УДК 669.1–669.9

Козечко В.І., магістр *(Дніпровський національний університет ім. О.Гончара)*
Науковий керівник: Козечко В.А., к.т.н., доцент кафедри технологій машинобудування та матеріалознавства *(НТУ «Дніпровська політехніка»)*

ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП ГІББСА ЯК ОСНОВА ТЕРМОМЕХАНІЧНОГО АНАЛІЗУ В СУЧАСНІЙ МЕТАЛУРГІЇ

Процес створення і розвитку нових технологій у металургії, таких як безперервний розлив сталі, виробництво труб та інших деталей обертання за допомогою відцентрового лиття вимагає розробки нових методів, що дозволяють розв’язувати, задачі, які виникають у зв'язку з цим. Відмінною рисою таких задач є: наявність неоднорідних нерівномірних температурних полів; наявність масових і поверхневих силових впливів; існування, як мінімум, двох фаз матеріалу, що утворить об'єкт дослідження; рух межі розділу фаз, пов'язаний зі зміною температури на всьому протязі процесу, що розглядається. [1]

Однак процеси, що виникають під час руху і кристалізації розплаву в полі відцентрових сил, дуже складні і не завжди піддаються комплексному опису.

У даній роботі на прикладі кристалізації прямолінійного стрижня розглянута можливість застосування диференціальних рівнянь до визначення термомеханічного стану тіл у процесі кристалізації.

Припустимо, що перепад температури відбувається тільки в напрямку довжини стрижня, тому тепловіддачу з бічної поверхні стрижня враховуємо в рівнянні теплопровідності як невід’ємне джерело тепла [2]

$$W = -\frac{\alpha_{2,\text{ кон}}}{h}\left[\theta_2(t_k, x) - \theta_{\text{ср}}\right] \tag{1}$$

де $h = \frac{s}{p}$, $\theta_{\text{ср}}$ – температура навколишнього середовища.

Бічна поверхня частини стрижня, матеріал якої знаходиться в рідкій фазі, передбачається теплоізольованою. Математична постановка задачі в момент часу t_k має вигляд

$$\frac{\partial^2\theta_1(t_k,x)}{\partial x^2} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2\theta_2(t_k,x)}{\partial x^2} - \frac{\alpha_{2,\text{ кон}}}{h\lambda_2}\left[\theta_2(t_k, x) - \theta_{\text{ср}}\right] - \frac{\varepsilon_{12}\sigma_0}{h\lambda_2}\left[\theta_2^4(t_k, x) - \theta_{\text{ср}}^4\right] = 0. \tag{3}$$

Зовнішні граничні умови й умови на межі розділу фаз запишемо:

$$\theta_1(t_k, 0) = f, \tag{4}$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial\theta_2(t_k,x)}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \alpha_{1,\text{ кон}}\left[\theta_2(t_k, l) - \theta_{\text{ср}}\right] + \sigma_0\varepsilon_{12}\theta_2^4(t_k, l), \tag{5}$$

$$\theta_2\big(t_k, a(t_k)\big) = \theta_1(t_k, a(t_k) - \varDelta) = \theta^0, \tag{6}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial\theta_1(t_k,x)}{\partial x}\bigg|_{x=a(t_k)} = -\lambda_2 \frac{\partial\theta_2(t_k,x)}{\partial x}\bigg|_{x=a(t_k)} + \mu\rho_1[a(t_k) - a(t_{k+1})]. \tag{7}$$

Для розв’язання задачі (2) – (7) використаємо лінеаризацію [1]. При цьому умова (5) і рівняння (3) приймуть вигляд

$$-\lambda_2 \frac{\partial\theta_2(t_k,x)}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \alpha_1\left[\theta_2(t_k, l) - \theta_{\text{ср}}\right], \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2\theta_2(t_k,x)}{\partial x^2} - \frac{\alpha_2}{h\lambda_2}\left[\theta_2(t_k, x) - \theta_{\text{ср}}\right] = 0, \tag{9}$$

де $\alpha_1 = \alpha_{1,\text{ кон}} + \varepsilon_{12}\sigma_0 b_1(\theta)$, $\alpha_2 = \alpha_{2,\text{ кон}} + \varepsilon_{12}\sigma_0 b_2(\theta)$ – приведені коефіцієнти тепловіддачі, що враховують конвективний і променистий теплообмін.

Загальний розв’язок диференціальних рівнянь (2), (9) має вигляд

$$\theta_1(t_k, x) = C_1 x + C_2, \tag{10}$$

$$\theta_2(t_k, x) = C_3 e^{\sqrt{\frac{\alpha}{h\lambda_2}}x} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{h\lambda_2}}x} + \theta_{\text{ср}}. \tag{11}$$

З (4), (10), одержимо

$$C_2 = f. \tag{12}$$

Звідси одержимо:

$$C_1 = \frac{1}{\lambda_1}\sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}}\left(\theta^0 - \theta_{\text{ср}}\right)\left[\frac{\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}}}{\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}} + e^{2\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}(l-a(t_k))}\left(-\sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}} - \alpha_1\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_1 + \sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}}}{-\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}} + e^{-2\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}(l-a(t_k))}\left(-\sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}} + \alpha_1\right)}\right] - \frac{\mu\rho_1\left(a(t_k) - a(t_{k+1})\right)}{\lambda_1},$$

$$C_3 = \frac{\left(\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}}\right)\left(\theta^0 - \theta_{\text{ср}}\right)}{e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}a(t_k)}\left[\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}}\right] + e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}(2l-a(t_k))}\left[-\sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}} - \alpha_1\right]},$$

$$C_4 = \frac{\left(-\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}}\right)\left(\theta^0 - \theta_{\text{ср}}\right)}{e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}a(t_k)}\left[-\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}}\right] + e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}(2l-a(t_k))}\left[-\sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}} + \alpha_1\right]}. \tag{13}$$

Тоді, підставляючи (12), (13) для визначення температурного поля в момент часу t_k одержимо співвідношення:

$$\theta_1(t_k, x) = \frac{1}{\lambda_1}\sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}}\left(\theta^0 - \theta_{\text{ср}}\right)\left[\frac{\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}}}{\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}} + e^{2\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}(l-a(t_k))}\left(-\sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}} - \alpha_1\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_1 + \sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}}}{-\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}} + e^{-2\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}(l-a(t_k))}\left(-\sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}} + \alpha_1\right)}\right] x - \frac{\mu\rho_1\left(a(t_k) - a(t_{k+1})\right)}{\lambda_1} x + f, \tag{14}$$

$$\theta_2(t_k, x) = \frac{\left(\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}}\right)\left(\theta^0 - \theta_{\text{ср}}\right) e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}x}}{e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}a(t_k)}\left[\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}}\right] + e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}(2l-a(t_k))}\left[-\sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}} - \alpha_1\right]} +$$

$$+ \frac{\left(-\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}}\right)\left(\theta^0 - \theta_{\text{ср}}\right) e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}x}}{e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}a(t_k)}\left[-\alpha_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}}\right] + e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{h\lambda_2}}(2l-a(t_k))}\left[-\sqrt{\frac{\alpha_2\lambda_2}{h}} + \alpha_1\right]} + \theta_{\text{ср}}. \tag{15}$$

Співвідношення (14), (15) є розв'язком задачі (2) – (7) і, використовуючи принцип Гіббса, разом з розв'язком контактної задачі за допомогою граничного переходу дозволяють одержати наближений аналітичний розв'язок задачі термов'язкопружності в довільний момент часу t.

Список використаних джерел:

1. A.V. Siasiev, R.O. Bilichenko (2024). Construction of a non-linear analytical model for the rotation parts building up process using regression analysis. Researches in Mathematics, 32(1), pp. 16–32 https://doi.org/10.15421/242413

2. Siasiev, A., Dreus, A., Horbonos, S., Balanenko, I., & Dziuba, S. (2020). The stressed-strained state of a rod at crystallization considering the mutual influence of temperature and mechanical fields. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3(5 (105), 38–49 https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.203330