**УДК 624.15.001**

# ПРИБЛИЖЕННОЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЗАИМОСВЯЗАННОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ ОБЛАДАЮЩЕГО СВОЙСТВОМ ПОЛЗУЧЕСТИ ГРУНТА

*А.В. Шаповал, Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, Украина*

*В.Г. Шаповал, ГВУЗ «Национальный горный университет», Украина*

*Предлагается алгоритм нахождения общего решения задачи теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации. Его достоинством по сравнению с точным решением задачи, предложенным В.Г. Шаповалом и В.Б. Швецом, является простота. При этом в алгоритме отсутствуют присущие приближенному решению Ю. К. Зарецкого внутренние противоречия.*

**Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными практическими задачами.** Учет фильтрационных свойств грунтовых оснований позволяет адекватно выполнять их расчет по первой и второй группам предельных состояний. При этом известные точные решения задач фильтрационной консолидации охватывают лишь простейшие расчетные схемы (компрессия и полупространство) [1, 6, 7, 8, 9].

Это объясняется громоздкостью процедуры построения точных решений задачи [9].

В этой связи представляет процедура построения таких простых приближенных решений, которые позволили бы обеспечить приемлемую точность при решении практических задач теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации.

**Анализ последних исследований и публикаций, в которых положено начало решению данной проблемы.** Наибольшую точность при решении задачи теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации позволяет обеспечить предложенный Ю. К. Зарецким алгоритм. [1]. При этом ему присущи такие недостатки:

1. В его основу положено допущение о том, что деформации грунта полностью обратимы при его загрузке - разгрузке.

2. Ю. К. Зарецким рассматриваются материальные константы $G$ (модуль сдвига) и $\nu$ (коэффициент Пуассона) [1]. При этом в первом приближении значение коэффициента Пуассона принимается равным 0,5 (в этом случае модуль сдвига грунта равен $G = \lim\limits_{\nu \to 0,5}\left[\dfrac{E}{2\cdot(1+\nu)}\right] = \dfrac{E}{3}$, а в последующих приближениях следует принимать $G = \dfrac{E}{2\cdot(1+\nu)} \neq \dfrac{E}{3}$ (поскольку коэффициент Пуассона для реальных грунтов $\nu \neq 0,5$). Здесь $E$ - модуль общей деформации грунта [6, 7, 9].

Таким образом имеет место проблема, которая нуждается в решении.

**Выделение ранее не решенных частей общей проблемы, которым посвящена данная статья.**

В настоящей работе изложен алгоритм построения общих решений задачи теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации, свободный от недостатков, изложенных в работах [1] и [9], который, в частности, позволяет находить решения задачи взаимосвязанной теории фильтрационной консолидации в рамках моделей упругого, вязкоупругого, упругопластичного и вязкоупругопластичного оснований.

**Изложение основного материала исследования**. Авторами работы [9] в цилиндрической системе координат предложен алгоритм построения точных общих решений задачи теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации, суть которого заключается в следующем.

1. Искомые перемещения и напряжения следует определять с использованием формул:

$$U\left(r,z,t\right)=U^{*}\left(r,z,t\right)+\int\limits_{0}^{t}U^{*}\left(r,z,\tau\right)\cdot K\left(t,\tau\right)\cdot d\tau;$$

$$W\left(r,z,t\right)=W^{*}\left(r,z,t\right)+\int\limits_{0}^{t}W^{*}\left(r,z,\tau\right)\cdot K\left(t,\tau\right)\cdot d\tau;$$

$$\sigma_{rr}=\sigma_{rr}^{*};\ \sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\theta\theta}^{*};\ \sigma_{zz}=\sigma_{zz}^{*};\ \tau_{rz}=\tau_{rz}^{*};\ P=P^{*}. \quad (1)$$

Здесь $U$ и $W$ - перемещения соответственно в направлении координатных осей $0r$ и $0z$; $r$ и $z$ - координаты; $\sigma_{rr}$, $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{zz}$ - нормальные напряжения; $\tau_{rz}$ - то же, касательное; $P$ - поровое давление; $K\left(t,\tau\right)$ - ядро ползучести грунтового скелета; $t$ - время; $\tau$ - имеющий размерность времени параметр.

Кроме того здесь $U$, $W$, $\sigma_{rr}$, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{zz}$, $\tau_{rz}$, $P$ - фактические перемещения, напряжения, перемещения и поровое давление; $U^{*}$, $W^{*}$, $\sigma_{rr}^{*}$, $\sigma_{\theta\theta}^{*}$, $\sigma_{zz}^{*}$, $\tau_{rz}^{*}$ и $P^{*}$ - фиктивные перемещения, напряжения, перемещения и поровое давление.

2. Фиктивные перемещения, напряжения и деформации следует определять с использованием таких формул:

$$U^{*}=\frac{\partial}{\partial r}\Phi-\frac{\partial^{2}}{\partial r\partial z}F;$$

$$W^{*}=\frac{\partial}{\partial z}\Phi+\frac{\lambda+2\cdot G}{\lambda+G}\cdot\Delta F-\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}F;$$

$$P^{*}=\left(\lambda+2\cdot G\right)\cdot\Delta\Phi;$$

$$\Delta^{2}F=0;$$

$$\Delta^{2}\cdot\left(3\cdot c_{v}\cdot\frac{\lambda+2\cdot G}{3\cdot\lambda+2\cdot G}\Delta\Phi-\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)=0;$$

$$c_{v}\cdot P^{*}-\frac{3\cdot\lambda+2\cdot G}{3}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{3\cdot\lambda+2\cdot G}{3\cdot\left(\lambda+G\right)}\cdot G\cdot\frac{\partial^{2}F}{\partial t\partial z}=0;$$

$$\varepsilon_{z}^{*}=\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial z^{2}}+\frac{\lambda+2\cdot G}{\lambda+G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F-\frac{\partial^{2}F}{\partial z^{2}};$$

$$\varepsilon_{r}^{*}=\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial r^{2}}-\frac{\partial^{3}F}{\partial r^{2}\partial z};$$

$$\varepsilon_{\theta}^{*}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^{2}F}{\partial r\partial z};$$

$$e^{*}=\Delta\Phi+\frac{G}{\lambda+G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F; \quad (2)$$

$$\gamma_{rz}^{*}=\frac{\partial}{\partial r}\cdot\left(\frac{\lambda+2\cdot G}{\lambda+G}\Delta F-2\cdot\frac{\partial^{2}F}{\partial z^{2}}\right)+2\cdot\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial r\partial z};$$

$$\omega^{*}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda+2\cdot G}{\lambda+G}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\Delta F;$$

$$\sigma_{zz}^{*}=2\cdot G\cdot\left(\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial z^{2}}+\frac{\lambda+2\cdot G}{\lambda+G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F-\frac{\partial^{3}F}{\partial z^{3}}\right)+\lambda\cdot\left(\Delta\Phi+\frac{G}{\lambda+G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F\right)-P^{*};$$

$$\sigma_{rr}^{*}=2\cdot G\cdot\left(\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial r^{2}}-\frac{\partial^{3}F}{\partial r^{2}\partial z};\right)+\lambda\cdot\left(\Delta\Phi+\frac{G}{\lambda+G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F\right)-P^{*};$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{*}=2\cdot G\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^{2}F}{\partial r\partial z}\right)+\lambda\cdot\left(\Delta\Phi+\frac{G}{\lambda+G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F\right)-P^{*};$$

$$\tau_{rz}^{*}=G\cdot\frac{\partial}{\partial r}\cdot\left(\frac{\lambda+2\cdot G}{\lambda+G}\Delta-2\cdot\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}\right)\cdot F+2\cdot G\cdot\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial z\partial r};$$

$$\sigma_{kk}^{*}=\sigma_{zz}^{*}+\sigma_{rr}^{*}+\sigma_{\theta\theta}^{*}. \qquad (2)$$

Здесь: $\varepsilon_{zz}$, $\varepsilon_{rr}$ и $\varepsilon_{\theta\theta}$ - нормальные деформации; $\gamma_{rz}$ - то же, касательная; ω - вращение; λ и $G$ - упругие константы Ламе; $c_v$ - коэффициент пространственной консолидации; $\Delta=\frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}}+\frac{1}{r}\frac{\partial^{2}}{\partial r}+\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}$ - оператор Лапласа в цилиндрической системе координат при учете осевой симметрии; $\Phi$ - потенциальная и $F$ - бигармоническая функции, которые следует определять путем решения четвертого и пятого уравнений системы (2).

При разработке алгоритма построения приближенных решений задачи, нами была принята такая стратегия.

1. Вначале определяется напряженно - деформированное состояние объемно - несжимаемого основания. На этом этапе исследований полностью удовлетворяются граничные и начальное условие.

2. После этого определяются напряжения и перемещения, обусловленные миграцией жидкости (воды) в порах грунта.

3. В заключение выполняется корректировка граничных условий.

Необходимо отметить, что предлагаемая нами стратегия построения общего решения задачи по форме полностью совпадает с методикой построения первого приближения известного алгоритма, предложенного автором [1].

1. Первое приближение. Для его построения следует использовать полученное нами точное решение задачи (2), положив в нем:

$$\left.\begin{array}{l}P=0;\\ \Phi=0;\\ \lambda\to\infty.\end{array}\right\}. \qquad (3)$$

Имеем:

$$\Delta^{2}F_{1}=0;$$

$$U_{1}=-\frac{\partial^{2}}{\partial r\partial z}F_{1}; \qquad (4)$$

$$W_1 = \Delta F_1 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_1;$$

$$\varepsilon_{r,1} = -\frac{\partial^3}{\partial r^2 \partial z} F_1;$$

$$\varepsilon_{\theta,1} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} F_1;$$

$$\varepsilon_{z,1} = \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left( \Delta F_1 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_1 \right);$$

$$\gamma_{rz,1} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left( \Delta F_1 - 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_1 \right);$$

$$e_1 = 0;$$

$$\omega_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \Delta F_1;$$

$$\sigma_{zz,1} = G \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left( 3 \cdot \Delta F_1 - 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_1 \right);$$

$$\sigma_{rr,1} = G \cdot \left( \frac{\partial}{\partial z} \Delta F_1 - 2 \cdot \frac{\partial^3}{\partial r^2 \partial z} F_1 \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta,1} = G \cdot \left( \frac{\partial}{\partial z} \Delta F - 2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} F_1 \right);$$

$$\tau_{rz,1} = G \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left( \Delta F_1 - 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_1 \right);$$

$$\sigma_{kk,1} = 3 \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \Delta F_1;$$

$$P_1 = -\frac{1}{3} \cdot \sigma_{kk,1} = -G \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \Delta F_1 \qquad (4)$$

Здесь индекс "1" - номер приближения.

2. Второе приближение. В этом случае следует использовать фактическое значение упругой константы Ламе $\lambda$. Поровое давление во втором приближении найдем путем решения известного уравнения [1, 9], которое имеет вид:

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = c_v \cdot \Delta P_2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{kk,1}. \qquad (5)$$

Потенциальную функцию, обусловленную отжатием поровой жидкости из грунта найдем в ходе решения третьего уравнения системы (2) и уравнения (5). Имеем:

$$F_2 = \frac{c_v}{\lambda + 2 \cdot G} \cdot \int_0^t P_2(r, z, \tau) \cdot d\tau - \frac{G}{\lambda + 2 \cdot G} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left[ F_1(r, z, t) - F_1(r, z, 0) \right]. \qquad (6)$$

Компоненты тензоров перемещений, деформаций и напряжений, обусловленных миграцией в основании поровой жидкости, найдем из системы уравнений (2), положив в них:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi = F_2;\\ F = 0.\end{array}\right\}. \qquad (8)$$

Имеем:

$$U_2 = \frac{\partial}{\partial r}F_2;\ W_2 = \frac{\partial}{\partial z}F_2;\ \varepsilon_{z,2} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2};\ \varepsilon_{r,2} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial r^2};\ \varepsilon_{\theta,2} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial r};\ e_2 = \Delta F_2;$$

$$\gamma_{rz,2} = 2\cdot\frac{\partial^2 F_2}{\partial r\partial z};\ \sigma_{zz,2} = 2\cdot G\cdot\frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} + \lambda\cdot\Delta F_2;\ \sigma_{rr,2} = 2\cdot G\cdot\frac{\partial^2 F_2}{\partial r^2} + \lambda\cdot\Delta F_2$$

$$\sigma_{\theta\theta,2} = 2\cdot G\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial r} + \lambda\cdot\Delta F_2;\ \tau_{rz,2} = 2\cdot G\cdot\frac{\partial^2 F_2}{\partial z\partial r}. \qquad (9)$$

Здесь индекс "2" - номер приближения.

3. Третье приближение необходимо выполнить для коррекции граничных условий (напомним, что они полностью удовлетворены в ходе первого приближения). Имеем:

$$\Delta^2 F_3 = 0;\ U_3 = -\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}F_3;\ W_3 = \frac{\lambda + 2\cdot G}{\lambda + G}\cdot\Delta F_3 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}F_3;\ \varepsilon_{\theta,3} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 F_3}{\partial r\partial z};$$

$$\varepsilon_{z,3} = \frac{\lambda + 2\cdot G}{\lambda + G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F_3 - \frac{\partial^3 F_3}{\partial z^3};\ \varepsilon_{r,3} = -\frac{\partial^3 F_3}{\partial r^2\partial z};\ e = \frac{G}{\lambda + G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F_3;$$

$$\gamma_{rz,3} = \frac{\partial}{\partial r}\cdot\left(\frac{\lambda + 2\cdot G}{\lambda + G}\cdot\Delta F_3 - 2\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}F_3\right);\ \omega_3 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda + 2\cdot G}{\lambda + G}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\Delta F_3;$$

$$\sigma_{zz,3} = 2\cdot G\cdot\left(\frac{\lambda + 2\cdot G}{\lambda + G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F_3 - \frac{\partial^3 F_3}{\partial z^3}\right) + \lambda\cdot\left(\frac{G}{\lambda + G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F_3\right);$$

$$\sigma_{rr,3} = -2\cdot G\cdot\frac{\partial^3 F_3}{\partial r^2\partial z} + \frac{\lambda\cdot G}{\lambda + G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F_3;$$

$$\sigma_{\theta\theta,3} = 2\cdot G\cdot\left(-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 F_3}{\partial r\partial z}\right) + \lambda\cdot\left(\frac{G}{\lambda + G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F_3\right)$$

$$\tau_{rz,3} = G\cdot\frac{\partial}{\partial r}\cdot\left(\frac{\lambda + 2\cdot G}{\lambda + G}\Delta - 2\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cdot F_3 \qquad (10)$$

Здесь индекс "2" - номер приближения.

4. Окончательно приближенное решение для упругой (если грунт не обладает реологическими свойствами) или фиктивной среды имеет вид:

$$U^* = U_1 + U_2 + U_3;\ W^* = W_1 + W_2 + W_3;\ \varepsilon_z^* = \varepsilon_{z,1} + \varepsilon_{z,2} + \varepsilon_{z,3};$$

$$\varepsilon_r^* = \varepsilon_{r,1} + \varepsilon_{r,2} + \varepsilon_{r,3};\ \varepsilon_\theta^* = \varepsilon_{\theta,1} + \varepsilon_{\theta,2} + \varepsilon_{\theta,3};\ \gamma_{rz}^* = \gamma_{rz,1} + \gamma_{rz,2} + \gamma_{rz,3};$$

$$e^* = e_1 + e_2 + e_3;\ \omega^* = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3;\ \sigma_{zz}^* = \sigma_{zz,1} + \sigma_{zz,2} + \sigma_{zz,3};$$

$$\sigma_{\theta\theta}^* = \sigma_{\theta\theta,1} + \sigma_{\theta\theta,2} + \sigma_{\theta\theta,3};\ \sigma_{rr}^* = \sigma_{rr,1} + \sigma_{rr,2} + \sigma_{rr,3};$$

$$\tau_{rz}^* = \tau_{rz,1} + \tau_{rz,2} + \tau_{rz,3};\ P^* = P_1 + P_2; \qquad (11)$$

5. Окончательное решение для обладающего реологическими свойствами грунта имеет вид:

$$U(r,z,t) = U^*(r,z,t) + \int_0^t U^*(r,z,\tau) \cdot K(t,\tau) \cdot d\tau = U_1 + U_2 + U_3;$$

$$W(r,z,t) = W^*(r,z,t) + \int_0^t W^*(r,z,\tau) \cdot K(t,\tau) \cdot d\tau;$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^*; \ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^*; \ \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^*; \ \tau_{rz} = \tau_{rz}^*; \ P = P^*.$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^*; \ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^*; \ \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^*; \ \tau_{rz} = \tau_{rz}^*; \ P = P^*. \qquad (12)$$

Здесь $U^*$, $W^*$, $\sigma_{rr}^*$, $\sigma_{\theta\theta}^*$, $\sigma_{zz}^*$, $\tau_{rz}^*$ и $P^*$ - см. формулы (11).

Изложенные в настоящей статье материалы исследований позволили нам сделать такие выводы.

1. Предложен алгоритм построения приближенных решений задачи теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации. Его суть заключается в первоначальном определении напряженно - деформированного состояния грунта в предположении о его объемной не сжимаемости и последующем уточнении полученного таким образом начального приближения.

2. Предлагаемый нами алгоритм позволяет строить решения в рамках таких моделей водонасыщенных оснований:

- упругого;
- вязкоупругого (или наследственно упругого);
- упругопластичного;
- вязкоупругопластичного.

Иными словами, разработанный нами алгоритм позволяет учитывать такие виды деформаций:

- чисто упругие деформации сдвига;
- упругие запаздывающие во времени объемные деформации, обусловленные миграцией поровой жидкости;
- объемные и сдвиговые запаздывающие во времени, на полностью восстанавливающиеся после разгрузки основания (т.е. вязкие) деформации;
- накопление остаточных деформаций при загрузке - разгрузке грунта (т.е. пластические деформации).

**Литература**


1. Зарецкий Ю.К. Теория консолидации грунтов. - М.: Наука. 1967 - 270 с.
2. Зарецкий Ю.К. Лекции по современной механике грунтов. -Ростов на Дону, 1989 - 608с.
3. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1974. - 840 с.
4. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, - 1975. - 872 с.
5. Тимошенко С.П., Гудьир Дж. Теория упругости. - М: Наука, 1975. - 576 с.
6. Флорин В.А. Основы механики грунтов, т.1. - Л. -М.: Госстройиздат, 1959. - 357 с.
7. Флорин В.А. Основы механики грунтов, т. 2. - Л.-М.: Гостройиздат, 1961. - 543 с.
8. Цытович Н.А., Зарецкий Ю.К., Малышев М.В., Абелев М.Ю., Тер-Мартиросян З.Г. Прогноз скорости осадок оснований и сооружений.- М.: Стройиздат, 1967. - 238 с.
9. Шаповал А.В., Шаповал В.Г. Теория взаимосвязанной фильтрационной консолидации: Монография. - Днепропетровск: Пороги, 2009-311 с.
10. Швец В.Б., Гинзбург Л.К., Гольдштейн В.М. и др.: Справочник по механике и динамике грунтов: - К.: Будівельник, 1987. – 232 с.