) \cdot y'_t dt. \\ \int_{AB} Z(x; y; z)dz &= \int_{\alpha}^{\beta} Z(x(t); y(t); z(t)) \cdot z'_t dt. \end{aligned}$$

Отже, метод обчислення криволінійного інтеграла за довжиною дуги такий самий, що й метод обчислення криволінійного інтеграла за координатами.

Оскільки

$$dl = |\overline{dr}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t} dt,$$

то

$$\int_{AB} f(x; y; z) dl = \int_{AB} f(x; y; z) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt.$$

### Приклади.

1.  $\vec{F} = 2x\vec{i} - y^2x\vec{j}$ ,  $L \sim y = x^2$ ,  $x \in [0; 1]$ . Визначити роботу сили  $\vec{F}$ .

Уведемо параметризацію кривої  $L$   $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $t \in [0; 1]$ .

$$A = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_L 2x dx - y^2 x dy = \int_0^1 2t dt - t^4 \cdot 2t dt = \\ = \left[ t^2 - 2 \frac{t^7}{7} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.$$

2. Визначити роботу сили  $\vec{F} = x\vec{i} - 4y\vec{j} + x\vec{k}$  під час руху точки  $M$  по прямій від точки  $A(1,0,4)$  до точки  $B(7,4,2)$ .

$$L \sim \frac{x-1}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z-4}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 6t + 1 \\ y = 4t \\ z = -2t + 4 \end{cases}, \quad t \in [0; 1].$$

$$A = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_L x dx - 4y dy + x dz = \\ = \int_0^1 [(6t+1)6 - 4 \cdot 4t \cdot 4 + (6t+1)(-2)] dt = \int_0^1 (-40t + 4) dt = \\ = [-20t^2 + 4t]_0^1 = -16.$$

3. Визначити масу параболи  $y = x^2$ ,  $x \in [-1; 1]$ , якщо  $\rho = k|x|$  – густина.

$$m = \int_L \rho(x; y) dl; \\ dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = \sqrt{1 + y_x'^2} dx = \sqrt{1 + (2x)^2} dx; \\ m = 2 \int_0^1 kx \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{2k}{8} \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} d(1 + 4x^2) = \\ = \left[ \frac{k}{4} \frac{(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^1 = \frac{k}{6} (5^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{k(5\sqrt{5} - 1)}{6}.$$

## Питання та завдання для самоконтролю до лекції 34

1. Яка формула визначає зв'язок між криволінійними інтегралами за координатами і довжиною дуги?
2. Сформулюйте теорему про існування криволінійного інтеграла.
3. Назвіть основні властивості криволінійних інтегралів.
4. Наведіть приклад обчислення криволінійного інтегралу

## Лекція 35. Формула Гріна. Механічні застосування криволінійного інтеграла за довжиною дуги

**Мета:** Ознайомити з формулою Гріна та механічними застосуваннями криволінійного інтеграла за довжиною дуги

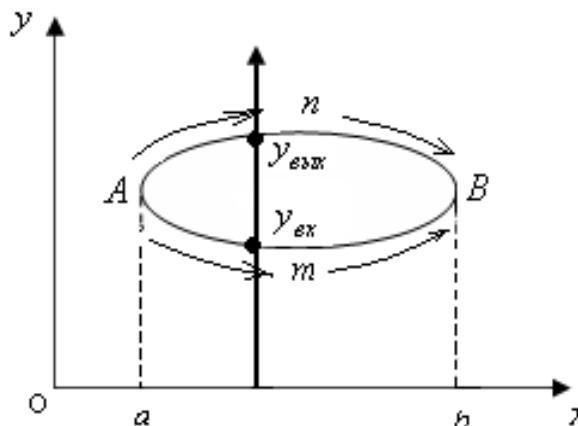
### План

1. Формула Гріна
2. Механічні застосування криволінійного інтеграла за довжиною дуги

### Формула Гріна

**Теорема.** □ область  $D$  правильна уздовж осі  $OX$  й  $OY$ , функції  $X(x, y)$ ,  $Y(x, y)$ ,  $\frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial x} \in C(\bar{D})$ , тоді  $\iint_D \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \int_L X dx + Y dy$ , де  $L$  - замкнений контур (границя області  $D$ ) з обходом проти ходу годинникової стрілки.

**Доведення.**



$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_{\text{вх}}}^{y_{\text{вых}}} \frac{\partial X}{\partial y} dy = \int_a^b (X(x, y_{\text{вых}}) - X(x, y_{\text{вх}})) dx = \\ &= \int_{AnB} X(x, y) dx - \int_{AmB} X(x, y) dx = - \int_L X(x, y) dx, \end{aligned}$$

де  $L$  – замкнений контур з обходом проти годинникової стрілки.

Аналогічно

$$\iint_D \frac{\partial Y}{\partial x} dx dy = \int_L Y(x, y) dy,$$

тоді

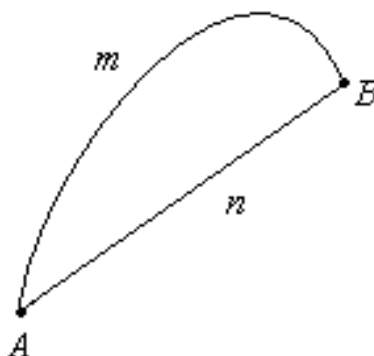
$$\iint_D \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \int_L X dx + Y dy.$$

### Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування

**Означення.** Якщо

$$\int_{AmB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AnB} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

то кажуть, що криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування.



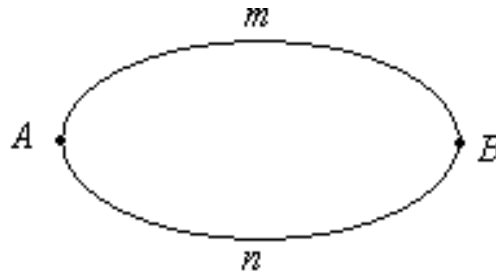
$\square X(x, y), Y(x, y), \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial x} \in C(\bar{D})$ , де  $D$  – правильна область уздовж осей  $OX, OY$ .

**Чотири рівносильні умови:**

1. Інтеграл  $\int_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy$ , узятий за будь-яким замкненим контуром  $L \subset D$ , дорівнює нулю.
2. Інтеграл  $\int_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy$  не залежить від шляху інтегрування.
3. Вираз  $X(x, y)dx + Y(x, y)dy$  є повним диференціалом деякої функції  $U(x, y)$ , визначеної в області  $D$ .
4. В області  $D$ :  $\frac{\partial Y}{\partial x} \equiv \frac{\partial X}{\partial y}$ .

**Доведення** проводимо за схемою  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ .

1. Оскільки  $\int_L X dx + Y dy = 0$ ,  $L$  - будь-який замкнений контур в області  $D$ .

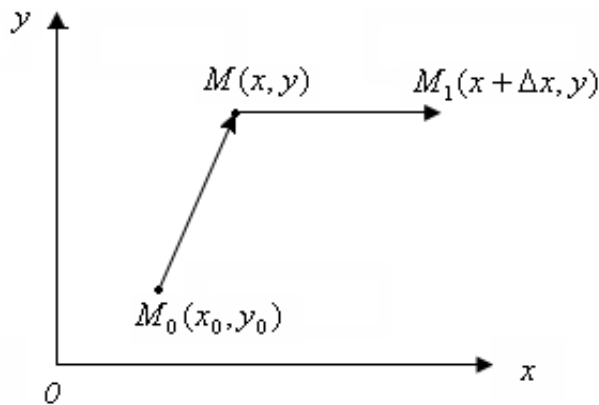


$$\int_{AnB} Xdx + Ydy + \int_{BmA} Xdx + Ydy = 0 \Rightarrow \int_{AnB} Xdx + Ydy = \int_{AmB} Xdx + Ydy,$$

тобто інтеграл не залежить від шляху інтегрування (1  $\rightarrow$  2).

2. Позначимо

$$\int_{M_0M} Xdx + Ydy = U(x, y) - U(x_0, y_0)$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x; y) - U(x; y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{MM_1} Xdx + Ydy}{\Delta x} = \\ &= \left. \begin{array}{l} \text{оскільки інтеграл не залежить} \\ \text{від шляху інтегрування, то} \\ \text{беремо шлях по прямій} \\ y = \text{const}; dy = 0 \end{array} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} X(x; y) dx}{\Delta x} = \left. \begin{array}{l} \text{за теоремою про середнє} \\ (\cdot) \xi \text{ між } x \text{ та } x + \Delta x \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{X(\xi; y) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\xi \rightarrow x} X(\xi; y) = X(x; y), \end{aligned}$$

тому що  $X(x; y) \in C(D)$ .

Відтак,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X(x; y),$$

аналогічно доводиться, що

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Y(x; y).$$

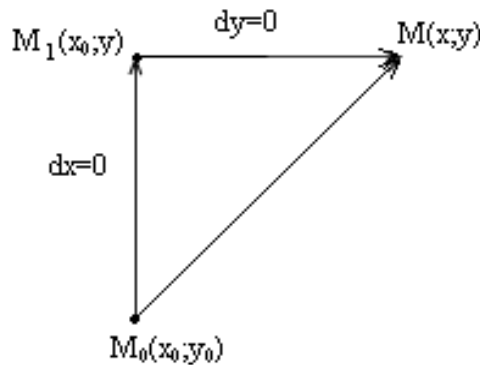
Отже,

$$X(x; y)dx + Y(x; y)dy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = dU(x; y). \quad (2 \rightarrow 3)$$

Визначимо цю функцію:

$$U(x; y) - U(x_0; y_0) = \int_{M_0 M} Xdx + Ydy = \left\{ \begin{array}{l} \text{оскільки інтеграл не} \\ \text{залежить від шляху} \\ \text{інтегрування} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{M_0 M_1} Y(x_0; y)dy + \int_{M_1 M} X(x; y)dx = \int_{y_0}^y Y(x_0; y)dy + \int_{x_0}^x X(x; y)dx,$$



$$U(x; y) = \int_{x_0}^x X(x; y)dx + \int_{y_0}^y Y(x_0; y)dy + U(x_0; y_0).$$

3. Оскільки  $\frac{\partial v}{\partial x} = X(x; y)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = Y(x; y)$ , то

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \text{ при } \forall (x; y) \in D. \quad (3 \rightarrow 4)$$

4. Для будь-якого замкнутого контура  $L$ , що повністю лежить в  $D$ ,

$$\int_L Xdx + Ydy = \iint_D \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

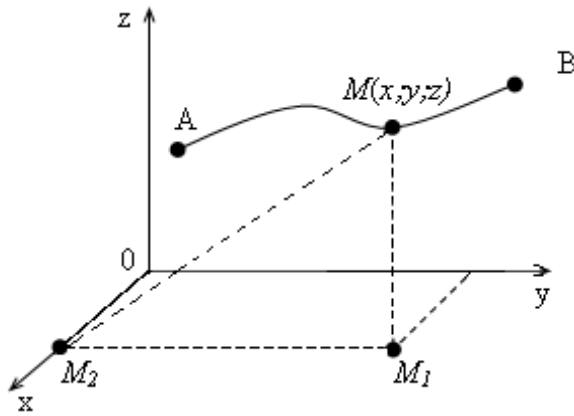
тому що  $\frac{\partial X}{\partial y} \equiv \frac{\partial Y}{\partial x}$  в  $D$ . (4 → 1).

Таким чином, усі чотири умови рівносильні.

## **Механічні застосування криволінійного інтеграла за довжиною дуги (список формул)**

□ густина матеріальної лінії  $L$   $\rho = \rho(x; y; z) \in C(L)$ .

1. Моменти інерції матеріальної лінії:



$$I_x = \int_L (y^2 + z^2) \rho(x; y; z) dl, \quad I_y = \int_L (x^2 + z^2) \rho(x; y; z) dl,$$

$$I_z = \int_L (x^2 + y^2) \rho(x; y; z) dl, \quad I_0 = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x; y; z) dl.$$

2. Статичні моменти матеріальної лінії:

$$M_{xoy} = \int_L z \rho(x; y; z) dl, \quad M_{xoz} = \int_L y \rho(x; y; z) dl,$$

$$M_{yoz} = \int_L x \rho(x; y; z) dl.$$

3. Координати центра мас матеріальної лінії

$$x_c = \frac{M_{yoz}}{m} = \frac{\int_L x \rho(x; y; z) dl}{\int_L \rho(x; y; z) dl}, \quad y_c = \frac{M_{xoz}}{m} = \frac{\int_L y \rho(x; y; z) dl}{\int_L \rho(x; y; z) dl},$$

$$z_c = \frac{M_{xoy}}{m} = \frac{\int_L z \rho(x; y; z) dl}{\int_L \rho(x; y; z) dl}.$$

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 35

1. Який зміст формули Гріна?
2. Як визначаються моменти інерції матеріальної лінії?
3. Як обчислити статичні моменти матеріальної лінії?
4. Як знайти координати центра мас матеріальної лінії?

## РОЗДІЛ V. ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

### Лекція 36. Поняття числового ряду. Збіжні і розбіжні числові ряди. Найпростіші властивості збіжних рядів. Ознаки збіжності додатних рядів

**Мета:** Ознайомити з поняттям числового ряду, збіжністю і розбіжністю числових рядів, необхідною умовою збіжності. Визначити найпростіші властивості збіжних рядів

#### План

1. Поняття числового ряду. Збіжні і розбіжні числові ряди
2. Найпростіші властивості збіжних числових рядів
3. Додатні ряди. Ознаки збіжності

#### Поняття числового ряду. Збіжні і розбіжні числові ряди

Нехай задана числова послідовність  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

**Означення.** Числовим рядом називають вираз

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

де числа  $a_1, a_2, \dots$  називають **його членами**,  $a_n$  – **загальним членом** ряду.

Суму  $n$  перших членів ряду (1):

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

називають  **$n$ -ю частинною сумою** ряду.

Коли  $n$  набуває значення 1, 2, 3, ... , одержимо послідовність частинних сум  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ . Якщо існує скінченна границя послідовності частинних сум ряду (1), то цю границю називають **сумою ряду** і записують

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots,$$

тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Ряд, який має суму, називається **збіжним**.

У випадку, коли границя послідовності частинних сум нескінченна або не існує, ряд називають **розбіжним**.

**Приклад 1.** Знайти суму ряду

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Подамо його частинну суму у вигляді, зручному для граничного переходу:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Звідки випливає, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$  і

$$1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

**Теорема (необхідна умова збіжності ряду).** Якщо ряд (1.1) збігається, то його загальний член  $a_n$  прямує до нуля при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доведення**

Оскільки числовий ряд збіжний, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$  і  $a_n = S_n - S_{n-1}$ , тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$ .

**Зауваження.** Дана ознака використовується тільки для встановлення розбіжності ряду.

**Приклад 2.** Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n+1} = \frac{1}{101} + \frac{1}{201} + \dots$

Оскільки границя загального члена цього ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{100n+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{100 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{100} \neq 0$$

відмінна від нуля, то цей ряд є розбіжним.

**Приклад 3.** Ряд, складений з членів геометричної прогресії

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (a \neq 0)$$

збіжний до  $\frac{a}{1-q}$  при  $|q| < 1$  і розбіжний при  $|q| \geq 1$ .

Дійсно, нехай  $|q| \geq 1$ . Тоді загальний член ряду  $aq^{n-1} \geq 1$  і ряд є розбіжним. Якщо ж  $|q| < 1$ . При  $q \neq 1$

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} q^n.$$

Оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  при  $|q| < 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$ .

**Означення.** Ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

називають гармонічним.

Для нього, очевидно, виконується необхідна ознака збіжності:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

Доведемо, що він є розбіжним. Справді, відомо, що  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ . Звідси  $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$  або  $\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$ . Додаючи нерівності, які одержимо звідси при  $n = 1, 2, 3, \dots, k$ , дістанемо

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} > \sum_{n=1}^k [\ln(n+1) - \ln n] = \ln(k+1).$$

Оскільки  $\ln(k+1) \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , то й  $S_k \rightarrow +\infty$ , тобто гармонічний ряд розбіжний.

### Найпростіші властивості збіжних рядів

**Означення.** Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збіжний, то різницю  $r_n = S - S_n$  між його сумою і частинною сумою називають залишком даного ряду.

З означення збіжності випливає, що  $r \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Залишок  $r_n$  збіжного ряду є величина нескінченно мала при  $n \rightarrow \infty$  (розбіжний ряд залишку не має). Оскільки  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$ ,  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , то

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}.$$

**Теорема 1.** Якщо ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  збігається і має суму  $S$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} ca_n$  також збігається і має суму  $cS$ .

**Зауваження.** Записавши останню рівність у вигляді  $\sum_{k=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  переконуємося, що правило винесення спільного множника за дужку переноситься і на нескінченні ряди.

Якщо ж ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  розбіжний, то й ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} ca_n$  при  $c \neq 0$  також розбіжний, бо в протилежному випадку множенням його на  $\frac{1}{c}$  дістали б за доведеним збіжний ряд, а це суперечить умові.

**Теорема 2.** Якщо ряди  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  і  $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$  збіжні і мають відповідно суми  $S$  і  $\sigma$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  збігається і має суму  $S + \sigma$ .

**Зауваження.** Збіжні ряди  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  і  $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$  можна почленно віднімати, оскільки ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n - b_n)$  є сумою двох збіжних рядів  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  і  $\sum_{k=1}^{\infty} (-b_n)$ .

**Теорема 3.** Сума збіжного і розбіжного ряду є ряд розбіжний.

**Доведення**

Нехай ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  збіжний, а ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$  розбіжний. Припустивши збіжність ряду  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ , дістанемо, що ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$  збіжний як різниця двох збіжних рядів  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  і  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ , а це суперечить умові.

**Теорема 4.** Якщо, починаючи з деякого  $n$ , члени рядів  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  і  $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$  рівні між собою і один з цих рядів збіжний, то збіжний і другий.

**Наслідок.** Якщо в довільному ряді дописати, відкинути або змінити скінченне число членів, то збіжність чи розбіжність від цього не зміниться.

**Теорема 5.** Якщо у збіжному ряді довільним чином згрупувати його члени, зберігаючи порядок їх слідування, то новоутворений ряд збігається до тієї ж самої суми.

### Додатні ряди. Ознаки збіжності

Тепер розглянемо ряди, всі члени яких є невід'ємні числа. За традицією їх називають **рядами з додатними членами**, або додатними рядами.

**Теорема 6.** Для того щоб додатний ряд збігався, необхідно і достатньо, щоб послідовність частинних сум цього ряду була обмежена зверху.

**Доведення**

**Необхідність.** Нехай ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , де всі  $a_n \geq 0$ , збіжний, тобто існує скінченна границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ . Звідки випливає, що  $S_n \leq S$ , тобто послідовність

частинних сум  $S_n$  обмежена зверху.

*Достатність.* Оскільки послідовність частинних сум додатного ряду є неспадною, то для збіжності цієї послідовності достатньо, щоб вона була обмежена зверху.

**Приклад 3.** Дослідити на збіжність ряд  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Даний ряд розбіжний, бо його частинна сума

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{n}$$

не обмежена зверху.

**Теорема (перша ознака порівняння).** Якщо для членів додатних рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots, \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots \quad (3)$$

виконуються нерівності  $a_n \leq b_n$  для всіх  $n$ , починаючи з деякого, то із збіжності ряду (3) випливає збіжність ряду (2), а з розбіжності ряду (2) випливає розбіжність ряду (3).

### *Доведення*

Нехай  $S_n$  і  $\sigma_n$  – частинні суми рядів (2) і (3), тоді справедливі нерівності  $S_n \leq \sigma_n$ .

Припустимо, що ряд (3) збіжний. Тоді послідовність  $\{\sigma_n\}$ , згідно з теоремою 6, обмежена зверху, а, отже, обмежена і послідовність частинних сум  $\{S_n\}$ , тому ряд (2) збіжний.

Нехай ряд (2) розбіжний. Тоді і ряд (3) розбіжний, бо якби останній був збіжним, то за доведеним вище і ряд (2) збіжний.

**Приклад 4.** Дослідити на збіжність  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots$

Зауважуємо, що  $\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n < \left(\frac{n}{2n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . Оскільки кожен член даного додатного ряду менший відповідного члена збіжної геометричної прогресії із знаменником  $q = \frac{1}{2} < 1$ , то вихідний ряд також збіжний.

**Приклад 5.** Дослідити на збіжність  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$

Оскільки  $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$  і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$  розбіжний, то розбіжний і даний ряд.

**Теорема (друга ознака порівняння).** Якщо для додатних рядів  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  існує скінченна додатна границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ , то ці ряди збіжні або розбіжні одночасно.

### Доведення

Як б не було число  $k > 0$ , то знайдуться додатні числа  $p$  і  $q$  такі, що  $p < k < q$ . Внаслідок умови  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow k$  для всіх  $n$ , починаючи з деякого, виконуватиметься нерівність  $p < \frac{a_n}{b_n} < q$  або  $pb_n < a_n < qb_n$ .

Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  збіжний, то збіжний і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} qb_n$ . Внаслідок нерівності  $a_n < qb_n$ , збіжний і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Коли ж ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  розбіжний, то розбіжним є і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} pb_n$ . Внаслідок нерівності  $pb_n < a_n$ , розбіжний і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Приклад 6.** Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$ .

Доцільно порівняти даний ряд із збіжним рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ . Маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{n}{2^n}} = 1 > 0$$

(бо за правилом Лопіталя  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x \ln 2} = 0$ ) і за другою ознакою порівняння даний ряд також збіжний.

**Теорема (ознака Д'Аламбера).** Якщо для додатного ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  існує скінченна границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \geq 0 \quad (4)$$

то при  $l < 1$  даний ряд збіжний, а при  $l > 1$  – розбіжний.

### Доведення

Нехай  $l < 1$ . Тоді знайдеться додатне число  $q$  таке, що  $l < q < 1$ . Внаслідок рівності (4) для всіх значень  $n$ , починаючи з деякого, виконуватиметься нерівність  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ , а тому

$$a_{n+1} < a_n q, \quad a_{n+2} < a_{n+1} q < a_n q^2, \quad a_{n+3} < a_{n+2} q < a_n q^3, \dots,$$

тобто члени додатного ряду  $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots$  не перевищують відповідних членів додатного ряду  $a_n q + a_n q^2 + a_n q^3 + \dots$ . Оскільки останній ряд збіжний, як геометрична прогресія із знаменником  $q < 1$ , то і перший ряд, а з ним і даний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , також збіжний.

Якщо  $l > 1$ , то внаслідок умови (4) для всіх значень  $n$ , починаючи з деякого, виконуватиметься нерівність  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  або  $a_n < a_{n+1}$ . Звідси випливає, що загальний член ряду не прямує до нуля при  $n \rightarrow \infty$ , і тому ряд буде розбіжним.

**Приклад 7.** Дослідимо на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$

Оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$ , то за ознакою

Д'Аламбера даний ряд збіжний.

**Зауваження:** ознаку Д'Аламбера не можна застосовувати при  $l = 1$ .

Наприклад, для кожного з рядів  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ . При цьому перший ряд розбіжний, а другий збіжний, оскільки  $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ , а ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n(n+1)} \right)$  – збіжний (див. приклад 1).

**Теорема (гранична ознака Коші).** Якщо для додатного ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l, \quad (5)$$

то при  $l < 1$  даний ряд збіжний, а при  $l > 1$  – розбіжний.

### Доведення

Нехай  $l < 1$ . Тоді знайдеться число  $q > 0$  таке, що  $l < q < 1$ . Внаслідок рівності (5) для всіх  $n$ , починаючи з деякого, виконуватиметься нерівність  $\sqrt[n]{a_n} < q$ , тому

$$a_n < q^n, a_{n+1} < q^{n+1}, a_{n+2} < q^{n+2}, \dots$$

Тобто члени ряду  $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$  не перевищують відповідних членів збіжної геометричної прогресії  $q^n + q^{n+1} + q^{n+2} + \dots$ . Отже даний ряд збіжний.

Якщо  $l > 1$ , то внаслідок рівності (5), починаючи з деякого  $n$ , матимемо  $\sqrt[n]{a_n} > 1$  або  $a_n > 1$ . Звідси випливає, що  $a_n$  не прямує до 0 при  $n \rightarrow \infty$  і, отже, даний ряд розбіжний.

**Приклад 8.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  є збіжним за ознакою Коші, оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 36

1. Що називається числовим рядом, частинною сумою ряду, сумою ряду? Який ряд називається збіжним і який розбіжним?
2. В чому полягає необхідна умова збіжності ряду? Доведіть відповідну теорему.
3. Дослідіть питання збіжності ряду, складеного з членів геометричної прогресії.
4. Доведіть розбіжність гармонічного ряду.
5. Що таке залишок ряду? Як зв'язані між собою сума ряду, частинна сума і залишок ряду?
6. Сформулюйте і доведіть теорему про почленне множення ряду на число.
7. Сформулюйте і доведіть теорему про почленне додавання рядів.
8. Доведіть, що сума збіжного і розбіжного рядів є ряд розбіжний.
9. В чому полягає необхідна і достатня умова збіжності числового ряду?
10. Який ряд називають додатним? Сформулюйте і доведіть необхідну і достатню умову збіжності додатного ряду.
11. Сформулюйте і доведіть ознаки збіжності і розбіжності додатних рядів за допомогою порівняння їх загальних членів.
12. Сформулюйте і доведіть ознаку Д'Аламбера.
13. Сформулюйте і доведіть ознаку Коші.

## Лекція 37. Інтегральна ознака Коші-Маклорена для додатних рядів. Ряди з довільними членами. Знакозмінні ряди

**Мета:** Ознайомити інтегральною ознакою Коші-Маклорена для додатних рядів. Визначити абсолютну і умовну збіжність рядів з довільними членами. Навчити користуватися ознакою Лейбніца для знакозмінних рядів

### План

1. Інтегральна ознака Коші-Маклорена для додатних рядів
2. Ряди з довільними членами. Знакозмінні ряди
3. Властивості абсолютно збіжних рядів

### Інтегральна ознака Коші-Маклорена для додатних рядів

**Теорема (інтегральна ознака Коші-Маклорена).** Якщо  $f(x)$ - невід'ємна і незростаюча функція на проміжку  $[1; +\infty]$ , то ряд

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad (1)$$

і невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \quad (2)$$

або обидва збіжні або обидва розбіжні.

### Доведення

Оскільки функція  $f(x)$  незростаюча, то при  $k \leq x \leq k+1$  матимемо  $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ . Функція  $f(x)$  монотонна та інтегровна на відрізку  $[k; k+1]$ . Почленне інтегрування цих нерівностей у межах від  $k$  до  $k+1$  дає

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k).$$

Приймаючи в цих нерівностях  $k = 1, 2, \dots, n-1$  і додаючи почленно, дістанемо

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + f(2) + \dots + f(n-1).$$

Якщо  $S_n$  – частинна сума ряду (1), то останні нерівності можна переписати так  $S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq S_{n-1}$  і звідки

$$S_n \leq f(1) \leq \int_1^n f(x) dx, \quad (3)$$

$$S_{n-1} \geq \int_1^n f(x) dx. \quad (4)$$

Послідовність  $\left\{ \int_1^n f(x) dx \right\}$  неспадна:  $\int_1^{n+1} f(x) dx = \int_1^n f(x) dx + \int_n^{n+1} f(x) dx \geq \int_1^n f(x) dx$ , бо  $f(x) \geq 0$ .

Нехай невласний інтеграл (2) збіжний. Це означає, що існує скінченна границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = L, \text{ причому } \int_1^n f(x) dx \leq L.$$

З нерівності (3) одержуємо  $S_n \leq f(1) + L$ , тобто частинні суми додатного ряду (1) обмежені зверху, і тому ряд (1) збіжний.

Нехай тепер невласний інтеграл (2) розбіжний. Це означає, що  $\int_1^n f(x) dx \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , а тоді з нерівності (4) випливає, що й  $S_{n-1} \rightarrow +\infty$ , тобто ряд (1) розбіжний.

**Зауваження.** Теорема залишається справедливою, якщо функція  $f(x)$  має вказані властивості для  $x \geq m$ . В ній потрібно лише замінити  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  і  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  відповідно на  $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$  і  $\int_m^{+\infty} f(x) dx$ .

**Приклад 1.** Узагальнений гармонічний ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

збіжний при  $\alpha > 1$ , і розбіжний при  $\alpha \leq 1$ .

### Ряди з довільними членами. Знакозмінні ряди

Розглянемо ряди, членами яких можуть бути як додатні, так і від'ємні числа.

**Означення.** Ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (5)$$

називають **абсолютно збіжним**, якщо збіжним є відповідний ряд абсолютних

значень членів ряду (5):

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (6)$$

**Зауваження** Очевидно, що для додатних рядів поняття збіжності і абсолютної збіжності збігаються.

**Теорема 1.** Якщо ряд, складений з абсолютних величин членів даного ряду, збіжний, то збіжним буде і даний ряд.

Твердження теореми відразу випливає із загального принципу збіжності, якщо скористатися нерівністю

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + \dots + |a_{n+p}|.$$

**Приклад 2.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$  є абсолютно збіжним, бо збіжним є ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n \right|.$$

**Теорема 2 (критерій абсолютної збіжності ряду).** Для того, щоб ряд був абсолютно збіжним, необхідно і достатньо, щоб його можна було подати у вигляді різниці двох збіжних додатних рядів.

**Доведення**

*Необхідність.* За умовою ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  збіжний. Зауважимо, що

$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ , тому збіжним є і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ . Оскільки

$a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

*Достатність.* Нехай  $a_n = b_n - c_n$ , де  $b_n, c_n \geq 0$ , і ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  збіжні.

Оскільки  $|a_n| = |b_n - c_n| \leq b_n + c_n$  і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n)$  збіжний, то збіжним є і ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , тобто ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збіжний абсолютно.

**Зауваження**

1. При дослідженні ряду на абсолютну збіжність застосовують достатні ознаки збіжності додатних рядів до відповідного ряду абсолютних величин.

2. Із розбіжності ряду абсолютних величин ще не можна робити висновок про збіжність чи розбіжність даного ряду. Однак коли до ряду абсолютних величин застосовано ознаку Д'Аламбера або Коші і виявлено його розбіжність, то розбіжним є і даний ряд, бо в цьому випадку порушується необхідна умова збіжності.

**Означення.** Ряд (5) називають **умовно збіжним**, якщо він збіжний, а відповідний ряд абсолютних величин членів даного ряду (6) розбіжний.

**Приклад 3.** Ряд  $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \dots$  збіжний, бо

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \dots, S_{2n} = 0, S_{2n+1} = \frac{1}{n+1}, \dots$$

і тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ . Однак цей ряд не є абсолютно збіжним, бо ряд

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots$$

розбіжний. Справді, маємо  $S_{2n} = 2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots)$ . Оскільки вираз у дужках є  $n$ -ю частинною сумою гармонічного ряду, то  $S_{2n} \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Означення.** Серед рядів з довільними членами велике значення мають **знакозмінні ряди**, тобто ряди, знаки членів в яких чергуються.

Вважаючи перший член додатним, знакозмінний ряд можна записати у вигляді

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n. \quad (7)$$

Достатні умови збіжності цих рядів дає така теорема.

**Теорема (ознака Лейбніца, достатні умови збіжності (7)).** Якщо члени знакозмінного ряду (1.22) прямують до нуля і абсолютні величини їх не зростають, то такий ряд збіжний.

**Доведення**

Очевидно, що  $S_{n+p} - S_n = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + \dots + (-1)^{p-1} a_{n+p})$ . Якщо  $n$  парне, то  $S_{n+p} - S_n \leq a_{n+1}$ , бо

$$S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + (-a_{n+2} + a_{n+3}) + (-a_{n+4} + a_{n+5}) + \dots,$$

а вирази в дужках недодатні. Зауважимо, що  $0 \leq S_{n+p} - S_n$ , бо

$$S_{n+p} - S_n = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + (a_{n+5} - a_{n+6}) + \dots,$$

а вирази в дужках невід'ємні.

Аналогічно можна показати, що коли  $n$  – непарне, то  $-a_{n+1} \leq S_{n+p} - S_n \leq 0$ .

Отже, для кожних натуральних  $n$  та  $p$  маємо

$$|S_{n+p} - S_n| \leq a_{n+1}. \quad (8)$$

Оскільки  $a_n \rightarrow 0$ , то для кожного  $\varepsilon > 0$  існує натуральне число  $n_0$  таке, що  $a_n < \varepsilon$  при будь-якому  $n > n_0$  справедлива нерівність  $|S_{n+p} - S_n| \leq \varepsilon$ . За критерієм Коші даний ряд збіжний.

**Наслідок.** Абсолютна похибка, яка одержується від заміни суми знакозмінного ряду (7) його  $n$ -ю частинною сумою, не перевищує абсолютної величини першого з відкинутих членів ряду.

**Приклад 4.** Ряд  $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \dots$  за ознакою Лейбніца буде збіжним, оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 0$  і  $\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \geq \frac{(-1)^{(n+1)-1}}{(n+1)^2}$ .

### Властивості абсолютно збіжних рядів

**Теорема 3.** Якщо ряд збіжний абсолютно, то ряд, одержаний з нього будь-якою перестановкою членів, також абсолютно збіжний і має ту саму суму.

**Зауваження:** ця теорема не має місця у випадку умовно збіжних рядів.

**Теорема 4 (Рімана).** Якщо ряд збіжний умовно, то в результаті перестановки його членів можна одержати ряд, який має наперед задану суму, а також розбіжний ряд.

**Теорема 5.** Якщо абсолютно збіжні ряди  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ , та  $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$  мають відповідно суми  $S$  і  $\sigma$ , то ряд, складений з усіх добутків вигляду  $a_i b_k$  ( $i, k = 1, 2, 3, \dots$ ), занумерованих у будь-якому порядку, також абсолютно збіжний і має суму  $S\sigma$ .

**Приклад 5.** Дослідимо на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ . Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Функція  $f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$  невід'ємна та незростаюча на проміжку  $[1, +\infty)$ . Дослідимо на збіжність невластий інтеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = -2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b e^{-\sqrt{x}} d(-\sqrt{x}) = -2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( e^{-\sqrt{x}} \Big|_1^b \right) = \\ &= -2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{e^{\sqrt{b}}} - \frac{1}{e^{\sqrt{1}}} \right) = -2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{b}}} + 2 \cdot \frac{1}{e} = \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Оскільки інтеграл збіжний, то за інтегральною ознакою Коші буде збіжним і даний ряд.

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 37

1. Сформулюйте і доведіть інтегральну ознаку збіжності.
2. Дослідіть на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ .
3. Який ряд називають абсолютно збіжним?
4. Сформулюйте достатню умову абсолютної збіжності ряду.
5. Сформулюйте теорему про можливість подання абсолютно збіжного ряду у вигляді різниці збіжних додатних рядів.
6. Як досліджують ряди на абсолютну та умовну збіжність?
7. Який ряд називається знакозмінним?
8. Сформулюйте ознаку Лейбніца.

### Лекція 38. Функціональні ряди. Збіжність і рівномірна збіжність функціонального ряду. Ознака Вейєрштрасса

**Мета:** Ознайомити з поняттям функціонального ряду і області його збіжності; рівномірної збіжності функціонального ряду; властивостями рівномірно збіжних рядів.

#### План

1. Поняття функціонального ряду і області його збіжності. Поняття рівномірної збіжності функціонального ряду. Властивості рівномірно збіжних рядів
2. Ознака Вейєрштрасса
3. Властивості рівномірно збіжних рядів

**Поняття функціонального ряду і області його збіжності. Поняття рівномірної збіжності функціонального ряду. Властивості рівномірно збіжних рядів**

Нехай маємо деяку послідовність функцій  $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$ , що визначені на деякій множині  $E \in \mathbb{R}$ . Тоді вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (1)$$

називають **функціональним рядом**. При цьому функцію  $f_n(x)$  називають

загальним членом ряду.

Якщо взяти довільне значення  $x_0$  аргументу  $x$  і підставити його у ряд (1), то одержимо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \dots + f_n(x_0) + \dots \quad (2)$$

Функціональний ряд (1) називають **збіжним в точці**  $x_0 \in E$ , якщо збіжний відповідний числовий ряд (2).

Множина тих значень аргументу  $x$ , для яких функціональний ряд (1) збіжний, називається **областю збіжності** цього ряду.

**Приклад 1.** Областю збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots$$

є інтервал  $(-1; 1)$ .

**Приклад 2.** Областю збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n = 1! x + 2! x^2 + 3! x^3 + \dots + n! x^{n-1} + \dots$$

є тільки одна точка  $x = 0$ .

**Приклад 3.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{|x|}}{n} = \frac{e^{|x|}}{1} + \frac{e^{|x|}}{2} + \frac{e^{|x|}}{3} + \dots + \frac{e^{|x|}}{n} + \dots$  розбіжний в усіх

точках числової прямої, бо  $\frac{e^{|x|}}{n} \geq \frac{1}{n}$  при будь-якому  $x$ , а гармонічний ряд – розбіжний.

Для дослідження на збіжність функціональних рядів можна використати ознаки збіжності числових рядів.

**Приклад 4.** Дослідимо на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера до ряду модулів його членів, маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

для довільного  $x$ . Це означає, що областю збіжності даного ряду є вся числова вісь.

Нехай областю збіжності функціонального ряду (1) є деяка множина

точок  $E$  ( $x \in E$ ). Тоді сума цього ряду  $S$  є функцією від  $x$ ,  $S=S(x)$ , областю існування якої є множина  $E$ .

Суму  $n$  перших членів ряду (1) називають  **$n$ -ю частинною сумою**, тобто

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x). \quad (3)$$

**Залишком ряду** (1) називається ряд

$$r_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+k}(x) + \dots, \quad (4)$$

причому  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ .

**Означення.** Функціональний ряд (1) називають **збіжним на множині  $E$** , якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  і для кожного  $x \in E$  існує натуральне число  $N(\varepsilon, x)$  таке, що для всіх  $n > N(\varepsilon, x)$  справедлива нерівність

$$|r_n(x)| < \varepsilon. \quad (5)$$

Функціональний ряд (1) називають **рівномірно збіжним на множині  $E$** , якщо для всіх точок  $x \in E$  і для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує натуральне число  $N(\varepsilon)$  таке, що при  $n > N(\varepsilon)$  виконується нерівність (5).

**Теорема (ознака Вейєштрасса, достатня умова рівномірної збіжності функціонального ряду).** Якщо на множині  $E$  члени функціонального ряду (1) за модулем не перевищують відповідні члени збіжного числового додатного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (6)$$

то функціональний ряд (1) на множині  $E$  збіжний рівномірно.

**Приклад 5.** Функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^{n-1}} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{2^{n-1}} + \dots$$

збіжний рівномірно для всіх  $x \in \mathbb{R}$ . Дійсно, для всіх  $x \in \mathbb{R}$  члени даного функціонального ряду задовольняють нерівність

$$\left| \frac{\sin nx}{2^{n-1}} \right| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Складемо додатний числовий ряд  $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2^{N-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{N-1}} + \dots$  Цей

ряд збіжний як геометрична прогресія, знаменник якої  $q = \frac{1}{2} < 1$ . Тому, згідно з ознакою Вейєштрасса, даний ряд збіжний рівномірно на всій числовій осі.

## Властивості рівномірно збіжних рядів

1. Якщо члени функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

неперервні на відрізку  $[a; b]$  і ряд збіжний рівномірно на ньому, то сума даного функціонального ряду є неперервною на відрізку  $[a; b]$

2. Рівномірно збіжний на відрізку  $[a; b]$  функціональний ряд (1), складений з неперервних функцій, можна на цьому відрізку почленно інтегрувати, тобто має місце рівність

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

3. Якщо члени ряду (1) є функції, неперервні на відрізку  $[a; b]$  разом з похідними першого порядку  $f'_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x) + \dots$$

на відрізку  $[a; b]$  рівномірно збіжний, а ряд (1) збіжний на відрізку  $[a; b]$ , то сума даного ряду є функція, диференційовна на цьому відрізку і похідна від неї дорівнює

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x) + \dots$$

## Питання та завдання для самоконтролю до лекції 38

1. Який ряд називається функціональним?
2. Що означає збіжність функціонального ряду?
3. Що таке область збіжності функціонального ряду?
4. Як визначається сума збіжного функціонального ряду?
5. Дайте означення рівномірної збіжності функціонального ряду.
6. Сформулюйте ознаку Вейєштрасса рівномірної збіжності функціональних рядів.
7. Чи є рівномірна збіжність функціонального ряду необхідною умовою для неперервності його суми?

## Лекція 39. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Властивості степеневих рядів

**Мета:** Ознайомити з степеневими рядами як окремим випадком функціональних рядів. Навести поняття радіусу збіжності степеневих рядів

1. Поняття степеневих рядів.
2. Теорема Абеля
3. Властивості суми степеневих рядів

### Степеневі ряди. Теорема Абеля

**Означення.** Степеневим рядом називаються функціональний ряд виду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad (7)$$

де  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  – дійсні числа, які називаються коефіцієнтами степеневих рядів,  $x_0$  – довільне фіксоване дійсне число.

Вважають, що функція  $f(x)$ , визначена в проміжку  $(x_0 - R, x_0 + R)$ , розвивається на ньому у степеневий ряд (7), якщо цей ряд збіжний на даному проміжку і для всіх  $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$  його сума дорівнює  $f(x)$ .

Степеневі ряди – зручний засіб для знаходження значень тих функцій, які розвиваються в такі ряди, що частинні їх суми є алгебраїчними многочленами, значення яких у довільній точці легко обчислити.

Якщо в ряді (7) прийняти  $x_0 = 0$ , то дістанемо степеневий ряд виду

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n. \quad (8)$$

Оскільки степеневий ряд (7) підстановкою  $z = x - x_0$  зводиться до степеневих рядів (8), то надалі розглядатимемо тільки ряди виду (8).

**Приклад 1.** Скористаємось ознакою Д'Аламбера і визначимо область збіжності степеневих рядів  $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|x| = +\infty$  при

довільному  $x \neq 0$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n} = 0$  в точці  $x=0$ . Таким чином, даний ряд збіжний лише в одній точці  $x = 0$ .

**Приклад 2.** Степеневий ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  збіжний на всій числовій осі  $Ox$ ,

оскільки за ознакою Д'Аламбера,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!|x|^{n+1}}{(n+1)!|x|^n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$  для будь-яких

значень аргументу  $x$ .

**Теорема (теорема Абеля)** Якщо степеневий ряд (8) збіжний в точці  $x_0 \neq 0$ , то він абсолютно збіжний при всіх  $x$ , які задовольняють умову  $|x| < |x_0|$ . Якщо степеневий ряд (8) розбіжний в деякій точці  $x_1$ , то він розбіжний в усіх точках  $x$  числової осі, що задовольняють умову  $|x| > |x_1|$ .

**Геометричний зміст теореми Абеля** – збіжність ряду (8) в точці  $x_0$  тягне за собою його абсолютну збіжність в усіх точках  $x$ , більш близьких до точки  $0$ .

Розглянемо степеневий ряд (8). Можливі такі три випадки:

- 1) всі додатні числа є точками збіжності;
- 2) всі додатні числа є точками розбіжності;
- 3) існують додатні точки збіжності і додатні точки розбіжності.

У першому випадку, за теоремою Абеля, степеневий ряд (8) збіжний абсолютно для всіх  $x$ , бо для кожного дійсного числа  $x$  знайдеться додатне число  $a$  таке, що  $a > |x|$ . Отже, областю збіжності є вся числова вісь.

У другому випадку степеневий ряд (8) розбіжний для всіх значень  $x \neq 0$ , бо для кожного  $x \neq 0$  знайдеться додатне число  $a$  таке, що  $a < |x|$ . Отже, область збіжності вироджується в точку  $x = 0$ .

У третьому випадку позначимо через  $E$  множину додатних точок збіжності і нехай число  $R = \sup E$ . Оскільки правіше  $R$  знаходяться тільки точки розбіжності, то при  $|x| > R$  ряд (8) розбіжний. Якщо  $|x| < R$ , то, за означенням числа  $R$ , знайдеться точка  $x_0$ , в якій ряд збіжний і  $|x| < |x_0| < R$ . За теоремою Абеля ряд (8) абсолютно збіжний.

Таким чином, всередині інтервалу  $(-R; R)$  з центром у точці  $x = 0$  ряд (8) збіжний (абсолютно), поза цим інтервалом ряд (8) розбіжний. При цьому інтервал  $(-R; R)$  називають **інтервалом збіжності**, а число  $R$  – **радіусом збіжності** степеневого ряду.

У першому і другому випадках доцільно вважати відповідно  $R = \infty$  і  $R = 0$ .

### Зауваження.

1. Всередині інтервалу збіжності степеневий ряд збіжний абсолютно. Тому відшукування радіуса збіжності ряду (8) зводиться до відшукування його радіуса абсолютної збіжності, тобто радіуса збіжності ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ .

2. Радіус збіжності степеневого ряду (8) визначається за формулами

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{або} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \quad (9)$$

якщо, починаючи з деякого  $n \geq N$ , всі  $a_n \neq 0$ . Формули (9) легко одержати, скориставшись відповідно ознакою Д'Аламбера або радикальною ознакою Коші.

3. Для знаходження області збіжності степеневому ряду, окрім визначення інтервалу збіжності, потрібно ще дослідити збіжність ряду на кінцях цього інтервалу, тобто підставити в ряд значення  $x = -R$ ,  $x = R$  і дослідити збіжність відповідних числових рядів.

**Приклад 3.** Знайдемо інтервал збіжності степеневому ряду

$$\frac{x}{10} + \frac{x^2}{200} + \frac{x^3}{3000} + \dots + \frac{x^n}{n \cdot 10^n} + \dots$$

Радіус збіжності знаходимо за першою з формул (9):  $a_n = \frac{1}{n \cdot 10^n}$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot 10^{n+1}}$ , тому

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 10^{n+1}}{n \cdot 10^n} = 10 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 10.$$

Отже, ряд збіжний для всіх значень  $x$ , що належать інтервалу  $(-10, 10)$ .

Дослідимо поведінку ряду на кінцях проміжку. Підставляючи в даний ряд замість  $x$  число 10, одержимо розбіжний гармонічний ряд  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

При  $x = -10$  одержуємо числовий знакозмінний ряд  $-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$ , який збіжний умовно. Таким чином, інтервалом збіжності даного степеневому ряду є пів- відрізок  $[-1; 10)$ .

**Приклад 4.** Дослідимо на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$ . Застосуємо ознаку Коші, прийнявши  $U_n = \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$ . Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|U_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-1|^{n+1}}{n} = \begin{cases} 0 & \text{при } |x-1| \leq 1, \\ \infty & \text{при } |x-1| > 1. \end{cases}$$

Відтак, ряд збіжний при  $|x-1| \leq 1$ , тобто на відрізку  $[0; 2]$ .

## Властивості суми степеневого ряду

**Теорема 1.** Степеневий ряд (7) збіжний рівномірно на кожному відрізку, що належить інтервалу збіжності.

**Зауваження.** На всьому інтервалі збіжності степеневий ряд може бути збіжний нерівномірно. Наприклад, ряд

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

на своєму інтервалі збіжності  $-1 < x < 1$  є збіжним нерівномірно, бо нерівність

$|S(x) - S_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| < \varepsilon$  не може виконуватися для  $-1 < x < 1$  при жодному

сталому  $N$  (адже  $\frac{x^{n+1}}{1-x} \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 1$ ).

**Теорема 2.** Сума степеневого ряду (7) всередині інтервалу збіжності є функція неперервна.

**Теорема 3.** Степеневий ряд (7) можна почленно інтегрувати на кожному відрізку  $[a; b]$ , що належить інтервалу збіжності  $(-R; R)$ :

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b a_0 dx + \int_a^b a_1 x dx + \int_a^b a_2 x^2 dx + \dots + \int_a^b a_n x^n dx + \dots,$$

зокрема

$$\int_0^x S(x) dx = \int_0^x a_0 dx + \int_0^x a_1 x dx + \int_0^x a_2 x^2 dx + \dots + \int_0^x a_n x^n dx + \dots$$

для кожного  $x_0 \in (-R; R)$ .

**Зауваження.** Можна показати, що теорема 3 залишається справедливою і у випадку, коли числа  $a$  і  $b$  (обидва чи одне з них) збігаються з кінцями інтервалу збіжності, якщо тільки ряд (7) збіжний у відповідних кінцях.

**Теорема 4.** Степеневий ряд (7) можна диференціювати почленно у внутрішніх точках його інтервалу збіжності, тобто якщо

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

то

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots$$

при  $-R < x < R$ .

**Зауваження.** Степеневий ряд (7) в межах інтервалу збіжності можна диференціювати почленно довільне число раз. При цьому радіуси збіжності всіх рядів, одержаних почленным диференціюванням даного ряду, збігаються з радіусом збіжності вихідного ряду.

### Приклад 5. Знайдемо суму ряду

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

При  $|x| < 1$  даний ряд збіжний. Отже, його можна почленно диференціювати в середині інтервалу збіжності. Позначивши його суму через  $S(x)$ , маємо

$$S'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n-2} + \dots$$

Оскільки  $|x| < 1$ , то одержаний ряд похідних як геометрична прогресія із знаменником  $q = x^2$  має суму  $S'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ . Проінтегрувавши ряд

$$S'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n-2} + \dots = \frac{1}{1-x^2}$$

знайдемо його суму:

$$S(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots = \int_0^x \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|, \quad (|x| < 1).$$

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 39

1. Який ряд називають степеневим? Сформулюйте та доведіть теорему Абеля.
2. Охарактеризуйте геометричний зміст теореми Абеля.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про інтегрування степеневого ряду.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про можливість диференціювання степеневого ряду.
5. Що називають радіусом збіжності степеневого ряду?
6. Як визначають радіус збіжності степеневого ряду? Як визначають область збіжності степеневого ряду?

### Лекція 40. Формула і ряд Тейлора

**Мета:** Нагадати поняття ряду Тейлора. Вивести залишкові члени в формі Маклорена, Пеано. Навчити розкладати функції в ряд Тейлора

#### План

1. Ряд Тейлора і його залишкові члени
2. Умови розкладу функції в ряд Тейлора
3. Розвинення елементарних функцій в ряд Тейлора

### Ряд Тейлора і його залишкові члени

Нехай функція  $f(x)$  має неперервну похідну в деякому околі точки  $x_0$ . Тоді за формулою Ньютона - Лейбніца

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

Якщо функція  $f(x)$  має другу неперервну похідну  $f''(x)$ , то за формулою інтегрування частинами

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x f'(t) dt &= - \int_{x_0}^x f'(t) d(x-t) = -f'(t)(x-t) \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x f''(t) d(x-t) = \\ &= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x f''(t) d(x-t). \end{aligned}$$

Отже,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x f''(t)(x-t) dt.$$

Далі, якщо  $f(x)$  має третю неперервну похідну  $f'''(x)$ , то

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x f''(t)(x-t) dt &= \int_{x_0}^x f''(t) d\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right) = -\frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t) \Big|_{x_0}^x + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^x f'''(t) (x-t)^2 dt = f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x f'''(t) (x-t)^2 dt \end{aligned}$$

і

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x f'''(t) (x-t)^2 dt.$$

Взагалі, якщо  $f(x)$  має  $(n+1)$ -у неперервну похідну  $f^{(n+1)}(x)$ , то

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \\ &+ \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \end{aligned}$$

Згідно з узагальненою теоремою про середнє, застосованою до інтеграла

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt,$$

існує число  $c, x_0 < c < x$  таке, що

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(c) \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

Таким чином, має місце теорема.

**Теорема 1.** Якщо функція  $f(x)$  має неперервну похідну  $(n+1)$ -го

порядку в деякому околі точки  $x_0$ , то для кожного  $x$  цього околу існує точка  $c, x_0 < c < x$  така, що

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Нехай функція  $f(x)$  має похідні будь-яких порядків в деякому околі точки  $x_0$ . Тоді степеневий ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

називають **рядом Тейлора функції  $f(x)$  в точці  $x_0$** .

Для подальшого достатньо буде знайти ряд Тейлора функції  $f(x)$  в точці  $x_0 = 0$ , такий ряд називають **рядом Маклорена**:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

### Умови розкладу функції в ряд Тейлора

**Теорема 2.** Якщо функція  $f(x)$  має похідні будь-яких порядків на відрізку  $[-r; r]$ ,  $r > 0$ , то на ньому рівність

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

виконується тоді і тільки тоді, коли залишковий член формули Тейлора

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

де  $0 < \theta < 1$ , прямує до нуля.

#### Доведення

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right].$$

Остання рівність, враховуючи (14), рівносильна умові

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0.$$

**Наслідок.** Якщо функція  $f(x)$  має похідні будь-яких порядків на відрізку  $[-r; r]$  і всі вони обмежені на ньому  $|f^{(n)}(x)| \leq K$ , то на відрізку  $[-r; r]$  функція  $f(x)$  розвивається в степеневий ряд:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

**Зауваження.** Якщо функція розкладається в степеневий ряд, то він є рядом Тейлора.

### Розвинення елементарних функцій в ряд Тейлора

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$$

#### 1. Функція $f(x) = \ln(1+x)$ .

Знайдемо ряд Тейлора для цієї функції, виходячи з очевидної рівності

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots,$$

яка виконується при  $-1 < x < 1$  (бо праворуч маємо геометричну прогресію зі знаменником  $q = -x$ ). Використовуючи почленне інтегрування степеневого ряду, дістанемо

$$\int_0^x \frac{1}{1+x} dx = \int_0^x dx - \int_0^x x dx + \int_0^x x^2 dx - \int_0^x x^3 dx + \dots + (-1)^n \int_0^x x^n dx + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Шляхом безпосереднього дослідження залишкового члена формули Тейлора можна переконатися у справедливості останньої рівності і при  $x = 1$ . Отже,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

#### 2. Функція $f(x) = \operatorname{arctg} x$ .

Інтегруючи рівність

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots,$$

справедливу при  $|x| < 1$  (геометрична прогресія зі знаменником  $q = -x^2$ ), дістанемо

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^x dx - \int_0^x x^2 dx + \int_0^x x^4 dx - \int_0^x x^6 dx + \dots + (-1)^n \int_0^x x^{2n} dx + \dots$$

$$x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Можна довести, що остання рівність виконується при  $x = \pm 1$ . Отже,

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

**3.** Функція  $f(x) = (1+x)^\alpha$ , де  $\alpha$  – довільне дійсне число.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Можна довести що при  $\alpha > 0$  рівність (25) справджується на відрізку  $-1 \leq x \leq 1$ , при  $-1 < \alpha \leq 0$  – на півінтервалі  $-1 < x \leq 1$ , при  $\alpha \leq -1$  на інтервалі  $-1 < x < 1$ .

**Зауваження.** Якщо у ряді  $e^x$  формально замість  $x$  приймемо  $jx$ , де  $j^2 = -1$  (уявна одиниця), то матимемо

$$e^{jx} = \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots \right) + j \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right),$$

тобто  $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ .

Якщо в ряді  $e^x$  замість  $x$  формально прийняти  $-jx$ , то дістанемо таку рівність:  $e^{-jx} = \cos x - j \sin x$ .

А, отже, отримаємо формули

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j},$$

які називають **формулами Ейлера**.

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 40

1. Який ряд називають степеневим? Сформулюйте та доведіть теорему Абеля.
2. Охарактеризуйте геометричний зміст теореми Абеля.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про інтегрування степеневого ряду.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про можливість диференціювання степеневого ряду.
5. Що називають радіусом збіжності степеневого ряду?
6. Як визначають радіус збіжності степеневого ряду? Як визначають область збіжності степеневого ряду?

## Лекція 41. Застосування степеневих рядів

**Мета:** Навчити використовувати степеневі ряди для наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів, інтегрування диференціальних рівнянь

### План

1. Наближене обчислення значень функцій
2. Обчислення визначених інтегралів
3. Інтегрування диференціальних рівнянь

### Наближене обчислення значень функцій

Нехай функція  $f(x)$  в деякому проміжку розвивається в степеневий ряд

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Тоді легко наближено обчислити значення функції  $f(x)$  шляхом заміни її скінченним числом перших членів цього розкладу.

Чим менше  $|x|$ , тим менше членів береться для обчислення  $f(x)$  з бажаною точністю. Якщо  $x$  дуже мале, то достатньо обмежитись тільки двома першими членами, відкинувши всі останні. Таким чином, дістаємо дуже просту формулу для  $f(x)$ , яка при малих  $|x|$  цілком може замінити часто досить складний точний вираз для  $f(x)$ .

### Обчислення значень тригонометричних функцій

Степеневі ряди (18) і (19) можна використати для обчислення значень тригонометричних функцій  $\sin x$  і  $\cos x$ . Оскільки ряди знакозмінні, то залишок ряду не перевищує за абсолютною величиною першого з відкинутих членів, відповідно:  $|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$  і  $|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ .

Користуючись формулами (30) і (31), можна підібрати найменше число  $n$  таке, щоб дістати значення  $\sin x$  і  $\cos x$  з наперед заданою точністю.

Відмітимо, що ряди (18) і (19) швидше збігаються при малих значеннях  $x > 0$ . Доцільно обчислювати за допомогою цих рядів значення синуса і косинуса для кутів від  $0^\circ$  до  $15^\circ$ . Значення ж цих функцій для кутів від  $15^\circ$  до  $45^\circ$  легко обчислити, якщо скористатись формулами:

$$\sin(30^\circ \pm x) = \frac{1}{2} \cos x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x, \quad \cos(30^\circ \pm x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \mp \frac{1}{2} \sin x.$$

А значення функцій  $\sin x$  та  $\cos x$  для кутів від  $45^\circ$  до  $90^\circ$  знаходяться за

допомогою формул зведення.

**Зауваження.** Для обчислення кути, виражені в градусах потрібно перевести в радіани.

**Приклад 1.** Обчислимо  $\sin 20^\circ$  з точністю до  $10^{-4}$ . Переводимо градусну міру в радіанну:  $\frac{2\pi}{360} 20 = \frac{\pi}{9}$ . Підставляючи в розклад (18), дістанемо

$$\sin \frac{\pi}{9} = -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^3 + \dots$$

Обмежившись виписаними членами, ми робимо помилку не більшу за

$$\frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 < \frac{1}{120} (0,3)^4 < 6 \cdot 10^{-5}.$$

Обчислюючи кожний доданок із п'ятьма знаками, дістанемо

$$\sin \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^3 = 0,34889 - 0,00708 = 0,34181.$$

### Обчислення логарифмів

Оскільки ряд (20) збіжний повільно, то застосовувати цей ряд для обчислення натуральних логарифмів нераціонально. Для обчислення логарифмів використовують інший ряд. Для степеневому ряду (20) замість  $x$  розглянемо  $-x$ , при цьому вважатимемо, що  $|x| < 1$ .

Маємо  $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$ . Віднімемо почленно від ряду  $\ln(1+x)$  ряд  $\ln(1-x)$  дістанемо степеневий ряд

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right), \quad |x| < 1.$$

Нехай  $x = \frac{1}{2m+1}$ , де  $m$  – натуральне число. Тоді  $\frac{1+x}{1-x} = \frac{m+1}{m}$ .

Тому

$$\ln \frac{m+1}{m} = 2 \left[ \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{3(2m+1)^3} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}} + \dots \right]$$

або

$$\ln(m+1) = \ln m + 2 \left[ \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{3(2m+1)^3} + \frac{1}{5(2m+1)^5} + \dots \right].$$

Цей ряд і використовується для обчислення логарифмів натуральних чисел. Зазначимо, що ця наближена формула дає похибку

$$\begin{aligned}
& 2 \left[ \frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3)(2m+1)^{2n+3}} + \dots \right] < \\
& < \frac{2}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}} \left[ 1 + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)(2m+1)^4} + \dots \right] = \\
& = \frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(2m+1)^2}} = \frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n-1} 2m(2m+2)} < \\
& < \frac{1}{(2n+1)m(2m+1)^{2n}}.
\end{aligned}$$

**Приклад 2.** Обчислимо  $\ln 3$ , взявши  $n = 3$ .

$$\begin{aligned}
\ln 3 &= \ln 2 + 2 \left[ \frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} \right] = \\
&= 2 \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} \right] + 2 \left[ \frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} \right] \approx 1,09546.
\end{aligned}$$

### Наближене обчислення коренів

Для обчислення коренів застосовують біномний ряд.

**Приклад 3.** Обчислимо  $\sqrt[3]{33}$  з точністю до  $10^{-3}$ .

Запишемо  $\sqrt[3]{33}$  так:  $\sqrt[3]{33} = \sqrt[3]{27+6} = \sqrt[3]{27\left(1+\frac{2}{9}\right)} = 3 \cdot \sqrt[3]{1+\frac{2}{9}}$ . Використовуючи біномний ряд, дістанемо

$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{9}} = \left(1+\frac{2}{9}\right)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^3 - \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^4 + \dots$$

Одержаний числовий ряд знакозмінний, тому залишок ряду не перевищує за абсолютною величиною першого з відкинутих членів. Розглянемо п'ятий член цього ряду:

$$\frac{1}{4!} \cdot \frac{80 \cdot 2^4}{3^4 9^4} = \frac{160}{3^{14}} = \frac{160}{4743603} < 10^{-4}.$$

Отже,  $\sqrt[3]{1+\frac{2}{9}}$  з точністю до  $10^{-3}$  можна обчислити за допомогою наближеної формули

$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{9}} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^3 \approx 1,1248115$$

Звідси  $\sqrt[3]{33} = 3 \cdot \sqrt[3]{1+\frac{2}{9}} \approx 3,3744345$ .

## Обчислення визначених інтегралів

Якщо підінтегральна функція у визначеному інтегралі  $\int_a^b f(x)dx$  є неперервною на відрізку  $[a;b]$ , однак її первісна  $F(x)$  не є функцією елементарною, то формула Н'ютона-Лейбніца  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$  не дає змогу виконати обчислення цього інтеграла. Обчислити такі інтеграли можна, якщо функція  $f(x)$  розвивається в степеневий ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

рівномірно збіжний до  $f(x)$  на відрізку  $[a;b]$ . Використовуючи теорему про почленне інтегрування ряду, дістанемо

$$\int_a^b f(x)dx = a_0 \int_a^b dx + a_1 \int_a^b x dx + a_2 \int_a^b x^2 dx + a_3 \int_a^b x^3 dx + \dots + a_n \int_a^b x^n dx + \dots$$

Звідси

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (b^{n+1} - a^{n+1})}{n+1}.$$

Обчисливши з відповідною точністю суму ряду, знайдемо з тією ж точністю значення визначеного інтеграла.

**Приклад 4.** Обчислимо інтеграл  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  з точністю до  $10^{-5}$ .

Первісна функція для функції  $\frac{\sin x}{x}$  не є елементарною. Оскільки для всіх  $x \in (-\infty; +\infty)$  має місце рівність  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ , то для цих же  $x$  правильна і рівність  $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$ ,

На відрізку  $[0;1]$  цей ряд збіжний рівномірно, тому

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{x^2}{3!} dx + \int_0^1 \frac{x^4}{5!} dx - \int_0^1 \frac{x^6}{7!} dx + \dots = \\ &= \left( x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \dots \end{aligned}$$

Оскільки одержаний числовий ряд знакозмінний, то залишок ряду не перевищує за абсолютною величиною першого з відкинутих членів. Розглянемо

четвертий член цього ряду:

$$\frac{1}{7 \cdot 7!} = 2,834 \cdot 10^{-5} < 0,0001.$$

Отже, з точністю до  $10^{-4}$  одержуємо

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \approx 0,98932,$$

причому перші чотири цифри точні.

### Інтегрування диференціальних рівнянь

Нехай потрібно знайти розв'язок диференціального рівняння другого порядку

$$y'' = F(x, y, y'),$$

що задовольняє початкові умови

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0.$$

Припустимо, що розв'язок  $y = f(x)$  існує і може бути поданий у вигляді ряду Тейлора

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Для знаходження коефіцієнтів ряду використаємо диференціальне рівняння і початкові умови:

$$f(0) = y_0, \quad f'(0) = y'_0; \quad f''(0) = y''(0) = F(0, y_0, y'_0).$$

Диференціюючи обидві частини рівняння за змінною  $x$  маємо:

$$y'' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y') \cdot y' + F'_{y'}(x, y, y') \cdot y'',$$

підставляючи значення  $x = 0, y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$  в праву частину рівності, знайдемо  $f'''(0) = y'''(0)$ . Диференціюючи співвідношення і далі, знайдемо  $f^{IV}(0) = y^{IV}(0)$  і т. д.

Знайдені значення похідних підставляємо в ряд. Для тих значень  $x$ , для яких цей ряд збіжний, це і буде розв'язок рівняння.

**Приклад 5.** Знайдемо чотири перших члени розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння  $y'' - (1 + x^2)y = 0$  за початкових умов  $y(0) = -2, y'(0) = 2$ . Підставивши в рівняння початкові умови, одержимо  $y''(0) = 1 \cdot (-2) = -2$ . Диференціюючи початкове рівняння, послідовно знаходимо:

$$y''' = 2xy + (1 + x^2)y' \quad y'''(0) = 2,$$

$$y^{IV} = 2y + 2xy' + 2xy' + (1 + x^2)y'' = 2y + 4xy' + (1 + x^2)y'', \quad y^{IV}(0) = -6.$$

Підставляючи знайдені значення похідних в ряд, одержимо

$$y(x) = -2 + 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

Оскільки нам потрібні лише перші чотири члени розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння, то

$$y(x) \approx -2 + 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

**Зауваження.** Початкові умови, звичайно, можна замінити умовами вигляду  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ , де  $x_0, y_0, y'_0$  – дані числа. При цьому ряд для розв'язку буде вже не за степенями  $x$ , а за степенями різниці  $x - x_0$ .

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 41

1. Який ряд називається рядом Тейлора?
2. Які умови повинна задовольняти функція, щоб для неї можна було скласти ряд Тейлора?
3. Як розкласти в ряд Маклорена функцію  $\arctg x$ ?
4. Як розкласти в ряд Маклорена функцію  $(1 + x)^\alpha$ ?

### Лекція 42. Ряди Фур'є

**Мета:** Ознайомити з поняттям ортогональної системи функцій. Дати визначення ряду Фур'є. Навчити розкладати функції в ряд Фур'є

#### План

1. Ортогональна система функцій. Ряд Фур'є
2. Тригонометричні ряди Фур'є
3. Приклади розвинення функцій в ряди Фур'є

#### Ортогональна система функцій. Ряд Фур'є

Нехай на відрізку  $[a; b]$  задано дві інтегровні функції  $f(x)$  і  $g(x)$ .

**Означення.** Функції  $f(x)$  і  $g(x)$  називають **ортогональними на відрізку**  $[a; b]$ , якщо

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

**Приклад 1.** Функції  $\sin x$  і  $\cos x$  ортогональні на відрізку  $[-\pi; \pi]$ , оскільки

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

**Приклад 2.** Нехай  $f(x)$  є непарна функція, а  $g(x)$  – парна. Такі функції на відрізку  $[-a; a]$ , де  $a$  – довільне число, ортогональні.

**Означення.** Скінченну чи нескінченну **систему (множину) функцій**  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$  називають **ортогональною** на відрізку  $[a, b]$ , якщо будь-які дві різні функції цієї системи ортогональні на цьому відрізку, тобто

$$\int_a^b f_k(x) \cdot f_j(x) dx = 0, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, 2, 3 \dots$$

**Приклад 3.** Система функцій

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (1)$$

ортогональна на відрізку  $[-\pi; \pi]$ .

Дійсно, обчислимо інтеграли:

$$1. \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$2. \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$3. \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos lx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(k+l)x + \sin(k-l)x] dx = \\ = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k+l} \cos(k+l)x + \frac{1}{k-l} \cos(k-l)x \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad k \neq l.$$

$$4. \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin lx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k-l)x + \cos(k+l)x] dx = \\ = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k-l} \sin(k-l)x - \frac{1}{k+l} \sin(k+l)x \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad k \neq l.$$

$$5. \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos kx dx = \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx d(\sin kx) = \frac{1}{2k} [\sin^2 kx] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$6. \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos lx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+l)x + \cos(k-l)x] dx = \\ = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k+l} \sin(k+l)x + \frac{1}{k-l} \cos(k-l)x \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad k \neq l.$$

Обчислимо ще такі інтеграли ( $k = 1, 2, \dots$ ):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx) dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{1}{2k} \sin 2kx \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx) dx = \frac{1}{2} \left[ x + \frac{1}{2k} \sin 2kx \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Очевидно, що функції які входять в тригонометричну систему (1), є періодичними із найменшим періодом  $2\pi$ . Нагадаємо основні **властивості періодичних функцій**.

1. Якщо  $T$  – період функції  $f(x)$ , то  $f(x) = f(x + T) = f(x + kT)$ , де  $k$  – будь-яке ціле число.

2. Сума, добуток і частка періодичних функцій є функція періодична.

3. Якщо  $f(x)$  періодична функція з періодом  $T$ , то функція  $f(ax)$  має період  $\frac{T}{a}$ .

4. Якщо  $T$  – період функції  $f(x)$ , то визначений інтеграл від неї на будь-якому відрізку довжини  $T$  має одне і те ж саме значення:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx.$$

Найпростішою, і в той же час важливою для застосувань, є періодична функція

$$y = A \sin(\omega t + \phi),$$

де  $A$ ,  $\omega$ ,  $\phi$  – сталі. Цю функцію називають **гармонікою з амплітудою  $|A|$ , частотою  $\omega$  і початковою фазою  $\phi$** .

Користуючись відомою формулою тригонометрії, можемо записати:

$$A \sin(\omega t + \phi) = A(\cos \omega t \sin \phi + \sin \omega t \cos \phi).$$

Нехай

$$a = A \sin \phi, \quad b = A \cos \phi. \quad (2)$$

Впевнімося, що будь-яку гармоніку можна подати у вигляді

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (3)$$

і навпаки, будь-яка функція вигляду (3) є гармоніка. Щоб впевнитися в цьому, достатньо знайти  $A$  і  $\phi$  з рівнянь (2). При цьому одержимо

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin \phi = \frac{a}{A} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \phi = \frac{b}{A} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

звідки  $\phi$  легко знаходиться.

В подальшому для гармоніки будемо використовувати запис (3).

**Означення.** Функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (4)$$

де  $a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$  – сталі дійсні числа, називають **тригонометричним**

**рядом**, а числа  $a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$  – **коефіцієнтами** тригонометричного ряду.

Нехай тригонометричний ряд (4) рівномірно збіжний на відрізку  $[-\pi; \pi]$ . Позначимо його суму через  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (5)$$

Оскільки члени ряду (5) є функції неперервні, а сам ряд, за припущенням, рівномірно збіжний на відрізку  $[-\pi; \pi]$ , то його на цьому відрізку можна почленно інтегрувати, тобто

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right).$$

Інтеграл  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx$  і  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx$  (див. приклад 2), дорівнюють нулю. Тому

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi a_0.$$

Звідси знаходимо

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (6)$$

Помножимо тепер ліву і праву частини рівності (5) на  $\cos nx$ . Дістанемо такий функціональний ряд

$$f(x) \cos nx = \frac{a_0}{2} \cos nx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \cos nx.$$

Можна довести, що цей ряд рівномірно збіжний на відрізку  $[-\pi; \pi]$ , якщо на цьому відрізку рівномірно збіжний ряд (5). Тоді, інтегруючи почленно попередню рівність, матимемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nxdx \right).$$

У правій частині цієї рівності всі інтеграли дорівнюють нулю (див. приклад 2), окрім інтеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx = \pi.$$

Тому маємо  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \pi a_n$  звідки

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Об'єднаємо формули (6) і (7). Матимемо

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Помноживши обидві частини рівності (5) на  $\sin nx$  і проінтегрувавши в межах від  $-\pi$  до  $\pi$ , знайдемо

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Формули (8) і (9) називають **формулами Ейлера - Фур'є**, а самі числа  $a_n$ ,  $b_n$ , які визначаються цими формулами, називають коефіцієнтами Фур'є функції  $f(x)$ .

Отже, якщо функція  $f(x)$  розвивається на відрізку  $[-\pi; \pi]$  в рівномірно збіжний тригонометричний ряд (5), то коефіцієнти цього ряду визначаються формулами Ейлера-Фур'є, тобто є коефіцієнтами Фур'є функції  $f(x)$ .

Нехай  $f(x)$  – довільна інтегровна на відрізку  $[-\pi; \pi]$  функція, тоді тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (10)$$

де  $a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$  – коефіцієнти Фур'є функції  $f(x)$ , називають **рядом Фур'є функції  $f(x)$** .

Отже, кожній інтегровній на відрізку  $[-\pi; \pi]$  функції  $f(x)$  відповідає свій ряд Фур'є. Оскільки про збіжність ряду (10) нічого не відомо, то замість знака  $=$  ставлять знак  $\sim$ , тобто записують

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (11)$$

**Теорема 1.** Якщо функція  $f(x)$  на відрізку  $[-\pi; \pi]$  розвивається в рівномірно збіжний тригонометричний ряд, то цей тригонометричний ряд єдиний і він є рядом Фур'є для функції  $f(x)$ .

### Зауваження.

1. Оскільки члени ряду Фур'є (11) є періодичні функції і мають спільний період  $2\pi$ , то сума цього ряду (якщо він збіжний) також буде періодичною функцією з періодом  $2\pi$ . Таким чином, аби ряд Фур'є функції  $f(x)$  був збіжним до цієї самої функції, необхідно, щоб  $f(x)$  була періодичною функцією з періодом  $2\pi$ , тобто  $f(x+2\pi) = f(x)$  для всіх  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

2. Якщо  $f(x)$  не є періодичною на деякому відрізку  $[a; b] \subset [-\pi; \pi]$ , то можна побудувати допоміжну інтегровану періодичну функцію  $F(x)$  з періодом  $2\pi$  таку, щоб всередині відрізка  $[a; b]$  вона збігалася з функцією  $f(x)$ . Тоді, якщо ряд Фур'є функції  $F(x)$  на відрізку  $[-\pi; \pi]$  збіжний до  $F(x)$ , то для  $x \in [a; b]$  він збіжний до  $f(x)$ .

3. Якщо неперіодична функція  $f(x)$  визначена на деякому відрізку  $[a; b] \subset [-\pi; \pi]$ , або навіть на  $(-\infty; +\infty)$ , то можна побудувати інтегровну функцію  $\varphi(x)$ , яка на відрізку  $[-\pi; \pi]$  є збігається з  $f(x)$  і має період  $2\pi$ . Якщо ряд Фур'є, побудований для  $\varphi(x)$ , збіжний до цієї функції, то на відрізку  $[-\pi; \pi]$  він зображає задану функцію  $f(x)$ .

Побудова періодичної з періодом  $2\pi$  функції  $\varphi(x)$ , яка дорівнює заданій функції  $f(x)$  на відрізку  $[-\pi; \pi]$  або на деякій частині його у випадку, коли  $f(x)$  визначена на відрізку  $[a; b] \subset [-\pi; \pi]$ , називається **періодичним продовженням функції  $f(x)$** .

Щоб періодичне продовження було однозначним і всюди визначеним, треба спочатку  $\varphi(x)$  задати на півінтервалі  $(-\pi; \pi]$  або  $[-\pi; \pi)$ . На кінцях відрізка  $[-\pi; \pi]$  за періодичне продовження функції  $f(x)$  вважають

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}.$$

**Відмінність між тригонометричними і степеневими рядами:** в степеневі ряди можна розвивати лише функції, які мають похідні всіх порядків, а в тригонометричний ряд розвивають будь-яку функцію.

**Означення.** Функцію  $f(x)$  називають **кусково-диференційовною** на відрізку  $[a; b]$ , якщо цей відрізок можна розбити скінченним числом точок  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  на інтервали  $(a; x_1), (x_1; x_2), \dots, (x_{n-1}; b)$  так, що всередині кожного інтервалу функція  $f(x)$  диференційовна, а на кінцях інтервалів і сама функція і її похідна першого порядку мають скінченні односторонні границі.

**Теорема (Діріхле, достатні умови подання функції рядом Фур'є)** Якщо функція  $f(x)$  періодична з періодом  $2\pi$  і кусково-диференційовна на відрізку  $[-\pi; \pi]$ , то її ряд Фур'є збіжний в кожній точці  $x_0$  і має суму

$$S_0 = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)). \quad (12)$$

Ця сума, очевидно, дорівнює  $f(x_0)$ , якщо  $f(x)$  в точці  $x_0$  неперервна.

**Приклад 3.** Розвинемо в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = x, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Функція є періодичною і на відрізку  $[-\pi; \pi]$  кусково-диференційовною, тобто вона задовольняє умови теореми Діріхле. Оскільки в кожній точці відрізка  $[-\pi; \pi]$  функція є неперервною, то її ряд Фур'є, згідно з рівністю (12), збіжний на цьому відрізку до функції  $f(x) = x$ :

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є за формулами Ейлера-Фур'є (8) і(9):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos k x dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos k x dx = \\ = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{k} x \sin k x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin k x dx \right] = \frac{1}{\pi k^2} \cos k x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin k x dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin k x dx = \\ = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{k} x \cos k x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos k x dx \right] = \\ = -\frac{2}{k} \cos k \pi + \frac{1}{\pi k^2} \sin k x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Відтак, одержуємо ряд

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{k} \sin k x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin k x$$

або

$$x = 2 \left[ \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2 x}{2} + \frac{\sin 3 x}{3} - \frac{\sin 4 x}{4} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{\sin k x}{k} + \dots \right].$$

**Приклад 4.** Ряд Фур'є періодичної функції

$$f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

Записується у вигляді (**самостійно отримати**):

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2} [(-1)^k - 1] \cos k x.$$

## Питання та завдання для самоконтролю до лекції 42

1. Які функції називаються ортогональними? Дайте означення ортогональної системи функцій.
2. Яка система функцій називається тригонометричною? Доведіть, що тригонометрична система функцій є ортогональною на відрізку .
3. Сформулюйте основні властивості періодичних функцій.
4. Наведіть означення тригонометричного ряду. Як визначаються коефіцієнти тригонометричного ряду?
5. Виведіть формули Ейлера-Фур'є. Що називається коефіцієнтами Фур'є?

6. Дайте означення ряду Фур'є. Сформулюйте теорему про існування ряду Фур'є.

7. Поясніть вислів: "Функція розвивається в ряд Фур'є"?

8. В чому полягає періодичне продовження функції.

9. Сформулюйте теорему Діріхле.

### Лекція 43. Ряди Фур'є для парних і непарних функцій. Узагальнені ряди Фур'є

**Мета:** Ознайомити з рядами Фур'є для парних і непарних функцій, рядами Фур'є для функції з довільним періодом  $2l$ , узагальненими рядами Фур'є

#### План

1. Ряди Фур'є для парних і непарних функцій
2. Ряд Фур'є для функції з довільним періодом  $2l$
3. Ряди Фур'є в комплексній формі
4. Узагальнені ряди Фур'є

#### Ряди Фур'є для парних і непарних функцій

З означення парної і непарної функцій випливає, що:

$$- \text{якщо } g(x) \text{ парна функція, то } \int_{-a}^a g(x) dx = 2 \int_0^a g(x) dx;$$

$$- \text{якщо } g(x) \text{ непарна функція, то } \int_{-a}^a g(x) dx = 0.$$

Справді,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a g(x) dx &= \int_{-a}^0 g(x) dx + \int_0^a g(x) dx = \int_0^a g(-x) dx + \int_0^a g(x) dx = \\ &= \int_0^a g(x) dx + \int_0^a g(x) dx = 2 \int_0^a g(x) dx, \end{aligned}$$

оскільки за означенням парної функції  $g(-x) = g(x)$ .

Аналогічно, якщо  $g(x)$  – непарна функція, то

$$\int_{-a}^a g(x) dx = \int_{-a}^0 g(-x) dx + \int_0^a g(x) dx = - \int_0^a g(x) dx + \int_0^a g(x) dx = 0.$$

**Зауваження.** Якщо функція  $f(x)$  парна, то функція  $f(x)\cos kx$  – парна функція, а  $f(x)\sin kx$  – непарна. Тому

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Відтак, ряд Фур'є парної функції має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx.$$

Якщо функція  $f(x)$  непарна, то функція  $f(x)\cos kx$  також непарна, а  $f(x)\sin kx$  – парна. Маємо:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

У цьому випадку ряд Фур'є такий:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

**Приклад 1.** Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = x^2 \quad \text{при} \quad -\pi < x \leq \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x).$$

Оскільки функція  $f(x)=x^2$  парна, то

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2,$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{x \cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \sin kx dx \right) = -\frac{4}{k\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = \\ &= \frac{4}{k\pi} \left( \frac{x \cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos kx dx \right) = \frac{4}{k\pi} \left( \frac{x \cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2} \right) \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{4}{k\pi} \cdot \frac{\pi}{k} \cos k\pi = (-1)^k \frac{4}{k^2} = \begin{cases} \frac{4}{m^2} & \text{при } m \text{ парному,} \\ -\frac{4}{m^2} & \text{при } m \text{ непарному} \end{cases} \end{aligned}$$

$$b_k=0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отже, ряд Фур'є даної функції такий

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots \right).$$

Оскільки, функція  $f(x)$  кусково-монотонна, обмежена і неперервна, то ця рівність виконується в усіх точках числової осі.

**Приклад 2.** Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \\ -1 & \text{при } \pi < x < 2\pi, \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

Обчислюючи коефіцієнти Фур'є даної функції, скористаємося відомою властивістю періодичної функції: якщо  $T$  - період функції  $f(x)$ , то визначений інтеграл від неї на будь-якому відрізку довжини  $T$  має одне і те ж саме значення

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx.$$

З врахуванням цієї властивості інтеграли на відрізку  $[0; 2\pi]$  можна замінити відповідними інтегралами на  $[-\pi; \pi]$ . Оскільки функція  $f(x)$  на відрізку  $[-\pi; \pi]$  (за винятком точки  $x = 0$ ) є непарною, то за формулами (3.17) маємо:

$$a_k = 0, k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (-1) \sin kx dx + \int_0^{\pi} \sin kx dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{\pi k} (\cos 0 - \cos k\pi). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k = 2m \\ \frac{4}{\pi k}, & \text{якщо } 2m + 1 \end{cases}$$

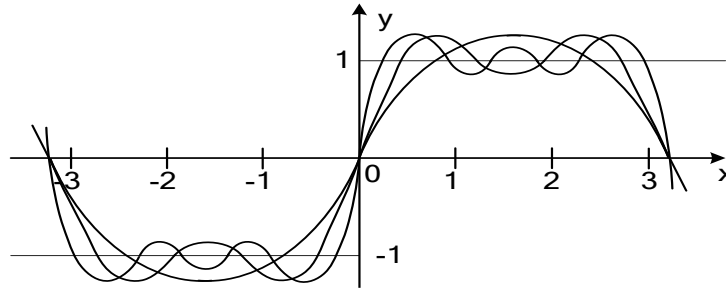
Таким чином, розвинення  $f(x)$  в ряд Фур'є таке

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right]$$

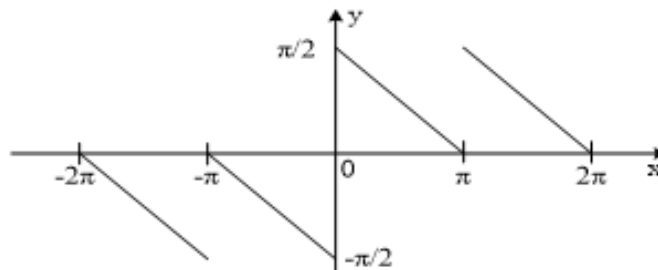
Зокрема, при  $x = \frac{\pi}{2}$  одержуємо  $\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

На рисунку зображено графіки кількох частинних сум ряду; з них бачимо,

що із збільшенням номера частинна сума все точніше збігається з  $f(x)$ .



**Приклад 3.** Розвинемо в ряд за синусами функцію  $y = \frac{\pi-x}{2}$  в інтервалі  $(0; \pi)$ . Оскільки функцію задано не на всьому відрізку  $[-\pi; \pi]$ , то потрібно побудувати її періодичне продовження. За умовою вимагається розвинути в ряд, що містив би лише синуси, тому продовжимо цю функцію непарним чином на всю числову вісь (див. рис.).



Тоді,

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin kx dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi-x}{k} \cos kx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos kx dx \right] = -\frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\pi}{k} + \frac{1}{k^2} \sin kx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{1}{k}.$$

Отже, для  $x \in (0; \pi]$  одержали

$$\frac{\pi-x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

### **Ряд Фур'є для функції з довільним періодом $2l$**

Розглянемо тепер функції, що мають довільний період  $T = 2l$ . Нехай функція  $f(x)$  періодична з періодом  $T = 2l$ , а  $\varphi(y)$  має період  $T=2\pi$ . Зробимо заміну змінної  $x = \frac{l}{\pi} y$ , причому  $\varphi(y) = f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$ , оскільки

$$\varphi(y+2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(y+2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}y + 2l\right) = f\left(\frac{l}{\pi}y\right) = \varphi(y).$$

Припустимо, що функція  $\phi(y)$  розвивається в ряд Фур'є

$$\phi(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k y + b_k \sin k y),$$

де  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(y) \cos k y dy$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(y) \sin k y dy$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Зробивши в ряді та інтегралах заміну змінної  $y = \frac{\pi}{l} x$ ,  $dy = \frac{\pi}{l} dx$ , дістанемо ряд Фур'є для функції  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{\pi k}{l} x + b_k \sin \frac{\pi k}{l} x),$$

де  $a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Зокрема, якщо періодична функція  $f(x)$  парна, то вона розвивається в ряд Фур'є тільки за косинусами

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k}{l} x,$$

при цьому

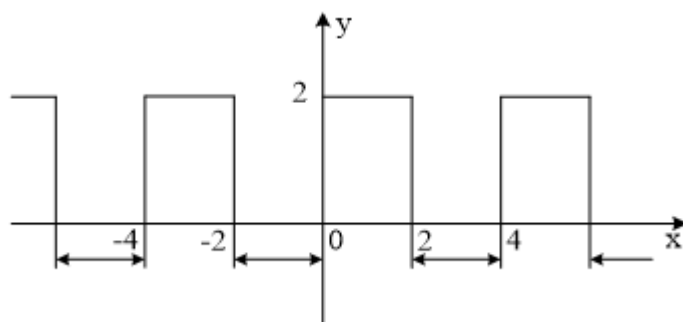
$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx, \quad b_k = 0;$$

якщо ж періодична функція  $f(x)$  непарна, то вона розвивається в ряд Фур'є тільки за синусами

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k}{l} x; \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi k}{l} dx, \quad a_k = 0.$$

**Приклад 4.** Знайдемо розвинення в ряд Фур'є періодичної функції з періодом 4:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -2 < x < 0, \\ 2 & \text{при } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$



Знаходимо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \left( \int_{-2}^0 (-1) dx + \int_0^2 2 dx \right) = \frac{1}{2} \left( -x \Big|_{-2}^0 + 2x \Big|_0^2 \right) = \frac{1}{2} (-2 + 4) = 1,$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{\pi k}{2} x dx = \frac{1}{2} \left( \int_{-2}^0 (-1) \cos \frac{\pi k}{2} x dx + \int_0^2 2 \cos \frac{\pi k}{2} x dx \right) = \\ &= \int_{-2}^0 \left( -\frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} x \Big|_{-2}^0 + \frac{4}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} x \Big|_0^2 \right) = 0, \end{aligned}$$

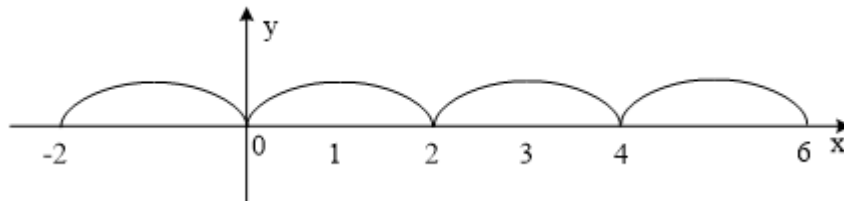
$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{\pi k}{2} x dx = \frac{1}{2} \left( \int_{-2}^0 (-1) \sin \frac{\pi k}{2} x dx + \int_0^2 2 \sin \frac{\pi k}{2} x dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} x \Big|_{-2}^0 - \frac{4}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} x \Big|_0^2 \right) = \frac{3}{k\pi} (1 - \cos k\pi) = \frac{3}{k\pi} (1 - (-1)^k). \end{aligned}$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд, одержимо

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} x.$$

**Приклад 5.** Розвинемо в ряд Фур'є періодичну функцію, яка задана на півперіоді  $[0; 2]$  рівнянням  $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$ . Розглянемо два найбільш важливих варіанти розвинення.

1) Довизначимо функцію  $f(x)$  на півінтервалі  $[-2; 0)$  парним чином (рис.).



Скориставшись формулами (3.23) та (3.24) при  $l = 2$  і парністю функції, одержимо

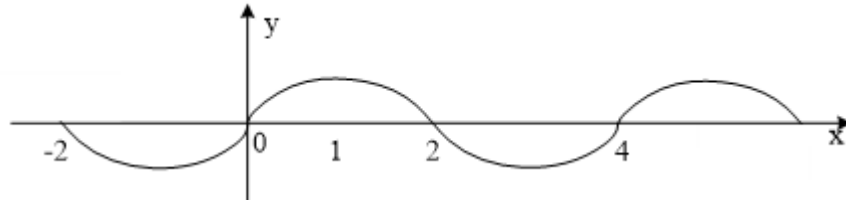
$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \int_0^2 \left( x - \frac{1}{2} x^2 \right) dx = \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{3},$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi k x}{2} dx = \int_0^2 \left( x - \frac{1}{2} x^2 \right) \cos \frac{\pi k x}{2} dx.$$

Двічі інтегруючи частинами, знаходимо  $b_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) \cos \frac{\pi kx}{2} dx = \left[ \begin{array}{l} u = x - \frac{1}{2}x^2 \quad dv = \cos \frac{\pi kx}{2} dx \\ du = (1-x)dx \quad v = \frac{2}{k\pi} \sin \frac{\pi kx}{2} \end{array} \right] = \\
&= \frac{2}{k\pi} \cdot \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) \sin \frac{\pi kx}{2} \Big|_0^2 - \frac{2}{k\pi} \int_0^2 (1-x) \sin \frac{\pi kx}{2} dx = -\frac{2}{k\pi} \int_0^2 (1-x) \sin \frac{\pi kx}{2} dx = \\
&= \left[ \begin{array}{l} u = 1-x \quad dv = \sin \frac{\pi kx}{2} dx \\ du = -dx \quad v = -\frac{2}{k\pi} \cos \frac{\pi kx}{2} \end{array} \right] = \frac{4}{k^2 \pi^2} (1-x) \cos \frac{\pi kx}{2} \Big|_0^2 + \frac{4}{k^2 \pi^2} \int_0^2 \cos \frac{\pi kx}{2} dx = \\
&= -\frac{4}{k^2 \pi^2} \cos k\pi - \frac{4}{k^2 \pi^2} + \frac{8}{k^3 \pi^3} \sin \frac{\pi kx}{2} \Big|_0^2 = -\frac{4}{k^2 \pi^2} [1 + (-1)^k].
\end{aligned}$$

2) Довизначимо функцію  $f(x)$  на півінтервалі  $[-2;0)$  непарним чином:



Тоді

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi kx}{2} dx = 0, \\
b_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi kx}{2} dx = \\
&= \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) \sin \frac{\pi kx}{2} dx = \left[ \begin{array}{l} u = x - \frac{1}{2}x^2 \quad dv = \sin \frac{\pi kx}{2} dx \\ du = (1-x)dx \quad v = \frac{2}{k\pi} \sin \frac{\pi kx}{2} \end{array} \right] = \\
&= \frac{2}{k\pi} \cdot \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) \cos \frac{\pi kx}{2} \Big|_0^2 + \frac{2}{k\pi} \int_0^2 (1-x) \cos \frac{\pi kx}{2} dx = \frac{2}{k\pi} \int_0^2 (1-x) \cos \frac{\pi kx}{2} dx = \\
&= \left[ \begin{array}{l} u = 1-x \quad dv = \cos \frac{\pi kx}{2} dx \\ du = -dx \quad v = \frac{2}{k\pi} \sin \frac{\pi kx}{2} \end{array} \right] = \frac{4}{k^2 \pi^2} (1-x) \sin \frac{\pi kx}{2} \Big|_0^2 + \frac{4}{k^2 \pi^2} \int_0^2 \sin \frac{\pi kx}{2} dx = \\
&= -\frac{8}{k^3 \pi^3} \cos \frac{\pi kx}{2} \Big|_0^2 = -\frac{8}{k^3 \pi^3} \cos \pi k + \frac{8}{k^3 \pi^3} = \frac{8}{k^3 \pi^3} [1 - (-1)^k].
\end{aligned}$$

Отже,

$$f(x) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k^3} \sin \frac{\pi k x}{2} = \frac{16}{\pi^3} \left( \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^3} \sin \frac{5\pi x}{2} + \dots \right).$$

**Зауваження.** В багатьох задачах потрібно розвинути в ряд Фур'є функцію не на відрізку  $[-l; l]$ , а на відрізку  $[0; 2l]$ . В цьому випадку в усіх формулах для обчислення коефіцієнтів Фур'є змінюються відповідні межі інтегрування:

$$a_k = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для будь-якого періоду  $T = 2l$  після введення величини

$$\omega_k = \frac{\pi}{l} k = \frac{2\pi}{T} k, \quad k = 1, 2, \dots$$

коефіцієнти можна записати так

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \omega_k x dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \text{ або } a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \omega_k x dx$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \omega_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots, \text{ або } b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \omega_k x dx.$$

**Приклад 6.** Розвинемо в ряд Фур'є періодичну функцію з періодом 2

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{при } 1 < x < 2. \end{cases}$$

$T = 2$ ,  $\omega = \pi$ . А, отже,

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 0 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + x \Big|_1^2 = \frac{3}{2},$$

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^2 f(x) \cos k\pi x dx = \int_0^1 x \cos k\pi x dx + \int_1^2 0 dx = \frac{x \sin k\pi x}{k\pi} \Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \sin k\pi x dx + \frac{\sin k\pi x}{k\pi} \Big|_1^2 = \\ &= \frac{\cos k\pi x}{k^2 \pi^2} \Big|_0^1 + \frac{1}{k\pi} (\sin 2k\pi - \sin k\pi) = \frac{\cos k\pi - 1}{k^2 \pi^2} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2 \pi^2}, \end{aligned}$$

$$b_k = \int_0^2 f(x) \sin k\pi x dx = \int_0^1 x \sin k\pi x dx + \int_1^2 0 dx = -\frac{x \cos k\pi x}{k\pi} \Big|_0^1 + \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \cos k\pi x dx - \frac{\sin k\pi x}{k\pi} \Big|_1^2 =$$

$$= -\frac{\cos k\pi}{k\pi} + \frac{\sin k\pi x}{k^2\pi^2} \Big|_0^1 - \frac{\cos 2k\pi}{k\pi} + \frac{\cos k\pi}{k\pi} = -\frac{1}{k\pi}.$$

Таким чином, одержуємо таке розвинення даної функції в ряд Фур'є:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2} \cos k\pi x - \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \right) = \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2} \cos \pi x - \frac{1}{\pi} \sin \pi x - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x - \frac{2}{9\pi^2} \cos 3\pi x - \frac{1}{3\pi} \sin \pi x - \dots \end{aligned}$$

### Комплексна форма ряду Фур'є функції

Скориставшись формулами Ейлера, ряд Фур'є можна записати в більш компактній формі. Справді, функції  $\cos kx$ ,  $\sin kx$  за формулами Ейлера можна записати так:

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{jkx} + e^{-jkx}), \quad \sin kx = \frac{1}{2j}(e^{jkx} - e^{-jkx}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Тоді, підставивши значення  $\cos kx$ ,  $\sin kx$  в ряд, одержимо

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2}(a_k - jb_k)e^{jkx} + \frac{1}{2}(a_k + jb_k)e^{-jkx} \right].$$

Введемо такі позначення

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k), \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k + jb_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Тоді ряд можна записати так:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkx}.$$

Це і є **комплексна форма ряду Фур'є функції  $f(x)$** . Користуючись формулами Ейлера-Фур'є, можна вивести такі формули для знаходження коефіцієнтів:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jkx} dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Якщо функція  $f(x)$  періодична з періодом  $2l$ , то ряд Фур'є в комплексній формі запишеться так

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{k\pi}{l}x}.$$

Коефіцієнти ряду  $c_k$  обчислюються за допомогою формул

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-j\frac{k\pi}{l}x} dx, \quad k = (0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Останні формули для будь-якого періоду  $T = 2l$  після введення величини

$\omega = \frac{\pi}{l} = \frac{2\pi}{T}$  можна записати у вигляді

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2k\pi}{T}x},$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-jk\omega x} dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-j\frac{2k\pi}{T}x} dx.$$

Для електротехніки і радіотехніки характерна така термінологія. Вирази  $e^{j\frac{k\pi}{l}x}$  називають **гармоніками**, числа  $\omega_k = \frac{k\pi}{l}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) називають **хвильовими числами** функції

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k x}.$$

Сукупність хвильових чисел називають **спектром**. Коефіцієнти  $c_k$  називають **комплексною амплітудою**. При побудові амплітудних спектрів обчислюють модуль комплексних чисел  $c_k$ , а при побудові фазового спектра – **аргументи**.

**Приклад 1.** Подати рядом Фур'є в комплексній формі функцію  $f(x)$  періоду  $2\pi$ , визначену таким чином

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0, \\ e^{-x}, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

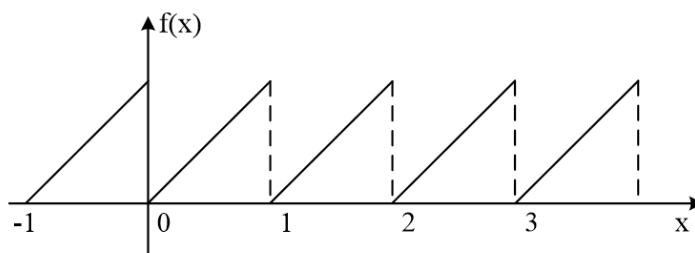
Коефіцієнти Фур'є в комплексній формі такі:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} e^{-jkx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-(1+jk)x} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{-(1+jk)x}}{1+jk} \Big|_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)^k e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \frac{1 - jk}{1 + k^2}.$$

Оскільки функція  $f(x)$  задовольняє умови розвинення в ряд Фур'є в усіх точках неперервності  $f(x)$ , то одержимо

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \frac{1 - jk}{1 + k^2} e^{jkx}.$$

**Приклад 2.** Розвинути в ряд Фур'є в комплексній формі періодичну функцію  $f(x)$ , яка задана графіком (див. рис.). Побудувати її амплітудний і фазовий спектри.



В нашому випадку  $T=1$  – період функції,  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$  – основна частота.

Скориставшись формулами для коефіцієнтів Фур'є, матимемо

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt = \int_0^1 t e^{-jk\omega t} dt = \left| \begin{array}{l} u=t \quad dv = e^{-jk\omega t} dt \\ du=dt \quad v = -\frac{1}{jk\omega} e^{-jk\omega t} \end{array} \right| = -\frac{1}{jk\omega} t e^{-jk\omega t} \Big|_0^1 + \frac{1}{jk\omega} \int_0^1 e^{-jk\omega t} dt =$$

$$= -\frac{1}{jk\omega} e^{-jk\omega} + \frac{1}{k^2 \omega^2} e^{-jk\omega} \Big|_0^1 = -\frac{1}{ik\omega} e^{-jk\omega} + \frac{1}{k^2 \omega^2} (e^{-jk\omega} - 1) = -\frac{1}{jk2\pi} = \frac{j}{2k\pi},$$

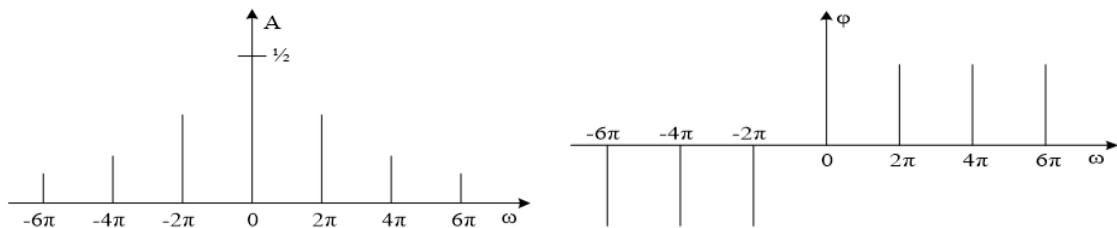
$k = \pm 1, \pm 2, \dots$  оскільки  $\omega = 2\pi$  і  $e^{-j2k\pi} = 1$ . Таким чином, розвинення даної функції в ряд Фур'є таке

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{j}{2k\pi} e^{jk\omega x}.$$

Для побудови амплітудного і фазового спектрів врахуємо, що  $A_0 = |c_0| = \frac{1}{2}$ ,

$$A_k = |c_k| = \frac{1}{2k\pi}, \quad \varphi_0 = \arg c_0 = 0, \quad \varphi_k = \arg c_k = \arg \frac{j}{2k\pi} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & k < 0, \end{cases} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Амплітудний і фазовий спектри мають вигляд наведених, відповідно, на рисунках нижче.



### Узагальнений ряд Фур'є

Нехай на відрізку  $[a; b]$  задано довільну (не обов'язково тригонометричну) ортогональну систему функцій  $\{\varphi_k(x)\}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), і на цьому відрізку задано деяку інтегровну функцію  $f(x)$ . Поставимо задачу: розвинути в ряд функцію  $f(x)$  за функціями  $\varphi_k(x)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Для цього припустимо, що  $f(x)$  є сумою рівномірно збіжного ряду

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x). \quad (*)$$

Припустимо, що функції  $\varphi_k(x)$  є інтегровними на відрізку  $[a, b]$ . Тоді,

помноживши обидві частини рівності (3.40) на функцію  $\varphi_m(x)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) і проінтегрувавши результат в межах від  $a$  до  $b$ , дістанемо

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = c_m \int_a^b \varphi_m^2(x)dx, \quad m = 0, 1, \dots$$

Нехай  $\int_a^b \varphi_m^2(x)dx = \lambda_m > 0$ , тоді

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx, \quad m = 0, 1, \dots \quad (**)$$

Легко бачити, що формули Ейлера-Фур'є, виведені для коефіцієнтів тригонометричного ряду Фур'є, є частинним випадком формул (\*\*).

Формули (\*\*) називають **узагальненими формулами Ейлера-Фур'є**, числа  $c_m$  називають **узагальненими коефіцієнтами Фур'є**, а функціональний ряд (\*) називають **узагальненим рядом Фур'є**. Щодо узагальненого ряду Фур'є, то можна стверджувати, що кожній інтегровній на відрізку  $[a, b]$  функції відповідає свій узагальнений ряд Фур'є

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

де  $c_k$  – узагальнені коефіцієнти Фур'є.

### Питання та завдання для самоконтролю до лекції 43

1. Який вигляд набуває ряд Фур'є для парної і непарної функцій? Доведіть відповідні формули.
2. Який вигляд має ряд Фур'є для функції з довільним періодом ? Виведіть відповідні формули.
3. Який вигляд набуває ряд Фур'є для парної і непарної функцій з довільним періодом ? Доведіть відповідні формули.
4. Виведіть формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є у випадку задання функції на відрізку.
5. Запишіть ряд Фур'є для функції  $f(x)$  періоду  $2\pi$  в комплексній формі.
6. Наведіть формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є в цьому випадку.
7. Який вигляд має комплексна форма ряду Фур'є для періодичної функції з довільним періодом  $T$ ? Наведіть відповідні формули для коефіцієнтів Фур'є.
8. Дайте означення гармоніки, хвильових чисел функції, спектра функції.
9. Що ми розуміємо під поняттями амплітудного і фазового спектрів?
10. Дайте поняття узагальненого ряду Фур'є. Запишіть узагальнені формули Ейлера-Фур'є.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алексеева І.В. Математика в технічному університеті : підручник / І.В.Алексеева, В.О.Гайдей, О.О.Диховичний, Л.Б.Федорова; за ред. О.І.Клесова; КПІ.ім. Ігоря Сікорського, – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – Т.1. – 496 с. <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/24338>
2. Алексеева І.В. Математика в технічному університеті : підручник / І.В.Алексеева, В.О.Гайдей, О.О.Диховичний, Л.Б.Федорова; за ред. О.І.Клесова; КПІ.ім. Ігоря Сікорського, – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – Т.2. – 504 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/30396>
3. Алексеева І.В. Математика в технічному університеті : підручник / І.В.Алексеева, В.О.Гайдей, О.О.Диховичний, Л.Б.Федорова; за ред. О.І.Клесова; КПІ.ім. Ігоря Сікорського, – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – Т.3. – 456 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/39003>
4. Алексеева І.В. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення: конспект лекцій / І. В. Алексеева, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова; КПІ.ім. Ігоря Сікорського, – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2013 – 108 с. <http://matan.kpi.ua/public/files/Konspekt%20Riady.%20FKZ.%20Operacijne%20chyslenia.pdf>
5. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : Игнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
6. Зайцев Є. П. Вища математика: інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних, звичайні диференціальні рівняння, ряди: навч. посіб. / Є. П. Зайцев. – Київ: Алерта, 2018. – 608 с.
7. Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. – Київ : Центр учбової літератури, 2017. – 594 с.
8. Костюк О. В. Практикум з курсу «Математичний аналіз». Диференціальне числення: навч.-метод. посіб. / Костюк О. В., Процай Н. Т., Галуза О. А., Голотайстрова Г. О., Тоніца О. В., Асландуков М. О., Гомозов Є. П., Мезерна М. В., Колбасін В. О. – Харків : Друкарня Мадрид, 2022. – 291 с.
9. Математика в сучасному технічному університеті: Практикум. Частина 4. Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / І. В. Алексеева, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний [та ін.]; НТУУ «КПІ». – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 159 с. <https://ela.kpi.ua/items/335c70d7-17c5-4871-8869-34e35dc26b6c>
10. Сачанюк-Кавецька Н. В. Теорія рядів. Навчальний посібник /Сачанюк-Кавецька Н. В., Педорченко Л. І., Ковальчук М. Б. – Вінниця ВНТУ, 2018. – 138 с.

Навчальне видання

**Коряшкіна** Лариса Сергіївна  
**Горєв** В'ячеслав Миколайович  
**Хабарлак** Костянтин Сергійович

## **МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ**

**Конспект лекцій**  
для здобувачів ступеня бакалавра  
спеціальності  
F4 Системний аналіз та наука про дані

Видано в авторській редакції

Електронний ресурс.  
Підписано до видання 04.11.2025. Авт. арк. 15,4.

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка».  
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.