МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ГЕОЛОГОРОЗВІДУВАЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра вищої математики

Особистий довідник студента з вищої математики

(Сьома частина)

Дніпро
НГУ
2016

Горбатов М.І. Особистий довідник студента з вищої математики
(сьома частина) / М.І. Горбатов, О.О. Сдвижкова; М-во освіти і науки України; Нац. гірн. ун-т. – Дніпро: НГУ, 2016. – 39 с.

Автори : М.І. Горбатов, ст. викл.
О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

Затверджено редакційною радою ДВНЗ «НГУ» (протокол № 1 від 26.01.2016) за поданням методичної комісії напряму підготовки «Гірництво» (протокол № 12 від 11.12.2015).

Відповідальна за випуск завідувач кафедри вищої математики
О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

ВСТУП

Сьома частина «Особистого довідника студента» містить у собі складову навчального курсу вищої математики з розділу "Інтегрування функцій кількох змінних».

У стислій формі автори намагалися сформулювати алгоритмічні приписи до математичних дій, не маючи на увазі конкурувати цим довідником із підручником або методичкою.

Структура довідника є дещо іншою. Він своєрідно доповнює методичні розробки, підручники, конспекти. Його можуть використовувати студенти всіх спеціальностей. На перших сторінках довідника знову подається шкільна навчальна актуальна інформація (мінімально необхідний обсяг), оскільки в математиці має місце особливо велика залежність наступних її розділів від попередніх, тобто поняття, правила, формули так званої елементарної математики неминуче і дуже часто доводиться застосовувати для розуміння понять, правил і формул так званої вищої математики.

Викладений у довіднику матеріал має допомогти студенту оволодіти різними математичними поняттями і методами, зробити їх простими і природними, має навчити максимально використовувати їх на практиці. Математичні поняття підкріплені фізичними та геометричними задачами, які дозволяють краще засвоїти викладену теорію, розібратися в її змісті, розвинути математичну культуру мислення.

Постійно і окремо у довіднику наголошується на вмінні розрізняти сенс однакових чи майже однакових за виглядом формул, якщо ці формули подають деякі образи на площині або в просторі, тобто студенту рекомендується навчитися переходити, так би мовити, із площини в простір, а також із простору на площину. При такому вмінні значно менше доведеться витрачати сил на запам’ятовування.

ТАБЛИЦЯ СТЕПЕНІВ, ЩО НАЙБІЛЬШ ЧАСТО ЗУСТРІЧАЮТЬСЯ

n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729				
4	16	64	256	1024					
5	25	125	625						
6	36	216							
7	49	343							
8	64	512							
9	81	729							
10	100								
11	121								
12	144								
13	169								
14	196								
15	225								
16	256								
17	289								
18	324								
19	361								
20	400								
21	441								
22	484								
23	529								
24	576								
25	625								
26	676								
27	729								
28	784								
29	841								
30	900								
31	961								
32	1024								
33	1089								

!!! Числа, поміщені в цій таблиці, будемо називати «хорошими», тому що з них добуваються націло корені (наприклад: $\sqrt[10]{1024}=2$; $\sqrt[4]{625}=5$; $\sqrt[6]{729}=3$) і вони записуються як степені цілих чисел (наприклад: $1024=2^{10}$, $625=5^4$, $729=3^6$).

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

$$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$$
$$(A\pm B)^3=A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3$$
$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$$
$$(A\pm B)\left(A^2\mp AB+B^2\right)=A^3\pm B^3$$

!!! Ліва частина цих рівностей має вигляд степеня або добутку, а права – многочлена. Якщо ці формули застосувати справа-наліво, одержуємо правила згортання алгебраїчної суми в компактний вид степеня або добутку, наприклад:

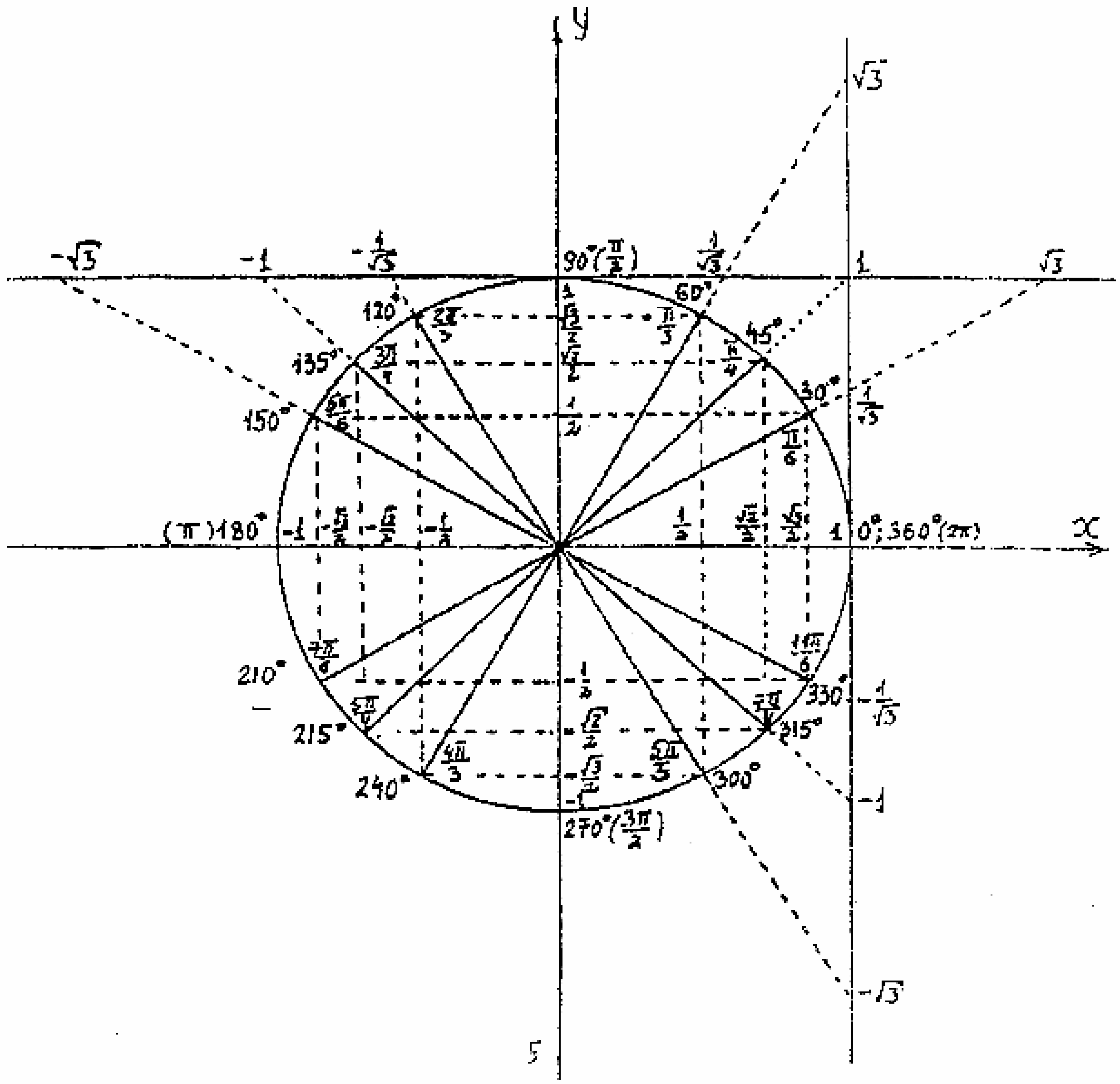
$$4a^2-12ax+9x^2=(2a-3x)^2;$$
$$81x^2-25a^2=(9x-5a)(9x+5a);$$
$$64+96b+48b^2+8b^3=(4+2b)^3.$$

!!! Ліва і права частини будь-якої формули фіксують математичні конструкції, які можна взаємозаміняти. Знання таких конструкцій істотно полегшує перетворення виразів, а тому необхідно збільшувати їхню кількість в мозку, у пам’яті, формуючи тим самим особистий БАНК КОНСТРУКЦІЙ ОБМІННОГО ФОНДУ.

ПРО ТРИГОНОМЕТРИЧНЕ КОЛО

!!! Тригонометричне коло ($R = 1$) дає можливість бачити значення тригонометричних функцій кутів, що часто зустрічаються, і це допомагає швидше їх запам'ятати. Коло також ілюструє властивості тригонометричних функцій: знаки, парність (непарність), зростання (спадання), нулі функцій, екстремуми.

!!! Синуси кутів дивимося на осі OY, косинуси – на осі OX; тангенси – на правій дотичній, котангенси – на верхній дотичній.



ФОРМУЛИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

I. Основні тригонометричні тотожності:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

II. Формули додавання:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}$$

III. Формули подвоєння (потроєння):

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \qquad \sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

IV. Формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

$$ctg\alpha \pm ctg\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

V. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

Про логарифми

I. Основна логарифмічна тотожність

$$a^{\log_a b} = b$$

II. Властивості логарифмів

$$\log_a 1 = 0;$$
$$\log_a a = 1;$$
$$\log_a (b_1 \times b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2;$$
$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2;$$
$$\log_a b^k = k \log_a b;$$
$$\log_a \sqrt[k]{b} = \frac{1}{k} \log_a b.$$

III. Зв'язок між логарифмами різних систем

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ або } \log_a b = \log_a c \times \log_c b$$

IV. Десяткові та натуральні логарифми

$\lg b = \log_{10} b$ – логарифм числа b за основою 10;

$\ln b = \log_e b$ – логарифм числа b за основою e, де $e = 2,71828...$;

$\lg 2 = 0,3010...$;

$\lg 3 = 0,4771...$;

$\lg 5 = 0,6990...$;

$\lg e = 0,4343...$;

$\ln 10 = 2,3026....$

Таблиця похідних

1. $y = C,\ y' = 0$.

2. $y = x^{\alpha},\ y' = \alpha x^{\alpha - 1}$.

3. $y = \sqrt{x},\ y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. $y = \ln x,\ y' = \dfrac{1}{x}$.

5. $y = \log_a x,\ y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$.

6. $y = e^x,\ y' = e^x$.

7. $y = a^x,\ y' = a^x \ln a$.

8. $y = \sin x,\ y' = \cos x$.

9. $y = \cos x,\ y' = -\sin x$

10. $y = \operatorname{tg} x,\ y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

11. $y = \operatorname{ctg} x,\ y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$.

12. $y = \arcsin x,\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

13. $y = \arccos x,\ y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

14. $y = \operatorname{arctg} x,\ y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

15. $y = \operatorname{arcctg} x,\ y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Таблиця інтегралів

1. $\int 0\,dx = C$.

2. $\int dx = x + C$.

3. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$.

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

5. $\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$.

6. $\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$.

7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\cos^{2} x} = \operatorname{tg} x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^{2} x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

11. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$.

12. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \arcsin x + C$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

15. $\int \frac{dx}{1+x^{2}} = \operatorname{arctg} x + C$.

16. $\int \frac{dx}{a^{2}+x^{2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$.

17. $\int \frac{dx}{x^{2}-a^{2}} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

18. $\int \frac{dx}{a^{2}-x^{2}} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}} = \ln\left|x + \sqrt{x^{2}\pm a^{2}}\right| + C$.

Коли ми розглядали диференціальне числення функцій багатьох змінних, то впевнилися в тому, що основні ідеї і методи диференціального числення функцій однієї змінної переносяться і на функції багатьох змінних.

У цій частині «Особистого довідника…» ми узагальнимо основні поняття інтегрального числення функцій однієї змінної на функції багатьох змінних. Це узагальнення приводить нас до так званих кратних інтегралів.

Із функцією однієї змінної $y=f(x)$, яка визначена на відрізку $[a,b]$, пов'язано поняття визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ (інтеграл Рімана).

Це поняття узагальнюють на функцію від n змінних, визначену в деякій замкненій області n-вимірного простору R_n. Результатом цього узагальнення буде поняття n-вимірного інтеграла. Наша увага буде зосереджена на інтегральному численні функцій двох змінних $z=f(x,y)$ і функцій трьох змінних $u=f(x,y,z)$, тобто на розгляді так званих подвійних і потрійних інтегралів відповідно.

При введенні подвійних та потрійних інтегралів маємо справу з обмеженими квадровними областями простору R_2 (якась із координатних площин OXY, OXZ, OYZ) та з обмеженими кубовними областями простору R_3 (простір $OXYZ$).

Замкнена область $\overline{D}\subset R_2$ називається квадровною, якщо її межа складається із скінченного числа неперервних кривих, визначених рівняннями виду $y=f(x)$ або $x=\varphi(y)$, де $f(x)$ і $\varphi(y)$ – неперервні функції своїх аргументів.

Замкнена область $\overline{G}\subset R_3$ називається кубовною, якщо вона обмежена скінченним числом поверхонь, кожна з яких визначається рівнянням одного з трьох типів $z=f(x,y)$, $y=\varphi(x,z)$, $x=g(y,z)$, де $f(x,y)$, $\varphi(x,z)$, $g(y,z)$ – неперервні функції своїх аргументів. Діаметром замкненої області $\overline{G}$ називають найбільшу відстань між двома точками межі цієї області і позначають $\mathrm{diam}\overline{\mathrm{G}}$. Наприклад, діаметром паралелограма є довжина його більшої діагоналі, а діаметром кулі радіуса R є число $2R$.

На певному етапі розвитку людства, розвитку математики і технічних наук простих, так би мовити, інтегралів виявилося вже недостатньо, деякі задачі вже вимагали нових, сильніших підходів до їх вирішення, сильнішого математичного апарату, ширшого інтегрального, зокрема, числення. Розглянемо деякі такі задачі, які приводять до поняття подвійного інтеграла.

1. Задача про об'єм циліндричного тіла

При введенні поняття визначеного інтеграла ми розглядали задачу про площу криволінійної трапеції. Наша задача цій задачі в деякому розумінні буде аналогом.

Розглядаємо тіло, обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y)$, з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі OZ, а знизу – замкненою обмеженою квадровною фігурою $\bar{D}$, яка лежить у площині OXY (рис. 1). Таке тіло називають циліндричним.

Обчислимо об'єм цього тіла. Якщо $z = f(x, y) = C > 0$, де $C=\text{const}$, то зверху тіло обмежене площиною, паралельною площині OXY, об'єм такого тіла дорівнює добутку площі основи на висоту за відомою із школи формулою. Якщо ж поверхня $z = f(x, y)$ є довільною, то застосувати цю формулу безпосередньо не можна.

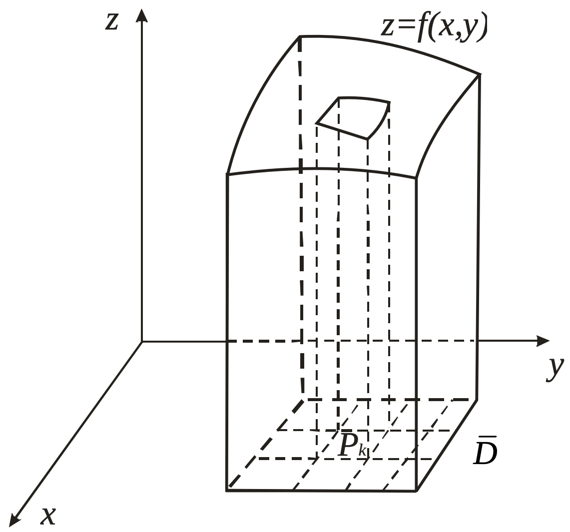


Рис. 1

Доведеться задане циліндричне тіло як завгодно точно наближати за допомогою тіл, об'єми яких обчислюють за відомими формулами. Для цього розбиваємо кривими область $\bar{D}$ на n довільних частин $\bar{D}_k$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, попарно, без спільних внутрішніх точок. На кожній області $\bar{D}_k$, як на основі, побудуємо циліндричний стовпчик з твірними, паралельними осі OZ. Зверху цей стовпчик накриває частина поверхні $z = f(x, y)$, що ним вирізається. Сума об'ємів таких n стовпчиків і буде дорівнювати об'єму заданого тіла. В кожній з областей $\bar{D}_k$ виберемо довільну точку $P_k(x_k, y_k)$. Числа $f(x_k, y_k)\Delta S_k$, де ΔS_k – площа області $\bar{D}_k$, є наближеними значеннями об'ємів таких стовпчиків. Сума $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k)\Delta S_k$ дає наближене значення об'єму заданого циліндричного тіла. Ця сума тим ближча до шуканого об'єму, чим дрібніші розбиття області $\bar{D}$ на частини $\bar{D}_k$. Точне значення об'єму циліндричного тіла буде

$$V = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k)\Delta S_k, \qquad (1)$$

де $d_k = \text{diam}\bar{D}_k$. Отже, задачу про обчислення об'єму циліндричного тіла ми звели до знаходження (1).

2. Задача про масу матеріальної пластини

Є плоска неоднорідна матеріальна пластина, форма якої – замкнена область $\bar{D}$. Площа цієї області – S. Нехай функція $\gamma = \gamma(x, y)$ визначає густину в кожній точці області. Знайдемо масу пластини. При $\gamma(x, y) = \gamma_0 = \text{const}$ пластина однорідна, її маса $m = \gamma_0 S$. Взагалі кажучи, пластини неоднорідні.

Розіб’ємо область $\bar{D}$ на n частин $\bar{D}_k$, як це ми робили в задачі 1, так же вибираємо точки $P_k(x_k;y_k)$, так же через ΔS_k позначаємо площу $\bar{D}_k$. Нехай густина в кожній точці області $\bar{D}_k$ стала і дорівнює $\gamma=\gamma(x_k,y_k)$. Тоді величина $\gamma(x_k,y_k)\cdot\Delta S_k$ – наближене значення маси тієї частини пластини, яку займає область $\bar{D}_k$, а сума $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\gamma(x_k,y_k)\Delta S_k$ наближено визначає масу всієї пластини.

Очевидно, що точне значення маси всієї пластини буде

$$m=\lim_{\max d_k\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\gamma(x_k,y_k)\Delta S_k\,. \tag{2}$$

Таким чином, задача обчислення маси неоднорідної матеріальної пластини звелась до знаходження границі (2).

Подвійний інтеграл та умови його існування. Поняття подвійного інтеграла

Згадані вище задача 1 і задача 2 привели до розгляду границь сум одного й того ж спеціального виду (область $\bar{D}$ і задана в ній функція двох змінних). До розгляду таких же сум приводять і деякі інші задачі геометрії, фізики, техніки. Тому виникає необхідність узагальнити вивчення властивостей границь таких сум. Незалежно від тієї чи іншої задачі.

Нехай функцію $z=f(x,y)$ визначено в замкненій квадровній обмеженій області $\bar{D}\subset R_2$. Розіб’ємо область $\bar{D}$ сіткою кривих на n довільних частин $\bar{D}_k$, $k=0,1,2,...,n-1$ попарно без спільних внутрішніх точок так, що $\bar{D}=\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}\bar{D}_k$. Таке розбиття назвемо Т-розбиттям області $\bar{D}$. ΔS_k, $P_k(x_k;y_k)$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(x_k,y_k)\Delta S_k$ – символи, зрозумілі із попереднього викладу.

Позначимо $\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(x_k,y_k)\Delta S_k=\sigma$ (3)

Суму $\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(x_k,y_k)\Delta S_k$ називають подвійною інтегральною сумою для функції $z=f(x,y)$ в області $\bar{D}$, складеною для даного Т-розбиття. Існує, зауважимо, безліч різних способів Т-розбиття області $\bar{D}$ на частини $\bar{D}_k$ та вибору точок P_k. Для кожного такого розбиття і кожного вибору точок P_k інтегральні суми будуть, взагалі кажучи, різними.

Знову $\operatorname{diam}\bar{D}_k = \delta_k$. Позначимо $\lambda(T) = \max \delta_k$, $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k)\Delta S_k = \sigma$.

Означення 1. Число I називають границею інтегральних сум σ при $\lambda(T) \to 0$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що нерівність $|\sigma - I| < \varepsilon$ виконується для довільного Т-розбиття області $\bar{D}$ і будь-якого вибору точок $P_k(x_k; y_k) \in \bar{D}_k$, як тільки $\lambda(T) < \delta$.

Означення 2. Якщо при $\lambda(T) \to 0$ інтегральні суми σ мають границею число I, то це число називають подвійним інтегралом від функції $f(x,y)$ по області $\bar{D}$ і позначають

$$\iint_{\bar{D}} f(x,y)\,dS \text{ або } \iint_{\bar{D}} f(x,y)\,dxdy.$$

Отже, за означенням

$$\iint_{\bar{D}} f(x,y)\,dxdy = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k)\Delta S_k. \tag{4}$$

Якщо границя (4) існує, то функцію $f(x,y)$ називають інтегровною (за Ріманом) в області $\bar{D}$.

Звернемося знову до задач 1 і 2, розглянутих вище. Якщо границі в рівностях (1) і (2) існують, то з цих рівностей дістанемо

$$V = \iint_{\bar{D}} f(x,y)\,dxdy; \tag{5}$$

$$m = \iint_{\bar{D}} \gamma(x,y)\,dxdy. \tag{6}$$

Рівності (5) і (6) можна розглядати відповідно як геометричний та механічний зміст подвійного інтеграла, якщо підінтегральна функція невід’ємна в області $\bar{D}$.

Припускаємо тут, що функція $z = f(x,y)$ обмежена в області $\bar{D}$. Зауважимо, що умова обмеженості функції $f(x,y)$ в області $\bar{D}$ ще не забезпечує її інтегровності в цій області, існують обмежені функції, які не є інтегровними.

Критерій інтегровності функції $f(x,y)$ в області $\bar{D}$ можна встановити за допомогою так званих сум Дарбу.

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta S_k , \quad \overline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta S_k , \tag{7}$$

де m_k і M_k – відповідно нижня та верхня грані множини значень функції $f(x,y)$ в області $\overline{D}_k$, $k = 0,1,2,...,n-1$. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області $\overline{D}$, то m_k і M_k є відповідно її найменше та найбільше значення в області $\overline{D}_k$. Оскільки $m_k \le f(x_k, y_k) \le M_k$, то $\underline{S} \le \sigma \le \overline{S}$.

Властивості сум Дарбу (7) аналогічні відповідним властивостям сум Дарбу для одномірного випадку.

Теорема 1 (критерій інтегровності функції). Для того, щоб обмежена в області $\overline{D}$ функція $f(x,y)$ була інтегровною в цій області, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \left(\overline{S} - \underline{S}\right) = 0$.

Теорема 2 (достатня умова інтегровності функції). Кожна функція $f(x,y)$, неперервна в замкненій обмеженій квадровній області $\overline{D}$, інтегровна в цій області.

Зауважимо, що клас інтегровних функцій не вичерпується тільки неперервними функціями.

Властивості подвійних інтегралів

1. Якщо $f(x,y) = C$, C - const, $(x;y) \in \overline{D}$, то $\iint\limits_{\overline{D}} C\,dxdy = CS$, де S – площа області $\overline{D}$. Зокрема,

$$\iint\limits_{\overline{D}} dxdy = S , \quad \iint\limits_{\overline{D}} 0\,dxdy = 0 .$$

2. Якщо функції $f(x,y)$ та $\varphi(x,y)$ інтегровні в області $\overline{D}$, то має місце рівність

$$\iint\limits_{\overline{D}} \left[f(x,y) \pm \varphi(x,y) \right] dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\,dxdy \pm \iint\limits_{\overline{D}} \varphi(x,y)\,dxdy .$$

3. Якщо функція $f(x,y)$ інтегровна в області $\overline{D}$, то для будь-якого $C = \text{const}$ виконується рівність

$$\iint\limits_{\overline{D}} Cf(x,y)\,dxdy = C \iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\,dxdy .$$

4. Якщо функція $f(x,y)$ інтегрована в кожній з областей $\bar{D}_1$ і $\bar{D}_2$, які не мають спільних внутрішніх точок, то вона інтегрована і в області $\bar{D}=\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$, причому

$$\iint\limits_{\bar{D}} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\bar{D}_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\bar{D}_2} f(x,y)\,dxdy.$$

5. Якщо $f(x,y)\ge 0$, $(x,y)\in \bar{D}$ і функція $f(x,y)$ інтегровна в області $\bar{D}$, то $\iint\limits_{\bar{D}} f(x,y)\,dxdy \ge 0$.

6. Якщо $f(x,y)\ge \varphi(x,y)$, $(x,y)\in \bar{D}$, $f(x,y)$ та $\varphi(x,y)$ інтегровні в області $\bar{D}$, то

$$\iint\limits_{\bar{D}} f(x,y)\,dxdy \ge \iint\limits_{\bar{D}} \varphi(x,y)\,dxdy.$$

Наслідок. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області $\bar{D}$, то функція $|f(x,y)|$ інтегровна в цій області і

$$\left|\iint\limits_{\bar{D}} f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint\limits_{\bar{D}} |f(x,y)|\,dxdy.$$

7. **Теорема про середнє значення.** Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій квадровній області $\bar{D}$, то існує така точка $(\bar{x},\bar{y})\in D$, що

$$\iint\limits_{\bar{D}} f(x,y)\,dxdy = f(\bar{x},\bar{y})S, \tag{8}$$

де S – площа області $\bar{D}$.

При доведенні цих властивостей використовують границі інтегральних сум. Властивість 7 доводять так, як і подібну властивість для одиночного визначеного інтеграла.

Обчислення подвійного інтеграла

Його обчислення зводиться до обчислення так званого повторного інтеграла – двох звичайних визначених інтегралів.

Повторні інтеграли. Нехай функція $f(x,y)$ визначена в прямокутнику

$$\bar{D}=\{(x;y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}.$$

При фіксованому $x \in [a,b]$ функція $f(x,y)$ буде функцією від y, $y \in [c,d]$, інтегровною на відрізку $[c,d]$. Інтегрованість припускаємо. Тоді $\int_a^b f(x,y)\,dy$ є деяка функція віх x, $x \in [a,b]$:

$$\Phi_1(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Якщо функція $\Phi_1(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$, то інтеграл

$$\int_a^b \Phi_1(x)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

називають повторним інтегралом від функції $f(x,y)$ по прямокутнику $\bar{D}$. В такому інтегралі інтегрування виконують спочатку по змінній y, а потім по змінній x. Інтеграл по змінній y називають внутрішнім, а інтеграл по змінній x – зовнішнім.

Аналогічно при кожному фіксованому $y \in [c,d]$ функція $f(x,y)$ є функцією від x, $x \in [a,b]$. Якщо вона інтегровна на відрізку $[a,b]$, а функція

$$\Psi_1(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

інтегровна на відрізку $[c,d]$, то інтеграл

$$\int_c^d \Psi_1(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

називають повторним інтегралом від функції $f(x,y)$ по прямокутнику $\bar{D}$. Тут спочатку інтегрують по змінній x, а потім по змінній y.

Приклад 1. Обчислити повторний інтеграл $\int_1^2 dx \int_0^3 \left(x^2 - 2xy - y^2\right) dy$.

Спочатку інтегруємо по змінній y, вважаючи змінну x сталою, а потім обчислимо інтеграл по змінній x.

$$\int_1^2 dx \int_0^3 \left(x^2 - 2xy - y^2\right) dy = \int_1^2 \left(x^2 y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^3 = \int_1^2 \left(3x^2 - 9x - 9\right) dx =$$

$$= \left(x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 9x\right)\Bigg|_1^2 = -\frac{31}{2}.$$

Більш загальне поняття повторного інтеграла одержимо, коли межі внутрішнього інтеграла будуть змінними.

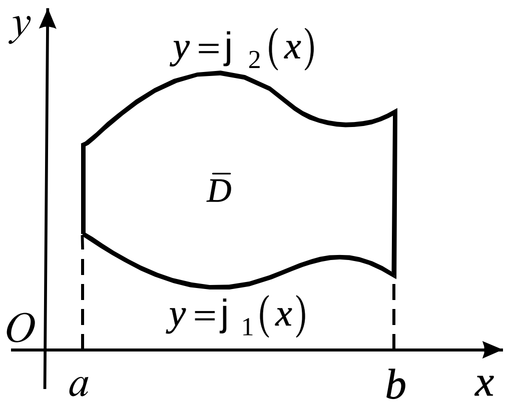


Рис. 2

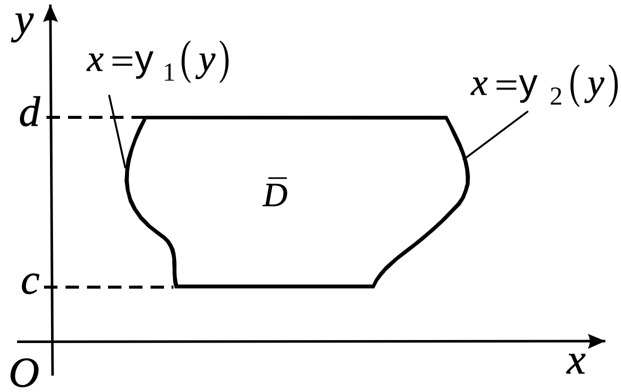


Рис. 3

Нехай функція $f(x,y)$ визначена в області $\bar{D}$, обмеженій прямими $x=a$, $x=b$, де $b>a$, та неперервними кривими $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, причому $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, $x\in[a,b]$. Якщо для довільного $x\in[a,b]$ існує інтеграл

$$\Phi_2(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

і функція $\Phi_2(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$, то повторний інтеграл від функції $f(x,y)$ по області $\bar{D}$ визначається формулою

$$\int_a^b \Phi_2(x)\,dx=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Якщо функція $f(x,y)$ визначена в області $\bar{D}$, обмеженій прямими $y=c$, $y=d$, де $c<d$, та неперервними кривими $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, причому $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$ і для будь-якого $y\in[c,d]$ існує інтеграл

$$\Psi_2(y)=\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx,$$

функція $\psi_2(y)$ інтегровна на відрізку $[c,d]$, то повторний інтеграл від функції $f(x,y)$ в області $\bar{D}$ визначається так:

$$\int_c^d \Psi_2(y)\,dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Приклад 2. Обчислимо повторний інтеграл $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}(xy+2)\,dx$.

Спочатку інтегруємо по x, а потім по y.

$$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}(xy+2)\,dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2y+2x\right)\Bigg|_y^{\sqrt{y}}dy=\int_0^1\left(\frac{1}{2}y^2+2\sqrt{y}-\frac{1}{2}y^3-2y\right)dy=$$

$$=\left(\frac{1}{6}y^3+\frac{4}{3}y\sqrt{y}-\frac{1}{8}y^4-y^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}+\frac{4}{3}-\frac{1}{8}-1=\frac{3}{8}.$$

Обчислення подвійного інтеграла для прямокутної області розглядають у зв'язку з його геометричним змістом. При цьому виходять на рівність

$$\iint\limits_{\bar{D}} f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

З допомогою подібних міркувань виходять також на рівність

$$\iint\limits_{\bar{D}} f(x,y)\,dxdy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Ці дві рівності одержані при доведенні відповідних теорем.

Наслідок. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна у замкненому прямокутнику $\bar{D}=\{(x;y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$, то існують обидва повторні інтеграли і при цьому виконуються рівності

$$\iint\limits_{\bar{D}} f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx. \qquad (9)$$

Проілюструємо ці рівності.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\bar{D}}\frac{xdxdy}{1+y^2}$, якщо $\bar{D}: 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$, при різних порядках інтегрування.

а) $\iint\limits_{\bar{D}}\frac{xdxdy}{1+y^2}=\int_0^2 dx\int_0^1\frac{xdy}{1+y^2}=\int_0^2 xdx\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}=\int_0^2 x\left[\operatorname{arctg} y\Big|_0^1\right]dx=\int_0^2 x\frac{\pi}{4}dx=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2=\frac{\pi}{2}$;

б) $\iint\limits_{\bar{D}}\frac{xdxdy}{1+y^2}=\int_0^1 dy\int_0^2\frac{xdx}{1+y^2}=\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}\int_0^2 xdx=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\left[\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2\right]dy=$

$$=2\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}=2\operatorname{arctg} y\Big|_0^1=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Бачимо, що при обчисленні подвійного інтеграла його можна зводити до будь-якого із двох повторних інтегралів – результат має бути однаковим. У випадку криволінійних областей $\bar{D}$ (рис. 2 і рис. 3) проводять схожі міркування, розглядають подібні теореми і одержують рівності

$$\iint\limits_{\bar{D}} f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \text{ та } \iint\limits_{\bar{D}} f(x,y)\,dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

до рис. 2 і рис. 3 відповідно.

Заміна змінних у подвійному інтегралі

При обчисленні визначених інтегралів часто доводилося використовувати метод заміни змінної. Цей метод часто застосовують і для обчислення подвійних інтегралів. Обчислювати інтеграли в декартовій системі координат інколи буває дуже важко, майже неможливо. У таких випадках спасіння полягає у переході до іншої системи координат.

Такою іншою системою координат для подвійних інтегралів є система полярних координат. Згадуємо формули, за якими декартові координати x та y виражаються через полярні координати φ та ρ і навпаки:

$$x=\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi;\ \rho=\sqrt{x^2+y^2};\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}.$$

Із методичних міркувань варто згадати із шкільного курсу математики процес переходу від однієї основи до іншої для логарифмів. Нагадаємо: логарифм числа за старою основою дорівнює логарифму числа за новою основою, помноженому на логарифм нової основи за старою основою (або поділеному на логарифм старої основи за новою основою). Цей логарифм нової основи за старою основою, наприклад, називають модулем переходу, таким собі «шлюзом». Схематично щось подібне маємо і при переході в подвійному інтегралі до іншої системи координат. У самому загальному випадку при переході від координат $(x;y)$ до деяких координат $(u;v)$ модуль переходу, так званий якобіан, буде

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}=x'_u y'_v-x'_v y'_u.$$

При переході до полярних координат якобіан

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}=\rho\cos^2\varphi+\rho\sin^2\varphi=\rho.$$

Отже,

$$\iint\limits_{\bar{D}} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{\bar{D}} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi. \qquad (10)$$

Вираз $\rho\, d\rho\, d\varphi$ є елемент площі в полярних координатах.

Приклад 4. Обчислити за допомогою подвійного інтеграла площу фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$.

Ми сумістили систему координат OXY із полярною системою координат: полюс полярної системи помістили в початок декартової системи, а полярну вісь l наклали на вісь OX.

Згадуємо, що площа фігури $S=\iint\limits_{\bar{D}} dxdy$.

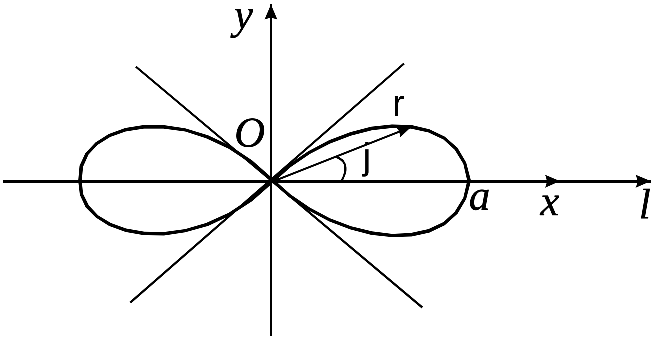


Рис. 4

Нам достатньо обчислити площу тієї частини фігури, яка знаходиться в першій чверті системи координат OXY, а потім помножити одержану площу на чотири. Симетрія!

Очевидно, що $0 \le x \le a$. Щоб визначити межі для змінної y нам довелося б виразити y із рівняння лемніскати. Для цього слід було б розв'язати біквадратне рівняння відносно y. Вираз y через x і a був би надзвичайно громіздким – інтеграл був би надзвичайно складним.

Перейдемо до полярних координат, використовуючи формули переходу $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right);\quad \left(\rho^2\right) = a^2\left(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi\right);$$
$$\rho^4 = a^2\rho^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right);\quad \rho^2 = a^2\cos 2\varphi;\quad \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Легко бачити, що кут φ змінюється в першій чверті для лемніскати від $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$. При $\varphi = 46^{\circ}$, наприклад, $2\varphi = 92^{\circ}$ і $\cos 2\varphi = \cos 92^{\circ} < 0$ під знаком кореня квадратного.

Ми в дійсній області, тому в першій чверті системи OXY для $\varphi > \frac{\pi}{4}$ точок лемніскати немає, тому бісектриси координатних кутів цієї системи є певними обмежувальними рамками для лемніскати.

Отже, площа фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі, буде (S_1 – площа її четвертої частини)

$$S = 4S_1 = 4\iint\limits_{\bar{D}_1} \rho\, d\rho\, d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho\, d\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\right] d\varphi =$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\, d\varphi = 2a^2\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = a^2 \text{ (кв. од.)}.$$

Звернімо увагу на практично усний інтеграл у полярній системі координат, порівняємо його із неймовірно складним інтегралом в системі координат OXY.

Зміна порядку інтегрування у подвійному інтегралі

Інколи буває вигідно в тій же системі координат OXY змінити порядок інтегрування – обчислення подвійного інтеграла значно спрощується. В одному порядку інтегрування обчислювати доводиться суму кількох інтегралів, а в іншому – лише один. Таке буває часто. При цьому слід уміти «вивертати функцію навиворіт», тобто знаходити функцію, обернену даній функції.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\bar{D}} y\,dxdy$, якщо область $\bar{D}$ обмежена лініями $y=x+1$, $y=3$, $y=9-2x$, $y=1$.

Знайдемо точки перетину цих ліній (вершини трапеції). Для цього розв’яжемо системи рівнянь цих ліній.

$$\begin{cases} y=x+1 \\ y=1 \end{cases} \text{ т. } A(0;1) \quad \begin{cases} y=x+1 \\ y=3 \end{cases} \text{ т. } B(2;3) \quad \begin{cases} y=3 \\ y=9-2x \end{cases}$$

$$\text{т. } C(3;3) \quad \begin{cases} y=9-2x \\ y=1 \end{cases} \text{ т. } D(4;1)$$

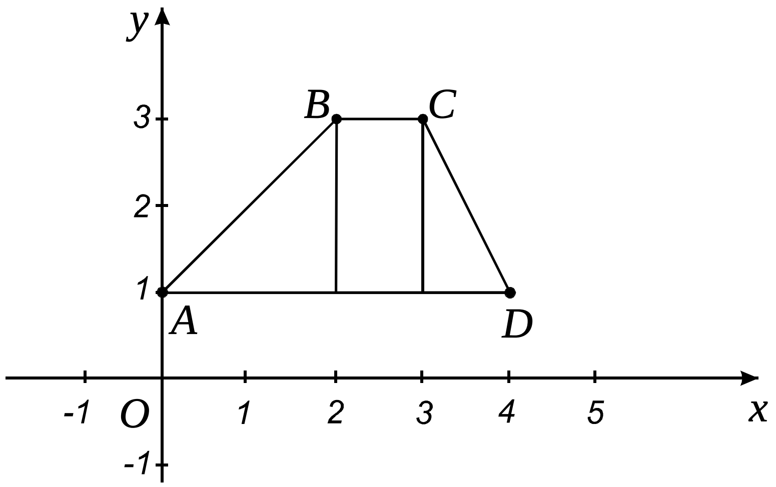


Рис. 5

При обчисленні інтеграла в так званому прямому порядку ми змушені нашу область інтегрування розбити на три частини, які зверху обмежені лініями із різними рівняннями, тому й інтеграл доведеться обчислювати як суму трьох інтегралів.

$$\iint_{\bar D} y\,dxdy = \int_0^2 dx \int_1^{x+1} y\,dy + \int_2^3 dx \int_1^3 y\,dy + \int_3^4 dx \int_1^{9-2x} y\,dy = \int_0^2 \left[\frac12 y^2\Big|_1^{x+1}\right]dx + \int_2^3 \left[\frac12 y^2\Big|_1^3\right]dx +$$

$$+\int_3^4 \left[\frac12 y^2\Big|_1^{9-2x}\right]dx = \frac12\int_0^2\left[(x+1)^2-1\right]dx + \frac12\int_2^3\left[3^2-1\right]dx + \frac12\int_3^4\left[(9-2x)^2-1\right]dx =$$

$$=\frac16(x+1)^3\Big|_0^2 - \frac12 x\Big|_0^2 + 4x\Big|_2^3 - \frac1{12}(9-2x)^3\Big|_3^4 - \frac12 x\Big|_3^4 = \frac16(27-1) - \frac12(2-0)+4(3-2)-$$

$$-\frac1{12}(1-27)-\frac12(4-3)=9.$$

Для зміни порядку інтегрування виразимо у рівняннях ліній AB і CD x через y: $y = x+1$, то $x = y-1$; $y = 9-2x$, то $x = \frac12(9-y)$.

Область $\bar D$ у цьому випадку можна подати так: $y-1 \le x \le \frac12(9-y)$, $1 \le y \le 3$. Зможемо обійтися при обчисленні одним інтегралом.

Отже,

$$\iint_{\bar D} y\,dxdy = \int_1^3 y\,dy \int_{y-1}^{\frac12(9-y)} dx = \int_1^3 y\left[x\Big|_{y-1}^{\frac12(9-y)}\right]dy = \int_1^3 y\left[\frac92 - \frac y2 - y + 1\right]dy =$$

$$=\int_1^3\left[\frac{11}{2}y - \frac32 y^2\right]dy = \left(\frac{11}{4}y^2 - \frac12 y^3\right)\Big|_1^3 = \frac{99}{4} - \frac{27}{2} - \frac{11}{4} + \frac12 = 22-13=9.$$

Маємо, як і належить, той же результат, але цей результат ми одержали значно меншими зусиллями. Відчуймо різницю між обсягами виконаних робіт.

Метод зміни порядку інтегрування широко застосовується при обчисленні подвійних інтегралів, тому варто до нього придивитися ще на етапі якраз зміни цього порядку, навіть ще до власне обчислення. Розглянемо такий випадок.

Приклад 6. Записати одним інтегралом суму інтегралів

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac12(3-x)} f(x,y)\,dy.$$

Знімаємо, так би мовити, з інтегралів рівняння ліній. Маємо $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=x^2$ для першого повторного інтеграла та $x=1$, $x=3$; $y=0$,

$y=\frac{1}{2}(3-x)$ для другого. Область інтегрування тут визначаємо, знаходячи точки перетину цих ліній.

Для цього розв'язуємо маленькі системи по два рівняння з двома невідомими. Наприклад, лінії $x=1$ та $y=x^2$ перетинаються, очевидно, в точці $A(1;1)$, лінії $x=1$ та $y=\frac{1}{2}(3-x)$ – в тій же точці $A(1;1)$. Покажемо область інтегрування.

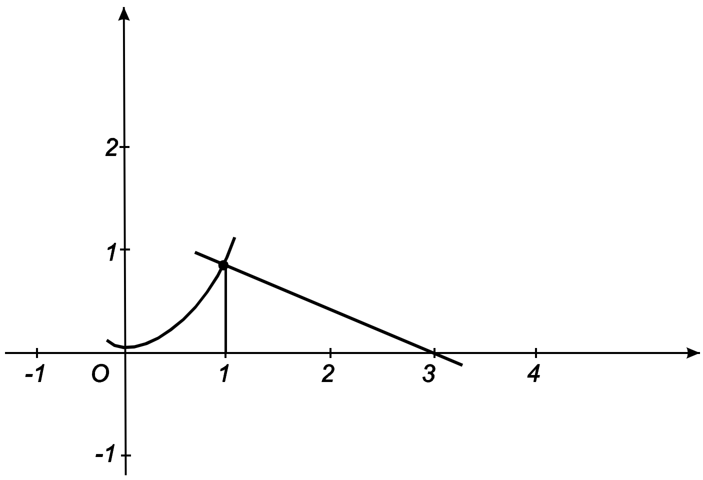


Рис. 6

Очевидно, що у так званому прямому порядку інтегрування одним повторним інтегралом обійтися було неможливо.

Змінимо порядок інтегрування. Права частина параболи $y=x^2$ обмежує область інтегрування зліва. Якщо $y=x^2$, то $x=\pm\sqrt{y}$. Рівняння $x=+\sqrt{y}$ є рівнянням якраз правої частини такої параболи. Справа область інтегрування обмежує пряма $y=\frac{1}{2}(3-x)$. Звідси $x=3-2y$.

Отже, $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy+\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx$.

На цьому прикладі варто застерегти від дуже поширеної помилки, яку допускають при встановленні меж інтегрування. При неглибокому погляді на цю конкретну область інтегрування, межі часто визначають так: $0\le x\le 3$, $0\le y\le 1$. Категорично ні! Так було б у випадку області-прямокутника. У нас же це означало б, що ми незаконно включаємо в область інтегрування «пусті клини» між лініями $y=x^2$ та $y=1$, а також між лініями $y=\frac{1}{2}(3-x)$ та $y=1$. Запам'ятаймо: в математиці сама математика нас веде, дотримуйся лише математичних законів і правил, самі рівняння ліній все покажуть. Якщо ми йдемо по осі абсцис, то x дійсно змінюється від 0 до 3. Умовно підемо по горизонталі $y=\frac{1}{2}$, то x буде змінюватись від $x_1=\sqrt{\frac{1}{2}}$ до $x_2=2$, що випливає з рівнянь $x=\sqrt{y}$ та $x=3-2y$. На висоті $y=1$ взагалі маємо лише одну точку A нашої області. Отже, при визначенні меж інтегрування будемо дуже уважними і обережними.

Застосування подвійного інтеграла

На початку вивчення подвійного інтеграла ми розглядали дві яскраві задачі, які саме приводять нас до поняття цього інтеграла. Це задача знаходження об’єму циліндричного тіла та задача знаходження маси матеріальної пластини із змінною, взагалі кажучи, густиною речовини. Далі розглянемо деякі інші задачі, які розв’язують за допомогою подвійного інтеграла.

Площа поверхні. Нехай поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, область $\bar{D}$ – проекція цієї поверхні на площину OXY, а функція $f(x, y)$ неперервна разом із частинними похідними $f'_x(x, y)$ та $f'_y(x, y)$ в області $\bar{D}$. Відповідно до останньої умови, задана поверхня є гладка, тобто в кожній її точці існує дотична площина, яка змінює своє положення неперервно разом із точкою дотику.

Введемо поняття площі поверхні. Розглянемо Т-розбиття області $\bar{D}$, $\bar{D} = \bigcup_{k=0}^{n-1} \bar{D}_k$. Знову нехай площа області $\bar{D}_k$ дорівнює ΔS_k, а діаметр d_k. У кожній області $\bar{D}_k$ беремо довільну точку $P_k(x_k; y_k)$. Побудуємо аплікату $P_k M_k$ точки $M_k(x_k; y_k; f(x_k, y_k))$ нашої поверхні $z = f(x, y)$. У точці M_k проводимо дотичну площину

$$z - f(x_k, y_k) = f'_x(x_k, y_k)(x - x_k) + f'_y(x_k, y_k)(y - y_k). \qquad (11)$$

Розглянемо ту частину цієї площини, яка проектується на область $\bar{D}_k$. Нехай площа цієї частини дорівнює $\Delta\sigma_k$. Складемо суму

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta\sigma_k. \qquad (12)$$

Означення. Площею поверхні $z = f(x, y)$ називають границю суми $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta\sigma_k$ при $\lambda(T) \to 0$, де $\lambda(T) = \max d_k$, якщо ця границя існує і не залежить ні від способу розбиття області $\bar{D}$, ні від вибору точок $P_k(x_k; y_k) \in \bar{D}_k$.

Таким чином, площа поверхні визначається за формулою

$$S = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\sigma_k. \qquad (13)$$

Переконаємося, що ця границя існує при умовах, накладених вище на функцію $f(x, y)$. Дістанемо також формулу для обчислення площі поверхні S.

Дійсно, з аналітичної геометрії відомо, що

$$\Delta S_k = \Delta\sigma_k \cos\gamma_k, \tag{14}$$

де γ_k – гострий кут між площиною OXY та дотичною площиною. Обчислимо $\cos\gamma_k$, як косинус кута між двома площинами.

Оскільки рівняння площини OXY має вигляд $z=0$, то

$$\cos\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2_x(x_k,y_k)+f'^2_y(x_k,y_k)}}. \tag{15}$$

Тоді з рівностей (12) та (14) маємо

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2_x(x_k,y_k)+f'^2_y(x_k,y_k)}\,\Delta S_k.$$

Маємо інтегральну суму для неперервної в області $\bar{D}$ функції $\sqrt{1+f'^2_x(x_k,y_k)+f'^2_y(x_k,y_k)}$ і взятого Т-розбиття цієї області.

Ця функція інтегровна в області $\bar{D}$, тому границя (13) існує і

$$S = \iint_{\bar{D}}\sqrt{1+f'^2_x(x_k,y_k)+f'^2_y(x_k,y_k)}\,dxdy. \tag{16}$$

Ця формула визначає площу тієї частини поверхні $z=f(x,y)$, яка проектується на площину OXY у вигляді області $\bar{D}$.

Буває зручно проектувати поверхню на інші координатні площини. Якщо поверхню задано рівнянням $x=\varphi(y,z)$ або рівнянням $y=\psi(x,z)$, а проекціями її на площині OYZ або OXZ є області $\bar{D}_{yz}$ або $\bar{D}_{xz}$ відповідно, причому функції $\varphi(y,z)$ або $\psi(x,z)$ неперервні разом із частинними похідними 1-го порядку в області $\bar{D}_{yz}$ або в області $\bar{D}_{xz}$, то формули для обчислення площі поверхні приймають вигляд

$$S = \iint_{\bar{D}_{yz}}\sqrt{1+\varphi'^2_y(y,z)+\varphi'^2_z(y,z)}\,dydz, \tag{17}$$

$$S = \iint_{\bar{D}_{xz}}\sqrt{1+\psi'^2_x(x,z)+\psi'^2_z(x,z)}\,dxdz, \tag{18}$$

Центр маси матеріальної пластини. Нагадаємо, що статичний момент M матеріальної точки маси m відносно деякої осі дорівнює добутку маси цієї точки на відстань d її від осі, тобто $M = md$.

Візьмемо Т-розбиття області $\bar{D}=\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}\bar{D}_k$, в кожній області $\bar{D}_k$ виберемо довільну точку $P_k\left(x_k;y_k\right)$. Припустимо, що густина в усіх точках $\bar{D}_k$ стала і дорівнює $\gamma\left(x_k,y_k\right)$. Таке припущення природне, бо функція $\gamma\left(x,y\right)$ неперервна, а діаметри d_k областей $\bar{D}_k$ можна вважати досить малими. Якщо ΔS_k – площа області $\bar{D}_k$, то маса цієї області наближено дорівнює $\gamma\left(x_k,y_k\right)\Delta S_k$. Вважаємо, що кожна з цих мас зосереджена в точці $P_k\left(x_k;y_k\right)$, то дістанемо дискретну сукупність матеріальних точок, для якої статичні моменти $\bar{M}_x$ та $\bar{M}_y$ відносно координатних осей визначають за формулами

$$\bar{M}_x=\sum_{k=0}^{n-1}y_k\gamma\left(x_k,y_k\right)\Delta S_k,\ \bar{M}_y=\sum_{k=0}^{n-1}x_k\gamma\left(x_k,y_k\right)\Delta S_k.$$

Це наближені значення статичних моментів M_x та M_y пластини. Точні значення цих величин дістанемо, якщо перейдемо до границі при $\lambda\left(T\right)\to 0$, де $\lambda\left(T\right)=\max d_k$, тобто

$$M_x=\lim_{\lambda(T)\to 0}\bar{M}_x=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}y_k\gamma\left(x_k,y_k\right)\Delta S_k=\iint\limits_{\bar{D}}y\gamma\left(x,y\right)dxdy,$$

$$M_y=\lim_{\lambda(T)\to 0}\bar{M}_y=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}x_k\gamma\left(x_k,y_k\right)\Delta S_k=\iint\limits_{\bar{D}}x\gamma\left(x,y\right)dxdy.$$

Якщо m – маса пластини $\bar{D}$, $\bar{x}$ та $\bar{y}$ – координати центра маси її, то $M_y=\bar{x}m$, $M_x=\bar{y}m$.

Таким чином,

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{\bar{D}}x\gamma\left(x,y\right)dxdy}{\iint\limits_{\bar{D}}\gamma\left(x,y\right)dxdy},\ \ \bar{y}=\frac{\iint\limits_{\bar{D}}y\gamma\left(x,y\right)dxdy}{\iint\limits_{\bar{D}}\gamma\left(x,y\right)dxdy}. \qquad (19)$$

Для однорідної пластини $\gamma=\mathrm{const}$, то формули (19) спрощуються (скорочення на γ):

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{\bar{D}}xdxdy}{\iint\limits_{\bar{D}}dxdy},\ \ \bar{y}=\frac{\iint\limits_{\bar{D}}ydxdy}{\iint\limits_{\bar{D}}dxdy}. \qquad (20)$$

Розглянемо деякі приклади застосувань розглянутих формул.

Приклад7. Тіло знаходиться в першому октанті, обмежене поверхнями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x^2+y^2=5$, $x^2+y^2+z^2=9$. Знайти об'єм тіла.

Координатні площини, циліндрична і сферична поверхні обмежують це тіло. Вісь OZ – вісь симетрії циліндра, початок координат – центр сфери. Спробуймо напружити просторову уяву і побачимо це тіло наочно. Згадаємо формулу для обчислення об'єму циліндричного тіла $V=\iint\limits_{\bar{D}} f\left(x,y\right)dxdy$, де $f(x,y)=z$ – рівняння поверхні, яка накриває наше тіло зверху – частина верхньої половини сфери, рівняння верхньої половини сфери $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$. Область інтегрування $\bar{D}$ у нашому випадку – чверть круга із центром в початку координат і з радіусом $\sqrt{5}$. Таким чином

$$V=\iint\limits_{\bar{D}}\sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy=\int\limits_0^{\sqrt{5}}dx\int\limits_0^{\sqrt{5-x^2}}\sqrt{9-x^2-y^2}\,dy.$$

Обчислення цього інтеграла призвело б до дуже складних викладок, тому перейдемо до полярних координат. Отже,

$$V=\iint\limits_{\bar{D}}\sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy=\iint\limits_{\bar{D}}\sqrt{9-\left(x^2+y^2\right)}\,dxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{5}}\sqrt{9-\rho^2}\,\rho\,d\rho=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{5}}\left(9-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}(-2\rho)\,d\rho=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2}{3}\left(9-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{5}}\right]d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[8-27\right]d\varphi=\frac{19}{3}\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{19}{6}\pi \text{ (куб. од.).}$$

Приклад 8. Обчислимо площу поверхні частини параболоїда $z=x^2+y^2$, яка вирізається циліндром $x^2+y^2=a^2$.

Згадаємо, що параболоїд $z=x^2+y^2$ має формулу чашки, дном якої є одна-єдина точка $O\left(0;0;0\right)$, а віссю – вісь OZ. Знову напружимо просторову уяву, знову доведеться переходити до полярної системи координат. Область $\bar{D}$ тут – круг $x^2+y^2\le a^2$. За формулою (16) маємо

$$V=\iint\limits_{\bar{D}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{a}\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho=\frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{a}\left(1+4\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}8\rho\,d\rho$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}\left(1+4\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a\right]d\varphi=\frac{1}{12}\int_0^{2\pi}\left[\left(1+4a^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]d\varphi=\frac{1}{12}\left[\left(1+4a^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{\pi}{6}\left[\left(1+4a^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]\text{ (кв. од.).}$$

Приклад 9. Однорідна пластина обмежена кривою $y=\cos 2x$, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$, осями OX та OY. Знайдемо центр маси пластини.

Координати центра маси будемо шукати за формулами (20). Власне форму пластини легко уявити, якщо згадати графік функції $y=\cos 2x$ із шкільної програми математики.

Обчислюємо інтеграли.

$$\iint\limits_{\bar{D}}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx\int_0^{\cos 2x}dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[y\Big|_0^{\cos 2x}\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2};$$

$$\iint\limits_{\bar{D}}xdxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}xdx\int_0^{\cos 2x}dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos 2x\,dx=\left\{\begin{array}{l|l}u=x & du=dx\\ dv=\cos 2x\,dx & v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}x\sin 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}x\sin 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{4}\cos 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4};$$

$$\iint\limits_{\bar{D}}ydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx\int_0^{\cos 2x}ydy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\cos 2x}\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[1+\cos 4x\right]dx=\frac{1}{4}x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{16}\sin 4x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{16}\pi\,.$$

Отже, за формулами (20) маємо

$$\bar{x}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},\ \bar{y}=\frac{\pi}{8}.$$

Одержані результати дуже не зашкодить розглядати на їх правдоподібність, щоб не вийшло, як це у декого виходить, що центр маси пластини знаходиться за межами самої пластини. Таку ж обережність слід проявляти і при розгляді інших конкретних технічних задач. До речі, якщо згадаємо форму нашої пластини, то побачимо, що одержані нами координати центра її маси цілком правдоподібні.

Момент інерції. Відомо, що момент інерції матеріальної точки відносно деякої осі дорівнює добутку маси точки на квадрат її відстані від цієї осі, а момент інерції системи матеріальних точок відносно однієї й тієї самої осі дорівнює сумі моментів інерції всіх точок системи.

Матеріальна пластина має форму замкненої області $\bar{D}$ у площині OXY, а неперервна в області $\bar{D}$ функція $\gamma = \gamma(x, y)$ визначає густину в кожній точці пластини.

Знову T-розбиття, площі ΔS_k, точки $P_k(x_k; y_k)$. Моменти інерції такої системи матеріальних точок відносно осей OX і OY визначаються за формулами

$$\bar{I}_x = \sum_{k=1}^{n-1} y_k^2 \gamma(x_k, y_k) \Delta S_k, \quad \bar{I}_y = \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 \gamma(x_k, y_k) \Delta S_k.$$

В кожній із сум переходять до границі при $\lambda(T) \to 0$, де $\lambda(T) = \max d_k$, $d_k = \operatorname{diam} \bar{D}_k$. При умовах, накладених на функцію $\gamma(x, y)$, ці границі існують. Одержуємо формули для обчислення моментів інерції пластини відносно координатних осей:

$$I_x = \iint_{\bar{D}} y^2 \gamma(x, y)\, dxdy, \quad I_y = \iint_{\bar{D}} x^2 \gamma(x, y)\, dxdy. \qquad (21)$$

Момент інерції $\bar{I}_0$ матеріальної точки з масою m відносно початку координат визначається за формулою $\bar{I}_0 = m\left(x^2 + y^2\right)$. Звідси після вже зрозумілих міркувань, дістаємо формулу для обчислення моменту інерції I_0 пластини відносно початку координат

$$I_0 = \iint_{\bar{D}} \left(x^2 + y^2\right) \gamma(x, y)\, dxdy, \qquad (22)$$

тобто

$$I_0 = I_x + I_y.$$

Приклад 10. Знайдемо момент інерції рівнобедреного прямокутного трикутника відносно гіпотенузи, якщо в кожній точці його поверхнева густина пропорційна відстані точки до гіпотенузи.

Нехай гіпотенуза трикутника дорівнює $2a$, розміщена на осі OX і ділиться початком координат пополам. Рівняння лівого катета буде $y = x + a$, правого – $y = a - x$. Оскільки гіпотенуза лежить на осі OX, то за формулою (21) обчислюємо саме I_x, причому $\gamma(x, y) = ky$, де k – коефіцієнт пропорційності.

$$I_x = k\iint\limits_{\bar{D}} y^3 dxdy = k\int_0^a y^3 dy \int_{y-a}^{a-y} dx = k\int_0^a y^3 \left[x \Big|_{y-a}^{a-y} \right] dy =$$

$$= k\int_0^a y^3 \left[(a-y) - (y-a) \right] dy = 2k\int_0^a y^3 (a-y)\, dy = 2ka\int_0^a y^3 dy - 2k\int_0^a y^4 dy =$$

$$= 2ka\frac{y^4}{4}\Big|_0^a - 2k\frac{y^5}{5}\Big|_0^a = \frac{1}{2}ka^5 - \frac{2}{5}ka^5 = \frac{1}{10}ka^5 .$$

Тут ми згадували шкільну геометрію. При такому розміщенні нашого трикутника вершина прямого кута, найвища точка трикутника, лежить в точці $(0;a)$, наведені вище рівняння катетів нам вигідно було подати у вигляді $x = y - a$ (лівий катет) та $x = a - y$ (правий катет). В цьому випадку ми змогли обійтися одним подвійним інтегралом і не розбивати область інтегрування на дві області до і після осі OY. Буде корисно, друже, обдумати тільки що тобою прочитане.

Потрійний інтеграл

Необхідність введення такого інтеграла теж виникає при розгляді багатьох практичних задач, коли вже й подвійного інтеграла недостатньо.

Задача про масу матеріального тіла. По замкненій обмеженій кубовній області $\bar{G}$ простору R_3 з об'ємною густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$ розміщено деяку масу. Треба знайти масу заданого матеріального тіла.

Для однорідного матеріального тіла із постійною густиною досить було б помножити густину на об'єм тіла. А якщо тіло неоднорідне? Застосовуємо метод, аналогічний тому, яким було обчислено масу матеріальної пластини. Тіло $\bar{G}$ розбивають на n частин $\bar{G}_k$, $k = 0,1,\dots,n-1$, попарно без спільних внутрішніх точок, об'єми цих частин позначають через Δv_k. В кожній області $\bar{G}$ вибирають довільну точку $P_k(x_k; y_k; y_k)$.

Припустимо, що густина в кожній області $\bar{G}_k$ стала і дорівнює $\gamma(x_k, y_k, z_k)$. Тоді маса всього тіла наближено визначається за формулою

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma(x_k, y_k, z_k)\Delta v_k . \qquad (23)$$

Очевидно, що точне значення маси заданого тіла дістанемо, якщо в цій сумі перейти до границі при умові, що $\max d_k \to 0$, де $d_k = \mathrm{diam}\,\bar{G}_k$, тобто

$$m = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma(x_k, y_k, z_k) \Delta v_k . \qquad (24)$$

До поняття потрійного інтеграла та умов його існування приходять за допомогою міркувань стосовно маси матеріального тіла, якщо замість функції-густини брати загальну функцію $u = f(x, y, z)$, визначену в замкненій обмеженій кубовній області $\overline{G}$. Так же складають суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k, z_k) \Delta v_k . \qquad (25)$$

Цю суму називають потрійною інтегральною сумою для функції $f(x, y, z)$ в області $\overline{G}$. Нехай $d_k = \operatorname{diam} \overline{G}_k$, $\max d_k = \lambda(T)$.

Означення. Якщо при $\lambda(T) \to 0$ інтегральні суми (25) мають границею число I, то це число називають потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ по області $\overline{G}$ і позначають

$$\iiint_{\overline{G}} f(x, y, z)\, dv \quad \text{або} \quad \iiint_{\overline{G}} f(x, y, z)\, dxdydz .$$

Отже, за означенням

$$\iiint_{\overline{G}} f(x, y, z)\, dxdydz = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k, z_k) \Delta v_k . \qquad (26)$$

Якщо границя (26) існує, то існує потрійний інтеграл, а функцію $f(x, y, z)$ називають інтегровною в області G.

Якщо границя в рівності (24) існує, то маємо

$$m = \iiint_{\overline{G}} \gamma(x, y, z)\, dxdydz . \qquad (27)$$

Ця рівність виражає механічний зміст потрійного інтеграла, коли підінтегральна функція невід’ємна в області $\overline{G}$.

Як і у випадку подвійного інтеграла, не кожна обмежена функція $f(x, y, z)$ інтегровна в області $\overline{G}$. Для встановлення достатніх умов існування потрійного інтеграла так же користуються поняттям нижніх та верхніх сум Дарбу $\underline{S}$ і $\overline{S}$.

Таким же чином формулюють критерій інтегровності функції $f(x, y, z)$ в області $\overline{G}$ та з його допомогою достатні умови інтегровності функції. Це відповідно дві теореми.

Теорема 1. Для того, щоб обмежена в області $\bar{G}$ функція $f(x,y,z)$ була інтегровною в цій області, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\left(\bar{S}-\underline{S}\right)=0.$$

Теорема 2. Будь-яка функція $f(x,y,z)$, неперервна в замкненій обмеженій кубовній області $\bar{G}$, інтегровна в цій області.

Властивості потрійного інтеграла аналогічні властивостям інтеграла подвійного. Наведемо лише властивість 7.

Теорема про середнє значення. Якщо функція $f(x,y,z)$, неперервна в обмеженій замкненій кубовній області $\bar{G}$, то існує така точка $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\in\bar{G}$, що

$$\iiint_{\bar{G}} f(x,y,z)\,dxdydz=f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})V,$$

де V – об'єм області $\bar{G}$. Знаєш точку – швидко обчислиш інтеграл.

До обчислення потрійного інтеграла підходять таким же чином, як і до обчислення подвійного. Тут найпростішим випадком вважається такий, коли областю інтегрування є прямокутний паралелепіпед, ребра якого паралельні осям координат. Нехай $a_1\le x\le b_1$, $a_2\le y\le b_2$, $a_3\le z\le b_3$.

Тоді потрійний інтеграл обчислюють за формулою

$$\iiint_{\bar{G}} f(x,y,z)\,dxdydz=\int_{a_1}^{b_1}dx\int_{a_2}^{b_2}dy\int_{a_3}^{b_3}dz. \tag{28}$$

Інтеграл у правій частині спочатку обчислюють по z, потім по y і, нарешті, по змінній x

Розглянемо тепер замкнену обмежену кубовну область $\bar{G}$, яка є циліндричним тілом, обмеженим знизу та зверху відповідно поверхням $z=\varphi_1(x,y)$, $z=\varphi_2(x,y)$, де $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$ – неперервні функції в замкненій обмеженій квадровній області $\bar{D}$, яка є проекцією області $\bar{G}$ на площину OXY, причому $\varphi_1(x,y)\le\varphi_2(x,y)$, $(x;y)\in\bar{D}$; з боків область $\bar{G}$ обмежена циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі OZ.

Спочатку виходять на формулу

$$\iiint_{\bar{G}} f(x,y,z)\,dxdydz=\iint_{\bar{D}}dxdy\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \tag{29}$$

Згідно з формулою (29) обчислення потрійного інтеграла зводять до обчислення повторного інтеграла за формулою

$$\iiint\limits_{\bar{G}} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \qquad (30)$$

Тут $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ – функції, що виражають в області $\bar{D}$ межі для змінної y. **Загальне зауваження:** порядок інтегрування за можливості вибирають найвигідніший.

Приклад 11. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{\bar{G}} x(y+z)\,dxdydz$, якщо $\bar{G} = \{(x;y;z):\ 0 \le x \le 1,\ 2 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 2\}$.

Відразу зауважимо, що для dy і dz x є константою, для dz x і y є константами, тому в повторному інтегралі x залишаємо біля dx, а y не можемо залишити біля dy тому, що y є доданком в сумі $y+z$.

Отже,

$$\iiint\limits_{\bar{G}} x(y+z)\,dxdydz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_2^3 dy \int\limits_0^2 (y+z)\,dz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_2^3 \left[\left(yz + \frac{1}{2}z^2\right)\Bigg|_0^2\right] dy =$$

$$= \int\limits_0^1 xdx \int\limits_2^3 \left[y\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2^2\right] dy = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_2^3 [2y+2]\,dy = \int\limits_0^1 x\left[\left(y^2+2y\right)\Bigg|_2^3\right] dx =$$

$$= \int\limits_0^1 x\left[\left(3^2+2\cdot 3\right) - \left(2^2+2\cdot 2\right)\right] dx = 7\int\limits_0^1 xdx = \frac{7}{2}x^2\Bigg|_0^1 = \frac{7}{2}.$$

Приклад 12. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{\bar{G}} xyz\,dxdydz$, якщо область $\bar{G}$ обмежена поверхнями $x^2+y^2+z^2=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, тобто $\bar{G}:\ x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$. Це частина кулі із центром в початку координат та радіусом 2, що знаходиться в першому октанті.

За формулою (29) маємо

$$\iiint\limits_{\bar{G}} xyz\,dxdydz = \iint\limits_{\bar{D}} dxdy \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} xyz\,dz,$$

де $\bar{D}$ – чверть круга $x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0$. Запишемо подвійний інтеграл по області $\bar{D}$ у вигляді повторного і послідовно обчислимо інтеграли.

$$\iiint\limits_{\bar{G}} xyz\,dxdydz = \int\limits_0^2 xdx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} ydy \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 xdx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} y\left(4-x^2-y^2\right) dy =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 x\left[\left(2y^2-\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{4}y^4\right)\Big|_0^{\sqrt{4-x^2}}\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^5-2x^3+4x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{24}x^6-\frac{1}{2}x^4+2x^2\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Заміна змінних у потрійному інтегралі. Функція $f(x,y,z)$ неперервна в області $\bar{G}$ простору R_3. Розглянемо потрійний інтеграл від цієї функції. Нехай область G простору $OXYZ$ зв'язана взаємно однозначно з областю $\bar{T}$ простору $OUVW$ за допомогою формул

$$x=x(u,v,w),\quad y=y(u,v,w),\quad z=z(u,v,w),$$

де функції x,y,z неперервні і мають неперервні частинні похідні 1-го порядку по змінних u,v,w в області $\bar{T}$.

Визначник

$$I(u,v,w)=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix},$$

який по аналогії з двомірним випадком називають якобіаном, є свого роду перехідним модулем від однієї системи координат до іншої. Якщо $I(u,v,w)\neq 0$ в області $\bar{T}$, то маємо формулу заміни змінних у потрійному інтегралі:

$$\iiint_{\bar{G}} f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_{\bar{T}} f\left[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right]\left|I(u,v,w)\right|dudvdw. \quad (31)$$

Змінні u,v,w називають криволінійними координатами точки $(x;y;z)$, а вираз $\left|I(u,v,w)\right|dudvdw$ – елементом об'єму в криволінійних координатах u,v,w. Найбільш вживаними в просторі R_3 є циліндричні та сферичні координати.

Циліндричні координати. Циліндричними координатами точки $M(x;y;z)$ називають числа ρ,φ,z, де ρ і φ – полярні координати точки $(x;y)$.

Тоді

$x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$; $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho<\infty$, $-\infty<z<\infty$.

Якобіан такого перетворення має вигляд

$$I(\rho,\varphi,z)=\begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho & z'_\rho \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\rho.$$

З формули (31) дістаємо потрійний інтеграл в циліндричних координатах

$$\iiint\limits_{\bar{G}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\bar{T}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz. \qquad (32)$$

Добуток $\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$ визначає елемент об'єму в циліндричній системі координат.

Сферичні координати. Сферичними координатами точки $M(x;y;z)$ називають числа ρ, φ, θ, де θ – кут між віссю OZ і радіусом-вектором OM точки M, ρ – довжина цього радіуса-вектора, φ – кут між проекцією цього радіуса-вектора на площину OXY та віссю OX. Маємо

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta;\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Обчислимо якобіан цього перетворення

$$I(\rho,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho & z'_\rho \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta.$$

Із тієї ж формули (31) дістаємо потрійний інтеграл у сферичних координатах

$$\iiint\limits_{\bar{G}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\bar{T}} f(\rho\sin\varphi\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta. \qquad (33)$$

Добуток $\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$ – елемент об'єму в сферичних координатах.

Приклад 13. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{\bar{G}}\left(z + x^2 + y^2\right)dxdydz$, де $\bar{G}$ – область, обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1,\ z = 2$.

За формулою (32) маємо

$$\iiint\limits_{\bar{G}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\bar{T}}\left(z + \rho^2\right)\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.$$

Зводимо цей потрійний інтеграл до повторного

$$\iiint\limits_{\bar{T}}\left(z+\rho^2\right)\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho \int_1^2 \left(z+\rho^2\right)dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \left[\left.\left(z+\rho^2\right)^2\right|_1^2\right] d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\left[\left(2+\rho^2\right)^2 - \left(1+\rho^2\right)^2\right] d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left[3\rho + 2\rho^3\right] d\rho =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\left.\left(3\rho^2+\rho^4\right)\right|_0^1\right] d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} 4\, d\varphi = \left.\varphi\right|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Приклад 14. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{\bar G}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, де $\bar G:\ x^2+y^2+z^2\le 9,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

Тут вигідно перейти до сферичних координат за формулою (33).

Легко перевірити, що $x^2+y^2+z^2=\rho^2$.

$$\iiint\limits_{\bar G}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\iiint\limits_{\bar T}\rho^3\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^3\rho^3d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^3\rho^3\left[-\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^3\rho^3d\rho=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\rho^4\Big|_0^3\right]d\varphi=\frac{81}{4}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{81}{8}\pi.$$

Застосування потрійного інтеграла

На поняття потрійного інтеграла ми вийшли, розглядаючи задачу про знаходження маси матеріального тіла. В результаті цього розгляду ми одержали формулу (27), яку можна вважати виразом механічного змісту потрійного інтеграла, коли підінтегральна функція невід'ємна в області інтегрування.

До речі, в прикладі 14 підінтегральну функцію $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ можна вважати густиною в кожній точці кулі, якщо така густина дорівнює відстані точки від центра кулі. Отже, у формулі (27) у цьому конкретному випадку $\gamma(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Розв'язавши приклад 14, ми одержали масу однієї восьмої частини такої кулі.

Об'єм деякого тіла $\bar G$, яке є кубовною замкненою областю простору R_3, обчислюють в декартових координатах x,y,z за формулою

$$V=\iiint\limits_{\bar G}dxdydz. \qquad \text{….(34)}$$

У циліндричних ρ,φ,z та сферичних ρ,φ,θ координатах ця формула набуває вигляду

$$V=\iiint\limits_{\bar T}\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz, \qquad (35)$$

$$V=\iiint\limits_{\bar Q}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta. \qquad (36)$$

Нехай тіло $\bar G$ має густину $\gamma=\gamma(x,y,z)$, де $\gamma(x,y,z)$ – неперервна функція в області $\bar G$. Нехай M_{xy},M_{yz},M_{xz} – статичні моменти тіла відносно площин OXY, OYZ, OXZ. Нехай $\bar x,\bar y,\bar z$ – координати центра маси тіла, а m –

власне маса тіла. Розмірковуючи як і у випадку подвійного інтеграла, одержимо формули

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

У розгорнутому вигляді ці формули набувають вигляду

$$\overline{x} = \frac{\iiint\limits_{\overline{G}} x\gamma(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint\limits_{\overline{G}} \gamma(x,y,z)\,dxdydz},$$

$$\overline{y} = \frac{\iiint\limits_{\overline{G}} y\gamma(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint\limits_{\overline{G}} \gamma(x,y,z)\,dxdydz}, \qquad (37)$$

$$\overline{z} = \frac{\iiint\limits_{\overline{G}} z\gamma(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint\limits_{\overline{G}} \gamma(x,y,z)\,dxdydz}.$$

Якщо тіло однорідне, тобто $\gamma = \text{const}$, то координати центра маси визначаються так:

$$\overline{x} = \frac{\iiint\limits_{\overline{G}} x\,dxdydz}{\iiint\limits_{\overline{G}} dxdydz}, \quad \overline{y} = \frac{\iiint\limits_{\overline{G}} y\,dxdydz}{\iiint\limits_{\overline{G}} dxdydz}, \quad \overline{z} = \frac{\iiint\limits_{\overline{G}} z\,dxdydz}{\iiint\limits_{\overline{G}} dxdydz}. \qquad (38)$$

Аналогічно формулам (21) і (22) можна одержати відповідні формули для обчислення моментів інерції I_x, I_y, I_z, I_0 відносно координатних осей та відносно початку координат для тіла $\overline{G}$ з об'ємною густиною $\gamma = \gamma(x,y,z)$, де $\gamma(x,y,z)$ – неперервна функція в області $\overline{G}$.

$$I_x = \iiint\limits_{\overline{G}} \left(y^2 + z^2\right)\gamma(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$I_y = \iiint\limits_{\overline{G}} \left(x^2 + z^2\right)\gamma(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$I_z = \iiint\limits_{\overline{G}} \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$I_0 = \iiint\limits_{\overline{G}} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\gamma(x,y,z)\,dxdydz. \qquad (39)$$

Момент інерції тіла відносно координатних площин OXY, OXZ, OYZ знаходять за формулами:

$$I_{xy}=\iiint\limits_{\bar{G}}\gamma(x,y,z)z^2dxdydz,\ I_{xz}=\iiint\limits_{\bar{G}}\gamma(x,y,z)y^2dxdydz,$$

$$I_{yz}=\iiint\limits_{\bar{G}}\gamma(x,y,z)x^2dxdydz \tag{40}$$

Приклад 15. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z=5$.

Маємо звичайний «шкільний» циліндр, центр нижньої основи якого співпадає із початком координат $O(0;0;0)$.

Тут вигідно застосувати формулу (35), тобто використати циліндричні координати.

$$V=\iiint\limits_{\bar{G}}\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho\,d\rho\int\limits_0^5dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho\left[z\Big|_0^5\right]d\rho=5\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho\,d\rho=$$

$$=5\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2\right]d\varphi=10\varphi\Big|_0^{2\pi}=20\pi.$$

Бачимо, що результат обчислення об'єму за допомогою потрійного інтеграла тут співпадає, як і слід було чекати, із результатами обчислювання об'єму такого циліндра за «шкільною» формулою $V_ц=\pi R^2H$, де R – радіус основи, а H – висота циліндра:

$$V_ц=\pi\cdot 2^2\cdot 5=20\pi.$$

Приклад 16. Знайти момент інерції однорідної піраміди відносно координатної площини OXY, якщо піраміда обмежена площинами $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Використовуємо першу із групи формул (40). Нехай $\gamma(x,y,z)=1$.

$$I_{xy}=\iiint\limits_{\bar{G}}z^2dxdydz=\int\limits_0^1dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}z^2dz=\frac{1}{3}\int\limits_0^1dx\int\limits_0^{1-x}\left[z^3\Big|_0^{1-x-y}\right]dy=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^1dx\int\limits_0^{1-x}[1-x-y]^3dy=-\frac{1}{12}\int\limits_0^1\left[(1-x-y)^4\Big|_0^{1-x}\right]dx=\frac{1}{12}\int\limits_0^1\left[(1-x)^4\right]dx=$$

$$=-\frac{1}{60}(1-x)^5\Big|_0^1=\frac{1}{60}.$$

Варто зауважити, що площина $x+y+z=1$ перетинає осі координат OX,OY,OZ в точках $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ відповідно.

Викладений у цьому довіднику мінімальний набір інформації про подвійні та потрійні інтеграли осилити можна. Намагайся, друже!

Горбатов Микола Іванович
Сдвижкова Олена Олександрівна

ОСОБИСТИЙ ДОВІДНИК СТУДЕНТА З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

(Сьома частина)

Редактор Л.О. Чуїщева

Підп. до друку 19.02.16. Формат 30х42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 2,1.
Обл.-вид. арк. 2,1. Тираж 50 пр. Зам. №   .

Підготовлено та видруковано у
Державному ВНЗ «Національний гірничий університет»
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19