

Олександр Азюковський<sup>1</sup>, Дмитро Гаркавенко<sup>2</sup>,

Кирило Зіборов<sup>3</sup>, Сергій Федоряченко<sup>4</sup>

<sup>1</sup>ректор, к.т.н., доцент, НТУ «Дніпровська політехніка», Дніпро, Україна, e-mail: [azalex@nmu.one](mailto:azalex@nmu.one)

<sup>2</sup>асистент кафедри КТЕД, аспірант, НТУ «Дніпровська політехніка», Дніпро, Україна, e-mail: [harkavenko.d.v@nmu.one](mailto:harkavenko.d.v@nmu.one)

<sup>3</sup>декан ММФ, к.т.н., доцент, НТУ «Дніпровська політехніка», Дніпро, Україна, e-mail: [ziborov.k.a@nmu.one](mailto:ziborov.k.a@nmu.one)

<sup>4</sup>завідувач кафедри КТЕД, к.т.н., доцент, НТУ «Дніпровська політехніка», Дніпро, Україна, e-mail: [fedoriachenko.s.o@nmu.one](mailto:fedoriachenko.s.o@nmu.one)

## ПОСТАНОВКА І РОЗВ'ЯЗОК НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ЗОВНІШНЬОЇ БАЛІСТИКИ СИСТЕМ ІЗ ЗМІННИМИ ЗА ЧАСОМ ПАРАМЕТРАМИ В УМОВАХ ВІТРОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

**Анотація.** Обговорюється застосування аналітико-чисельного розв'язку задачі про визначення функціональних параметрів зовнішньої балістики нелінійної системи із змінними у часі параметрами при наявності початкової швидкості маси в умовах атмосферного тиску, лобового та бічного вітрового навантаження.

**Ключові слова:** наближений аналітичний розв'язок, зовнішня балістика, нелінійна система, змінні у часі параметри, аеродинамічний тиск, вітрове навантаження.

**Вступ.** Проблема визначення параметрів зовнішньої балістики та функціонування реальних конструкцій при наявності початкової швидкості в умовах атмосферного тиску, лобового та бічного вітрового навантаження пов'язана із необхідністю інтегрування просторової системи нелінійних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами, що при застосуванні точних аналітичних і прямих чисельних підходів є задачею досить складною, особливо при необхідності отримання оцінок ефективності алгоритму розрахунку. Слід зауважити, що точні аналітичні розв'язки вказаної проблеми, які зводяться до системи нелінійних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами, можуть бути здобуті лише у виняткових випадках.

У даній роботі пропонується одна з постановок досліджуваної проблеми і запропоновано математичну модель, яка зводиться до системи зв'язаних нелінійних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами, базове з яких є нелінійним



диференціальним рівнянням Рікатті першого порядку відносно функції проекції швидкості маси на вісь ординат. Зведення до лінійного диференціального рівняння другого порядку із змінними коефіцієнтами і, застосування гібридного асимптотичного підходу та алгоритмів комп'ютерної алгебри до розв'язку нелінійного сингулярного рівняння, дає можливість отримати наближений аналітичний розв'язок задачі. Здобуто аналітичні та графічні залежності, які у ряді випадків достатньо корелюються із прямими чисельними розрахунками, що дозволяє надати відповідні оцінки застосованого розв'язку.

Розглядається тривимірна нелінійна динаміка вантажу маси  $m(t)$ , який рухається з початковою швидкістю  $V_0$  з літального апарату висоти  $h$  при наявності лобового  $V_{\text{вх}}$  та бічного  $V_{\text{вz}}$  вітрового потоків на базі нелінійної теорії балістики.

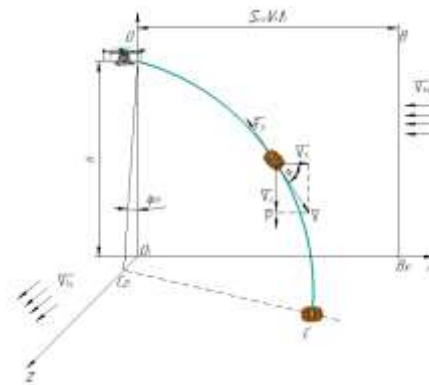


Рисунок 1 – Схематичне зображення задачі

Основна система пов'язаних диференціальних рівнянь зовнішньої балістики досліджуваного динамічного процесу дається з проекцій діючих на масу  $m(t)$  сил відповідно на осі системи координат  $x$ ,  $y$  та  $z$ :

$$\sum x: \frac{d}{dt} [m(t)(V_x + V_0 \mp V_{\text{вх}})] = -F_c \sin \alpha - F_{\text{Bx}}; \quad (1)$$

$$\sum y: \frac{d}{dt} [m(t) \cdot V_y(t)] = F_c \cos \alpha - m(t)g; \quad (2)$$

$$\sum z: \frac{d}{dt} [m(t)(V_z \mp V_{\text{вz}})] = -F_c \sin \beta - F_{\text{Bz}}. \quad (3)$$

Основні параметри досліджуваної системи визначаються наступними формулами:



$$F_c = C_x \cdot \frac{S_M \cdot \rho}{2} \cdot V^2(t), \quad F_{Bx} = C_{Bx} \cdot \frac{S_{Mx} \cdot \rho}{2} \cdot V_{Bx}^2,$$

$$F_{Bz} = C_{Bz} \cdot \frac{S_{Mz} \cdot \rho}{2} \cdot V_{Bz}^2 \quad (*)$$

де  $\vec{F}_c$ ,  $\vec{F}_e$  – сили аеродинамічного супротиву конструкції із стабілізатором, включаючи  $\vec{F}_{cm}$ , та вітрового навантаження відповідно;

$C_x$  – коефіцієнт лобового опору (визначається з експериментальних даних у напрямку руху);

$C_{Bx}, C_{Bz}$  – коефіцієнти бічного опору, який обчислюється із заданих початкових умов у напрямку осей  $X$  і  $Z$ ;

$S_M, S_{Mx}, S_{Mz}$  – площі міделя тіла вздовж осі обертання тіла і у ортогональних напрямках;

$\rho$  – щільність повітря.

Застосовуючи нові безрозмірні параметри

$$X = \frac{x}{h}, \quad Y = \frac{y}{h}, \quad Z = \frac{z}{h}, \quad T = \frac{t}{t_0}, \quad (4)$$

де  $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  – час вільного падіння вантажу у без атмосферному середовищі, і враховуючи нерівності  $\frac{V_x^2}{V_y^2} < 1$ ,  $\frac{V_z^2}{V_y^2} < 1$ , отримуємо систему диференціальних рівнянь у виді:

$$\sum X: \frac{dV_X(T)}{dT} + A(T)V_X(T) + B(T)V_X(T)V_Y(T) = C_X(T); \quad (5)$$

$$\sum Y: \frac{dV_Y(T)}{dT} + A(T)V_Y(T) = -B(T)V_Y(T)^2 - G_0; \quad (6)$$

$$\sum Z: \frac{dV_Z(T)}{dT} + A(T)V_Z(T) + B(T)V_Z(T)V_Y(T) = C_Z(T), \quad (7)$$

де

$$A(T) = t_0 a(t); \quad B(T) = \frac{\varepsilon b_0 h}{f(T)}; \quad C_x(T) = -\frac{t_0^2}{h\{a(T)[V_{0x} - V_{Bx}] + F_{Bx}\}}$$



$$F_{Bx} = \frac{c_{Bx} S_{mx} \rho V_{Bx}^2}{[2m(t)]}, \quad F_{Bz} = \frac{c_{Bz} S_{mz} \rho V_{Bz}^2}{[2m(t)]} \quad (8)$$

$$b_0 = \frac{S_m \rho}{m_0}, \quad \varepsilon = \frac{c_x}{2}, \quad m(T) = m_0 f(T), \quad \frac{\dot{f}(T)}{f(T)} = \dot{f}(T), \quad G_0 = \frac{t_0^2 g}{h} = 2$$

Зводячи рівняння (6) до рівняння другого порядку і, застосовуючи гібридний асимптотичний підхід із застосуванням методів збурення за параметром нелінійної складової  $\varepsilon = \frac{c_x}{2}$  і фазних інтегралів з метою розв'язку системи диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами, отримується наближений аналітичний розв'язок нелінійної задачі спеціального класу систем із змінними у часі параметрами і зовнішнього середовища, який підпорядковується застосованим умовам руху і заданим початковим умовам.

Висновки. Основні залежності і підхід до вирішення досліджуваної задачі можуть бути використані для застосування прямих чисельних методів аналізу математичної моделі, а також уточненого аналітичного підходу прикладних задач динаміки із застосуванням принципу ортогоналізації за Гальоркінім. В якості подальших досліджень у даному напрямку слід вказати, зокрема, вплив вітрового навантаження, залежного від часу, урахування ефекту Магнуса у обертальних конструкціях, а також вирішення проблеми керування системами із змінними у часі параметрами.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Азюковський О.О., Гаркавенко Д.В., Грищак В.З., Зіборов К.А., Федорядченко С.О. Аналітичний підхід до розв'язку задачі нелінійної динаміки систем із змінними за часом параметрами в умовах реакції зовнішнього середовища.-Збірник наукових праць НГ -2023 - № 72 -С. 186-193.
2. Gristchak V.Z. To the criterion for application of aerodynamic calculation in solving the non-linear external ballistic problems. Доп. «Потурайвські читання», National Technological University, Dnipro, 2024.
3. Ольшанський В.П, Ольшанський С.В. Динаміка матеріальної точки у руховому повітряному середовищі. / *Ольшанський В.П, Ольшанський С.В.* // 2012.
4. Ольшанський В.П, Дубовик О.А. Питання зовнішньої балістики вогнегасних речовин./ *Ольшанський В.П, Дубовик О.А.* //-Х. Митець, 2005.-236 с.



5. Steele C. R. Asymptotic Analysis and Computation for Shells. Analytical and Computational Models of Shells / C. R. Steele // CED. – 1989. – Vol. 3. – P. 3–31.
6. Gaetan Kerschen. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. / Gaetan Kerschen, Keith Worden, Aleksander F. Vakakis, Jean-Claude Golinval. // Int. J. Mechanical Systems and Signal Processing. – 2006. – 20. – P. 505 – 592.

