УДК 622.271
Максимова І.І , к.т.н., доцент кафедри економіки та підприємництва, *Криворізький економічний інститут ДВНЗ «Київський національний університет ім. В.Гетьмана», м. Кривий Ріг, Україна*
Слободянюк Р.В.**,** аспірант кафедри відкритих гірничих робіт*, ДВНЗ «Криворізький національний університет» , м. Кривий Ріг, Україна*

ОСОБЛИВОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ РАЦІОНАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ ПЕРЕВАНТАЖУВАЛЬНОГО ПУНКТУ

З метою мінімізації транспортної роботи при плануванні і проектуванні кар'єрів постає необхідність визначення раціональної точки звезення гірничої маси. Це завдання виникає при обґрунтуванні раціонального положення перевантажувального складу комбінованого кар'єрного транспорту. Аналіз проектних рішень щодо встановлення кроку перенесення перевантажувальних пунктів і визначення оптимальних місць їх розташування показує, що положення перевантажувальних пунктів іноді визначається без достатнього теоретичного обґрунтування [1-5]. Такий підхід до розвитку транспортної схеми кар'єру призводить до неоптимальних технічних рішень, що знижує економічну ефективність гірничих робіт. В теорії гірничої справи немає загального і повного рішення задачі оптимізації положення перевантажувального пункту, що забезпечує мінімум транспортної роботи кар'єрних автосамоскидів. У даний час і в минулому подібні завдання виникають і в інших галузях промисловості.

Задача оптимальної організації транспортних комунікацій представляє великий інтерес як з теоретичної точки зору, так і з точки зору практичного застосування і є однією з класичних наукових проблем. Вперше задача визначення оптимальної точки звезення для трьох точок була поставлена в XVII столітті П'єром Ферма. У його формулюванні задача поставлена наступним чином: «для трьох заданих точок знайти четверту, таку, що якщо від неї провести прямі лінії до даних точок, сума відстаней буде найменшою». У XVII столітті розв'язком цієї задачі займалося багато дослідників. У збережених джерелах вперше рішення цієї задачі для трьох точок дано учнями Галілео Галілея Е. Торрічеллі і В. Вівіані. Рішення задачі було отримане фізичними методами і розмірковуваннями – оптимальною точкою для трьох вершин трикутника є така внутрішня точка, з якої всі сторони трикутника видно під кутом 120°. Дана точка називається точкою Ферма-Торрічеллі. В XIX столітті були знайдені геометричні методи розв'язання цієї задачі [6]. Для знаходження точки Ферма-Торрічеллі (точка S) на сторонах даного трикутника будуємо допоміжні правильні трикутники (трикутники Наполеона). Точку S можна знайти як точку перетину кіл, описаних навколо трикутників Наполеона. В другій половині XIX століття був знайдений ще більш простий метод: з'єднавши вершини трикутника ABC з відповідними протилежними точками, одержуємо точку перетину S. Якщо один із кутів трикутника ABC більше 120°, то відповідна вершина і є точкою Ферма-Торрічеллі. Для чотирьох точок рішення задачі визначення точки Ферма-Торрічеллі було знайдено італійським інженером і математиком Фаньяно: для випуклого чотирикутника мінімум суми відстаней досягається в точці перетину діагоналей. Великий внесок у розвиток методу знаходження оптимальних точок звезення вніс Якоб Штейнер (1796-1863). Для кількості точок, більшої за чотири, він заклав основи створення теорії оптимальних мереж. Їм особисто були розглянуті тільки деякі окремі випадки, а теорії графів і логістики були розвинені в XIX і на початку XX століття (Р.Курант, 1888-1972рр.).

Багато дослідників при вирішенні аналогічних завдань в різних областях промисловості в якості точки Ферма-Торрічеллі шукають точку центру ваги. Для довільного n-кутника в масштабі вирізається модель, фізичними методами знаходиться центр ваги. Збіг цих точок можливий для правильних і деяких окремих видів багатокутників. Упродовж 250 років були запропоновані різні рішення і алгоритми визначення оптимальної точки звезення, але кожен з них має певні обмеження і не може бути розглянутий як остаточний універсальний метод.

У гірничій справі задачу визначення оптимальної точки звезення (визначення місця закладення підйомного шахтного стовбура) вирішував академік Л.Д. Шевяков [4]. У загальному вигляді математична задача про точку найвигіднішого зосередження вантажів, що надходять з n точок, заданих в площині, дуже складна. У теорії проектування підприємств з підземним способом розробки відомо кілька спрощених методів визначення оптимальної точки звезення (вантажі розташовуються уздовж прямої). Згідно з правилом Шевякова Л.Д. [4], при зосередженні вантажів на прямій, за умовою мінімальної роботи з транспортування, ствол шахти повинен бути розташований в місці зосередження такого вантажу, який, будучи доданий до суми інших, розташованих від нього вліво, дає суму, більшу суми вантажів, розташованих вправо, а будучи доданим до правих вантажів, дає суму, більшу суми лівих. Оптимальний пункт звезення знаходиться в точці, що ділить запаси навпіл. Академік Шевяков Л.Д. був одним з перших вчених, якій показав, що оптимальна точка звезення вантажів не завжди співпадає з центром ваги. Метод Шевякова Л.Д. є розвитком метода «штандорта», запропонованого засновниками економічної географії (В.Лаунхардт, А.Вебер. В роботі [5] наведені результати дослідження з визначення оптимальної точки звезення при розкритті нового горизонту кар'єра. Поставлену задачу аналітичними методами вирішити не вдалося, проте було виконано дослідження деяких характерних властивостей оптимальної точки звезення.

Всі перераховані вище методи дозволяють знаходити геометричне рішення задач. Однак особливе практичне значення має розробка методу, що дозволяє знаходити координати оптимальної точки звезення для багатокутника (ділянок і робочих зон кар'єра) при відомих координатах його вершин з урахуванням вагових коефіцієнтів. При реалізації даного методу в системі автоматизованого проектування кар'єрів це дозволить динамічно визначати оптимальні точки звезення гірничої маси у кар’єрі.

Метою даного дослідження є розробка методологічної основи для визначення точки Ферма-Торрічеллі для кількості екскаваторних вибоїв, що перевищує три, а також з урахуванням впливу на оптимальну точку звезення відмінностей у продуктивності екскаваторних вибоїв.

Розглянемо випадок розміщення чотирьох екскаваторів в точках A, B, C, D (рис. 1). Продуктивності екскаваторів приймаємо рівними. В даному випадку точки Ферма-Торрічеллі (перетин діагоналей) і центр ваги збігаються. Такий збіг спостерігається для правильних багатокутників, симетричних фігур (наприклад, прямокутник), а також фігур, що мають центральну симетрію (паралелограм).

Для порівняння розглянемо інший випадок розміщення чотирьох екскаваторів (рис. 2), в якому одна вершина розташована на відносно великій відстані від трьох інших. В даному випадку точка S є оптимальною точкою Ферма-Торрічеллі, а точка P - центром ваги. Транспортна робота для точки S на 20% менша, ніж для точки P (центра ваги). Якщо точка C (рис.2) віддаляється від прямої BD , то оптимальна точка звозу S залишається незмінною (як точка перетину діагоналей), а центр ваги P буде віддалятися слідом за точкою C (SP≈1/3×SC). Наведений приклад показує, що в деяких випадках необхідно шукати оптимальну точку Ферма-Торрічеллі, а не заміняти її центром ваги.

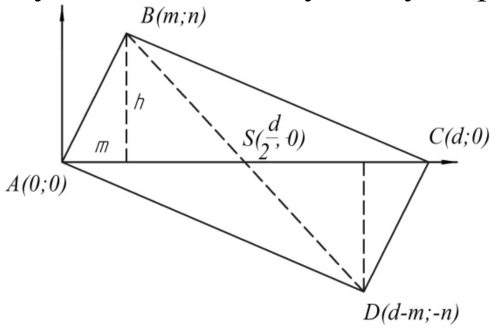

Рис. 1. Розміщення екскаваторів в вершинах паралелограма (центральна симетрія)

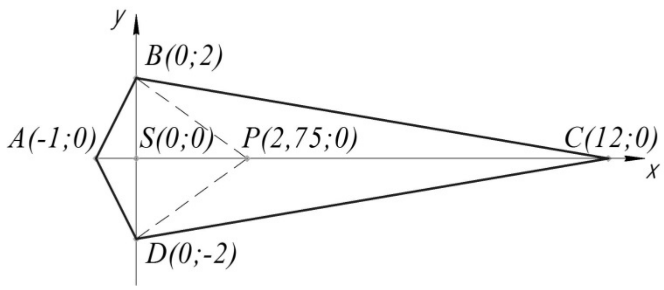

Рис. 2. Розміщення екскаваторів в вершинах чотирикутника A, B, C, D (P- центр ваги, S – оптимальна точка звезення)

Задачею дослідження є знаходження координат точки звезення гірничої маси для довільної кількості екскаваторів. Основні проблеми, що виникають, розглянемо на прикладі трьох точок. Необхідно знайти координати оптимальної точки S, для якої сума відстаней до заданих трьох точок буде мінімальною. Розглядаємо цільову функцію (1) - мінімум суми відстаней від точки S до точок A, B, C.

$$F = (l_1 + l_2 + l_3) \to \min \qquad (1)$$

У координатній формі цільова функція має вигляд:

$$F = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} + \sqrt{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}$$

Для визначення оптимальних координат знаходимо частині похідні і одержуємо систему ірраціональних рівнянь, яка не має розв’язку в загальному вигляді. Тому розглянемо допоміжну, більш просту цільову функцію (2) - мінімізуємо суму квадратів відстаней:

$$f = (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) \to \min \tag{2}$$

У координатній формі цільова функція має вигляд:

$$f = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (x-x_3)^2 + (y-y_3)^2$$

Знаходимо частині похідні і складаємо систему рівнянь, яка має простий розв’язок (3):

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \tag{3}$$

Координати точки Р це середні арифметичні координат вершин трикутника (збігається з центром ваги трикутника). Формули (3) є точним розв’язком допоміжної цільової функції (2) та можна вважати наближеним розв’язком основної цільової функції (1). Надалі координати оптимальної точки звозу S можна уточнити методом сіток або градієнтним методом.

Розглянемо алгоритм визначення координат точки Ферма-Торрічеллі (точка S) при відомих координатах (рис. 3) центру ваги (точка Р).

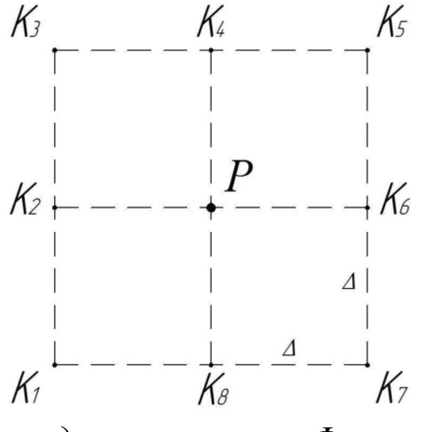

Рис.3 Схема уточнення координат точки Ферма-Торрічеллі при відомих координатах точки Р (центра ваги)

Задаємо крок пошуку Δ і знаходимо значення цільової функції (1) в точках К1 ÷ К8. Вибираємо ту точку, де значення функції (1) менше, ніж в точці Р. Наприклад, мінімальне значення маємо в точці К3. Переносимо початок допоміжної системи координат в точку К3, визначаємо координати нових точок К1 ÷ К8 і т.д. У разі, якщо уточнення положення точки Ферма-Торрічеллі не відбувається, зменшуємо крок сітки Δ і повторюємо пошук. Таким методом можна визначити координати оптимальної точки звезення з необхідною точністю.

Наведений вище алгоритм знаходження оптимальної точки Ферма-Торрічеллі легко поширюється для довільної кількості заданих точок n.

$$f = \sum_{i=1}^{n}\left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right] \rightarrow \min \qquad \begin{cases} \dfrac{df}{dx} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(x-x_i) = 0 \\ \dfrac{df}{dy} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(y-y_i) = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ y = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{array}$$

У випадку, як і для трьох точок, координати шуканої точки знаходяться як середнє арифметичне координат n заданих точок. Розглянутий метод мінімізації суми квадратів відстаней поширюється і для випадку неоднакової продуктивності вибоїв.

Висновки. В історії науки і техніки останніх століть багато дослідників вирішували проблему пошуку оптимальної точки звезення для вирішення широкого кола практичних завдань в різних галузях промисловості. Отримано багато окремих результатів, але у цілому проблема не вирішена. Запропоновано рішення задачі визначення раціональної точки звезення розділити на кілька етапів. На першому етапі визначаємо координати центру ваги даної області. На другому етапі визначаємо координати точки Ферма-Торрічеллі методом сіток або градієнтним методом, прийнявши за початок умовної системи координат точку центра ваги. Запропонований метод дозволяє визначити оптимальну точку звезення гірничої маси (мінімум транспортної роботи) для довільної кількості екскаваторних вибоїв.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Яковлев В.Л. Теория и практика выбора транспорта глубоких карьеров / В.Л. Яковлев. – Новосибирск: Наука СО, 1989. – 240 с.
2. Жуков С.А., Федоренко С.А., Пузанов Е.В. Координация грузопотоков при переводе рудных карьеров на комплексное освоение недр // Разраб. рудн. месторождений. – Кривой Рог, 2002. - Вып. 78. – С . 3-8.
3. Vilkul Y., Slobodyanyuk V., Maximov I. Optimization of capacity and the number of crushing and transfer stations at the deep open pits // Metallurgical and Mining Industry. – 2016. – № 4. – P. 116–120
4. Шевяков Л. Д. Определение места заложения подъемного ствола / Шевяков Л. Д.– М.: Углетехиздат, 1947. – 43 с.
5. Белозеров В.И. Оптимизация вскрытия рабочих горизонтов карьера// ГИАБ. – М.: Изд-во МГГУ, 2012. - №6. - С. 88-94.
6. Протасов В. Ю. Максимумы и минимумы в геометрии. / В. Ю. Протасов // М.: МЦНМО, 2005. – 56 с.