Курпа Лідія[1], Шматко Тетяна[2] Лінник Ганна[3]

[1]*професор, доктор техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», каф. Прикладної математики, Харків, Україна, e-mail:* kurpalidia@gmail.com

[2]*професор, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПІ», каф. Вищої математики, Харків, Україна, e-mail:* ktv_ua@yahoo .com

[3]*професор, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПІ», каф. Прикладної математики, Харків, Україна, e-mail:* linnik2105@gmail.com

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ-R ФУНКЦІЙ ДО АНАЛІЗУ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ СЕНДВІЧ ПЛАСТИН З АУКСЕТИЧНИМ СТІЛЬНИКОВИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ

Анотація. В даній роботі розглянуто задачі про вільні коливання сендвич пластин із ауксетичним стільниковим заповнювачем з негативним коефіцієнтом Пуассона. Особливістю роботи є те, що запропонований метод дослідження базується на використанні теорії R-функцій, варіаційного методу Рітця та теорії TSDT. Вважається, що зовнішні шари сендвич структури виготовлені з функціонально градієнтних матеріалів, механічні властивості яких обчислюються за степеневим законом Фойгта. Математична постановка задачі виконана в рамках уточненої теорії пластин першого порядку (FSDT). Для комірки заповнювача обрано шестикутну форму, а ефективні властивості обчислюються за відомими формулами. Наведено тестові приклади та проаналізовано коливання пластин зі складною формою.

Ключові слова: вільні коливання, сендвіч пластини, від'ємний коефіцієнт Пуассона, функціонально-ґрадієнтні матеріали, теорія R -функцій, варіаційні методи.

Вступ. В останні часи для виготовлення сендвич пластин та оболонок ефективно використовуються нові матеріали, такі як функціонально градієнтні (ФГМ) та метаматеріали. Як було показано в [1], ауксетичні стільники є одним із найкращих заповнювачів середнього шару сендвич структури, оскільки вони мають екстраординарні механічні властивості, вищу стійкість до зсуву, удару та краще поглинання енергії. Ауксетичні стільникові матеріали з негативним коефіцієнтом Пуассона (NPR) є окремим випадком метаматеріалів. Форма стільникових комірок, виготовлених з ауксетичних матеріалів, може бути різною, але дуже часто застосовуються комірки шестикутної форми. Треба відзначити, що існує велика кількість публікацій, присвячених даній проблемі [1-4]. Як показує огляд літератури, присвячений розрахунку механічних властивостей метаматеріалів та дослідженню їх статичної та динамічної поведінки пластин типу «сендвіч» зі складною геометричною формою плану майже відсутні.

1. **Формулювання проблеми**.

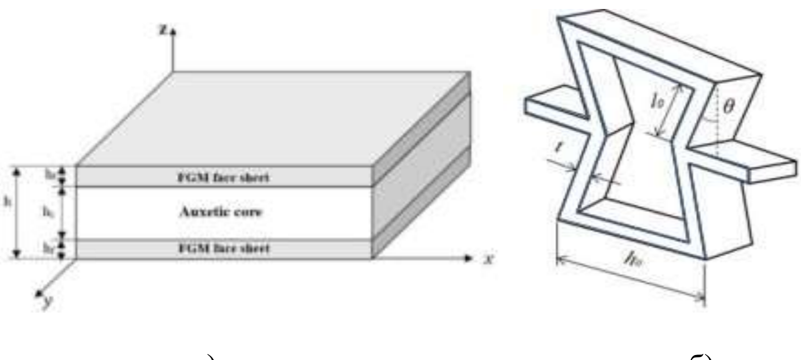
В даній роботі розглядаються сендвіч пластини з ауксетичним заповнювачем та ФГМ лицьовими шарами (рис.1а). Припускається, що товщини лицьових шарів однакові. Позначимо загальну товщину пластини *h*, товщину лицьових сторін h_{ff}, товщину заповнювача h_c. Ефективні властивості ФГМ модуль пружності E_{eff} та щільність ρ_{eff} визначаються згідно степеневого закону, приймаючи до уваги їх зміну вздовж одного напрямку, а саме вздовж товщини оболонки:

$$E_{eff} = (E_c - E_m)V_c + E_m, \quad \rho_{eff} = (\rho_c - \rho_m)V_c + \rho_m, \tag{1}$$

де індекси c та m відповідають характеристикам кераміки та металу відповідно. Для розглянутих задач відповідні вирази для Vc визначаються за наступними формулами:

$$\begin{cases} V_c = \left(\dfrac{z - h_1}{h_0 - h_1}\right)^p, & z \in \left[-\dfrac{h}{2}, h_1\right], \\ V_c = \left(\dfrac{z - h_2}{h_3 - h_2}\right)^p, & z \in \left[h_2, \dfrac{h}{2}\right] \end{cases} \tag{2}$$

У формулах (2) індекс p позначає показник об'ємної частки кераміки (градієнтний індекс). Для визначення ефективних властивостей заповнювача ($h1 < zz < h2$), виготовленого з ауксетичного стільникового матеріалу з NPR та шестикутною формою стільникової комірки (рис. 1б), використовуються відомі співвідношення [2,3]



а) б)

Рисунок1 – Сендвіч пластина з шестикутним ауксетичним заповнювачем

2. **Метод розв'язання.**

Для розв’язання задачі використовується метод Рітця, згідно якого необхідно скористатися варіаційною постановкою проблеми, що зводиться до знаходження мінімума наступного функціоналу

$$J = P - \lambda^2 T, \tag{3}$$

де P T, є потенційною та кінетичною енергією оболонки відповідно. Зусилля $N = \{N_{11}, N_{22}, N_{12}\}$, моменти $M = \{M_{11}, M_{22}, M_{12}\}$ та перерізуючи сили $Q = \{Qx, Qy\}$, а також потенціальна і кінетична енергії визначаються за формулами, наведеними в [5]. Екстремум функціонала (3) знаходиться на множині функцій, що задовольняють геометричним крайовим умовам. В даній роботі така система у випадку складної геометричної форми, або складних крайових умов будується за допомогою теорії R-функцій [7-8].

3. Числові результати.

Для перевірки створеного забезпечення в рамках системи POLE-RL [9], було розв’язано низку тестових задач і виконано порівняння отриманих результатів з відомими. Розглянуто задачі для пластин складної геометричної форми. Результати представлені у вигляді графіків та таблиць. Наприклад в табл. 1 представлено порівняння результатів, отриманих методом R-функцій з відомими [3] для квадратної сендвіч пластини, лицьові шари якої ізотропні і товщина всіх шарів однакова. Геометричні параметри: $h = 0.1m$, $2a = 2b = 20h$, $t/l0 = 0.01385$, $h0/l0 = 1$; $hc/hf = 1.5$.

Матеріальні властивості прийнято наступними: $EE = 69\ G$, $G = 26G$, $\nu = 0.33$, $\rho = 2700 \frac{kg}{m^3}$.

Таблиця 1. Порівняння основної частоти $\Lambda = \frac{\lambda}{2\pi}(Hz)$ з результатами роботи [3]

θ^0	CCCC		SSSS		CSCS	
	RFM	[3]	RFM	[3]	RFM	[3]
-10^0	267.75	276.81	150.77	151.55	217.13	222.49
-35^0	264.59	273.55	148.95	149.73	214.57	219.83
-55^0	252.62	261.19	142.05	142.85	204.92	209.68
-80^0	104.84	108.60	58.33	58.96	85.33	86.32

Висновки. В роботі запропоновано метод до розв'язання задач про вільні коливання ауксетичних сендвич пластин складної геометричної форми в рамках уточненої теорії Редді. Метод базується на використанні теорії R-функцій та варіаційних методів. Запропонований підхід планується поширити на дослідження пологих оболонок.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Krishna Kumar Saxena, Raj Das and Emilio P. Calius. (2016). Three Decades of Auxetics

Research Materials with Negative Poisson's Ratio. A Review, Advanced engineering materials, 18, No. 11.

2. Singh S.J., Harsha S.P., (2021). Free vibration analysis of sandwich plate with honeycomb core and FGM face sheets. Advances in Systems Engineering, Springer, Singapore, 905–917.

3. Quoc T-H, Tu M- T, Tham V-V. (2021). Free vibration and dynamic response of sandwich composite plates with auxetic honeycomb core. J. of Science and Technology in Civil Engineering, HUCE (NUCE), V.15, No 4, 1–14.

4. Pham H.-A., Tran H.-Q., Tran M.-T., Nguyen V.-L., Huong Q.-T. (2022). Free vibration analysis and optimization of doubly-curved stiffened sandwich shells with functionally graded skins and auxetic honeycomb core layer, Thin-Walled Structures 179, 109571.

5. Hui-Shen Shen (2009) Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells, CRC Press, Boca Raton, 266 pp.

6. Reddy, J. N. (2011). A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates. International Journal of Aerospace and Lightweight Structures, 1, 1-21.

7. Рвачев В.Л. (1982) Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев, Наукова Думка, 552с.

8. Курпа Л.В. (2009) Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. Харьков: НТУ»ХПИ», 408с.

9. Рвачев В.Л. Шевченко А.Н. (1988) Проблемно – ориентированные языки и системы для инженерных расчетов. К.: Техника, 197 с.