

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ  
Кафедра системного аналізу і управління

Л.С. Коряшкіна, О.М. Алексєєв, Д.М. Гаранжа, Ю.О. Шевченко

**НАВЧАЛЬНА ПРАКТИКА З ОБЧИСЛЕНЬ**

**Методичні рекомендації**  
для здобувачів ступеня бакалавра  
освітньо-професійної програми «Системний аналіз»  
зі спеціальності 124 Системний аналіз

Дніпро  
НТУ «ДП»  
2025

**Навчальна** практика з обчислень [Електронний ресурс] : методичні рекомендації для здобувачів ступеня бакалавра освітньо-професійної програми «Системний аналіз» спеціальності 124 Системний аналіз / уклад.: Л.С. Коряшкіна, О.М. Алексеєв, Д.М. Гаранжа, Ю.О. Шевченко ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2025. – 57 с.

Укладачі:

Л.С. Коряшкіна, д-р техн. наук, проф.;

О.М. Алексеєв, канд. техн. наук, доц.;

Д.М. Гаранжа, ст. викл.;

Ю.О. Шевченко, асист.

Затверджено до видання науково-методичною комісією зі спеціальності 124 Системний аналіз (протокол № 5 від 28.08.2025 року) за поданням кафедри системного аналізу та управління (протокол № 10 від 28.08.2025 р.).

Наведені мета, завдання та зміст навчальної практики з обчислень, а також основні теоретичні відомості, структури і порядку підготовки звіту з практики, зразки його оформлення.

Для науково-педагогічних працівників та здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 124 Системний аналіз галузі знань 12 Інформаційні технології Національного технічного університету «Дніпровська політехніка».

Відповідальний за випуск завідувач кафедри системного аналізу та управління Т.А. Желдак, канд. техн. наук, доц.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. Мета та завдання навчальної практики з обчислень .....	4
2. Завдання і основні теоретичні відомості .....	6
3. Варіанти індивідуальних завдань здобувачів вищої освіти на практику .....	7
4. Основні теоретичні відомості та приклади обчислень для завдання 1 .....	9
4.1. Метод фазової площини.....	9
4.2. Дослідження поведінки динамічних систем .....	12
4.3. Приклади виконання завдання 1: побудови фазового портрету лінійної і нелінійної системи .....	15
5. Основні теоретичні відомості та приклади обчислень для завдання 2 .....	20
5.1. Структурна стійкість динамічної системи. Поняття точок біфуркації. Типові біфуркації. Побудова біфуркаційних множин .....	20
5.2. Побудова біфуркаційної множини у просторі параметрів сімейства динамічних систем.....	23
5.3. Типові біфуркації нелінійних динамічних систем.....	27
5.4. Приклад дослідження структурної стійкості динамічної системи при виконанні завдання 2 .....	31
6. Підведення підсумків навчальної практики з обчислень.....	39
7. Вимоги до структури, змісту та оформлення звіту.....	40
8. Критерії оцінювання .....	42
Додаток 1 .....	47
Додаток 2 .....	48
Додаток 3 .....	51

## ВСТУП

Навчальна практика з обчислень є обов'язковим елементом навчального процесу і завершальним етапом опанування базових дисциплін першого і другого років навчання, зокрема, «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння», «Програмування та алгоритмічні мови», «Методи обчислень». Вона має на меті узагальнення й удосконалення здобутих ними знань, практичних умінь і навичок, оволодіння професійним досвідом.

Тривалість практики визначається затвердженою ОП та навчальним планом за спеціальністю 124 Системний аналіз. Практика здійснюється у восьмій чверті протягом чотирьох тижнів. Конкретні терміни проведення практик встановлюються графіком навчального процесу, який затверджується щорічно Вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка».

Програма практики складена у відповідності з такими документами:

- Положення про проведення практики здобувачів вищої освіти Національного технічного університету «Дніпровська політехніка», що затверджене Вченою радою 11 грудня 2018 року, протокол № 15.

- Освітньо-професійна програма бакалавра зі спеціальності 124 Системний аналіз. Затверджена Вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка» від 27.06.2024 р. протокол № 8 (зі змінами, наказ від 01.07.2025 № 104).

- Робочі програми дисциплін підготовки здобувачів ступеня бакалавра освітньо-професійної програми «Системний аналіз» зі спеціальності 124 Системний аналіз.

### 1. Мета та завдання навчальної практики з обчислень

*Метою* практики є узагальнення й удосконалення здобутих теоретичних знань та практичних умінь і навичок з базових дисциплін першого та другого року навчання, набуття професійного досвіду та підготовка до самостійної професійної діяльності в галузі обчислень.

Відповідно до ОП «Системний аналіз» першого (бакалаврського) рівня освіти практика з обчислень має забезпечити такі компетентності:

K01 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу

K02 Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях

K03 Здатність планувати і управляти часом

K04 Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності

K13 Здатність працювати в міжнародному контексті

K14 Здатність оцінювати та забезпечувати якість виконуваних робіт

K16 Здатність зберігати та приумножувати моральні, культурні, наукові цінності і досягнення суспільства на основі розуміння історії та закономірностей розвитку предметної області, її місця у загальній системі знань про природу і суспільство та розвитку суспільства, техніки і технологій,

використовувати різні види та форми рухової активності для активного відпочинку та ведення здорового способу життя.

К22 Здатність до комп'ютерної реалізації математичних моделей реальних систем і процесів; проектувати, застосовувати і супроводжувати програмні засоби моделювання, прийняття рішень, оптимізації, обробки інформації, статистичного та інтелектуального аналізу даних

К23 Здатність використовувати сучасні інформаційні технології для комп'ютерної реалізації математичних моделей та прогнозування поведінки конкретних систем а саме: об'єктно-орієнтований підхід при проектуванні складних систем різної природи, прикладні математичні пакети, застосування баз даних і знань

К24 Здатність організувати роботу з аналізу та проектування складних систем, створення відповідних інформаційних технологій та програмного забезпечення

Основними результатами навчання, що забезпечує практика з обчислень є:

ПР 8 Володіти сучасними методами розробки програм і програмних комплексів та прийняття оптимальних рішень щодо складу програмного забезпечення, алгоритмів процедур і операцій.

ПР 9 Створювати ефективні алгоритми для обчислювальних задач системного аналізу та систем підтримки прийняття рішень.

СР 02 Знати і вміти застосовувати методи інтелектуального багатовимірного аналізу даних та їхньої оперативної аналітичної обробки з візуалізацією результатів аналізу в процесі розв'язання прикладних задач у різних галузях.

Отже, основними задачами практики з обчислень є наступні:

- узагальнення та удосконалення набутих знань з математичного аналізу, методів обчислень, диференціальних рівнянь, програмування та алгоритмічних мов, отриманих під час навчання за освітньо-професійною програмою на першому і другому курсах;
- оволодіння необхідними професійними компетенціями;
- проведення досліджень динамічних систем, що описуються системами диференціальних рівнянь, набуття навичок застосування комплексного підходу щодо аналізу та синтезу складних систем.

Завданнями практики є:

- дослідження стійкості лінійних динамічних систем, побудова фазових портретів;
- аналіз стійкості нелінійних двовимірних динамічних систем, побудова біфуркаційних множин, побудова фазових портретів;
- робота з пакетами прикладних програм для моделювання, проектування, дослідження динамічних систем.

Практика проводиться в НТУ «Дніпровська політехніка» в лабораторіях кафедри системного аналізу та управління для вирішення дослідницьких задач в галузі системного аналізу.

## 2. Завдання і основні теоретичні відомості

**Завдання 1.** Аналіз динамічних автономних систем методом фазової площини. Побудова фазових портретів лінійних і нелінійних систем

Постановка задачі: дана система звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \frac{dy}{dt} = g(x, y).$$

Якщо задане диференціальне рівняння другого порядку, то звести його до системи.

Потрібно:

- 1) знайти всі рівноваги системи;
- 2) визначити тип рівноваги і її стійкість;
- 3) зобразити фазовий портрет системи.

**Завдання 2.** Біфуркації нерухомих точок динамічних систем

2.1. Структурна стійкість динамічної системи. Поняття точок біфуркації.

Типові біфуркації

2.2. Побудова біфуркаційної множини у просторі параметрів сімейства динамічних систем

2.3. Типові біфуркації нелінійних динамічних систем

2.4. Приклад дослідження структурної стійкості динамічної системи

2.5. Варіанти завдань

### 3. Варіанти індивідуальних завдань здобувачів вищої освіти на практику

Конкретне завдання на практику з обчислень визначається порядковим номером здобувача в студентському журналі.

Далі в таблицях 2.1 та 2.2 наведені диференціальні рівняння або системи диференціальних рівнянь для проведенні індивідуальних обчислень і побудови фазових портретів динамічних систем в завданнях 1 і 2 відповідно.

Таблиця 2.1

Варіанти для завдання 1

Варіант	Лінійна система/рівняння	Нелінійна система/рівняння
1	$y' = \frac{2x+y}{3x+4y}$	$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = \ln(1-x+x^2) - \ln 3 \end{cases}$
2	$y' = \frac{x-4y}{2y-3x}$	$\begin{cases} \dot{x} = \ln(2-y^2) \\ \dot{y} = e^x - e^y \end{cases}$
3	$y' = \frac{y-2x}{y}$	$\begin{cases} \dot{x} = (2x-y)(x-2) \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$
4	$y' = \frac{x+4y}{2x+3y}$	$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{-y+x^2+2} - 2 \\ \dot{y} = \arctg(x^2+xy) \end{cases}$
5	$y' = \frac{x-2y}{3x-4y}$	$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = x^2 - (y-2)^2 \end{cases}$
6	$y' = \frac{2x-y}{x-y}$	$\begin{cases} \dot{x} = \ln \frac{y^2 - y + 1}{3} \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases}$
7	$y' = \frac{y-2x}{2y-3x}$	$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1-y+y^2) \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2+8y} \end{cases}$
8	$y' = \frac{4y-2x}{x+y}$	$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{(x-y)^2+3} - 2 \\ \dot{y} = e^{y^2-x} - e \end{cases}$
9	$y' = \frac{y}{x}$	$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y \end{cases}$
10	$y' = \frac{4x-y}{3x-2y}$	$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1) \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$

Варіант	Лінійна система/рівняння	Нелінійна система/рівняння
11	$\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin(x + y) \end{cases}$
12	$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = \ln(y^2 - x) \\ \dot{y} = x - y - 1 \end{cases}$
13	$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = -6x - 5y \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = 3 - \sqrt{4 + x^2 + y} \\ \dot{y} = \ln(x^2 - 3) \end{cases}$
14	$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2 \end{cases}$
15	$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = -\sin y \\ \dot{y} = 2x + \sqrt{1 - 3x - \sin y} \end{cases}$
16	$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 + y + \sin x) \\ \dot{y} = 2 + \sqrt[3]{3 \sin x - 8} \end{cases}$
17	$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 4y - 6x \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1 \\ \dot{y} = 6x - y^2 + 1 \end{cases}$
18	$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x \\ \dot{y} = 2y - 4x \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 4x^2 \\ \dot{y} = 4y - 8 \end{cases}$
19	$y' = \frac{2y - x}{3x + 6}$	$\begin{cases} \dot{x} = 4 - 4x - 2y \\ \dot{y} = xy \end{cases}$
20	$y' = \frac{2x + y}{x - 2y - 5}$	$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$
21	$\ddot{x} + 4x = 0$	$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$
22	$\begin{cases} \dot{x} = 2 + y - x^2 \\ \dot{y} = 2x(x - y) \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = xy - 4 \\ \dot{y} = (x - 4)(y - x) \end{cases}$
23	$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0$	$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$
24	$\ddot{x} - x = 0$	$\begin{cases} \dot{x} = 2(x - 1)(y - 2) \\ \dot{y} = y^2 - x^2 \end{cases}$
25	$\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$	$\begin{cases} \dot{x} = (x + y)^2 - 1 \\ \dot{y} = -y^2 - x + 1 \end{cases}$

## Варіанти для завдання 2

Варіант	Динамічна система	Варіант	Динамічна система
1	$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + a + (x-1)^2 = 0$	14	$\ddot{x} - (a - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0$
2	$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + a + (x+1)^2 = 0$	15	$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x + \beta + x^3 = 0$
3	$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x(x^2 + y^2) - xy^2 \\ \dot{y} = y - y(x^2 + y^2) - yx^2 \end{cases}$	16	$\begin{cases} \dot{\rho} = \lambda\rho/2 - \rho^3 + \beta \cos\varphi/2\rho \\ \dot{\varphi} = -\alpha - \beta \sin\varphi/2\rho \end{cases}$
4	$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy^2 \\ \dot{y} = \beta(xy^2 - y) \end{cases}$	17	$\dot{x} = x - \lambda x^3 + \mu x^5 - x^7$
5	$\begin{cases} \dot{x} = (1 + ax - x^2)x - xy \\ \dot{y} = (x - x^2)y - my \end{cases}$	18	$\ddot{x} + a\dot{x} + x + \gamma \sin x = 0$
6	$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy^\gamma \\ \dot{y} = \alpha(xy^\gamma - y) \end{cases}$	19	$\ddot{x} + \cos(ax) + \dot{x}\gamma = 0$
7	$\ddot{x} + a\dot{x} + x + \gamma x^2 = 0$	20	$\ddot{x} + \dot{x} + ax + \beta x^3 = 0$
8	$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$	21	$\ddot{x} - (\lambda + \kappa x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$
9	$\ddot{x} + \sin(ax) - \dot{x}\gamma = 0$	22	$\begin{cases} \dot{x} = (a + bx - x^2)x - xy \\ \dot{y} = xy - my \end{cases}$
10	$\ddot{x} + a\dot{x} + x + \beta x^3 = 0$	23	$\begin{cases} \dot{x} = x - \mu x(x^2 + y^2) - xy^2 \\ \dot{y} = y - y(x^2 + y^2) - \lambda yx^2 \end{cases}$
11	$\ddot{x} - (\lambda + \kappa x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$	24	$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + 1 + (x - \mu)^2 = 0$
12	$\begin{cases} \dot{x} = (a + bx - x^2)x - xy \\ \dot{y} = xy - my \end{cases}$	25	$\begin{cases} \dot{x} = \lambda \ln x - xy^2 \\ \dot{y} = (\beta xy^2 - y) \end{cases}$
13	$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho - \cos\varphi \\ \dot{\varphi} = 2\rho(\lambda - \mu\rho - \sin\varphi) \end{cases}$		

#### 4. Основні теоретичні відомості та приклади обчислень для завдання 1

##### 4.1. Метод фазової площини

*Метод фазової площини* – це графоаналітичний метод дослідження нелінійних систем диференціальних рівнянь в деякому діапазоні початкових умов.

Метод дозволяє аналізувати нелінійні системи другого порядку і полягає у побудові фазових траєкторій (поданні динаміки системи диференціальних рівнянь рухом зображуючої точки на фазовій площині).

Нехай задана система:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (4.1)$$

Площина  $xOy$  називається *фазовою площиною*. Стан системи в будь-який момент часу (або фаза руху) визначається парою чисел  $(x, y)$  та зображується на фазовій площині точкою  $M$ . При зміні стану системи зображуюча точка описує у фазовому просторі траєкторію, яка називається *фазовою траєкторією*. Множина фазових траєкторій динамічної системи – її *фазовий портрет*.

Диференціальне рівняння фазових траєкторій отримаємо, розділивши друге рівняння на перше:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}. \quad (4.2)$$

Фазові траєкторії будуються за розв'язком рівняння (1.2), якщо його можна знайти, або безпосередньо за рівнянням (1.2), використовуючи метод *ізоклін*.

*Ізокліною* називається геометричне місце точок однакового нахилу фазових траєкторій до горизонталі, тобто точок, в яких:

$$\frac{dy}{dx} = C = const. \quad (4.3)$$

Рівняння ізокліни:

$$\frac{g(x, y)}{f(x, y)} = C. \quad (4.4)$$

За фазовим портретом можна судити про характер перехідних процесів в системі. Для цього потрібно: 1) знайти області стійкості; 2) визначити точки рівноваги; 3) оцінити перерегулювання та амплітуду коливань.

В *точках рівноваги* зображення точки  $M$  зупиняються. Рівняння точок рівноваги:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Точки рівноваги називаються *особливими*, тому що в них нахил фазових траєкторій не визначений. Точка рівноваги може бути *стійкою*, якщо всі фазові траєкторії в околі особливої точки збігаються до неї, та *нестійкою*, якщо фазові траєкторії розбігаються від неї. Особливі точки класифікуються за характером фазових траєкторій в їх околі (див. рис. 4.1).

*Правило руху точки.* Нехай система має вигляд:

$$\dot{x} = y, \dot{y} = F(x, y).$$

Якщо  $y > 0$ ,  $x$  – зростає, точка рухається зліва направо. Якщо  $y < 0$ ,  $x$  – спадає, точка рухається справа наліво.

**Зауваження:** через кожен неособливу точку фазової площини для неперервних, всюди диференційованих, однозначних нелінійних функцій  $F(x, y)$  проходить єдина фазова траєкторія, тобто фазові траєкторії не перетинаються в неособливих точках.

*Криві перехідного процесу.* Відмітивши характерні точки, за даними фазовими траєкторіями можна побудувати відповідну криву перехідного процесу. *Нелінійні системи* характеризуються великим розмаїттям фазових

портретів. Вони можуть мати декілька особливих точок. При наявності декількох точок рівноваги можливі різні типи фазових траєкторій:

- *сепаратриса* – особливі криві, що розділяють фазову площину на області з різними типами фазових траєкторій;
- *граничні цикли* – ізольовані замкнені криві, що відповідають періодичним режимам.

Ізоморфні замкнені траєкторії (граничні цикли) класифікуються за характером їх стійкості:

- *стійкий граничний цикл* – до якого зсередини і зовні збігаються фазові траєкторії (відповідає стійкому періодичному режиму, так званим автоколиванням) (рис.4. 2,а). Якщо рух починається всередині граничного циклу, то процес розбігається. Якщо рух починається поза граничного циклу, то процес збігається. В обох випадках процес прагне до автоколивань;

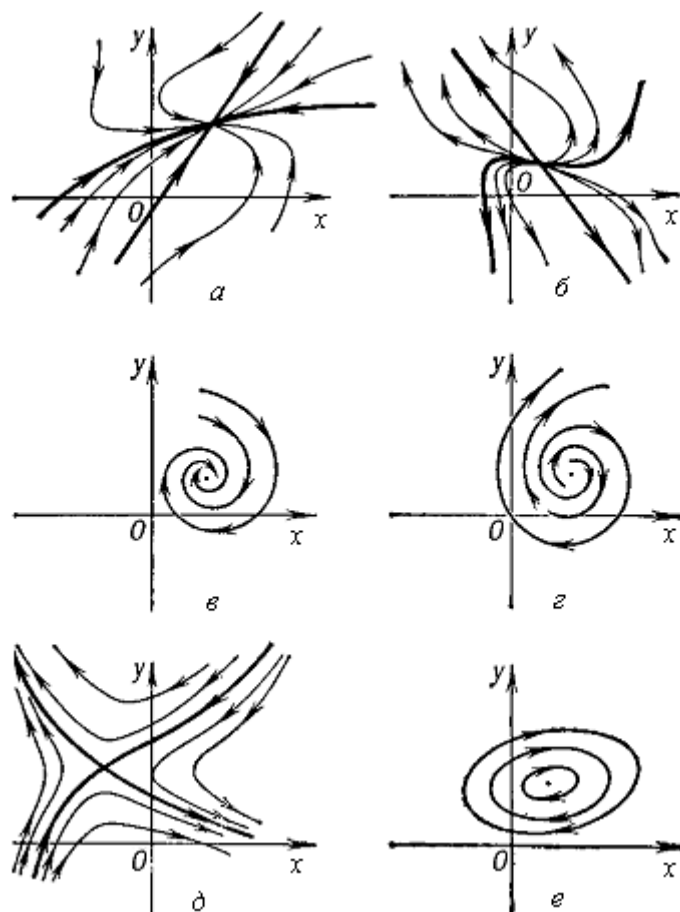


Рис. 4.1. Особливі точки: *a* – стійкий вузол; *b* – нестійкий вузол; *в* – стійкий фокус; *г* – нестійкий фокус; *д* – сідло; *е* – центр

- *нестійкий граничний цикл* – від якого зсередини і зовні фазові траєкторії віддаляються (рис 4.2,б). Якщо рух починається всередині граничного циклу, то процес збігається до незбуреного руху, якщо рух починається поза граничного циклу, то процес розбігається.
- *напівстійкі граничні цикли* – наведені на рис. 4.1,в,г.

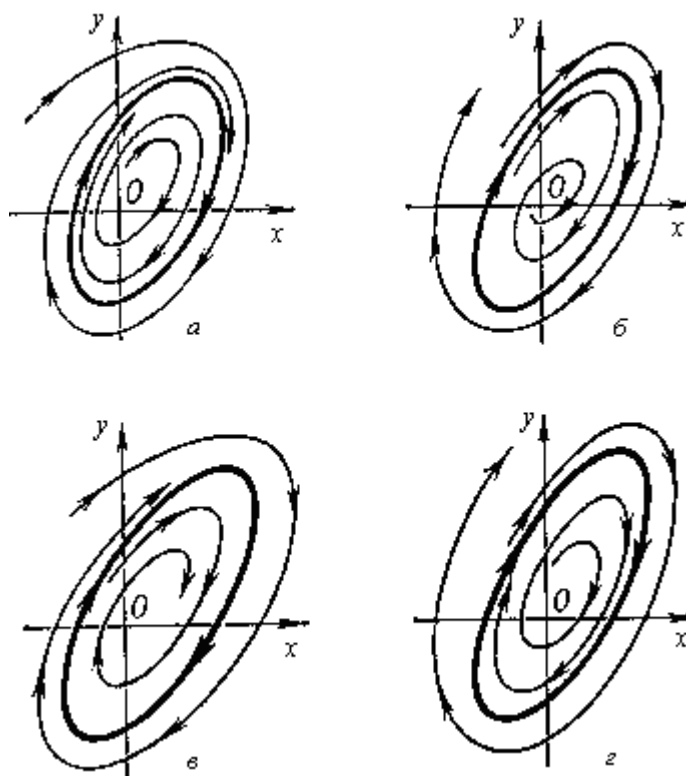


Рис4.2. Граничний цикл: а – стійкий; б – нестійкий; в, г – напівстійкий

Таким чином, метод фазової площини дозволяє визначити число, типи та характер особливих точок; ізолювати замкнені траєкторії; знайти сепаратриси; наочно представити усю сукупність рухів, що виникають в динамічних системах за всіляких початкових умов.

#### 4.2. Дослідження поведінки динамічних систем

Розглянемо систему (4.1). Через кожну точку  $(x, y)$  фазової площини проходить єдина інтегральна крива, за виключенням *особливих точок*  $(x_s, y_s)$ , таких що

$$\begin{cases} f(x_s, y_s) = 0 \\ g(x_s, y_s) = 0. \end{cases}$$

Лінеаризуємо систему в околі точки рівноваги  $(x_s, y_s)$ . Нехай в (4.1)  $x = x_s + u$ ,  $y = y_s + v$ . В новій системі координат  $(u, v)$  положенню рівноваги відповідає точка  $(0, 0)$ . Якщо  $f$  і  $g$  – аналітичні функції поблизу  $(0, 0)$ , то можна розкласти  $f$  і  $g$  в ряд Тейлора в околі цієї точки. Залишивши тільки лінійні члени, отримаємо Лінеаризовану на рівновазі  $(x_s, y_s)$  систему відносно збурень  $(u, v)$ :

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_s, y_s)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_s, y_s)v + \dots \\ \dot{v} = \frac{\partial g}{\partial x}(x_s, y_s)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x_s, y_s)v + \dots \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{(x_s, y_s)}.$$

Розв'язки лінійної системи

$$\frac{du}{dt} = au + bv, \frac{dv}{dt} = cu + dv \quad (4.5)$$

дають параметричні ( $t$  – параметр) форми фазових кривих поблизу нерухомої точки  $(x_s, y_s)$ .

Нехай  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  – власні значення матриці  $A$ , тобто

$$\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}(a + d \pm [(a + d)^2 - 4 \det A]^{\frac{1}{2}}). \quad (4.6)$$

Отже, розв'язки (4.5) мають вигляд:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \xi_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \xi_2 \exp(\lambda_2 t) \quad (4.7)$$

де  $c_1, c_2$  – довільні константи, а  $\xi_1, \xi_2$  – власні вектори матриці  $A$ , які відповідають  $\lambda_1, \lambda_2$  і визначаються за формулою:

$$\xi_i = (1 + p_i^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ p_i \end{pmatrix}, \quad p_i = \frac{\lambda_i - a}{b}, \quad b \neq 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.8)$$

Виключення параметра  $t$  в (4.7) дає фазові криві на площині  $(x, y)$  поблизу точки рівноваги  $(x_s, y_s)$ . Вираз (4.7) використовується, якщо власні значення не є рівними. Якщо ж  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , то розв'язки (4.5) будуть пропорційні  $(c_1 + c_2 t) \exp(\lambda t)$ .

Далі розглянемо вплив власних значень матриці  $A$  на характер особливої точки лінійної системи (4.5).

I)  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  є дійсними числами і не дорівнюють один одному.

а)  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  мають однаковий знак. Типові власні вектори  $\xi_1, \xi_2$  зображені на рис. 4.3,а. Нехай  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ . Тоді, згідно з (4.7), наприклад, при  $c_2 = 0, c_1 \neq 0$ , справедливий вираз  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \xi_1 \exp(\lambda_1 t)$ . Значить, точка на фазовій площині рухається лише уздовж  $\xi_1$  у напрямку початку координат при  $t \rightarrow \infty$ : якщо  $c_1 > 0$  – уздовж РО; якщо  $c_1 < 0$  – уздовж QO. Згідно з (4.7), кожний розв'язок наближається до  $(0, 0)$  при  $t \rightarrow \infty$ , тому що при  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$   $\exp(\lambda_2 t) = o(\exp(\lambda_1 t))$  коли  $t \rightarrow \infty$ . Отже  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \sim c_1 \xi_1 \exp(\lambda_1 t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Таким чином, поблизу початку координат всі розв'язки наближаються до нуля уздовж  $\xi_1$ , як зображено на рис. 4.3,а. Така особлива точка називається вузол (тип I). Якщо  $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ , це буде *стійкий вузол*, оскільки всі траєкторії наближуються до  $(0, 0)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Якщо  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ , це – *нестійкий вузол*; оскільки  $(u, v) \rightarrow (\infty, \infty)$  при  $t \rightarrow \infty$  (рис. 4.3,б).

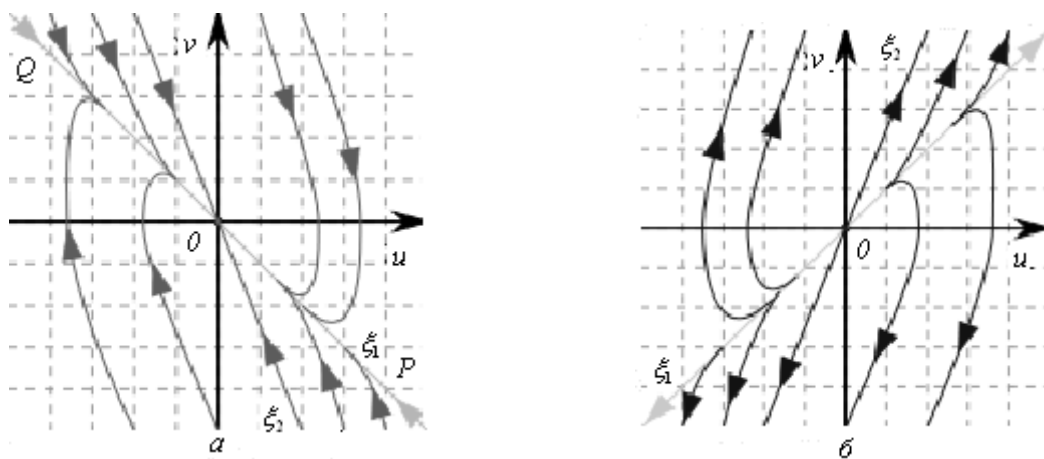


Рис.4.3. Особлива точка – вузол: а – стійкий, б – нестійкий

б)  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  мають різні знаки. Припустимо, наприклад, що  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Тоді,  $\xi_1 \exp(\lambda_1 t) \rightarrow 0$  уздовж  $\xi_1$  при  $t \rightarrow \infty$ , в той час як  $\xi_2 \exp(\lambda_2 t) \rightarrow 0$  уздовж  $\xi_2$  при  $t \rightarrow -\infty$ .

Таким чином, рух уздовж  $\xi_1$  і  $\xi_2$  відбувається в різних напрямках; розв'язки поблизу  $(0,0)$  зображені на рис. 4.4,а. Така особливість називається *сідловою точкою*. Вона завжди *нестійка*, за виключенням руху строго вздовж  $\xi_1$ , будь-яке відхилення від якого буде експоненційно зростати.

II)  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  є комплексними числами:  $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta, \beta \neq 0$ . Розв'язок (4.7) в цьому випадку включає в себе  $\exp(\alpha t)\exp(\pm i\beta t)$  і, отже, коливально наближується до  $(0,0)$ .

а)  $\alpha \neq 0$ . В цьому випадку виникає *фокус*, *стійкий* при  $\alpha < 0$  і *нестійкий* при  $\alpha > 0$ . На рис. 4.4,б зображена особлива точка типу «фокус».

б)  $\alpha = 0$ . В цьому випадку фазові криві представляють собою еліпси. Така особлива точка називається *центр*; вона зображена на рис 4.4, в. Центри не є стійкими в звичайному розумінні; мале відхилення від однієї фазової кривої не затухає, і система не повертається на вихідну збурену криву. Відхилення лише приводить к іншому розв'язку. У випадку особливостей такого типу, знайдених за допомогою лінійного наближення функцій  $f$  і  $g$ , необхідно розглядати члени більш високого порядку (ніж лінійні) для того, щоб визначити, чи є точка фокусом, стійка вона чи ні.

III)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ .

а) Розв'язки включають члени типу  $t \cdot \exp(\lambda t)$  і в даному випадку існує тільки єдиний власний вектор  $\xi$ , уздовж якого розв'язки прямують до  $(0,0)$ . Параметр  $t$  у виразі  $t \cdot \exp(\lambda t)$  впливає на розв'язки подалі від  $(0,0)$ . Ця точка називається *вузол* (тип II); вона зображена на рис. 4.5,а.

б) Якщо розв'язки не включають члена  $t \cdot \exp(\lambda t)$ , то особлива точка називається *діакритичною*, і може бути як стійкою, так і нестійкою залежно від знаку  $\lambda$ . Траєкторії поблизу діакритичної особливої точки показані на рис. 4.5,б.

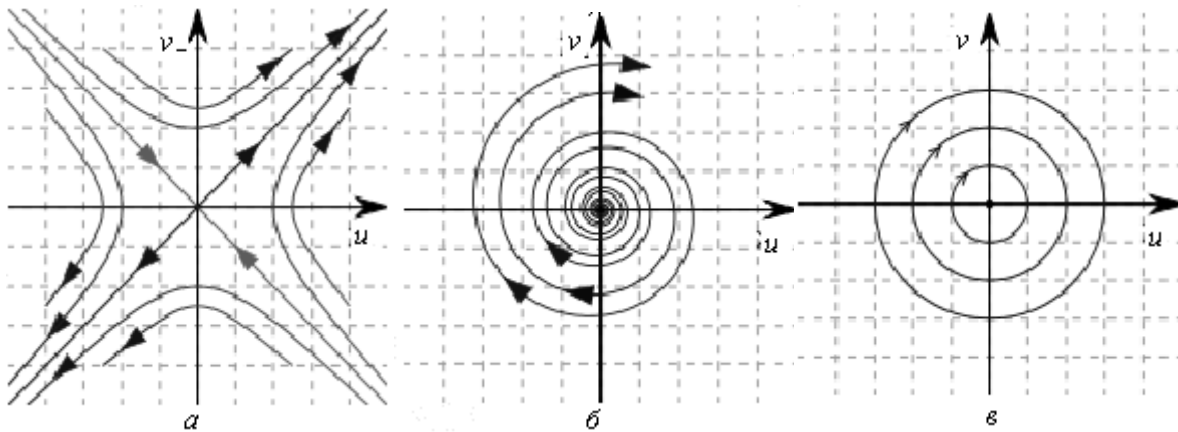


Рис.4.4. Особлива точка: а – сідло, б – фокус, в – центр

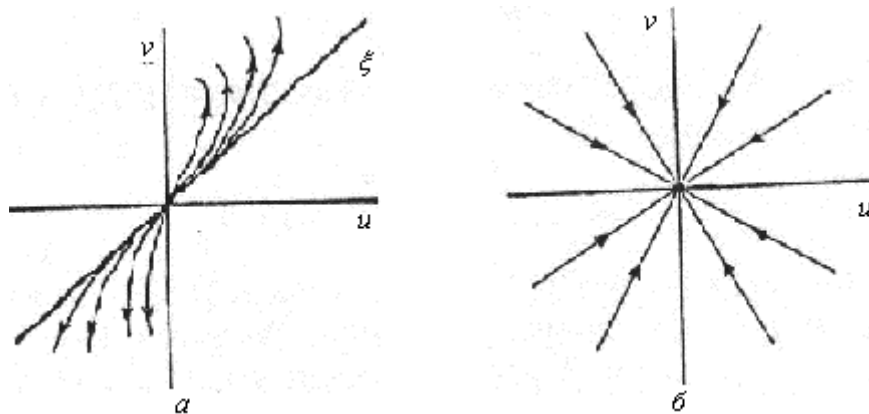


Рис.4.5. Особлива точка: а – вузол (тип II), б – діакритична

Таким чином, тип особливою точки залежить від параметрів  $a, b, c, d$  в матриці  $A$  в (4.5). На рис. 4.6 підведений підсумок викладеним вище результатам в термінах сліду і визначника матриці  $A$ .

#### 4.3. Приклади виконання завдання 1: побудови фазового портрету лінійної і нелінійної системи

Для побудови фазового портрету лінійної динамічної системи:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

необхідно виконати наступні дії:

1. Обчислити  $\det M$ , де  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , знайти власні значення матриці та обчислити  $\text{tr} M$  (сума власних значень матриці  $M$ ). Визначити тип особливої точки згідно викладеного у попередньому параграфі матеріалу.
2. Знайти рівняння особливих напрямків  $(dx/dt)=0$  та  $(dy/dt)=0$   
 $y=(-a/b)x, \quad y=(-c/d)x.$

3. Якщо особлива точка є сідлом або вузлом, то знайти асимптоти, використовуючи підстановку  $y=kx$ .
4. Визначити напрямки фазових траєкторій.

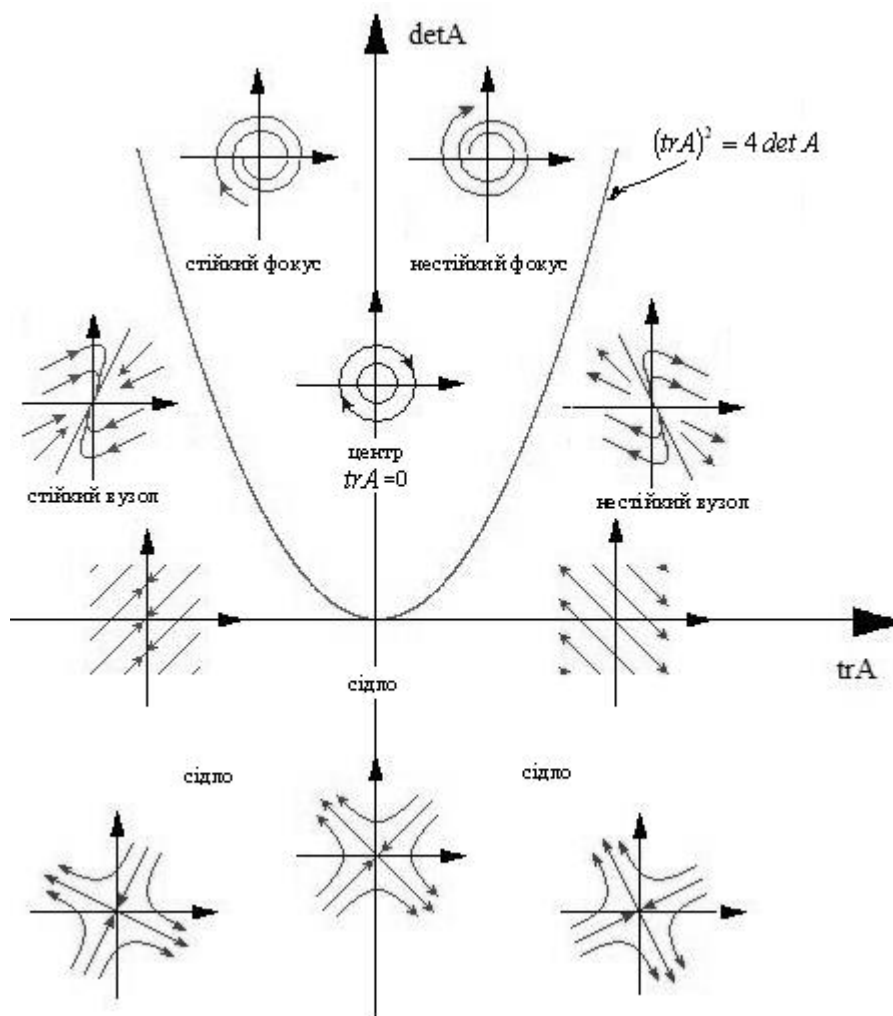


Рис. 4.6. Підсумкова діаграма, яка демонструє вплив сліду  $trA = f_x + g_y$  і визначника  $det A = f_x g_y - f_y g_x$  на характер особливої точки

Приклад 1: дослідити характер особливої точки  $(0,0)$ :

$$y' = \frac{-2x + y}{4x - 5y} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases} \quad (4.9)$$

4. Обчислюємо визначник і слід матриці M:  $det M = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad tr M = 5.$

Особлива точка  $(0,0)$  – сідло.

2. Рівняння особливих напрямків:  $y=(4/5)x$ ;  $y=2x$ . Першу пряму фазові траєкторії перетинають у вертикальному напрямку, а другу – горизонтальному.

3. Знаходимо рівняння асимптот. Нехай  $y=kx$ . Розв'язуючи рівняння відносно  $k$ :  $k=(-2+k)/(4-5k)$ , знаходимо кутові коефіцієнти асимптот:  $y=(-2/5)x$ ;  $y=x$ .

4. Визначаємо напрямки фазових траєкторій, враховуючи знак похідних  $\frac{dx}{dt}$  і

$\frac{dy}{dt}$  в точках фазових траєкторій.

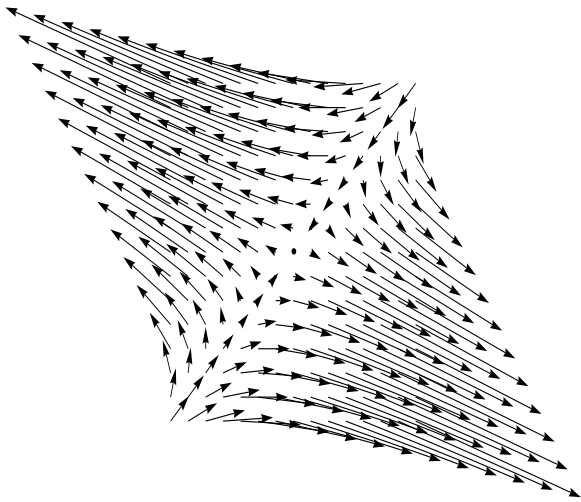


Рис. 4.7. Поле напрямків системи (4.9)

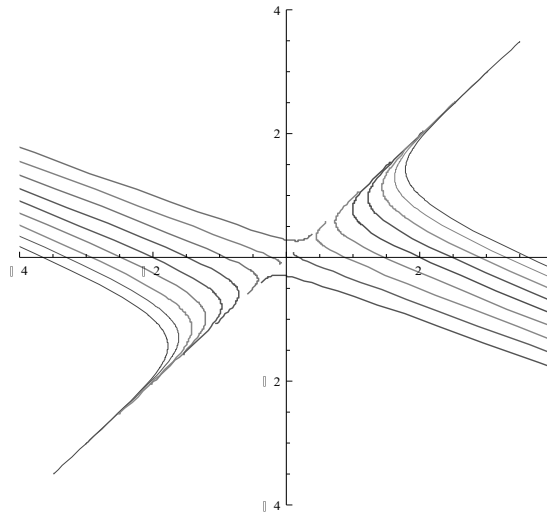


Рис. 4.8. Фазові траєкторії системи (4.9)

Приклад 2: знайти всі нерухомі точки нелінійної системи і дослідити їх на стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(x-1)(y-2) \\ \dot{y} = y^2 - x^2 \end{cases} \quad (4.10)$$

Особливі точки системи знайдемо, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2(x-1)(y-2) = 0 \\ y^2 - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & y = 2 \\ y = -x & y = x \end{cases}$$

Особливі точки:  $(x_1, y_1) = (1; -1)$ ;  $(x_2, y_2) = (1; 1)$ ;  $(x_3, y_3) = (2; -2)$ ;  $(x_4, y_4) = (2; 2)$ .

Запишемо вирази частинних похідних функцій  $f$  і  $g$ :

$$\begin{aligned} f'_x &= 2(y-2); & f'_y &= 2(x-1); \\ g'_x &= -2x; & g'_y &= 2y. \end{aligned}$$

Визначимо тип кожної особливої точки.

I.  $(x_1, y_1) = (1; -1)$  – стійкий вузол. Дійсно, заміна змінних  $x=1+u$ ,  $y=-1+v$  приходимо до системи лінійних диференціальних рівнянь відносно збурень фазових координат:

$$\begin{cases} (1+u) \approx -6u + 0v \\ (1-v) \approx -2u - 2v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = -6u \\ \dot{v} = -2u - 2v \end{cases} \quad (4.11)$$

На рис. 4.9 наведені фазові траєкторії і поле напрямків цієї системи.

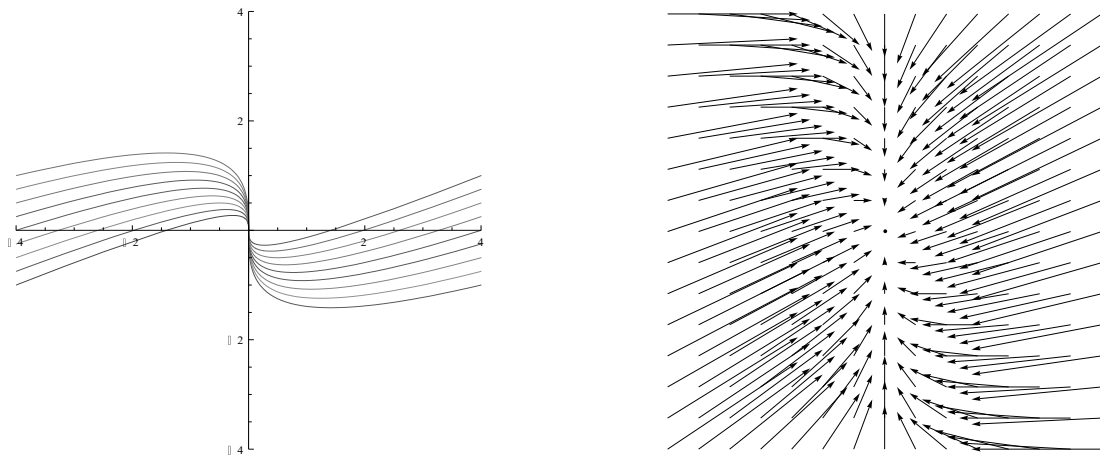


Рис. 4.9. Фазові траєкторії і поле напрямків системи (4.11)

II.  $(x_2, y_2) = (1; 1)$  – сідло. Лінійна система відносно збурень фазових змінних в точці  $(1, 1)$  має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{u} = -2u \\ \dot{v} = -2u + 2v \end{cases} \quad (4.12)$$

На рис. 4.10 наведені фазові траєкторії і поле напрямків цієї системи.

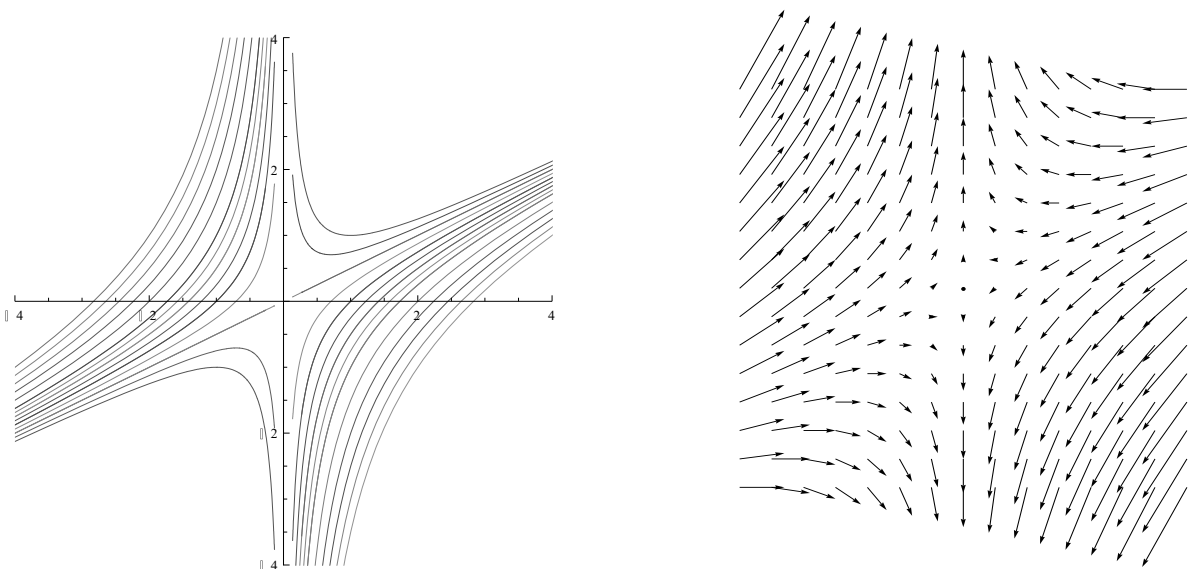


Рис. 4.10. Фазові траєкторії і поле напрямків системи (4.12)

III.  $(x_3, y_3) = (2; -2)$  – також сідло. Лінійна система диференціальних рівнянь відносно збурень фазових координат в точці  $(x_3, y_3)$  має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{u} = -8u + 2v \\ \dot{v} = -4u + 4v \end{cases}$$

Фазові траєкторії і поле напрямів в цій точці наведені на рис. 4.11.

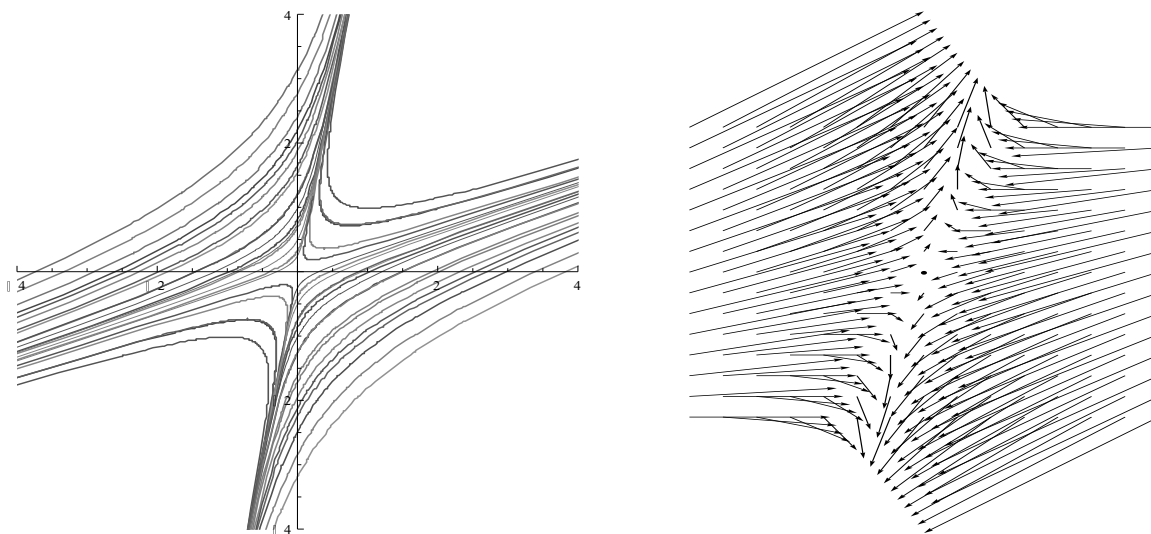


Рис. 4.11. Фазові траєкторії і поле напрямків системи (4.12)

IV.  $(x_4, y_4) = (2; 2)$  – нестійкий фокус, тому що в лінійній системі диференціальних рівнянь відносно збурень  $(u, v)$

$$\begin{cases} \dot{u} = 2v \\ \dot{v} = -4u + 4v \end{cases}$$

$\det A = 8 > 0$ ;  $\text{tr}A = 4 > 0$ ;  $(\text{tr}A)^2 < 4 \det A$ . Фазові траєкторії і поле напрямів наведені на рис. 12.

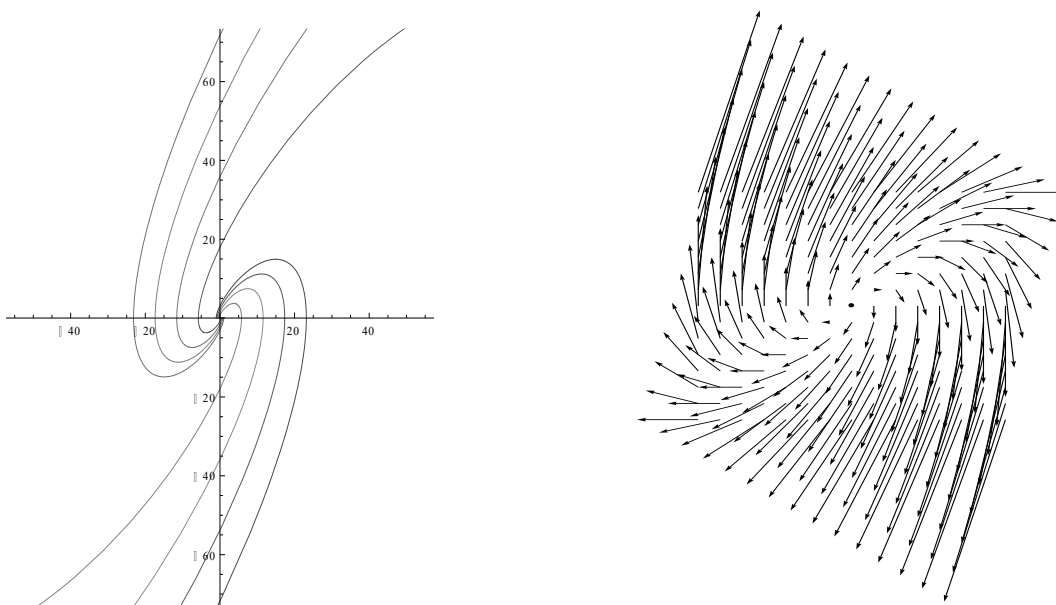


Рис. 4.12. Фазові траєкторії і поле напрямків в точці  $(x_4, y_4)$  системи (4.10)

Фазовий портрет динамічної системи (4.10) представлений на рис. 4.13.

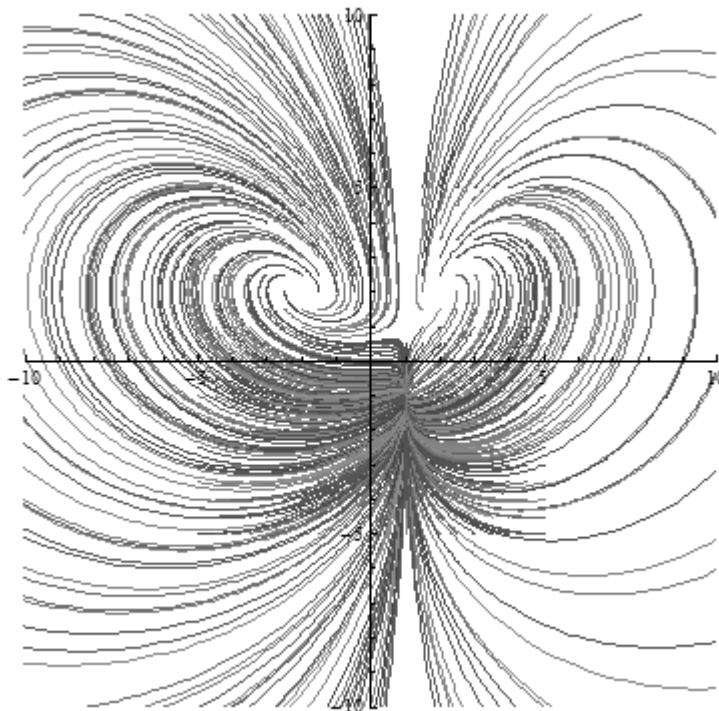


Рис. 4.13. Фазовий портрет системи (4.10)

## 5. Основні теоретичні відомості та приклади обчислень для завдання 2

5.1. Структурна стійкість динамічної системи. Поняття точок біфуркації. Типові біфуркації.  
Побудова біфуркаційних множин

В даний час теорія біфуркацій динамічних систем, здавалося б, розроблена досить детально. Проте, результати, які були б одночасно й досить загальними, й чіткими, отримані лише для нерухомих точок, або для випадків, які можна звести до аналізу нерухомих точок (наприклад, для циклів). Результати для більш складних режимів і інваріантних множин отримані лише у випадку, якщо на систему накладені досить жорсткі обмеження.

Незважаючи на те, що нерухомі точки – найпростіший тип інваріантних множин, дослідження їх біфуркацій виявляється корисним з огляду на те, що:

- вони дають можливість чітко обґрунтувати існування простих і в той же час типових математичних моделей, дослідження яких дає інформацію про широкий клас явищ;

- вони дають деяку строгу основу для дослідження якісних трансформацій динамічних систем і дозволяють виробити систему поглядів на цю проблему.

У теорії біфуркацій, яку вважають невід'ємною частиною нелінійної динаміки, вдалося виділити деякі типові біфуркації і вказати характерні властивості систем в їх околі. Цей результат виявився настільки вдалим і цікавим, що в даний час поняття, пов'язані з біфуркаціями, проникають в самі різні галузі знань.

Що таке біфуркація? Відразу зауважимо, що в фазовому просторі точок біфуркації не існує. Вони пов'язані не з дослідженням однієї конкретної системи з фіксованими параметрами, а з дослідженням сімейства динамічних систем, що залежить від  $k$  параметрів  $\mu_i : \dot{x} = \varphi(x, \mu_1, \dots, \mu_k)$ . При зміні параметрів  $\mu_i$  поведінка траєкторій в фазовому просторі може якісно змінюватися. Значення  $\{\mu_i\}$ , при яких відбуваються ці якісні зміни, і називаються точками біфуркації.

Це, однак, «гуманітарне» означення, оскільки поняття «якісна зміна» можна трактувати дуже вільно. У випадку нерухомих точок, циклів і ряді інших випадків можна спиратися на поняття топологічної еквівалентності та структурної стійкості: будемо вважати якісно різними системи, які не є топологічно еквівалентними. Оскільки для гіперболічних нерухомих точок (циклів) доведена структурна стійкість, кандидатами на точки біфуркації автоматично стають ті значення параметрів при яких точка (цикл) виявляються негіперболічними. Це дає простий і потужний інструмент пошуку точок біфуркації.

Отже, біфуркаційним значенням  $\mu$  або точкою біфуркації називається значення  $\mu$ , при якому динамічна система є структурно нестійкою. Оскільки структурна стійкість буває локальною та глобальною, то виділяють, відповідно, локальні і глобальні біфуркації. Далі будемо говорити лише про локальні біфуркації.

Розглянемо приклад:

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \equiv F(x, \mu) \quad (5.1)$$

Негіперболічну нерухому точку знаходимо з умов

$$F(x, \mu) = 0, \quad F'_x(x, \mu) = 0$$

Це  $x = 0$ ,  $\mu = 0$ . Легко перевірити, що при  $\mu < 0$  особлива точка єдина,  $x = 0$ , а при  $\mu > 0$  – їх три:  $x = 0$  і  $x = \pm\sqrt{\mu}$  ( див. рис. 5.1). У даному випадку біфуркаційна діаграма має вигляд вилки, від цього і походить слово «біфуркація» (від французького bifurcation – роздвоєння, розгалуження). Термін був введений А. Пуанкаре в 1885 р. в роботі, присвяченій фігурам рівноваги самогравітуючих обертових рідких тіл).

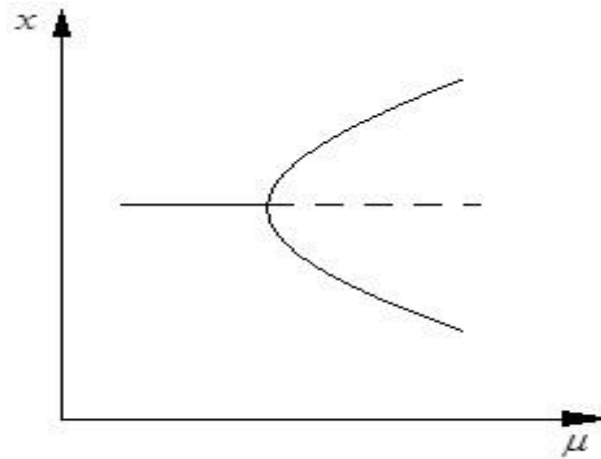


Рис.5.1. Приклад біфуркаційної діаграми: стійкі розв'язки позначені суцільними лініями, нестійкі – пунктирними.

В різних системах можуть виникати однотипні біфуркації. Тому природно поставити питання про їхню класифікацію. Однією з характеристик, що використовуються з цією метою, є *ковимірність*.

Біфуркації можна класифікувати за тим, для якої кількості власних значень матриці DF порушується умова гіперболічності  $\text{Re } \lambda_i \neq 0$  (або  $|\lambda_i| \neq 1$  для Df). Виходячи з цього, можна говорити про те, скільки параметрів  $\mu_i$ , повинно бути в моделі для того, щоб дана біфуркація була типовою. Власні значення також можна розглядати як функції від параметрів  $\mu: \lambda_i(\mu_1, \dots, \mu_k)$ . Тоді умову порушення гіперболічності  $\text{Re } \lambda_i = 0$  можна розглядати як систему рівнянь відносно  $\mu$ . Наприклад, для того, щоб два дійсних власних значення одночасно дорівнювали 0, необхідно знайти розв'язки системи двох рівнянь

$$\begin{cases} \lambda_1(\mu_1, \dots, \mu_k) = 0, \\ \lambda_2(\mu_1, \dots, \mu_k) = 0. \end{cases}$$

Це система двох рівнянь відносно  $k$  невідомих. Зрозуміло, не знаючи конкретного виду функцій  $\lambda_i(\mu_1, \dots, \mu_k)$ , неможливо зробити висновків, справедливих для кожної системи, але існують твердження, що відносяться до *типових ситуацій*. У даному конкретному випадку типовими будуть наступні ситуації:

- якщо  $k = 1$ , то розв'язок системи зазвичай не існує, тобто біфуркація такого типу швидше за все в даному сімействі спостерігатися не буде;
- якщо  $k = 2$ , то біфуркація може спостерігатися в одній або декількох точках простору параметрів;
- якщо  $k > 2$ , то в типовому випадку негіперболічні точки будуть розташовуватися на поверхні розмірності  $(k-2)$  в просторі параметрів. Тобто можуть спостерігатися навіть не точки, а поверхні біфуркації.

У загальному випадку, якщо необхідно одночасно задовольнити  $t$  умов, то потенційні точки біфуркації будуть розташовуватися на  $(k-t)$ -вимірній поверхні. Величину  $t$  називають *ковимірністю біфуркації*, показуючи тим самим, що суттєва не кількість параметрів, а кількість умов. (Взагалі, ковимірність поверхні – це різниця між вимірністю простору і вимірністю поверхні.)

Таким чином, ковимірність біфуркації показує, від скількох параметрів повинна залежати динамічна система, щоб біфуркація для неї була типовою. Чим вище ковимірність, тим більш екзотичною буде біфуркація.

Зауважимо, однак, що ковимірність біфуркації, пов'язана з властивостями матриці DF, характеризує її неповністю, і в межах однієї ковимірності можливі різні типи біфуркаційних діаграм. Наприклад, якщо в прикладі (5.1) дещо змінити функцію  $F(x, \mu) = v + \mu x - x^3$  (порушується симетрія, функція перестає бути непарною), біфуркаційна діаграма зміниться. Подібні питання досліджує так звана *теорія недосконалості*.

## 5.2. Побудова біфуркаційної множини у просторі параметрів сімейства динамічних систем

Нехай динамічна система описується системою диференціальних рівнянь, що залежать від одного або кількох параметрів  $\vec{\mu}$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, \vec{\mu}) \\ \dot{y} = f_2(x, y, \vec{\mu}). \end{cases} \quad (5.2)$$

Розглянемо питання проте, як досліджується поведінка динамічної системи залежно від різних значень параметрів? Особливо будемо цікавитися такими значеннями параметрів, за яких здійснюється якісна перебудова фазового портрету.

Припустимо спочатку, що система (5.2) залежить від одного параметра, тобто  $\vec{\mu} = \mu$ . Для з'ясування вигляду портрету динамічної системи при зміні цього параметра, наприклад, у межах  $\mu \in [\mu_0, \mu_1]$ , потрібно розділити діапазон від  $\mu_0 \dots \mu_1$  на деяку кількість відрізків:  $\mu_0 \dots \mu_i \dots \mu_1$ , і при кожному значення параметра  $\mu_i$  дослідити фазовий портрет динамічної системи. Іншими словами, для пошуку нерухомих точок для кожного  $\mu_i$  слід вирішити відповідну систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} f_1(x, y, \vec{\mu}) = 0 \\ f_2(x, y, \vec{\mu}) = 0. \end{cases}$$

У результаті, повинні бути отримані пари особливих точок  $(x^o, y^o)$  як функції параметру  $\mu_i$ .

Дослідження поведінки системи (5.2) можна оптимізувати, використовуючи *метод продовження по параметру*, який застосовується, коли динамічна система неперервно залежить від параметра  $\mu$ .

Припустимо, що для початкового значення  $\mu_0$  вдалося визначити (за допомогою тих чи інших чисельних методів розв'язання нелінійних рівнянь) нерухомі точки динамічної системи. Для наступного значення параметра  $\mu_1$  будемо припускати, що ці особливі точки, які визначають фазовий портрет, зміняться незначно. Тому для запуску чисельного алгоритму розв'язання нелінійних рівнянь в якості початкової ітерації будемо використовувати корені, обчислені на попередньому кроці.

Взагалі кажучи, для кожного  $\mu_i$  можна побудувати схему визначення нерухомих точок, виходячи з розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь за принципом схеми «предиктор-коректор». Якщо визначені властивості фазового портрету для попередніх  $\mu$ :  $\mu_{i-1}$ ,  $\mu_{i-2}$  і т.д., то вигідним представляється екстраполювати їх на  $i$ -ту точку. Таким чином, для визначення нерухомих точок на кожному  $i$ -му кроці слід використовувати двоетапну процедуру:

- на 1-му кроці будується екстраполяція залежності нерухомих точок від попередніх значень параметра  $\mu$  (предиктор);
- на 2-му кроці ця екстраполяція коригується за допомогою розв'язання системи рівнянь (5.2) будь-яким чисельним методом, наприклад, методом Ньютона (коректор).

Якщо використовувати досить добре наближення до дійсного розв'язку, то обсяг обчислень на комп'ютері суттєво скоротиться. Такий підхід до розв'язання систем нелінійних рівнянь і називається *алгоритмом продовження по параметру*.

Слід підкреслити, що певні особливі точки для кожного значення параметра  $\mu_i$  потребують аналізу їх стійкості. На будь-якому з кроків, тобто для будь-якого  $\mu_i$ , деякі точки із стійких можуть перетворюватися на нестійкі, і навпаки. Коли відбувається така подія, фазовий портрет якісно перебудовується. Наприклад, якщо для якихось значень  $\mu$  особлива точка була нестійкою, а для певного  $\mu_i$  вона стала стійкою, то фазовий портрет змінюється кардинально. Раніше траєкторії розв'язків систем динамічних рівнянь ніби не помічали нестійкої точки, але, як тільки вона стає стійкою, траєкторії з околу цієї точки починають прагнути саме до неї. У цьому випадку говорять про *біфуркації зміни стійкості*.

Часто важливо «відловити» моменти, коли ті чи інші нерухомі точки змінюють тип стійкості. Тому корисно буває уточнити значення параметра  $\mu$ , обчислюючи замість  $\mu_i$  більш точне значення  $\mu^*$ , відповідне моменту біфуркації. Таку задачу можна розв'язати, залучаючи знову ж таки алгоритм продовження по параметру. Тільки в цьому випадку система рівнянь, яку

потрібно розв'язати, буде іншою. Нагадаємо, що біфуркація відповідає зміні знака дійсної частини одного з власних значень характеристичного рівняння матриці  $Df$ . Позначимо цю дійсну частину власного значення функцією таких аргументів:

$$\operatorname{Re}(\lambda_k) \equiv F(\mu, x, y) .$$

Біфуркація, таким чином, визначається переходом цієї функції через 0. Для точного визначення моменту біфуркації необхідно розв'язати відповідне нелінійне, задане алгоритмічно, рівняння з невідомим параметром  $\mu$ . У результаті, для визначення моменту біфуркації слід розв'язувати алгоритмом продовження наступне рівняння:

$$\operatorname{Re}(\lambda_k) \equiv F(\mu, x, y) = 0 .$$

Зауважимо, що говорячи про біфуркаційний аналіз, досі малося на увазі, що динамічна система і фазовий портрет її розв'язків залежать від параметра  $\mu$  дуже просто. А саме: не допускалося випадку, що для якихось параметрів  $\mu$  можуть народжуватися інші розв'язки, вважаючи, що визначені на нульовому кроці нерухомі точки  $(x^o, y^o)$  для параметра  $\mu_o$  зберігаються так до кінця. Насправді ж, десь всередині інтервалу можуть з'являтися і інші розв'язки системи нелінійних рівнянь, що визначають нерухомі точки. У цьому випадку говорять про більш складні біфуркації.

Розглянемо ще один приклад з галузі математичної біології - *логістичну модель популяції, що підлягає промислу*, - щоб проілюструвати біфуркаційний аналіз в багатовимірному випадку:

$$\dot{x} = \mu_1 x - x^2 - \mu_2 \tag{5.3}$$

Тут швидкість зростання популяції описується параметром  $\mu_1$ , а другий параметр (доданок  $\mu_2$ ) моделює вилучення з популяції певного числа особин в одиницю часу. Положення атракторів отриманої динамічної системи визначається квадратичним алгебраїчним рівнянням:

$$\dot{x} = \mu_1 x - x^2 - \mu_2 = 0 , \tag{5.4}$$

розв'язок якого можна отримати аналітично:

$$x_o(\mu) = \frac{\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1^2 - 4\mu_2}}{2} . \tag{5.5}$$

Таким чином, система (5.3) має два атрактори  $x_o^1(\mu_1, \mu_2)$  і  $x_o^2(\mu_1, \mu_2)$ , які існують тільки, коли дискримінант квадратичного рівняння (5.4) більший за 0, або дорівнює нулю.

Зобразимо на площині  $(x, \mu)$  розв'язки цього рівняння, тобто параболу (рис. 5.2). На осі абсцис відкладемо параметр  $\mu_2$ , а про залежність від параметра  $\mu_1$  просто будемо пам'ятати. При заданому значенні параметра  $\mu_1 = A$ , будуть існувати два атрактори  $x_o^1(\mu_2)$  і  $x_o^2(\mu_2)$ . Але такі два атрактори

будуть існувати до критичного значення параметра  $\mu_2$ , для якого  $D = \mu_1^2 - 4\mu_2 = 0$ . Це критичне значення дорівнює

$$\mu_2^* = \frac{\mu_1^2}{4}$$

При значеннях параметра  $\mu_2 > \mu_2^*$  розв'язків квадратичного рівняння немає, відповідно, жодного атрактора динамічна система мати не буде.

Як нескладно переконатися, один з атракторів  $x_0(\mu_2)$  є стійким, інший нестійким (на рис. 5.2 пунктиром показана нестійка гілка). Як і раніше, стійкий атрактор відповідає асимптотичному значенню чисельності популяції, трохи зниженій відносно логістичної ємності середовища. Видно, що зі зростанням параметра  $\mu_2$  рівноважна чисельність популяції плавно знижується.

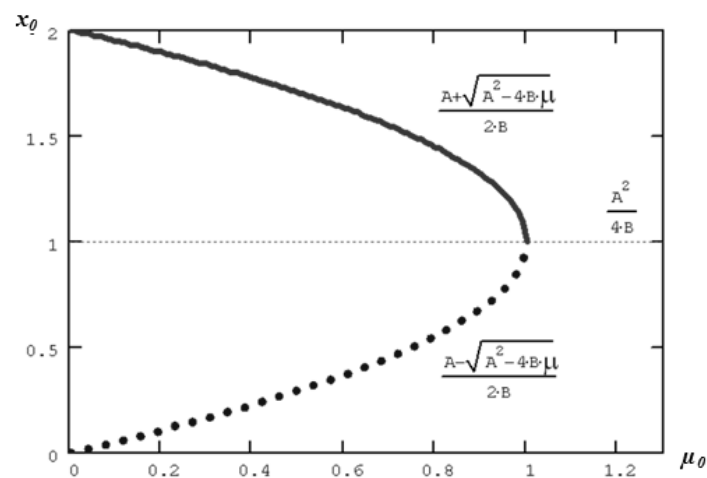


Рис 5.2. Атрактори системи (5.4), як функції параметра  $\mu_2$

При біфуркаційному значенні параметра  $\mu_2 = \mu_2^*$  відбувається взаємне народження і смерть стійкого і нестійкого атракторів. Така поведінка, наявність точки народження / смерті пари атракторів, дуже характерна для динамічних систем. Дану біфуркацію називають *особливістю типу складка*. У динамічних системах, що описуються, навіть, лише одним диференціальним рівнянням розглянутого типу, можуть існувати й інші типи біфуркацій, що часто зустрічаються на практиці.

При  $\mu_2 > \mu_2^*$  корені (5.5) відсутні, і, замість прагнення розв'язку звичайного диференціального рівняння (5.3) до деякого асимптотичного значення, воно в деякий момент часу обертається в нуль, а потім приймає (безглузді з біологічної точки зору) від'ємні значення (рис. 5.3). Іншими словами, при занадто інтенсивному промислі вся популяція вимирає.

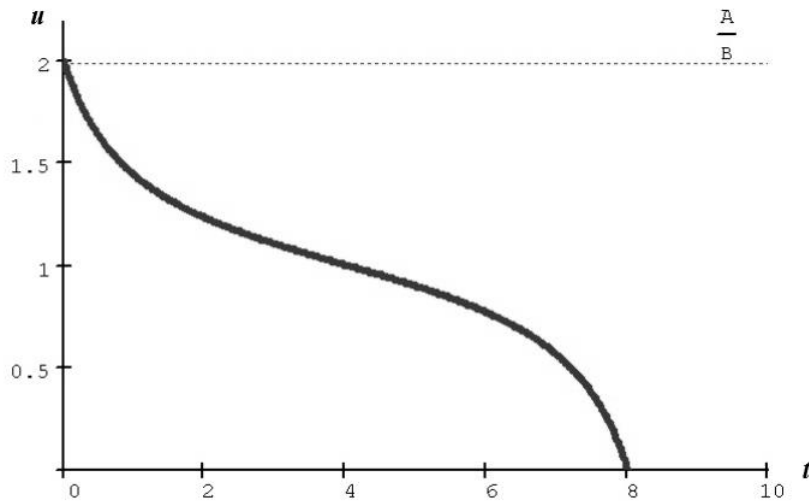


Рис. 5.3. Розв'язок рівняння (5.3) для закритичного значення  $\mu_2 = 1.1$

Відзначимо, що динамічну систему з двома параметрами (5.3) вдалося вирішити аналітично. При чисельному знаходженні такого типу біфуркацій за допомогою продовження по параметру, при  $\mu = \mu^*$  можна зустрітися з наступними труднощами. Спроба визначити розв'язок алгебраїчного рівняння при  $\mu > \mu^*$  нічого не дасть, оскільки розв'язку просто немає. Гілка розв'язку повертається назад, проходячи через точку  $\mu = \mu^*$ . У цьому випадку слід використовувати спеціальні модифікації алгоритму продовження по параметру.

### 5.3. Типові біфуркації нелінійних динамічних систем

**Біфуркація зміни стійкості.** Розглянемо динамічну систему з фазовим простором розмірності одиниця, еволюція якої описується рівнянням

$$\dot{x} = F(x, \mu) \quad (5.6)$$

і нехай  $x_0$  – стан рівноваги, тобто

$$F(x_0, \mu) = 0. \quad (5.7)$$

Тоді, якщо  $F'_\mu(x_0, \mu) \neq 0$  і функція  $s(\mu) = F'_x(x_0, \mu)$  неперервна по  $\mu$ , так, що рівняння (5.7) має розв'язок  $x_0$  в околі точки  $\mu$ , то стан рівноваги є грубим, оскільки малі зміни параметра не призводять до якісних змін фазового портрета системи – точка рівноваги не зникає і нових точок не з'являється.

Лінеаризоване рівняння для (5.6) має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t}(x - x_0) = F'_x(x_0, \mu)(x - x_0),$$

І стійкість точки  $x_0$  визначається знаком першої похідної: при  $F'_x(x_0, \mu) < 0$  – рівновага стійка, а при  $F'_x(x_0, \mu) > 0$  – нестійка. Якщо ж при деякому значенні  $\mu_0$  параметра  $\mu$  похідна  $F'_x(x_0, \mu)$  дорівнює нулю:  $F'_x(x_0, \mu) = 0$ , то при переході через точку  $\mu = \mu_0$  виникає зміна стійкого режиму на нестійкий, тобто в точці  $\mu = \mu_0$  має місце біфуркація зміни стійкості.

Наприклад, для динамічної системи  $\dot{x} = -\mu \sin x$  біфуркація зміни стійкості здійснюється при  $\mu = 0$ . При  $\mu > 0$  точка  $x_0 = 0$  задає грубий стійкий стан рівноваги, при  $\mu < 0$  вказана точка є грубим нестійким станом рівноваги. Зазначимо, що значення  $F'_x(x_0, \mu)$  є характеристичним ляпуновським показником динамічної системи.

**Біфуркація «сідло – вузол».** Нехай в еволюційному рівнянні (5.6) права частина задана в такий спосіб

$$F = -\mu_1 + \mu_2 x^2,$$

і для визначеності  $\mu_2 > 0$ . Тоді при  $\mu_1 > 0$  в системі існують два положення рівноваги – стійке і нестійке; при  $\mu_1 = 0$  вони збігаються в одне, а при  $\mu_1 < 0$  – зникають. В комбінованому просторі фазової координати і параметрів  $\{\mu_1, \mu_2\}$  біфуркаційна діаграма виглядає як складка (рис. 5.4). Тут координата точки поверхні, відкладена по вертикальній осі, задає положення точки рівноваги системи. Біфуркація  $\mu_1 = 0$  називається біфуркацією зриву рівноваги або сідло-вузловою біфуркацією (в точці  $\mu_1 = 0$  стійкий і нестійкий вузли зливаються в одну точку рівноваги і зникають при подальшій зміні параметра  $\mu_1$ ). Ситуація, коли за одним напрямком збурень система є стійкою, а за другим – нестійкою, називається сідловою. Вона також називається біфуркацією ковимірності одиниця, тому що визначається одною умовою: в точці біфуркації  $F'_x(x_0, \mu_0) = 0$

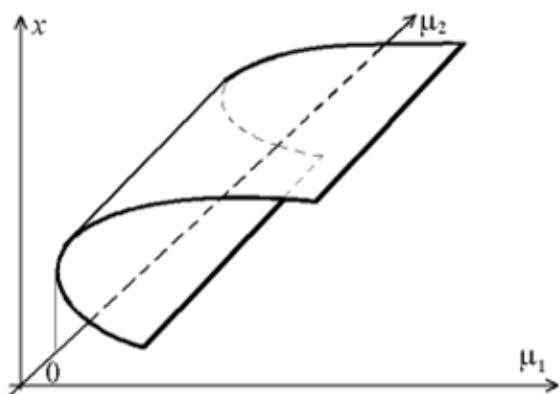


Рис. 5.4. Біфуркаційна діаграма у вигляді складки

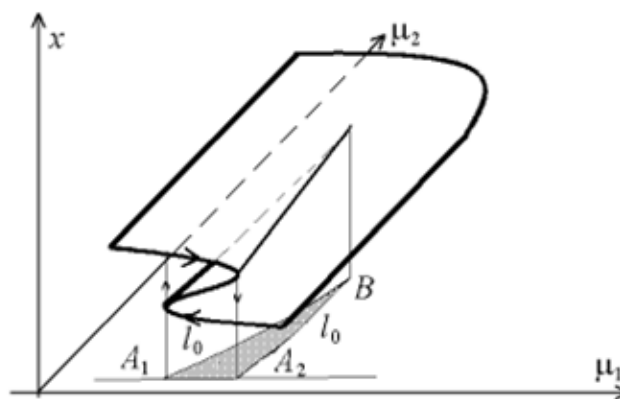


Рис. 5.5. Біфуркаційна діаграма у вигляді зборки

**Зборка.** Розглянемо рівняння

$$\dot{x} = c + \mu_1 x + \mu_2 x^3,$$

яке задає еволюцію системи, причому  $\mu_2 > 0$ . Залежно від значення параметра  $\mu_1$  в системі можуть існувати або три, або один грубий стан рівноваги. На рис. 5.5 така ситуація зображується поверхнею типа зборки. Зміна параметрів  $\mu_1$  і  $\mu_2$  вздовж кривих  $(\mu_1, \mu_2)$ , що йдуть під нульовим кутом до границі заштрихованої області – біфуркаційним лініям  $l_0$  (трансверсально до  $l_0$ ),

характеризується *гистерезісом*: рухаючись справа наліво система стрибком змінює свій стійкий стан при значеннях параметрів, відповідних точці  $A_1$  на площині параметрів  $\{\mu_1, \mu_2\}$ , а при поверненні за тією ж лінією стрибкоподібна зміна стійкої рівноваги відбувається в точці  $A_2$ . В точці В виконуються дві рівності  $F'_x = 0$ ,  $F''_x = 0$ , тому кажуть, що при значеннях параметрів, відповідних точці В, здійснюється біфуркація ковимірності два.

Складка і зборка – це елементарні особливості поверхонь, з яких може бути скомбінована будь-яка особливість поверхонь у тривимірному просторі  $(x, \mu_1, \mu_2)$ .

**Біфуркація народження циклу.** Нехай вимірність фазового простору дорівнює двом, і еволюційне рівняння має вигляд

$$\dot{x}_1 = F_1(x, \mu_1, \mu_2)$$

$$\dot{x}_2 = F_2(x, \mu_1, \mu_2)$$

Стійкість траєкторії визначається власними числами матриці  $DF = \{\partial F_i / \partial x_j\}$ ,  $i, j = 1, 2$ . Їх дійсні частини дають ляпуновські характеристичні показники динамічної системи. Запишемо вектор  $(x_1, x_2)$  в комплексній формі  $z = x_1 + ix_2 = |z|e^{i \arg z}$  і задамо еволюційне рівняння в комплексному вигляді, наприклад:

$$\dot{z} = (\mu + i\omega)z + Vz|z|^2. \quad (5.8)$$

Особлива точка системи:  $z_0 = 0$  – фокус, стійкий при  $\mu < 0$  і нестійкий при  $\mu > 0$ . Введемо полярні координати:

$$I = |z|^2, \quad \vartheta = \arg z. \quad (5.9)$$

Помножимо (5.8) на  $z^*$  і складемо з комплексно спряженим рівнянням. Отримаємо:  $\dot{I} = 2I(\mu + VI)$ .

Крім положення рівноваги  $I_0 = 0$  (що відповідає рівновазі  $z = 0$ ), існує ще один рівноважне значення

$$I_1 = -\mu/V. \quad (5.10)$$

Згідно (5.9),  $I_1 > 0$ . Тому воно існує тільки тоді, коли параметри  $\mu$  та  $V$  мають різні знаки. При  $I = const$  змінна  $\vartheta$  може змінюватися з часом, таким чином  $I_1$  в (5.10) визначає граничний цикл. В околі  $I = I_1$

$$\dot{I} = 2I(I - I_1).$$

При  $V < 0$  граничний цикл існує і стійкий при  $\mu > 0$ . Якщо ж  $\mu < 0$ , то граничний цикл відсутній; таким чином здійснюється народження граничного циклу із стійкого фокуса при переході параметру  $\mu$  через нуль із зміною від'ємних до додатних значень. При  $V > 0$  ситуація протилежна.

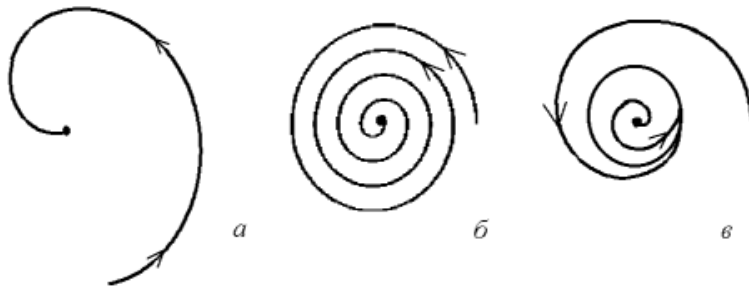


Рис. 5.6. Фазові траєкторії, що ілюструють народження стійкого граничного циклу

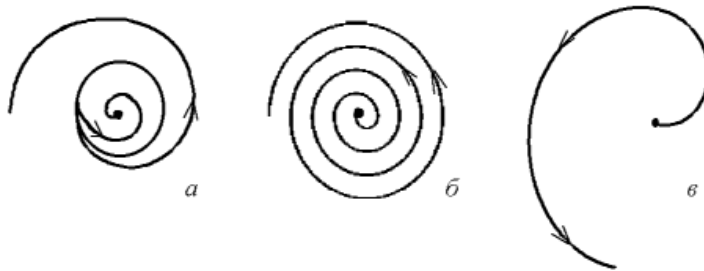


Рис. 5.7. Фазові траєкторії, що ілюструють зникнення нестійкого граничного циклу

При переході  $\mu$  від додатних до від'ємних значень через нуль здійснюється зникнення нестійкого граничного циклу. На рис. 5.6, а, б зображені фазові траєкторії перед, а на рис. 5.6, в – після народження граничного циклу. На рис. 5.7, а,б зображені траєкторії до зникнення циклу, а на рис. 5.7, в – після нього.

Таким чином, проблема дослідження динамічних систем пов'язана з вирішенням кількох класів завдань:

- рішення окремих задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) при фіксованих параметрах проводиться за допомогою алгоритмів Рунге-Кутти, Адамса або ін.

- пошук нерухомих точок системи ЗДР зводиться до розв'язання (найчастіше, чисельного) відповідної системи алгебраїчних рівнянь, тобто системи з правими частинами вихідної системи ЗДР, які прирівняні до нуля.

- користуючись властивістю близькості розв'язків вихідної (нелінійної) системи ЗДР, слід лінеаризувати вихідну систему в безпосередньому околі нерухомої точки, розклавши функції правих частин в ряд Тейлора і залишивши в ньому тільки лінійні члени.

- для лінеаризованої системи можна обчислити характеристичні числа, визначивши одразу тип і стійкість нерухомих точок. Тут знову виникають задачі чисельного розв'язання алгебраїчних рівнянь.

- описаним способом можна проаналізувати залежність положення атракторів та їх стійкість від параметрів моделі, тим самим отримавши дані про біфуркації.

5.4. Приклад дослідження структурної стійкості динамічної системи при виконанні завдання 2

Задана система нелінійних диференціальних рівнянь з двома параметрами  $(\rho, \varphi)$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \rho - \cos \varphi \\ \dot{\rho} = 2\rho(\lambda - \mu\rho - \sin \varphi) \end{cases} \quad (5.6)$$

1. Знайти всі особливі точки.
2. Розглянути поведінку системи поблизу кожної особливої точки.
3. В залежності від значень параметрів, визначити тип особливої точки (фокус, сідло, вузол, центр) та, за необхідності, стійкість.
4. Побудувати біфуркаційну множину.
5. Побудувати фазові портрети системи для декількох точок з біфуркаційної множини (побудувати фазові портрети системи за деякими конкретними значеннями параметрів).

**Розв'язання**

Особливі точки. Знайдемо особливі точки системи (5.6):

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = 0 \\ \dot{\rho} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho - \cos \varphi = 0 \\ 2\rho(\lambda - \mu\rho - \sin \varphi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho - \cos \varphi = 0 \\ \rho = 0 \\ \lambda - \mu\rho - \sin \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \cos \varphi = 0 \\ \sin \varphi = \lambda - \mu\rho \\ \cos \varphi = \rho \end{cases} \quad (5.7)$$

А. Розглянемо систему:

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

Розіб'ємо особливі точки, отримані з цієї системи на 2 випадки:

$$- \begin{cases} \rho_0 = 0 \\ \varphi_0 = 2\pi k + \pi/2 \end{cases} \quad k \in Z \quad (5.8)$$

$$- \begin{cases} \rho_0 = 0 \\ \varphi_0 = 2\pi k - \pi/2 \end{cases} \quad k \in Z \quad (5.9)$$

Б. Розглянемо систему:

$$\begin{cases} \sin \varphi = \lambda - \mu\rho \\ \cos \varphi = \rho \end{cases}$$

Піднесемо ліві частини до квадрату та просумуємо:

$$\begin{cases} (\lambda - \mu\rho)^2 + \rho^2 = 1 \\ \sin \varphi + \mu \cos \varphi = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2(1 + \mu^2) - 2(\mu\lambda)\rho + (\lambda^2 - 1) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \sin \varphi + \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \cos \varphi = \frac{\lambda}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^2(1+\mu^2) - 2(\mu\lambda)\rho + (\lambda^2 - 1) = 0 \\ \cos(\varphi - \arccos(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}})) = \frac{\lambda}{\sqrt{\mu^2+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2(1+\mu^2) - 2(\mu\lambda)\rho + (\lambda^2 - 1) = 0 \\ \varphi - \arccos(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}) = \pm \arccos(\frac{\lambda}{\sqrt{\mu^2+1}}) + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow$$

Отримали особливі точки у вигляді

$$\begin{cases} \rho_0 = \frac{\lambda\mu \pm \sqrt{\mu^2+1-\lambda^2}}{\mu^2+1} \\ \varphi_0 = \arccos(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}) \pm \arccos(\frac{\lambda}{\sqrt{\mu^2+1}}) + 2\pi k \end{cases} \quad k \in Z \quad (5.10)$$

## Лінеаризація

Розглянемо систему (5.6) у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = \tilde{\rho} - \cos \tilde{\varphi} \\ \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = 2\tilde{\rho}(\lambda - \mu\tilde{\rho} - \sin \tilde{\varphi}) \end{cases}$$

Розкладемо рівняння у ряд Тейлора, нехтуючи величинами порядків більших за одиницю, поблизу точки  $(\rho_0, \varphi_0)$ . Для початку, обчислимо частинні похідні для  $d\tilde{\rho}/dt$  та  $d\tilde{\varphi}/dt$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tilde{\varphi}}{dt}\right)'_{\rho} &= 1 & \left(\frac{d\tilde{\varphi}}{dt}\right)'_{\varphi} &= \sin \tilde{\varphi} \\ \left(\frac{d\tilde{\rho}}{dt}\right)'_{\rho} &= 2(\lambda - \mu\tilde{\rho} - \sin \tilde{\varphi}) & \left(\frac{d\tilde{\rho}}{dt}\right)'_{\varphi} &= -2\tilde{\rho} \cos \tilde{\varphi} \end{aligned}$$

Виконаємо заміну  $\rho = \tilde{\rho} - \rho_0$  та  $\varphi = \tilde{\varphi} - \varphi_0$ , отримаємо систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = (\sin \varphi_0)\varphi + \rho \\ \dot{\rho} = (-2\rho_0 \cos \varphi_0)\varphi + (2\lambda - 4\mu\rho_0 - 2 \sin \varphi_0)\rho \end{cases} \quad (5.11)$$

з матрицею коефіцієнтів  $M \begin{pmatrix} \sin \varphi_0 & 1 \\ -2\rho_0 \cos \varphi_0 & 2\lambda - 4\mu\rho_0 - 2 \sin \varphi_0 \end{pmatrix}$ .

Для подальшого дослідження нам знадобляться її визначник та слід:

$$trM = 1 - 2\rho_0 \cos \varphi_0; \quad \det M = 2(\cos \varphi_0 + \rho_0) \cos \varphi_0 + 2(\lambda - 2\mu\rho_0 - 1) \sin \varphi_0,$$

або, використовуючи (5.7),

$$\det M = 2\lambda \sin \varphi_0 + 2(\cos 2\varphi_0 - \mu \sin 2\varphi_0)$$

## Побудова біфуркаційної множини

Будемо досліджувати залежність типу точки від параметрів  $(\lambda, \mu)$ .

Відомо, що

1) для  $\det M < 0$  маємо особливу точку сідло

2) для  $0 < \det M < \left(\frac{trM}{2}\right)^2$  маємо особливу точку вузол

3) для  $\det M > \left(\frac{\text{tr}M}{2}\right)^2$  маємо особливу точку фокус

4) а також за  $\det M > 0$ :

- для  $\text{tr}M = 0$  маємо особливу точку центр
- для  $\text{tr}M > 0$  маємо нестійкий фокус або вузол
- для  $\text{tr}M < 0$  маємо стійкий фокус або вузол

Розглянемо особливі точки (5.8) 
$$\begin{cases} \rho_0 = 0 \\ \varphi_0 = 2\pi k + \pi/2 \end{cases} \quad k \in Z$$

Тоді матриця коефіцієнтів прийме вигляд

$$M \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2\lambda - 2 \end{pmatrix}; \quad \text{tr}M = 2\lambda - 1; \quad \det M = 2\lambda - 2.$$

Дізнаємось, при яких значеннях параметрів точка вигляду (5.8) – **сідло**

$$\det M < 0 \Rightarrow 2\lambda - 2 < 0 \Rightarrow \lambda < 1$$

Дізнаємось, при яких значеннях параметрів точка виду (5.8) – **фокус**

$$\det M > \left(\frac{\text{tr}M}{2}\right)^2 \Rightarrow 8\lambda - 8 > 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 \Rightarrow (2\lambda - 3)^2 < 0 - \text{фокуси відсутні}$$

Дізнаємось при яких значеннях параметрів (5.8) – **вузол**

$$0 < \det M < \left(\frac{\text{tr}M}{2}\right)^2 \Rightarrow \lambda > 1$$

Оскільки маємо  $\text{tr}M > 0$  для  $\lambda > 1$ , вузол – *нестійкий*

Розглянемо особливі точки (5.9) 
$$\begin{cases} \rho_0 = 0 \\ \varphi_0 = 2\pi k - \pi/2 \end{cases} \quad k \in Z$$

Тоді матриця коефіцієнтів, слід і детермінант приймають вигляд

$$M \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2\lambda + 2 \end{pmatrix}; \quad \text{tr}M = 2\lambda + 1; \quad \det M = -2\lambda - 2.$$

Дізнаємось при яких значеннях параметрів маємо **сідло**

$$\det M < 0 \Rightarrow -2\lambda - 2 < 0 \Rightarrow \lambda > -1$$

Дізнаємось при яких значеннях параметрів маємо **фокус**

$$\det M > \left(\frac{\text{tr}M}{2}\right)^2 \Rightarrow -8\lambda - 8 > 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 \Rightarrow (2\lambda + 3)^2 < 0 - \text{фокуси відсутні}$$

Дізнаємось при яких значеннях параметрів маємо **вузол**

$$0 < \det M < \left(\frac{\text{tr}M}{2}\right)^2 \Rightarrow \lambda < -1. \text{ Оскільки маємо } \text{tr}M < 0 \text{ для } \lambda < -1, \text{ вузол – } \textit{стійкий}.$$

Розглянемо особливі точки (5.10). У даному прикладі не будемо досліджувати типи особливих точок (5.10), а розглянемо значення параметрів  $(\lambda, \mu)$ , за яких особливі точки (5.10) – зникають. Це відбудеться якщо виконуються нерівності:

$$\mu^2 + 1 - \lambda^2 < 0; \quad \left| \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \right| > 1; \quad \left| \frac{\lambda}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \right| > 1.$$

Очевидно, що друге рівняння не виконується завжди, а третє еквівалентне першому, тому

$$\mu^2 + 1 - \lambda^2 < 0 \Rightarrow \lambda^2 > \mu^2 + 1.$$

Тобто для  $\lambda \in [-\sqrt{\mu^2 + 1}, \sqrt{\mu^2 + 1}]$ , окрім особливих точок (5.8), (5.9), маємо ще не досліджені на тип точки (5.10), а при  $\lambda \notin [-\sqrt{\mu^2 + 1}, \sqrt{\mu^2 + 1}]$  особливі точки (5.10) зникають.

Використовуючи знайдені залежності параметрів, побудуємо графік біфуркацій та розіб'ємо його на декілька зон. Використана програма *gnuplot*.

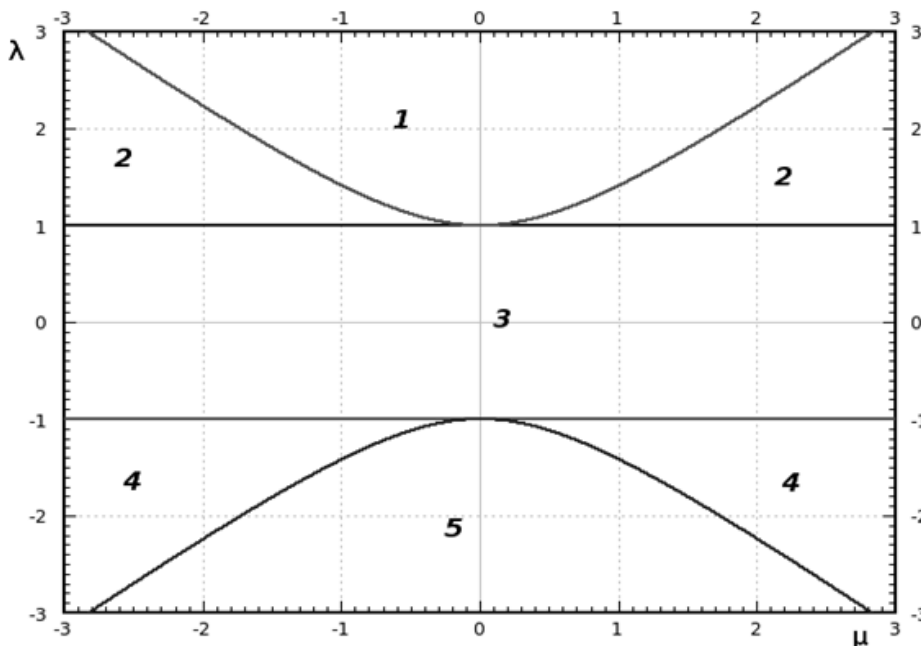


Рис. 5.4. Біфуркаційна множина системи (5.6)

Типи точок у зонах:

1. (3) – нестійкі вузли, (4) – сідла, (5) – відсутні
2. (3) – нестійкі вузли, (4) – сідла, (5) – присутні
3. (3) – сідла, (4) – сідла, (5) – присутні
4. (3) – сідла, (4) – стійкі вузли, (5) – присутні
5. (3) – сідла, (4) – стійкі вузли, (5) – відсутні
- 6.

**Фазові портрети системи зі заданими параметрами**

**Параметри, що належать зоні 1**

$$\text{Візьмемо } \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 0 \end{cases}. \quad \text{Особливі точки (5.8)} - \begin{cases} \rho_0 = 0 \\ \varphi_0 = 2\pi k + \pi/2 \end{cases} \quad k \in Z.$$

$$\text{Особливі точки (5.9)} - \begin{cases} \rho_0 = 0 \\ \varphi_0 = 2\pi k - \pi/2 \end{cases} \quad k \in Z .$$

Фазовий портрет нелінійної системи (5.6) за заданих параметрах:

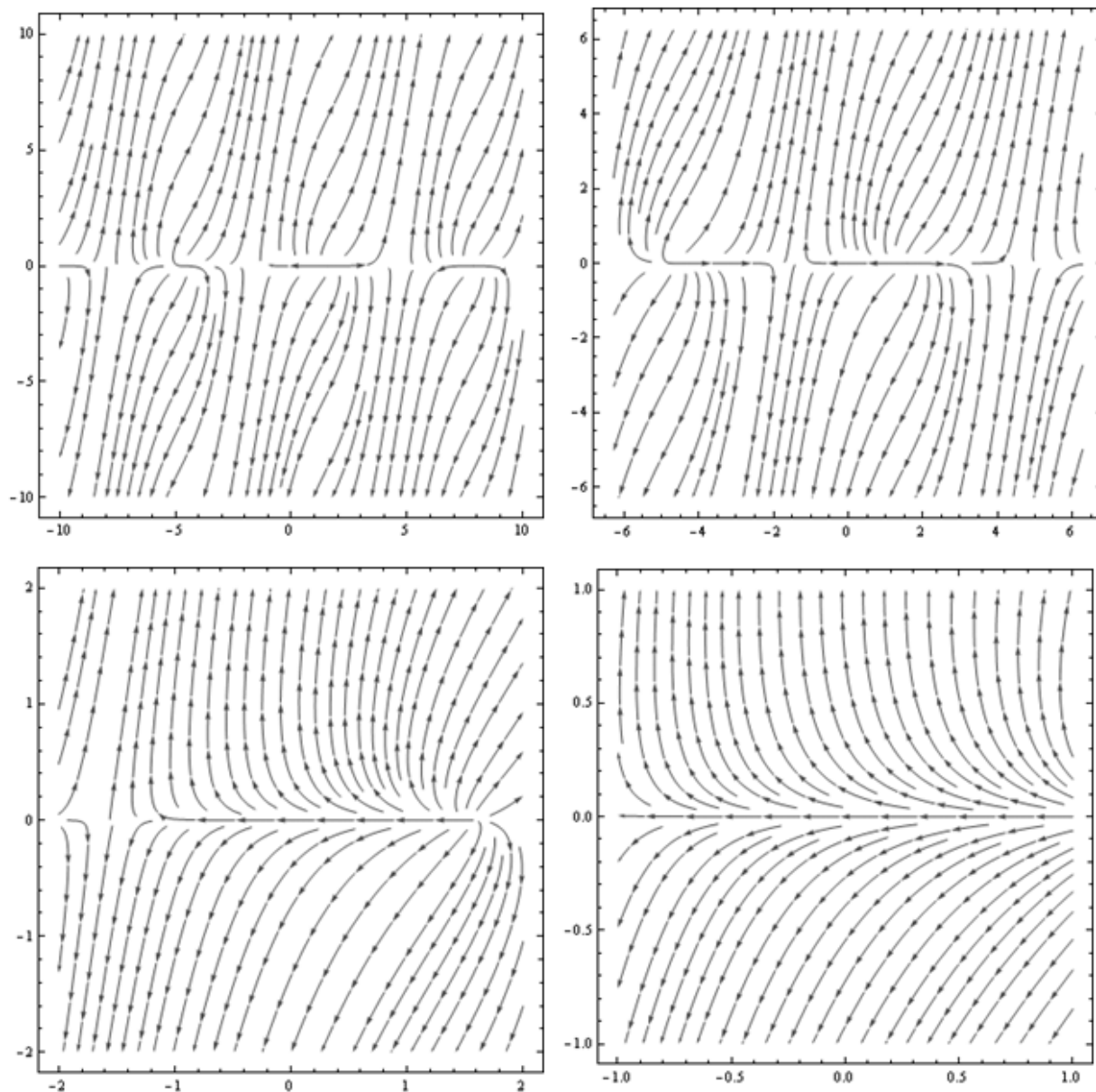


Рис. 5.5. Фазовий портрет системи (5.6) для параметрів із зони 1

Параметри, що належать зоні 2. Візьмемо  $\begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 2 \end{cases}$ . Особливі точки (5.8) –

$$\begin{cases} \rho_0 = 0 \\ \varphi_0 = 2\pi k + \pi/2 \end{cases} \quad k \in Z .$$

$$\text{Особливі точки (5.9)} - \begin{cases} \rho_0 = 0 \\ \varphi_0 = 2\pi k - \pi/2 \end{cases} \quad k \in Z .$$

$$\text{Особливі точки (5.10) - } \begin{cases} \rho_0 = \frac{4 \pm 1}{5} \\ \varphi_0 = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \pm \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi m \end{cases} \quad m \in Z$$

Фазовий портрет нелінійної системи (5.6) за заданих параметрах:

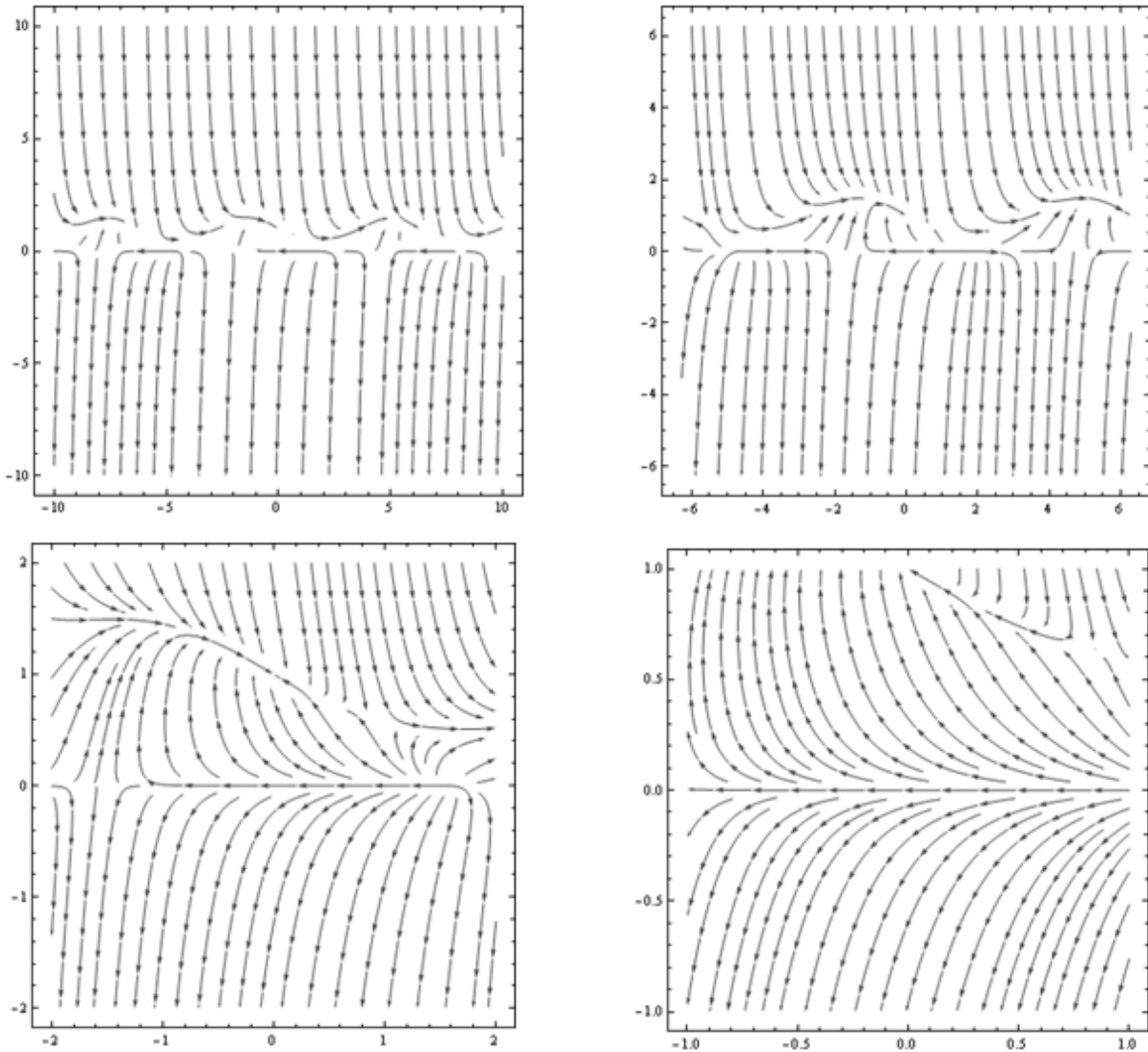


Рис. 5.6. Фазовий портрет системи (5.6) для параметрів із зони 2

Параметри, що належать зоні 3. Візьмемо  $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$ . Особливі точки (5.8) –

$$\begin{cases} \rho_0 = 0 \\ \varphi_0 = 2\pi k + \pi/2 \end{cases} \quad k \in Z .$$

Особливі точки (5.9) –  $\begin{cases} \rho_0 = 0 \\ \varphi_0 = 2\pi k - \pi/2 \end{cases} \quad k \in Z .$

Особливі точки 5.(10) –  $\begin{cases} \rho_0 = \pm 1 \\ \varphi_0 = \pi m \end{cases} \quad m \in Z .$

Фазовий портрет нелінійної системи (5.6) за заданих параметрах:

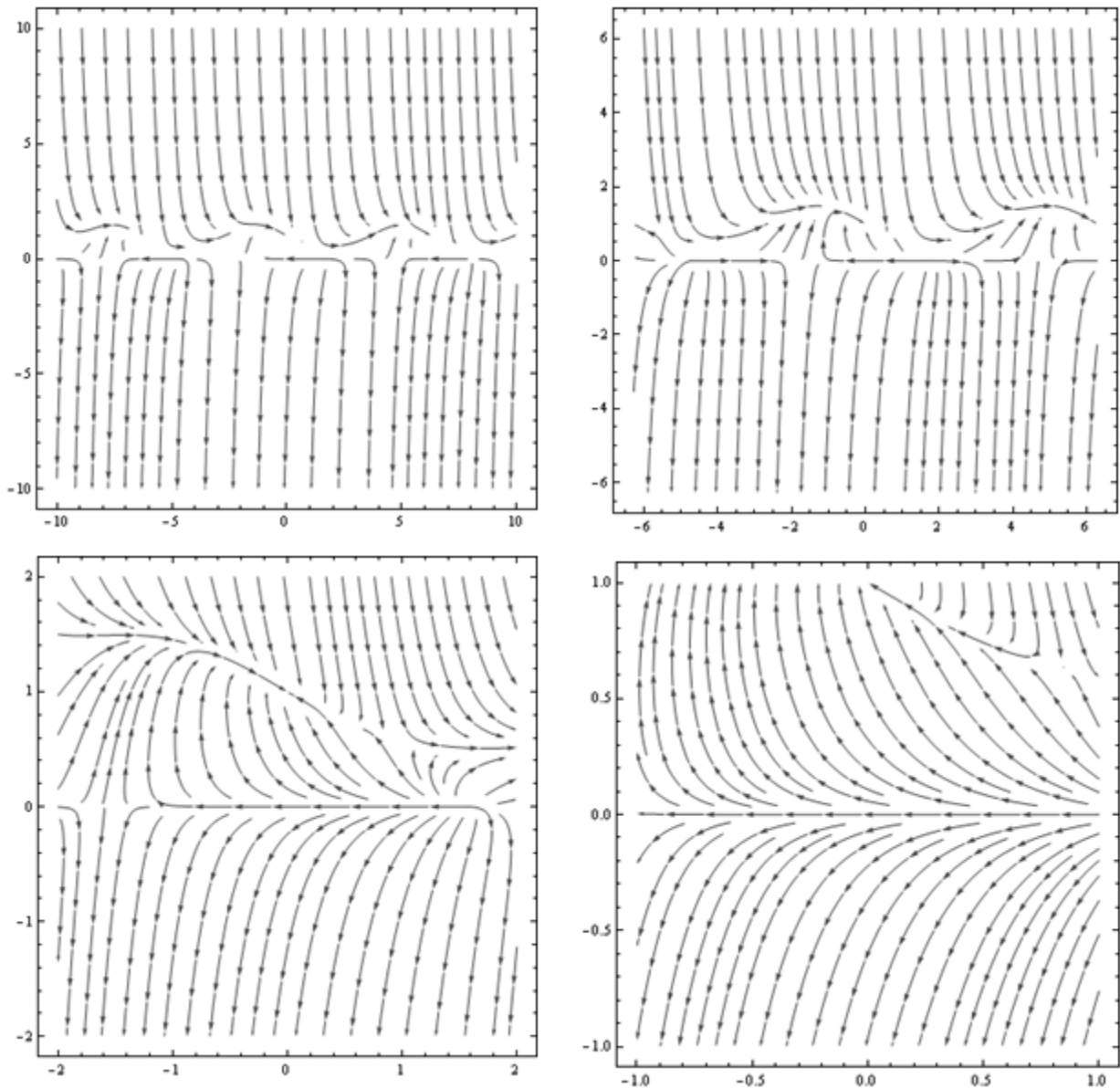


Рис. 5.7. Фазовий портрет системи (5.6) для параметрів із зони 3

Параметри, що належать зоні 4. Візьмемо  $\begin{cases} \lambda = -2 \\ \mu = -2 \end{cases}$ . Особливі точки (5.8) –

$$\begin{cases} \rho_0 = 0 \\ \varphi_0 = 2\pi k + \pi/2 \end{cases} \quad k \in Z .$$

$$\text{Особливі точки (5.9) – } \begin{cases} \rho_0 = 0 \\ \varphi_0 = 2\pi k - \pi/2 \end{cases} \quad k \in Z .$$

$$\text{Особливі точки (5.10) – } \begin{cases} \rho_0 = \frac{4 \pm 1}{5} \\ \varphi_0 = -\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \mp \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi m \end{cases} \quad m \in Z .$$

Фазовий портрет нелінійної системи (5.6) за заданих параметрах:

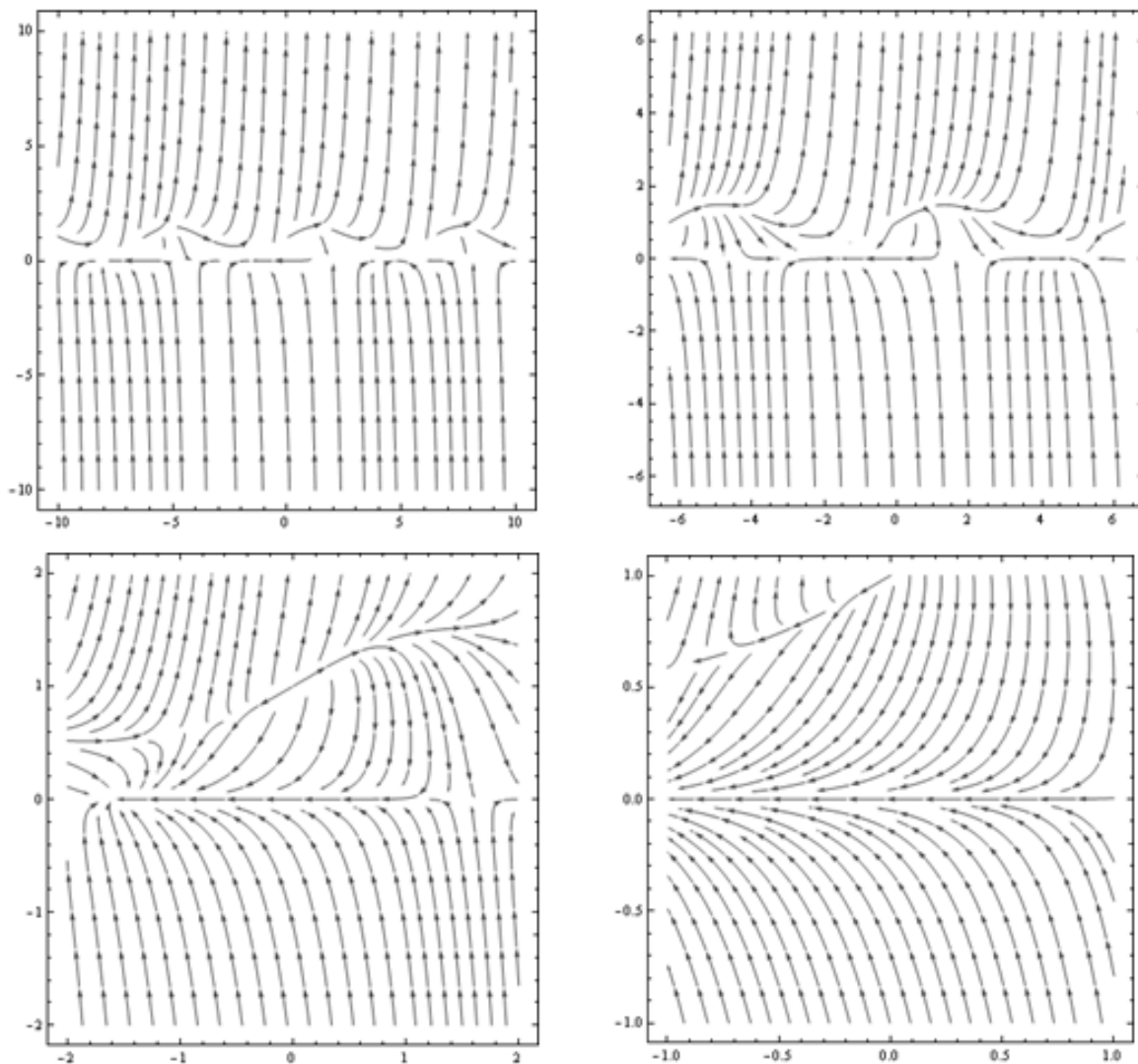


Рис. 5.8. Фазовий портрет системи (5.6) для параметрів із зони 4

Параметри, що належать зоні 5. Візьмемо  $\begin{cases} \lambda = -2 \\ \mu = 0 \end{cases}$ . Особливі точки (3) –

$$\begin{cases} \rho_0 = 0 \\ \varphi_0 = 2\pi k + \pi/2 \end{cases} \quad k \in Z .$$

Особливі точки (4) –  $\begin{cases} \rho_0 = 0 \\ \varphi_0 = 2\pi k - \pi/2 \end{cases} \quad k \in Z .$

Фазовий портрет нелінійної системи (1) за заданих параметрах:

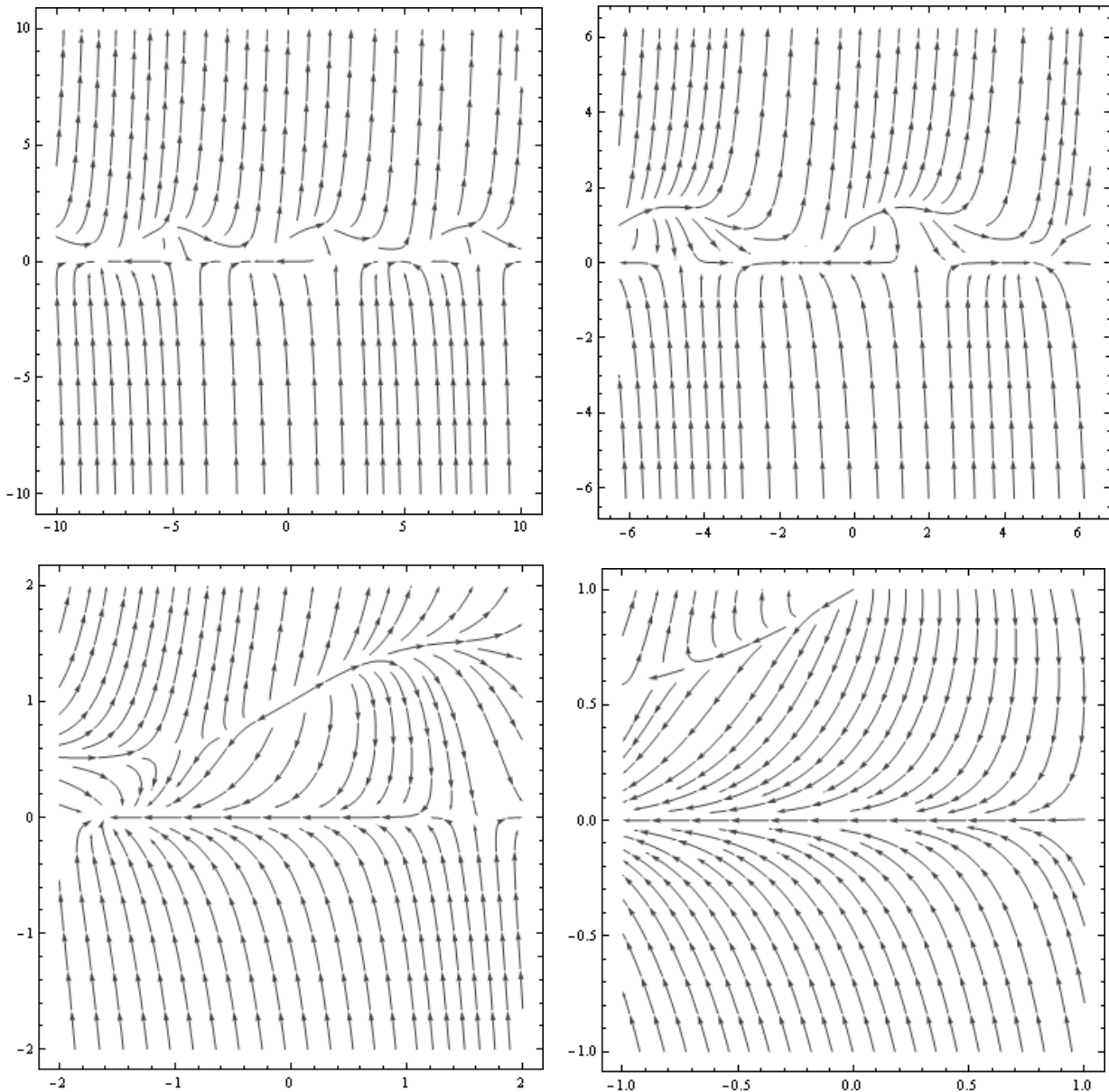


Рис. 5.9. Фазовий портрет системи (5.6) для параметрів із зони 5

## 6. Підведення підсумків навчальної практики з обчислень

Після закінчення терміну практики здобувачі вищої освіти звітують про виконання програми та індивідуального завдання викладачу. Письмовий звіт про проходження практики є формою звітності здобувача вищої освіти про проходження практики.

Звіт з практики є основним документом, який підтверджує проходження практики здобувачем та характеризує самостійну роботу здобувача на базі практики.

При складанні звіту здобувачі керуються програмою практики і повністю описують в ньому виконання доручень. Матеріалом для складання звіту є нормативні матеріали, літературні джерела і т. ін. Звіт складає кожен здобувач індивідуально відповідно до вимог. Звіт складається з наступних частин: постановка завдання; теоретичні розрахунки; програмна реалізація; результати досліджень біфуркаційних множин і побудови фазових портретів динамічних систем.

У найближчі два тижні після завершення практики здобувач повинен захистити відповідно оформлений звіт перед керівником практики від кафедри.

Керівник оцінює повноту і якість виконання завдань навчальної практики з обчислень, відповідність зібраної інформації завданню, якість оформлення звіту; проводить співбесіду з метою визначення обізнаності здобувача й на цій підставі виставляє диференційовану оцінку з практики.

## **7. Вимоги до структури, змісту та оформлення звіту з навчальної практики з обчислень**

Рекомендується, щоб звіт з практики включав:

- титульну сторінку (форма наведена в додатку 1);
- індивідуальну програму практики;
- зміст;
- вступ, який повинен містити мету і завдання практики;
- аналітичну частину, яка повинна містити аналіз набутого досвіду;
- спеціальну частину, яка повинна містити результати розв'язування поставлених у індивідуальному завданні задач та аргументовані пропозиції щодо застосування пакетів прикладних програм та сучасних інформаційних технологій для дослідження динамічних систем;
- висновки, в яких характеризуються перелік виконаних робіт та отримані результати, доводиться їх відповідність поставленим цілям і завданням практики;
- перелік джерел інформації, що були використані у звіті;
- додатки, де наводяться зібрані у ході практики з обчислень звітні, аналітичні та ілюстративні матеріали.

Звіт з практики має наступну структуру (табл. 7.1).

**Загальна структура звіту з практики з обчислень**

Назва структурної частини	Рекомендований обсяг, сторінок
Титульна сторінка	1
Зміст	1
Вступ	1 – 2
Основна частина роботи, поділена на розділи, підрозділи та пункти	10 – 15
Висновки	1 – 2
Список використаних джерел	не менше 5 найменувань
Додатки (за необхідністю)	до 10

Звіт оформлюється за допомогою комп'ютера відповідно до загальних правил. Обсяг звіту повинен становити 15 – 20 сторінок.

**Мова і стиль звіту.** Звіт з практики виконується державною мовою. Мовностилістичне оформлення обумовлюється особливостями наукового стилю, враховуючи:

- формально-логічний спосіб викладення, смислової завершеності, цілісності та зв'язності думок;
- відсутність емоційного забарвлення наукового тексту;
- об'єктивність викладу, смислової точності, стислості, ясності;
- використання спеціальної термінології з посиланням на авторитетні джерела (підручники, довідкові та нормативні видання тощо).

**Основні технічні вимоги до оформлення звіту:**

- текстовий редактор – MS Word 2003 і вище;
- міжрядковий інтервал – 1,5,
- кегель Times New Roman – 14,
- абзацний виступ – 1,25 см,
- поля зверху та знизу – 2 см, ліворуч – 3 см, праворуч – 1,5 см.
- при використанні в тексті звіту цитат або положень здобувач зобов'язаний робити на них посилання. Запозичення тексту без посилань на першоджерело не дозволяється.

Звіт з практики з обчислень оцінюється за 100-бальною шкалою. Якщо звіт, представлений на кафедру для перевірки, не відповідає вище зазначеним вимогам, він може бути повернений на доопрацювання без коригування термінів здачі та захисту.

На титульній сторінці звіту зазначається дата його подачі на перевірку. Термін перевірки залежить від сукупного обсягу наданих на перевірку робіт. Мінімальний термін перевірки – тиждень з моменту подачі на кафедру.

Захист звіту – це усна бесіда керівника зі здобувачем з приводу недоліків роботи та питань, що виникли в процесі перевірки, в ході якої здобувач має змогу дати відповіді на ці питання, аргументовано відстояти свою точку зору і отримати бали за захист звіту. Квота балів за захист є однією з найбільших в структурі оцінки (структура оцінки наведена в табл. 7.2.)

Таблиця 7.2

**Система критеріїв оцінювання звіту та розподіл балів за ними**

Критерії оцінки	Допустима кількість балів (max)
<b>Зміст роботи:</b>	<b>35</b>
наявність всіх структурних елементів роботи	15
правильність опису структурних елементів роботи	20
<b>Захист роботи:</b>	<b>35</b>
пояснення послідовності дій під час проходження практики та підготовки звіту	15
розкриття сутності та призначення структурних елементів звіту	20
<b>Оформлення роботи</b>	<b>15</b>
відповідає вимогам	5
частково відповідає вимогам	3
не відповідає вимогам	1
<b>Терміни здачі звіту</b>	<b>15</b>
своєчасно (протягом двох тижнів після закінчення)	15
із затримкою (протягом періоду підготовки бакалаврської роботи)	5
<b>Загальна кількість балів</b>	<b>100</b>

## 8. Критерії оцінювання

Проходження практики оцінюється керівником за допомогою критеріїв, що характеризують співвідношення вимог до рівня компетентностей і показників оцінки за рейтинговою шкалою. Зміст критеріїв спирається на компетентнісні характеристики, визначені НРК для бакалаврського рівня вищої освіти (подано нижче).

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
<b>Знання</b>		
♦ концептуальні наукові та практичні знання, критичне осмислення теорій, принципів, методів і понять у сфері професійної діяльності та/або навчання	Відповідь відмінна – правильна, обґрунтована, осмислена. Характеризує наявність: - концептуальних знань; - високого ступеню володіння станом питання; - критичного осмислення основних теорій, принципів, методів і понять у навчанні та професійній діяльності	95-100
	Відповідь містить негрубі помилки або описки	90-94
	Відповідь правильна, але має певні неточності	85-89
	Відповідь правильна, але має певні неточності й недостатньо обґрунтована	80-84
	Відповідь правильна, але має певні неточності, недостатньо обґрунтована та осмислена	74-79
	Відповідь фрагментарна	70-73
	Відповідь демонструє нечіткі уявлення студента про об'єкт вивчення	65-69
	Рівень знань мінімально задовільний	60-64
	Рівень знань незадовільний	<60
<b>Уміння/навички</b>		
♦ поглиблені когнітивні та практичні уміння/навички, майстерність та інноваційність на рівні, необхідному для розв'язання складних спеціалізованих задач і практичних проблем у сфері професійної діяльності або навчання	Відповідь характеризує уміння: - виявляти проблеми; - формулювати гіпотези; - розв'язувати проблеми; - обирати адекватні методи та інструментальні засоби; - збирати та логічно й зрозуміло інтерпретувати інформацію; - використовувати інноваційні підходи до розв'язання завдання	95-100
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності з негрубими помилками	90-94
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації однієї вимоги	85-89
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації двох вимог	80-84
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації трьох вимог	74-79
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації чотирьох вимог	70-73
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності при виконанні завдань за зразком	65-69
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання при виконанні завдань за зразком, але з неточностями	60-64
	рівень умінь/навичок незадовільний	<60
<b>Комунікація</b>		

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
<p>♦ донесення до фахівців і нефахівців інформації, ідей, проблем, рішень, власного досвіду та аргументації;</p> <p>♦ збір, інтерпретація та застосування даних;</p> <p>♦ спілкування з професійних питань, у тому числі іноземною мовою, усно та письмово</p>	<p>Вільне володіння проблематикою галузі.</p> <p>Зрозумілість відповіді (доповіді). Мова:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- правильна;</li> <li>- чиста;</li> <li>- ясна;</li> <li>- точна;</li> <li>- логічна;</li> <li>- виразна;</li> <li>- лаконічна.</li> </ul> <p>Комунікаційна стратегія:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- послідовний і несуперечливий розвиток думки;</li> <li>- наявність логічних власних суджень;</li> <li>- доречна аргументації та її відповідність відстоюваним положенням;</li> <li>- правильна структура відповіді (доповіді);</li> <li>- правильність відповідей на запитання;</li> <li>- доречна техніка відповідей на запитання;</li> <li>- здатність робити висновки та формулювати пропозиції</li> </ul>	95-100
	<p>Достатнє володіння проблематикою галузі з незначними хибами.</p> <p>Достатня зрозумілість відповіді (доповіді) з незначними хибами.</p> <p>Доречна комунікаційна стратегія з незначними хибами</p>	90-94
	<p>Добре володіння проблематикою галузі.</p> <p>Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано три вимоги)</p>	85-89
	<p>Добре володіння проблематикою галузі.</p> <p>Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано чотири вимоги)</p>	80-84
	<p>Добре володіння проблематикою галузі.</p> <p>Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано п'ять вимог)</p>	74-79
	<p>Задовільне володіння проблематикою галузі.</p> <p>Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано сім вимог)</p>	70-73
	<p>Часткове володіння проблематикою галузі.</p> <p>Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано дев'ять вимог)</p>	65-69
	<p>Фрагментарне володіння проблематикою галузі.</p> <p>Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано 10 вимог)</p>	60-64
	<p>Рівень комунікації незадовільний</p>	<60
<b><i>Відповідальність і автономія</i></b>		
<p>♦ управління складною технічною або професійною діяльністю чи проектами;</p>	<p>Відмінне володіння компетенціями менеджменту особистості, орієнтованих на:</p> <p>1) управління комплексними проектами, що передбачає:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- дослідницький характер навчальної діяльності, позначена вмінням самостійно оцінювати різноманітні життєві</li> </ul>	95-100

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ спроможність нести відповідальність за вироблення та ухвалення рішень у непередбачуваних робочих та/або навчальних контекстах;</li> <li>◆ формування суджень, що враховують соціальні, наукові та етичні аспекти;</li> <li>◆ організація та керівництво професійним розвитком осіб та груп;</li> <li>◆ здатність продовжувати навчання із значним ступенем автономії</li> </ul>	<p>ситуації, явища, факти, виявляти і відстоювати особисту позицію;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- здатність до роботи в команді;</li> <li>- контроль власних дій;</li> </ul> <p>2) відповідальність за прийняття рішень в непередбачуваних умовах, що включає:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- обґрунтування власних рішень положеннями нормативної бази галузевого та державного рівнів;</li> <li>- самостійність під час виконання поставлених завдань;</li> <li>- ініціативу в обговоренні проблем;</li> <li>- відповідальність за взаємовідносини;</li> </ul> <p>3) відповідальність за професійний розвиток окремих осіб та/або груп осіб, що передбачає:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- використання професійно-орієнтовних навичок;</li> <li>- використання доказів із самостійною і правильною аргументацією;</li> <li>- володіння всіма видами навчальної діяльності;</li> </ul> <p>4) здатність до подальшого навчання з високим рівнем автономності, що передбачає:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- ступінь володіння фундаментальними знаннями;</li> <li>- самостійність оцінних суджень;</li> <li>- високий рівень сформованості загальнонавчальних умінь і навичок;</li> <li>- самостійний пошук та аналіз джерел інформації</li> </ul>	
	Упевнене володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано дві вимоги)	90-94
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано три вимоги)	85-89
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано чотири вимоги)	80-84
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано шість вимог)	74-79
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано сім вимог)	70-73
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано вісім вимог)	65-69
	Рівень відповідальності і автономії фрагментарний	60-64
	Рівень відповідальності і автономії незадовільний	<60

## Рекомендована література

1. Практикум з диференційних рівнянь [Електронний ресурс] : навч. посіб. / Л.С. Коряшкіна, О.Д. Станіна, Ю.О. Шевченко; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка» - Дніпро : НТУ «ДП», 2024 – 178 с. <https://ir.nmu.org.ua/handle/123456789/167658>
2. Кормен, Томас Г. Вступ до алгоритмів : Переклад з англійської третього видання : [укр.] Introduction to Algorithms: Third Edition : [пер. з англ.] / Томас Г. Кормен, Чарлз Е. Лейзерсон, Роналд Л. Рівест, Кліфорд Стайн, –К.: К. І. С., 2019. – 1288 с.
3. Трінтіна Н.А., Негоденко О.В., Гаманюк І.М., Шевченко С.М. Програмування мовою Python. Навчальний посібник підготовлено до друку для самостійної роботи студентів вищих навчальних закладів. – К.: ННІТ ДУТ, 2022. – 113 с.
4. Копей В. Б. Мова програмування Python для інженерів і науковців : навч. посіб. / В. Б. Копей. - Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2019. – 272 с.
5. Костюченко А.О. Основи програмування мовою Python: навчальний посібник. Ч.: ФОП Баликіна С.М., 2020. – 180 с.
6. Кренивич А.П. Python у прикладах і задачах. Частина 2. Об'єктно-орієнтоване програмування. Навчальний посібник – К.: ВПЦ "Київський Університет", 2020. – 152 с.
7. Основи програмування. Python. Частина 1 [Електронний ресурс]: підручник для студ. спеціальності 122 "Комп'ютерні науки" /А.В. Яковенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 195 с.
8. Руденко В., Жугастров О. Інформатика. Основи алгоритмізації та програмування мовою Python. Харків: Ранок, 2019. – 192 с.

### Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. <https://www.python.org/>
2. <https://docs.python.org/3/index.html>
3. <https://docs.python.org/3/library/index.html>
4. <https://www.w3schools.com/python/default.asp>

# ДОДАТКИ

## Додаток 1

### Зразок оформлення титульної сторінки

Міністерство освіти і науки України  
Національний технічний університет  
«Дніпровська політехніка»



Кафедра системного аналізу та управління

## ЗВІТ З НАВЧАЛЬНОЇ ПРАКТИКИ З ОБЧИСЛЕНЬ

Початок практики: «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ року

Закінчення практики: «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ року

Студента (ки) групи

\_\_\_\_\_ (шифр групи, прізвище та ініціали) \_\_\_\_\_ (підпис)

Керівник практики:

\_\_\_\_\_ (Прізвище та ініціали, шифр групи) \_\_\_\_\_ (підпис)

Дніпро – 2024

## Приклад програмної реалізації побудови фазових портретів динамічних систем на мові Python

### Лінійна система рівняння

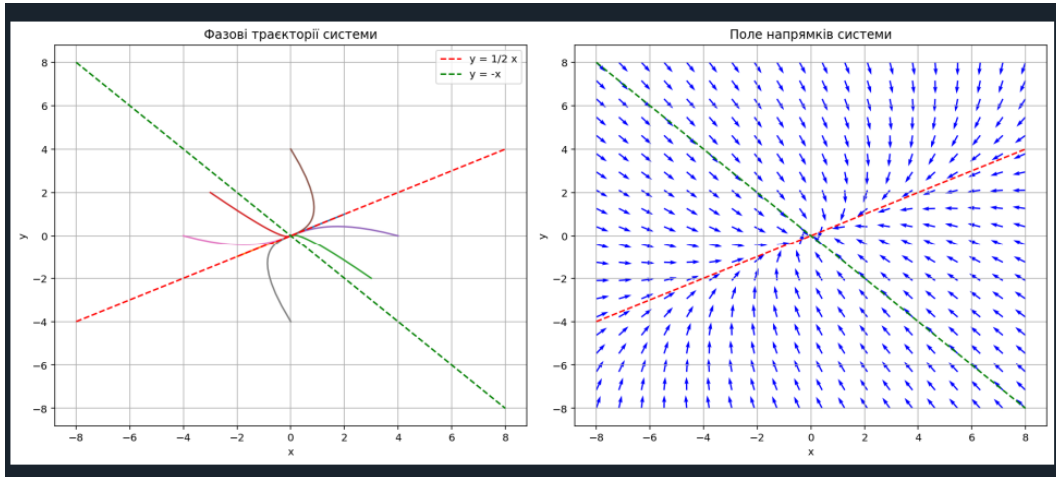
$$y' = \frac{x - 4y}{2y - 3x}$$

```

1  import numpy as np
2  from scipy.integrate import odeint
3  import matplotlib.pyplot as plt
4
5  # Система диференціальних рівнянь
6  def system(X, t=0):
7      x, y = X
8      dxdt = -3*x + 2*y
9      dydt = x - 4*y
10     return [dxdt, dydt]
11
12     # Час інтегрування
13     t = np.linspace(0, 10, 200)
14
15     # Початкові умови для різних траєкторій
16     initial_conditions = [
17         [2, 1], [-2, -1], [3, -2], [-3, 2], [4, 0], [0, 4], [-4, 0], [0, -4]
18     ]
19
20     fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(14, 6))
21
22     # Фазові траєкторії
23     for ic in initial_conditions:
24         sol = odeint(system, ic, t)
25         ax1.plot(sol[:, 0], sol[:, 1])
26
27     # Додаємо асимптоти (власні напрямки)
28     x_line = np.linspace(-8, 8, 200)
29     ax1.plot(x_line, 0.5*x_line, 'r--', label="y = 1/2 x")
30     ax1.plot(x_line, -1*x_line, 'g--', label="y = -x")
31
32     ax1.set_title("Фазові траєкторії системи")
33     ax1.set_xlabel("x")
34     ax1.set_ylabel("y")
35     ax1.legend()
36     ax1.grid(True)
37
38     # Поле напрямків
39     x_vals = np.linspace(-8, 8, 20)
40     y_vals = np.linspace(-8, 8, 20)
41     X, Y = np.meshgrid(x_vals, y_vals)
42     U = -3*X + 2*Y
43     V = X - 4*Y
44     N = np.sqrt(U**2 + V**2)
45     U, V = U/N, V/N
46
47     ax2.quiver(X, Y, U, V, color="blue")
48     ax2.plot(x_line, 0.5*x_line, 'r--')
49     ax2.plot(x_line, -1*x_line, 'g--')
50     ax2.set_title("Поле напрямків системи")
51     ax2.set_xlabel("x")
52     ax2.set_ylabel("y")
53     ax2.grid(True)
54
55     plt.tight_layout()
56     plt.show()
57

```

## Результат



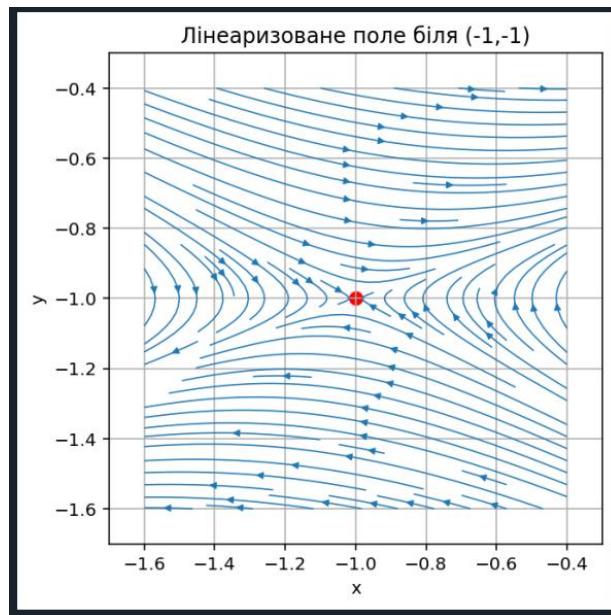
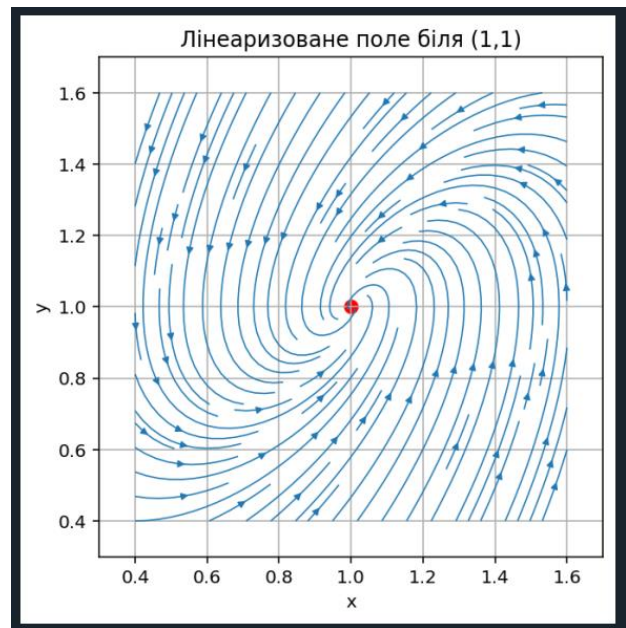
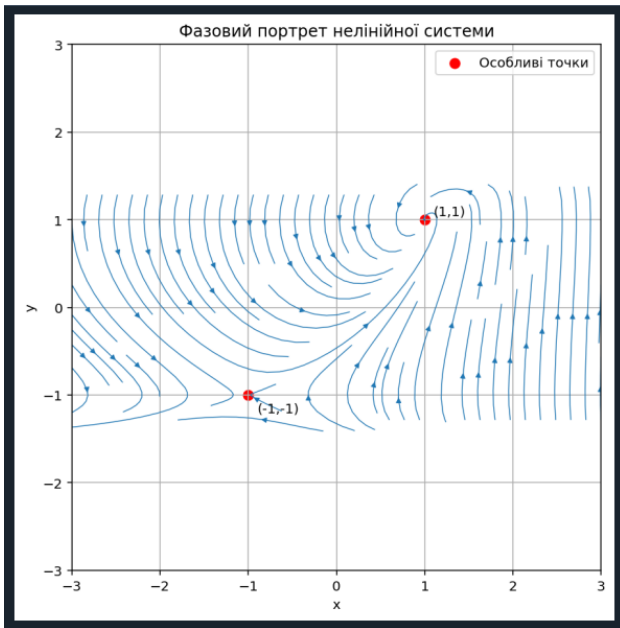
Нелінійна система: 
$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2) \\ \dot{y} = e^x - e^y \end{cases}$$

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import numpy.linalg as la
5
6 # Визначення системи
7 def f(x, y):
8     """dx/dt"""
9     return np.log(2 - y**2)
10
11 def g(x, y):
12     """dy/dt"""
13     return np.exp(x) - np.exp(y)
14
15 def J_entries(x, y):
16     """Матриця Якобі в точці (x,y)"""
17     a = 0.0
18     b = -2.0 * y / (2.0 - y**2)
19     c = np.exp(x)
20     d = -np.exp(y)
21     return np.array([[a, b], [c, d]], dtype=float)
22
23 # Особливі (стаціонарні) точки
24 equilibria = [(1.0, 1.0), (-1.0, -1.0)]
25
26 # 1) Нелінійний фазовий портрет
27 xlist = np.linspace(-3, 3, 400)
28 ylist = np.linspace(-3, 3, 400)
29 X, Y = np.meshgrid(xlist, ylist)
30
31 U = np.zeros_like(X)
32 V = np.zeros_like(Y)
33
34 # Уникаємо log(<=0)
35 mask_valid = (2 - Y**2) > 1e-8
36 U[mask_valid] = f(X[mask_valid], Y[mask_valid])
37 V[mask_valid] = g(X[mask_valid], Y[mask_valid])
38
39 # Нормалізація векторів для кращої візуалізації
40 N = np.sqrt(U**2 + V**2)
41 U2 = U / (N + 1e-8)
42 V2 = V / (N + 1e-8)
43
44 plt.figure(figsize=(7,7))
45 plt.streamplot(X, Y, U2, V2, density=1.2, linewidth=0.7, arrowsize=0.8)
46 plt.scatter([p[0] for p in equilibria], [p[1] for p in equilibria], color='red', s=50, label='Особливі точки')
47 plt.text(1.1, 1.05, '(1,1)')
48 plt.text(-0.9, -1.2, '(-1,-1)')
49 plt.xlim(-3, 3); plt.ylim(-3, 3)
50 plt.xlabel('x'); plt.ylabel('y')
51 plt.title('Фазовий портрет нелінійної системи')
52 plt.grid(True); plt.legend()
53 plt.show()
54
55 # 2) Лінеаризовані поля поблизу точок
56 def plot_linearized(x0, y0, title):
57     """Побудова лінеаризованого поля біля (x0, y0)"""
58     J = J_entries(x0, y0)
59     grid = np.linspace(-0.6, 0.6, 25)
60     Xg, Yg = np.meshgrid(grid, grid)
61     Ulin, Vlin = np.zeros_like(Xg), np.zeros_like(Yg)
62
63     for i in range(Xg.shape[0]):
64         for j in range(Xg.shape[1]):
65             dx, dy = Xg[i, j], Yg[i, j]
66             vec = J @ np.array([dx, dy])
67             Ulin[i, j], Vlin[i, j] = vec[0], vec[1]
68
69     plt.figure(figsize=(5,5))
70     plt.streamplot(Xg + x0, Yg + y0, Ulin, Vlin, density=1.2, linewidth=0.8, arrowsize=0.8)
71     plt.scatter([x0], [y0], color='red', s=50)
72     plt.title(title)
73     plt.xlabel('x'); plt.ylabel('y')
74     plt.xlim(x0-0.7, x0+0.7); plt.ylim(y0-0.7, y0+0.7)
75     plt.grid(True)
76     plt.show()
77
78 # Поблизу (1,1)
79 plot_linearized(1.0, 1.0, 'Лінеаризоване поле біля (1,1)')
80
81 # Поблизу (-1,-1)
82 plot_linearized(-1.0, -1.0, 'Лінеаризоване поле біля (-1,-1)')
83
84 # 3) Власні значення та вектори
85 for p in equilibria:
86     J = J_entries(p)
87     vals, vecs = la.eig(J)
88     print(f"Особлива точка {p}:")
89     print("Матриця Якобі:\n", J)
90     print("Власні значення:", vals)
91     print("Власні вектори (стовпці):\n", vecs)
92
93

```

## Результати досліджень



## Приклад програмної реалізації побудови біфуркаційних множин і відповідних фазових портретів (завдання 2)

**Тема:** Біфуркації стаціонарних точок динамічних систем.

**Мета:** дослідити біфуркації нерухомих точок у динамічній системі другого порядку, визначити вплив параметра «а» на стійкість та тип рівноваги, побудувати біфуркаційну множину й фазові портрети.

**Завдання:** Задане рівняння динамічної системи

$$\ddot{x} - (a - x^2) \dot{x} + x = 0$$

1. Знайти всі особливі точки.
2. Розглянути поведінку системи поблизу кожної особливої точки.
3. В залежності від значень параметрів, визначити тип особливої точки (фокус, сідло, вузол, центр) та її стійкість.
4. Побудувати біфуркаційну множину.
5. Побудувати фазові портрети системи для декількох точок з областей, на які розділила фазовий простір біфуркаційна множина (побудувати фазові портрети системи за деякими конкретними значеннями параметрів).
6. Виконати дослідження структурної стійкості динамічної системи:

**Виконання завдання:**

### 1. Знаходимо всі особливі точки системи:

Задане рівняння є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку:  $\ddot{x} - (a - x^2) \dot{x} + x = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (a - x^2)y - x \end{cases}$$

Усі особливі точки

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow y = 0, \quad \dot{y} = 0 \Rightarrow -x = 0$$

Система має лише одну особливу точку при будь-яких значеннях параметра а: (0,0).

### 2. Поведінка системи поблизу особливої точки (0,0):

Для аналізу стійкості та типу особливої точки (0,0) проведемо лінеаризацію системи навколо цієї точки.

Обчислимо матрицю Якобі  $J(x,y)$  для системи

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) = y \\ \dot{y} = Q(x,y) = (a - x^2)y - x \end{cases}$$

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(y) & \frac{\partial}{\partial y}(y) \\ \frac{\partial}{\partial x}((a - x^2)y - x) & \frac{\partial}{\partial y}((a - x^2)y - x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2xy - 1 & a - x^2 \end{pmatrix}$$

Обчислимо матрицю Якобі в особливій точці (0,0):

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2(0)(0) - 1 & a - 0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

**3. Тип особливої точки та її стійкість:**  $\text{Tr } J = a$ ,  $\det J = 1$ ,  $\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$ ,  $D = a^2 - 4$ .

Класифікація (бо  $\det J = 1 > 0$ , сідла немає):

$a < -2$ :  $D > 0$ ,  $\lambda_{1,2} < 0 \rightarrow$  стійкий вузол.

$a = -2$ : кратне дійсне значення  $\rightarrow$  вироджений стійкий вузол.

$-2 < a < 0$ :  $D < 0$ ,  $\text{Re } \lambda = \frac{a}{2} < 0 \rightarrow$  стійкий фокус (спіраль).

$a = 0$ :  $\lambda = \pm i$  (лінійно центр). Нелінійність  $-(x^2)$  у дає затухання, тож фактично слабкий стійкий фокус (див. нижче енергетичний аргумент).

$0 < a < 2$ :  $D < 0$ ,  $\text{Re } \lambda = \frac{a}{2} > 0 \rightarrow$  нестійкий фокус (спіраль-джерело).

$a = 2$ : вироджений нестійкий вузол.

$a > 2$ :  $D > 0$ ,  $\lambda_{1,2} > 0 \rightarrow$  нестійкий вузол.

Результат дослідження зведемо у таблиці 1.

Таблиця 1

Умова на $a$	Тип точки	Стійкість
$a > 2$	Нестійкий вузол	Нестійка
$a = 2$	Вироджений нестійкий вузол	Нестійка
$0 < a < 2$	Нестійкий фокус	Нестійка
$a = 0$	Центр	Нейтральна
$-2 < a < 0$	Стійкий фокус	Стійка
$a = -2$	Вироджений стійкий вузол	Стійка
$a < -2$	Стійкий вузол	Стійка

**4. Біфуркаційна множина** – це сукупність точок у просторі параметрів (в нашому випадку це просто вісь  $a$ ), де якісна структура фазового портрета системи змінюється. В нашому випадку, біфуркації відбуваються при зміні типу особливої точки.

$\Sigma = \{-2, 0, 2\}$ .  $a = 0$ : зміна знаку  $\text{Re } \lambda \Rightarrow$  біфуркація Гопфа (стабільність рівноваги змінюється).

$a = \pm 2$ : перехід «вузол $\leftrightarrow$ фокус» (дискримінант = 0); стабільність не змінюється – небіфуркаційні межі типів.

Критичні значення параметра: 1)  $a = 0$ : зміна типу з фокусу на центр. 2)  $a = \pm 2$ : зміна типу з вузла на фокус.

Біфуркаційна множина:  $\{a \in \mathbb{R} \mid a = 0, \pm 2\}$

## 5. Ескіз фазових портретів (за областями)

$a < -2$ : стійкий вузол, усі траєкторії входять у нуль.

$-2 < a \leq 0$ : стійкий фокус; при

$a = 0$  — «слабке» затухання.

$0 < a < 2$ : нестійкий фокус у нулі + один стійкий цикл (атрактор).

$a \geq 2$ : нестійкий вузол у нулі + стійкий цикл (атрактор).

Нульові ізокліни:  $y = 0$  та  $y = \frac{x}{a-x^2}$  (корисні для ручних ескізів).

Фазові портрети (приклади)

$a = -3$ : Стійкий вузол (траєкторії збігаються до початку).

$a = -1$ : Стійкий фокус (спіралі до початку).

$a = 0$ : Центр (замкнуті орбіти).

$a = 1$ : Нестійкий фокус (спіралі від початку).

$a = 3$ : Нестійкий вузол (траєкторії розбігаються).

## 6. Структурна стійкість

Система структурно стійка при  $a \neq 0, \pm 2$

Це означає, що зміна параметра

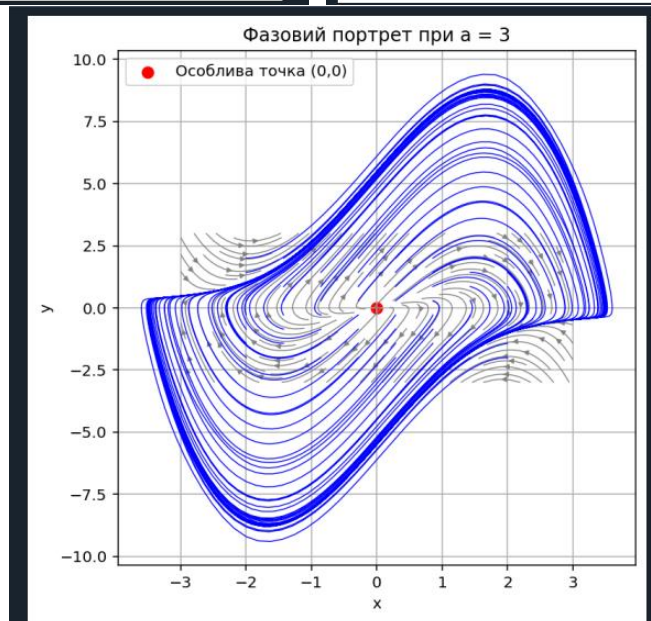
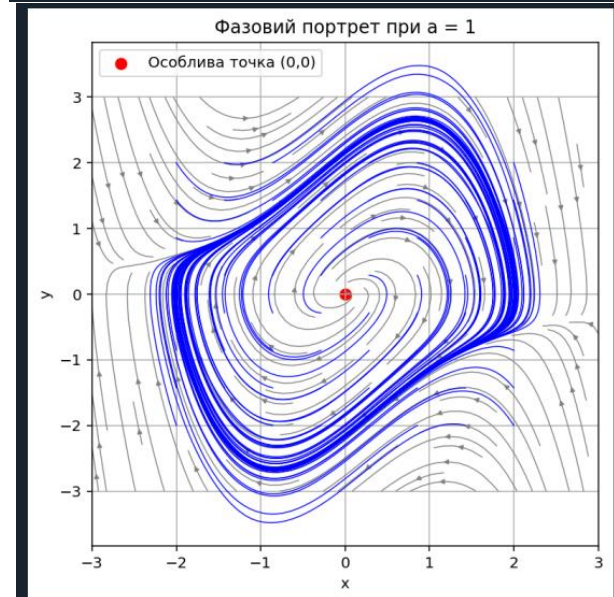
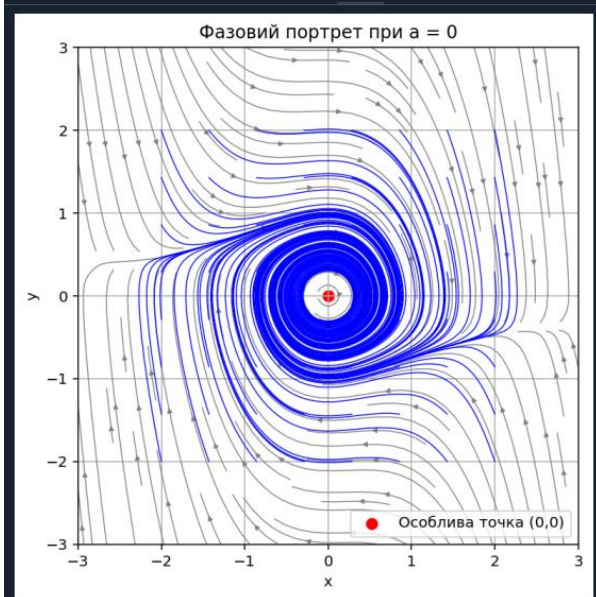
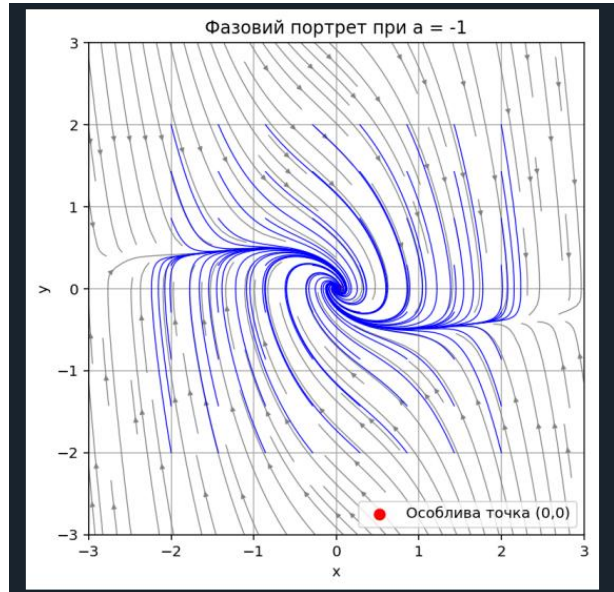
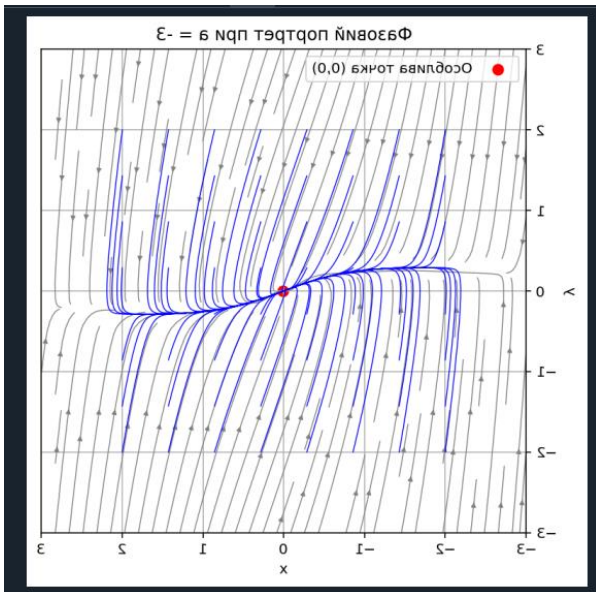
$a$  не призводить до різких змін у динаміці системи, за винятком точок біфуркації  $a=0$  та  $a=\pm 2$ .

При  $a = 0, \pm 2$ : має негіперболічні точки (центр або вироджені вузли).

## 7. Програмна реалізація (Python)

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import solve_ivp
4
5 def system(t, z, a):
6     x, y = z
7     dxdt = y
8     dydt = (a - x**2) * y - x
9     return [dxdt, dydt]
10
11 def plot_phase_portrait(a, tmax=20, trajectories=8):
12     x = np.linspace(-3, 3, 30)
13     y = np.linspace(-3, 3, 30)
14     X, Y = np.meshgrid(x, y)
15     U, V = Y, (a - X**2)*Y - X
16     N = np.sqrt(U**2 + V**2)
17     U, V = U/(N+1e-8), V/(N+1e-8)
18
19     plt.figure(figsize=(6, 6))
20     plt.streamplot(X, Y, U, V, density=1.2, linewidth=0.7, arrowsize=0.7, color="gray")
21
22     # траєкторії
23     for x0 in np.linspace(-2, 2, trajectories):
24         for y0 in np.linspace(-2, 2, trajectories):
25             sol = solve_ivp(system, [0, tmax], [x0, y0], args=(a,),
26                             t_eval=np.linspace(0, tmax, 1000))
27             plt.plot(sol.y[0], sol.y[1], 'b', lw=0.7)
28
29     plt.scatter(0, 0, c="red", s=50, label="Особлива точка (0,0)")
30     plt.title(f"Фазовий портрет при a = {a}")
31     plt.xlabel("x"); plt.ylabel("y")
32     plt.legend(); plt.grid(True)
33     plt.show()
34
35 # приклади
36 for a in [-3, -1, 0, 1, 3]:
37     plot_phase_portrait(a)
38
```

# Результат побудови фазових портретів при конкретних значеннях параметрів



**Висновок:**

У ході виконання завдання досліджено біфуркацію нерухомих точок динамічної системи:

$$\ddot{x} - (a - x^2) \dot{x} + x = 0$$

Було знайдено, що система має одну особливу точку в  $(0,0)$ , тип якої залежить від параметра  $a$ . Ключовими точками біфуркації є  $a = \pm 2$  і  $a = 0$ , де система змінює свій характер (з фокуса на центр або з вузла на фокус). Зміна значення параметра  $a$  призводить до різних типів точок рівноваги: стабільний/нестабільний вузол, стабільний/нестабільний фокус або центр.

Дослідження стійкості цієї точки за допомогою лінеаризації виявило її залежність від параметра  $a$ . Біфуркаційна множина складається з точок  $a = -2, 0, 2$ , де відбувається зміна типу особливої точки.

Навчальне видання

**Коряшкіна** Лариса Сергіївна  
**Алексєєв** Олексій Михайлович  
**Гаранжа** Дмитро Миколайович  
**Шевченко** Юлія Олександрівна

## **НАВЧАЛЬНА ПРАКТИКА З ОБЧИСЛЕНЬ**

**Методичні рекомендації**  
для здобувачів ступеня бакалавра  
освітньо-професійної програми «Системний аналіз»  
зі спеціальності 124 Системний аналіз

Видано в авторській редакції.

Електронний ресурс.  
Підписано до видання 28.08.2025. Авт. арк. 1,60.

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка».  
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.