МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Т.А. Желдак, Л.С. Коряшкіна, С.А. Ус

НЕЧІТКІ МНОЖИНИ В СИСТЕМАХ УПРАВЛІННЯ ТА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Навчальний посібник

За редакцією С.А. Ус

Дніпро
НТУ «ДП»
2020

УДК 510.644.4:004.8:519.816
Ж50

Рекомендовано вченою радою як навчальний посібник для студентів галузі знань 12 – інформаційні технології (протокол № 9 від 5 липня 2018).

Рецензенти:

В.Є. Снитюк – д-р техн. наук, проф. (Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка, завідувач кафедри інтелектуальних та інформаційних систем);

А.М. Пасічник – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Університет митної справи та фінансів, завідувач кафедри транспортних систем і технологій).

Желдак Т.А.
Ж50 Нечіткі множини в системах управління та прийняття рішень: навч. посіб. / Т.А. Желдак, Л.С. Коряшкіна, С.А. Ус, за редакцією С.А. Ус ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2020. – 387 с.

ISBN 978-960-350-726-2

Навчальний посібник охоплює матеріал, передбачений програмами дисциплін “Нечітка математика”, “Прийняття рішень в умовах невизначеності”, “Системи штучного інтелекту” для студентів, які навчаються за спеціальностями галузі знань 12 – інформаційні технології.

Розглянуто основні поняття теорії нечітких множин, нечіткі відношення, нечіткі числа, нечіткі та лінгвістичні змінні й операції над ними. Описано застосування нечітких множин у системах прийняття рішень, штучного інтелекту і теорії керування. Подано методи прийняття рішень на базі нечітких відношень переваги та задачі нечіткого математичного програмування. Велику увагу приділено практичному застосуванню нечітких множин.

Книгу розраховано на осіб, які опанували математику в межах вузівського курсу, знають основи дискретної математики й математичної логіки. Вона може бути корисна всім, хто зацікавлений у застосуванні нечітких множин до розв’язування практичних задач.

УДК 510.644.4:004.8:519.816

ISBN 978-960-350-726-2

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Сучасну науку управління й прийняття рішень неможливо уявити без використання кількісних методів дослідження складних явищ і процесів. Ці методи забезпечують управління такими явищами необхідною науковою обґрунтованістю і зводять до мінімуму елемент суб'єктивності при виборі рішення, дозволяють певною мірою оптимізувати як сам процес управління, так і комплекс технічних засобів, який забезпечує його здійснення.

Кожен спеціаліст, якому доводиться керувати складним об'єктом у реальних умовах, завжди стикається із елементами математичного, програмного інформаційного і технічного забезпечення процесу управління та з недостатністю необхідної для управління і прийняття рішення інформації. Нечітка математика дала змогу розвинути нові підходи, які виводять сферу застосування математичних методів і систем автоматизації за межі класичної теорії.

У цьому посібнику викладено основи теорії нечітких множин і нечіткої логіки та висвітлено їх практичне застосування в системах керування та прийняття рішень. Для успішного засвоєння матеріалу посібника студент має володіти знаннями дискретної математики і математичної логіки, методів математичного програмування й оптимізації.

Матеріал, розглянутий у посібнику, буде сприяти досягненню таких компетенцій:

– здатність формулювати й досліджувати математичні моделі природних, техногенних, економічних та соціальних об’єктів і процесів;

– здатність проводити системні дослідження, виконувати математичне та інформаційне моделювання динамічних процесів;

– здатність опанувати сучасні технології математичного моделювання об’єктів, процесів і явищ, використовувати обчислювальні моделі та алгоритми чисельного розв’язання задач математичного моделювання з урахуванням похибок наближеного чисельного розв’язання професійних задач;

– здатність застосовувати сучасні інформаційні технології при вирішенні задачах системного аналізу. Здатність розкривати ситуаційні та системні невизначеності, розробляти алгоритми подолання конфліктів;

Перелічені компетентності мають забезпечити такі результати навчання:

– знати методи розкриття невизначеності в задачах системного аналізу, уміти розкривати ситуаційну невизначеність і невизначеність у задачах взаємодії, протидії та конфлікту стратегій, знаходити компроміс при розкритті концептуальної невизначеності тощо;

– знати й уміти застосовувати методи еволюційного моделювання та генетичні методи оптимізації, методи індуктивного моделювання й математичний апарат нечіткої логіки, нейронних мереж, теорії ігор та розподіленого штучного інтелекту тощо;

– уміти розробляти експертні та рекомендаційні системи в умовах слабко структурованих даних різної природи;

– знати й уміти ідентифікувати (оцінювати) параметри математичних моделей об'єктів управління в реальному масштабі часу в умовах зміни його динаміки і дії випадкових збурень, використовуючи вимірювані сигнали вхідних і вихідних координат об'єкта;

– знати моделі, методи й алгоритми прийняття рішень в умовах конфлікту, нечіткої інформації, невизначеності й ризику;

– знати і вміти застосовувати методи розкриття невизначеності в задачах взаємодії, конфлікту стратегій, пошуку раціонального компромісу при концептуальній невизначеності; розкривати ситуаційну та системну невизначеності, узгоджувати суперечливі цілі в задачах пошуку раціональних компромісів;

– аналізувати стійкість динамічних систем, застосовувати стохастичні регресивні моделі й моделі у просторі стану для опису динаміки процесів різної природи.

Матеріал посібника поділено на дев'ять розділів.

У *першому* детально висвітлено поняття належності й нечіткої множини й розглянуто операції над ними.

Другий розділ присвячено дослідженню відношень. Подано загальні визначення бінарного відношення, описано способи задання відношень та операції над ними, розкрито їхні властивості і на цій основі уведено поняття нечіткого відношення та розглянуто його застосування. Тут також охарактеризовано відображення нечітких множин і принцип узагальнення, який слугує базою для визначення операцій із нечіткими числами і широко застосовується у задачах прийняття рішень.

У *третьому* розділі розглянуто поняття нечіткого числа, визначено різні класи нечітких чисел та операцій над ними. Окремо описано інтервальну арифметику Каухера. Також у цьому розділі висвітлено прямі й непрямі методи побудови функцій належності, детально викладено метод попарних порівнянь Сааті.

У *четвертому* розділі подано опис методів прийняття рішень за наявності нечітких вихідних даних. Розглянуто підхід Белмана – Заде до розв'язування задачі досягнення нечіткої мети, наведено класифікацію задач нечіткого математичного програмування і розкрито підходи до їх розв'язування. Детально описаний метод розкладання на множини рівня в застосуванні до задачі із нечіткими обмеженнями і метод кусково-лінійної редукції стосовно задачі із нечіткими параметрами в цільовій функції.

П'ятий розділ включає визначення основних понять, що стосуються нечітких відношень переваги і найбільш поширених методів прийняття рішень на основі нечітких відношень. Розглянуто методи прийняття рішень в умовах, коли задано переваги між відношеннями і коли вихідна множина альтернатив є нечіткою.

У *шостому* розділі описуються основні положення теорії нечітких висловлювань. Тут уведено поняття нечіткої та лінгвістичної змінної та описано операції над ними. Подано алгоритми нечіткого логічного виведення, зокрема: Мамдані (Mamdani), Цукамото (Tsukamoto), Сугено й Такагі (Sugeno & Takagi), Ларсена (Larsen).

Сьомий розділ включає відомості про застосування нечітких множин для побудови нейронних мереж. У ньому викладено основні теоретичні засади використання нейронних мереж для апроксимації функцій та розглянуто найбільш відомі їх види і способи побудови.

Восьмий розділ присвячено використанню нечітких множин і наближених висловлювань у теорії керування. У ньому розглянуто основні поняття теорії керування, описано ідею та принципи побудови нечітких контролерів і наведено приклади розв'язування задач керування технічними об'єктами на основі таких контролерів.

У *дев'ятому* розділі наведено приклади застосування теорії нечітких множин до практичних задач прийняття рішень у різних галузях. Описано задачі вибору оптимальних параметрів буріння, керування запасами сировини й матеріалів в умовах невизначеності, встановлення оптимального складу технологічних сумішей та ін.

Усі розділи книги містять контрольні питання та задачі до самостійного розв'язування, що, без сумнівів, буде сприяти кращому засвоєнню навчального матеріалу. У додатках подано варіанти індивідуальних завдань відповідно до розділів посібника, які можуть бути використані для організації самостійної роботи студентів.

Посібник написано з використанням матеріалу лекцій, читаних авторами в НТУ «Дніпровська політехніка» та в Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара. Значна частка прикладів, наведених у цій книзі, базуються на матеріалі студентських курсових і дипломних робіт, виконуваних під керівництвом авторів.

Автори сподіваються, що робота над цією книгою буде сприяти досягненню не однієї мети. Так, для студентів, котрі вперше починають вивчати викладену тут теорію, вона стане своєрідним вступом до засвоєння широкого класу нових задач і методів їх розв'язування; для спеціалістів, які працюють із нечіткими множинами, може слугувати довідником і дозволить поповнити знання деяких питань, висвітлених у спеціальній літературі. Посібник містить обширну бібліографію з теорії нечітких множин, методів прийняття рішень і застосування нечіткої логіки. Зауважимо, що оскільки книга має переважно навчальну мету, то автори не претендують на встановлення пріоритетів у розгляді питань, а тому теоретичні відомості в тексті подано без посилань на літературні джерела.

«Я вважаю, що надмірне прагнення до точності стало причиною дій, які зводять нанівець теорію управління і теорію систем, оскільки за таких умов дослідження в цій сфері зосереджуються на тих і тільки тих проблемах, які піддаються точному вирішенню. Унаслідок цього багато класів задач, у яких дані, цілі й обмеження є надмірно складними або погано визначеними для застосування точного математичного аналізу, залишаються за межами розгляду, оскільки їх не можливо піддати точному математичному опису. Аби сказати що-небудь суттєве про подібні проблеми, ми маємо відмовитись від наших вимог точності й припустити отримання результатів, у певному сенсі розмитих і невизначених»

Л. Заде

ВСТУП

Що таке нечітка математика? І як взагалі математика, наука точна, може бути нечіткою? Для чого вона потрібна?

Давайте подумаємо, а для чого існує математика взагалі? Ми не будемо говорити про високу наукову мету, де теорію створено заради теорії. Математика – наука прикладна. Ми використовуємо її на кожному кроці, іноді свідомо, іноді навіть, не помічаючи цього. Поступ у суспільстві зумовлює розвиток техніки, виробництва і щоб керувати цими процесами, вже недостатньо тільки інтуїції та досвіду. Ми будуємо математичні моделі, описуємо наші життєві ситуації за допомогою формул і знаків, вирішуючи складні технологічні проблеми. Але математика – наука точна. Якщо якийсь параметр повинен дорівнювати 5, то значення 4,999999…. або 5,0000…1 буде вже не припустимим, хоча з погляду практики воно прийнятне. Ми прекрасно оперуємо поняттями «багато», «мало», «достатньо», «добре», «погано», хоча не можемо дати їхні точні визначення. Одне й те саме значення може бути одночасно і великим, і малим. Наприклад, 300 000 км для астронома – це мало (відстань до Місяця 340 000 км), а якщо ми говоримо про відстань на Землі, це багато. Або пам'ятаєте у Дюма в «Трьох мушкетерах» – чин лейтенанта для Атоса – це занадто багато, а для графа де Ла Фер – занадто мало. Насправді, більшість понять, які використовують люди в повсякденному житті, є нечіткими! Коли швець чекає близько трьох хвилин після нанесення клею перед склеюванням, коли господиня відповідно до рецепту кладе в суп дві дрібки солі, коли менеджер у комерційній фірмі виконує вказівку керівництва істотно підвищити обсяги продажів – усі вони виконують нечіткі інструкції, висловлені неформально за допомогою засобів людської мови. Навіть формально чіткі поняття, котрі ми використовуємо у повсякденному житті, можуть сприйматися людьми як нечіткі. Наприклад, у рецепті може бути чітко зазначено «дві чайні ложки солі», але господиня розуміє, що страву не буде зіпсовано, коли покласти дві з половиною ложки, не кажучи вже про те, що чайні ложки, взагалі-то, можуть вміщати різну кількість продукту.

Моделі, які базуються на занадто точному описі, часто бувають дуже громіздкими, потребують багатьох ресурсів для розв'язування і тому їх складно використовувати в практичних ситуаціях, де людина, оперуючи такими «нечіткими» поняттями, легко орієнтується і швидко приймає рішення.

Зручним способом математичного опису неформальних понять, подібних до згаданих вище, і є нечіткі множини та нечітка математика.

Історія розвитку теорії та застосування нечітких множин і нечіткої логіки

Початком виникнення цієї теорії вважають статтю Лофті Заде[1] «Нечіткі множини» (Lotfi Zadeh «Fuzzy sets»), яка була опублікована у 1965 році (Information and Control, № 8, 1965), де вчений уперше сформулював поняття нечіткої множини [88]. Л. Заде розширив поняття множини, припустивши, що його характеристична функція може набувати аби яких значень з інтервалу [0; 1], а не тільки значення 0 або 1. Таке припущення мало на увазі можливість для елемента належати до множини деякою мірою, котру можна було описати кількісно. Увівши потім поняття лінгвістичної змінної, Заде створив апарат для опису інтелектуальної діяльності, зокрема нечіткості й невизначеності висловлювань.

Можна виділити такі етапи розвитку теорії нечітких множин:

1. Етап формування основних теоретичних постулатів (1965 – початок 1980-х). У 1973 році Л. Заде запропонував теорію нечіткої логіки. Подальші роботи професора Л. Заде і його послідовників заклали фундамент нової теорії та створили умови для впровадження методів нечіткого керування в інженерну практику. L. A. Zadeh (1965, 1973); Д. Дюбуа (D. Dubois), А. Прад (B. Prade) (1979, 1980) – запровадили операції над нечіткими числами, теорію нечіткої міри й міри можливості. М. Сугено (M. Sugeno) увів у теорію поняття нечіткого виведення та нечіткого інтегралу; Дж. Беждек (J. Bezdek) – нечіткої кластеризації і розпізнавання образів; Р. Ягер (R.R. Yager) – нечіткої логіки

2. Етап практичних розробок у різних сферах життя із застосуванням нечіткої логіки. Він ознаменуваввся народженням нового наукового напряму в рамках нечіткої логіки: Нечітка економіка – Fuzzy Economics (1973 – початок 1990-х). Це роботи Дж. Баклі (J. Buckley) (1987, 1992) – "Розв'язування

[1] Лотфі Заде (англ. Lotfi Askar Zadeh – Лотфі А. Заде); народився 4 лютого 1921 року у м. Новхани, Азербайджанської РСР, помер 6 вересня 2017 р. у м. Берклі, Каліфорнія) – американський математик і логік, автор терміна «нечітка логіка» і один із засновників теорії нечітких множин, професор Каліфорнійського університету (Берклі).

нечітких рівнянь в економіці та фінансах" і "Нечітка математика у фінансах". У 1993 році Б. Коско (B. Kosko) була доведена основоположна FAT-теорема (Fuzzy Approximation Theorem), яка підтвердила повноту нечіткої логіки. У середині 1970-х було започатковано реалізацію нечітких моделей. У Великобританії Ебрахім Мамдані (Ebrahim Mamdani) використав нечітку логіку для керуванням парогенератором. Запропонований ним алгоритм дозволив суттєво зменшити обсяг обчислень і був високо оцінений спеціалістами.

3. Етап масового використання систем, в основі роботи яких лежить нечітка логіка (1995 г. – наш час). Після першого досвіду застосування у Європі лідерство в цьому напрямі посіла Японія. Нечіткі технології набули застосування в найрізноманітніших технічних і побутових пристроях, що розробляються японськими фірмами. Нечіткі технології використовуються в управлінні метрополітеном, вуличним рухом, керуванні автомобілями. 48 японських компаній утворили спільний заклад – LIFE (Laboratory for International Fuzzy Engineering) – Міжнародну лабораторію розробок, основаних на нечіткій логіці;

У Європі і США ці технології почали активно розвиватися на початку 1990-х. Нечітка логіка виявилась доцільним засобом для систем керування персональними комп'ютерами, у сфері теле- і радіозв'язку, розпізнаванні мови, при розв'язуванні деяких спеціальних задач у космічних програмах і в багатьох інших.

У 1994 році Л. Заде було створено теорію м'яких обчислень (англ. soft computing), яка об'єднує в один клас неточні, наближені методи розв'язування задач, які часто не мають розв'язку за поліномний час. Такі задачі зазвичай виникають у біології, медицині, сфері гуманітарних наук, у практиці робастного керування та менеджменту. Технології м'яких обчислень орієнтовані на розв'язування задач управління слабо структурованими об'єктами; в їхньому інструментарії використовується техніка нечітких систем (нечіткі множини, нечітка логіка, нечіткі регулятори), нечіткі нейронні мережі, генетичні алгоритми та еволюційне моделювання. Надалі було розроблено теорію вербальних обчислень та уявлень (англ. computing with words and perceptions). З того часу багато науковців і практиків розвивають цю теорію, використовуючи її для розв'язування різноманітних задач прийняття рішень, управління, класифікації та ін.

Вагомий внесок у розвиток нечіткої логіки (Fuzzy Logic) в Росії останнім часом внесли О. О. Недосєкін, К. І. Воронов, О. Б. Максимов, Г. С. Павлов, С. Н. Фролов, в Україні цей напрям розвивають О. П. Ротштейн, Ю. П. Зайченко, С. Д. Штовба, О. Ф. Волошин, С. О. Субботін, В. Є. Снитюк.

Таким чином, можна зробити висновок, що сфера застосування теорії нечітких множин і нечіткої логіки з року в рік продовжує розширюватись. При цьому процес розробки й функціонування нечітких моделей тісно пов'язаний із використанням системного підходу в моделюванні.

Методологія системного моделювання

Системний аналіз і системний підхід являють собою більш давні поняття ніж нечіткі множини та нечітке моделювання. Сучасний світ постає перед нами складною системою, із поглибленим пізнаням якої приходить розуміння, що все в ньому взаємопов'язане. Засобом, який дозволяє в цих умовах діяти розумно, і врахувати всі наслідки прийнятих рішень, є методологія системного аналізу або системного підходу. Сфера дії цієї методології дуже різноманітна і весь час розширюється: від постановки наукових досліджень й отримання теоретичних узагальнень до проектування технічних об'єктів й управління громадськими інститутами.

Системний підхід, передусім, – це правильна організація мислення, яка полягає в умінні проводити всебічну оцінку ситуації, бачити проблему в цілому, в усій її складності та повноті.

Розглянемо основні поняття системного підходу. Головне серед них – це система.

Системою називають сукупність об'єктів довільної природи, які пов'язані між собою деяким чином (зв'язки можуть бути механічні, енергетичні, фізичні, хімічні, інформаційні, організаційні і т. ін.), утворюють щось ціле і призначені для досягнення певної мети. Важливою характеристикою системи є *емерджентність*, тобто поява у неї властивостей, яких не мають її складові. Наприклад, автомобіль можна використовувати для перевезення людей і вантажів, але окремі його частини не мають цієї властивості. Системами є технічні і природні об'єкти – автомобіль, комп'ютер, людина, сонячна система, підприємство, а також абстрактні об'єкти, приміром, комп'ютерна програма, мова, наука, оскільки всі вони мають визначені вище властивості.

Найважливішими характеристиками всякої системи є її *межа*, *структура* і *процес функціонування.*

Коли ми визначаємо межу системи, то мова взагалі йде про поділ усіх елементів на два класи – ті що належать системі (вони є її елементами) і ті, що їй не належать (вони утворюють середовище). І тут традиційним виступає припущення про те, що межа чітко розділяє елементи системи і зовнішнє середовище.

Під *структорою* системи розуміють сталу в часі сукупність зв'язків між її елементами і компонентами. Зв'язки при цьому можуть відрізнятися за характером, силою та напрямком.

Процес функціонування системи тісно пов'язаний із зміною її властивостей у часі. При цьому головна характеристика – це *стан системи*, що описує її властивості або ознаки. Вони, своєю чергою, у кожен момент часу відображають найбільш суттєві особливості її поведінки. За таких умов процес функціонування системи може бути описаний як послідовна зміна її станів. При цьому прийнято говорити, що система переходить з одного стану в інший.

Отже, *стан системи* – це фіксація сукупності доступних системі ресурсів (матеріальних, енергетичних, інформаційних, просторових, часових, людських, організаційних), що визначають її положення відносно очікуваного результату або його образу. Це "фотографія" механізму перетворення вхідних даних системи у вихідні.

Мета являє собою образ не існуючого, але бажаного, з погляду завдання або даної проблеми, стану середовища, тобто такого, який дозволяє вирішувати проблему з використанням наявних ресурсів. Це опис, уявлення про деякий найбільш прийнятний (з огляду на поставлену мету й доступні ресурси) стан системи.

Будь-яка система має внутрішні стани, внутрішній механізм перетворення вхідних даних у вихідні (внутрішній опис), а також має зовнішні прояви (зовнішній опис).

Внутрішній опис дає інформацію про поведінку системи, про відповідність (або невідповідність) її внутрішньої структури цілям, підсистемам (елементам) і наявним у ній ресурсам. Зовнішній опис відображає взаємодію з іншими системами, їхніми цілями і ресурсами (див. рис. 1).

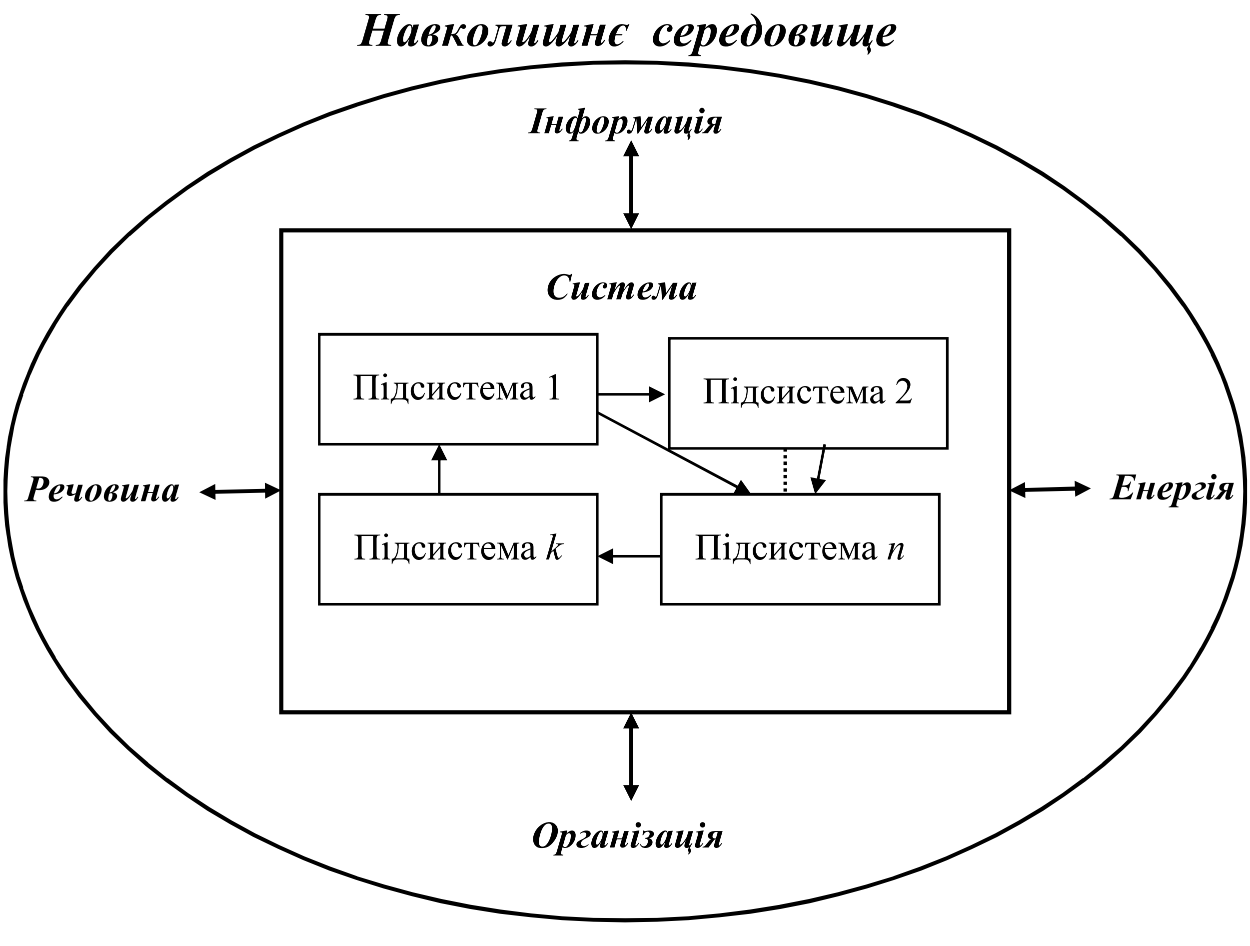


Рис. 1. Схема взаємодії системи із зовнішнім середовищем [38]

Зовнішній опис системи залежить від її внутрішнього опису.

Зауважимо, що на кожному етапі опису й дослідження системи можливе виникнення невизначеності.

Невизначеними можуть бути межі, які відділяють систему від середовища, мета функціонування, обмеження, ресурси, зв'язки між елементами й підсистемами. Докладніше причини виникнення невизначеності буде розглянуто нижче.

Системи класифікують, застосовуючи різні ознаки. Наприклад, відповідно до наявних там величин вони поділяються на фізичні й абстрактні. До фізичних систем відносять ті, у яких величини піддаються вимірюванню.

Системи, властивості яких не змінюються в часі, називають статичними, у протилежному випадку, вони будуть динамічними.

За ознакою взаємодії із зовнішнім середовищем розрізняють відкриті й закриті системи. Отже, класифікація систем має враховувати багато аспектів. Найбільш відомі класифікації належать С. Біру і К. Боулдінгу. Першу (класифікація С. Біра) наведено в табл. 1. У ній враховано два основних аспекти системи: складність і спосіб опису.

Таблиця 1

Класифікація систем С. Біра [55]

Система	Проста	Складна	Дуже складна
Детермінована	Віконна засувка, проект механічних майстерень	Цифрова ЕОМ, автоматизація	
Імовірнісна	підкидання монети, рух медузи, статистичний контроль якості продукції	зберігання запасів, умовні рефлекси, прибуток промислового підприємства	економіка, діяльність фірми, мозок
Нечітка	–	людина, поведінка людини, мислення, якість життя	соціальні системи і соціальні організації, трансцедентальні системи або системи за межами нашого пізнання

Побудова моделі системи може здійснюватись на основі різних підходів. Так, класичний підхід означає сполучення окремих компонент в єдину модель, причому кожна з них виконує власне завдання, будучи ізольованою від інших її частин. Такий підхід може бути використаний для реалізації моделей порівняно простих систем, у яких можливе розділення і взаємний незалежний розгляд окремих сторін функціонування реального об’єкта.

Застосування системного підходу при моделюванні дозволяє вирішити проблему побудови моделі складної системи з урахуванням усіх факторів і можливостей, пропорційно їх значущості, на всіх етапах дослідження системи і побудови моделі. Такий підхід означає, що кожна система *S* є інтегрованим цілим навіть тоді, коли вона складається із окремих підсистем. Таким чином, в основі системного підходу лежить вивчення системи як інтегрованого цілого, котре починають із головного – визначення мети функціонування.

Процес синтезу моделі на основі системного підходу умовно показано на рис. 2.

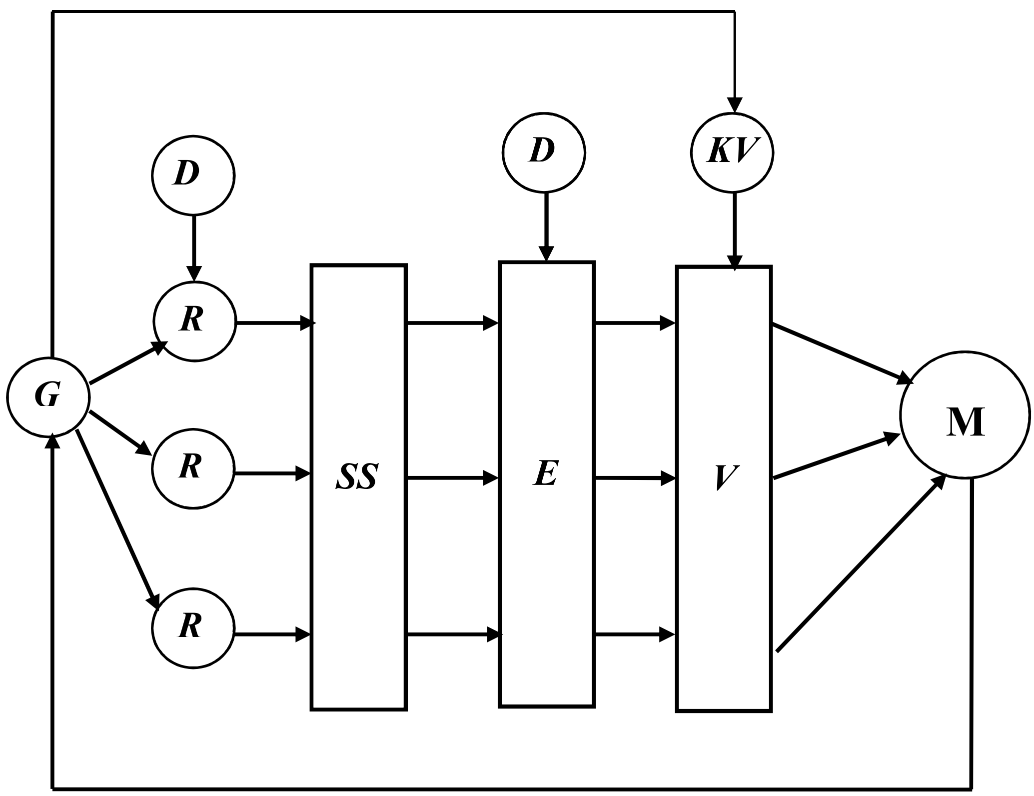


Рис. 2. Процес синтезу моделі на основі системного підходу [63]

На основі вихідних даних *D*, що відомі із аналізу зовнішньої системи, тих обмежень, які діють на систему згори або знизу, враховуючи можливості її реалізації, і на основі мети функціонування формулюють вихідні вимоги *R* до моделі *M* системи *S*. На базі цих вимог розробляються орієнтовно деякі підсистеми *SS* й елементи *E*, а потім здійснюється найбільш складний етап синтезу – вибір *V* складових системи *S*, для чого використовуються спеціальні критерії вибору (*KV*).

Зауважимо, що при побудові моделі системи необхідно забезпечити максимальну її ефективність, зазвичай визначену як різницю між певними показниками, які описують цінність результатів, отриманих при експлуатації моделі, і тими витратами, що були вкладені у її розробку. Таким чином, вибір правильних засобів моделювання систем є основою підвищення якості моделі й тим самим, обґрунтованого прийняття рішень.

Невизначеність у задачах управління й прийняття рішень. Класифікація невизначеності

Прийняття рішень являє собою свідомий вибір однієї з можливих альтернатив (залежно від конкретного змісту їх називають стратегіями, планами, варіантами) на основі певного принципу (критерію) оптимальності.

Цей вибір робить *особа, яка приймає рішення* (ОПР). У ролі такої особи виступають окремі люди або групи людей, що мають право вибору і несуть відповідальність за його наслідки. Це може бути майстер, диспетчер, начальник зміни (цеху, відділу), керівник підприємства або рада директорів. Беручи за основу наявні дані (у тому числі й математичні розрахунки та дослідження), ОПР вибирає остаточний варіант рішення в межах своєї компетенції.

Будь-який процес прийняття рішень можна охарактеризувати такими елементами:

1. Особа, що приймає рішення.
2. Множина змінних, значення яких вибирає ОПР (варіанти, стратегії, плани, керувальні дії).
3. Множина змінних, значення яких залежать від прийнятого рішення (результати, вихідні змінні ситуації прийняття рішень).
4. Множина змінних, значення яких ОПР не регулює (параметри й зовнішнє середовище).
5. Інтервал часу, протягом якого приймаються рішення.
6. Математична модель задачі прийняття рішення, що являє собою множину співвідношень між параметрами, керувальними діями і вихідними змінними.
7. Обмеження, що описують вимоги, викликані ситуацією прийняття рішення по відношенню до вихідних змінних задачі та керувальних дій.
8. Цільова функція або критерій оптимальності, за допомогою якого оцінюють якість вибраного рішення.

Кожен з цих елементів може характеризуватися різним ступенем невизначеності і залежно від цього будуть отримані різні класи задач прийняття рішень.

Якщо параметри й зовнішні збурення (вплив середовища) залишаються незмінними в часі, то математична модель буде *статичною*. В іншому випадку модель ситуації прийняття рішень буде динамічною. Опис статичної моделі можна подати у вигляді графіка, таблиці, функціональної залежності або алгоритму обчислення вихідних змінних. Динамічні моделі описують за допомогою різних класів диференціальних або різницевих рівнянь.

Якщо зовнішні збурення носять невипадковий характер, то маємо *детерміновану* модель прийняття рішення. Коли ж такі збурення випадкові, то отримуємо *стохастичну* модель. У цьому випадку вихідні змінні також будуть випадковими, а їхній розподіл визначатиметься розподілом зовнішніх збурень.

У тому разі, коли множина можливих альтернатив і критерій оптимальності цілком визначені, то проблема прийняття рішень зводиться до задачі *оптимізації*.

Коли ситуація потребує врахування кількох критеріїв – її описують за допомогою задачі багатокритерійної оптимізації.

Якщо множину альтернатив визначено, критерій оптимальності невідомий, але відомі відношення переваги, задані на множині альтернатив, то маємо справу із *задачею вибору*. Це досить поширена ситуація, оскільки не завжди можна кількісно оцінити кожну альтернативу, але в більшості випадків для всіх або кількох пар альтернатив існує можливість назвати ту з них, що має переваги над іншою.

Коли ж деякі або всі елементи задачі мають невизначеність типу *нечіткість* (якісну невизначеність), то йдеться про задачі *прийняття рішень у нечітких умовах* (зокрема задачі нечіткого математичного програмування, задачі вибору в нечітких умовах та інші).

Отже, у процесі прийняття рішень виникають ситуації, які мають той чи інший ступінь невизначеності, а тому якість рішення залежить від повноти врахування всіх чинників, що впливають на його наслідки. Нерідко ці чинники носять суб'єктивний характер, і це стосується як ОПР, так і самого процесу прийняття рішень. Крім того ОПР не завжди має у своєму розпорядженні всю інформацію, яка необхідна для її обґрунтованих дій. Це одна з основних труднощів, що виникають у процесі прийняття рішень.

Такі ситуації потребують для свого опису спеціального математичного апарату, який містив би в собі можливість врахування згаданої невизначеності.

Це можуть бути методи теорії ймовірностей, теорії ігор, статистичних рішень, нечітких множин або якісні методи системного аналізу.

Історично першим для врахування невизначеності був апарат теорії ймовірності, відповідно до якого невизначеність ситуації описується ймовірнісною мірою, котра характеризує можливість появи попередньо заданих ймовірнісних виходів (елементів, або підмножин деякої множини).

У теорії ігор невизначеність породжується конфліктом та антагоністичними інтересами гравців, пов'язаних між собою певними правилами ведення гри. У теорії статистичних рішень одним із гравців виступає природа, тобто пасивний гравець, поведінка якого описується законами розподілу ймовірності. Різні ступені градації невизначеності в теорії прийняття рішень називають інформаційними ситуаціями [64].

Схематично класифікацію задач прийняття рішень за кількістю критеріїв, залежністю від часу, випадкових факторів, а також дані про відповідний їм математичний апарат відображено на рис. 3. Схему взято з літератури [16].

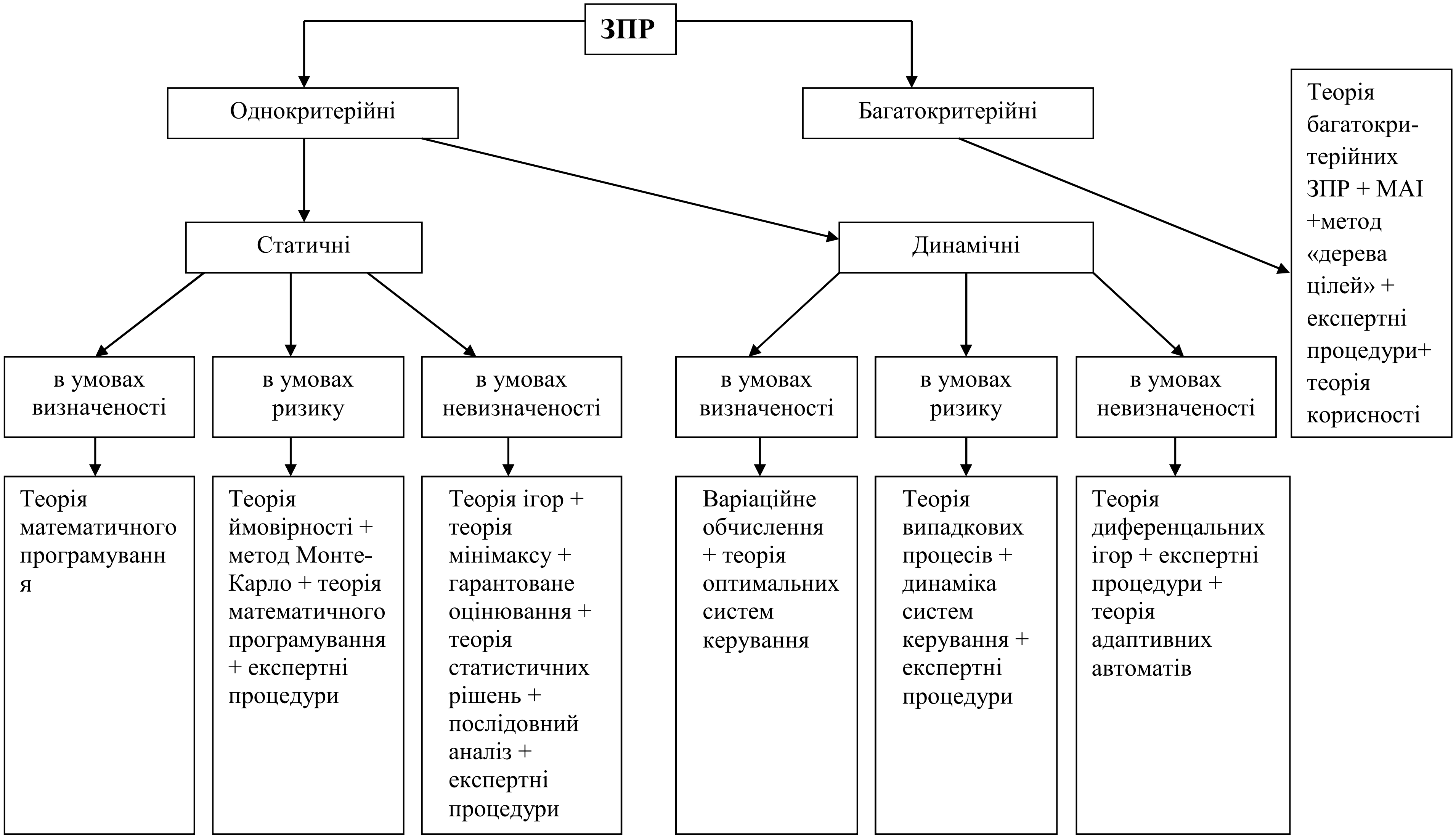


Рис. 3. Класифікація задач прийняття рішень (ЗПР) і математичний апарат, що застосовується для їх розв’язування

Розглянемо деякі види невизначеності, що виникають у процесах прийняття рішень та управління. Як правило, невизначеність у прийнятті рішень зумовлено недостатньою надійністю і кількістю інформації, на основі якої ОПР здійснює свій вибір.

За типами та причинами виникнення невизначеність можна класифікувати таким чином:

1. Принципова невизначеність, зумовлена неможливістю отримати інформацію взагалі, наприклад, на даному рівні розвитку наукових знань.

2. Невизначеність, спричинена загальним числом об'єктів або елементів системи, приміром, коли їх кількість перевищує 10^9.

3. Невизначеність, викликана браком інформації або її невірогідністю через технічні, соціальні або інші причини.

4. Невизначеність, породжена занадто високою або недоступною ціною встановлення визначенності.

5. Невизначеність, яку створює особа, що приймає рішення, унаслідок її некомпетентності, недостатнього досвіду й знань про фактори, котрі впливають на процес.

6. Невизначеність як наслідок обмежень у системі прийняття рішень (обмеження за часом й елементами простору параметрів, що характеризують фактори прийняття рішень);

7. Невизначеність, спричинена неантагоністичною поведінкою супротивника, який має вплив на процес прийняття рішень.

За іншою класифікацією визначено такі типи:

- невідомість,
- неповнота,
- недостатність,
- неадекватність,
- недовизначеність.

Схематично співвідношення між названими типами невизначеності й відповідними теоріями зображено на рис. 4.

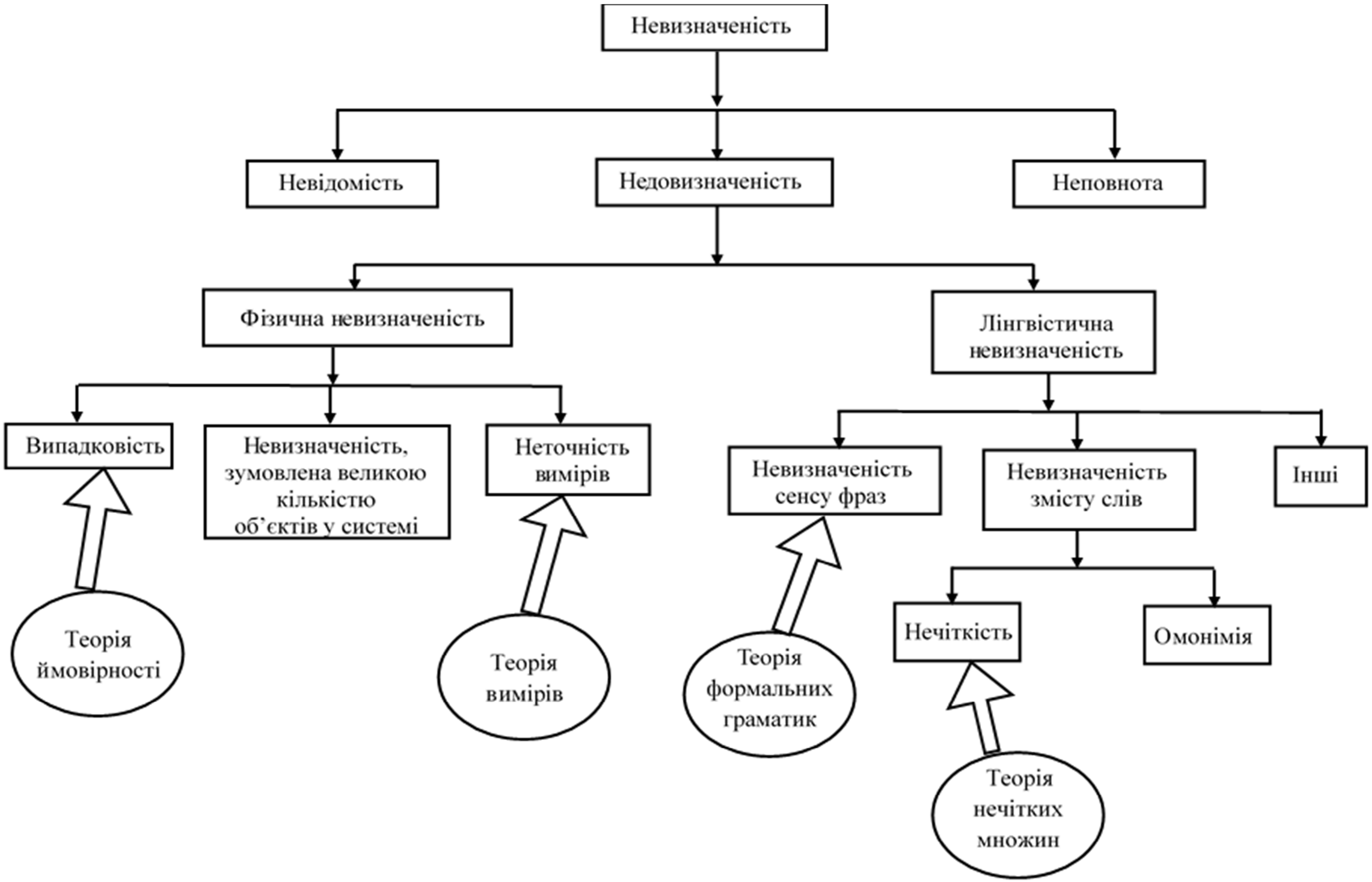


Рис. 4. Схема співвідношення між різними типами невизначеності

Порівняння ймовірнісного та нечіткого підходів до моделювання. Стохастична й лінгвістична невизначеність

Розробка та вивчення моделей, де враховано невизначеність різних типів, є предметом дослідження багатьох дисциплін. Як вже було сказано вище, насамперед, це теорія ймовірності, математична статистика, далі теорія інформації, теорія ігор, теорія масового обслуговування і, нарешті, теорія нечітких множин. Розглянемо різницю між імовірнісним та нечітким підходами до моделювання, яким відповідають два типи невизначеності – стохастична та лінгвістична.

Стохастична невизначеність описує ситуації, у яких добре описана (визначена) подія може відбутися або ні. Із часом ступінь невизначеності, пов'язана із цією подією, може змінитися. Крім того, необхідно мати на увазі деякі специфічні умови, за яких розглянуто цю подію. Зміна цих умов також може викликати зміну ступеня невизначеності або навіть сенсу події. Потрібно зауважити також, що цей тип невизначеності має сенс лише по відношенню до подій у майбутньому.

Якщо розглянути просте висловлювання «завтра піде дощ із ймовірністю 0,3», то його аналіз показує, що, по-перше, ми чітко розуміємо сенс висловлювання «піде дощ» (тобто знаємо який вид і яку силу опадів вважати дощем), по-друге, залишається незрозумілим, чи буде дощити цілий день, чи це будуть короткочасні опади, тобто ми стикаємось з іншим видом невизначеності, який змістовно відрізняється від стохастичної невизначеності.

Лінгвістична невизначеність зумовлена неточністю людської мови. Це явище ми кожен день спостерігаємо у повсякденному житті: «похмурий день», «дорогий автомобіль», «гаряча кава» – це приклади неточно визначених понять. Для їх моделювання й використовується теорія нечітких множин.

Отже, стохастична й лінгвістична невизначеність мають різну природу. Стохастична являє собою невизначеність настання чітко окреслених подій в майбутньому (наприклад, говорячи, що «компанія буде прибутковою», ми не впевнені в цьому повністю, адже компанія або буде такою, або ні), описати невизначеність такого типу можна за допомогою теорії ймовірності.

Лінгвістична невизначеність пов'язана із неточністю опису ситуації або події, що не залежить від часу вивчення цих явищ. Теорію ймовірності не можна застосовувати для розв'язання таких проблем (наприклад, вживаючи вираз «компанія проводить прогресивну політику», – досить складно визначити, який зміст має поняття «прогресивна політика»).

Розглянемо приклади, які ілюструють різницю між стохастичною і лінгвістичною невизначеністю.

Приклад 1. Уявімо собі ситуацію, коли мандрівник після довгої подорожі дуже хоче пити і знаходить дві пляшки із невідомою рідиною.

Він хоче втамувати свою спрагу, але жодних вказівок про вміст пляшок немає. Відомо тільки, що рідина в першій пляшці зі ступенем належності 0,91 може вважатися питною водою, а друга з імовірністю 0,91 містить рідину, придатну до пиття. Яку ж із пляшок йому слід обрати? Людина, що знайома із теорією нечітких множин і теорією ймовірності, могла б розмірковувати таким чином: аналізуючи інформацію про вміст першої пляшки, можна сказати, що там не зовсім придатна для того, щоб пити вода, наприклад, болотна, оскільки чиста вода мала би ступінь належності до питної 1, у той же час вміст цієї пляшки точно не буде шкідливим і непридатним для вживання, тобто це точно не кислота або отрута. Бо тоді його ступінь належності до питної води був би нульовим. Про другу пляшку знавець теорії ймовірності сказав би, що там може бути і чиста вода, і рідина, що не є водою, навіть кислота або щось шкідливе. Імовірність свідчить, що при повторюванні цього експерименту, приблизно в 9 випадках із 100 ця пляшка містила би непридатну для пиття рідину. Отже, логічним буде вибір першої пляшки, оскільки її вміст точно не буде шкідливим.

Приклад 2. У теорії прийняття рішень часто доводиться оцінювати різні величини, наявні в розпорядженні особи, що приймає рішення (ОПР): ресурси, параметри зовнішнього середовища та ін. Розглянемо, наприклад, діяльність комерційної фірми, яка досліджує можливість проведення рекламної кампанії своєї продукції. Для прийняття обґрунтованого рішення необхідно передбачити, як проведення кампанії вплине на обсяг продажу продукції. Таким чином, керівництво фірми має оцінити динаміку продажів унаслідок проведення рекламної кампанії.

Якщо фірма має великий досвід подібної діяльності, то у неї може накопичитися певна статистика динаміки продажів залежно від проведених рекламних акцій. У цьому випадку можна вважати збільшення продажів випадкової величиною і покласти в основу її оцінки ймовірнісний розподіл. Подібний розподіл міг би виглядати, наприклад, так, як показано на рис. 5.

Однак зрозуміло, що побудувати подібну діаграму можна на базі величезного обсягу статистичних даних. Наскільки часто фірми мають у своєму розпорядженні таку вичерпну інформацію? Варто також нагадати, що кожна рекламна кампанія унікальна – змінюється товар, змінюється склад конкурентів, смаки й доходи споживачів, і для прийняття обґрунтованого рішення необхідно враховувати наявну в даний момент комбінацію цих факторів, яка навіть у фірмах-довгожителях раніше мала місце не більше кількох разів. Таким чином, використання методів теорії ймовірностей у прийнятті подібного рішення недоцільне через брак інформації.

Проте, навіть «бідна» статистика в поєднанні з експертними оцінками дає можливість спрогнозувати динаміку продажів за допомогою нечітких множин. Нехай, скажімо, експерти вважають, що поточні ринкові умови приблизно відповідають одній з проведених раніше кампаній, після якої сума продажів зросла на 100000 грн. Таким чином, достовірно відомо, що результатом кампанії може бути збільшення прибутку на 100000 грн, отже, ступінь належності точки 100000 грн нечіткій множині «збільшення продажів» дорівнює одиниці. Також експерти вважають, що, з одного боку, кампанія не призведе до зменшення продажів, а з іншого – не варто розраховувати на збільшення прибутку більше як на 300000 грн. Функція належності нечіткої множини «збільшення продажів» тоді могла б виглядати так, як це показано на рис. 6.

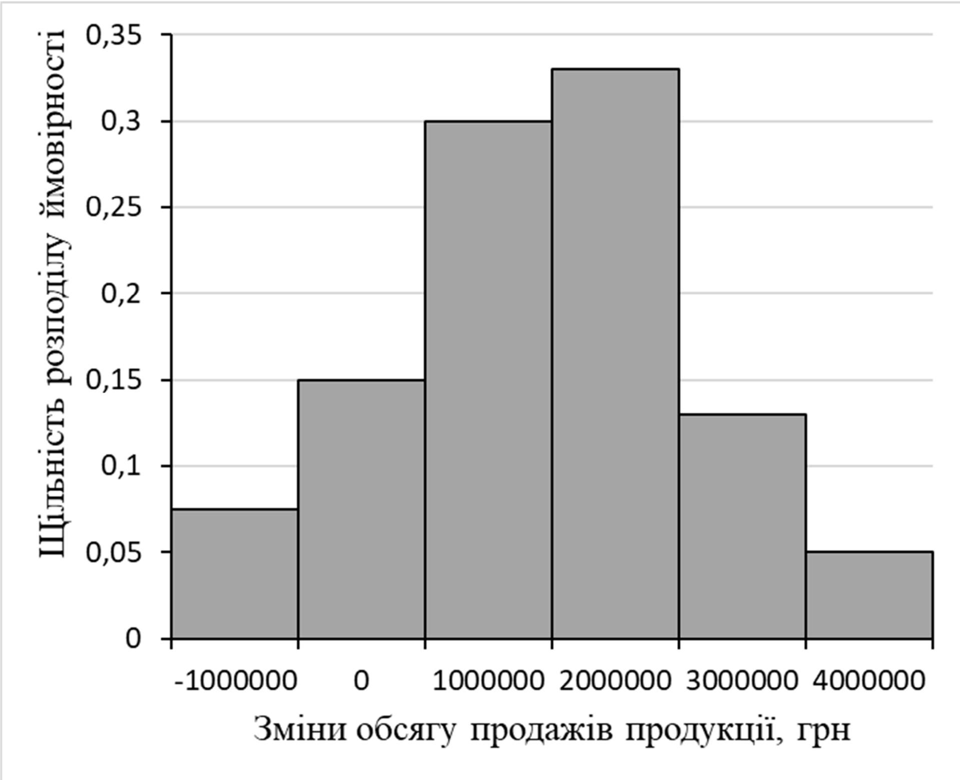


Рис. 5. Щільність розподілу випадкової величини «збільшення продажів»

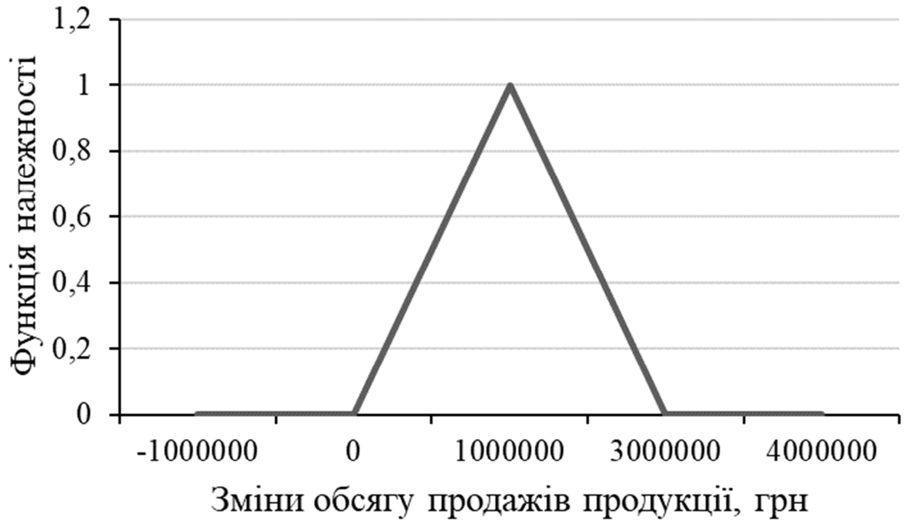


Рис. 6. Функція належності нечіткої множини «збільшення продажів»

Мова нечітких множин має істотні переваги перед мовою теорії ймовірностей тоді, коли оцінки базуються на опитуванні експертів. Відомо, що люди дуже часто неправильно оцінюють імовірності (особливо великі і малі).

Тому вимагати від експертів – фахівців у конкретних предметних галузях, а не математиків, оцінок у формі розподілу ймовірності часто неможливо. Використання ж отриманих результатів для прийняття рішень можна кваліфікувати як безпідставне. Опис проблеми у формі нечітких множин не потребує занадто високої кваліфікації експертів, причому часто набагато точніше відображає суть справи і наявну в ОПР інформацію.

Звичайно, за такі переваги доводиться платити. Пропоновані цією теорією рішення основані на нечіткій інформації, а тому неминуче несуть на собі відбиток нечіткості. Вони можуть розглядатися тільки як рекомендації для ОПР, яка має робити вибір одного з переліку варіантів. Проте навіть цей факт можна вважати перевагою теорії – він показує, як збільшення інформованості ОПР позначається на достовірності й правильності прийнятих рішень.

Застосування нечітких множин

В цілому алгоритми створені на базі нечітких множин добре зарекомендували себе на практиці для виконання найрізноманітнішого кола завдань:

– створення математичної моделі багатошарового оцінювання запасів вугілля в пластах;

– застосування нечітких рівнянь та елементів нечіткої логіки у діагностуванні складних систем (наприклад, пакет програм Thermix-2D для аналізу динаміки АЕС);

– керування нестаціонарним процесом руху морських геолого-геофізичних комплексів;

– оцінювання показників якості програмних засобів;

– у системах штучного інтелекту для управління роботою технологічного устаткування;

– контроль систем розробки родовищ, видобутку і транспортування газу та керування ними;

– опис дій диспетчерського персоналу за допомогою лінгвістичних правил поведінки, моделювання відхилень від прийнятих алгоритмів (помилок і поганої роботи диспетчерів, виникнення несправностей, перешкод) з використанням нечітких алгоритмів.

Більш детальний перелік завдань із відповідними посиланнями зацікавлений читач може знайти в науковій літературі [6, 34, 49, 50, 53].

РОЗДІЛ 1

НЕЧІТКІ МНОЖИНИ

Мета розділу: ознайомлення з поняттям про нечітку множину, її властивості й використання.

1.1. Поняття належності

Нехай *E* – деяка множина, *A* – її підмножина, тобто $A \subset E$, x – деякий елемент множини *E*, причому $x \in A$. Для опису цієї належності можна використовувати *характеристичну функцію* $\mu_A(x)$, значення якої свідчать про те, належить елемент *x* множині *A* чи ні, а саме:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases} \tag{1.1}$$

П р и к л а д 1.1. $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ і нехай $A = \{x_2, x_3, x_5\}$. Випишемо для кожного елемента множини *E* ступінь його належності множині *A*:

$$\mu_A(x_1) = 0, \quad \mu_A(x_2) = 1, \quad \mu_A(x_3) = 1, \quad \mu_A(x_4) = 0, \quad \mu_A(x_5) = 1.$$

Таким чином, усі елементи множини *A* можна подати через елементи множини *E*, супроводжуючи кожен з них значенням ступеня його належності, а саме:

$$A = \{ (x_1|0), \ (x_2|1), \ (x_3|1), \ (x_4|0), \ (x_5|1) \}.$$

П р и к л а д 1.2. Нехай множина $E = [0,5]$, $A = [1,2]$, тоді

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1,2], \\ 0, & x \in [0,1) \cup (2,5], \end{cases}$$

і множину *A* можна записати таким чином: $A = \{x \in E : \mu_A(x) = 1\}$.

Нехай $\overline{A}$ – доповнення множини *A* відносно *E*, тобто $\overline{A} \subset E$, $A \cup \overline{A} = E$, і $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Якщо $x \in A$, то $x \notin \overline{A}$, і ми можемо записати, що коли $\mu_A(x) = 1$, то $\mu_{\overline{A}}(x) = 0$.

Тоді враховуючи умови прикладу 1.1, одержимо такі значення ступеня належності елементів множині $\overline{A}$:

$\mu_{\overline{A}}(x_1) = 1$, $\mu_{\overline{A}}(x_2) = 0$, $\mu_{\overline{A}}(x_3) = 0$, $\mu_{\overline{A}}(x_4) = 1$, $\mu_{\overline{A}}(x_5) = 0$, й $\overline{A}=\{(x_1|1),(x_2|0),(x_3|0),(x_4|1),(x_5|0)\}$.

З огляду на умови прикладу 1.2

$$\mu_{\overline{A}}=\begin{cases}1, x\in[0;1)\bigcup(2;5],\\0, x\in[1;2],\end{cases}$$

і $\overline{A}=\{x\in E, \mu_{\overline{A}}(x)=1\}$.

Тепер розглянемо операції об'єднання й перетину множин, користуючись термінологією характеристичних функцій.

Візьмемо дві множини A та B, характеристичні функції яких

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\0, & x\notin A,\end{cases} \qquad \mu_B(x)=\begin{cases}1, & x\in B,\\0, & x\notin B\end{cases}$$

відповідно.

Характеристичною функцією їх перетину буде функція $\mu_{A\cap B}(x)$, яку визначено за такими правилами:

$$\mu_{A\cap B}(x)=\begin{cases}1, & x\in A\bigcap B,\\0, & x\notin A\bigcap B.\end{cases}$$

Її можна записати у вигляді такої формули:

$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\cdot\mu_B(x),$$

або

$$\mu_{A\cap B}(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}.$$

Аналогічно для об'єднання множин $A\bigcup B$

$$\mu_{A\cup B}(x)=\begin{cases}1, & x\in A\bigcap B,\\0, & x\notin A\bigcap B,\end{cases}$$

тобто $\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\oplus\mu_B(x)$, де $\oplus$ – булеве додавання,

або $\mu_{A\cup B}(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$.

П р и к л а д 1.3. Розглянемо таку множину: $E=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, і дві її підмножини:

$$A=\{(x_1|0),(x_2|1),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|1)\} \text{ та } B=\{(x_1|1),(x_2|0),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|1)\}.$$

Знайдемо їх об’єднання й перетин:

$$A \bigcap B = \{(x_1|0), (x_2|0), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\},$$

$$A \bigcup B = \{(x_1|1), (x_2|1), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\},$$

а також доповнення отриманих підмножин:

$$\overline{A \bigcap B} = \{(x_1|1), (x_2|1), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0)\},$$

$$\overline{A \bigcup B} = \{(x_1|0), (x_2|0), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\}.$$

1.2. Визначення нечіткої множини та пов’язана з нею термінологія

У всіх прикладах з попереднього підрозділу елементи множини E або належать чи не належать підмножині A і характеристична функція цієї підмножини набуває значення 0 або 1. Тепер припустимо, що вона може набувати будь-яких значень із інтервалу [0; 1]. Згідно з цим припущенням, елемент x множини E може не належати множині A, тоді $\mu_A(x) = 0$, може бути елементом A незначною мірою [коли значення $\mu_A(x)$ близьке до 0], може належати множині A більшою чи меншою мірою [коли величина $\mu_A(x)$ не дуже близька до 0 та до 1], може бути елементом A значною мірою, при цьому $\mu_A(x)$ близьке до 1 або, нарешті, може бути елементом множини A – і тоді $\mu_A(x) = 1$. Таким чином, ми отримуємо узагальнене поняття належності, яке дозволяє нам ввести поняття нечіткої множини.

В и з н а ч е н н я 1.1. Нехай E – деяка множина (у звичайному уявленні). *Нечіткою підмножиною A* в множині E назвемо сукупність пар такого вигляду: $(x, \mu_A(x))$, де $x \in E$, функція $\mu_A : E \to [0;1]$. При цьому $\mu_A(x)$ називається *функцією належності* нечіткої підмножини A.

Значення $\mu_A(x)$ цієї функції для конкретного елемента x називається *ступенем належності* цього елемента до нечіткої підмножини A.

Позначаємо нечітку підмножину $\widetilde{A}$, або $\widetilde{A} \subset E$, коли ж ясно, що мова йде саме про нечіткі підмножини, то пишемо просто: $A \subset E$.

Належність елемента до нечіткої підмножини позначається таким чином:

$$x \underset{0,2}{\in} \widetilde{A},\ y \underset{1}{\in} \widetilde{A},\ z \underset{0}{\in} \widetilde{A},$$

де $\underset{0}{\in}$ позначає $\notin$, $\underset{1}{\in}$ еквівалентне $\in$.

Зауважимо, що в публікаціях з теорії нечітких множин, яких зараз дуже багато, подано різні визначення нечіткої множини. Найбільш загальні з них передбачають, що областю значень функції належності можуть бути інші нечіткі множини або досить упорядковані множини [44, 51]. Крім того, трапляються різні позначення нечітких множин. Крім тих, що прийняті в цьому посібнику, скінченні нечіткі множини описують також у такому вигляді:

$$A=\{(\mu(x_1)/x_1),\ (\mu(x_2)/x_2),\ldots,\ (\mu(x_n)/x_n)\};$$

$$A=\{(\mu(x_1),x_1),\ (\mu(x_2),x_2),\ldots,\ (\mu(x_n),x_n)\},$$

$$A=\frac{\mu(x_1)\ \big|\ \mu(x_2)\ \big|\ \ldots\ \big|\ \ldots\ \big|\ \mu(x_n)\ \big|}{x_1\ \big|\ x_2\ \big|\ \ldots\ \big|\ \ldots\ \big|\ x_n\ \big|},$$

$$A=\{(\mu(x_1),x_1)+(\mu(x_2),x_2)+\ldots+\ (\mu(x_n),x_n)\},$$

$$A=\left\{\frac{\mu(x_1)}{x_1}+\frac{\mu(x_2)}{x_2}+\ldots+\frac{\mu(x_2)}{x_2}\right\}.$$

При цьому похила та горизонтальна риски тільки розділяють символи, а знак «+» означає не алгебраїчну суму, а операцію об’єднання елементів. Нескінченні нечіткі множини іноді записують через інтеграл, а саме:

$$\int\mu(x_n)/x_n,$$

але це також не пов’язано безпосередньо з операцією інтегрування, а скоріше традиційний запис, який відображає перехід до нескінченності.

Нечітку множину може бути позначено символом тильди «~», розміщеним згори або знизу відповідної літери, або вживанням її рукописного варіанта, наприклад, $\mathcal{A}$.[2]

П р и к л а д 1.4. Нехай $\widetilde{A}=\{(x_1|0{,}2),(x_2|0),(x_3|0{,}3),(x_4|1),(x_5|0{,}5)\}$ – нечітка підмножина універсальної множини: $E=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

Запис показує, що нечітка підмножина $\widetilde{A}$ містить елементи x_1, x_3 незначною мірою, не містить елемент x_2 , повною мірою включає елемент x_4, а x_5 належить їй значною мірою.

Таким чином, у нас є можливість створити математичну структуру, деякий об’єкт, що дозволяє оперувати відносно неповно визначеними елементами, належність яких цій підмножині тільки деякою мірою ієрархічно впорядкована.

Наведемо приклади подібних структур:

– множина *дуже високих* людей у деякій множині людей;

– підмножина *темно-зелених* кольорів у множині всіх кольорів;

– підмножина чисел , які *приблизно дорівнюють* даному дійсному числу;

[2] Читач може ознайомитися з іншими визначеннями й позначеннями нечітких множин, звернувшись до літературних джерел зі списку, поданого в цьому посібнику.

– підмножина цілих чисел, *дуже близьких* до 0;

– якщо a – матеріальне число, а x – *невелике* додатне число, то числа $a+x$ утворюють нечітку підмножину в множині матеріальних чисел.

Нагадаємо, що потрібно розрізняти ймовірність і нечіткість. Коли мова йде про ймовірність, то мають на увазі належність або неналежність елемента до чіткої, цілком визначеної множини під впливом випадкових умов. Наприклад, з імовірністю p певний студент складе сесію на «відмінно», тобто буде належати до множини відмінників. Ця множина (відмінників) цілком визначена, чітка. Нечіткість же припускає, що саму множину не визначено повною мірою, тобто немає можливості встановити точно її межі. Наприклад, «множина людей, які гарно співають». Невизначеним тут виступає саме поняття «гарного співу». У наведених вище прикладах нечітких множин курсивом виділено елементи, що зумовлюють їхню нечіткість. Насправді, одна та й сама людина може вважатися «дуже високою» і в той же час ні, оскільки немає можливості чітко визначити межу цієї множини, а формулювання «приблизно дорівнює» в кожній ситуації може розумітися по-різному.

Людина легко використовує поняття, які не можна чітко описати, і апарат нечітких множин призначено саме для того, щоб надати математичної форми якісним поняттям, формалізувати операції з ними.

Як випливає з визначення 1.1, нечітка підмножина цілком описується своєю функцією належності, тому нижче ми будемо інколи використовувати функцію належності для позначення нечіткої множини.

Звичайні множини утворюють підклас класу нечітких множин. Це ті множини, функції належності яких набувають значень тільки 0 або 1.

Приклад 1.5. Розглянемо звичайну підмножину чисел: $B=\{x \mid 0 \le x \le 2\}$, та нечітку підмножину чисел: $\widetilde{C}=\{x \mid \text{"}x \text{ близьке до } 1\text{"}\}$.

Графіки функцій належності цих множин зображено на рис. 1.1. Зауважимо, що вигляд функції належності μ_C нечіткої підмножини $\widetilde{C}$ залежить від сенсу, якого в даній конкретній ситуації, набуває поняття «близький».

Нечітка підмножина називається *порожньою*, якщо її функція належності дорівнює нулю на всій множині E, тобто

$$\mu_{\varnothing}(x)=0, \quad \forall x \in E. \tag{1.1}$$

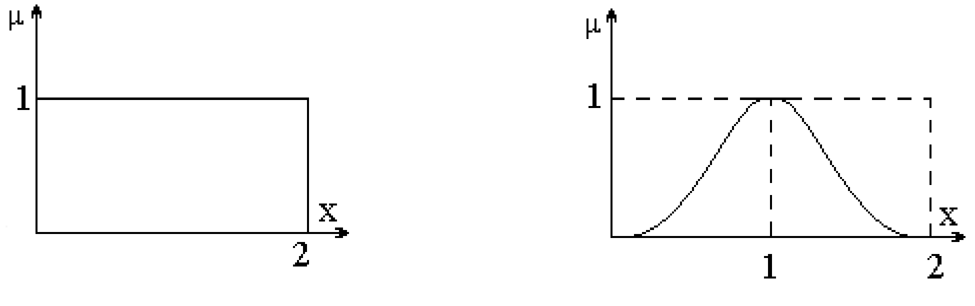


Рис. 1.1. Графіки функцій належності: *а* – звичайної множини *B*; *б* – нечіткої підмножини $\widetilde{C}$

Універсальну множину E можна описати функцією належності такого вигляду:

$$\mu_E(x) = 1, \quad \forall x \in E. \tag{1.2}$$

В и з н а ч е н н я 1.2. *Носієм* нечіткої підмножини A (позначається як $\operatorname{supp} A$) з функцією належності $\mu_A(x)$ називається множина (у звичайному сенсі), що має такий вигляд:

$$\operatorname{supp} A = \{x | x \in E, \ \mu_A(x) \geq 0\}. \tag{1.3}$$

П р и к л а д 1.6. Нехай універсальна множина $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, її підмножина $A = \{(x_1|0{,}1), (x_2|0{,}3), (x_3|0{,}5), (x_4|0), (x_5|1)\}$.

Тоді $\operatorname{supp} A = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$.

В и з н а ч е н н я 1.3. Нечітка підмножина A називається *нормальною*, якщо виконується така рівність: $\sup\limits_{x \in E} \mu_A(x) = 1$. В іншому випадку нечітка підмножина називається *субнормальною*.

Наприклад, нечітка підмножина $\widetilde{C}$ з прикладу 1.2 – нормальна. Субнормальним часто буває перетин нечітких підмножин. Субнормальну нечітку множину A можна перетворити в нормальну (нормалізувати). Для цього потрібно поділити функцію належності цієї множини на величину $\sup\limits_{x \in A} \mu(x)$. Однак слід пам'ятати, що застосовуючи таке перетворення в будь-якій задачі, необхідно чітко уявляти собі його «фізичний сенс».

В и з н а ч е н н я 1.4. Нехай $\widetilde{A}$ та $\widetilde{B}$ нечіткі підмножини в множині E, а $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$ їхні функції належності відповідно. Будемо говорити, що $\widetilde{A}$ містить у собі $\widetilde{B}$ (тобто $\widetilde{B} \subset \widetilde{A}$), якщо для будь-якого елемента $x \in E$ буде справедливою така нерівність:

$$\mu_B(x) \leq \mu_A(x). \tag{1.4}$$

Зауважимо, що коли $\widetilde{B} \subset \widetilde{A}$, то $\operatorname{supp} B \subset \operatorname{supp} A$.

В и з н а ч е н н я 1.5. Множини A та B збігаються (еквівалентні), якщо

$$\mu_B(x) = \mu_A(x), \quad \forall x \in E.$$

П р и к л а д 1.7. Нехай задано універсальну множину: $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Розглянемо дві її підмножини:

$$A = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0{,}5)\},$$

$$B = \{(x_1|0), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}5), (x_5|0{,}2)\}.$$

Оскільки $\max\limits_{x \in A} \mu_A(x) = 1$, нечітка підмножина A – нормальна; для множини B $\max\limits_{x \in B} \mu_B(x) = 0{,}5 < 1$, тому множина B – субнормальна. Крім того $B \subset A$, оскільки $\mu_B(x_i) \le \mu_A(x_i)$, $\forall x_i \in E$.

П р и к л а д 1.8. Розглянемо нечіткі підмножини:
A = {x| "величина x близька до 1"}, B = {x| "величина x дуже близька до 1"}.

Ясно, що $B \subset A$, тоді функції належності цих підмножин повинні задовольняти таку нерівність: $\mu_B(x) \le \mu_A(x)$, $\forall x \in E$. Графічно ці функції можуть виглядати так, як це зображено на рис. 1.2.

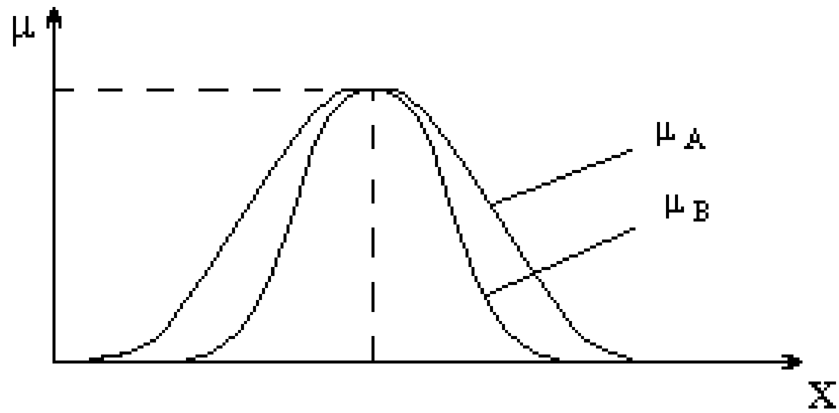


Рис. 1.2. Графіки функцій належності множин A та B, де $B \subset A$

1.3. Операції над нечіткими множинами

Оскільки нечіткі множини являють собою розширення класу звичайних множин, то операції, які визначено над звичайними множинами, також можна виконувати в класі нечітких множин, але для них існують і спеціальні, тільки їм властиві операції. Розглянемо спочатку звичайні операції над нечіткими множинами і їх властивості.

Стосовно нечітких множин звичайні операції, наприклад об'єднання і перетин, можна визначити багатьма способами. Нижче ми наведемо кілька з них. Вибір конкретного способу визначення операції залежить від сенсу, якого вона набуває в рамках поданої задачі. Але, оскільки звичайні множини являють собою підклас нечітких множин, то природною вимогою при визначенні цих операцій є те, що вони повинні правильно виконуватись стосовно чітких множин.

В и з н а ч е н н я 1.6. Об'єднанням нечітких підмножин A та B називається нечітка підмножина $A \cup B$, функція належності якої має такий вигляд:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad x \in E. \tag{1.5}$$

Якщо $\{A_y\}$ являє собою скінченну або нескінченну сім'ю нечітких підмножин з функціями належності $\mu_{A_y}(x,y)$, де $y \in Y$ – параметр сім'ї, то об′єднання: $C = \bigcup_y A_y$, множин цієї сім'ї являє собою нечітку множину з такою функцією належності:

$$\mu_C(x) = \sup_{y \in Y} \mu_{A_y}(x,y), \; x \in X. \tag{1.6}$$

Графічну інтерпретацію цього визначення подано на рис. 1.3. Тут нечіткі підмножини $\widetilde{A}$ та $\widetilde{B}$ показано графіками їх функцій належності, товста лінія відображає функцію належності об′єднання цих множин за визначенням 1.6.

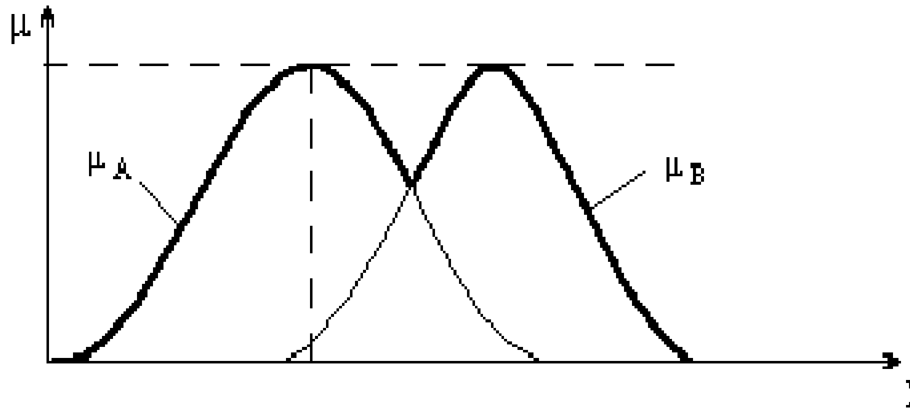


Рис. 1.3. Графік функції належності об'єднання нечітких множин A та B, коли $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(\mathrm{x})\}, \quad x \in E$

П р и к л а д 1.9. Нехай на універсальній множині: $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, подано нечіткі множини: $A = \{(x_1|1), (x_2|0{,}2), (x_3|0), (x_4|0{,}5), (x_5|0{,}8)\}$ та $B = \{(x_1|0), (x_2|0{,}5), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}2), (x_5|0)\}$. Знайти їх об'єднання.

Розв'язування

Згідно з визначенням 1.6

$A \bigcup B = \{(x_1|1), (x_2|0{,}5), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}5), (x_5|0{,}8)\}$.

В и з н а ч е н н я 1.6, *а*. Об′єднання нечітких підмножин A та B можна визначати також, використовуючи обмежену суму їх функцій належності, а саме:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu_A(x) + \mu_B(x) \ge 1, \\ \mu_A(x) + \mu_B(x) & \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{1.7}$$

Цю формулу інакше можна записати таким чином:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \min\{\ 1\ ,\ \mu_A(x) + \mu_B(x)\ \}. \tag{1.8}$$

Графічну інтерпретацію об′єднання, за визначенням 1.6, *а*, нечітких підмножин *А* та *В* з функціями належності μ_A й μ_B відповідно показано на рис. 1.4.

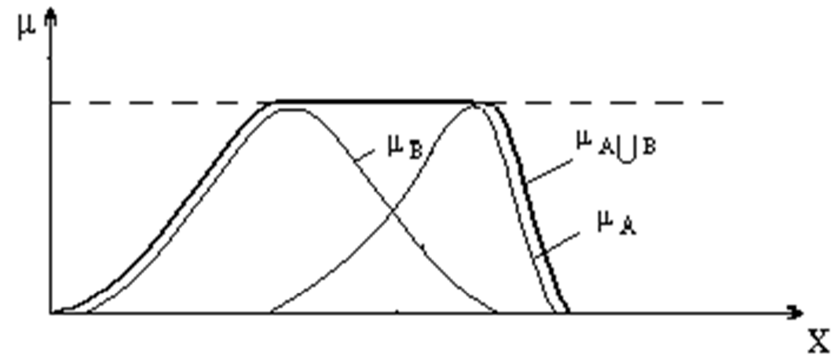


Рис. 1.4. Графік функції належності об'єднання нечітких множин *А* та *В* за визначенням 1.6, *а*

П р и к л а д 1.10. Узявши підмножини з прикладу 1.9, знайдемо їх об′єднання за визначенням 1.6, *а*. Отже,

$$A \cup B = \{(x_1|1), (x_2|0{,}7), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}7), (x_5|0{,}8)\}.$$

В и з н а ч е н н я 1.6, *б*. Об′єднання нечітких множин можна знайти також через їх алгебраїчну суму, тобто об′єднання нечітких множин *А* та *В* являє собою нечітку множину з такою функцією належності:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\cdot\mu_B(x). \tag{1.9}$$

Графічне зображення функції належності об′єднання нечітких підмножин *А* та *В* за визначенням 1.6, *б*, якщо їх функціями належності є $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$ відповідно, подано на рис. 1.5.

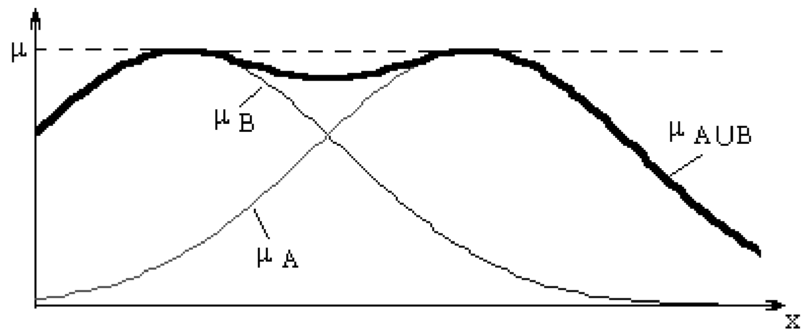


Рис. 1.5. Графік функції належності об’єднання нечітких множин *A* та *B* за визначенням 1.6, *б*

П р и к л а д 1.11. Знайдемо об′єднання підмножин *A* та *B* з прикладу 1.9 за визначенням 1.6, *б*. Отже,

$$A \cup B = \{(x_1|1), (x_2|0{,}6), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}6), (x_5|0{,}8)\}.$$

В и з н а ч е н н я 1.7. Перетином нечітких підмножин *A* та *B* універсальної множини *E* називається нечітка підмножина з функцією належності такого вигляду:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad x \in E. \tag{1.10}$$

Її графік подано на рис. 1.6.

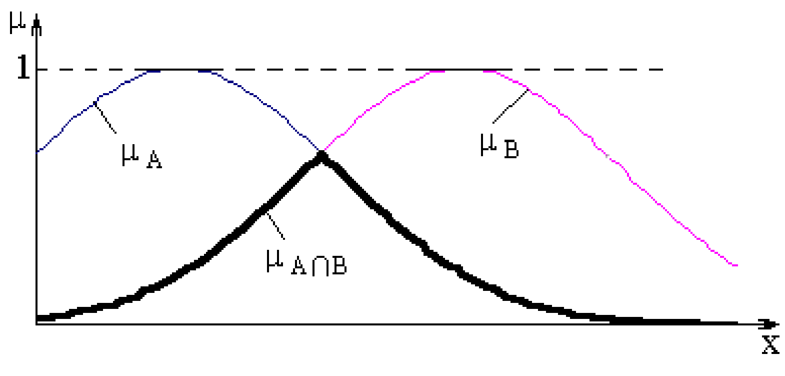


Рис. 1.6. Графік функції належності перетину нечітких множин *A* та *B* за визначенням 1.7

П р и к л а д 1.12. Визначимо перетин $A \cap B$ нечітких підмножин *A* та *B* універсальної множини *E*, використовуючи визначення 1.7, якщо

$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,

$A=\{(x_1|1),(x_2|0{,}4),(x_3|0),(x_4|0{,}7),(x_5|0{,}8)\}$,

$B=\{(x_1|0),(x_2|1),(x_3|0{,}2),(x_4|0{,}4),(x_5|0)\}$.

Отже, $A\bigcap B=\{(x_1|0),(x_2|0{,}4),(x_3|0),(x_4|0{,}4),(x_5|0)\}$.

Якщо $\{A_y\}$ – скінченна або нескінченна сім'я нечітких підмножин, характерна функціями належності $\mu_{A_y}(x,y)$, де $y\in Y$ – параметр сім'ї, то перетин: $C=\bigcap\limits_{y} A_y$, її множин являє собою нечітку множину, функція належності якої

$$\mu_C(x)=\inf_{y\in Y}\mu_{A_y}(x,y),\quad x\in E. \tag{1.11}$$

Перетин нечітких підмножин можна визначити також іншим способом.

В и з н а ч е н н я 1.7, *а*. Перетин нечітких підмножин *A* та *B* – це обмежений добуток їхніх функцій належності, тобто

$$\mu_{A\bigcap B}(x)=\max\{0\,,\mu_{\text{A}}(x)+\mu_B(x)-1\}. \tag{1.12}$$

Графічну інтерпретацію такого перетину бачимо на рис. 1.7. Тут криві $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$ відображають функції належності нечітких підмножин *A* та *B* відповідно. Товстою лінією показано функцію належності перетину *A* та *B*.

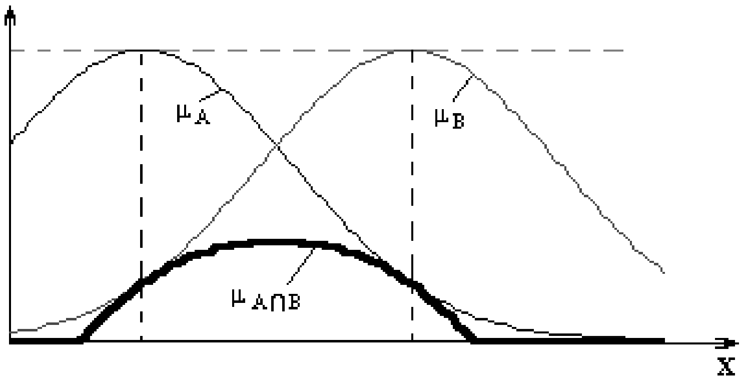


Рис. 1.7. Графік функції належності перетину нечітких множин за визначенням 1.7, *а*

Ще одне визначення перетину можна сформулювати, використовуючи алгебраїчний добуток їхніх функцій належності.

В и з н а ч е н н я 1.7, *б*. Перетином нечітких множин *A* та *B* назвемо нечітку множину, функція належності якої дорівнює алгебраїчному добутку функцій належності даних множин, тобто

$$\mu_{A\bigcap B}(x)=\mu_{\text{A}}(x)\mu_B(x). \tag{1.13}$$

Графіки функцій належності $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$ нечітких множин *A* і *B*, та їх перетину за визначенням 1.7, *б* зображено на рис. 1.8. Товста лінія графіка відповідає функції належності перетину.

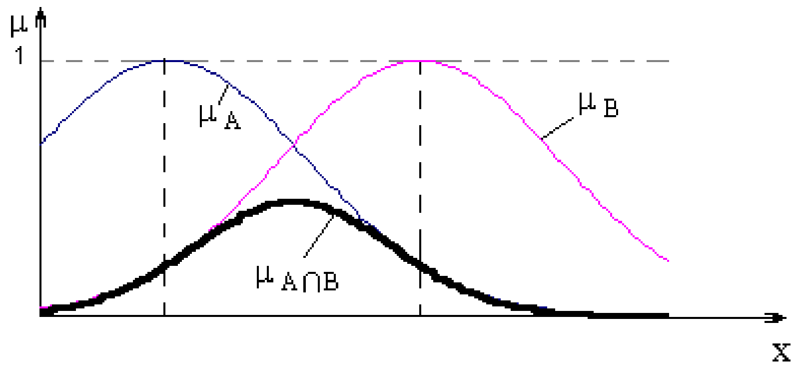


Рис. 1.8. Графік функції належності перетину нечітких множин *A* та *B* за визначенням 1.7, *б*

П р и к л а д 1.13. Знайдемо перетин нечітких підмножин *A* та *B*, якщо $A \subset E$, $B \subset E$, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, а саме:

$$A = \{(x_1|1), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}7), (x_5|0{,}8)\},$$

$$B = \{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}4), (x_5|0)\}.$$

Тоді за визначеннями 1.7, *а*

$$A \cap B = \{(x_1|0), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}1), (x_5|0)\},$$

а за визначеннями 1.7, *б*

$$A \cap B = \{(x_1|0), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}28), (x_5|0)\}.$$

В и з н а ч е н н я 1.8. *Доповненням* нечіткої множини *A* універсальної множини *E* називається нечітка множина $\overline{A}$, характерна такою функцією:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), x \in E. \quad (1.14)$$

Зауважимо, що властивість: $A \cap \overline{A} = \varnothing$, яка за всіх умов виконується для звичайних множин, не завжди справедлива стосовно нечітких множин. Наприклад, якщо доповнення нечіткої множини визначити, як описано вище, а перетин обчислити за правилом 1.7 або 1.7, *б*, то $A \cap \overline{A} \neq \varnothing$, але при обчисленні перетину за правилом 1.7, *а* властивість: $A \cap \overline{A} = \varnothing$, буде мати місце. Який саме варіант перетину та об’єднання використовувати, обирає дослідник залежно від того, які властивості операцій істотні для розв’язуваної задачі.

П р и к л а д 1.18. Розглянемо таку нечітку підмножину: A = {множина чисел, що значно більші за 0}, її функцію належності показано на рис. 1.9 суцільною кривою. Доповненням множини A буде нечітка множина чисел, які не набагато перевищують нуль. Цій множині відповідає функція належності, графік якої зображено на рис. 1.9 пунктирною лінією.

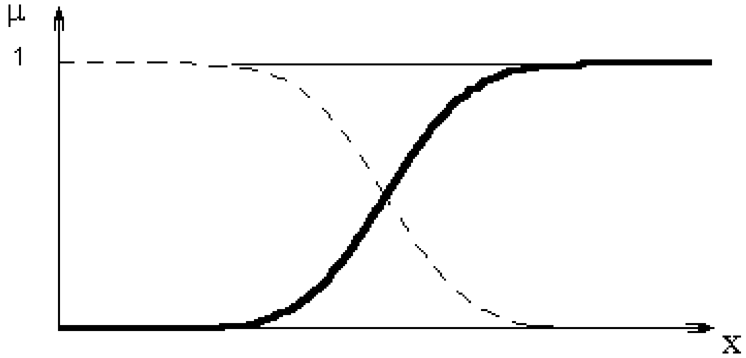


Рис. 1.9. Графіки функцій належності нечіткої множини A та її доповнення (до прикладу 1.18)

Непорожній перетин множин A та $\overline{A}$ в цьому прикладі являє собою нечітку множину чисел, які «значно більші від нуля і не набагато перевищують нуль» одночасно. Непорожність цієї нечіткої множини відображає той факт, що саме поняття «бути значно більшим» описано нечітко, тому деякі числа можуть певною мірою належати одночасно до обох множин. У деякому сенсі цей перетин ми можемо вважати «нечіткою межею» між множинами A та $\overline{A}$.

В и з н а ч е н н я 1.9. *Різницею* підмножин A та B універсальної множини E назвемо нечітку множину $A\backslash B$, характерну такою функцією належності:

$$\mu_{A\backslash B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) - \mu_B(x), & \text{коли} \quad \mu_A(x) \geq \mu_B(x), \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \tag{1.15}$$

тобто

$$\mu_{A\backslash B}(x) = \max\{\mu_A(x) - \mu_B(x), 0\}. \tag{1.16}$$

Знайдемо різницю нечітких підмножин A та B, якщо $A \subset E$, $B \subset E$, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,

$$A = \{(x_1|1), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}7), (x_5|0{,}8)\},$$

$$B = \{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}4), (x_5|0)\}.$$

Тоді за визначеннями 1.9, *а*

$A \cap B = \{(x_1|1), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|0{,}3), (x_5|0{,}8)\}$.

1.4. Відстань між нечіткими підмножинами

Відстань Хеммінга. Спочатку згадаємо поняття відстані Хеммінга в застосуванні до звичайних підмножин.

Нехай A і B – дві звичайні підмножини скінченної множини: $E = \{x_1, \ldots, x_7\}$, причому

$$B = \{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|0), (x_4|0), (x_5|0), (x_6|1), (x_7|1)\},$$

$$A = \{(x_1|1), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0), (x_6|1), (x_7|0)\}.$$

Під *відстанню Хеммінга* між A та B розуміють таку величину:

$$d(A,B) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|. \qquad (1.17)$$

У нашому прикладі

$$d(A,B) = |1-0| + |0-1| + |0-0| + |1-0| + |0-0| + |1-1| + |0-1| = 4.$$

Відстань Хеммінга задовольняє всі аксіоми метрики, а саме:

1. $d(X,Y) \geq 0$;
2. $d(X,Y) = d(Y,X)$;
3. $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$;
4. $d(X,X) = 0$.

З а в д а н н я. Перевірити виконання цих аксіом по відношенню до відстані Хеммінга.

Для скіченої множини E, потужність якої $m(E) = n$ (тобто n – число елементів множини E), визначимо також відносну відстань Хеммінга таким чином:

$$\delta(A,B) = \left(\frac{1}{n}\right) d(A,B). \qquad (1.18)$$

Для поданих вище підмножин A та B $\delta(A,B) = \frac{1}{7} \cdot d(A,B) = \frac{4}{7}$.

Очевидно, що завжди $0 \leq \delta(A, B) \leq 1$.

Узагальнення поняття відстані Хеммінга. Розглянемо тепер три нечіткі підмножини A, B, $C \subset E$, тут E – скінченна множина потужності n, а саме:

$$A = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \dots x_n}{a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid \dots a_n}, \tag{1.19}$$

$$B = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \dots x_n}{b_1 \mid b_2 \mid b_3 \mid \dots b_n}, \tag{1.20}$$

$$C = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \dots x_n}{c_1 \mid c_2 \mid c_3 \mid \dots c_n}. \tag{1.21}$$

Припустимо, що ми визначили відстань $D(a_i, b_i)$ між a_i та b_i, $i = \overline{1,n}$, а також між (b_i, c_i) та (a_i, c_i), $i = \overline{1,n}$. Ці відстані будуть відповідати таким нерівностям:

$$D(a_i, c_i) \le D(a_i, b_i) + D(b_i, c_i), \ \forall\, i = 1, 2, \dots, n \,. \tag{1.22}$$

Крім того, ми можемо записати, що

$$\sum_{i=1}^{n} D(a_i, c_i) \le \sum_{i=1}^{n} D(a_i, b_i) + \sum_{i=1}^{n} D(b_i, c_i)\,, \tag{1.23}$$

а

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D^2(a_i, c_i)} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D^2(a_i, b_i)} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D^2(b_i, c_i)}\,. \tag{1.24}$$

Ці дві формули дають дві оцінки відстані між підмножинами, зокрема вираз (1.23) дає лінійну оцінку, а (1.24) – квадратичну.

Розглянемо випадок, коли функції належності нечітких підмножин набувають своїх значень в інтервалі [0; 1], тобто, коли у виразах (1.19) – (1.21) величини a_i, b_i, $c_i \in [0,1]$, $i = 1, 2, \dots n$.

Припустимо, що $D(a_i, b_i) = |a_i - b_i|$, $D(b_i, c_i) = |b_i - c_i|$, $D(a_i, c_i) = |a_i - c_i|$. Визначимо два типи відстаней.

В и з н а ч е н н я 1.10. Узагальнена відстань Хеммінга, або *лінійна відстань* обчислюється за такою формулою:

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|\,. \tag{1.25}$$

Очевидно, що

$$0 \le d(A, B) \le n. \tag{1.26}$$

В и з н а ч е н н я 1.11. *Евклідову* або *квадратичну* відстань розраховують у такий спосіб:

$$e(A,B)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2}\,. \qquad (1.27)$$

Ця відстань задовольняє таку умову:

$$0\le e(A,B)\le\sqrt{n}\,. \qquad (1.28)$$

Визначимо також відносні відстані.

Узагальнена відносна відстань Хеммінга

$$\delta(A,B)=\frac{d(A,B)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\right|, \qquad (1.29)$$

для неї буде справедливою така нерівність: $0\le\delta(A,B)\le 1$.

Відносна евклідова відстань

$$\varepsilon(A,B)=\frac{e(A,B)}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2}\,, \qquad (1.30)$$

$$0\le\varepsilon(A,B)\le 1.$$

Вибір тієї чи іншої відстані залежить від природи проблеми, про яку йдеться. Кожна з цих відстаней має свої переваги й недоліки, які стають зрозумілими при їхньому застосуванні. Очевидно, що можна задати й інші відстані.

П р и к л а д 1.19. Визначити відстань між такими нечіткими множинами:

$$A=\frac{x_1}{0{,}7}\left|\frac{x_2}{0{,}2}\right|\frac{x_3}{0}\left|\frac{x_4}{0{,}6}\right|\frac{x_5}{0{,}5}\left|\frac{x_6}{1}\right|\frac{x_7}{0},\quad B=\frac{x_1}{0{,}2}\left|\frac{x_2}{0}\right|\frac{x_3}{0}\left|\frac{x_4}{0{,}6}\right|\frac{x_5}{0{,}8}\left|\frac{x_6}{0{,}4}\right|\frac{x_7}{1}.$$

Розв’язування

$d(A, B)$ = |0,7 – 0,2| + |0,2 – 0| + |0 – 0| + |0,6 – 0,6| + |0,5 – 0,8| + |1 – 0,4| +

+ |0 – 1| = 0,5 + 0,2 + 0,3 + 0,6 + 1 = 2,6.

$$\delta(A,B)=\frac{1}{7}d(A,B)=\frac{2{,}6}{7}=0{,}37.$$

$$e(A,B)=\sqrt{(0{,}7-0{,}2)^2+(0{,}2-0)^2+(0-0)^2+(0{,}6-0{,}6)^2+(0{,}5-0{,}8)^2+(1-0{,}4)^2+(0-1)^2}=$$

$$=\sqrt{(0{,}5)^2+0{,}2^2+0{,}3^2+0{,}6^2+1}=\sqrt{0{,}25+0{,}04+0{,}09+0{,}36+1}=\sqrt{1{,}74}=1{,}32\,,$$

$e(A,B)$=1,32,

$$\varepsilon(A,B)=\frac{1}{7}\cdot 1{,}32=0{,}49\,.$$

Відстані $d(A, B)$, $e(A, B)$ можуть бути визначені й тоді, коли універсальна множина нескінченна (лічильна або ні), якщо відповідні суми й інтеграли збігаються. Якщо множина E – лічильна, то

$$d(A,B)=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\right|, \tag{1.31}$$

$$e(A,B)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2}\,, \tag{1.32}$$

коли ці ряди збігаються.

Якщо $E = R$, то

$$d(A,B)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mu_A(x)-\mu_B(x)\right|dx \tag{1.33}$$

і

$$e(A,B)=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu_A(x)-\mu_B(x))^2\,dx}\,, \tag{1.34}$$

коли інтеграли збігаються.

Якщо ж множина $E\subset R$ обмежена зверху й знизу, то відповідні інтеграли завжди збігаються, а відстані $d(A, B)$ та $e(A, B)$ будуть скінченними. Тоді можна також визначити відносні відстані, а саме:

$$\delta(A,B)=\frac{d(A,B)}{\beta-\alpha}, \tag{1.35}$$

$$\varepsilon(A,B)=\frac{e(A,B)}{\beta-\alpha}, \tag{1.36}$$

тут $d(A,B)=\int_{\alpha}^{\beta}\left|\mu_A(x)-\mu_B(x)\right|dx$ і $e(A,B)=\sqrt{\int_{\alpha}^{\beta}(\mu_A(x)-\mu_B(x))^2\,dx}$.

Розглянемо на прикладі геометричну інтерпретацію поняття відстані між нечіткими множинами. Нехай множини $\widetilde{A}$ та $\widetilde{B}$ являють собою підмножини універсальної множини: $E \subset R^1$, $E = [\alpha, \beta]$, а графіки їхніх функцій належності $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$ зображено на рис. 1.10. Тоді лінійна відстань між цими множинами відповідає площі заштрихованої фігури, яка обмежена кривими функцій $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$.

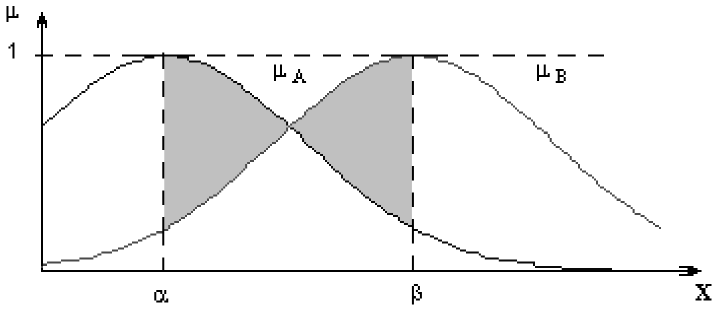


Рис. 1.10. Геометрична інтерпретація лінійної відстані між нечіткими множинами

1.5. Звичайна підмножина, найближча до нечіткої. Індекс нечіткості

Виникає питання, яка звичайна підмножина (або підмножини) перебуває на найменшій евклідовій відстані від даної нечіткої множини *A*. Легко бачити, що це буде звичайна підмножина (вона позначається $\underline{A}$), для якої

$$\mu_{\underline{A}}(x_i) = \begin{cases} 0\ , \text{ коли } \mu_A(x_i) < 0{,}5\ , \\ 1\ , \text{ коли } \mu_A(x_i) > 0{,}5\ , \\ 0 \text{ або } 1\ , \text{ коли } \mu_A(x_i) = 0{,}5\ . \end{cases} \tag{1.39}$$

Для точності припустимо, що $\mu_{\underline{A}}(x_i) = 0$, коли $\mu_A(x_i) = 0{,}5$. Отже, можна сформулювати визначення.

В и з н а ч е н н я 1.12. *Найближчою* до нечіткої множини *A* звичайною множиною називається множина $\underline{A}$, характерна такою функцією належності:

$$\mu_{\underline{A}}(x_i) = \begin{cases} 0\,, \text{коли } \mu_A(x_i) \le 0{,}5\,, \\ 1\,, \text{ коли } \mu_A(x_i) > 0{,}5. \end{cases} \tag{1.40}$$

П р и к л а д 1.20. Нехай $E = \{\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\ \}$, $A \subset E$ та

$$A = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}8), (x_3|0{,}5), (x_4|0{,}3), (x_5|1), (x_6|0), (x_7|0{,}9), (x_8|0{,}4)\}.$$

найближчою до множини *A* звичайною множиною буде така:

$$\underline{A} = \{(x_1|0),(x_2|1),(x_3|0),(x_4|0),(x_5|1),(x_6|0),(x_7|1),(x_8|0)\}.$$

Використовуючи введені раніше поняття відстаней для нечітких підмножин, визначимо два *індекси нечіткості*.

Лінійний індекс нечіткості визначається через узагальнену відносну відстань Хеммінга таким чином:

$$\nu(A) = \frac{2}{n} d(A, \underline{A}). \tag{1.41}$$

Квадратичний індекс нечіткості визначається через відносну евклідову відстань, а саме:

$$\eta(A) = \frac{2}{\sqrt{n}} e(A, \underline{A}). \tag{1.42}$$

Множник 2 в чисельнику введено для того, щоб забезпечити утримання індексу нечіткості в таких межах:

$$0 \le \nu(A, \underline{A}) \le 1, \tag{1.43}$$

$$0 \le \eta(A, \underline{A}) \le 1. \tag{1.44}$$

Коли $E = [a,b] \subset R$, то лінійний індекс нечіткості обчислюють за такою формулою:

$$\nu(A,B) = \frac{2}{b-a} \int_a^b |\mu_A(x) - \mu_{\underline{A}}(x)| dx. \tag{1.45}$$

Геометричну інтерпретацію найближчої звичайної множини та індексу нечіткості бачимо на рис. 1.11. Тут товста лінія показує функцію належності найближчої звичайної множини $\underline{A}$ до нечіткої множини A, описуваної функцією належності μ_A. Лінійний індекс нечіткості відповідає нормалізованій площі заштрихованої фігури.

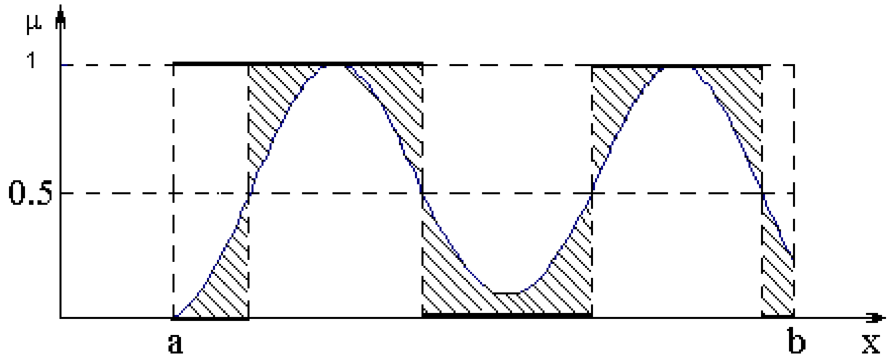


Рис. 1.11. Геометрична інтерпретація індексу нечіткості

Індекси нечіткості можна також визначити іншим способом, а саме:

$$\nu(A) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\min(\mu_A(x_i), \mu_{\overline{A}}(x_i)), \qquad (1.46)$$

$$\eta(A) = \frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\min\left\{\mu_A^2(x_i), \mu_{\overline{A}}^2(x_i)\right\}}. \qquad (1.47)$$

Дійсно, для будь-якого елемента $x_i \in E$

$$\left|\, \mu_A(x_i) - \mu_{\underline{A}}(x_i) \,\right| = \mu_{A \cap \overline{A}}(x_i). \qquad (1.48)$$

Тоді формулу (1.41) для обчислення лінійного індексу нечіткості можна переписати в зручному вигляді, тобто

$$\nu(A) = \frac{2}{n}\sum_{\mathrm{i}=1}^{n}\mu_{A \cap \overline{A}}(x_i). \qquad (1.49)$$

З цього виразу 1.49 стає очевидним, що $\nu(A) = \nu(\overline{A})$.

П р и к л а д 1.21. Нехай $E = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \}$, $A \subset E$,

$$A = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}8), (x_3|0{,}5), (x_4|0{,}3), (x_5|1), (x_6|0), (x_7|0{,}9), (x_8|0{,}4)\},$$

$$\overline{A} = \{(x_1|0{,}8), (x_2|0{,}2), (x_3|0{,}5), (x_4|0{,}7), (x_5|0), (x_6|1), (x_7|0{,}1), (x_8|0{,}6)\},$$

Обчислимо індекс нечіткості множини *A*. Для цього спочатку визначимо перетин поданих вище множин:

$$A \cap \overline{A} = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}2), (x_3|0{,}5), (x_4|0{,}3), (x_5|0), (x_6|0), (x_7|0{,}1), (x_8|0{,}4)\}.$$

Тепер обчислимо лінійний індекс нечіткості, тобто

$$v(A) = \frac{2}{8}(0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}3 + 0 + 0 + 0{,}1 + 0{,}4) = 0{,}425.$$

Нехай *A* та *B* – дві нечіткі підмножини універсальної множини *E*. З'ясуємо, як співвідносяться індекси нечіткості перетину $A \cap B$ та об′єднання $A \cup B$ цих нечітких підмножин із індексами нечіткості вихідних підмножин?

Розглянемо приклади.

П р и к л а д 1.22. Нехай $E = \{x_1, x_2, x_3\}$, $A = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}6), (x_3|0{,}1)\}$, $B = \{(x_1|0{,}6), (x_2|0{,}3), (x_3|0{,}8)\}$. Обчислимо індекси нечіткості вихідних множин та їх перетину, а саме:

$$\overline{A} = \{(x_1|0{,}8),(x_2|0{,}4),(x_3|0{,}9)\}, \quad \nu(A) = \frac{2}{3}(0{,}2+0{,}4+0{,}1) \approx 0{,}46.$$

$$\overline{B} = \{(x_1|0{,}4),(x_2|0{,}7),(x_3|0{,}2)\}, \quad \nu(B) = \frac{2}{3}(0{,}4+0{,}3+0{,}2) \approx 0{,}6\,.$$

$$A \cap B = \{(x_1|0{,}2),(x_2|0{,}3),(x_3|0{,}1)\}, \ \overline{A \cap B} = \{(x_1|0{,}8),(x_2|0{,}7),(x_3|0{,}9)\},$$

$$\nu(A \cap B) = \frac{2}{3}(0{,}2+0{,}3+0{,}1) \approx 0{,}4\,.$$

Очевидно, що в цьому випадку індекс нечіткості перетину менший за індекси нечіткості вихідних підмножин.

П р и к л а д 1.23. Нехай $E = \{x_1, x_2, x_3\}$, $A' = \{(x_1|0{,}8),(x_2|0{,}6),(x_3|0{,}8)\}$, $B' = \{(x_1|0{,}4),(x_2|0{,}7),(x_3|0{,}2)\}$. Обчислимо індекси нечіткості цих множин та їх перетину, тобто

$$\overline{A'} = \{(x_1|0{,}2),(x_2|0{,}4),(x_3|0{,}2)\}, \qquad \nu(A') = \frac{2}{3}(0{,}2+0{,}4+0{,}2) \approx 0{,}53\,,$$

$$\overline{B'} = \{(x_1|0{,}6),(x_2|0{,}3),(x_3|0{,}8)\}, \qquad \nu(B') = \frac{2}{3}(0{,}4+0{,}3+0{,}2) = 0{,}60\,,$$

$$A' \cap B' = \{(x_1|0{,}4),(x_2|0{,}6),(x_3|0{,}2)\}, \quad \overline{A' \cap B'} = \{(x_1|0{,}6),(x_2|0{,}4),(x_3|0{,}8)\}\,,$$

$$\nu(A' \cap B') = \frac{2}{3}(0{,}4+0{,}4+0{,}2) \approx 0{,}66\,.$$

У цьому прикладі індекс нечіткості перетину більший за індекси нечіткості вихідних підмножин.

Таким чином, ми бачимо, що індекс нечіткості перетину підмножин *A* та *B* може бути як меншим, так і більшим від індексів нечіткості вихідних підмножин. Те саме можна сказати і про об′єднання нечітких підмножин. Сформульоване твердження буде справедливим також і для квадратичного індексу нечіткості.

1.6. Звичайна підмножина α-рівня нечіткої множини

В и з н а ч е н н я 1.13. Нехай $\alpha \in [0;1]$. Підмножиною α-рівня нечіткої підмножини *A* (позначається A_α) будемо називати звичайну множину, яка включає тільки ті елементи множини *A*, функція належності яких не менша за α, тобто

$$A_\alpha = \{x \,|\, \mu_{\mathrm{A}}(x) \ge \alpha\}\,. \tag{1.50}$$

П р и к л а д 1.24. Нехай нечітку множину *A* задано в такому вигляді:

$$A = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 \mid x_6 \mid x_7}{0{,}8 \mid 0{,}1 \mid 1 \mid 0{,}3 \mid 0{,}6 \mid 0{,}2 \mid 0{,}5}.$$

Визначимо множини рівня 0,3 та 0,5 цієї нечіткої підмножини, а саме:

$$A_{0,3} = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 \mid x_6 \mid x_7}{1 \mid 0 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 0 \mid 1}, \qquad A_{0,3} = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_7\},$$

$$A_{0,5} = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 \mid x_6 \mid x_7}{1 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 1}, \qquad A_{0,5} = \{x_1, x_3, x_5, x_7\}.$$

П р и к л а д 1.25. Нехай універсальна множина $X = \{1, 2, \dots, 6\}$, а функцію належності нечіткої множини $A \subset X$ подано таблицею:

x	0	1	2	3	4	5	6
$\mu_A(x)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1

Тоді для множини A можна виписати такі множини рівня:

$A_{0,1} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A_{0,3} = \{ 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$A_{0,5} = \{ 3, 4, 5, 6\}$, $A_{0,7} = \{ 4, 5, 6\}$,

$A_{0,9} = \{ 5, 6\}$, $A_1 = \{ 6\}$.

П р и к л а д 1.26. Нехай $X = R^+$, графік функції належності μ_A нечіткої множини A зображено на рис. 1.12, *а*. Множини рівня α_1 та α_2 та графіки їхніх функцій належності зображено на рис. 1.12, *б* та 1.12, *в*.

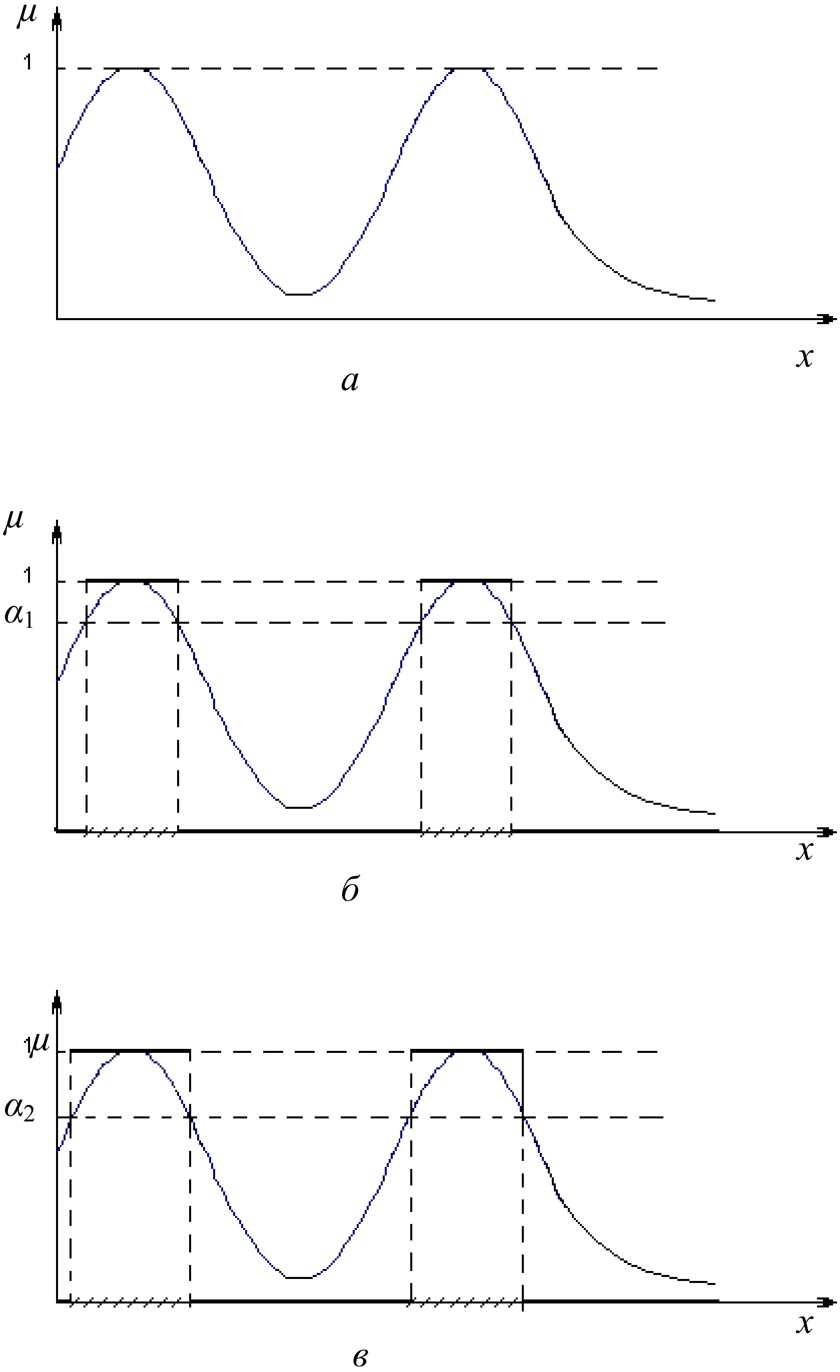


Рис. 1.12. Графічне зображення множин рівня та їх співвідношення

Як видно з цих прикладів, для всяких значень α_1 та α_2, що задовольняють такі умови: $0 < \alpha_1 \leq 1$, $0 < \alpha_2 \leq 1$ і $\alpha_2 < \alpha_1$, відповідні множини рівня A_{α_1} та A_{α_2} будуть пов'язані таким співвідношенням:

$$A_{\alpha_1} \subset A_{\alpha_2}.$$

Множинами рівня зручно користуватися для формулювання та аналізу деяких задач прийняття рішень, ми також будемо їх застосовувати при розв'язуванні задач нечіткого математичного програмування.

Нехай $(A \bigcup B)_\alpha$ та $(A \bigcap B)_\alpha$ являють собою множини α-рівня об′єднання й перетину нечітких множин A та B відповідно. Розглянемо їхній зв'язок із множинами рівня A_α та B_α вихідних множин. Якщо для операцій перетину та об′єднання застосувати визначення 1.7 та 1.6. відповідно, то цей зв'язок буде таким:

$$(A \bigcup B)_\alpha = A_\alpha \bigcup B_\alpha, \qquad (A \bigcap B)_\alpha = A_\alpha \bigcap B_\alpha.$$

При використанні визначень 1.6, *б* та 1.7, *а* буде мати місце тільки включення, тобто

$$(A \bigcup B)_\alpha \supset A_\alpha \bigcup B_\alpha, \qquad (A \bigcap B)_\alpha \subset A_\alpha \bigcap B_\alpha.$$

Для нечітких підмножин буде справедливою сформульована нижче теорема про декомпозицію.

Т е о р е м а 1.1. Будь-яку нечітку підмножину A можна розкласти на множини рівня, тобто подати її в такому вигляді:

$$A = \bigcup_\alpha \alpha A_\alpha, \tag{1.51}$$

причому функція належності множини αA_α: $\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = \alpha \mu_{A_\alpha}(x)$, а об′єднання нечітких множин виконується за всіма значеннями $\alpha \in [0, 1]$, тобто

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1, \mu_A(x) \ge \alpha, \\ 0, \mu_A(x) < \alpha. \end{cases}$$

П р и к л а д 1.27. Для множини A та її множин рівня з прикладу 1.25 ми можемо записати, що

$A = 0{,}1\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \bigcup 0{,}3\{2, 3, 4, 5, 6\} \bigcup 0{,}5\{3, 4, 5, 6\} \bigcup 0{,}7\{4, 5, 6\} \bigcup$
$\bigcup 0{,}8\{5, 6\} \bigcup 1\{6\}$.

Формула розкладання буде правильною й тоді, коли універсальна множина має потужність континуума.

П р и к л а д 1.28. Нехай нечітка множина $A \subset R^+$ задана своєю функцією належності: $\mu_A(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}, x \in R^+$. Розглянувши відрізок $[\alpha; 1]$, де $0 < \alpha \le 1$, можемо записати, що

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1, \mu_A(x) \in [\alpha, 1], \\ 0, \mu_A(x) \overline{\in} [\alpha, 1], \end{cases}$$

таким чином, у цьому прикладі

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1\,, & x \ge \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}, \\ 0\,, & x < \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}\,. \end{cases}$$

Теорему про декомпозицію можна застосувати не тільки для аналізу, але й для синтезу нечітких множин.

Розглянемо послідовність звичайних підмножин $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \ldots \subset A_n$, та задамо значення α_1 для множини A_1, α_2 для множини A_2 і т. д., α_n для A_n, причому $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$, тоді, використовуючи формулу (1.51), одержимо нечітку підмножину A.

П р и к л а д 1.29. Нехай подано звичайну множину: $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}\}$, її підмножини:

$A_1 = \{x_1, x_4, x_5, x_7, x_9\}$,

$A_2 = \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9\}$,

$A_3 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9\}$,

$A_4 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9, x_{10}\}$,

а також числа: $\alpha_1 = 0{,}9$, $\alpha_2 = 0{,}5$, $\alpha_3 = 0{,}4$, $\alpha_4 = 0{,}1$.

Використавши формулу (1.51), отримаємо нечітку множину A.
Побудуємо спочатку множини $\alpha_i A_i$, за такою формулою:

$$\mu_{\alpha_i A_i}(x_j) = \alpha_i \mu_{A_i}(x_j) = \begin{cases} \alpha_i\,, & x_j \in A_i\,, \\ 0\,, & x_j \overline{\in} A_i. \end{cases}$$

Тоді маємо такі підмножини:

$\alpha_1 A_1 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0,9	0	0	0,9	0,9	0	0,9	0	0,9	0

,

$\alpha_2 A_2 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0,5	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0,5	0

,

$\alpha_3 A_3 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0,4	0,4	0	0,4	0,4	0,4	0,4	0	0,4	0

,

$\alpha_4 A_4 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0,1	0,1	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0	0,1	0,1

.

Об’єднавши ці нечіткі множини, визначаємо шукану нечітку множину:

$$A = \bigcup_{\alpha_i} \alpha_i A_i \,,$$

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ \hline 0{,}9 & 0{,}4 & 0 & 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}9 & 0 & 0{,}9 & 0{,}1 \end{array}.$$

1.7. Спеціальні операції над нечіткими множинами

Ми вже розглянули ряд операцій над нечіткими множинами. Вони були подібні до операцій із звичайними множинами, але, виступаючи в ролі нової структури, нечіткі множини мають і нові властивості, а тому стосовно них можуть бути введені нові операції, які не мають сенсу для звичайних множин.

Визначимо спочатку декартів добуток нечітких множин.

В и з н а ч е н н я 1.14. *Декартовим добутком* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ нечітких множин $A_i \subset X_i$, $i = 1, \dots, n$ буде нечітка множина A в декартовому добутку $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, функція належності якої має такий вигляд:

$$\mu_A(x) = \min\{\mu_{A_1}(x_1),..\mu_{An}(x_n)\}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X. \qquad (1.52)$$

П р и к л а д 1.30. Визначимо декартів добуток нечітких множин A та B, якщо $A = \begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \end{array}$, $B = \begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{array}$.

Відповідно до визначення 1.14

$$A \times B = \begin{array}{c|ccccc} \dfrac{x_i \in B}{x_i \in A} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_1 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ x_2 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ x_3 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ x_4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ x_5 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{array}$$

В и з н а ч е н н я 1.15. *Опуклою комбінацією* нечітких підмножин A_1, … , A_n універсальної множини X називається нечітка множина A з функцією належності, що має такий вигляд:

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i(x), \qquad (1.53)$$

тут $\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$

По відношенню до звичайних множин, на відміну від декартового добутку, операція опуклої комбінації не має сенсу.

В и з н а ч е н н я 1.16. Операції концентрування (CON) й розтягування (DIL) задамо таким чином:

$$\text{CON}\, A = A^2, \tag{1.54}$$

$$\text{DIL}\, A = A^{0,5}, \tag{1.55}$$

при цьому

$$\mu_{A^\alpha}(x) = \mu_A^\alpha(x),\ x \in X,\ \alpha > 0. \tag{1.56}$$

П р и к л а д 1.31. Нехай універсальна множина $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $A \subset E$,

$$A = \frac{x_1}{0{,}25}\left|\frac{x_2}{0{,}9}\right|\frac{x_3}{0{,}4}\left|\frac{x_4}{0{,}6}\right|\frac{x_5}{1}\left|\frac{x_6}{0}\right..$$

Визначимо множини: $B = \text{CON}\, A$, $C = \text{DIL}\, A$, а саме:

$$B = \frac{x_1}{0{,}0625}\left|\frac{x_2}{0{,}81}\right|\frac{x_3}{0{,}16}\left|\frac{x_4}{0{,}36}\right|\frac{x_5}{1}\left|\frac{x_6}{0}\right.,$$

$$C = \frac{x_1}{0{,}5}\left|\frac{x_2}{0{,}95}\right|\frac{x_3}{0{,}64}\left|\frac{x_4}{0{,}78}\right|\frac{x_5}{1}\left|\frac{x_6}{0}\right..$$

П р и к л а д 1.32. Нехай нечітку множину $A \subset R^1$ подано своєю функцією належності, тобто $\mu_A(x) = \dfrac{1}{1 + |x - a|}$, тоді $\mu_{A^2}(x) = \dfrac{1}{(1 + |x - a|)^2}$.

Графічно ці множини можна подати таким чином:

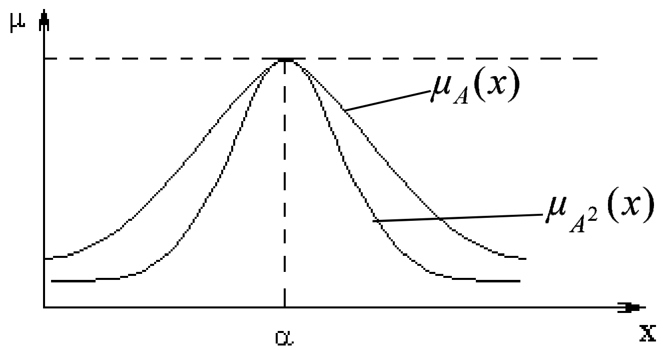


Рис. 1.13. Графіки функцій належності нечітких множин *A* та CON *A*

Застосування до нечіткої множини операції концентрування означає зменшення її “нечіткості”. У реальних задачах це може свідчити про надходження нової інформації, що дозволяє більш точно (чітко) описати подану нечітку множину. Аналогічно операція розтягування може застосовуватися для моделювання ситуацій, пов’язаних із втратою інформації.

Висновки

Нечіткі множини виступають як узагальнення поняття звичайної множини в тих випадках, коли елемент може належати множині тільки певною мірою. Теорія нечітких множин дозволяє більш адекватно описувати ситуації невизначеності, зумовлені неможливістю чітко описати переваги або множину допустимих альтернатив.

Операції над нечіткими множинами можна визначити різними способами залежно від конкретних задач, за умови, що вони будуть правильно виконуватись стосовно чітких множин.

Питання, викладені в цьому розділі, розглянуто в літературі [43, 44, 51, 66].

Контрольні питання

1. Що означає характеристична функція множини?

2. Дайте визначення нечіткої множини.

3. Що називають носієм нечіткої множини?

4. Які операції над нечіткими множинами ви знаєте?

5. Як можна визначити доповнення нечіткої множини? Об’єднання та перетин нечітких множин?

6. Чим пояснюється існування кількох операцій об’єднання й перетину нечітких множин?

7. Які спеціальні операції над нечіткими множинами ви знаєте?

8. Який сенс мають операції концентрування й розтягування?

9. Яким чином обчислюється відстань Хеммінга при розгляді скінченної множини? Лічильної множини? Множини потужності континуума?

10. Яким чином обчислюють евклідову відстань між множинами?

11. Який геометричний сенс має лінійна відстань між множинами?

12. Яку властивість характеризує індекс нечіткості множини? Яким чином його обчислюють?

13. Чи залежить індекс нечіткості перетину (об'єднання) множин від індексів нечіткості вихідних множин?

14. Чи змінюється індекс нечіткості множини внаслідок операцій концентрування та розтягування?

15. Дайте визначення найближчої чіткої множини до даної нечіткої.

16. Яку множину називають множиною рівня α нечіткої множини?

17. Сформулюйте теорему про розкладання нечіткої множини на множини рівня.

18. Сформулюйте теорему про декомпозицію нечітких множин.

Завдання до розділу 1

1. Дано такі нечіткі множини:

$$A = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline 0,5 & 0,4 & 0,7 & 0,8 & 1 & 1 & 0,9 \end{array};$$

$$B = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline 0 & 0,3 & 0,4 & 0,8 & 0,6 & 0,7 & 0,5 \end{array};$$

$$C:\quad \mu_C(x) = \begin{cases} -\frac{1}{9}(x-3)^2 + 1, & \text{якщо } x \in (0;6); \\ 0, \text{ якщо } & x \notin (0;6); \end{cases}$$

$$D:\quad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \frac{1}{6}x, & \text{якщо } x \notin (0;6); \\ 1, & \text{якщо } x \ge 6. \end{cases}$$

Чи будуть ці множини нормальними? Субнормальними? Визначити їхні носії.

2. Визначити перетин та об'єднання множин: а) A та B, б) C та D із завдання 1 (за трьома визначеннями).

3. Визначити доповнення множин A, C.

4. Виконати операції концентрування й розтягування множин B та D.

5. Розкласти нечіткі множини A та B (із завдання 1) на множини рівня.

6. Знайти найближчі до множин A, B, C, D із завдання 1 звичайні множини.

7. Знайти відстань Хеммінга та евклідову відстань між множинами: а) A та B, б) C та D.

8. Знайти лінійний і квадратичний індекси нечіткості множин B та D.

9. Дано нечітку множину: A = (< яблуко|0,4 >, < груша| 0,3>, < слива| 0,7 >, < ранет| 0,2 >, < вишня| 0,5 >, < черешня| 0,8 >, < манго| 1 >)

Визначити:

- носій нечіткої множини A;
- висоту множини A;
- підмножину рівня $A_{0,3}$.

10. Обчислити лінійний індекс нечіткості множини, функція належності якої $\mu(x) = 1 - (x-1)^2$, де $x \in [0; 2]$.

РОЗДІЛ 2
ЗАДАЧІ ВИБОРУ І БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ

Мета розділу: ознайомлення з апаратом бінарних відношень і нечітких бінарних відношень, властивостями та операціями над ними, використанням нечітких відношень у системах прийняття рішень.

2.1. Поняття про бінарні відношення

Найпростіша ситуація, у якій можна зробити обґрунтований вибір з кількох об'єктів, виникає, коли подано один "критерій якості", що дозволяє порівнювати будь-які два об'єкти, точно вказати, котрий з них кращий, і вибрати той (або ті), для якого цей критерій досягає максимального значення. Однак у більшості реальних ситуацій визначити один такий критерій доволі складно, а інколи взагалі не можливо. Але розглядаючи деякі пари об'єктів, можна назвати кращий з них. У таких випадках кажуть, що ці два об'єкти перебувають у *бінарному відношенні.* Це поняття дозволяє формалізувати операції попарного порівняння альтернатив, і тому воно широко використовується у теорії прийняття рішень.

Розглянемо деякі вислови, що виражають взаємозв'язки між об'єктами.

1. Тетяна старша за Ігоря.
2. Фірми *A* та *B* збиткові.
3. Київ розташований південніше від Москви.
4. Іван – брат Петра.
5. Залізо важче за воду.

Як бачимо, ці вислови описують відношення різного типу:

Наприклад, другий і четвертий означають, що два об'єкти віднесені до одного й того самого класу; перший, третій й п'ятий – відображають порядок об'єктів у системі. Крім того, у всіх п'яти прикладах чітко виділено назви об'єктів і назви відношень. Легко помітити, що коли замість однієї назви об'єкта поставити іншу, можливі такі ситуації:

1) відношення знову буде виконано (Київ розташований південніше від Мурманська);

2) відношення не буде виконуватися (Київ розташований південніше від Одеси);

3) відношення не буде мати сенсу (залізо розташоване південніше від води).

Отже, говорити про відношення ми можемо тільки тоді, коли вміємо виділяти множину об'єктів, на якій воно визначене.

Математично визначення відношення можна сформулювати таким чином:

В и з н а ч е н н я 2.1. *Відношенням* R на множині Ω називається підмножина декартового добутку $\Omega \times \Omega$, тобто $R \subset \Omega^2$.

Задання підмножини R у множині $\Omega\times\Omega$ визначає, які саме пари елементів перебувають у відношенні R.

Відношення R, задане на множині Ω, позначимо як (R,Ω). Тут і далі записи: $x\,R\,y$ або $(x,y)\in R$, означають, що елементи x та y множини Ω перебувають у відношенні R .

2.1.1. Способи задання відношень

Для того, щоб задати відношення (R,Ω), необхідно задати всі пари елементів $(x,y)\in\Omega\times\Omega$, які включено в множину R. Крім повного переліку всіх пар, існують три способи задання відношень: за допомогою матриці, графа й розрізів. Перші два способи застосовують, аби задати відношення на скінченних множинах, задання відношення розрізами може бути застосовано й до нескінченних множин.

Опишемо названі способи задання відношень.

Задання відношення за допомогою матриці. Нехай множина Ω складається з n елементів, R – подане на цій множині бінарне відношення. Пронумеруємо елементи множини Ω цілими числами від 1 до n. Для того, щоб задати відношення, побудуємо квадратну таблицю розміром $n\times n$. Її i-й рядок відповідає елементу x_i множини Ω, j-й стовпчик – елементу x_j з множини Ω. На перетині i-го рядка та j-го стовпчика ставимо 1, якщо елемент x_i перебуває у відношенні R з елементом x_j, і нуль в інших випадках, а саме:

$$a_{ij}(R)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x_i\ R\ x_j,\\ 0 & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

П р и к л а д 2.1. Нехай $X=\{1,2,\ldots,5\}$, R – відношення “більше” на множині X. Тоді його можна описати у вигляді матриці таким чином:

$$R=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0\end{pmatrix}.$$

Задання відношення за допомогою графа. Для того, щоб задати відношення цим способом, поставимо у взаємно однозначну відповідність елементам скінченної множини Ω, на якій визначено відношення, вершини графа $x_1,\ldots,x_n$ (за будь-якою нумерацією).

Провести дугу від вершини x_i до x_j, можна тоді й тільки тоді, якщо елемент x_i перебуває у відношенні R з елементом x_j, коли ж $i = j$, то дуга (x_i, x_j) перетворюється на петлю при вершині x_i.

П р и к л а д 2.2. Задамо відношення з прикладу 2.1 за допомогою графа.

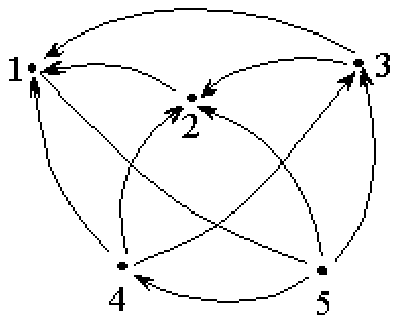


Рис. 2.1. Задання відношення "більше" на множині: $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, за допомогою графа

Отже, коли задано будь-який орієнтований граф G, що має n вершин, і вибрано нумерацію на множині Ω, яка складається з n елементів, то тим самим на цій множині задано деяке відношення: $R = R(G)$, а саме, твердження $x_i \, R \, x_j$ буде справедливим тоді і тільки тоді, коли в графі G наявна дуга (x_i, x_j). Отже, граф виступає, як геометричне зображення відношення.

Задання відношень за допомогою розрізів. Розглянемо відношення R на множині Ω.

В и з н а ч е н н я 2.2. *Верхнім розрізом* відношення (R, Ω) в елементі x, позначено через $R^+(x)$, називається множина елементів $y \in \Omega$, для яких виконано умову: $(y, x) \in R$, тобто

$$R^+(x) = \{y \in \Omega | (y, x) \in R\}. \quad (2.1)$$

В и з н а ч е н н я 2.3. *Нижнім розрізом* $R^-(x)$ відношення (R, Ω) в елементі x називається множина елементів $y \in \Omega$, для яких $(x, y) \in R$, а саме:

$$R^-(x) = \{y \in \Omega | (x, y) \in R\}. \quad (2.2)$$

Отже, верхній розріз (множина R^+) являє собою множину всіх таких елементів y, що перебувають у відношенні R з фіксованим елементом x $(y \, R \, x)$. Нижній розріз (множина R^-) – це множина всіх таких елементів y, з якими фіксований елемент x перебуває у відношенні R $(x R y)$.

Таким чином, для того, щоб задати відношення за допомогою розрізів, необхідно описати всі верхні або всі нижні його розрізи. Тобто відношення R буде задано, якщо для кожного елемента $x \in \Omega$ задано множину $R^{+}(x)$ або для кожного елемента $x \in \Omega$ задано множину $R^{-}(x)$.

Приклад 2.3. Нехай задано множину: $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 10\}$. Відношення R означає «бути дільником», тобто $x\,R\,y$, якщо x – дільник y. Задати це відношення можна в такий спосіб:

за допомогою верхніх розрізів:

$$
\begin{array}{ll}
R^{+}(1) = \{1\}, & R^{+}(6) = \{1; 2; 3; 6\} \\
R^{+}(2) = \{1; 2\}, & R^{+}(7) = \{1; 7\}, \\
R^{+}(3) = \{1; 3\}, & R^{+}(8) = \{1; 2; 4; 8\}, \\
R^{+}(4) = \{1; 2; 4\}, & R^{+}(9) = \{1; 3; 9\}, \\
R^{+}(5) = \{1; 5\}, & R^{+}(10) = \{1; 2; 5; 10\};
\end{array}
$$

або за допомогою нижніх розрізів:

$$
\begin{array}{ll}
R^{-}(1) = \{1; 2, ..., 10\}, & R^{-}(6) = \{6\}, \\
R^{-}(2) = \{2; 4, ..., 10\}, & R^{-}(7) = \{7\}, \\
R^{-}(3) = \{3; 6; 9\}, & R^{-}(8) = \{8\}, \\
R^{-}(4) = \{4; 8\}, & R^{-}(9) = \{9\}, \\
R^{-}(5) = \{5; 10\}, & R^{-}(10) = \{10\}.
\end{array}
$$

Розглянемо відношення спеціального вигляду та описані вище способи їх задання.

Відношення називається *порожнім* (позначається $\varnothing$), якщо воно не виконується для жодної пари $(x, y) \subset \Omega \times \Omega$.

Стосовно порожнього відношення справедливі такі твердження:

1. У матриці A ($\varnothing$) величини $a_{i,j}$ ($\varnothing$) = 0 для всіх значень i, j.
2. Граф $G(\varnothing)$ не має дуг.
3. $R^{+}(x) = R^{-}(x) = \varnothing$ для всякого елемента $x \in \Omega$.

Відношення називається *повним* (позначається U), якщо воно виконується для всіх пар $(x, y) \subset \Omega \times \Omega$. Для повного відношення правильні такі ознаки:

1. У матриці $A(U)$ величини $a_{i,j}(U) = 1$ для всіх значень i, j.
2. У графі $G(U)$ дуги з'єднують будь-яку пару вершин.
3. Розрізи $R^{+}(x) = R^{-}(x) = \Omega$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

Відношення називається *діагональним* або відношенням рівності (позначається E), коли воно виконується для всіх пар $(x, y) \subset \Omega\times\Omega$, які складаються із збіжних елементів. Тобто $x\, E\, y$, якщо x та y – це один і той самий елемент множини Ω. Для діагонального відношення E мають місце такі твердження:

1. У матриці A (E)

$$a_{i,j}(E) = \begin{cases} 1, \text{ якщо} & i = j, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

2. У графі $G(E)$ наявні тільки петлі при вершинах, інші дуги відсутні.
3. Розрізи $R^+(x) = R^-(x) = x$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

Відношення називається *антидіагональним* (позначається $\overline{E}$), коли воно виконується для всіх пар $(x, y) \subset \Omega\times\Omega$, які складаються з незбіжних елементів. Для відношення $\overline{E}$ справедливі такі ознаки:

1. У матриці A (E)

$$a_{i,j}(\overline{E}) = \begin{cases} 1, \text{ якщо} & i \neq j, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

2. У графі $G(\overline{E})$ наявні всі дуги (x_i, x_j), якщо $i \neq j$ (відсутні тільки петлі при вершинах).

3. Розрізи $R^+(x) = R^-(x) = \Omega \setminus \{x\}$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

2.1.2. Операції над відношеннями

Визначення 2.4. Відношення R_1 *включено* у відношення R_2 (записується як $R_1 \le R_2$), коли множину пар, для яких виконується відношення R_1, включено в множину пар, для яких виконується R_2.

Будемо говорити, що відношення R_1 *строго включено* в R_2 $(R_1 < R_2)$, якщо $R_1 \le R_2$ й $R_1 \neq R_2$. Рівність відношень реалізується так само, як і рівність множин.

Для матричного задання відношень буде діяти таке правило: якщо $R_1 \le R_2$, то $a_{ij}(R_1) \le a_{ij}(R_2)$, $i, j = \overline{1,n}$.

Приклад 2.3. R_1 – відношення « $\le$ » на множині дійсних чисел, R_2 – відношення « $<$ » на тій самій множині. Тоді $R_2 \le R_1$.

Визначення 2.5. Відношення $\overline{R}$ називається *доповненням* відношення R, тоді і тільки тоді, коли воно пов’язує тільки ті пари елементів, для яких не виконується відношення R.

Очевидно, що

$$\overline{R} = \Omega^2 \setminus R. \qquad (2.3)$$

Тому в матричному записі $a_{ij}\left(\overline{R}\right) = 1 - a_{ij}(R),\ \ i, j = \overline{1,n}$.

У графі $G\left(\overline{R}\right)$ наявні ті і тільки ті дуги, котрі відсутні у графі $G(R)$.

Для розрізів відношення $\overline{R}$ справедливі такі твердження:

$$\overline{R}^{+}(x) = \Omega \setminus R^{+}(x),$$
$$\overline{R}^{-}(x) = \Omega \setminus R^{-}(x).$$

П р и к л а д 2.4. Нехай R – відношення «$\geq$», задане на множині дійсних чисел, тоді $\overline{R}$ – відношення «$<$», задане на тій самій множині.

В и з н а ч е н н я 2.6. *Перетином* відношень R_1 та R_2 (записується $R_1 \cap R_2$) називається відношення, визначене перетином відповідних підмножин множини Ω^2.

У матричному записі це означає, що

$$a_{ij}(R_1 \cap R_2) = \min\left\{a_{ij}(R_1), a_{ij}(R_2)\right\},\ \ i, j = \overline{1,n}.$$

В и з н а ч е н н я 2.7. *Об'єднанням* відношень R_1 та R_2 (позначається $R_1 \cup R_2$) називається відношення, отримане від об'єднання відповідних підмножин множини Ω^2.

У матричному записі це можна подати таким чином:

$$a_{ij}(R_1 \cup R_2) = \max\left\{a_{ij}(R_1), a_{ij}(R_2)\right\},\ \ \ i, j = \overline{1,n}.$$

В и з н а ч е н н я 2.8. *Оберненим* до відношення R називається відношення R^{-1}, яке задовольняє таку умову:

$$x\,R^{-1}y \ \Leftrightarrow\ y\,R\ x. \qquad (2.4)$$

Для матриць відношень R та R^{-1} буде мати місце така формула:

$$a_{ij}\left(R^{-1}\right) = a_{ji}(R).$$

П р и к л а д 2.5. Нехай R – відношення «$\geq$» на множині дійсних чисел. Тоді оберненим до нього відношенням R^{-1} буде відношення «$\leq$» на множині дійсних чисел.

П р и к л а д 2.6. Нехай відношення R на множині: $X = \{x_1,\ x_2,\ x_3, x_4, x_5\}$, задано матрицею:

$$R=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Побудувати відповідні йому обернене відношення та доповнення.

Розв'язування

Згідно з визначенням 2.5 доповнення відношення R можна задати такою матрицею:

$$\overline{R}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

Обернене відношення будуємо за визначенням 2.8, отже,

$$R^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&1&0\\0&1&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}.$$

В и з н а ч е н н я 2.9. *Добутком* (або *композицією*) відношень R_1 та R_2 (позначається як $R_1 \cdot R_2$) називається відношення, яке будується за таким правилом: $x\left(R_1 \cdot R_2\right)y$, коли існує елемент $z \in \Omega$, який задовольняє умови $x\,R_1\,z$ та $z\,R_2\,y$.

П р и к л а д 2.7. Розглянемо відношення R_1 та R_2, подані на множині дійсних чисел. Причому, R_1 – відношення «менше», R_2 – відношення «більше». Пара чисел $(x, y) \subset R_1 \cdot R_2$, коли існує число z, для якого виконано такі вимоги: $x < z$ та $z > y$. Вочевидь, ця умова виконується стосовно всіх чисел x, y, а тому $R_1 \cdot R_2$ – це повне відношення (тобто таке, яким пов'язані всі елементи даної множини).

П р и к л а д 2.8. Нехай множина $X = \{x_1,\ x_2,\ x_3, x_4, x_5\}$, на ній подано два відношення R_1 та R_2, а саме:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначити їхню композицію.

Розв'язування

Згідно із визначенням 2.9 $x(R_1 \cdot R_2)y$, коли існує елемент $z \in \Omega$, який задовольняє умови $x\,R_1 z$ та $z\,R_2\,y$. У матричному записі це означає, що

$$a_{ij}(R_1 \cdot R_2) = \max_{k=\overline{1,n}} \min\{a_{ik}(R_1), a_{kj}(R_2)\},$$

де n – порядок матриці.

Інакше кажучи, композиція відношень обчислюється як максимінний добуток відповідних їм матриць.

Тоді

$$R_1 \cdot R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В и з н а ч е н н я 2.10. Відношення (R_1,Ω_1) називається *звуженням* відношення (R,Ω) на множину Ω_1, якщо $\Omega_1 \subset \Omega$ та $R_1 = R \bigcap \Omega_1 \times \Omega_1$. Звуження відношення (R,Ω) на множину Ω_1 називають також відношенням R на множині Ω_1.

П р и к л а д 2.9. Відношення « >» на множині натуральних чисел є звуженням відношення « >» на множині дійсних чисел.

2.2. Властивості відношень. Відношення еквівалентності, порядку домінування і переваги

В и з н а ч е н н я 2.11. Відношення R називається *рефлексивним*, якщо $x\,R\,x$ для будь-якого елемента $x \in \Omega$.

Наприклад, відношення «бути схожим», «бути не старшим», «менше або дорівнює» – рефлексивні; «бути братом», «бути старшим», «більше» – не рефлексивні.

У матриці рефлексивного відношення на головній діагоналі розміщуються одиниці, тобто елемент матриці $a_{ij} = 1$, якщо $i = j$.

Граф рефлексивного відношення обов'язково має петлі при вершинах. Стосовно верхнього й нижнього розрізів справедливі твердження: $x \in R^{+}(x)$, $x \in R^{-}(x)$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

В и з н а ч е н н я 2.12. Відношення R називається *антирефлексивним*, коли твердження $x\,R\,y$ означає, що $x \neq y$ для $\forall x \in \Omega$.

У матриці антирефлексивного відношення елементи головної діагоналі дорівнюють нулю, тобто $a_{ij} = 0$, якщо $i = j$.

Граф антирефлексивного відношення не має петель при вершинах, а верхні та нижні розрізи задовольняють такі умови: $x \notin R^{+}(x)$, $x \notin R^{-}(x)$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

Антирефлексивними будуть відношення «більше», «менше», «бути старшим».

В и з н а ч е н н я 2.13. Відношення R називається *симетричним*, якщо $R = R^{-1}$ $(x\,R\,y \;\Rightarrow\; y\,R\,x)$.

Матриця симетричного відношення симетрична, тобто $a_{ij} = a_{ji}$ для всіх значень i, j. У графі такого відношення всі дуги парні, а верхні й нижні розрізи збігаються для всіх елементів $x \in \Omega$, тобто $R^{+}(x) = R^{-}(x)$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

Симетричними є відношення рівності, «бути схожим», «вчитися в одній групі».

В и з н а ч е н н я 2.14. Відношення R називається *асиметричним*, якщо $R \cap R^{-1} = \varnothing$ (тобто з двох виразів $x\ R\ y$ та $y\ R\ x$ хоча б один не відповідає дійсності).

У матриці симетричного відношення $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$ для всіх значень i, j. Тобто з двох симетричних елементів a_{ij} і a_{ji} хоча б один обов'язково дорівнює 0.

Асиметричними, наприклад, є відношення «більше» та «менше».

Зауважимо, що антирефлексивність – це обов'язкова умова асиметричності.

В и з н а ч е н н я 2.15. Відношення R називається *антисиметричним*, якщо твердження $x\,R\,y$ та $y\,R\,x$ можуть бути правильними одночасно тоді і тільки тоді, коли $x = y$.

У матриці антисиметричного відношення $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$, коли $i \neq j$.

Прикладами антисиметричних будуть відношення «більше або дорівнює», «не більше», «не гірше».

В и з н а ч е н н я 2.16. Відношення R називається *транзитивним*, якщо $R^2 \le R$ (тобто, коли з тверджень $x R z$ та $z R y$ випливає, що $x R y$).

Транзитивними є відношення «більше або дорівнює», «менше», «бути старшим», «вчитися в одній групі».

Умова: $R^2 \le R$, дає зручний спосіб перевірки транзитивності відношення в разі, коли воно задано за допомогою матриці. Для цього необхідно обчислити матрицю відношення R^2 (тобто піднести в квадрат матрицю вихідного відношення) і перевірити умову. Якщо $a_{ij}(R^2) \le a_{ij}(R)$ для всіх значень i, j, то відношення транзитивне. Коли ж цю умову порушено хоча б для однієї пари індексів i, j, то відношення не буде транзитивним.

В и з н а ч е н н я 2.17. Відношення R називається *ациклічним*, якщо $R^k \cap R^{-1} = \varnothing$, тобто з умов $x R z_1$, $z_1 R z_2$, ... , $z_{k-1} R y$ випливає, що $x \ne y$.

Це означає, що граф такого відношення не містить циклів.

В и з н а ч е н н я 2.18. Відношення R називається *від'ємно транзитивним*, якщо його доповнення $\overline{R}$ транзитивне.

В и з н а ч е н н я 2.19. Відношення R називається *сильно транзитивним*, якщо воно одночасно транзитивне і від'ємно транзитивне.

Властивості ациклічності й транзитивності відіграють особливу роль у теорії прийняття рішень, оскільки вони виражають природні взаємозв'язки між об'єктами. Дійсно, якщо об'єкт x у деякому сенсі не гірший за об'єкт y, а об'єкт y в тому самому сенсі не гірший за об'єкт z, то природно чекати, що об'єкт x буде не гіршим від об'єкта z (транзитивність), і в будь-якому разі об'єкт z не кращий за об'єкт x (ациклічність).

П р и к л а д 2.10. Визначити властивості такого відношення:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування

Дане відношення є рефлексивним (оскільки його матриця містить на головній діагоналі тільки одиниці), воно не буде симетричним (тому що серед симетричних елементів є такі, що не дорівнюють один одному, наприклад, елементи a_{12} та a_{21}). Оскільки елемент $a_{13} = a_{31}$, то відношення не буде також асиметричним й антисиметричним.

Для перевірки його транзитивності обчислимо добуток даного відношення з самим собою, тобто

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$R^2 \not\subset R$, отже, вихідне відношення не є транзитивним.

В и з н а ч е н н я 2.20. Відношення R являє собою відношення *еквівалентності* (*еквівалентність*), якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне. Позначимо його R_e , або символом $\sim$.

Прикладами відношеннями еквівалентності будуть такі:

– «учитися на одному курсі», «учитися в одній групі», задані на множині студентів факультету;

– «мати однакову остачу при діленні на 3» на множині натуральних чисел;

– відношення подібності на множині трикутників та інші.

Характерним для еквівалентності є те, що вона розподіляє елементи на класи. У першому прикладі – це курси або групи студентів факультету, у другому – множини чисел, що мають однакову остачу при діленні на 3, у третьому – множини подібних трикутників. Отже, задання еквівалентності на множині тісно пов'язане з її розбиттям на неперетинні підмножини. Розглянемо цю властивість еквівалентності докладніше.

Нехай задано деяке розбиття множини Ω. Тобто задано підмножини Ω_1, Ω_2, … Ω_N множини Ω, які задовольняють таку умову: $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Omega_i$, причому $\Omega_i \bigcap \Omega_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $i, j, = 1, 2, \ldots N$. Уведемо на множині Ω відношення R таким чином: $x\,R\,y$ тоді і тільки тоді, коли існує множина Ω_i, яка містить елементи x та y одночасно, тобто $x \in \Omega_i$ і $y \in \Omega_i$. Це відношення буде еквівалентністю.

З а в д а н н я. Доведіть це самостійно.

Як бачимо, задання еквівалентності на деякій множині Ω рівносильне розбиттю цієї множини на класи еквівалентних між собою елементів. І навпаки, будь-яке розбиття множини Ω визначає на ній відповідну йому еквівалентність.

В и з н а ч е н н я 2.21. Відношенням *нестрогого порядку* «$\leq$» (*нестрогим порядком*) називається відношення, що має властивості рефлексивності, антисиметричності й транзитивності.

В и з н а ч е н н я 2.22. Відношенням *строгого порядку* «<» (*строгим порядком*) називається відношення, якому властиві антирефлексивність, асиметричність й транзитивність.

Якщо на множині Ω задано відношення «$\leq$», тобто деякий нестрогий порядок, то йому можна поставити у відповідність строгий порядок «<» , що визначається за таким правилом: $x < y$ тоді і тільки тоді, коли $x \le y$ та $x \ne y$. І навпаки, якщо «<» – відношення строгого порядку, задане на множині Ω, то йому можна поставити у відповідність відношення «$\le$» таким чином: $x \le y$ тоді і тільки тоді, коли $x < y$ або $x = y$. Тобто за нестрогим порядком ми можемо визначити відповідний йому строгий порядок і навпаки.

Нехай на деякій множині задано відношення порядку (для всіх, або деяких пар її елементів), тоді кажуть, що на цій множині задано *частковий порядок.*

Частковий порядок на множині Ω називається *лінійним порядком*, якщо для будь-яких елементів $x, y \in \Omega$ справедливе одне з трьох тверджень: $x < y$, $x = y$ або $x > y$ (тобто ми можемо порівняти будь-які два елементи множини Ω).

Визначення 2.23. Відношенням *домінування* називається відношення, що має властивості антирефлексивності й асиметричності.

Будемо говорити, що елемент x *домінує* над елементом y, якщо x в якому-небудь сенсі кращий за y.

Таким чином, відношення строгого порядку являє собою окремий випадок відношення домінування, для якого характерна ще й транзитивність. У загальному ж сенсі при домінуванні як транзитивності так і ациклічності може й не бути.

Визначення 2.24. Два елементи можна порівняти за відношенням R, коли $x R y$ або $y R x$. В інших випадках елементи *непорівнянні*.

Якщо R – повне відношення на множині Ω, то будь-які два елементи цієї множини можна порівняти.

Розглянемо, які порядки можна задати на m-вимірному просторі E_m:

1. $a \ge b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i \ge b_i$, $i = 1,2,\dots m$;

2. $a \ge b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i \ge b_i$, $i = 1,2,\dots m$, та $a \ne b$;

3. $a > b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i > b_i$, $i = 1,2,\dots m$;

4. $a \,\overline{>}\, b$ тоді і тільки тоді, коли $a = b$ або $a_i > b_i$ хоча б для одного значення $i \in \{1,2,\dots m\}$;

5. $a = b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i = b_i$, $i = 1,2,\dots m$.

Відношення 1 являє собою частковий порядок, воно рефлексивне, антисиметричне й транзитивне.

Відношення 2 і 3 – це строгі часткові порядки. Вони антирефлексивні, асиметричні й транзитивні.

Відношення 4 є рефлексивним, але воно не буде ні симетричним, ні транзитивним.

Зв'язок між цими відношеннями схематично зображено на рис. 2.2.

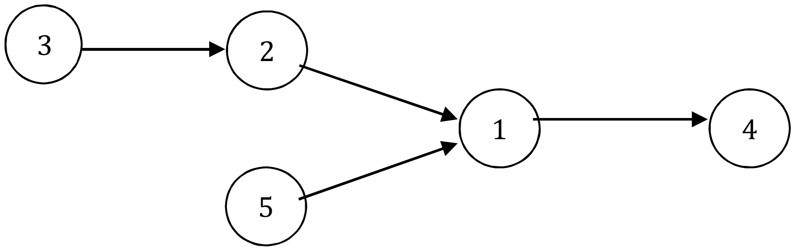


Рис. 2.2. Схема взаємозв'язку між відношеннями в просторі E_m

Для опису переваги зазвичай використовують такі бінарні відношення, задані на множині альтернатив Ω: строгої переваги, байдужості й нестрогої переваги.

Відношення строгої переваги R^S означає, що один об'єкт (строго) переважає над іншим (тобто один об'єкт кращий від іншого).

Відношення байдужості R^I означає, що об'єкти однакові за перевагами, і коли обмежити вибір цими двома об'єктами, не важливо, який з них буде вибрано.

Відношення нестрогої переваги означає, що один об'єкт не менш переважний, ніж інший (тобто один об'єкт не гірший від іншого).

Припустимо, що за допомогою ОПР або експертів було визначено відношення нестрогої переваги *R* на множині допустимих альтернатив *X*.

Це означає, що відносно будь-якої пари альтернатив $(x, y) \subset X \times X$ можлива одна із таких ситуацій:

1) об'єкт x не гірший від об'єкта *y*, тобто $x > y$, інакше кажучи $(x, y) \in R$;

2) об'єкт y не гірший за об'єкт x, тобто $y \geq x$, або $(y, x) \in R$;

3) об'єкти *x* та *y* не порівнянні між собою, тобто $(x, y) \notin R$ та $(y, x) \notin R$.

Ця інформація дозволяє звузити клас варіантів раціонального вибору, включивши в нього тільки ті альтернативи, над якими не домінує жодна інша альтернатива множини *X*.

Щоб пояснити це поняття, визначимо відповідні відношенню переваги *R* відношення строгої переваги R^S і відношення однаковості (байдужості) R^I.

Будемо говорити, що альтернатива x строго краща від альтернативи *y* (має строгу перевагу над альтернативою *y*), якщо одночасно $x \geq y$ та $y \neq x$, тобто

$$(x, y) \in R \text{ і } (y, x) \notin R.$$

Сукупність усіх таких пар назвемо *відношенням строгої переваги* R^S на множині *X*.

Легко переконатись, що це відношення має задовольняти такі властивості:

1) антирефлексивність;

2) асиметричність.

Для більш компактного запису відношення R^S використаємо визначення відношення R^{-1}, оберненого до R, а саме, врахуємо, що $(x,y)\in R^{-1} \Leftrightarrow (y,x)\in R$.

Тоді відношення строгої переваги може бути записано в такому вигляді:

$$R^S = R \setminus R^{-1}.$$

Відношення однаковості, що відповідає відношенню переваги R, можна визначити таким чином: $(x,y)\in R^I$ тоді і тільки тоді, коли або не виконується жодна з умов: $x \ge y$ і $y \ge x$, або одночасно мають місце обидві: $x \ge y$ та $y \ge x$. Інакше кажучи, $(x,y)\in R^I$, коли інформація, яку ми маємо, недостатня для обґрунтованого вибору між альтернативами x та y.

Математично відношення R^I можна записати такою формулою:

$$R^I = \left[\left(X \times X \right) \setminus \left(R \cup R^{-1} \right) \right] \cup \left(R \cap R^{-1} \right).$$

Легко помітити, що чим більше інформації про реальну ситуацію або процес, тим вужчим виявляється відношення однаковості.

П р и к л а д 2.11. Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, на ній подано таке відношення нестрогої переваги R:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Побудувати відповідні йому відношення еквівалентності, строгої переваги, однаковості.

Розв'язування

Згідно з визначенням, $R^e = R \cap R^{-1}$. Побудуємо спочатку відношення R^{-1}:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо відношення еквівалентності, а саме:

$$R^e = R \bigcap R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Як видно з цієї матриці, елементи x_1, x_4 еквівалентні.

Тепер відповідно до визначення знайдемо відношення R^S таким чином:

$$R^S = R \setminus R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Це означає, що елемент x_1 строго переважає елемент x_2, елемент x_2 у свою чергу, кращий за x_4, елемент x_3 переважає x_2, а x_4 кращий від x_3 відповідно.

Відношення байдужості знаходимо за такою формулою:

$$R^I = \left[\left(X \times X \right) \setminus \left(R \bigcup R^{-1} \right) \right] \bigcup \left(R \bigcap R^{-1} \right).$$

Матриця цього відношення набуває такого вигляду:

$$R^I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Це відношення означає, що серед елементів $\{x_1, x_3\}$, $\{x_1, x_4\}$, $\{x_3, x_4\}$ можна вибирати будь-який, тобто інформації для того, аби здійснити обґрунтований вибір між елементами кожної пари, недостатньо.

Коли $(x, y) \in R^S$, то будемо говорити, що альтернатива x домінує над альтернативою y $(x > y)$.

В и з н а ч е н н я 2.25. Альтернативу $x \in X$ назвемо *недомінованою* на множині X за відношенням *R*, якщо $(y, x) \notin R^S$, $\forall y \in X$. Тобто коли альтернатива *x* – недомінована, то в множині *X* не має жодної альтернативи, яка домінувала б над альтернативою *x*.

У наведеному вище прикладі недомінованою виявилась альтернатива x_1.

Якщо деякі альтернативи у певному сенсі недоміновані, то їхній вибір у задачах прийняття рішень доречно вважати раціональним у межах наявної інформації.

Таким чином, інформація у формі відношення переваги дозволяє звузити клас раціональних рішень на множині X до множини недомінованих альтернатив, яка має такий вигляд:

$$X^{н.д} = \left\{ x \;\middle|\; x \in X,\ (y, x) \in R \setminus R^{-1}, \forall x \in X \right\}.$$

2.3. Поняття *R*-оптимальності, найкращого, найгіршого, максимального й мінімального елементів

Розглянутий вище матеріал мав на меті дати формальний опис попарного порівняння альтернатив, що є необхідною умовою для виділення найкращого елемента (або кількох кращих) з усієї множини альтернатив *X*. Тепер формалізуємо саме поняття «кращий», використавши для цього апарат бінарних відношень.

Елемент x^* множини X будемо називати *найкращим* за відношенням *R*, якщо умова $x^* R\, x$ справедлива для всякого елемента $x \in X$.

Елемент $x_* \in X$ будемо називати *найгіршим* за відношенням *R*, якщо умова $x\, R\, x_*$ справедлива для всіх $x \in X$.

Легко впевнитись, що найкращий і найгірший елементи існують не завжди. Зокрема, їх не буде, коли відношення не є повним, як у наведеному нижче прикладі.

П р и к л а д 2.12. Розглянемо множину: $B = \{a, b, c\}$, і відношення *R* на ній, яке подано таким чином: $R = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c)\}$. Визначити найкращі та найгірші за даним відношенням елементи множини *B*, якщо такі існують.

Зобразимо описане відношення за допомогою графа (див. рис. 2.3)

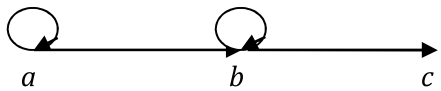


Рис. 2.3. Граф відношення *R* (до прикладу 2.12)

Як бачимо, це відношення не має найкращих і найгірших елементів, бо елементи *a* та *c* непорівнянні.

Уведемо поняття максимального елемента.

Елемент $x_{\max}$ називається *максимальним* за відношенням R^S на множині *X*, якщо для абиякого елемента $x \in X$ має місце твердження $x_{\max}\ R^S\ x$ або $x_{\max}$ не порівнянний з x.

Іншими словами, не існує елемента (альтернативи) $x \in X$, який був би кращим за альтернативу $x_{\max}$.

Множина максимальних за відношенням R елементів множини X позначається $\max_R X$.

Елемент $x_{\min}$ називається *мінімальним* за відношенням R^S на множині X, якщо для всіх елементів $x \in X$ або $x\,R^S x_{\min}$, або x непорівнянний з $x_{\min}$. Отже, не існує елемента, $x \in X$ який був би гіршим за $x_{\min}$; немає жодного елемента x, над яким би домінував елемент $x_{\min}$.

У наведеному вище прикладі максимальним буде елемент a, мінімальним – елемент c.

Множина мінімальних за відношенням R елементів множини X позначається як $\min_R X$.

Зауважимо, що коли найкращі елементи існують, то вони будуть і максимальними, протилежна ситуація не буде справедливою.

Отже, якщо треба обрати найкращу в деякому сенсі альтернативу, то природним буде її вибір із множини максимальних (недомінованих) альтернатив.

П р и к л а д 2.13. Нехай відношення R подано у вигляді графа G (рис. 2.4). Знайти найкращі, найгірші, максимальні та мінімальні за відношенням R^S елементи.

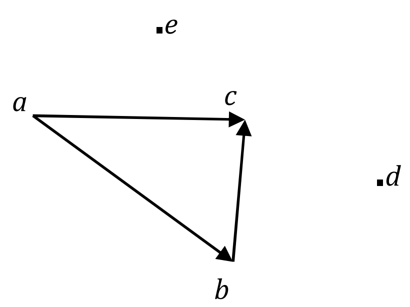


Рис. 2.4. Граф відношення R (до прикладу 2.13)

Найкращих елементів не існує, оскільки елемент e не порівнянний з іншими; найгірших елементів також немає. Максимальними за відношенням R^S є елементи a, d, e. Мінімальними – c, d, e.

Зверніть увагу, що елементи d, e – максимальні й мінімальні одночасно. Це пояснюється тим, що вони непорівнянні з іншими, тобто у нас не має інформації про переваги цих елементів.

Розв'язування

Множина $\max_R X$ максимальних за відношенням R об'єктів множини X є *внутрішньо стійкою* в тому сенсі, що коли $a, b \in \max_R X$, то не може виконуватись жодне з тверджень: $a\,R\,b$ та $b\,R\,a$.

Множина називається *зовнішньо стійкою*, якщо для кожного немаксимального елемента $a \in X$ знайдеться більш переважний від нього елемент серед максимальних. Тобто буде справедливим твердження: $a^0 R\, a$ для деякого елемента $a^0 \in \max_R X$.

Внутрішньо та зовнішньо стійка множина $\max_R X$ називається *ядром* відношення R у множині X.

Поняття стійкості має велике значення, бо якщо множина $\max_R X$ зовнішньо стійка, то оптимальний елемент має бути вибраний саме з цієї множини. Коли ж вона не є зовнішньо стійкою, то для обмеження нею вибору немає підстав.

Якщо виникає потреба вибрати не один, а кілька кращих елементів, або впорядкувати всі об'єкти за перевагами, то поняття максимального елемента і ядра відношення втрачають своє значення.

П р и к л а д 2.14. Припустимо, що множина $B = \{a, b, c\}$, і на ній задане відношення: $R = \{(a, c)\}$. Тут множина максимальних елементів $\max_R B = \{a, b\}$. Однак при виборі двох кращих елементів не можна не брати до уваги наявність елемента c: оскільки якщо з'явиться інформація, що він кращий, ніж b, то шуканими будуть елементи a та c.

Числова функція φ , визначена на множині X, називається *зростаючою* (*неспадною*) за відношенням R, коли з умови $a\, R\, b$ випливає, що $\varphi(a) > \varphi(b)$ [відповідно $\varphi(a) \geq \varphi(b)$] для всіх елементів $a, b \in X$.

Має місце подане нижче твердження.

Лема 2.1. Нехай $B \subseteq A$ і $a^0 \in B$ надає неспадній за відношенням R на множині B функції Ψ найбільшого на ній значення. Для того, щоб об'єкт a^0 був максимальним за відношенням R на множині B, достатнє виконання однієї з таких умов:

1. Функція Ψ зростає за відношенням R на множині B.
2. $a^0 \in B$ – єдина точка максимуму функції Ψ на множині B.

Доведення

Припустимо, що елемент a^0 не є максимальним за відношенням R. Тоді в множині B знайдеться елемент a, який переважає a^0 за відношенням R, тобто $a\, R\, a^0$. Але тоді має виконуватись така нерівність: $\Psi(a) \geq \Psi\left(a^0\right)$, причому ця нерівність строга, якщо функція Ψ зростає за відношенням R на множині B. Але строга нерівність суперечить тому, що елемент a^0 – точка максимуму функції Ψ, а нестрога нерівність – тому що a^0 являє собою єдину точку максимуму Ψ на множині B. Доведення завершено.

При моделюванні реальних систем можуть мати місце ситуації, коли в ОПР або в експертів немає чіткого уявлення про переваги між альтернативами, але їм конче необхідно подати конкретні висновки стосовно краших альтернатив. У цьому випадку експерти змушені певним чином "огрубляти" свої знання та уявлення, і відповідна математична модель буде менш близькою до реальної ситуації.

Більш гнучким способом формалізації таких уявлень є можливість для експертів визначити міру свого переконання в перевазі альтернативи, використовуючи числа з інтервалу [0;1], тобто описати свої думки за допомогою *нечіткого відношення переваги*, коли кожній парі альтернатив (x, y) відповідає число з інтервалу [0;1], яке відображає міру правильності переваги: $x \geq y$. Методи прийняття рішень на основі нечітких відношень переваги буде розглянуто далі в розділі 5.

Зауважимо, що характерна особливість «мови» бінарних відношень – це припущення про те, що результат порівняння за перевагами двох елементів не залежить від складу всієї множини. Однак у деяких випадках така залежність має місце, і для її врахування необхідна більш багата «мова» опису переваг, основана на використанні функцій вибору [63, 65].

2.4. Визначення нечіткого відношення. Операції над нечіткими відношеннями

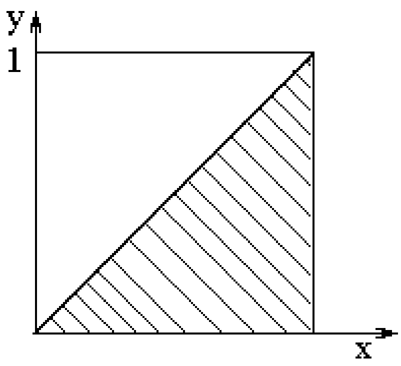
В и з н а ч е н н я 2.26. Нечітким відношенням *R* на множині X називається нечітка підмножина декартового добутку $X \times X$. Вона характеризується такою функцією належності: $\mu_R : X \times X \to [0;1]$.

Значення $\mu_R(x, y)$ цієї функції показує міру або ступінь, з якою виконується відношення *R* між елементами *x* та *y*. Зрозуміло, що звичайні відношення ми можемо вважати окремим випадком нечітких відношень, функції належності яких можуть мати тільки два значення: 0 або 1.

П р и к л а д 2.15. Розглянемо два подібні відношення на інтервалі [0; 1]. Це звичайне відношення «більше або дорівнює» *R* (≥) та нечітке відношення «значно більше» $\widetilde{R}$ $(>>)$. Пари, пов’язані відношенням *R*, зображено на рис. 2.5, а відношенням $\widetilde{R}$ – на рис. 2.6.

Якщо має місце нечітке відношення *R*, то існують пари елементів, для яких воно виконується чітко, є пари, стосовно яких це відношення не виконується, а також деяка проміжна зона, де пари мають той чи інший ступінь належності, тобто для них відношення виконується лише певною мірою залежно від ситуації. Нечітку межу в цьому випадку зображено зміною щільності штрихування.

Так само, як і при використанні звичайних відношень (див. п. 21.1), нечіткі відношення можна задавати матрицею, графом або розрізами.



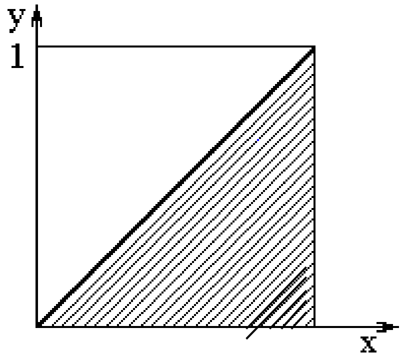


Рис. 2.5. Графічне подання відношення « $\geq$ »

Рис. 2.6. Графічний вигляд відношення «>>»

Матриця нечіткого відношення аналогічна матриці звичайного відношення, тільки її елементами можуть бути числа від 0 до 1.

Коли нечітке відношення задають за допомогою графа, то кожній його дузі присвоюється число з інтервалу [0; 1], яке означає ступінь виконання нечіткого відношення для даної пари.

Верхні й нижні розрізи нечіткого відношення являють собою нечіткі множини, визначені таким чином:

$$R^{+}(x)=\{y|\mu_R(y,x):\ y\in X,\ \mu_R(y,x)>0\},$$

$$R^{-}(x)=\{y|\mu_R(x,y):\ y\in X,\ \mu_R(x,y)>0\}.$$

Визначення 2.27. Носієм нечіткого відношення R на множині X називається підмножина декартового добутку $X\times X$, що має такий вигляд:

$$\operatorname{supp} R=\{(x,y)|(x,y)\in X\times X,\ \mu_R(x,y)>0\}.$$

Носій нечіткого відношення можна розуміти як звичайне відношення на множині X, що пов'язує пари (x,y), для яких відношення R виконується з ненульовою мірою.

Приклад 2.16. Нехай відношення R – «приблизно дорівнює». Задамо його на множині: $X=\{1,2,3,4,5\}$, за допомогою матриці. Вона може мати такий вигляд:

$$R=\begin{vmatrix}1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0 & 0\\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 0{,}2\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5\\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 1\end{vmatrix}.$$

Тоді носієм описаного нечіткого відношення буде таке звичайне відношення:

$$\operatorname{supp} R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Зауважимо, що конкретний вигляд матриці відношення залежить від сенсу задачі й того, що розуміють під виразом «приблизно дорівнює».

У попередніх підрозділах було розглянуто операції над нечіткими множинами та звичайними відношеннями. Операції над нечіткими відношеннями певною мірою поєднують у собі властивості і тих, і інших. Іншими словами, деякі з них являють собою аналоги відповідних операцій для звичайних відношень, але існують і такі, що притаманні лише нечітким відношенням. Наприклад, операції об'єднання та перетину нечітких відношень можна так само, як і для нечітких множин, визначити кількома способами.

В и з н а ч е н н я 2.28. Нехай на множині X подано два нечітких відношення A та B, тобто в декартовому добутку X^2 визначено дві нечіткі підмножини A та B. Тоді нечіткі множини: $C = A \bigcap B$ та $D = A \bigcup B$, назвемо відповідно *перетином* та *об'єднанням* нечітких відношень A та B на множині X.

П р и к л а д 2.17. Відношення A та B подано в такому вигляді:

$$A = \begin{vmatrix} 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 \\ 1 & 1 & 0,4 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 1 & 1 \\ 0,8 & 0,8 & 1 \end{vmatrix}.$$

Знайдемо перетин та об'єднання цих відношень, використовуючи визначення 1.6 та 1.7, а саме:

$$A \bigcap B = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 \\ 0,8 & 0,8 & 0,4 \end{vmatrix}, \qquad A \bigcup B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0,3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

В и з н а ч е н н я 2.29. Нечітке відношення B *містить* нечітке відношення A, якщо для нечітких множин B та A має місце включення: $A \subset B$, тобто їх функції належності задовольняють таку нерівність:

$$\mu_A(x,y) \le \mu_B(x,y), \quad \forall x, y \in X.$$

Приміром, у розглянутому вище прикладі 2.1 відношення « $\geq$ » містить відношення « >> ».

В и з н а ч е н н я 2.30. Якщо R – нечітке відношення на множині X, то нечітке відношення $\overline{R}$, функція належності якого $\mu_{\overline{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y)$, назвемо *доповненням* відношення R у множині X.

Наприклад, доповненням нечіткого відношення «краще» буде відношення «не краще».

Обернене до R нечітке відношення R^{-1} на множині X визначається таким чином:

$$x\, R^{-1}\, y \;\Leftrightarrow\; y\, R\, x, \quad \forall x, y \in X,$$

або з використанням термінології функцій належності:

$$\mu_{R^{-1}}(x,y) = \mu_R(y,x), \quad \forall x, y \in X.$$

На відміну від звичайних відношень, добуток (або композицію) нечітких відношень можна визначити багатьма способами.

Розглянемо деякі з можливих визначень цієї операції.

В и з н а ч е н н я 2.31. *Максимінний* добуток нечітких відношень A та B на множині X визначається такою функцією належності:

$$\mu_{A \cdot B}(x,y) = \sup_{z \in X} \min\{\mu_A(x,z),\ \mu_B(z,y)\}.$$

Якщо вихідні відношення задано на скінченній множині X, то матриця їх максимінного добутку дорівнює максимінному добутку матриць відношень A та B.

В и з н а ч е н н я 2.32. *Мінімаксний* добуток нечітких відношень A та B на множині X буде дорівнювати нечіткому відношенню, функція належності якого

$$\mu_{A \cdot B}(x,y) = \inf_{z \in X} \max\{\mu_A(x,z),\ \mu_B(z,y)\}.$$

В и з н а ч е н н я 2.33. *Максмультиплікативний* добуток нечітких відношень A та B характеризується функцією належності такого вигляду:

$$\mu_{A \cdot B}(x,y) = \sup_{z \in X}\{\mu_A(x,z) \cdot \mu_B(x,z)\}.$$

П р и к л а д 2.18. Нехай за допомогою матриць задано нечіткі відношення A та B.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 1 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 1 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 1 & 0 \\ 1 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0{,}5 \end{vmatrix}.$$

Знайдемо композиції відношень A та B, користуючись визначеннями 2.31 – 2.33, тоді маємо такі результати:

максимінну композицію буде описано такою матрицею:

$$A \cdot B_{\max\min} = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}3 & 1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{vmatrix},$$

мінімаксну композицію – матрицею такого вигляду:

$$A \cdot B_{\min\max} = \begin{vmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}7 & 0.7 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 & 0 \end{vmatrix},$$

а максмультиплікативну композицію – такою матрицею:

$$A \cdot B_{\max\cdot} = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 1 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}3 & 1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}12 & 0{,}4 & 0 \\ 1 & 1 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{vmatrix}.$$

2.5. Властивості нечітких відношень. Класифікація нечітких відношень

Розглянемо тепер, чим характерні нечіткі відношення.

В и з н а ч е н н я 2.34. Нечітке відношення R на множині X називається *рефлексивним*, якщо для будь-якого елемента $x \in X$ виконується така умова:

$$\mu_R(x, x) = 1.$$

Якщо рефлексивне відношення задано матрицею, то її головна діагональ включає тільки одиниці.

Відношення «приблизно дорівнює», задане на множині чисел, буде прикладом рефлексивного відношення.

Визначення 2.35. Нечітке відношення R буде *антирефлексивним*, якщо $\mu_R(x,x)=0$, $\forall x\in X$.

Доповнення рефлексивного відношення буде антирефлексивним. Прикладом антирефлексивного відношення на множині чисел може бути відношення «значно більше».

Визначення 2.36. Нечітке відношення R на множині X називається симетричним, якщо для будь-яких елементів $x,y\in X$ виконується така умова:

$$\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x).$$

Матриця симетричного нечіткого відношення, поданого в скінченній множині, буде симетричною. Його прикладом буде відношення «сильно відрізнятися за величиною».

Визначення 2.37. Відношення R на множині X буде асиметричним, якщо воно має таку властивість:

$$\mu_R(x,y)>0,\ \Rightarrow\ \mu_{\mathrm{R}}(y,x)=0,\ \text{ або }\ \mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)=0,\qquad \forall x,y\in X,$$

інакше кажучи,

$$\min\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\}=0,\quad \forall x,y\in X.$$

Асиметричним виступає відношення «значно більше».

Визначення 2.38. Відношення R на множині X буде антисиметричним, якщо виконується така умова:

$$\min\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\}=0,\quad x\neq y.$$

Визначення 2.39. Нечітке відношення R на множині X називається транзитивним, якщо $R^2\subset R$.

Очевидно, що властивість транзитивності залежить від способу визначення добутку відношень. Згідно з введеними раніше визначеннями можна назвати три її види: максимінна (max min), мінімаксна (min max) і максмультиплікативна (max ·) транзитивність.

Легко помітити, що $R^2_{max\text{-}\bullet}\subseteq R^2_{maxmin}$. Отже, з максимінної транзитивності випливає максмультиплікативна транзитивність.

Прикладом максимінно транзитивного відношення є відношення «значно більше» на множині чисел.

П р и к л а д 2.19. Перевірити на транзитивність нечітке відношення, що має такий вигляд:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0{,}9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}9 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування

Для перевірки цієї властивості необхідно обчислити максимінну, мінімаксну та максмультиплікативну композиції даного відношення.

$$R^2_{\max\min} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0{,}9 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 1 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}9 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Оскільки $R^2_{\max\min} \subset R$, то нечітке відношення R є максимінно транзитивним, отже, воно буде й максмультиплікативно транзитивним. Перевіримо відношення на мінімаксну транзитивність. Відповідна йому композиція має такий вигляд:

$$R^2{}_{\min\max} = \begin{vmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Як бачимо, $R^2_{\min\ \max} \not\subset R$.

Отже, відношення R не буде мінімаксно транзитивним.

В и з н а ч е н н я 2.40. *Транзитивним замиканням* нечіткого відношення R буде нечітке відношення $\hat{R}$, яке визначається за таким правилом:

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots$$

Вочевидь, при визначенні транзитивного замикання необхідно спочатку встановити тип операції добутку відношень.

Стосовно транзитивного замикання має місце таке твердження:

Т е о р е м а 2.1. Транзитивне замикання будь-якого бінарного відношення R являє собою найменше транзитивне бінарне відношення, що містить у собі R.

Зауважимо, що α-рівень транзитивного замикання нечіткого відношення збігається з транзитивним замиканням відповідного α-рівня вихідного нечіткого відношення, тобто

$$\left(\hat{R}\right)_{\alpha} = \hat{R}_{\alpha}, \quad \forall \alpha \neq 0.$$

Наведемо формулювання двох теорем, котрі дозволяють побудувати транзитивне замикання в деяких випадках.

Т е о р е м а 2.2. Якщо існує число k, для якого $R^k = R^{k+1}$, то

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k.$$

Т е о р е м а 2.3. Якщо R являє собою нечітке відношення на скінченній множині E, причому $m(E) = n$, то $\hat{R} = R \cup R^2 \cup R \cup \ldots \cup R^n$ або існує число: $k \leq n$, для якого $R^k = R^{k+1}$.

П р и к л а д 2.20. Побудуємо максимінно транзитивне замикання нечіткого відношення R, заданого такою матрицею:

$$R = \begin{vmatrix} 0{,}8 & 1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}2 \end{vmatrix}.$$

Для цього обчислимо послідовно матриці відношень R^2, R^3, а саме:

$$R^2_{\max\min} = \begin{vmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{vmatrix}, \qquad R^3_{\max\min} = \begin{vmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{vmatrix}.$$

Як бачимо, $R^2 = R^3$, отже, $\hat{R} = R \cup R^2$ і набуває такого вигляду:

$$\hat{R} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}2 \end{vmatrix} \cup \begin{vmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}8 & 1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{vmatrix}.$$

Прикладом використання операції транзитивного замикання є задача аналізу ефективності комунікацій, названа *задачею про поширення чуток* серед добре знайомих між собою людей.

Виберемо за вихідну універсальну множину деяку множину людей $X = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$. Визначимо на цій множині нечітке відношення $\tilde{R}$, яке описує таку умову: «людина x_i добре знає людину x_j». За визначенням природно вважати це відношення рефлексивним і симетричним, однак у загальному випадку транзитивність може не виконуватись, оскільки факт знайомства визначено між парами людей. Припустимо, що нас цікавить потенційна можливість передачі інформації або поширення чуток серед даної сукупності людей. Виявляється, ця задача може бути розв'язана через виконання операції транзитивного замкнення даного нечіткого відношення.

Усі типи нечітких відношень, залежно від характерних їм властивостей, можна поділити на три класи.

До першого класу належать симетричні відношення, більшість яких відображують схожість або відмінність між об'єктами множини *X*. Такі відношення можна задавати за допомогою зваженого графа з неорієнтованими дугами.

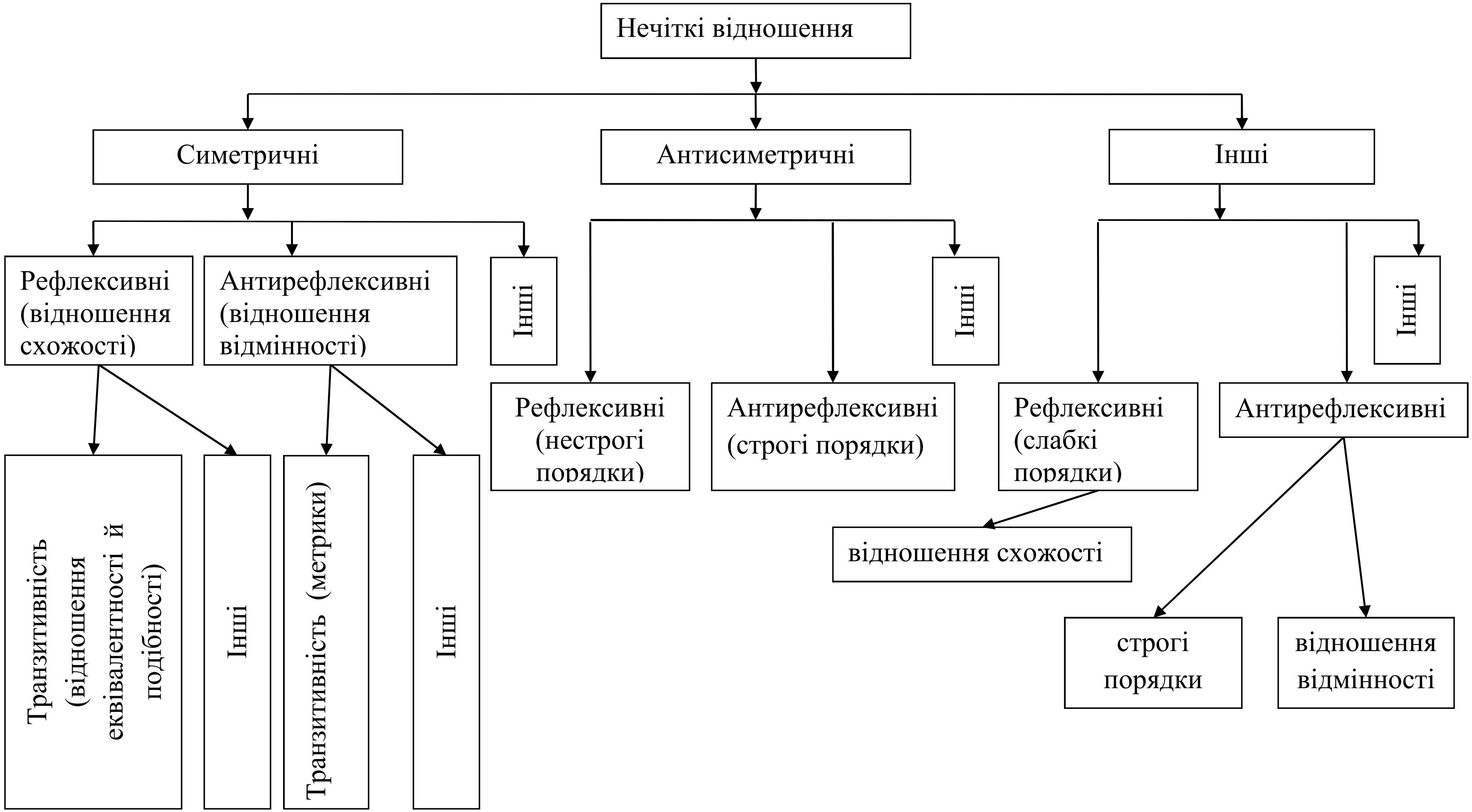
Другий клас утворюють антисиметричні відношення. Вони задають на множині відношення впорядкованості, домінування. Їм відповідають орієнтовні зважені графи з однобічною орієнтацією дуг.

Третій клас включає решту відношень.

Відношення кожного класу, своєю чергою, можуть бути поділені на підкласи, залежно від виконання умов рефлексивності або антирефлексивності. Схематично класифікацію нечітких відношень подано в табл. 2.1, більш детальну класифікацію можна знайти в літературі [15]. Розглянемо деякі з нечітких відношень.

Таблиця 2.1

Класифікація нечітких відношень



Нечітким *відношенням передпорядку* називається бінарне нечітке відношення, що має властивості транзитивності й рефлексивності.

Якщо R являє собою передпорядок, то мають місце такі рівності: $R = R^2 = ... = R^k = \hat{R}.$

Передпорядком на множині: $X = \{A, B, C, D, E\}$, буде, наприклад, відношення, що має такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0,7 & 0,8 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,3 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,2 \\ 0,6 & 1 & 0,9 & 1 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Нечіткий напівпорядок – це транзитивне відношення, що не має властивості рефлексивності.

Симетричні, рефлексивні відношення називаються *відношеннями схожості.* Вони показують міру подібності ("близькості") двох елементів.

Симетричні, антирефлексивні відношення називають відношеннями відмінності.

Для відношень схожості й відмінності має місце таке твердження: якщо R – нечітке відношення схожості, то $\overline{R}$ – відношення відмінності.

Серед відношень схожості особливо виділяють відношення подібності.

В и з н а ч е н н я 2.41. *Відношенням подібності* або *еквівалентності* називається нечітке бінарне відношення, для якого характерні транзитивність, рефлексивність і симетричність.

Очевидно, що це відношення являє собою передпорядок.

Нечіткими відношеннями подібності будуть, наприклад, такі:

$$R_1 = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 1 & 0,8 & 0,7 & 1 & 0,9 \\ B & 0,8 & 1 & 0,7 & 0,8 & 0,8 \\ C & 0,7 & 0,7 & 1 & 0,7 & 0,7 \\ D & 1 & 0,8 & 0,7 & 1 & 0,9 \\ E & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{array} \quad \text{та} \quad R_2 = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 1 & a & a & a & a \\ B & a & 1 & a & a & a \\ C & a & a & 1 & a & a \\ D & a & a & a & 1 & a \\ E & a & a & a & a & 1 \end{array},$$

коли $a \in [0;1]$.

З а в д а н н я: перевірте транзитивність цих відношень.

П р и к л а д 2.21. Нечітке відношення $x\,R\,y$, де $x, y \in [0, +\infty)$, визначено такою функцією належності:

$$\mu_R(x,y)=\begin{cases} e^{-k(y+1)}, & y<x, \quad k>1, \\ 1, & y=x, \\ e^{-k(x+1)}, & y>x, \quad k>1. \end{cases}$$

З а в д а н н я. Перевірити самостійно, чи воно є відношенням подібності.

Кожен α-рівень нечіткого відношення подібності являє собою звичайне відношення еквівалентності. Нагадаємо, що всяке відношення еквівалентності задає на множині деяке розбиття. Отже, кожний α-рівень нечіткого відношення подібності також задає на цій множині розбиття. Із властивості α-рівнів нечіткого відношення випливає також вкладеність відповідних розбиттів множини *X*. Причому, із зменшенням величини α відбувається збільшення класів еквівалентності. Таким чином, нечітке відношення еквівалентності, на відміну від звичайного відношення схожості, задає на множині *X* ієрархічну сукупність її розбиттів на неперетинні класи еквівалентності. Це пояснюється тим, що умова транзитивності накладає досить сильні обмеження на значення ступенів належності $\mu(x,y)$. Зокрема для нечіткого відношення подібності має місце теорема.

Т е о р е м а 2.4. Нехай $R\subset E\times E$ – відношення подібності й *x*, *y*, *z* – три елементи множини *E*. Задамо, що

$$c=\mu_R(x,z)=\mu_R(z,x),$$

$$a=\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x),$$

$$c=\mu_R(y,z)=\mu_R(z,y).$$

Тоді $c\geq a=b$ або $a\geq b=c$, або $b\geq c=a$, тобто з величин *a*, *b*, *c* принаймні дві рівні між собою, а третя не менша від них.

В и з н а ч е н н я 2.17. Нечітке бінарне відношення, що має властивості антирефлексивності й симетричності, називається *відношенням відмінності.*

Приклади відношень відмінності:

1. Відношення на множині $\{A,B,C,D,E\}$, задане матрицею такого вигляду:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	0	0,2	0,3	0	0,1
B	0,2	0	0,3	0,2	0,2
C	0,3	0,3	0	0,3	0,3
D	0	0,2	0,3	0	0,1
E	0,1	0,2	0,3	0,1	0

2. Нечітке відношення, задане такою функцією належності:

$$\mu_{\overline{R}}(x,y)=\begin{cases}1-e^{-k(y+1)}, & y<x, \quad k>1,\\ 0, & y=x,\\ 1-e^{-k(x+1)}, & y>x, \quad k>1,\end{cases}$$

являє собою відношення відмінності, воно утворюється внаслідок такої заміни: $\mu_{\overline{R}}(x,y)=1-\mu_R(x,y)$, у прикладі 2.7.

Міру відмінності можна вважати відстанню між елементами множини (якщо додати транзитивність), причому різні види транзитивності задають відповідно різні види відстаней.

В и з н а ч е н н я 2.18. Нечітким *відношенням порядку* називається бінарне відношення, яке має властивості рефлексивності, транзитивності й антисиметричності.

Відрізняють відношення строгого й нестрогого порядку.

Строгий порядок являє собою антирефлексивне, асиметричне й транзитивне відношення.

Відношення нестрогого порядку мають властивості рефлексивності, антисиметричності й транзитивності.

2.6. Відображення нечітких множин. Принцип узагальнення

У багатьох задачах прийняття рішень виникає необхідність розширити область визначення X поданого відображення або відношення, шляхом включення до неї поряд з окремими елементами множини X її довільних нечітких підмножин.

Наприклад, на множині керувань (керувальних впливів) U зафіксовано відображення $f: U \to V$, яке описує функціонування керованої системи. Для кожного керування $u \in U$ його образ: $v = f(u)$, показує реакцію даної системи на вибір цього керування. Якщо вибране керування описано нечітко, наприклад, у формі нечіткої підмножини $\mu(u)$ множини U, то для відшукання реакції системи на нього необхідно визначити образ нечіткої множини $\mu(u)$ при відображенні f.

Спосіб розширення області визначення відображення на клас нечітких множин називається *принципом узагальнення*.

Л.А. Заде запропонував принцип узагальнення, який базується на визначенні образу нечіткої множини при звичайному (чітко описаному) відображенні.

Нехай подане відображення φ: $X \to Y$, і A – деяка підмножина множини X, що характеризується функцією належності $\mu_A(x)$.

В и з н а ч е н н я 2.19. Образ нечіткої множини A при відображенні φ визначається як нечітка підмножина множини Y, що являє собою сукупність таких пар:

$$(y, \mu_B(y)) = (\varphi(x), \mu_A(x)), \qquad x \in X,$$

тут μ_B – функція належності образу, $\mu_B : Y \to [0,1]$.

Легко зрозуміти, що функцію належності μ_B можна записати в такому вигляді:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x), \qquad y \in Y, \tag{2.1}$$

причому множина $\varphi^{-1}(y)$ для кожного фіксованого елемента $y \in Y$ визначається за таким правилом:

$$\varphi^{-1}(y) = \{x \mid x \in X, \varphi(\mathrm{x}) = y\},$$

тобто являє собою множину всіх тих елементів $x \in X$, образом яких при відображенні φ буде y.

П р и к л а д 2.22. Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, а множина $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Відображення $\varphi : X \to Y$ задано таблицею.

$$\varphi = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 1 \\ x_6 & 1 & 0 & 0 \\ x_7 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

На множині X задамо нечітку підмножину, а саме:

$$A = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 \mid x_6 \mid x_7}{0{,}3 \mid 0{,}5 \mid 1 \mid 0 \mid 0{,}5 \mid 0{,}8 \mid 0{,}4}$$

Знайдемо образ B нечіткої підмножини A при відображенні φ. Відповідно до визначення 2.19

$$\mu_B(y_1) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y_1)} \mu_A(x),$$

$$\varphi^{-1}(y_1) = \{x_1, x_4, x_6\},$$

тоді $\mu_B(y_1) = \sup\limits_{x \in \{x_1, x_4, x_6\}} \mu_A(x) = \sup\{0{,}3;\ 0;\ 0{,}8\} = 0{,}8$.

Аналогічно

$$\mu_B(y_2) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y_2)} \mu_A(x) = \sup_{x \in \{x_2, x_3\}} \mu_A(x) = \sup\{0{,}5;\ 1\} = 1,$$

$$\mu_B(y_3) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y_3)} \mu_A(x) = \sup_{x \in \{x_5, x_7\}} \mu_A(x) = \sup\{0{,}5;\ 0{,}4\} = 0{,}5.$$

Таким чином, образом множини A при відображенні φ буде нечітка множина $B \subset Y$, яка має такий вигляд: $B = \dfrac{y_1 \mid y_2 \mid y_3}{0{,}8 \mid 1 \mid 0{,}5}$.

Застосуємо тепер принцип узагальнення аби розширити області визначення нечіткого відображення.

Відображення множини X у множину Y назвемо *нечітким*, якщо кожному елементу $x \in X$ воно ставить у відповідність деяку нечітку підмножину множини Y. Описується нечітке відображення функцією належності $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;\ 1]$, причому функція $\mu_\varphi(x_0, y)$ для кожного фіксованого елемента: $x = x_0$, являє собою функцію належності нечіткої підмножини в множині Y, яка є образом елемента x_0 при відображенні φ.

Отже, нехай дано нечітке відображення $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$ і $\mu_A(x)$ – нечітка підмножина в множині X. Якщо для відшукання образу цієї нечіткої множини при відображенні μ_φ застосувати принцип узагальнення за правилом (2.1) , то отримаємо таку сукупність пар:

$$\left(\mu_\varphi(x, y), \mu_A(x)\right), \quad x \in X,$$

тут функція $\mu_\varphi(x, y)$ для кожного фіксованого елемента x задає нечітку підмножину множини Y.

У результаті можна зробити висновок, що образ нечіткої множини $\mu_A(x)$ в даному випадку є достатньо складним об’єктом, а саме, нечітким підкласом усіх нечітких підмножин множини Y. Отже, виникає потреба ввести принцип узагальнення в іншій формі.

В и з н а ч е н н я 2.20. Образом B нечіткої множини $A \subset X$ при нечіткому відображенні $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$ називається нечітка підмножина множини Y, характерна такою функцією належності:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \mu_\varphi(x, y)\}. \tag{2.2}$$

В основі цього визначення лежить максимінний добуток (композиція) нечітких відношень.

Коли φ – звичайне відображення, тобто $\mu_\varphi(x, y) = 1$, якщо $y = \varphi(x)$, то формула (2.2) перетворюється на вираз (2.1).

У багатьох задачах вихідне нечітке відображення μ_φ залежить від n змінних, тобто має такий вигляд: $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$, тут $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

Нехай у множині X подано нечітку підмножину μ_A. У загальному випадку функція належності цієї підмножини має такий вигляд:

$$\mu_A(x_1,...,x_n) = \min(\mu_1(x_1),...,\mu_n(x_n); \nu(x_1,...,x_n)),$$

тут μ_i, $i=1,...,n$ та ν – відомі функції належності нечітких підмножин множини X_i, $i = 1, ..., n$ та X відповідно. Застосовуючи в цьому випадку принцип узагальнення згідно з правилом (2.2), отримуємо таку формулу для опису функції належності образу нечіткої підмножини μ_A:

$$\mu_B(y) = \sup_{(x_1,...,x_n)\in X} \min\{\mu_1(x_1),...,\mu_n(x_n), \nu(x_1,...,x_n), \mu_\varphi(x_1,...,x_n,y)\}. \quad (2.3)$$

П р и к л а д 2.23. Маємо множини: $X = \{x_1, ..., x_7\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, і нечітку підмножину A множини X, яку задано таким чином:

$$A = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 \mid x_6 \mid x_7}{0,5 \mid 0,8 \mid 1 \mid 0 \mid 0,1 \mid 0,4 \mid 1}.$$

Крім того, задано нечітке відображення $\varphi : X \to Y$, функцію належності якого $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$ подано у вигляді таблиці

$\mu_\varphi =$

	y_1	y_2	y_3
x_1	0,2	0,1	0
x_2	0,4	0,8	1
x_3	1	0,1	0
x_4	0	0,5	1
x_5	0	0	1
x_6	0,3	0	0,8
x_7	0,9	0,3	0,4

Необхідно визначити образ $B \subset Y$ множини A при нечіткому відображенні φ.

Розв'язування

Будемо застосовувати визначення 2.20. Тоді для обчислення функції належності множини B використаємо максимінний добуток функцій μ_A та μ_φ. Отримані результати подано нижче.

$$\left(0.5;\,0{,}8;\,1;\,0;\,0{,}1;\,0{,}4;\,1\right)\cdot\begin{vmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0\\ 0{,}4 & 0{,}8 & 1\\ 1 & 0{,}1 & 0\\ 0 & 0{,}5 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}8\\ 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}4\end{vmatrix}=\left(1;\,0{,}8;\,0{,}8\right)\cdot$$

Таким чином, $B=\dfrac{y_1 \mid y_2 \mid y_3}{1 \mid 0{,}8 \mid 0{,}8}$.

П р и к л а д 2.25. Поширимо область визначення арифметичної операції додавання на клас “нечітких чисел”, тобто нечітких підмножин числової осі.

Операція додавання в множині чисел R^1 являє собою відображення $\varphi: R^1\times R^1\to R^1$, тобто $\varphi(r_1,r_2)=r=r_1+r_2$.

Припустимо, що μ_1,μ_2 – два нечітких числа ($\mu_1,\mu_2: R^1\to[0;1]$). Образ пари (μ_1,μ_2) при відображенні φ назвемо їх сумою: $\mu_\Sigma=\mu_1+\mu_2$. Тоді, використовуючи формулу (2.3), маємо такий вираз:

$$\mu_\Sigma(r)=\sup_{\substack{r_1,r_2\in R^1\\ r_1+r_2=r}}\min\{\mu_1(r_1),\mu_2(r_2)\}. \qquad (2.4)$$

Зокрема, коли нечіткі числа μ_1 та μ_2 являють собою інтервали $[a_1,b_1]$ та $[a_2,b_2]$, то згідно з формулою (2.4) $[a_1,b_1]+[a_2,b_2]=[a_1+a_2,\,\mathrm{b}_1+b_2]$.

В и з н а ч е н н я 2.21. Прообразом A нечіткої множини $B\subset Y$ при нечіткому відображенні $\mu_\varphi: X\times Y\to[0;1]$, називається об’єднання всіх нечітких множин, образи яких при цьому відображенні належать (є підмножинами) нечіткій множині B.

Якщо образ нечіткої множини μ_φ позначити через $A\cdot\mu_\varphi$, то із включення $A\cdot\mu_\varphi\subset Y$ отримуємо таку умову для визначення прообразу множини:

$$\sup_{x\in X}\min\{\mu_2(x),\mu_\varphi(x,y)\}\le\mu_B(y),\qquad \forall y\in Y. \qquad (2.5)$$

Явний вираз для опису функції належності прообразу подає наведена нижче теорема. Для її формулювання уведемо такі множини:

$$N=\{(x,y)|(x,y)\in X\times Y,\ \mu_\varphi(x,y)>\mu_B(y)\},$$

$$N_x = \{y | y \in Y, (x,y) \in N\},$$

$$N_y = \{x | x \in X, (x,y) \in N\},$$

$$X^\circ = \{x | x \in X, N_x \neq \varnothing\}.$$

Т е о р е м а 2.5. У введених вище позначеннях нечітка множина *A* (прообраз множини *B*) описується такою функцією належності:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in N_x} \mu_B(y), & x \in X^\circ, \\ 1, & x \in X \backslash X^\circ. \end{cases}$$

Легко перевірити, що коли відображення μ_φ чітке, тобто φ являє собою звичайне відображення $\varphi : X \to Y$ і функція належності

$$\mu_\varphi(x) = \begin{cases} 1, \text{ коли } y = \varphi(x), \\ 0 \text{ для всіх інших пар } (x, y) \in X \times Y, \end{cases}$$

то $\mu_A(x) = \mu_B(\varphi(x)), \quad \forall x \in X.$

Висновки

Поняття бінарного відношення дозволяє формалізувати операції попарного порівняння об’єктів й математично обґрунтувати вибір одного або кількох об’єктів у тому разі, коли неможливо задати критерій на множині альтернатив, але реально оцінити переваги однієї альтернативи над іншою.

Бінарні відношення можна задавати за допомогою матриці, графа або розрізів. До них застосовують операції перетину, об’єднання, доповнення та інші.

У теорії прийняття рішень важливе значення мають такі властивості відношень як рефлексивність, симетричність (асиметричність), транзитивність.

Нечіткі відношення являють собою розширення поняття бінарного відношення на клас нечітких множин. Їх властивості зумовлені ознаками нечітких множин і бінарних відношень.

Принцип узагальнення – це спосіб розширення області визначення відображення на клас нечітких множин.

Питання, викладені в цьому розділі, розглянуто в літературі [43, 44, 51, 58, 65, 75].

Контрольні питання

1. Дайте визначення бінарного відношення.
2. Які існують способи задання відношень?
3. Яким чином можна задати відношення за допомогою матриці?
4. Як можна задати відношення у вигляді графа?
5. Як задати відношення за допомогою розрізів?
6. Сформулюйте визначення верхнього (нижнього) розрізу відношення.
7. Які із способів задання відношень можна використовувати на нескінченній множині елементів?
8. Які математичні операції виконують над відношеннями?
9. Яке відношення називається рефлексивним (антирефлексивним)?
10. Яке відношення називається симетричним, антисиметричним, асиметричним?
11. Які відношення називають транзитивними, сильно транзитивними, від'ємно транзитивними?
12. Яким чином обчислюють транзитивне замикання відношення?
13. Які властивості характерні для відношення переваги?
14. Дайте визначення найкращого (найгіршого) елемента множини.
15. Який елемент множини називається мінімальним (максимальним) за даним відношенням переваги?
16. Яке значення в теорії прийняття рішень мають поняття найкращого, найгіршого, максимального й мінімального елементів? Де вони використовуються?
17. Дайте визначення відношень еквівалентності, байдужості, переваги, домінування.
18. Як за даним відношенням нестрогої переваги побудувати відповідні йому відношення строгої переваги, байдужості, еквівалентності?
19. Що означає властивість зовнішньої та внутрішньої стійкості множини?
20. Що називають нечітким відношенням?
21. Як можна задавати нечіткі відношення?
22. Які математичні операції можна застосовувати до нечітких відношень?
23. Яке нечітке відношення називають рефлексивним (антирефлексивним)?
24. Яке нечітке відношення називають симетричним, антисиметричним, асиметричним?
25. Яке нечітке відношення називають транзитивним? Яким чином пов'язані між собою різні види транзитивності нечітких відношень?
26. Що являє собою транзитивне замикання нечіткого відношення?
27. За якими ознаками класифікують нечіткі відношення?
28. Дайте визначення відношень передпорядку, строгого та нестрогого порядку, еквівалентності, схожості, подібності, відмінності, переваги. На яких властивостях відношень базується ця класифікація?

29. Що являє собою відображення нечіткої множини?

30. Сформулюйте принцип узагальнення стосовно відображення нечітких множин.

31. Що являє собою образ нечіткої множини при звичайному відображенні?

32. Що являє собою нечітке відображення?

33. Як можна визначити образ нечіткої множини при нечіткому відображенні?

34. Що являє собою прообраз нечіткої множини при звичайному відображенні? При нечіткому відображенні?

Завдання до розділу 2

Завдання А

1. Відношення задано у вигляді матриці. Задати його за допомогою: *а*) графа; *б*) верхніх розрізів; *в*) нижніх розрізів.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Відношення задано у вигляді матриці. Задати його за допомогою: *а*) графа; *б*) верхніх розрізів; *в*) нижніх розрізів.

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Задати відношення «менше або дорівнює» на множині цілих чисел від одного до десяти за допомогою матриці.

4. На множині: $X = \{a, b, c, d\}$, відношення R задано за допомогою графа (рис. 2.7). Задати його: *а*) матрицею; *б*) верхніми розрізами; *в*) нижніми розрізами.

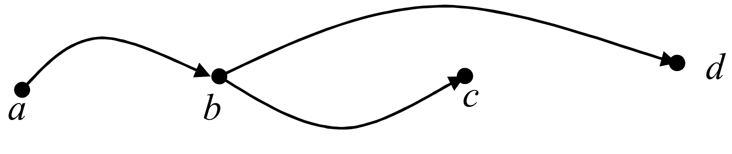


Рис. 2.7. Граф відношення R

5. На множині: $X = \{a, b, c, d\}$, відношення R задано за допомогою графа (рис. 2.8). Задати його: *а*) матрицею; *б*) верхніми розрізами; *в*) нижніми розрізами.

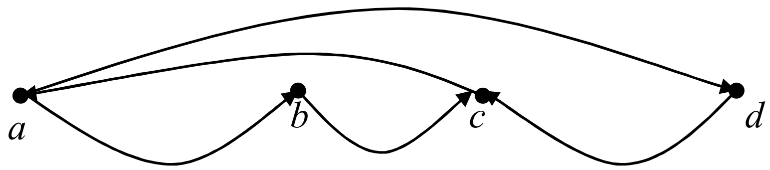


Рис. 2.8. Граф відношення R

6. Перевірити властивості записаних нижче відношень.

а) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; *б*) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; *г*) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Користуючись умовами завдання 6, *а – г*, визначити додаткові та обернені відношення.

8. Визначити перетин та об’єднання поданих нижче відношень.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Користуючись умовами завдання 6, *а – г*, побудувати відношення строгої переваги, еквівалентності, байдужості.

10. Знайти найбільший, найменший, максимальний і мінімальний елементи відношень із завдання 6, *а – г* (якщо такі існують).

11. Побудувати функцію вибору за даним відношенням переваги.

$$а)\ R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad б)\ R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Навести приклад симетричного й рефлексивного нечіткого відношення.

13. Навести приклад транзитивного й рефлексивного нечіткого відношення.

14. Задати за допомогою матриці нечіткі відношення: *а*) «приблизно дорівнює», *б*) «значно більше» на множині чисел від 1 до 6.

15. Знайти максимінну, мінімаксну та максмультиплікативну композиції нечітких відношень R_1 та R_2, які задано таким чином:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Які властивості має кожне з поданих нижче нечітких відношень:

$$а)\quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 1 & 0{,}9 \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad б)\quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 1 & 1 & 0{,}4 \end{pmatrix},$$

$$в)\ R_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 0.7 & 1 & 0.2 \\ 0.20 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}, \qquad г)\ R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 1 & 1 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

17. Нехай задано такі множини: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Відображення $\varphi : X \to Y$, задано таблицею.

	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	0
x_2	0	1	0

x_3	1	0	0
x_4	0	1	0
x_5	1	0	0
x_6	0	0	1
x_7	0	0	1

Знайти образ $\varphi(A)$ множини A при відображенні φ, якщо множину A задано таким чином:

$$A = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}8 & 1 & 1 & 0{,}9 \end{array}.$$

18. Нехай маємо такі множини: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Визначити множину $\varphi(A)$ при відображенні φ, якщо множину A задано в такому вигляді:

$$A = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}8 & 1 & 1 & 0{,}9 \end{array}.$$

а нечітке відображення $\varphi : X \to Y$, задано таблицею:

	y_1	y_2	y_3
x_1	0,7	0,5	0
x_2	0	1	0,9
x_3	0,8	0,6	0,5
x_4	0,7	0,3	0,9
x_5	1	0,7	0,6
x_6	0	0	1
x_7	0,2	0,7	1

19. Записати два нечітких відношення: $x\,R\,y$ та $z\,S\,y$, якщо:

$x \in X = \{$«знання вищої математики», «заучування напам'ять прикладів», «уміння списувати», «спритність», «здатність до кропіткої роботи»$\}$;

$y \in Y = \{$«скласти дисципліну на «відмінно»», «скласти дисципліну як-небудь»$\}$;

$z \in Z = \{$Іванюк, Єретнов, Притула, Голуб, Гапоненко$\}$;

$x\;R\;y -$ «x необхідне для y»;

$z\;S\;y -$ «z володіє x».

Обчислити композицію цих відношень і зробити висновки.

20. Записати такі нечіткі відношення: $x\,R\,y$ – «x товаришує з y», $y\,S\,z$ – «y віддає перевагу z», де універсальні множини X, Y – множини людей (може бути, що $X = Y$), Z – їхні вподобання.

Обчислити композицію цих відношень і перевірити правильність прислів'я: з ким поведешся, від того й наберешся.

21. Записати нечіткі відношення: $x\,R\,y$, $y\,S\,z$. Визначити їх максимінну та мінімаксну композиції і зробити висновки, якщо

$x\,R\,y$ – "x майстерно користується y",

$y\,S\,z$ – "y – основний інструмент z"

$x \in X$, X – множина людей;

$y \in Y = \{$ ручка, станок для гоління, ножиці, крейда$\}$;

$z \in Z = \{$ закрійник, письменник, перукар, учитель $\}$.

Завдання В

1. Опишіть за допомогою матриці відношення «об'єкт x вживає в їжу об'єкт y» на такій множині: A = {людина, тигр, шуліка, щука, баран, газель, пшениця, кабан, конюшина, польова миша, змія, жолудь, карась}. Які властивості характерні для даного відношення? Чи можна його назвати відношенням переваги? Еквівалентності? Відношенням порядку?

2. Задайте за допомогою матриці або графа відношення «операція x має виконуватись після операції y» на множині ремонтних робіт. Які властивості характерні для даного відношення? Чи можна його назвати відношенням переваги? Еквівалентності? Відношенням порядку?

РОЗДІЛ 3
НЕЧІТКІ ЧИСЛА ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

Мета розділу: вивчення понять нечіткої і лінгвістичної змінних, їх використання при описі об'єктів та явищ.

3.1. Нечіткі числа

Визначення 3.1. *Нечітким числом* називається нечітка змінна, визначена на числовий осі.

Тобто нечітке число визначають як нечітку множину на множині дійсних чисел R із функцією належності $\mu_A(x) \in [0;1]$, де $x \in R$.

Нечітке число називають *нормальним*, якщо $\max_{x \in R} \mu_A(x) = 1$.

Нечітке число A буде *опуклим*, якщо функція належності $\mu_A(x)$ задовольняє таку вимогу: для всіх значень $x \le y \le z$, буде правильною така нерівність:

$$\mu_A(y) \ge \mu_A(x) \wedge \mu_A(z). \tag{3.1}$$

Інакше це можна записати таким чином:

$$\mu_A(y) \ge \min\{\mu_A(x), \mu_A(z)\}, \text{ для всіх елементів } x \le y \le z. \tag{3.2}$$

Графічне подання опуклого нечіткого числа показано на рис. 3.1.

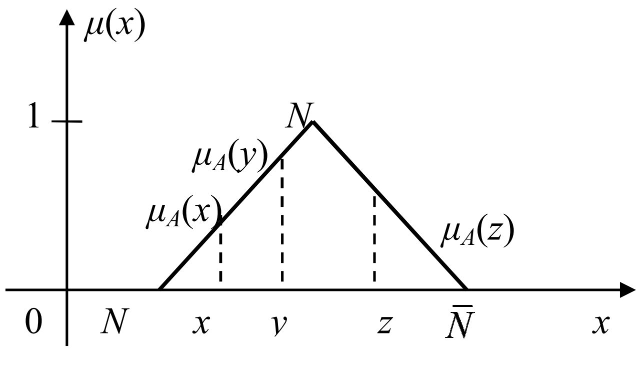


Рис. 3.1. Графічне подання опуклого нечіткого числа

Множину α-рівня нечіткого числа A визначають у такий спосіб:

$$A_\alpha = \{x | \mu_A(x) \ge \alpha\}. \tag{3.3}$$

Підмножину S_A називають носієм нечіткого числа *A*, якщо $S_A = \{ x | \mu_A(x) > 0 \}$.

Нечітке число *A* називають *унімодальним*, коли рівність: $\mu_A(x) = 1$, виконується тільки для однієї точки $x \in R$.

Опукле нечітке число *A* називають *нечітким нулем*, якщо

$$\mu_A(0) = \sup_{x \in R} \mu_A(x). \tag{3.4}$$

На рис. 3.2 показано приклади нечітких чисел, що являють собою нечіткі нулі.

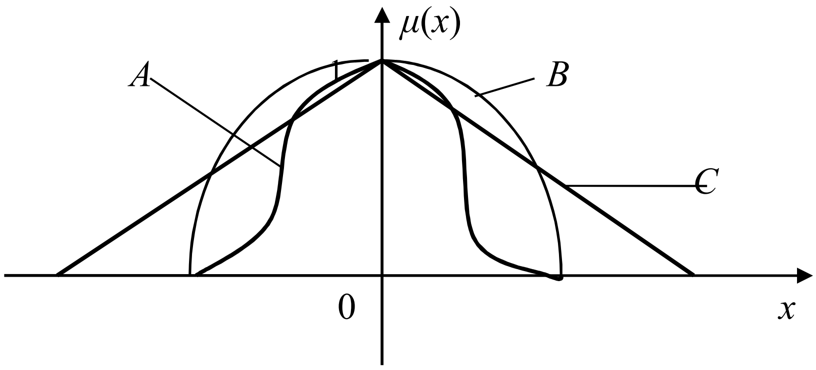


Рис. 3.2. Приклади нечітких нулів

Нечітке число *A* буде додатним, якщо $\forall x \in S_A$, і буде правильною така нерівність: $x > 0$, тобто $\inf S_A \geq 0$; і від'ємним, якщо $\forall x \in S_A$, і буде виконано таку нерівність $x < 0$, тобто $\sup S_A \leq 0$. На рис. 3.3 показано приклади нечітких чисел. Тут число *A* – від'ємне, число *B* – додатне. Обидва числа унімодальні.

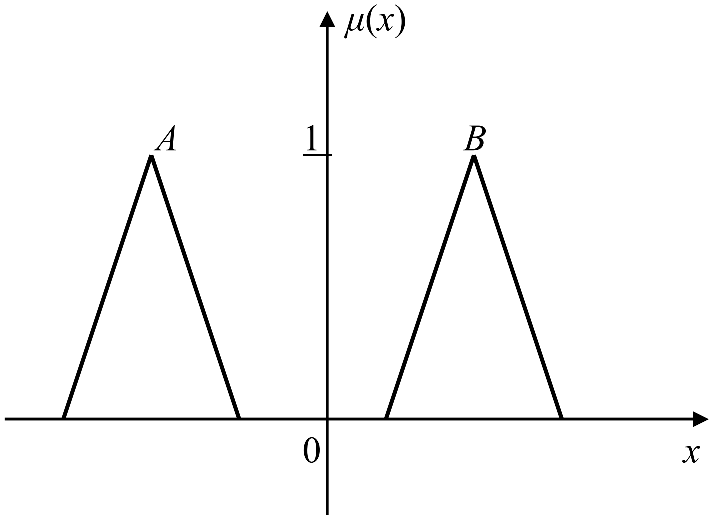


Рис. 3.3. Приклади від'ємного *A* та додатного *B* нечітких чисел

3.2. Операції над нечіткими числами

Розглянемо тепер операції над нечіткими числами (додавання, множення і под.) Існує два підходи для їх визначення. Перший полягає в застосуванні відповідних операцій, визначених для звичайних чисел, і принципу узагальнення.

Опишемо його детальніше. Нехай $A_1, A_2 \ldots A_n$ – нечіткі числа із носіями $S(A_1), S(A_2) \ldots S(A_n)$, а $g: R^1 \times R^1 \times \ldots \times R^1 \to R^1$ – деяка функція. Тоді, згідно з принципом узагальнення, нечітке число: $B = g(A_1, A_2 \ldots A_n)$, визначають такою функцією належності:

$$\mu_B(x) = \sup_{\substack{g(a_1, a_2, \ldots a_n) = x, \\ a_i \in S(A_i),\, i = 1, 2, \ldots n}} \min\left\{\mu_{A_1}(a_1), \mu_{A_2}(a_2), \ldots \mu_{A_n}(a_n)\right\} g(A_1, A_2 \ldots A_n). \quad (3.5)$$

Якщо g – функція одного аргументу, а A – нечітке число, то функція належності образу $g(A)$ має такий вигляд:

$$\mu_{g(A)}(x) = \begin{cases} \sup \mu_A(a), \text{якщо } g^{-1}(x) \neq \varnothing, \\ 0, \text{якщо } g^{-1}(x) = \varnothing. \end{cases} \quad (3.6)$$

Функції належності результатів застосування унарних операцій над нечіткими числами подано в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Унарні операції над нечіткими числами

Найменування операції	$g(x)$	$g(A)$	$\mu_g(A)(x)$
Множення на число	cx	cA	$\mu_A(x/c), c \neq 0$
Обернена величина	$1/x$	$1/A$	$\mu_A(1/x), x \neq 0$
Піднесення в степінь	x^c	A^c	$\mu_A\left(x^{\frac{1}{c}}\right), c \neq 0$
Експонента	e^x	e^A	$\mu_A(\log(x)), x > 0$
Тригонометрична	$\sin(x)$	$\sin(A)$	$\mu_A(\arcsin(x))$

Тепер визначимо основні бінарні арифметичні операції $(+; -; \times;\ :)$ над нечіткими числами *A* та *B*.

Нехай A та B – нечіткі числа.

Визначення 3.2. Суму $A+B$ нечітких чисел можна обчислити в такий спосіб:

$$\mu_{A+B}(z)=\max_{z=x+y}\min\left\{\mu_A(x);\ \mu_B(y)\right\}=\max_x\min\left\{\mu_A(x);\ \mu_B(z-x)\right\}. \quad (3.5)$$

Розглянемо виконання цієї операції на прикладі дискретних нечітких чисел.

Приклад 3.1. Припустимо задано два таких нечітких числа:

$$A=\left\{(1/0,1);(2/0,5)(3/0,8)(4/0,3)\right\},\ B=\left\{(5/0,5);(6/1);(7/0,7)\right\}.$$

Обчислимо суму цих чисел.

Розв'язування

Згідно з принципом узагальнення $\mu_{A+B}(z)=\max\limits_{z=x+y}\min\left\{\mu_A(x);\mu_B(y)\right\}$.

Спочатку визначимо носія суми цих чисел, тобто ті числа, які належать сумі із ненульовим ступенем. У нього увійдуть усі числа, які утворюються при додаванні чисел, котрі належать носіям чисел A та B, а саме:

$$S_{A+B}=\{6;7;8;9;10;11\}.$$

Визначимо тепер ступені належності кожного з них. Для цього розглянемо можливі комбінації, за допомогою яких отримані ці числа. На рис. 3.4. показано граф виконання операції додавання.

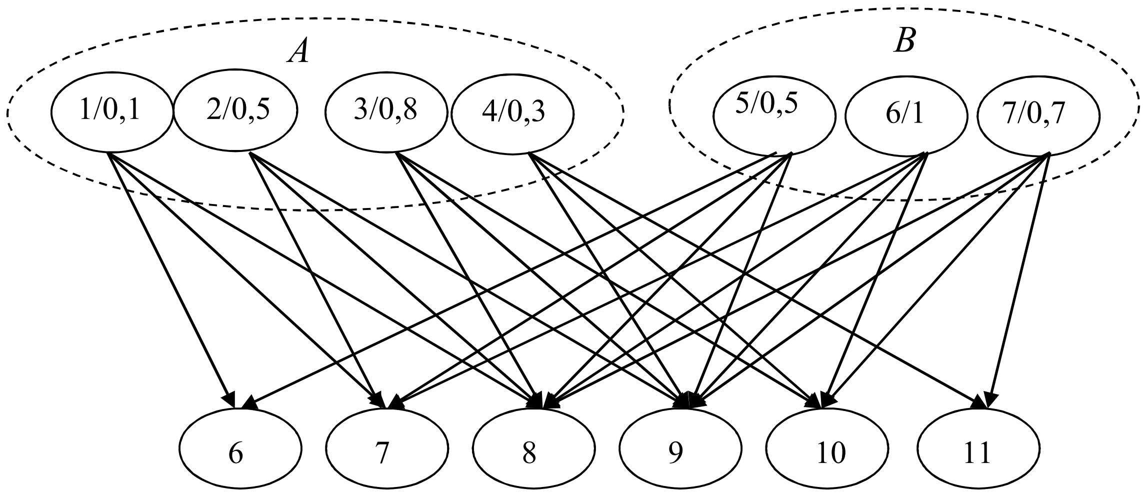


Рис. 3.4. Граф виконання операції додавання

Число 6 ми можемо отримати лише одним способом, тобто 6 = 1 + 5. Тоді його ступінь належності знаходимо таким чином:

$$\mu_{A+B}(6)=\min\left\{\mu_A(1);\ \mu_B(5)\right\}=\min\{0,1;\ 0,5\}=0,1.$$

Число 7 можемо одержати в такий спосіб: 7 = 1 + 6 та 7 = 2 + 5. Отже, маємо дві комбінації. Тоді

$$\mu_{A+B}(7)=\max\left\{\min\left\{\mu_A(1);\,\mu_B(6)\right\};\min\left\{\mu_A(2);\,\mu_B(5)\right\}\right\}=$$

$$=\max\left\{\min\{0,1;1\};\min\{0,5;\,0,5\}\right\}=\max\{0,1;\,0,5\}=0,5.$$

Аналогічно виконуємо подальші дії:

$$\mu_{A+B}(8)=\max\left\{\min\left\{\mu_A(1);\,\mu_B(7)\right\};\min\left\{\mu_A(2);\,\mu_B(6)\right\};\min\left\{\mu_A(3);\,\mu_B(5)\right\}\right\}=$$

$$=\max\left\{\min\{0,1;\,0,7\};\min\{0,5;1\};\min\{0,8;\,0,5\}\right\}=\max\{0,1;\,0,5;\,0,5\}=0,5;$$

$$\mu_{A+B}(9)=\max\left\{\min\left\{\mu_A(2);\,\mu_B(7)\right\};\min\left\{\mu_A(3);\,\mu_B(6)\right\};\min\left\{\mu_A(4);\,\mu_B(5)\right\}\right\}=$$

$$=\max\left\{\min\{0,5;\,0,7\};\min\{0,8;1\};\min\{0,3;\,0,5\}\right\}=\max\{0,5;\,0,8;\,0,3\}=0,8;$$

$$\mu_{A+B}(10)=\max\left\{\min\left\{\mu_A(3);\,\mu_B(7)\right\};\min\left\{\mu_A(4);\,\mu_B(6)\right\}\right\}=$$

$$=\max\left\{\min\{0,8;\,0,7\};\min\{0,3;1\}\right\}=\max\{0,7;\,0,3\}=0,7;$$

$$\mu_{A+B}(11)=\min\left\{\mu_A(4);\,\mu_B(7)\right\}=\min\{0,3;\,0,7\}=0,3.$$

Отже, $A+B=\left\{(6/0,1),(7/0,5),(8/0,5),(9/0,8),(10/0,7),(11/0,3)\right\}$.

Визначення 3.3. *Операцію різниці* нечітких чисел $A-B$ описано за допомогою такої формули:

$$\mu_{A-B}(z)=\max_{z=x-y}\,\min\left\{\mu_A(x);\,\mu_B(y)\right\}=\max_{y}\,\min\left\{\mu_A(z+y);\,\mu_B(y)\right\}. \quad (3.6)$$

Приклад 3.2. Обчислимо різницю $A-B$ нечітких чисел A та B з прикладу 3.1.

Розв'язування

Згідно з визначенням $\mu_{A-B}(z)=\max\limits_{z=x-y}\min\left\{\mu_A(x);\mu_B(y)\right\}$. Обчислимо ті значення z, які належать нечіткій різниці з ненульовим ступенем, а саме:

$$S_{A-B}=\{-6;-5;-4;-3;-2;-1\}.$$

Визначимо тепер ступені належності кожного з них. Оскільки (– 6) = 1 – 7 , то $\mu_{A-B}(-6)=\min\left\{\mu_A(1);\,\mu_B(7)\right\}=\min\{0,1;\,0,7\}=0,1$.

Число (– 5) можемо отримати таким чином: (– 5) = 1 – 6 та (–5) = 2 – 7. Отже, маємо дві комбінації. Тоді

$$\mu_{A-B}(-5) = \max\left\{\min\left\{\mu_A(1);\ \mu_B(6)\right\};\ \min\left\{\mu_A(2);\ \mu_B(7)\right\}\right\} =$$
$$= \max\left\{\min\{0{,}1;\ 1\};\ \min\{0{,}5;\ 0{,}7\}\right\} = \max\{0{,}1;\ 0{,}5\} = 0{,}5.$$

Аналогічно виконуємо подальші розрахунки:

$$\mu_{A-B}(-4) = \max\left\{\min\left\{\mu_A(1);\ \mu_B(5)\right\};\ \min\left\{\mu_A(2);\ \mu_B(6)\right\};\ \min\left\{\mu_A(3);\mu_B(7)\right\}\right\} =$$
$$= \max\left\{\min\{0{,}1;\ 0{,}5\};\ \min\{0{,}5;1\};\ \min\{0{,}8;\ 0{,}7\}\right\} = \max\{0{,}1;\ 0{,}5;\ 0{,}7\} = 0{,}7;$$

$$\mu_{A-B}(-3) = \max\left\{\min\left\{\mu_A(2);\ \mu_B(5)\right\};\ \min\left\{\mu_A(3);\ \mu_B(6)\right\};\ \min\left\{\mu_A(4);\ \mu_B(7)\right\}\right\} =$$
$$= \max\left\{\min\{0{,}5;\ 0{,}5\};\ \min\{0{,}8;\ 1\};\ \min\{0{,}3;\ 0{,}7\}\right\} = \max\{0{,}5;\ 0{,}8;\ 0{,}3\} = 0{,}8;$$

$$\mu_{A-B}(-2) = \max\left\{\min\left\{\mu_A(3);\ \mu_B(5)\right\};\min\left\{\mu_A(4);\ \mu_B(6)\right\}\right\} =$$
$$= \max\left\{\min\{0{,}8;\ 0{,}5\};\min\{0{,}3;\ 1\}\right\} = \max\{0{,}5;\ 0{,}3\} = 0{,}5;$$

$$\mu_{A+B}(-1) = \min\left\{\mu_A(4);\ \mu_B(5)\right\} = \min\{0{,}3;\ 0{,}5\} = 0{,}3.$$

Отже,
$A - B = \{(-6\ /\ 0{,}1);(-5\ /\ 0{,}5);(-4\ /\ 0{,}7);(-3\ /\ 0{,}8);(-2\ /\ 0{,}5);(-1\ /\ 0{,}3)\}$.

Зауважимо, що в результаті операції отримали від'ємне нечітке число.

Визначення 3.4. Операцію множення $A \times B$ двох нечітких чисел задають таким чином:

$$\mu_{A\times B}(z) = \begin{cases} \max\limits_{x\neq 0} \min\left\{\mu_A(x);\ \mu_B\left(\dfrac{z}{x}\right)\right\}, \text{ якщо } z \neq 0; \\ \max\left\{\mu_A(0);\ \mu_B(0)\right\}, \text{ якщо } z = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Приклад 3.3. Розглянемо виконання операції множення таких дискретних нечітких чисел:

$$A = \{(2\ /\ 0{,}8);(3\ /\ 1);(4\ /\ 0{,}8)\}, \quad B = \{(5\ /\ 0{,}5);(6\ /\ 1);(7\ /\ 0{,}7)\}.$$

Розв'язування

Носії чисел A та B не містять нуля, отже, будемо використовувати формулу: $\mu_{A\times B}(z) = \max\limits_{z=xy} \min\left\{\mu_A(x);\ \mu_B(y)\right\}$.

Визначимо носія нечіткого числа $A \times B$, а саме:

$$S_{A\times B} = \{10;12;14;15;18;20;21;24;28\}.$$

Тепер визначимо ступені належності кожного з чисел, тобто

$$\mu_{A\times B}(10) = \min\left\{\mu_A(2);\ \mu_B(5)\right\} = \min\{0{,}8;\ 0{,}5\} = 0{,}5;$$

$$\mu_{A\times B}(12)=\min\{\mu_A(2);\ \mu_B(6)\}=\min\{0,8;1\}=0,8;$$

$$\mu_{A\times B}(14)=\min\{\mu_A(2);\ \mu_B(7)\}=\min\{0,8;\ 0,7\}=0,7;$$

$$\mu_{A\times B}(15)=\min\{\mu_A(3);\ \mu_B(5)\}=\min\{1;\ 0,5\}=0,5;$$

$$\mu_{A\times B}(18)=\min\{\mu_A(3);\ \mu_B(6)\}=\min\{1;1\}=1;$$

$$\mu_{A\times B}(20)=\min\{\mu_A(4);\ \mu_B(5)\}=\min\{0,8;\ 0,5\}=0,5;$$

$$\mu_{A\times B}(21)=\min\{\mu_A(3);\ \mu_B(7)\}=\min\{1;\ 0,7\}=0,7;$$

$$\mu_{A\times B}(24)=\min\{\mu_A(4);\ \mu_B(6)\}=\min\{0,8;1\}=0,8;$$

$$\mu_{A\times B}(28)=\min\{\mu_A(4);\ \mu_B(7)\}=\min\{0,8;\ 0,7\}=0,7\ .$$

Отже,

$$A\times B=\{\ (10/0,5);(12/0,8);(14/0,7);(15/0,5);(18/1);$$
$$(20/0,5);(21/0,7);(24/0,8);(28/0,7)\ \}.$$

Визначення 3.5. Частку $A:B$ двох нечітких чисел обчислюють за допомогою такої формули:

$$\mu_{A:B}(z)=\max_{z=\frac{x}{y},y\neq 0}\min\{\mu_A(x);\ \mu_B(y)\}=\max_{y}\min\{\mu_A(zy);\ \mu_B(y)\}. \qquad (3.8)$$

Приклад 3.4. Розглянемо виконання цієї операції над дискретними нечіткими числами A та B прикладу 3.3. Обчислимо частку цих чисел.

Розв'язування

Згідно з принципом узагальнення $\mu_{A:B}(z)=\max\limits_{z=\frac{x}{y},y\neq 0}\min\{\mu_A(x);\mu_B(y)\}$.

Носій частки цих чисел буде мати такий вигляд:

$$S_{A:B}=\left\{\frac{2}{7};\frac{2}{6};\frac{2}{5};\frac{3}{7};\frac{3}{6};\frac{3}{5};\frac{4}{7};\frac{4}{6};\frac{4}{5}\right\}.$$

А нечітка множина

$$A:B=\left\{\left(\frac{2}{7}/0,7\right);\left(\frac{2}{6}/0,8\right);\left(\frac{2}{5}/0,5\right);\left(\frac{3}{7}/0,7\right);\left(\frac{3}{6}/1\right);\left(\frac{3}{5}/0,5\right);\left(\frac{4}{7}/0,7\right);\right.$$
$$\left.\left(\frac{4}{6}/0,8\right);\left(\frac{4}{5}/0,5\right)\right\}.$$

Приклад 3.5. Нечіткі числа A та B описуються такими функціями належності:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, \text{якщо } 0<x\le 2,\\ \dfrac{4-x}{2}, \text{ якщо } 2<x<4,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 4.\end{cases} \qquad \mu_B(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 3,\\ \dfrac{x-3}{2}, \text{ якщо } 3<x\le 5,\\ \dfrac{5-x}{2}, \text{ якщо } 5<x<7,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 7.\end{cases}$$

Визначимо суму та різницю цих чисел.

Розв'язування

Суму ($A + B$) нечітких чисел A та B будемо обчислювати за таким правилом:

$$\mu_{A+B}(z)=\max_{z=x+y}\min\{\mu_A(x);\mu_B(y)\}.$$

Носій нечіткого числа ($A + B$) буде являти собою інтервал [3;11]. А функція належності набуватиме такого вигляду:

$$\mu_{A+B}(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 3,\\ \dfrac{x-3}{4}, \text{ якщо } 3<x\le 7,\\ \dfrac{11-x}{4}, \text{ якщо } 7<x<11,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 11.\end{cases}$$

Різницю ($B – A$) нечітких чисел B та A обчислимо за формулою (3.6), а саме:

$$\mu_{B-A}(z)=\max_{z=y-x}\min\{\mu_A(x);\mu_B(y)\}.$$

Носій нечіткого числа ($B – A$) буде являти собою інтервал [–1;7], функція належності різниці ($B – A$) матиме такий вигляд:

$$\mu_{A+B}(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le -1,\\ \dfrac{x+1}{4}, \text{ якщо } -1<x\le 3,\\ \dfrac{7-x}{4}, \text{ якщо } 3<x<7,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 7.\end{cases}$$

Графіки функцій належності даних нечітких чисел, їх суми та різниці показано рис. 3.5.

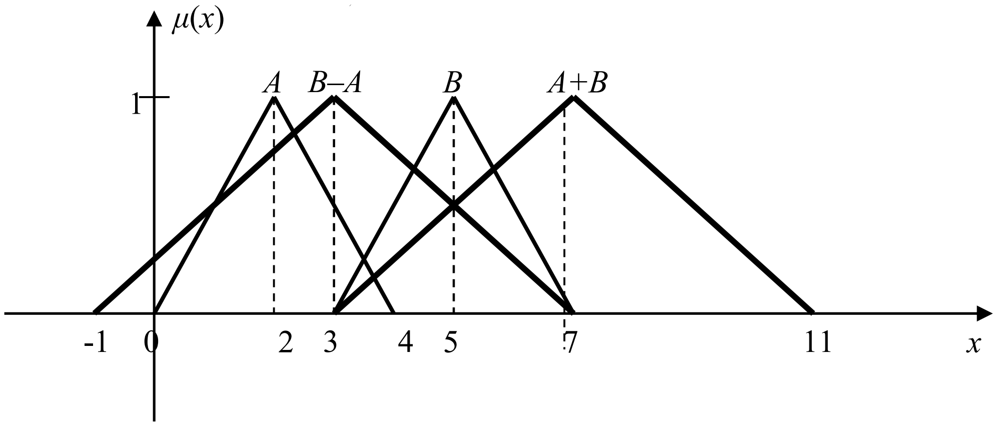


Рис. 3.5. Графічне подання суми $(A+B)$ та різниці $(B-A)$ нечітких чисел A та B

Зауважимо, що функції належності добутку та частки нечітких чисел, визначені за цим підходом, будуть нелінійними навіть коли функції належності вихідних чисел лінійні.

В основу другого підходу до визначення операцій над нечіткими числами покладено їх розкладання на множини рівня. Розглянемо цей підхід.

Кожне нечітке число можна подати за допомогою множин рівня у такому вигляді: $A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha$, де $A_\alpha = \{x \in R \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} = \left[a_1^\alpha; a_2^\alpha\right]$.

Тоді операції над нечіткими числами можуть бути описані таким чином:

1. Додавання

$$A + B = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} \left(A + B\right)_\alpha = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} \left[a_1^\alpha + b_1^\alpha ; a_2^\alpha + b_2^\alpha\right].$$

2. Різниця

$$A - B = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} \left(A - B\right)_\alpha = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} \left[a_1^\alpha - b_2^\alpha ; a_2^\alpha - b_1^\alpha\right],$$

оскільки нечітке число $-B = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} \left[-b_2^\alpha ; -b_1^\alpha\right]$.

3. Добуток

$$AB = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} \left(AB\right)_\alpha = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} \left[a_1^\alpha b_1^\alpha ; a_2^\alpha b_2^\alpha\right].$$

4. Частка $A:B=\bigcup\limits_{\alpha\in[0;1]}\left(A:B\right)_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\in[0;1]}\left[\frac{a_1^\alpha}{b_2^\alpha};\frac{a_2^\alpha}{b_1^\alpha}\right]$, враховуючи, що нечітке число $B^{-1}=\frac{1}{B}=\bigcup\limits_{\alpha\in[0;1]}\left[\frac{1}{b_2^\alpha};\frac{1}{b_1^\alpha}\right]$.

На завершення сформулюємо деякі властивості операцій над нечіткими числами.

1. У загальному випадку число (–A) не буде протилежним до числа A, тобто $\left(-A\right)+A\neq 0$.

2. Число $\frac{1}{A}$ не є зворотнім до числа A, тобто $\frac{1}{A}\times A\neq 1$.

3. Операції додавання і множення комутативні й асоціативні, але в загальному випадку не є дистрибутивними, тобто

$$A+B=B+A,\qquad A\times B=B\times A;$$

$$\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right),\quad \left(A\times B\right)\times C=A\times\left(B\times C\right);$$

$$A\times\left(B+C\right)=A\times B+A\times C;$$

$$A-B=A+\left(-B\right);\qquad \left(-A\right)\times B=A\times\left(-B\right)=-\left(A\times B\right).$$

4. Властивість дистрибутивності буде виконуватись у таких випадках:
а) A – дійсне число;
б) B та C або обидва від’ємні, або обидва додатні;
в) та C – симетричні нечіткі числа (тобто $B = -B$, $C = -C$).

5. Основні властивості операцій max і min:
а) $\min\left(A,B\right)+\max\left(A,B\right)=A+B$;
б) $A+\min\left(B,C\right)=\min\left(A+B,A+C\right)$;
в) $A+\max\left(B,C\right)=\max\left(A+B,A+C\right)$.

Ці властивості зумовлюють неоднозначність при розв’язуванні практичних задач, зокрема рівнянь із застосуванням нечітких чисел. Тому визначено додаткові операції віднімання та ділення, про які докладніше можна прочитати в літературі [35, 44]. Для того, щоб уникнути таких проблем, доцільно застосовувати нечітку арифметику на нечітких числах (L–R)-типу.

3.3. Нечіткі числа (*L*–*R*)-типу

Як бачимо із наведених у попередньому параграфі прикладів, у загальному випадку функція належності нечіткого числа може і не мати аналітичного вигляду. Тому для полегшення обчислень під час виконання арифметичних операцій із нечіткими числами зручно використовувати аналітичне подання нечітких чисел за допомогою *(L–R)-відображень.*

Визначення 3.6. (*L–R*)-відображення це пара відображень $L, R : (-\infty;+\infty) \to (0;1)$, де $L(x)$ і $R(x)$ – дві функції, задані на множині дійсних чисел, що набувають значення з інтервалу $(0;1)$, не зростають на множині невід'ємних чисел і задовольняють такі умови:

а) $L(-x) = L(x)$, $R(-x) = R(x)$;

б) $L(0) = R(0) = 1$.

Очевидно, що до класу (*L–R*)-функцій відносять функції, графіки яких мають вигляд, показаний на рис. 3.8.

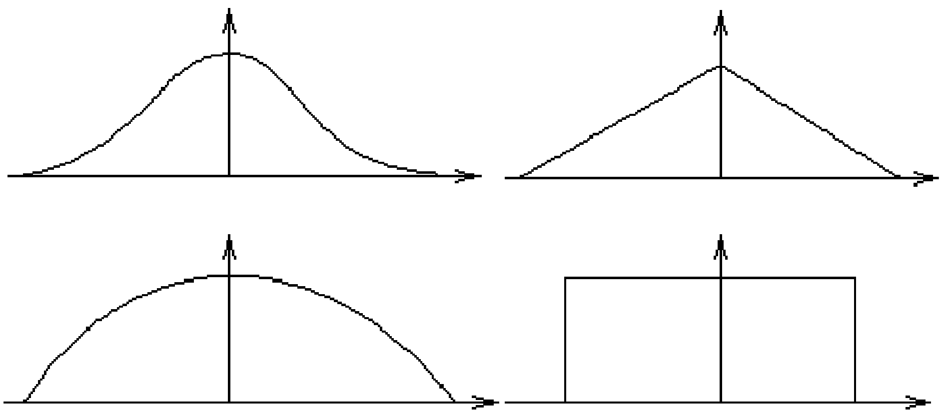


Рис. 3.8. Приклади графіків (*L–R*)-функцій

Прикладами аналітичного задання (*L-R*)-функцій можуть бути такі:

$$L(x) = e^{-|x|^p}, \quad p > 0;$$

$$R(x) = \frac{1}{1+|x|^p}, \quad p > 0 \text{ і т. д.}$$

Визначення 3.7. *Нечітке число (L–R)-типу* – це нечітка величина, функцію належності якої задано у вигляді композиції функцій (*L–R*)-відображення, а саме:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), & x \le a; \\ R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right), & x \ge a. \end{cases}$$

Тут параметр a є модою (модальним значенням нечіткого числа); $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – лівий та правий коефіцієнти нечіткості відповідно, які визначають конкретний вигляд функції належності: $L(x)$ ліворуч від моди a, та $R(x)$ – праворуч від моди a (звідси і назва *Left-Right*).

Отже, коли конкретний вигляд функцій $L(x)$ та $R(x)$ задано, нечітке унімодальне число задають трійкою параметрів, а саме: $A = (a, \alpha, \beta)$. Це істотно спрощує арифметичні операції з такими числами.

Толерантне нечітке число задають, відповідно, четвіркою параметрів, тобто $A = (a_1, a_2, \alpha, \beta)$, де a_1 і a_2 – границі толерантності, отже, на проміжку $[a_1; a_2]$ значення функції належності дорівнює 1.

Зауважимо, що в конкретних ситуаціях функції $L(y)$, $R(y)$, а також параметри α, β нечітких чисел (a, α, β) й $(a_1, a_2, \alpha, \beta)$ необхідно підбирати таким чином, аби результат операції (додавання, віднімання, множення, ділення і под.) точно або приблизно дорівнював нечіткому числу із такими самими функціями $L(y)$ й $R(y)$, а параметри α', β' результату задовольняли б обмеження на ті самі параметри для вихідних нечітких чисел, особливо, коли результат надалі також буде піддаватися операціям.

Відзначимо, що розв'язування задач моделювання складних систем із використанням апарату нечітких множин потребує виконання великої кількості операцій над лінгвістичними та іншими нечіткими змінними. Тому для зручності реалізації таких операцій, а також для введення-виведення і зберігання даних, бажано працювати із функціями належності стандартного вигляду.

Приклади графіків функцій належності нечітких чисел (L-R)-типу показано на рис. 3.9.

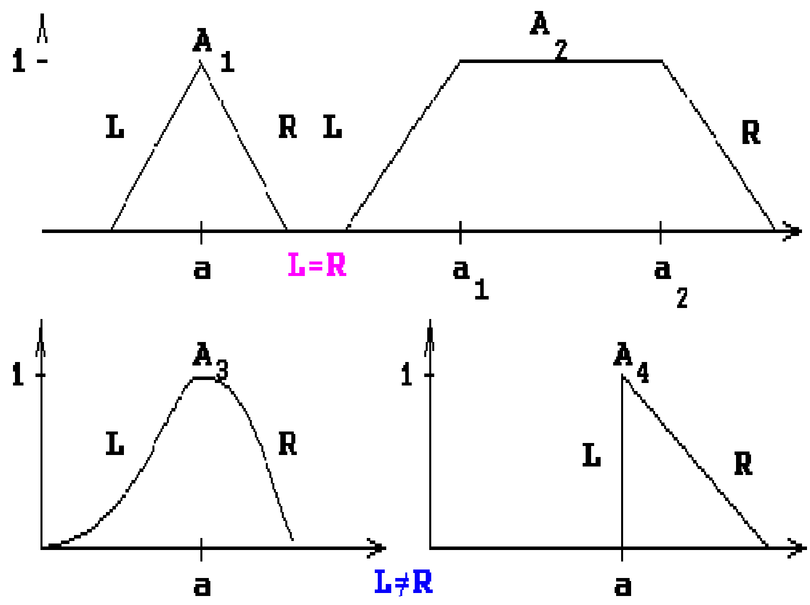


Рис. 3.9. Графіки функцій належності нечітких чисел (L–R)-типу

Толерантні нечіткі числа називають *трапецоїдними числами, або інтервалами* (ТНІ). Коли ми робимо якісну оцінку деякого параметра, наприклад, стосовно нього висунуто припущення «це значення параметра є середнім», то необхідно зробити уточнення типу «середнє значення це приблизно від a_1 до a_2». У цьому разі для моделювання можна використовувати нечіткі трапецоїдні числа.

Унімодальні нечіткі числа (L–R)-типу називають *трикутними числами* (ТНЧ). Вони формалізують поняття «приблизно дорівнює a». Очевидно, що $a \pm \delta \approx a$, причому із зменшенням параметра δ до нуля ступінь упевненості в оцінці зростає до одиниці. Трикутні числа – це найчастіше використовуваний тип нечітких чисел, здебільшого їх застосовують як прогнозні значення параметра.

Нечіткі множини, якими необхідно оперувати в більшості задач, є унімодальними і нормальними. Одним із можливих методів апроксимації унімодальних нечітких множин і є апроксимація за допомогою функцій (L–R)-типу. У табл. 3.2 наведено приклади (L–R)-подання деяких лінгвістичних змінних.

Таблиця 3.2

(L–R)-подання деяких лінгвістичних змінних

Терм лінгвістичної змінної (ЛЗ)	(L–R)-подання
Середній	$A = (a, \alpha, \beta)_{LR}$, $\alpha = \beta > 0$
Малий	$A = (a, \infty, \beta)_{LR}$, $\alpha = \infty$
Великий	$A = (a, \alpha, \infty)_{LR}$, $\beta = \infty$
Приблизно в діапазоні	$A = (a_1, a_2, \alpha, \infty)_{LR}$, $\alpha = \beta > 0$
Визначений	$A = (a, 0, 0)_{LR}$, $\alpha = \beta = 0$
Різноманітний, зона повної невизначеності	$A = (a, \infty, \infty)_{LR}$, $\alpha = \beta = \infty$

Якщо визначати відповідно до принципу узагальнення арифметичні операції над (L–R)-числами $A_1 = \langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle$ та $A_2 = \langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle$, то необхідно виходити з припущення, що і вихідні нечіткі числа, і результат такої операції: $A_3 = \langle a_3, \alpha_3, \beta_3 \rangle$, описують за допомогою одного і того самого (L–R)-відображення. Тоді для унімодальних нечітких чисел будемо мати такі правила перетворення:

1. Додавання нечітких чисел $A_1 = \langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle$ та $A_2 = \langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle$:

$$\langle a_3, \alpha_3, \beta_3 \rangle = \langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle + \langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle = \langle a_1 + a_2, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2 \rangle. \quad (3.8)$$

2. Різниця нечітких чисел $A_1 = \langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle$ і $A_2 = \langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle$:

$$\left\langle a_3, \alpha_3, \beta_3 \right\rangle = \left\langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \right\rangle - \left\langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \right\rangle = \left\langle a_1 - a_2, \alpha_1 + \beta_2, \beta_1 + \alpha_2 \right\rangle. \quad (3.9)$$

3. Добуток

а) додатних нечітких чисел: $A_1 = \left\langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \right\rangle$ та $A_2 = \left\langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \right\rangle$:

$$\left\langle a_3, \alpha_3, \beta_3 \right\rangle = \left\langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \right\rangle \cdot \left\langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \right\rangle = \left\langle a_1 a_2,\ a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1,\ a_1\beta_2 + a_2\beta_1 \right\rangle; \quad (3.10)$$

б) від'ємного нечіткого числа: $A_1 = \left\langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \right\rangle$ і додатного нечіткого числа $A_2 = \left\langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \right\rangle$:

$$\left\langle a_3, \alpha_3, \beta_3 \right\rangle = \left\langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \right\rangle \cdot \left\langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \right\rangle = \left\langle a_1 a_2,\ a_2\alpha_1 - a_1\beta_2,\ a_2\beta_1 - a_1\alpha_2 \right\rangle; \quad (3.11)$$

в) від'ємних нечітких чисел: $A_1 = \left\langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \right\rangle$ та $A_2 = \left\langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \right\rangle$:

$$\left\langle a_3,\alpha_3,\beta_3 \right\rangle = \left\langle a_1,\alpha_1,\beta_1 \right\rangle \cdot \left\langle a_2,\alpha_2,\beta_2 \right\rangle = \left\langle a_1 a_2, (-a_1\beta_2 - a_2\beta_1), (-a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1) \right\rangle; \quad (3.12)$$

4. Частка додатних нечітких чисел: $A_1 = \left\langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \right\rangle$ та $A_2 = \left\langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \right\rangle$:

$$\left\langle a_3, \alpha_3, \beta_3 \right\rangle = \left\langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \right\rangle : \left\langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \right\rangle = \left\langle \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_1\beta_2 + a_2\alpha_1}{a_2^2}, \frac{a_1\alpha_2 + a_2\beta_1}{a_2^2} \right\rangle. \quad (3.13)$$

5. Зворотне значення додатного нечіткого числа: $A_1 = \left\langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \right\rangle$:

$$\left\langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \right\rangle^{-1} = \left\langle \frac{1}{a_1}, \frac{\beta_1}{a_1^2}, \frac{\alpha_1}{a_1^2} \right\rangle. \quad (3.14)$$

Аналогічно можна визначити операції і над толерантними нечіткими числами,як це описано в літературі [38, 45].

Приклад 3.6. Описати у вигляді функцій належності й подати графічну інтерпретацію таких нечітких (*L-R*)-чисел: $A_1 = \left\langle 3; 2; 3 \right\rangle$ та $A_2 = \left\langle 4; 3; 2 \right\rangle$. Визначити їх суму, добуток, частку і різницю. Результат подати у вигляді нечіткого (*L–R*)-числа, функції належності й графічно, якщо

$$L(x) = \begin{cases} 1 - |x|, \text{ якщо } -1 < x \le 1, \\ 0 \text{ в інших випадках;} \end{cases} \qquad R(x) = \begin{cases} 1 - x^2, \text{ якщо } -1 < x \le 1, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Розв'язування

Опишемо вихідні функції належності нечітких чисел A_1 та A_2:

$$\mu_{A_1}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{x-a_1}{\alpha_1}\right), \text{ якщо } a_1-\alpha_1 \le x \le a_1, \\ R\left(\dfrac{a_1-x}{\beta_1}\right), \text{ якщо } a_1 \le x \le a_1+\beta_1, \\ 0 \text{ в інших випадках;} \end{cases} = \begin{cases} 1-\left|\dfrac{x-3}{2}\right|, \text{ якщо } 1 \le x \le 3, \\ 1-\left(\dfrac{3-x}{3}\right)^2, \text{ якщо } 3 < x \le 6, \\ 0 \text{ в інших випадках;} \end{cases}$$

$$\mu_{A_2}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{x-a_2}{\alpha_2}\right), \text{ якщо } a_2-\alpha_2 \le x \le a_2, \\ R\left(\dfrac{a_2-x}{\beta_2}\right), \text{ якщо } a_2 \le x \le a_2+\beta_2, \\ 0 \text{ в інших випадках;} \end{cases} = \begin{cases} 1-\left|\dfrac{x-4}{3}\right|, \text{ якщо } 1 \le x \le 4, \\ 1-\left(\dfrac{4-x}{2}\right)^2, \text{ якщо } 4 < x \le 6, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Графічну інтерпретацію цих чисел показано на рис. 3.10.

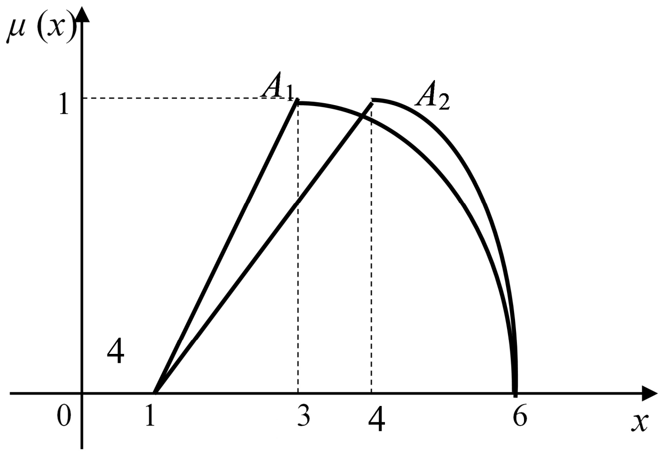


Рис. 3.10. Графічне подання вихідні нечітких (L–R)-чисел

За правилами і вихідні нечіткі числа, і результат операції, тобто $A_3=\langle a_3,\alpha_3,\beta_3\rangle$ описують за допомогою одного й того самого (L–R)-відображення. Тоді для даних нечітких чисел будемо мати такі результати:

1. Сума нечітких чисел $A_1=\langle 3;2;3\rangle$ й $A_2=\langle 4;3;2\rangle$ згідно з формулою (3.8),

$$A_1 + A_2 = \langle 3; 2; 3 \rangle + \langle 4; 3; 2 \rangle = \langle 3+4; 2+3; 3+2 \rangle = \langle 7; 5; 5 \rangle.$$

Функція належності отриманого нечіткого числа має такий вигляд:

$$\mu_{A_1 + A_2}(x) = \begin{cases} 1 - \left| \dfrac{x-7}{5} \right|, \text{ якщо } 2 \le x \le 7, \\ 1 - \left(\dfrac{7-x}{5} \right)^2, \text{ якщо } 7 < x \le 12, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Графік функції належності суми подано на рис. 3.11

2. Різницю нечітких чисел: $A_1 = \langle 3; 2; 3 \rangle$ та $A_2 = \langle 4; 3; 2 \rangle$, обчислюємо за формулою (3.9), а саме:

$$A_1 - A_2 = \langle 3; 2; 3 \rangle - \langle 4; 3; 2 \rangle = \langle 3-4; 2+2; 3+3 \rangle = \langle -1; 4; 6 \rangle.$$

Функцію належності отриманого нечіткого числа подано нижче. А її графік показано на рис. 3.11.

$$\mu_{A_1 - A_2}(x) = \begin{cases} 1 - \left| \dfrac{x+1}{4} \right|, \text{ якщо } -5 \le x \le -1, \\ 1 - \left(\dfrac{-1-x}{6} \right)^2, \text{ якщо } -1 < x \le 5, \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

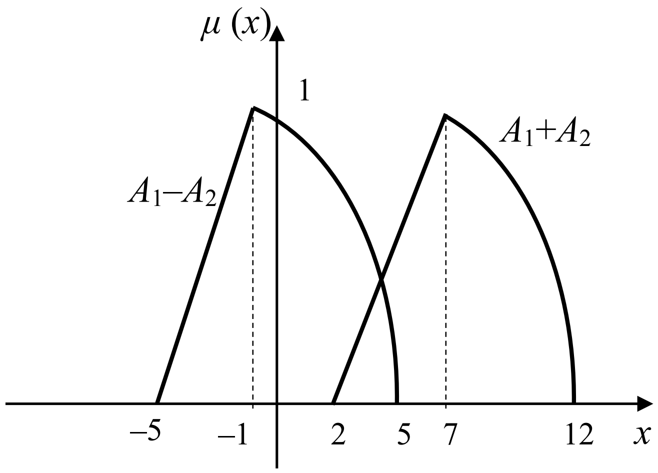


Рис. 3.11. Графічне подання суми та різниці нечітких (L–R)-чисел: $A_1 = \langle 3; 2; 3 \rangle$ та $A_2 = \langle 4; 3; 2 \rangle$

3. Вихідні нечіткі числа є додатними, тому для визначення їхнього добутку скористаємося формулою (3.10), а саме:

$$A_1 A_2 = \langle 3;2;3 \rangle \cdot \langle 4;3;2 \rangle = \langle 3\cdot 4; 3\cdot 3 + 4\cdot 2; 3\cdot 2 + 4\cdot 3 \rangle = \langle 12;17;18 \rangle .$$

Аналітичний запис функції належності набуде такого вигляду:

$$\mu_{A_1 \cdot A_2}(x) = \begin{cases} 1 - \left| \dfrac{x-12}{17} \right|, \text{ якщо } -5 \le x \le 12, \\ 1 - \left(\dfrac{12-x}{18} \right)^2, \text{ якщо } 12 < x \le 30, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Відповідний графік показано на рис. 3.12.

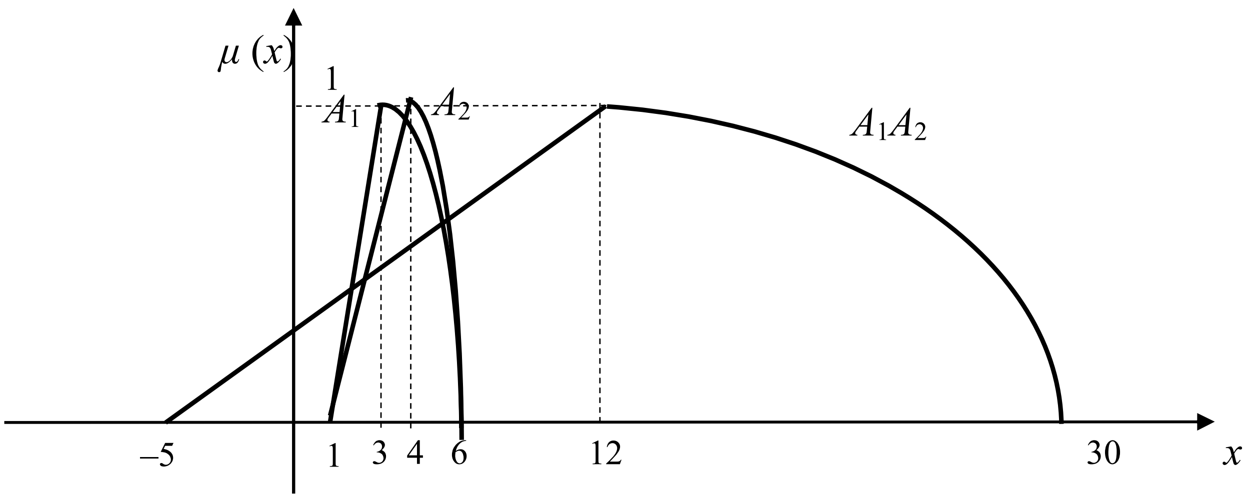


Рис. 3.12. Графічне подання добутку нечітких чисел: $A_1 = \langle 3;2;3 \rangle$ та $A_2 = \langle 4;3;2 \rangle$

4. Частку додатних нечітких чисел: $A_1 = \langle 3;2;3 \rangle$ та $A_2 = \langle 4;3;2 \rangle$, визначимо за формулою (3.13), тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\langle 3;2;3 \rangle}{\langle 4;3;2 \rangle} = \left\langle \frac{3}{4}; \frac{3\cdot 2 + 4\cdot 2}{4^2}; \frac{3\cdot 3 + 4\cdot 3}{4^2} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{4}; \frac{14}{16}; \frac{21}{16} \right\rangle .$$

Функція належності частки буде мати такий вигляд:

$$\mu_{A_1}(x)=\begin{cases}1-\left|\dfrac{8x-6}{7}\right|, \text{ якщо } -\dfrac{1}{8}\le x\le\dfrac{3}{4},\\ 1-\left(\dfrac{12-16x}{21}\right)^2, \text{ якщо } \dfrac{3}{4}<x\le\dfrac{33}{16},\\ 0 \text{ в інших випадках.}\end{cases}$$

а її графічне подання можна побачити на рис. 3.13.

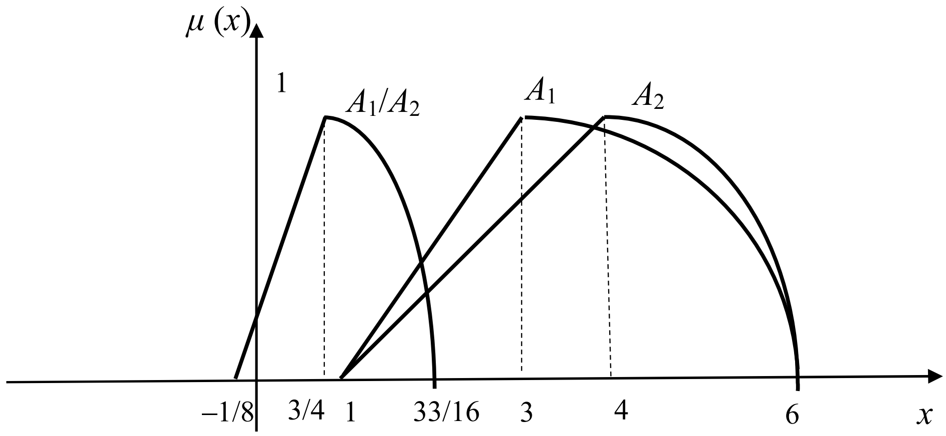


Рис. 3.13. Графічне подання частки нечітких (L–R)-чисел

5. Знайдемо обернене значення додатного нечіткого (L–R)-числа: $A_1=\langle 3;\,2;\,3\rangle$, за формулою (3.14), а саме:

$$\langle 3;\,2;\,3\rangle^{-1}=\left\langle \frac{1}{3};\,\frac{3}{3^2};\,\frac{2}{3^2}\right\rangle=\left\langle \frac{1}{3};\,\frac{1}{3};\,\frac{2}{9}\right\rangle.$$

Функція належності цього числа має такий вигляд:

$$\mu_{A_1^{-1}}(x)=\begin{cases}3x, \text{ якщо } 0\le x\le\dfrac{1}{3},\\ 1-\left(\dfrac{3-9x}{2}\right)^2, \text{ якщо } \dfrac{1}{3}<x\le\dfrac{5}{9},\\ 0 \text{ в інших випадках.}\end{cases}$$

Її графік подано на рис. 3.14.

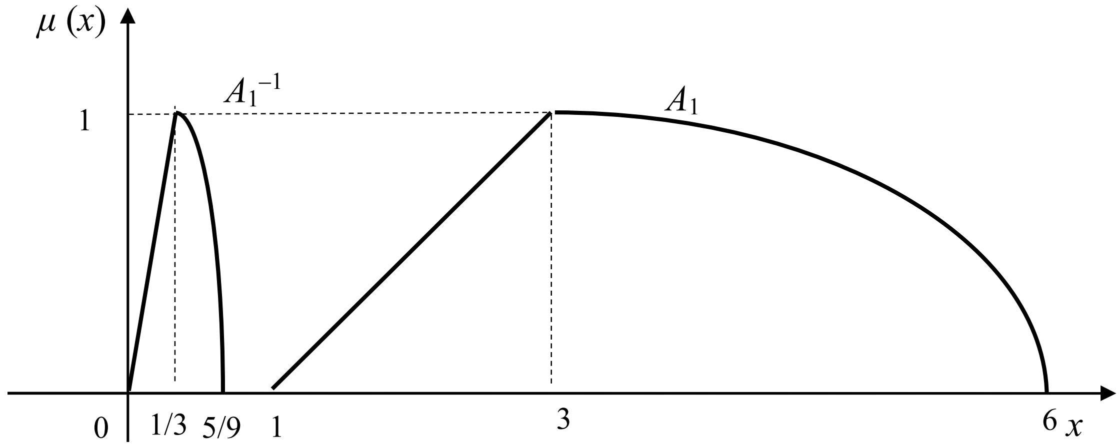


Рис. 3.14. Графічне подання числа, зворотного до нечіткого числа A_1

3.4. Інтервальна арифметика Каухера

Визначення 3.8. *Правильними* інтервалами називають множини такого вигляду: $[\underline{x},\overline{x}]$, коли $\underline{x},\overline{x} \in R, \underline{x} \le \overline{x}$. Якщо $\underline{x} > \overline{x}$, то інтервал називають *неправильним.*

Множину всіх правильних інтервалів позначимо iR, тобто

$$iR = \{x = [\underline{x},\overline{x}] : \underline{x},\overline{x} \in R, \underline{x} \le \overline{x}\}. \tag{3.15}$$

У разі, коли $\underline{x} = \overline{x}$, інтервал буде *виродженим*. Вочевидь, множина вироджених інтервалів збігається з множиною дійсних чисел R.

Повна інтервальна арифметика Каухера є алгебраїчною системою $\langle IR, \mathrm{dual}, \mathrm{pro}, +, -, \cdot, / \rangle$, носій якої – множина всіх дійсних інтервалів, а саме: $IR = \{x = [\underline{x},\overline{x}] : \underline{x},\overline{x} \in R\}$.

Множину IR отримують приєднанням неправильних інтервалів $\{x = [\underline{x},\overline{x}] : \underline{x},\overline{x} \in R, \underline{x} > \overline{x}\}$ до множини iR правильних інтервалів: $iR = \{x = [\underline{x},\overline{x}] : \underline{x},\overline{x} \in R, \underline{x} \le \overline{x}\}$, та дійсних чисел R – вироджених інтервалів: $R = \{x = [\underline{x},\overline{x}] : \underline{x},\overline{x} \in R, \underline{x} = \overline{x}\}$.

Отже, $IR = \{x = [\underline{x},\overline{x}] : \underline{x},\overline{x} \in R, \underline{x} > \overline{x}\} \cup iR \cup R$

Правильні та неправильні інтервали обмінюються місцями унаслідок операції *дуалізації*, тобто

$$\mathrm{dual}\, x = [\overline{x}; \underline{x}],\ \forall x = [\underline{x},\overline{x}] \in IR.$$

Визначення 3.9. *Правильною проекцією* інтервалу: $x = [\underline{x}, \overline{x}] \in IR$, називається така величина:

$$\text{pro}\ x = \begin{cases} [\underline{x}, \overline{x}], \text{ якщо інтервал } x \text{ правильний;} \\ \text{dual}\ x = [\overline{x}, \underline{x}], \text{ якщо інтервал } x \text{ не правильний.} \end{cases}$$

Розглянемо основні арифметичні операції повної інтервальної арифметики Каухера.

Додавання та множення на дійсне число визначено на множині IR у такий спосіб:

$$x + y = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}],\ \forall x, y \in IR; \tag{3.16}$$

$$c \cdot x = \begin{cases} [c \cdot \underline{x}, c \cdot \overline{x}], \text{ якщо } c \geq 0, \\ [c \cdot \overline{x}, c \cdot \underline{x}], \text{ якщо } c < 0, \end{cases} \quad \forall c \in R, \forall x \in IR. \tag{3.17}$$

Кожен елемент $x \in IR$ має єдиний обернений відносно операції додавання елемент $\text{opp}\ x$, а саме:

$$\text{opp}\ x = \left[-\underline{x}; \overline{x}\right],\ \forall x \in IR. \tag{3.18}$$

Операція, обернена додаванню, називається *внутрішнім відніманням* і описується таким чином:

$$x \mathbin{\hat{-}} y = x + \text{opp}\ y = \left[\underline{x} - \underline{y}; \overline{x} - \overline{y}\right]. \tag{3.19}$$

Аналогічно до класичної арифметики відношення включення одного інтервала в інший у повній інтервальній арифметиці визначають таким чином:

$$x \subseteq y \Leftrightarrow \left(\underline{x} > \underline{y}\right) \& \left(\overline{x} < \overline{y}\right), \quad \forall x, y \in R. \tag{3.20}$$

Виділимо у множині IR такі підмножини:

$P = \left\{x \in IR : \underline{x} > 0, \overline{x} > 0\right\}$ – невід'ємні інтервали;

$Z = \left\{x \in IR : \underline{x} \leq 0 \leq \overline{x}\right\}$ – інтервали, що містять нуль;

$-P = \left\{x \in IR : -x \in P\right\}$ – недодатні інтервали;

$\text{dual}\ Z = \left\{x \in IR : \text{dual}\ x \in Z\right\}$ – інтервали, які містяться в нулі.

Тепер можна описати операцію множення інтервалів. Її подано в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Множення інтервалів на *IR*

	$y \in P$	$y \in Z$	$y \in -P$	$x \in \text{dual } Z$
$x \in P$	$[\underline{x} \cdot \underline{y}, \overline{x} \cdot \overline{y}]$	$[\overline{x} \cdot \underline{y}, \overline{x} \cdot \overline{y}]$	$[\overline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \overline{y}]$	$[\underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \overline{y}]$
$x \in Z$	$[\underline{x} \cdot \overline{y}, \overline{x} \cdot \overline{y}]$	$[\min\{\underline{x} \cdot \overline{y}, \overline{x} \cdot \underline{y}\};$ $\max\{\underline{x} \cdot \underline{y}, \overline{x} \cdot \overline{y}\}]$	$[\overline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \underline{y}]$	0
$x \in -P$	$[\underline{x} \cdot \overline{y}, \overline{x} \cdot \underline{y}]$	$[\underline{x} \cdot \overline{y}, \underline{x} \cdot \underline{y}]$	$[\overline{x} \cdot \overline{y}, \underline{x} \cdot \underline{y}]$	$[\overline{x} \cdot \overline{y}, \overline{x} \cdot \underline{y}]$
$x \in \text{dual } Z$	$[\underline{x} \cdot \underline{y}, \overline{x} \cdot \underline{y}]$	0	$[\overline{x} \cdot \overline{y}, \underline{x} \cdot \overline{y}]$	$[\max\{\underline{x} \cdot \underline{y}, \overline{x} \cdot \overline{y}\};$ $\min\{\underline{x} \cdot \overline{y}, \overline{x} \cdot \underline{y}\}]$

Операції віднімання й ділення в арифметиці Каухера мають такий вигляд:

$$x - y = x + (-1)y = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}],\ \forall x, y \in IR; \tag{3.21}$$

$$x / y = [\underline{x} / \overline{y}, \overline{x} / \underline{y}\cdot],\ \forall x, y \in IR : 0 \notin \text{pro } y. \tag{3.22}$$

Алгебраїчне ділення вводять за допомогою такого співвідношення:

$$x \hat{/} y = [\underline{x} / \underline{y}, \overline{x} / \underline{y}],\ \forall x, y \in IR,\ 0 \notin \text{pro } y. \tag{3.23}$$

Зв'язок між додаванням і множенням в арифметиці Каухера описується за допомогою таких співвідношень:

$$\begin{cases} x(y+z) \subseteq xy + xz, \text{ якщо інтервал } x \text{ правильний;} \\ x(y+z) \supseteq xy + xz, \text{ якщо інтервал } x \text{ не правильний.} \end{cases} \tag{3.24}$$

Визначення 3.10. Формальним розв'язком поданого нижче інтервального рівняння:

$$ax + b = c,\quad a, b, c \in R,\ 0 \notin \text{pro } a,$$

називається інтервальне число $x^* \in IR$, яке у повній інтервальній арифметиці забезпечує виконання такої рівності: $ax^* + b = c$.

Тоді із застосуванням уведених понять формальний розв'язок рівняння має такий вигляд:

$$x^* = \left(c \hat{-} b\right) \hat{/}\, a = \left[\frac{\underline{c} - \underline{b}}{\underline{a}}; \frac{\overline{c} - \overline{b}}{\overline{a}} \right].$$

Розглянемо приклади обчислень у повній інтервальній арифметиці Каухера.

Приклад 3.7. Використовуючи правила інтервальної арифметики Каухера, визначити суму, різницю, добуток та частку таких інтервалів: $x = [3;5]$, $y = [1;2]$.

Розв'язування

Обидва дані інтервали невід'ємні й правильні, тому

$x + y = [\underline{x} + \underline{y}; \overline{x} + \overline{y}] = [3 + 1; 5 + 2] = [4; 7]$;

$x - y = [\underline{x} - \overline{y}; \overline{x} - \underline{y}] = [3 - 2; 5 - 1] = [1; 4]$;

$xy = [\underline{x} \cdot \overline{y}; \overline{x} \cdot \underline{y}] = [3 \cdot 1; 5 \cdot 2] = [3; 10]$;

$x / y = [\underline{x} / \overline{y}; \overline{x} / \underline{y}\cdot] = [3 / 2; 5 / 1] = [1{,}5; 5]$.

3.5. Методи побудови функцій належності

Питання про побудову функцій належності є одним із найважливіших у теорії нечітких множин і не тільки [30]. Подібні проблеми виникають, скажімо при створенні функцій корисності у теорії корисності [54]. Існують різні підходи до розв'язування цієї задачі, але при цьому необхідно враховувати деякі загальні вимоги й міркування.

По-перше, під час побудови функцій належності основним є поняття відносної переваги однієї альтернативи над іншою. Наприклад, коли йдеться про два режими роботи системи x_1 і x_2, можна записати, що $x_1 \prec x_2$ в тому випадку, коли режим x_2 кращий (з погляду ефективності й допустимості), ніж режим x_1. Згадана перевага може бути викликана причинами технологічного, економічного, надійнісного, екологічного характеру і різними суб'єктивними причинами, що зумовлені врахуванням неформальних відомостей, які має ОПР.

По-друге, функція належності $\mu_D(x) \in [0;1]$ ставить у відповідність кожній альтернативі x число з інтервалу [0;1], що характеризує ступінь її належності до підмножини D ефективних і допустимих рішень.

Природним є також і вимога неперервності функції $\mu_D(x)$, яка формалізує інтуїтивне уявлення про те, що коли два розв'язки з множини X несуттєво відрізняються один від одного, то значення функцій належності для цих розв’язків також будуть близькими [6].

Крім того, функція $\mu_D(x)$ має бути узгоджена із відношенням «$\prec$», тобто $\mu_D(x_1) \le \mu_D(x_2)$, тоді і тільки тоді, коли $x_1 \prec x_2$.

Конкретний вигляд функцій належності визначається на основі різних додаткових припущень про їхні властивості (симетричність, монотонність, неперервність першої похідної і т. ін.) з урахуванням специфіки наявної невизначеності, реальної ситуації, яка моделюється, і числа ступенів вільності у функціональній залежності.

Далі буде розглянуто деякі із методів побудови функцій належності.

3.5.1. Прямі методи

Розглянемо кілька прикладів нечітких множин.

Нехай універсальна множина $E = \{0,1,2,\ldots 10\}$.

Нечітка множина: *A* = «числа, які приблизно дорівнюють 3», може бути описана таким чином:

$$A = \{(0/0);(1/0{,}5);(2/0{,}8);(3/1);(4/0{,}8);(5/0{,}5);(6/0{,}3);(7/0{,}1);\\ (8/0);(9/0);(10/0)\}.$$

Нечітка множина: *B* = *"декілька"*, може, наприклад, описуватись так:

$$B = \{(0/0);(1/0);(2/0);(3/0{,}5);(4/0{,}8);(5/1);(6/1);(7/0{,}8);\\ (8/0{,}5);(9/0);(10/0)\}.$$

Тепер припустимо, що універсальна множина $E = \{0,1,2,\ldots n\ldots\}$. Нечітке число «*малий*» можна визначити за допомогою такої функції належності:

$$\mu_{малий}(n) = \frac{1}{1+(0{,}1n)^2}.$$

Якщо на множині: $E=\{1,2,3,\ldots 100\}$, задано нечітку змінну «вік», то терму «молоді» може відповідати нечітка множина із такою функцією належності:

$$\mu_{молоді}(n)=\begin{cases}1, & x\in[1;25];\\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2}, & x\geq 25.\end{cases}$$

Нечітка множина «*молоді*» на універсальній множині: E^* = {*Сидоренко, Коваль, Плющ, Шевченко,...*}, задається за допомогою функцій належності $\mu_{молоді}(n)$ на множині: $E=\{1,2,3,\ldots 100\}$ (вік), і називається vis-à-vis E^*. Функціональна сумісність, описується таким чином:

$$\mu_{молоді}(Коваль)=\mu_{молоді}(x),$$

тут x – вік Коваля.

Виникає питання, яким чином встановлюють (будують, описують) конкретну функцію належності?

У наведених вище прикладах був використаний так званий *прямий* метод, коли експерт просто задає значення функції належності $\mu(x)$ для кожного елемента $x\in E$, або визначає правила для їх обчислення. Зрозуміло, що ці значення узгоджуються із його особистими перевагами на множині *E*. Як правило, прямі методи визначення функцій належності використовуються, коли мають справу із вимірними величинами, такими як час, відстань, швидкість, тиск, температура, і т. ін., або коли виділено полярні значення параметрів.

Ці методи базуються на безпосередньому визначенні функції належності, а тому підлягають сильному впливу суб'єктивної думки й кваліфікованості експерта. Отже, їх можна використовувати лише тоді, коли експерти мають високу кваліфікацію і не роблять випадкових помилок.

Зауважимо, що, описуючи об'єкт, ми часто можемо вибрати таку сукупність ознак, кожна з яких має полярні значення. Їм відповідають значення функції належності 0 або 1. У цьому випадку опис функції належності можна здійснити за допомогою такої процедури:

1. Встановлюємо перелік властивостей, за якими оцінюють об'єкт.

2. В отриманому списку властивостей визначаємо полярні та формуємо полярну шкалу.

3. Для кожної пари полюсів оцінюємо об'єкт, зважаючи на те, якою мірою йому притаманна ця властивість.

Наприклад, у задачі розпізнавання обличчя, можна виділити такі ознаки й відповідні їм полярні шкали:

	Ознака	0	1
x_1	Висота лоба	низький	широкий
x_2	Профіль носа	кирпатий	горбатий
x_3	Довжина носа	короткий	довгий
x_4	Розріз очей	вузький	широкий
x_5	Колір очей	світлий	темний
x_6	Форма підборіддя	загострена	квадратна
x_7	Товщина губ	тонкі	повні
x_8	Колір обличчя	темний	світлий
x_9	Контур обличчя	овальний	квадратний

Для конкретної особи A експерт на основі цієї шкали задає значення функції $\mu_A(x) \in [0;1]$ і створює вектор-функцію належності $(\mu_A(x_1); \mu_A(x_2); \dots \mu_A(x_9))$.

У багатьох практичних ситуаціях функція належності має бути оцінена з огляду на часткову інформацію про неї, скажімо на її значення на кінцевій множині опорних точок $x_1, x_2 \dots x_n$. У цьому випадку говорять, що вона частково визначена за допомогою «пояснювального прикладу».

Прямі методи можна також використовувати і для групи експертів.

Припустимо маємо групу із n експертів, частина із них (n_1) на питання про належність елемента x до нечіткої множини A дає стверджувальну відповідь, а інші ($n_2 = n - n_1$) – ні. Тоді вважають, що

$$\mu_A(x) = \frac{n_1}{n}. \tag{3.25}$$

Приклад 3.8. Нехай задано таку універсальну множину: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Необхідно визначити нечітку множину «значно менше від 5». В опитуванні взяло участь 5 експертів, його результати показано в таблиці нижче.

x	1	2	3	4	5	6
Кількість експертів, які дали стверджувальну відповідь	5	5	4	2	0	0

Тоді функція належності цієї нечіткої множини набуває такого вигляду:

x	1	2	3	4	5	6
$\mu_A(x)=\frac{n_1}{n}$	1	1	0,8	0,4	0	0

Розглянемо ще один спосіб побудови функцій належності, що базується на врахуванні думок експертів.

Припустимо, що в роботі задіяно n експертів і необхідно оцінити ступінь належності до нечіткої множини k об'єктів, тобто універсальна множина $X=\{x_1,x_2,\ldots x_k\}$. Метод полягає в тому, що кожен експерт повинен порівняти (на власний розсуд) усі пари об'єктів, тобто побудувати відношення переваги, за таким правилом:

$$m_{sj}^i=\begin{cases}1,\text{ якщо } x_s\succ x_j,\\ 0,\text{ в інших випадках,}\end{cases}$$

тут запис: $x_s\succ x_j$, означає строгу перевагу об'єкта x_s над x_j.

У результаті буде отримано n (згідно з числом експертів) матриць, які описують переваги кожного експерта, а саме:

$$M_i=\begin{pmatrix} m_{11}^i & m_{12}^i & m_{1k}^i\\ m_{21}^i & m_{22}^i & m_{2k}^i\\ \\ m_{k1}^i & m_{k2}^i & m_{kk}^i\end{pmatrix},\ i=1,\ldots n.$$

Після цього експертна оцінка кожної альтернативи x_j кожним з експертів обчислюється за такою формулою:

$$a_{ij}=\frac{\sum_{s=1}^{k}m_{js}}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}m_{js}},\ i=1,\ldots n,\quad j=1,\ldots k. \tag{3.26}$$

Остаточна оцінка функції належності для кожної альтернативи x_j буде мати такий вигляд:

$$\mu\left(x_j\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,, \quad j = 1,\ldots k\,. \qquad (3.27)$$

Приклад 3.9. Припустимо, маємо три альтернативи, тобто $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Наприклад, це можуть бути автомобілі. Два експерти оцінюють їх за властивістю «придатний до сімейних подорожей». Думки кожного з них базуються на особистих перевагах. Матриця M_1 описує переваги першого експерта, а матриця M_2 – другого.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оцінка першого експерта стосовно альтернативи x_1, згідно з формулою (3.26), буде такою:

$$a_{11} = \frac{m_{11} + m_{12} + m_{13}}{m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{21} + m_{22} + m_{23} + m_{31} + m_{32} + m_{33}} = \frac{1}{3},$$

Аналогічно $a_{12} = \frac{1}{3}$, $a_{13} = \frac{1}{3}$.

Оцінки другого експерта будуть такими: $a_{21} = 0$, $a_{22} = \frac{1}{3}$, $a_{23} = \frac{2}{3}$.

Тепер отримуємо остаточні значення функції належності до множини «придатний до сімейної подорожі»:

для першого автомобіля $\mu\left(x_1\right) = \frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{21}\right) = \frac{1}{6}$,

стосовно другого $\mu\left(x_1\right) = \frac{1}{2}\left(a_{12} + a_{22}\right) = \frac{1}{3}$,

і для третього $\mu\left(x_1\right) = \frac{1}{2}\left(a_{13} + a_{23}\right) = \frac{1}{2}$.

Зауважимо, що в описаному методі однаково враховано думки всіх експертів. Якщо думки мають різну важливість для ОПР, то це можна врахувати за допомогою введення вагових коефіцієнтів, тоді формула (3.27) набуде такого вигляду:

$$\mu\left(x_j\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i a_{ij}\ , \tag{3.28}$$

тут γ_i – ваговий коефіцієнт, який описує ступінь довіри до i-го експерта, причому, $0\le\gamma_i\le1,\ \sum_{i=1}^{n}\gamma_i=1$.

Для врахування думок експертів можна використовувати також інші методи.

3.5.2. Непрямі методи

Непрямі методи визначення функції належності використовують тоді, коли об’єкт не має елементарних вимірних властивостей, на базі яких описано нечітку множину. У цих методах значення функції належності вибирають так, аби задовольнити певні умови. Ці додаткові умови можуть бути висунуті стосовно виду отриманої інформації, а також процедур її обробки.

Наприклад, до них можна віднести такі:

– функція належності відображає «близкість» до наперед виділеного еталона;

– при попарному порівнянні об’єктів, якщо один з них в α разів переважає інший, то другий оцінюють як у 1/α разів переважніший, ніж перший; і т. ін.

Непрямі методи більш трудомісткі, ніж прямі, але їх перевагою є стійкість до спотворення результатів.

Один із найбільш відомих є метод попарних порівнянь, запропонований Т.Л. Сааті. Розглянемо його детальніше.

Метод попарних порівнянь

Якщо значення функції належності відомо, наприклад, $\mu_A\left(x_i\right)=w_i$, $i=1,2,\ldots,n$, то парні порівняння можна подати у вигляді матриці відношень, коли елементи задачі порівнюють попарно з огляду на їхній вплив («вагу» або «інтенсивність») на спільну для них характеристику. Отримані парні порівняння будуть становити масив чисел, який записують у вигляді такої матриці:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \frac{w_2}{w_3} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & \frac{w_3}{w_3} & \dots & \frac{w_3}{w_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \frac{w_n}{w_3} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix}$$

Ця матриця буде обернено симетричною, тобто $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$.

Але на практиці функція належності невідома, і експерт сам формує матрицю.

При порівнянні явищ, які мають усталену систему вимірів відношеннями в елементах таблиці можуть слугувати відношення дійсних мір. У протилежному випадку, коли об'єкт перебуває поза визначеною системою вимірів, парні порівняння можна проводити з використанням думок про відносну важливість компонентів. В цьому випадку експерта просять визначити, який із об'єктів є переважнішим, а потім ці думки виражають числами спеціально розробленої *шкали відносної важливості* (див. табл. 3.4). Ефективність цієї шкали (*шкала Сааті*) порівняно із багатьма іншими доведено теоретично.

Таблиця 3.4

Шкала відносної важливості (Сааті)

Значення	Відносна важливість
1	рівна важливість
3	помірна перевага одного над іншим
5	істотна перевага одного над іншим
7	значна перевага одного над іншим
9	дуже сильна перевага одного над іншим
2, 4, 6, 8	відповідні проміжні значення

Порівняння починають з лівого верхнього елемента матриці. Визначають на скільки він важливіший, ніж наступний. При порівнянні елемента із самим собою відношення дорівнює одиниці. Якщо перший елемент важливіший, ніж другий, то використовують ціле число із шкали, інакше важливість оцінюють оберненою величиною. У будь-якому випадку обернені один до одного відношення записують у симетричні позиції матриці. Тому матриці завжди будуть додатними і обернено симетричними, для їх заповнення необхідно врахувати тільки $n(n-1)/2$ думок, де n – загальне число порівнюваних елементів.

При заповненні матриці слід керуватися такими правилами:

Правило 1. Якщо $a_{ij} = \alpha$, то $a_{ji} = \dfrac{1}{\alpha}$

Правило 2. Якщо елементи x_i та x_j мають однакову відносну важливість, то $a_{ij} = a_{ji} = 1$; зокрема $a_{ii} = 1$ для всіх значень *i*.

Правило 3. Усі елементи матриці заповнюються значеннями, взятими з однієї і тієї самої шкали.

У результаті маємо таку матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

У загальному випадку задача визначення функції належності зводиться до знаходження вектора ω що задовольняє рівняння такого типу: $A\omega = \lambda_{max}\omega$, де λ_{max} – найбільше власне значення матриці *A*. Оскільки матриця *A* додатна (за правилами побудови), то розв'язок цієї задачі існує і він додатний. Чим ближче значення λ_{max} до числа *n*, тим більш правильним є результат. Відхилення числа λ_{max} від *n* використовується як вимір правильності результату. Якщо воно дорівнює 0, то маємо повну транзитивність думок експерта. У цьому випадку кажуть, що матриця узгоджена.

Під *узгодженістю матриці* розуміється її числова узгодженість і транзитивність. Досконалої узгодженості дуже складно досягти на практиці, навіть користуючись для вимірювання найбільш точними інструментами. Тому потрібно визначити спосіб оцінки узгодженості. Наприклад, можна обчислювати відхилення від узгодженості. Якщо вони перевищуватимуть допустимі межі, то судження необхідно перевірити ще раз.

Один із способів перевірки цього показника – визначення *індекса узгодженості* (*ІУ*). Нижче подано алгоритм його обчислення.

1. Підсумовують кожен стовпець суджень у матриці.

2. Суму першого стовпця множать на величину першої компоненти нормалізованого вектора пріоритетів, суму другого стовпця – на другу компоненту і так далі.

3. Отримані числа підсумовують. Їх сума позначається λ_{max}.

4. Обчислюють *індекс узгодженості* (*ІУ*): *ІУ* = (λ_{max} – *n*)/(*n* – 1), де *n* – число порівнюваних елементів.

5. Обчислюють *відношення узгодженості* (*ВУ*): *ВУ* = *ІУ*/$n_{вип}$, де $n_{вип}$ – *число випадкової узгодженості*.

Значення числа випадкової узгодженості для матриць різного порядку подано у табл. 3.5. Величина ВУ має становити 10 % або менше, аби бути прийнятною. У деяких випадках допускається значення ВУ до 20 %, але не більше. Якщо ця вимога не виконується, потрібно перевірити судження.

Таблиця 3.5

Числа випадкової узгодженості

Порядок матриці	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Випадкова узгодженність	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Після перевірки узгодженості матриці, проводять обчислення її головного власного вектора. Він являє собою нормалізований вектор пріоритетів і виражає відносну силу, величину, бажаність, "цінність" кожного окремого об'єкта. Його обчислення можна проводити різними способами, а саме:

1. Підсумовувати елементи кожного рядка і нормалізувати шляхом ділення кожної суми на суму всіх елементів; сума отриманих результатів дорівнюватиме одиниці. Перший елемент отриманого вектора буде пріоритетом першого об'єкта, другий – другого об'єкта і так далі.

2. Підсумовувати елементи кожного стовпця й отримати обернені величини цих сум. Виконати нормалізацію цих величин так, щоб їх сума дорівнювала одиниці. Для цього поділити кожну обернену суму на суму всіх обернених величин.

3. Виконати нормалізацію всіх стовпців матриці. Для цього поділити кожен елемент стовпця на суму його елементів. Потім підсумувати елементи кожного отриманого рядка і поділити цю суму на число елементів рядка.

4. Перемножити всі елементи кожного рядка й обчислити корінь *n*-го степеня (*n* – кількість елементів рядка). Нормалізувати отримані числа.

5. Підносити матрицю у довільно великі степені. Обчислювати суми елементів рядків та нормалізовувати отримані величини.

Найбільш точним є останній спосіб. Проте без відповідної комп'ютерної підтримки його використання досить складне. На практиці найчастіше використовують четвертий спосіб.

Розглянемо його докладніше.

Припустимо, дано матрицю $A(n,n)$.

1. Компоненту власного вектора, відповідну i-му рядку обчислюють за такою формулою: $b_i = \sqrt[n]{a_{i1} \times a_{i2} \times a_{i3} \times ... \times a_{in}}$, $i = 1, 2, \ldots n$.

2. Після отримання всіх компонентів власного вектора $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ проводиться його нормалізація. Для цього обчислюється сума компонент власного вектора $\sum_{i=1}^{n} b_i$. Потім кожен елемент b_i ділиться на знайдену суму. Таким чином, отримуємо нормалізований власний вектор, а саме:

$$\overline{X} = \overline{\left(\frac{b_1}{\sum b_i}, \frac{b_2}{\sum b_i}, \ldots \frac{b_n}{\sum b_i}\right)} = \overline{(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)}.$$

3. Значення функції належності отримують базуючись на власному векторі матриці у такий спосіб: вибирають максимальний компонент власного вектора, тобто $b_{\max} = \max\limits_{i=1,2,\ldots n} b_i$. Потім кожен елемент b_i ділять на цю величину. Таким чином, отримано вектор: $\omega = \left(\frac{b_1}{b_{\max}}, \frac{b_2}{b_{\max}}, \ldots \frac{b_n}{b_{\max}}\right) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_n)$.

Значення компонент вектора ω і будуть значеннями функції належності відповідних об’єктів.

Приклад 3.10. Припустимо, що потрібно оцінити значення показників ефективності складної системи. За результатами опитування експерта було отримано таку матрицю попарних порівнянь:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{3} & 5 & \frac{1}{3} & 5 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{7} & 3 & \frac{1}{7} & 2 & \frac{1}{4} \\ 3 & 7 & 1 & 9 & 3 & 6 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 3 & 7 & \frac{1}{3} & 5 & 1 & 5 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 2 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 4 & \frac{1}{5} & 6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Необхідно побудувати функцію належності, яка базується на результатах експертної оцінки.

Розв'язування

Застосовуємо процедуру попарних порівнянь, описану вище. Для цього спочатку обчислимо власний вектор матриці за правилом 4.

Результати обчислень запишемо в табл. 3.6.

Таблиця 3.6

Результати обчислення власного вектора матриці

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$b_i = \sqrt[7]{a_{i1}a_{i2}...a_{i7}}$	$x_i = \dfrac{b_i}{\sum_{j=1}^{7} b_j}$	$\omega_i = \dfrac{b_i}{b_{max}}$
x_1	1	5	0,33	6	0,33	5	0,5	1,22	0,12	0,32
x_2	0,2	1	0,14	3	0,14	2	0,25	0,52	0,05	0,14
x_3	3	7	1	9	3	5	5	3,8	0,38	1
x_4	0,17	0,33	0,11	1	0,2	0,5	0,16	0,28	0,03	0,07
x_5	3	7	0,33	5	1	5	0,5	2,0	0,20	0,53
x_6	0,2	0,5	0,2	2	0,2	1	0,33	0,412	0,04	0,11
x_7	2	4	0,2	6	2	3	1	1,78	0,18	0,47
$A_j = \sum_{i=1}^{3} a_{i,j}$	9,57	24,83	2,32	32	6,88	21,5	7,75	$\sum_{j=1}^{7} b_j$ =10,03		

За результатами обчислень $\lambda_{\max} = \sum A_j x_i = 7,65$.

Перевіримо узгодженість думок експерта. Для цього обчислимо індекс узгодженості, а саме:

$$ІУ = (\lambda_{\max} - n)/(n-1) = (7,65 - 7)/6 = 0,108.$$

Тепер обчислимо відношення узгодженості: $ВУ = ІУ/n_{вип}$, враховуючи, що $n_{вип} = 1,32$, тобто

$$ВУ = 0,108/1,32 = 0,082.$$

Оскільки відношення узгодженості не перевищує 10 %, дані можна вважати узгодженими і отриманий вектор $\omega = (0,32;\ 0,14;\ 1;\ 0,07;\ 0,53;\ 0,11;\ 0,47)$ правильним.

Оцінюючи функцію належності, також можна використовувати поняття множини рівня. Цей метод дозволяє визначити ступінь належності елементів до нечіткої підмножини $\tilde{A}$ з урахуванням відомих імовірностей вибірки елементів множини X для фіксованих α-рівнів.

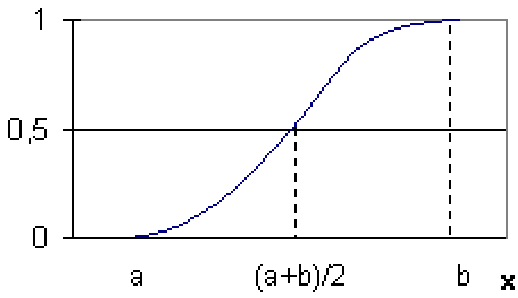
У практичних додатках застосовуються методи визначення характеристичних функцій (або побудови їх оцінок) за вибірками і на підставі апріорної інформації, у яку входять обмеження на ці функції. Якщо апріорної інформації про властивості характеристичних функцій недостатньо для забезпечення їхньої "оптимальності" в якомусь сенсі, то доводиться вдаватися до евристичних методів знаходження цих функцій з подальшою експериментальною перевіркою їх "якості".

Детальний огляд методів побудови функцій належності можна знайти в монографії А.Е. Алтуніна [6].

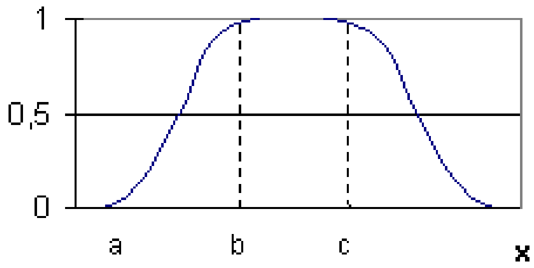
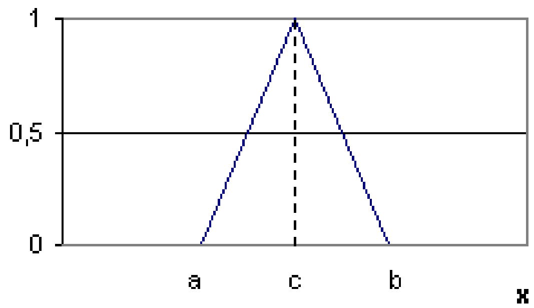
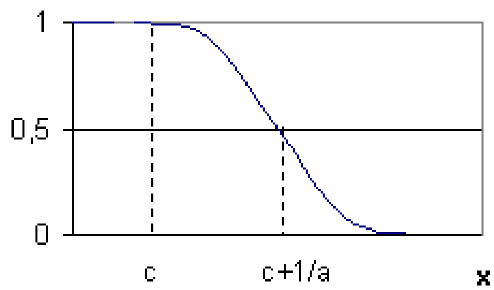
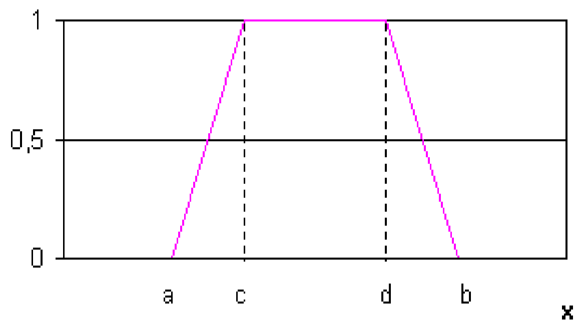
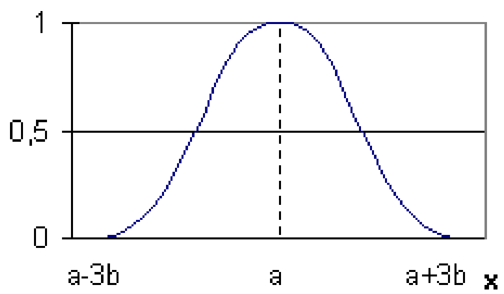
У табл. 3.7 наведено основні види функцій належності, які застосовуються в теорії нечітких множин.

Таблиця 3.7

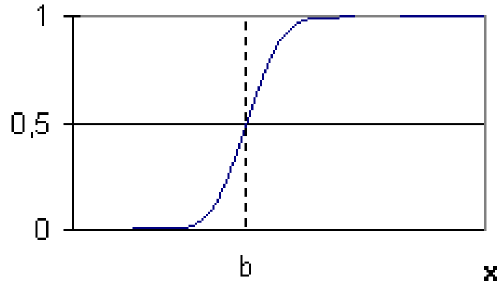
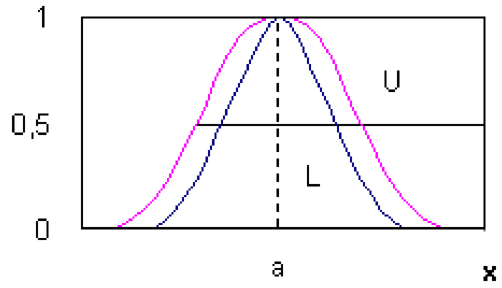
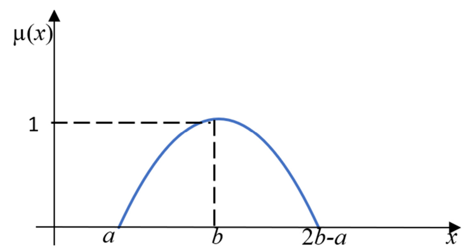
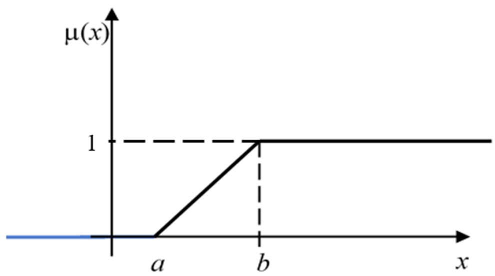
Основні види функцій належності [2]

№	Аналітичний вигляд функції	Графічне подання
1	$\mu_1(x,a,b) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le a, \\ \dfrac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, \text{ якщо } a < x \le \dfrac{a+b}{2}, \\ 1 - \dfrac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, \text{ якщо } \dfrac{a+b}{2} < x < b, \\ 1, \text{ якщо } x \ge b. \end{cases}$	

[2] Дані таблиці наведено за літературою [6] із доповненням авторів.

2	$$\mu_2(x,a,b,c)=\begin{cases}\mu_1(x,a,b), \text{ якщо } x<b,\\ 1, \text{ якщо } b\le x\le c,\\ 1-\mu_1(x,c,c+b-a),\\ \qquad\qquad \text{якщо } x>c.\end{cases}$$	
3	$$\mu_3(x,a,b,c)=\begin{cases}0, \text{якщо } x\le a,\\ \dfrac{x-a}{c-a}, \text{ якщо } a<x\le c,\\ \dfrac{b-x}{b-c}, \text{ якщо } c<x<b,\\ 0, \text{ якщо } x\ge b.\end{cases}$$	
4	$$\mu_4(x,a,b,c)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x\le c,\\ \left\{1+\left[a\left(x-c\right)\right]^b\right\}^{-1}, \text{якщо } \end{cases}$$	
5	$$\mu_5(x,a,b,c,d)=\begin{cases}0, \text{якщо } x\le a,\\ \dfrac{x-a}{c-a}, \text{ якщо } a<x<c,\\ 1, \text{ якщо } c\le x<d,\\ \dfrac{b-x}{b-d}, \text{ якщо } d<x<b,\\ 0, \text{ якщо } x\ge b.\end{cases}$$	
6	$$\mu_6(x,a,b)=\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2b^2}\right].$$	

Закінчення табл. 3.7

7	$\mu_7(x,a,b)=\left\{1+\exp\left[-a\left(x-b\right)\right]\right\}^{-1}.$	
8	$\mu_8(x,a,[\underline{b},\overline{b}])=\left[\mu_6^L(x,a,\underline{b}),\mu_6^U(x,a,\overline{b})\right].$	
9	$\mu_9(x,a)=\begin{cases}1-\dfrac{(x-a)^2}{(b-a)^2}, & \text{якщо}\ (2a-b)\le x\le b\\ 0 & \text{в інших випадках.}\end{cases}$	
10	$\mu_{10}(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо}\ \ x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{якщо}\ \ x\in(a;b),\\ 1, & \text{якщо}\ \ x\ge b\ .\end{cases}$	

Для побудови функції належності можна також використовувати узагальнену функцію бажаності Харрінгтона [2], оскільки її значення належать інтервалу [0;1]. Функція Харрінгтона виникла внаслідок спостережень за реальними рішеннями експериментаторів. Вона має такі корисні властивості як неперервність, монотонність й гладкість. Крім того, крива цієї функції добре передає той факт, що в зонах бажаності, близьких до 0 і 1, її «чутливість» значно нижча, ніж у середній зоні [2]. У цьому випадку функція належності може бути задана таким рівнянням: $\mu(x) = -\exp(-x)$.

Стандартні відмітки на шкалі бажаності наведено в табл. 3.8. Якщо функція належності $\mu(x) = 0{,}37$, то це зазвичай відповідає межі допустимих значень.

Таблиця 3.8

Бажаність	відмітки на шкалі бажаності
Дуже добре	1,00 – 0,80
Добре	0,80 – 0,63
Задовільно	0,63 – 0,37
Погано	0,37 – 0,20
Дуже погано	0,20 – 0,00

Якщо в розпорядженні дослідника є кілька критеріїв $I_1(x), I_2(x), \ldots I_n(x)$ для оцінювання ефективності роботи системи, то побудову потрібної для її опису функції належності можна звести до синтезу глобального критерію, як функції від *n* вихідних критеріїв, котрі відображають ефективність і допустимість режимів роботи з огляду на економічні, технологічні, надійнісні та ін. міркування, тобто $\mu(x) = \mu(I_1(x), I_2(x), \ldots I_n(x))$. Причому максимум цього критерію буде відповідати чіткому розв'язку багатокритерійної задачі. Тоді розв'язування задачі буде зводитися до звичайної оптимізації, а саме:

$$\mu\left(x^*\right) = \max_{x \in E} \mu(x).$$

Ця функція має бути інваріантною до перетворень зсуву та зміни масштабу кожного з критеріїв. Усі ці зміни можна задовольнити, використовуючи функції такого вигляду:

$$\mu_j(x) = \frac{I_j(x) - \underline{I}_j}{\overline{I}_j - \underline{I}_j},$$

де $\overline{I}_j$ – максимальне значення критерію *j*, $\underline{I}_j$ – мінімальне значення критерію *j*, причому вони можуть вибиратися із позиції граничних режимів, де робота системи недопустима або зовсім неефективна відносно даного критерію, а саме:

$$\mu(x) = \mu\left(I_1(x), I_2(x), \ldots I_n(x)\right) = \mu\left(\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots \mu_n(x)\right)$$

Приклад 3.11 [6]. Побудуємо функцію належності, яка описує ефективність роботи трубопроводу, використовуючи критерій максимізації тиску на вході в магістральний трубопровід, а саме:

$$\mu_A(P) = \frac{P - \underline{P}}{\overline{P} - \underline{P}}.$$

На основі розрахунку гранично допустимого дебіту q_n у конусі пластової води будуємо таку функцію:

$$\mu_A(q) = \frac{q}{q_n}.$$

Вона характеризує ризик обводнення свердловини пластовими водами. Тоді функція належності для допустимих значень дебіту має такий вигляд:

$$\mu_B(q) = 1 - \mu_A(q).$$

Побудований згідно з такими вимогами критерій $\mu(x)$ є показником ступеня належності певного режиму роботи системи множині допустимих або ефективних режимів. Його величина змінюється в інтервалі [0;1], що відповідає визначенню функції належності Заде.

Імовірнісний метод побудови функції належності базується на схожості понять імовірності й нечіткості, хоча вони мають різну природу. Обидва ці поняття використовують, коли в системі наявна невизначеність, причому вона виникає під впливом випадкових факторів, як наслідок неточності наших знань або принципової неможливості отримання точних розв’язків. Але навіть у тих випадках, коли нечіткість може бути подана у вигляді ймовірнісної моделі, зазвичай зручніше застосовувати методи теорії нечітких множин (як менш громіздкі) без використання апарату теорії ймовірності.

Звісно, при цьому потрібно враховувати суб’єктивність функції належності, тоді як імовірність являє собою об’єктивну характеристику. Однак досить природним є бажання визначити функцію належності таким чином, аби подія, імовірність якої незначна, мала також невеликий ступінь належності. «Нестатистична» природа побудови функцій належності для опису якісних параметрів не означає, що для їх створення не можна використовувати функції розподілу ймовірності, нормовані певним чином. Отже, залежно від типу нечітких змінних можна виділити два типи побудови функцій належності: статистичний і нестатистичний. Застосування нечіткості й випадковості в процесі прийняття рішень має багато способів, у тому числі й у вигляді різних комбінацій.

Наприклад, якщо стосовно контрольованого параметра відомо ймовірність переходу системи від допустимого стану до недопустимого, залежно від встановленого для неї режиму роботи, то функція належності, котра описує ступінь ризику рішення, що приймається, може бути визначена із умови переваги тих режимів, для яких імовірність ризику менша, тобто

$$x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow \left[1 - P\left(x < x_1\right)\right] \geq \left[1 - P\left(x < x_2\right)\right].$$

Тоді функцію належності ми можемо задати, наприклад, у такому вигляді:

$$\mu_D\left(x'\right) = 1 - P\left(x < x'\right).$$

На практиці ймовірність $P\left(x < x_1\right)$ можна визначити на основі побудови гістограми частот переходу системи в недопустимі стани за різних режимів її роботи.

3.6. Застосування нечіткої арифметики до розв’язування прикладних задач

3.*6.1. Задача мережевого планування із нечітко заданою тривалістю операцій* [54]

Припустимо, що процес підготовки до роботи засобів керування такий, як показано на рис. 3.15. Значення тривалості кожної операції A_{ij} (i, j = 1, … , 6) точно не відомі й подані у вигляді нечітких інтервалів ($L - R$)-типу. Вихідні дані до задачі наведено в табл. 3.9.

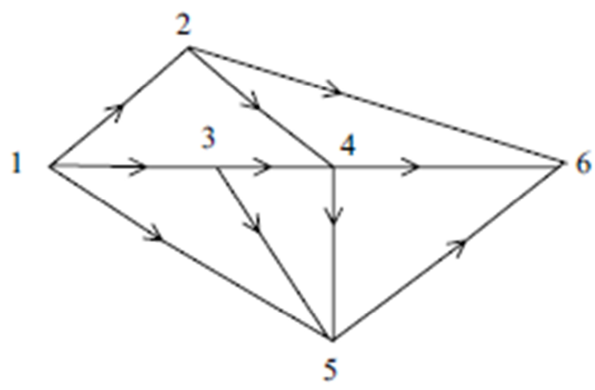


Рис. 3.15. Порядок проведення операцій підготовки до роботи засобів керування

Таблиця 3.9

Вихідні дані для задачі мережевого планування

(i, j)	A_y	(i, j)	A_y
(1, 2)	$(3, 3, 1, 3)_{LR}$	(3, 4)	$(2, 4, 0, 1)_{LR}$
(1, 3)	$(2, 3, 0, 1)_{LR}$	(3, 5)	$(4, 5, 2, 3)_{LR}$
(1, 5)	$(3, 4, 1, 1)_{LR}$	(4, 5)	$(3, 3, 1, 2)_{LR}$
(2, 4)	$(1, 2, 0, 0)_{LR}$	(4, 6)	$(3, 4, 0, 2)_{LR}$
(2, 6)	$(8, 11, 1, 4)_{LR}$	(5, 6)	$(1, 1, 0, 1)_{LR}$

Нехай відомо, що найбільш ранній термін початку проведення комплексу операцій обслуговування $t_0 = (1;\ 1;\ 1;\ 1)_{LR}$. Для визначення ранніх термінів початку окремих операцій t_i ($i = 1, \ldots, 6$) скористаємося такою формулою:

$$t_i = \begin{cases} \max\limits_{j \in P_j}\left(t_j + A_{ij}\right), \text{якщо } P_i \neq 0, \\ t_0, \text{якщо } P_i = 0, \end{cases} \tag{3.29}$$

де P_i – множина робіт, що передують i-й роботі. Тоді ранній термін закінчення всього комплексу операцій $t_f = \max\limits_{i=1,2\ldots6}\left(t_i\right)$.

Припустимо, що відомий найпізніший термін закінчення комплексу операцій обслуговування, а саме: $T_f = (20;\ 21;\ 1;\ 0)_{LR}$. Для розрахунку пізніх термінів початку окремих операцій: T_i, $i = 1, 2, \ldots 6$, застосуємо таку формулу:

$$T_i = \begin{cases} \min\limits_{j \in S_i}\left(T_j - A_{ij}\right), \text{якщо } S_i \neq 0, \\ T_f, \text{якщо } S_i = 0, \end{cases} \tag{3.30}$$

де S_i – множина робіт, наступних за i-ю роботою.

Для виконання операцій max та min, в обчисленнях за формулами (3.28) та (3.29) використовуємо такий варіант апроксимації згідно з розглянутими вище правилами (див. пп. 3.3):

якщо M, N нечіткі $(L - R)$-числа, а саме $M = \left(m_1, m_2, \alpha, \beta\right)_{LR}$, $N = \left(n_1, n_2, \gamma, \delta\right)_{LR}$, то

$$\max\left(M, N\right) = (\max\left(m_1, n_1\right), \max\left(m_2, n_2\right), \max\left(m_1, n_1\right) - \max\left(m_1 - \alpha, n_1 - \gamma\right),$$
$$\max\left(m_2 + \beta, n_2 + \delta\right) - \max\left(m_2, n_1\right))_{LR},$$

$$\min\left(M, N\right) = (\min\left(m_1, n_1\right), \min\left(m_2, n_2\right), \min\left(m_1, n_1\right) - \min\left(m_1 - \alpha, n_1 - \gamma\right),$$
$$\min\left(m_2 + \beta, n_2 + \delta\right) - \min\left(m_2, n_1\right))_{LR}.$$

Результати розрахунку подано в табл. 3.10.

Таблиця 3.10

Терміни проведення операцій у задачі мережевого планування

i	Ранній термін початку робіт	Пізній термін початку робіт
1	$(1; 1; 1; 1)_{LR}$	$(6; 10; 8; 2)_{LR}$
2	$(4; 4; 2; 4)_{LR}$	$(9; 13; 5; 1)_{LR}$
3	$(3; 4; 1; 2)_{LR}$	$(12; 15; 5; 1)_{LR}$
4	$(5; 8; 1; 3)_{LR}$	$(16; 17; 4; 1)_{LR}$
5	$(8; 11; 2; 5)_{LR}$	$(19; 20; 2; 0)_{LR}$
6	$(12; 15; 3; 8)_{LR}$	$(20; 21; 1; 0)_{LR}$

3.6.2. Оцінювання ринку предметів образотворчого мистецтва [53]

Розглянемо приклад прийняття рішень у галузі маркетингу торгівлі картинами. Оцінювання ринку проводимо, враховуючи дві характеристики, а саме: рівень життя мешканців деякого міста та їхні культурні потреби.

У табл. 3.11 описано нечіткі числа, які використовуються для опису параметрів задачі.

Нечітку оцінну функцію f, яка описує рівень ринку продажів, задамо у такому вигляді:

$$V = f\left(\text{рівень життя, культурні потреби}\right) = 0,3\mu_{\text{рів.жит.}} + 0,7\mu_{\text{культ.потр}} ,$$

де 0,3 та 0,7 – це нечіткі числа $\langle 0,3; 0,1; 0,1 \rangle$ та $\langle 0,7; 0,1; 0,1 \rangle$ відповідно.

Таблиця 3.11

Опис нечіткого числа	Нечітке число
Дуже високий	$\langle 1,00; 0,20; 0,00 \rangle$
Високийй	$\langle 0,75; 0,15; 0,15 \rangle$
Звичайний	$\langle 0,50; 0,15; 0,15 \rangle$
Низький	$\langle 0,25; 0,15; 0,15 \rangle$
Дуже низький	$\langle 0,00; 0,00; 0,20 \rangle$

Припустимо, що експерти оцінили рівень життя мешканців деякого міста як «дуже високий», а їхні культурні потреби оцінюються як «низькі». Необхідно оцінити ринок продажів картин у цьому місті.

Використовуючи словник з табл.3.11, запишемо нечіткі числа, відповідні описам «дуже високий» та «низький», а саме:

$$\mu_{\text{рів.жит.}} = \langle 1{,}00;\ 0{,}20;\ 0{,}00 \rangle, \quad \mu_{\text{культ.потр}} = \langle 0{,}25;\ 0{,}15;\ 0{,}15 \rangle.$$

Тепер обчислимо значення функції за правилами, викладеними вище. Отже, оцінку ринку отримуємо у вигляді такого нечіткого числа:

$$V = \langle 0{,}475;\ 0{,}255;\ 0{,}245 \rangle.$$

Це дає змогу оцінити ринок у цьому місті як «звичайний» (див. рис. 3.16).

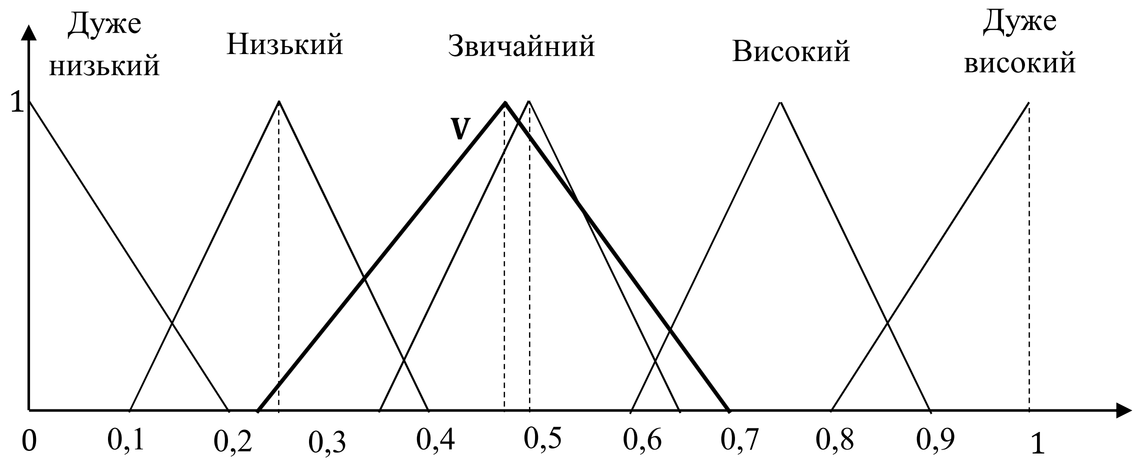


Рис. 3.16. Графічне подання результатів задачі про оцінювання ринку предметів образотворчого мистецтва

Висновки

Нечіткі числа являють собою особливі нечіткі множини, що задані на множині дійсних чисел. Будучи узагальненням поняття числа й інтервалу, вони широко використовуються в нечіткому моделюванні. Розрізняють кілька видів нечітких чисел. Найбільш поширеними серед них є нечіткі числа *L–R*-типу, зокрема, трикутні й трапецоїдні числа. Операції із нечіткими числами здійснюються на основі принципу узагальнення і мають деякі специфічні властивості, що відрізняються від властивостей операцій над звичайними числами. Розгляд нечітких чисел *L–R*-типу значно спрощує обчислення при проведенні таких операцій. Визначення операцій над нечіткими числами може бути здійснено різними способами.

Методи побудови функцій належності поділяють на прямі й непрямі. В основу більшості методів покладено врахування думок експертів та властивостей характеристик, які описує нечітка множина. Крім того, ці методи забезпечують виконання певних вимог, справедливих стосовно функції належності, наприклад, монотонність і неперервність.

Питання, викладені в цьому розділі, розглянуто в багатьох літературних джерелах [5, 6, 11, 32, 33, 42, 43, 44, 53, 54, 58].

Контрольні питання

1. Дайте визначення нечіткого числа.
2. Які нечіткі числа називають унімодальними? Опуклими? Нормальними?
3. Як визначають додатні, від'ємні нечіткі числа та нечіткий нуль?
4. Які підходи існують до визначення операцій над нечіткими числами? Які вимоги при цьому висувають?
5. Яким чином визначено операції додавання, різниці, добутку й частки нечітких чисел?
6. Які властивості мають операції з нечіткими числами? У чому полягає їх відмінність від звичайних арифметичних операцій?
7. Що таке (L–R)-відображення? Які властивості мають функції L та R?
8. Які нечіткі числа називають (L–R)-числами?
9. Які числа називають трикутними? Толерантними?
10. Для чого були введені (L–R)-числа?
11. Які вимоги висувають до визначення операцій з (L–R)-числами?
12. Які правила обчислень діють в інтервальній арифметиці Каухера?
13. Які класи методів побудови функцій належності ви знаєте?
14. У чому полягає метод побудови функцій належності на основі думки одного експерта?
15. Яка сутність методу побудови функцій належності на основі думок кількох експертів?
16. Опишіть етапи методу попарних порівнянь.
17. Як можна перевірити узгодженість думок експертів?
18. Чи можна застосовувати ймовірнісні методи для побудови функцій належності?

Завдання до розділу 3

1. Обчислити суму, різницю, добуток і частку дискретних нечітких чисел A та B, скориставшись поданими нижче варіантами їх значень.

а) $A = \{(1/0{,}5); (2/1); (3/0{,}8); (4/0{,}5)\}$; $B = \{(1/0{,}5); (2/1); (3/0{,}7)\}$.

б) $A = \{(0/0{,}1); (1/0{,}5); (2/0{,}8); (3/0{,}3)\}$; $B = \{(5/0{,}5); (6/1); (7/0{,}7)\}$.

в) $A = \{(3/0{,}4); (4/0{,}6); (5/0{,}8); (6/1)\}$; $B = \{(2/0{,}7); (3/1); (4/0{,}7)\}$.

2. Обчислити суму та різницю неперервних нечітких чисел A та B, за поданими нижче варіантами умов.

а)

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{5}, \text{ якщо } 0<x\le 5,\\ \dfrac{10-x}{5}, \text{ якщо } 5<x<10,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 10.\end{cases} \qquad \mu_B(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{3}, \text{ якщо } 0<x\le 3,\\ \dfrac{5-x}{2}, \text{ якщо } 3<x<5,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 5.\end{cases}$$

б)

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 2,\\ \dfrac{x-2}{3}, \text{ якщо } 2<x\le 5,\\ \dfrac{7-x}{2}, \text{ якщо } 5<x<7,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 7.\end{cases} \qquad \mu_B(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{3}, \text{ якщо } 1<x\le 4,\\ 1, \text{ якщо } 4<x<6,\\ \dfrac{8-x}{2}, \text{ якщо } 6<x\le 8,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 8.\end{cases}$$

в)

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 2,\\ \dfrac{x-2}{2}, \text{ якщо } 2<x\le 4,\\ 1, \text{ якщо } 4<x<7,\\ \dfrac{10-x}{3}, \text{ якщо } 7<x\le 10,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 10.\end{cases} \qquad \mu_B(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{3}, \text{ якщо } 1<x\le 4,\\ 1, \text{ якщо } 4<x<6,\\ \dfrac{8-x}{2}, \text{ якщо } 6<x\le 8,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 8.\end{cases}$$

3. Обчислити суму, різницю, добуток і частку нечітких (L–R)-чисел A_1 та A_2, скориставшись поданими нижче варіантами їх значень, якщо

$$f_1(x)=\begin{cases}1-|x|, \text{ якщо } -1<x\le 1,\\ 0 \text{ в інших випадках;}\end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases}1-x^2, \text{ якщо } -1<x\le 1,\\ 0 \text{ в інших випадках,}\end{cases}$$

а) $A_1=\langle 3;2;1\rangle$, $A_2=\langle 4;2;2\rangle$, $L(x)=f_1(x)$, $R(x)=f_1(x)$;

б) $A_1=\langle 3;2;2\rangle$, $A_2=\langle 3;5;2;2\rangle$, $L(x)=f_2(x)$, $R(x)=f_1(x)$;

в) $A_1=\langle 1;2;1;1\rangle$, $A_2=\langle 3;4;2;3\rangle$, $L(x)=f_2(x)$, $R(x)=f_2(x)$.

4. Записати ТНІ «приблизно від 5 до 8» та ТНЧ «приблизно 3». Визначити їх суму, різницю, добуток і частку.

5. Описати два нечітких трикутних числа «~2», «~5» й отримати нечіткі числа «~4», «~3», «~ –3», «~ –1». Результат подати графічно.

6. Описати два нечітких трикутних числа «~3», «~5» й отримати нечіткі числа «~2», «~9», «~ 1/3», «~ –5». Результат подати графічно.

7. Записати ТНІ: «від 3 до 5», «від –1 до –0,1». Визначити їх суму, різницю, добуток і частку.

8. Описати нечітку множину A – «престижний мобільний телефон» (універсум X визначити самостійно).

9. Нехай задано, що універсальна множина $E=\{1,2,3,4,5,6\}$. Необхідно визначити нечітку множину A – «значно менше від 5», якщо в опитуванні взяли участь 5 експертів, результати опитування показано в таблиці нижче.

x	1	2	3	4	5	6
Кількість експертів, які дали позитивну відповідь	5	5	4	2	0	0

10. Припустимо, маємо чотири альтернативи, тобто $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, відповідність яких властивості A оцінюють три експерти. Думки кожного з них базуються на особистих перевагах і описані за допомогою матриць M_1, M_2, M_3 відповідно.

$$M_1=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad M_2=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_3=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Побудувати функцію належності нечіткої множини «має властивість A»

11. Припустимо, що потрібно оцінити значення показників ефективності складної системи. За результатами опитування експерта отримано таку матрицю попарних порівнянь:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&\frac{1}{3}&5&\frac{1}{3}&5&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}&1&\frac{1}{7}&3&\frac{1}{7}&2&\frac{1}{4}\\ 3&7&1&9&3&6&5\\ \frac{1}{5}&\frac{1}{3}&\frac{1}{9}&1&\frac{1}{5}&\frac{1}{2}&\frac{1}{6}\\ 3&7&\frac{1}{3}&5&1&5&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{5}&\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&2&\frac{1}{5}&1&\frac{1}{3}\\ 2&4&\frac{1}{5}&6&2&3&1\end{pmatrix}.$$

Необхідно побудувати функцію належності, яка базується на результатах експертної оцінки.

12. Маємо 10 яблук. Експерт повинен сформувати нечітку множину «взяти кілька яблук».

13. Припустимо, що універсальна множина $X = \{1, 2, \ldots 9\}$. Записати нечітку множину $\tilde{A}$ – «≈ 3».

14. Універсальна множина $X = [0;10]$. Записати нечітку множину $\tilde{B}$ – «≈ 5».

15. Маємо електричний двигун, частота обертання його ротора змінюється від 0 до 3150 хв$^{-1}$. Записати на дискретному універсумі такі нечіткі підмножини: X_1 – «частота нульова»; X_2 – «частота мала»; X_3 – «частота середня»; X_4 – «частота велика».

16. Дано таку універсальну множину: X = {праска, сірники, канат, намет, вода, чайник, каструля, ліхтар, книга, консерви, крупа, косметика, м'яч}. Описати нечітку множину «знадобиться в поході» методом парних співвідношень оцінок двох експертів.

17. Припустимо, що універсальна множина U являє собою множину дисциплін, передбачених програмою підготовки за спеціальністю «Системний аналіз», тобто

U = {*програмування*, *дискретна математика*, *нечітка логіка*, *історія, українська мова*, *операційні системи*, *системний аналіз*, *методи штучного інтелекту*}.

Побудувати функцію належності для нечіткої множини A, яка визначає поняття «буде корисним для роботи» методами оцінювання:

– одним експертом;

– парних співвідношень;

– парних порівнянь Сааті.

18. Складіть програму та обчисліть добуток і частку неперервних нечітких чисел A та B за умовами завдання 2.

РОЗДІЛ 4

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ НЕЧІТКИХ ВИХІДНИХ ДАНИХ

Мета розділу: вивчення методів прийняття рішень за наявності нечітких вихідних даних та їх застосування до розв’язування прикладних задач.

4.1. Задача досягнення нечітко визначеної мети (підхід Беллмана – Заде)

Нехай X – універсальна множина альтернатив, тобто сукупність альтернатив, серед яких ОПР здійснює вибір (інакше кажучи сукупність *можливих виборів* ОПР). *Нечіткою метою* в множині X будемо називати деяку її нечітку підмножину. Позначимо цю підмножину G. Нечітка мета описується функцією належності $\mu_G : X \to [0;1]$. Чим більший ступінь належності альтернативи x до нечіткої множини мети μ_G, тобто чим більше значення функції $\mu_G(x)$, тим вищим буде ступінь досягнення цієї мети, якщо вибрати альтернативу x за розв’язок. *Нечіткі обмеження*, або множина допустимих альтернатив, також описуються нечіткими підмножинами множини X. Позначимо їх $C_1, C_2, \dots, C_m$. Будемо вважати, що нам відомі функції належності цих нечітких множин.

Розв’язати задачу означає досягти мети й задовольнити обмеження, причому в даній її постановці слід говорити не просто про досягнення мети, а про її реалізацію тією чи іншою мірою. Необхідно також враховувати й ступінь виконання обмежень.

Основним у підході Беллмана – Заде до розв’язування цієї задачі, є те, що мету прийняття рішень і множину альтернатив розглядають як рівноважні нечіткі підмножини деякої універсальної множини альтернатив. Це дозволяє подати розв’язок задачі у відносно простому вигляді. Зокрема, у підході Беллмана – Заде вимоги задачі враховуються в описаний нижче спосіб.

Нехай, наприклад, деяка альтернатива x забезпечує досягнення мети (інакше – відповідає меті) зі ступенем $\mu_G(x)$ і задовольняє обмеження (або є допустимою) зі ступенем $\mu_C(x)$. Тоді *нечітким розв’язком* D задачі досягнення нечіткої мети називається перетин нечітких множин мети й обмежень, тобто $D = G \cap C$. Це означає, що розв’язок задачі нечітко визначеної мети також являє собою деяку нечітку підмножину універсальної множини альтернатив X. Якщо перетин множин визначати за правилом 1.7, то функція належності розв’язку μ_D буде мати такий вигляд:

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}.$$

У разі, коли в задачі наявні кілька цілей і не одне обмеження, то її нечіткий розв'язок можна описати такою функцією належності:

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_{G_1}(x), \ldots, \mu_{G_n}(x), \mu_{C_1}(x), \ldots, \mu_{C_m}(x)\}.$$

П р и к л а д 4.1. Нехай універсальна множина альтернатив $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. На цій множині задано такі множини мети й обмежень:

G – "x має бути близькою до 5" (нечітка мета);

C_1 – "x не повинна бути близькою до 4" (перше обмеження);

C_2 – "x має бути близькою до 6" (друге обмеження).

Їхні функції належності задамо таблицею.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_G(x)$	0	0,1	0,4	0,8	1	0,7	0,4	0,2	0	0
$\mu_{C_1}(x)$	0,3	0,6	0,9	1	0,8	0,7	0,5	0,3	0,2	0
$\mu_{C_2}(x)$	0,2	0,4	0,6	0,7	0,9	1	0,8	0,6	0,4	0,2

Тоді функція належності нечіткого розв'язку задачі, згідно з підходом Беллмана – Заде, набуває на множині X таких значень:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_D(x)$	0	0,1	0,4	0,7	0,8	0,7	0,4	0,2	0	0

Вочевидь, такому розв'язку притаманна невизначеність, а саме, ми отримуємо не одну альтернативу, а деяку нечітку множину альтернатив. Якщо ОПР не здатна опрацювати такий тип розв'язку, то їй можна рекомендувати альтернативу, яка має найбільший ступінь належності до нечіткого розв'язку, тобто

$$\max_{x \in X} \mu_D(x) = \max_{x \in X} \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}.$$

Таку альтернативу називають *максимізувальним розв'язком.*

Це один із найбільш поширених у літературі способів вибору єдиної альтернативи.

У наведеному вище прикладі таким розв'язком буде число 5, оскільки ступінь його належності до нечіткого розв'язку максимальна.

П р и к л а д 4.2. Розв'язати задачу досягнення нечітко визначеної мети, коли мету й обмеження подано такими функціями належності:

$$\mu_G(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{9}(x-3)^2+1, & \text{якщо } x\in(0;\ 6),\\ 0, & \text{якщо } x\notin(0;\ 6);\end{cases}$$

$$\mu_C(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}x, & \text{якщо } x\in(0;\ 6),\\ 0 & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Розв'язування

Щоб розв'язати цю задачу, використаємо підхід Беллмана – Заде, тобто

$$\mu_D(x)=\min\{\mu_G(x),\mu_C(x)\}.$$

Для зручності зобразимо графіки функцій належності мети й обмежень (див. рис. 4.1).

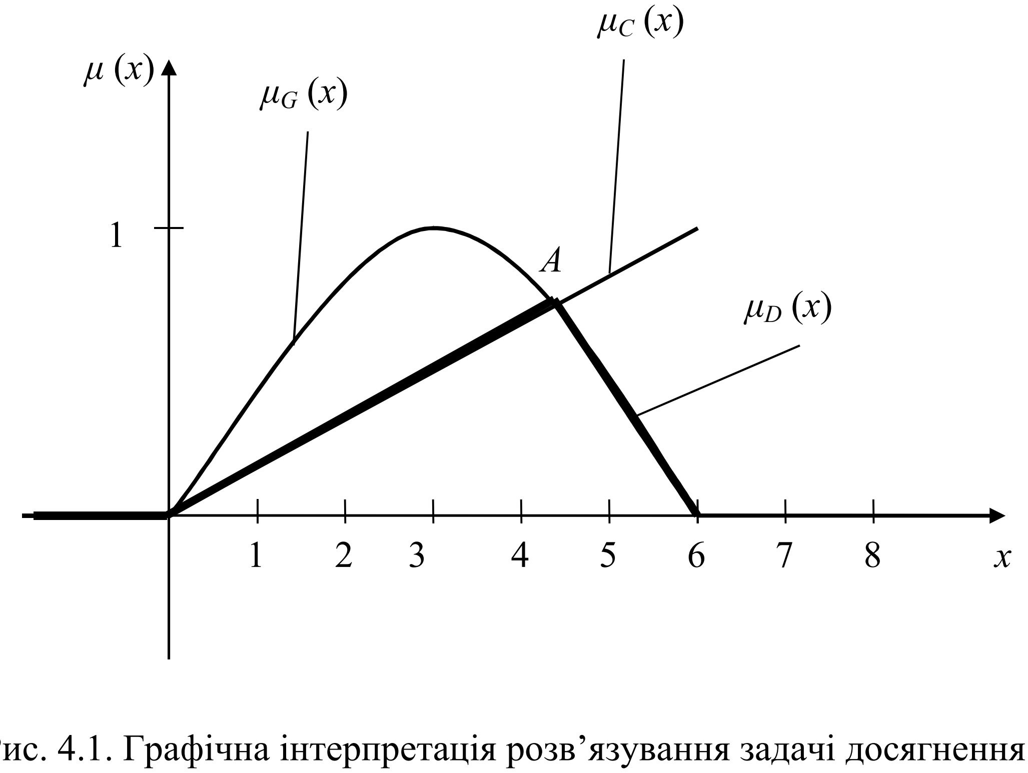


Рис. 4.1. Графічна інтерпретація розв'язування задачі досягнення нечітко визначеної мети

Тут товстою лінією показано функцію належності нечіткого розв'язку *D*. Опишемо її аналітично. Для цього знайдемо точки перетину графіків функцій належності мети й обмеження.

Складемо таке рівняння:

$$-\frac{1}{9}(x-3)^2+1=\frac{1}{6}x.$$

Розв'язавши його, отримаємо координати двох точок перетину: $x_1 = 0$ та $x_2 = 4{,}5$. Тепер можемо записати функцію належності розв'язку в аналітичному вигляді, а саме:

$$\mu_D(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x, \text{ якщо } x\in(0;\ 4{,}5),\\ -\frac{1}{9}(x-3)^2+1, \text{ якщо } x\in(4{,}5;\ 6),\\ 0 \text{ в інших випадках.}\end{cases}$$

Максимізувальним розв'язком буде альтернатива: $x_2 = 4{,}5$, а ступінь її належності до нечіткого розв'язку $\mu_D(x_2)=0{,}75$.

Розглянута вище ситуація прийняття рішень характеризувалася тим, що й мета, і обмеження були підмножинами однієї і тієї самої універсальної множини. Більш універсальною може бути інша постановка задачі, коли нечітка мета й обмеження є підмножинами різних універсальних множин. Розглянемо її.

Нехай, як і раніше, X – універсальна множина альтернатив, і нехай подано відображення $\varphi: X\to Y$, значення якого (елементи множини Y) можна розуміти як реакції деякої системи на вихідні дії $x\in X$ або як деякі оцінки вибору відповідних альтернатив. Відображення φ вважаємо однозначним.

Нечітка мета при цьому описується у вигляді нечіткої підмножини універсальної множини реакцій (оцінок) Y, тобто функцією належності $\mu_G: Y\to[0;1]$, а обмеження являють собою нечіткі підмножини вихідної множини X, функції належності яких $\mu_{C_i}: X\to[0;1]$, $i=1,2,\dots,m$.

Задача при цьому зводиться до першої постановки (тобто до випадку, коли мета виступає нечіткою підмножиною множини X). Розглянемо її.

Визначимо нечітку множину альтернатив станів $\bar{\mu}_G$, які забезпечують досягнення даної мети μ_G. Ця множина є прообразом нечіткої множини μ_G при відображенні φ, тобто

$$\bar{\mu}_G(x)=\mu_G(\varphi(x)).$$

Після цього вихідну задачу розглядають як задачу досягнення нечіткої мети $\bar{\mu}_G$ за тих самих нечітких обмежень.

В и з н а ч е н н я 4.1. Нехай G й C – нечіткі множини мети (у множині Y) та обмежень (у множині X). *Нечітким розв'язком* задачі досягнення мети G при обмеженнях C назвемо максимальну множину D, яка має такі властивості:

1. $D\subset C$ (розв'язок є допустимою альтернативою);

2. $\varphi(D)\subset G$ (досягнення нечіткої мети), де $\varphi(D)$ – образ D при нечіткому відображенні φ.

У разі, коли задано нечітке відображення множини альтернатив у множину реакцій або оцінок, нечіткий розв'язок можна знайти, користуючись визначенням прообразу, що подано в попередньому розділі.

Нехай X – універсальна множина альтернатив, Y – універсальна множина оцінок, а також задано нечітке відображення X в Y, функція належності якого $\mu_\varphi : X\times Y \to [0;\,1]$. Кожній альтернативі це відображення ставить у відповідність її нечітку оцінку. Нечіткі обмеження описуються функцією належності $\mu_C(x)$.

За теоремою 2.5. прообраз D визначають таким чином:

$$N=\{(x,y)\mid (x,y)\in X\times Y,\ \mu_\varphi(x,y)>\mu_G(y)\},$$

$$N_x=\{y\mid y\in Y,\ (x,y)\in N\},$$

$$X^0=\{x\mid x\in X,\ N_x\neq\varnothing\},$$

$$\mu_{\tilde D}(x)=\begin{cases}\inf\limits_{y\in N_x}\mu_G(y), & x\in X,\\ 1, & x\in X\setminus X^0.\end{cases}$$

Тоді нечіткий розв'язок описується такою функцією належності:

$$\mu_D(x)=\min\{\,\mu_{\tilde D}(x), \mu_C(x)\,\},$$

або

$$\mu_{\tilde D}(x)=\begin{cases}\min\left\{\mu_C(x),\ \inf\limits_{y\in N_x}\mu_G(x)\right\}, & x\in X,^0\\[2ex] \mu_C(x), & x\in X\backslash X^0.\end{cases}$$

Якщо необхідно вибрати конкретну альтернативу, то за розв'язок задачі можна, наприклад, обрати ту, ступінь належності якої до нечіткого розв'язку μ_D максимальний, тобто альтернативу, що реалізує величину $\max\limits_{x\in X}\mu_D(x)$. Однак, цей вибір не можна вважати достатньо обґрунтованим, існують також інші способи визначення єдиної альтернативи.

Отже, підхід Беллмана – Заде спирається на можливість симетричного опису множин мети й обмежень у вигляді нечітких підмножин однієї і тієї самої універсальної множини. Це дозволяє описати розв'язок задачі в досить простому вигляді. Однак, не всяка задача прийняття рішень може бути сформульована в такий спосіб.

Зауваження. Іноді важливість мети й обмежень враховують за допомогою вагових коефіцієнтів. Тоді розв'язок задачі записується таким чином:

$$\mu_D(x) = \min\{\lambda_1\mu_{G_1}(x),...,\lambda_n\mu_{G_n}(x),\nu_1\mu_{C_1}(x),...,\nu_m\mu_{C_m}(x)\},$$

тут $\lambda_1,...,\lambda_n,\nu_1,...,\nu_m$ – вагові коефіцієнти цільових функцій та обмежень відповідно.

Цей підхід також не можна вважати достатньо обґрунтованим.

4.2. Задачі нечіткого математичного програмування та їх класифікація

Стандартна задача математичного програмування звичайно являє собою задачу максимізації (або мінімізації) заданої функції на даній множині допустимих альтернатив, яку описано системою нерівностей. Наприклад,

$$f(x) \to \max,$$

$$\varphi_i(x) \le 0, \quad i = 1, ... , m,$$

$$x \in X,$$

де X – задана множина альтернатив, $f : X \to R^1$ й $\varphi_i : X \to R^1$, $i = 1,...,m$ – задані функції.

При моделюванні в такій формі реальних задач дослідник часто може мати у своєму розпорядженні лише нечіткі описи функцій f і φ або їхніх параметрів, також нечітко може бути описана й множина альтернатив X. Нечіткий опис ситуації прийняття рішень може, наприклад, відображати неадекватність інформації про цю ситуацію або бути формою наближеного опису, достатнього для розв'язування даної задачі.

Більше того, у деяких випадках точно визначена множина обмежень (допустимих альтернатив) може виявитися лише наближеною до реальної ситуації в тому сенсі, що в модельованій задачі альтернативи поза множиною обмежень не завжди бувають недопустимими, а виявляються тільки тією чи іншою мірою менш бажаними для ОПР. Прикладом такої ситуації може слугувати задача, де множиною допустимих альтернатив виступає сукупність усіляких способів розподілу ресурсів, які ОПР збирається вкласти в дану операцію. У цьому випадку, мабуть, недоцільно заздалегідь вводити чітку межу множини допустимих альтернатив (розподілів), оскільки може трапитися так, що розподіл ресурсів, котрий перебуває за цією межею, дасть ефект, який переважить "меншу" його бажаність для ОПР. Таким чином, нечіткий опис може виявитися більш наближеним до реальності, ніж в деякому сенсі довільно прийнятий чіткий опис.

Форми нечіткого опису інформації можуть бути різними, звідси й походить відмінність у математичних постановках відповідних задач *нечіткого математичного програмування* (НМП). Наведемо деякі з цих постановок, згрупованих у п'ять описаних нижче типів задач [51].

З а д а ч а I. Максимізація заданої звичайної функції на нечіткій множині альтернатив, тобто маємо таку задачу:

$$f(x) \to \max,$$
$$x \in X,$$

тут $f : X \to R^1$, $\mu_G : X \to [0;1]$.

Опишемо підходи до розв'язування цієї задачі.

1. *Зведення до задачі нечітко визначеної мети.*

Для цього вихідна цільова функція нормується в такий спосіб:

$$\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{\sup\limits_{x \in \operatorname{supp} \mu_C} f(x)} \to \max.$$

Отриману функцію $\bar{f}(x)$ вважають функцією належності нечіткої мети. При цьому значення $\bar{f}(x)$ буде ступенем досягнення мети при виборі альтернативи $x \in X$. Це дозволяє безпосередньо застосувати до розв'язування цієї задачі підхід Беллмана – Заде. Раціональним вважається вибір альтернативи, яка має максимальний ступінь належності до нечіткого розв'язку, тобто реалізує таку величину:

$$\max_{x \in X} \min\{\mu_C(x), \bar{f}(x)\}.$$

2. *Зведення до задачі багатокритерійної оптимізації.*

У цьому підході враховується той факт, що потрібно досягти максимального значення функції і максимальної належності розв'язку задачі до множини допустимих альтернатив, тобто розв'язується така багатокритерійна задача:

$$f(x) \to \max,$$
$$\mu_C(x) \to \max,$$
$$x \in X.$$

Цей підхід детальніше буде розглянуто далі.

З а д а ч а ІІ. Нечіткий варіант стандартної задачі математичного програмування.

Розглянемо стандартну задачу математичного програмування, а саме:

$$f(x) \to \max,$$
$$\varphi(x) \le 0,$$
$$x \in X.$$

Її нечіткий варіант можна отримати, якщо "пом'якшити" обмеження, тобто припустити можливість деякого їх порушення. Крім того, замість максимізації функції $f(x)$, можна прагнути досягнення певного фіксованого значення цієї функції, причому різним відхиленням $f(x)$ від цієї величини приписувати різні ступені допустимості (наприклад, чим більше відхилення, тим менший ступінь його допустимості). Нечітку задачу при цьому можна записати таким чином:

$$f(x) \ge z_\circ,$$
$$\varphi(x) \mathrel{\tilde{\le}} 0,$$
$$x \in X,$$

тут символ $\sim$ означає нечіткість відповідних нерівностей.

Опишемо один із способів формалізації таких задач.

Припустимо, що $z_\circ$ – задана величина цільової функції $f(x)$, досягнення якої вважається достатнім для виконання мети прийняття рішення, а також існують (подані ОПР) два граничних рівні a та b, причому нерівність: $f(x) < z_\circ - a$, означає сильне порушення умови: $f(x) \ge z_\circ$, а $\varphi(x) > b$ – сильне порушення умови: $\varphi(x) \le 0$. Тоді можна записати множини мети й обмежень, використовуючи такі функції належності:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \le z_\circ - a, \\ \mu(x,a), & z_\circ - a < f(x) < z_\circ, \\ 1, & f(x) \ge z_\circ, \end{cases}$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, & \varphi(x) \ge b, \\ \nu(x,b), & 0 < \varphi(x) < b, \\ 1, & \varphi(x) \le 0, \end{cases}$$

тут $\mu : X \to [0;\, 1]$ та $\nu : X \to [0;\, 1]$ – це деякі функції, що описують міру виконання відповідних нерівностей з погляду ОПР та залежно від конкретної задачі прийняття рішень.

Таким чином, вихідну задачу буде сформульовано у вигляді задачі досягнення нечітко визначеної мети, до якої можна застосувати підхід Беллмана – Заде, або звести її до задачі багатокритерійної оптимізації, а саме:

$$\mu_G(x) \to \max,$$
$$\mu_C(x) \to \max,$$
$$x \in X.$$

Детальніше методи розв'язування цієї задачі буде розглянуто нижче.

З а д а ч а III. Дано нечітко описану функцію, яку необхідно "максимізувати", тобто відображення $\mu_\varphi : X \times R^1 \to [0;1]$, де X – універсальна множина альтернатив, R^1 – числова вісь. У цьому випадку функція $\mu_\varphi(x_0, r)$ для кожної фіксованої альтернативи $x_0 \in X$ являє собою нечітку оцінку результату її вибору (нечітку *оцінку* альтернативи x_0) або нечітку реакцію системи на керівний вплив x_0. Задано також нечітку множину допустимих альтернатив $\mu_C : X \to [0;1]$.

До такої постановки зводяться задачі нечіткого математичного програмування багатьох класів. Методи їх розв'язування розглянуто в літературі [28, 51].

З а д а ч а IV. Задано звичайну цільову функцію $f : X \to R^1$ та систему обмежень: $\varphi_i(x) \le b_i$, $i = 1, \dots, m$. Причому параметри в описі функцій $\varphi_i(x)$ задано нечітко, зокрема у формі нечітких множин.

Наприклад, у лінійному випадку $\left(X = R^n\right)$ функції $\varphi_i(x)$ мають такий вигляд:

$$\varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

а кожен з параметрів a_{ij} та b описано відповідною нечіткою множиною $\mu_{ij}(a_{ij})$, $\nu_i(b_i)$.

Розроблено кілька способів розв'язування таких задач.

Одним з них є метод модальних значень. Він полягає в тому, що нечіткий параметр замінюється своїм модальним значенням, а потім розв'язується отримана скалярна задача. Ступінь належності отриманого розв'язку обчислюється як мінімум серед ступенів належності модальних значень параметрів. Однак цей метод можна застосовувати тоді, коли функції належності параметрів унімодальні, тобто кожна з них досягає свого максимального значення тільки в одній точці. Коли ж ця вимога не виконується, то питання про те, яке саме із значень параметрів, що мають найвищий ступінь належності треба вибирати, залишається відкритим.

Інший спосіб розв’язування полягає у зведенні вихідної задачі до типу I.

Існують також методи, в основі яких зведення вихідної задачі до задачі багатокритерійної оптимізації [28], їх буде розглянуто нижче у п. 4.4.

З а д а ч а V. У її умові нечітко описано і параметри функцій обмежень, і параметри цільової функції.

Один з підходів до її розв’язування – зведення до задачі типу III.

4.3. Задачі математичного програмування з нечіткими обмеженнями

Нехай на універсальній множині альтернатив X задано функцію $\varphi\colon X \to R^1$, значеннями якої оцінюються результати вибору альтернатив, і описано нечітку підмножину допустимих альтернатив $\mu_C : X \to [0;1]$. Належить “максимізувати” в деякому сенсі функцію φ на нечіткій множині μ_C, тобто

$$\begin{aligned} &\varphi(x) \to \max, \\ &x \in \widetilde{C}. \end{aligned}$$

Це означає, що під “максимізацією” можна розуміти вибір нечіткої підмножини μ_D (нечіткого рішення), якому відповідає найкраще в деякому сенсі нечітке значення функції φ. Зрозуміло, що подання розв’язку в такій формі доцільне тільки тоді, коли його зміст сприймається ОПР.

Якщо ж ОПР не сприймає нечіткого опису задачі, то під “максимізацією” функції φ слід розуміти раціональний вибір конкретної альтернативи або множини альтернатив.

Раціональність при цьому означає, що, вибираючи конкретну альтернативу, ОПР має виходити з необхідності компромісу між бажанням отримати якомога більше значення функції φ та прагненням віддати перевагу допустимій альтернативі, яка має найбільший ступінь належності до множини допустимих альтернатив.

Розглянемо два підходи до розв’язування цієї задачі, їх обґрунтування наведено в літературі [51].

4.3.1. Підхід 1, який базується на множинах рівня нечіткої множини обмежень

Цей підхід полягає в тому, що вихідна задача нечіткого математичного програмування формулюється у вигляді сукупності звичайних задач максимізації функції φ на всіляких множинах рівня множини допустимих альтернатив. Якщо ж альтернатива $x_0 \in X$ є розв’язком задачі: $\varphi(x) \to \max$, на множині рівня λ, то природно вважати, що ступінь її належності до нечіткої множини розв'язків задачі не менший від числа λ.

Таким чином, перебравши всілякі значення λ, одержимо функцію належності нечіткого розв'язку.

Опишемо цей підхід більш детально.

Позначимо через C_λ множину рівня λ нечіткої множини допустимих альтернатив μ_c, тобто

$$C_\lambda = \{x \mid x \in X, \mu_C(x) \geq \lambda\}.$$

За умови що $C_\lambda \neq \varnothing$, уведемо таку множину:

$$N(\lambda) = \left\{ x \,\middle|\, x \in X, \varphi(x) = \sup_{x' \in C_\lambda} \varphi(x') \right\}, \text{ для всіх значень } \lambda \geq 0 .$$

Це множина розв'язків звичайної задачі максимізації функції φ на множині альтернатив, ступінь належності яких до множини допустимих альтернатив вихідної задачі нечіткого математичного програмування (НМП) не менший за λ.

Для побудови функції належності нечіткого розв'язку необхідно кожній альтернативі $x \in X$ приписати ступінь належності до цієї множини. Зробимо це таким чином: ступенем належності альтернативи x_0 до нечіткої множини розв'язків будемо вважати максимальне (точніше верхню границю) з чисел λ, для яких відповідна множина $N(\lambda)$ містить альтернативу x_0.

В и з н а ч е н н я 4.2. Розв'язком задачі НМП будемо називати нечітку підмножину μ_D, яка описується такою функцією належності:

$$\mu^1(x) = \sup_{\lambda : x \in N(\lambda)} \lambda . \tag{4.1}$$

Назвемо його розв'язком типу 1.

Т в е р д ж е н н я 4.1. Якщо $x \in \operatorname{supp} \mu^1(x)$, то $\mu^1(x) = \mu_C(x)$.

Доведення

а) Коли $x \in \operatorname{supp} \mu^1(x)$ і $\mu^1(x) > \mu_C$, то $\sup\limits_{\lambda : x \in N(\lambda)} > \mu_C(x)$. Це означає, що існує число $\tilde{\lambda}$, яке задовольняє такі умови: $\tilde{\lambda} > \mu_C(x)$, і $x \in N(\tilde{\lambda})$. Тоді, відповідно до визначення нечіткого розв'язку, $x \in C_{\tilde{\lambda}}$, а тому $\mu_C(x) \geq \tilde{\lambda}$, тобто нерівність: $\lambda > \mu_C(x)$, неможлива.

б) Якщо ж $x \in \operatorname{supp} \mu^1(x)$ і $\mu^1(x) < \mu_C(x)$, тобто

$$\sup_{\lambda : x \in N(\lambda)} < \mu_C(x) = \nu, \tag{4.2}$$

то для будь-якого числа λ, що задовольняє умову $x \in N(\lambda)$, виконується включення $x \in C_\nu \subset C_\lambda$, крім того, $x \notin N(\lambda)$, оскільки в протилежному випадку із нерівності (4.2) випливає, що $\nu < \nu$. Звідси

$$\varphi(x) < \sup_{x' \in C_\nu} \varphi(x') \le \sup_{x' \in C_\lambda} \varphi(x') = \varphi(x).$$

Тим самим твердження доведено.

З огляду на твердження 4.1. і на визначення розв'язку його функцію належності можна записати у такому вигляді:

$$\mu^1(x) = \begin{cases} \mu_C(x), & \text{якщо } x \in \bigcup\limits_{\lambda > 0} N(\lambda), \\ 0 \text{ в інших випадках,} \end{cases} \tag{4.3}$$

таким чином,

$$\operatorname{supp} \mu^1(x) = \bigcup_{\lambda > 0} N(\lambda).$$

Будемо говорити, що розв'язок типу 1 існує, якщо $\mu^1(x) \ne 0$ на множині *X*, тобто тоді й тільки тоді, коли знайдеться таке число: $\lambda > 0$, для якого $N(\lambda) \ne \varnothing$.

Нечіткому розв'язку відповідає *нечітке* “максимальне” *значення* $\mu_\varphi(r)$ функції $\varphi(x)$. Воно є образом нечіткої множини $\mu^1(x)$ при відображенні φ і відповідно до визначення 3.36 має такий вигляд:

$$\mu_\varphi(r) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(r)} \mu^1(x) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(r)} \sup_{x \in N(\lambda)} \lambda, \tag{4.4}$$

тут

$$\varphi^{-1}(r) = \{x \mid x \in X, \varphi(x) = r\}.$$

Якщо задача НМП не має розв'язку типу 1, то можемо скористатися *ε-оптимальним нечітким розв'язком*, який для заданого числа $\varepsilon > 0$, можна визначити таким чином:

$$\mu_\varepsilon^1(x) = \sup_{\lambda : x \in N(\varepsilon, \lambda)} \lambda, \tag{4.5}$$

тут $$N(\varepsilon, \lambda) = \left\{ x \,\middle|\, x \in X, \varphi(x) \ge \sup_{x' \in C_\lambda} \varphi(x') - \varepsilon \right\}. \tag{4.6}$$

Відповідне йому нечітке значення функції φ описується такою функцією належності:

$$\mu_\varphi^\varepsilon(x) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(r)} \mu_\varepsilon^1(x). \tag{4.7}$$

Границю послідовності μ_φ^ε, коли $\varepsilon \to 0$ можна вважати верхньою нечіткою границею функції φ на нечіткій множині μ_C.

Поняття ε-оптимального розв'язку може бути корисним не тільки тоді, коли $\mu^1(x) = 0$ для всіх альтернатив $x \in X$, але й тоді, коли $N(\lambda) = \varnothing$ при деяких значеннях λ із інтервалу $[0;1]$.

Розглянемо властивості розв'язку 1.

1. Для будь-якого числа r_0 за умови, що $\mu_\varphi(r_0) > 0$, знайдеться така альтернатива: $\tilde{x} \in X$, для якої $\varphi(\tilde{x}) = r_0$ й $\tilde{x} \in N(\lambda)$ при деякому значенні $\lambda > 0$, тобто

$$r_0 \in \operatorname{supp}\ \mu_\varphi \Rightarrow \left[\bigcup_{\lambda>0} N(\lambda)\right] \cap \varphi^{-1}(r_0) \neq \varnothing. \tag{4.8}$$

2. Якщо $r_0 \in \operatorname{supp}\ \mu_\varphi$, то $\sup\limits_{x \in \varphi^{-1}(r_0)} \mu^1(x) = \sup\limits_{x \in \varphi^{-1}(r_0)} \mu_C(x)$.

3. Функція $\mu_\varphi(r)$ монотонно спадає на множині $\operatorname{supp} \mu_\varphi$.

Функцію $\mu_\varphi(r)$ описано таким чином, що її значення для конкретного числа $r \in R^1$ є максимальним ступенем належності альтернативи x множині $\mu_C(x)$, у межах якої функція $\varphi(x)$ набуває значення r.

Відповідно до третьої властивості функція $\mu_\varphi(r)$ монотонно спадає на множині $\operatorname{supp} \mu_\varphi$. Це означає, зокрема, що в межах множини X немає жодної альтернативи, для якої виконувалися б одночасно нерівності: $\mu_C(x) > \mu_\varphi(x) > 0$ й $\varphi(x) > r$, тобто не існує такого елемента $x \in X$, що мав би більший, ніж $\mu_\varphi(r)$ ступінь належності $\mu_C(x)$ й забезпечив би більше від r значення максимізованої функції.

Якщо нечіткий розв'язок для ОПР неприйнятний і необхідно вибрати конкретну альтернативу $x \in X$, то цей вибір має спиратися не тільки на ступінь належності цієї альтернативи до нечіткої множини $\mu_C(x)$, але й на відповідне значення функції $\varphi(x)$. Як випливає з третьої властивості, чим більше значення r_0, тим менше значення ступеня належності $\mu_C(x)$ тієї альтернативи, яка забезпечує досягнення цього значення. Тому ОПР повинна спочатку звернутися до нечіткого максимального значення $\mu_\varphi(r)$ функції $\varphi(x)$ й обрати пару $(r_0, \mu_\varphi(r_0))$, яка відповідає її прагненню отримати більше значення r_0, й одночасно досягти якомога вищого значення ступеня його належності до множини $\mu_\varphi(r)$. Після вибору такої пари доречно зупинитись на такій альтернативі $x_{\circ} \in \varphi^{-1}(r_{\circ})$, що має найбільший ступінь належності множині $\mu_C(x)$ (або на альтернативі, що в деякому сенсі близька до x).

Описаний підхід виявляється незручним з двох причин.

По-перше, у цьому розв’язку недостатньо явно враховується необхідність компромісу між значеннями максимізованої функції та значеннями ступеня належності альтернативи до множини допустимих рішень.

По-друге, він незручний для обчислення.

Якщо функція належності неперервна, то застосування цього підходу потребує розгляду нескінченної кількості задач, оскільки нескінченною буде кількість множин рівня. Однак для практичного використання буде достатньо розглянути скінченну множину задач для множин рівня, визначених експертами або ОПР.

Розглянемо застосування описаного підходу для лінійної задачі НМП.

П р и к л а д 4.3. Розв’язати таку задачу нечіткого математичного програмування:

$$\begin{aligned} & f(x_1,x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \max, \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ & x_1 + 6x_2 \leq 18, \\ & 2x_1 + 3x_2 \,\tilde{\leq}\, 12, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Будемо вважати, що нечіткі обмеження описуються такою функцією належності:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } 2x_1 + 3x_2 \geq 14, \\ 0{,}5, \text{ якщо } 13 \leq 2x_1 + 3x_2 \leq 14, \\ 0{,}7, \text{ якщо } 12 \leq 2x_1 + 3x_2 \leq 13, \\ 1, \text{ якщо } 2x_1 + 3x_2 \leq 12. \end{cases}$$

Розв’язування

Використаємо метод розкладання на множини рівня. Враховуючи вигляд функції належності обмежень, необхідно розв’язувати задачі на таких множинах рівня: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 0{,}7$; та $\lambda_3 = 0{,}5$.

Якщо $\lambda_1 = 1$, то задача набуває такого вигляду:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1,x_2)=2x_1+5x_2\to\max,\\
&2x_1+3x_2\ge 6,\\
&x_1+6x_2\le 18,\\
&2x_1+3x_2\le 12,\\
&x_1,x_2\ge 0.
\end{aligned}
$$

Коли λ_2 = 0,7, то маємо таку задачу:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1,x_2)=2x_1+5x_2\to\max,\\
&2x_1+3x_2\ge 6,\\
&x_1+6x_2\le 18,\\
&2x_1+3x_2\le 13,\\
&x_1,x_2\ge 0.
\end{aligned}
$$

Якщо рівень λ_3 = 0,5, то задачу буде записано в такому вигляді:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1,x_2)=2x_1+5x_2\to\max,\\
&2x_1+3x_2\ge 6,\\
&x_1+6x_2\le 18,\\
&2x_1+3x_2\le 14,\\
&x_1,x_2\ge 0.
\end{aligned}
$$

Ми отримали задачі лінійного програмування і для їх розв’язування можна застосовувати, наприклад, симплекс-метод, або, оскільки кожна з них має лише дві змінні, розв’язати їх графічно.

З цією метою зобразимо на координатній площині множини рівня нечіткої множини допустимих альтернатив (див. рис. 4.2).

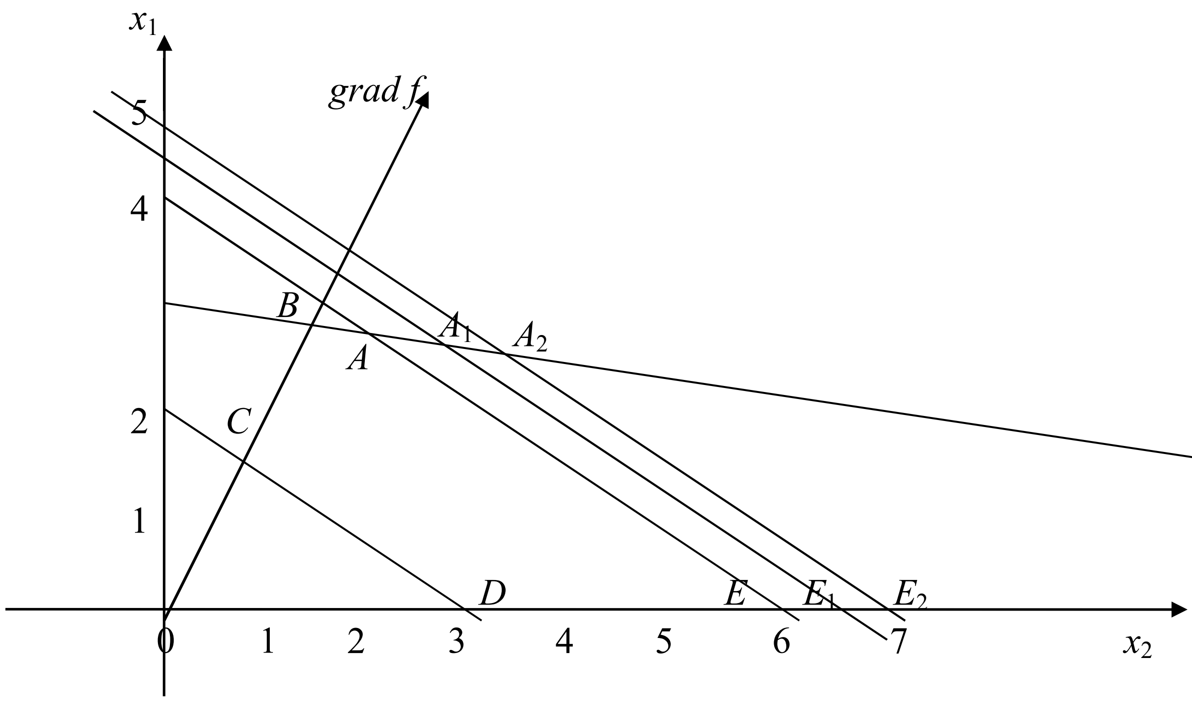


Рис. 4.2. Графічна інтерпретація розв'язування задачі нечіткого математичного програмування

Тут багатокутник $ABCDE$ відповідає множині рівня: $\lambda_1 = 1$; $A_1\, DCDE_1$ – множині рівня: $\lambda_2 = 0{,}7$; $A_2\, BCDE_2$ – множині рівня: $\lambda_3 = 0{,}5$.

Розв'язком задачі на множині рівня 1 буде точка A. Знайдемо її координати з такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 = 18, \\ 2x_1 + 3x_2 = 12. \end{cases}$$

Отримуємо такий результат: $x_1 = 2, x_2 = 2\frac{2}{3}$.

Значення цільової функції в цій точці $f(A) = 17\frac{1}{3}$.

Аналогічно знаходимо розв'язки задач на множинах рівня 0,7 та 0,5. Це точка A_1, з такими координатами $x_1 = 2\frac{2}{3}, x_2 = 2\frac{5}{9}$, і A_2 (її координати: $x_1 = 3\frac{1}{3},\ x_2 = 2\frac{4}{9}$).

Відповідні значення цільової функції: $f(A_1) = 18\frac{1}{9}$, $f(A_2) = 18\frac{2}{3}$.

Звівши одержані результати в таблицю, маємо нечіткий розв'язок задачі.

x_1	x_2	f	λ
2	$2\frac{2}{3}$	$17\frac{1}{3}$	1
$2\frac{2}{3}$	$2\frac{5}{9}$	$18\frac{1}{9}$	0,7
$3\frac{1}{3}$	$2\frac{4}{9}$	$18\frac{2}{3}$	0,5

Нагадаємо, що коли функції належності неперервні, то необхідно розв'язувати задачі на нескінченній кількості множин рівня. Але на практиці достатньо визначити для розгляду кілька рівнів.

4.3.2. Підхід 2 й еквівалентність розв'язків обох типів

Для цього підходу характерно те, що із самого початку явно враховується прагнення ОПР при виборі альтернативи отримати якомога більші значення як максимизованої функції, так і функції належності нечіткої множини допустимих альтернатив.

З цією метою до визначення розв'язку включають тільки ті альтернативи, які в задачах багатокритерійної оптимізації називаються ефективними за Парето.

Нагадаємо, що альтернатива $x_0 \in X$ називається ефективною за двома функціями $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$, коли для будь-якої іншої альтернативи $x' \in X$ з нерівностей: $\varphi(x') \geq \varphi(x_0)$ й $\mu_C(x') \geq \mu_C(x_0)$, випливає, що $\varphi(x') = \varphi(x_0)$ й $\mu_C(x') = \mu_C(x_0)$.

Інакше, якщо x_0– ефективна альтернатива для функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$ на множині X, то, вибравши будь-яку іншу альтернативу, не можна збільшити, порівняно з $\varphi(x_0)$ та $\mu_C(x_0)$, значення однієї функції, не зменшивши при цьому значення іншої.

У задачі прийняття рішень за наявності кількох критеріїв множина ефективних альтернатив виступає як сукупність запропонованих варіантів раціонального вибору, який здійснює ОПР.

Отже, нехай P – множина всіх ефективних альтернатив для функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$, які розглядаються в задачі нечіткого математичного програмування.

В и з н а ч е н н я 4.3. Розв'язком задачі НМП називають нечітку множину, функція належності якої

$$\mu^2(x) = \begin{cases} \mu_C(x), \text{ коли } x \in P, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \tag{4.9}$$

Назвемо його розв'язком типу 2.

У цьому визначенні явно припускається, що ОПР має використовувати в процесі прийняття рішення тільки ті альтернативи універсальної множини *X*, які дають одночасно неполіпшувані значення функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$.

Відповідне розв'язку типу 2 нечітке значення функції $\varphi(x)$ записується в такому вигляді:

$$\mu_\varphi^2(r) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(r)} \mu^2(x), \qquad r \in R^1. \tag{4.10}$$

Встановимо співвідношення між розв'язками обох типів.

Т е о р е м а 4.1 [51]. Якщо множина *X* компактна, функція $\varphi(x)$ неперервна, а функція $\mu_C(x)$ напівнеперервна зверху на множині *X*, то для кожного значення $r \in R^1$ виконується така рівність:

$$\mu_\varphi^1(r) = \mu_\varphi^2(r). \tag{4.11}$$

З огляду на визначення 4.3, реалізацію розв'язку типу 2 зведено до визначення множини ефективних альтернатив функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$. Однак ця множина включає, у загальному випадку, нескінченну кількість елементів, а її побудова являє собою досить складне завдання.

Разом з тим, для отримання такого розв'язку в конкретній задачі достатньо, щоб було визначено скінченну кількість ефективних альтернатив, рівномірно вибраних із множини *P*.

Для їх відшукування можна скористатися такою властивістю (див. [64], розділ 3, теорема 3.1):

Коли існують такі числа v_1, v_2 ($v_1 > 0$, $v_2 > 0$, $v_1 + v_2 = 1$), стосовно яких альтернатива x_0 забезпечує досягнення на множині *X* максимуму функції: $F(x) = v_1\varphi(x) + v_2\mu_C(x)$, то ця альтернатива є ефективною для цільових функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$.

Таким чином, надаючи різних додатних значень ваговим коефіцієнтам функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$ і максимізуючи відповідні функції $F(x)$, можна визначити будь-яку необхідну кількість ефективних альтернатив.

Отримані при цьому альтернативи разом з відповідними значеннями функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$ передаються в розпорядження ОПР, яка й робить остаточний вибір, виходячи із своїх суб'єктивних уявлень (або використовуючи інформацію, що не була врахована в даній математичній моделі) про відповідну важливість значень функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$.

4.4. Задача нечіткого математичного програмування із нечіткими параметрами

Розглянемо тепер задачі нечіткого математичного програмування із нечіткими параметрами в цільовій функції (тип IV за розглянутою класифікацією), тобто задачі такого вигляду:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max, \tag{4.12}$$

за таких обмежень:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \le b_j, \ j = \overline{1,m}, \\ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,n}, \end{gathered} \tag{4.13}$$

тут $x = \left(x_1, x_2, \dots x_n\right)$, $b_1, b_2, \dots b_m$ – задані дійсні числа, а коефіцієнти $c_1, c_2, \dots c_n$ цільової функції задано нечітко.

Припустимо, що ОПР може тільки назвати інтервали $\left[c_i^L; c_i^R\right]$ значень коефіцієнтів $c_1, c_2, \dots c_n$ цільової функції. Тоді вихідну задачу можна розглядати як багатокритерійну із нескінченною множиною критеріїв. За цих умов визначити повний розв’язок, який містить усі ефективні альтернативи, часто неможливо або ці обчислення будуть занадто громіздкими, тому більшість підходів до розв’язування таких задач базуються на безпосередньому визначенні деякого компромісного розв’язку. Розглянемо деякі методи побудови компромісних розв’язків.

4.4.1. Пошук компромісного розв’язку на основі вибору очікуваних значень параметрів

Один із способів визначення компромісного розв’язку задачі багатокритерійної оптимізації полягає в перетворенні множини цільових функцій у єдину компромісну цільову функцію та в розв’язуванні отриманої однокритерійної задачі, розв’язок якої і буде шуканим компромісним розв’язком.

Найпростіший спосіб перетворення полягає в тому, що з кожного інтервалу $\left[c_i^L; c_i^R\right]$, $i = \overline{1,n}$, ми вибираємо єдиного «представника» $\hat{c}_i$, $i = \overline{1,n}$ і замість задачі (4.12) – (4.13), розв’язуємо задачу максимізації функції: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i x_i$, за тих самих обмежень, а саме:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\hat{c}_i x_i \to \max, \qquad (4.14)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \le b_j,\ \ j=\overline{1,m}, \qquad (4.15)$$
$$x_i \ge 0,\ \ i=\overline{1,n}.$$

Тут постає питання вибору «представників» $\hat{c}_i$, $i=\overline{1,n}$.

Очевидно, що межові значення c_i^L та c_i^R будуть невдалим вибором, оскільки вони відповідають найбільш песимістичному (c_i^L) або дуже оптимістичному (c_i^R) судженню. Коли ОПР має яку-небудь інформацію про можливість появи тих чи інших значень, то доцільним буде вибирати ті, що мають найбільші шанси появи, але, як правило, ОПР такої інформації не має і тому вибирає для розгляду середину інтервалу $\left[c_i^L;c_i^R\right]$, а саме: $\hat{c}_i=\dfrac{c_i^L+c_i^R}{2}$, $i=\overline{1,n}$, та отримує цільову функцію такого вигляду:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\hat{c}_i x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i^L+c_i^R}{2}x_i=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^L x_i+\sum_{i=1}^{n}c_i^R x_i\right). \qquad (4.16)$$

Цей варіант може бути розвинений далі, якщо при виборі керуватися уявленням ОПР про можливість оптимістичного чи песимістичного перебігу подій. Тоді доцільним можна вважати вибір «представників» $\hat{c}_i$, $i=\overline{1,n}$ на основі критерію Гурвіца, а саме: $\hat{c}_i=\alpha c_i^L+\left(1-\alpha\right)c_i^R$, де параметр α означає рівень «песимізму-оптимізму» ОПР і набуває значення із інтервалу $\left[0;1\right]$. Тоді маємо таку цільову функцію:

$$f_{Hur}(x)=\sum_{i=1}^{n}\hat{c}_i x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha c_i^L+\left(1-\alpha\right)c_i^R\right)x_i=\alpha\sum_{i=1}^{n}c_i^L x_i+\left(1-\alpha\right)\sum_{i=1}^{n}c_i^R x_i\,. \qquad (4.16)$$

Ці методи мають один спільний недолік – у них не враховано всі значення інтервалів коефіцієнтів, бо до уваги беруться тільки їх крайні значення.

Для врахування більш повної інформації можна використовувати методи побудови цільової функції, які включають прийняття рішень в умовах невизначеності [64].

Алгоритм побудови компромісної функції в цьому разі може бути описаний у такий спосіб:

1. Фіксують деяку множину взаємовиключних станів середовища: $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,...\theta_s\}$

2. Для кожного з станів θ_j визначають набір параметрів $c_{1j},c_{2j},\ldots c_{nj}$.

3. Залежно від того, яку інформацію мають про множину Θ, будують компромісну функцію.

Наприклад, якщо відомі ймовірності $p_1, p_2, \ldots p_s$ станів середовища $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_s$, то можна визначити параметр $\hat{c}_i$ таким чином: $\hat{c}_i = \sum_{j=1}^{s} c_{ij} p_j$. Якщо інформації про ймовірність станів середовища немає, то можна скористатися критерієм Бернуллі – Лапласа [64], тобто $\hat{c}_i = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s} c_{ij}$, коли ж відоме відношення порядку на множині станів середовища – точковими оцінками Фішборна.

Розглянемо приклад застосування таких компромісних функцій.

Приклад 4.4. Знайти розв'язок поданої нижче задачі нечіткого математичного програмування.

$$f(x_1, x_2) = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 95, \\ 2x_1 + 21x_2 \le 357, \\ 2x_1 + x_2 \le 42, \\ 11x_1 + x_2 \le 198, \\ 9x_1 + 10x_2 \le 252, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$

якщо $\tilde{c}_1 = [1; 12]$, $\tilde{c}_2 = [3; 5]$.

Розв'язування

Розв'яжемо задачу, використовуючи методи побудови компромісного розв'язку, описані вище.

Очікувані значення параметра обчислювались у припущенні, що маємо 5 станів середовища. Імовірності їх появи й очікувані значення параметрів кожного стану подано в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Відомості про очікувані значення параметрів

Стан середовища, θ_j	Імовірність, p_j	Можливі значення параметра	
		c_1	c_2
θ_1	0,3	3	4
θ_2	0,25	5	5
θ_3	0,2	10	3,5

θ_4	0,15	7	2,5
θ_5	0,1	0,5	2

Оскільки вихідна задача має тільки дві змінні, її можна розв'язати графічно. Множину допустимих розв'язків цієї задачі показано на рис. 4.3.

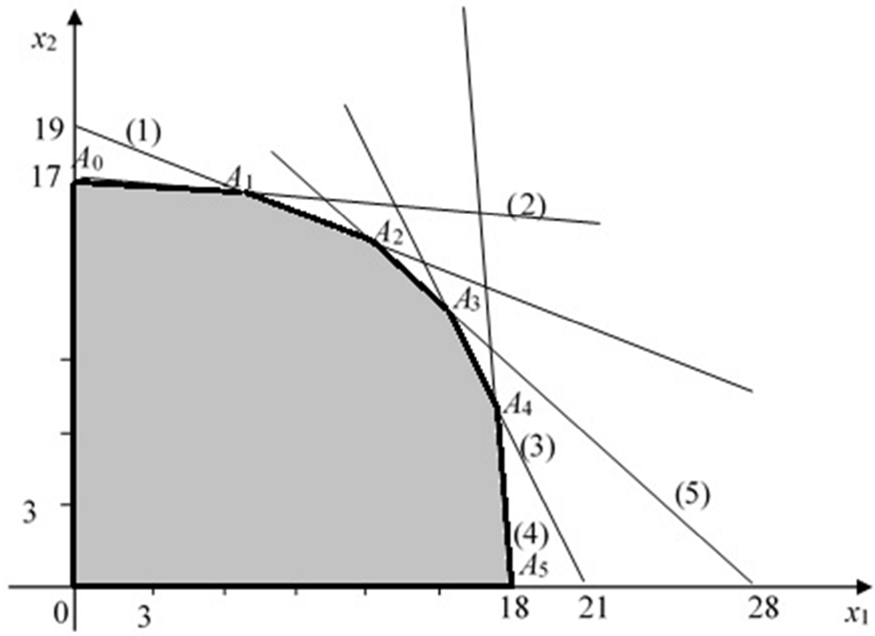


Рис. 4.3. Графічна інтерпретація задачі до прикладу 4.4

Компромісні розв'язки, що відповідають різним припущенням про інформацію, яку має ОПР, подано в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Компромісні розв'язки задачі НЛП

Метод вибору значень параметрів	$\hat{c}_1,\ \hat{c}_2$	x_1^*	x_2^*	$f^* = f\left(x_1^*, x_2^*\right)$
Мінімальні значення (песимістична позиція): $\hat{c}_i = c_i^L,\ i = \overline{1,n}$	$\hat{c}_1 = 1,\ \hat{c}_2 = 3$	6,56	16,38	55,69
Максимальні значення (оптимістична позиція): $\hat{c}_i = c_i^R,\ i = \overline{1,n}$	$\hat{c}_1 = 12,\ \hat{c}_2 = 5$	17,33	7,33	244,67

Продовження табл. 4.2

Середнє значення: $\hat{c}_i = \dfrac{c_i^L + c_i^R}{2}$, $i = \overline{1,n}$	$\hat{c}_1 = 6{,}5$, $\hat{c}_2 = 4$	15,27	11,45	145,09
За критерієм Гурвіца, якщо α = 0,7, $\hat{c}_i = \alpha c_i^L + (1-\alpha) c_i^R$, $i = \overline{1,n}$	$\hat{c}_1 = 4{,}3$, $\hat{c}_2 = 3{,}6$	15,27	11,45	106,90
За критерієм Гурвіца, якщо α = 0,9 $\hat{c}_i = \alpha c_i^L + (1-\alpha) c_i^R$, $i = \overline{1,n}$	$\hat{c}_1 = 2{,}1$, $\hat{c}_2 = 3{,}2$	12,4	14,04	70,96
За критерієм Бернуллі – Лапласа $\hat{c}_i = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s} c_{ij}$, $i = \overline{1,n}$	$\hat{c}_1 = 5{,}1$, $\hat{c}_2 = 3{,}4$	15,27	11,45	116,84
За критерієм Байєса $\hat{c}_i = \sum_{j=1}^{s} c_{ij} p_j$, $i = \overline{1,n}$	$\hat{c}_1 = 5{,}25$, $\hat{c}_2 = 3{,}725$	15,27	11,45	122,85
Найбільш імовірне значення	$\hat{c}_1 = 3$, $\hat{c}_2 = 4$	12,4	14,04	93,36

4.4.2. Вибір компромісного розв'язку методом послідовної редукції

Опишемо тепер інший метод побудови компромісного розв'язку. Він передбачає редукцію вихідної нескінченної множини цільових функцій до розгляду тільки двох функцій. Їх будують, використовуючи крайні значення інтервалів, які описують параметри цільової функції. Опишемо цей метод детальніше.

Припустимо, маємо задачу НЛП такого вигляду:

$$Z(x) = c^T x \to \max,$$
$$\begin{cases} Ax \le B, \\ x \ge 0, \end{cases} \tag{4.17}$$

тут $Z(x)$ – цільова функція, $c^T = (c_1, c_2, \ldots c_n)$ – вектор коефіцієнтів цільової функції, $x = (x_1, ..., x_n)$ – дійсний вектор змінних, $b = (b_1, ..., b_m)$ – заданий дійсний вектор обмежень, $A = \|a_{ij}\|, i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ – дійсна матриця коефіцієнтів обмежень.

Припустимо також, що ОПР, може вказати тільки інтервали $[c_i^L, c_i^R]$, $i = \overline{1,n}$ значень коефіцієнтів цільової функції.

Для здійснення редукції необхідно виконати такі операції.

1. Знайти $\max Z(y)$ при звертанні до двох граничних цільових функцій $Z_{\min}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^L x_i$, $Z_{\max}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^R x_i$, розв'язавши такі задачі ЛП:

$$Z_{\min}(x) \to \max, \\ \begin{cases} Ax \le B, \\ x \ge 0, \end{cases} \tag{4.18}$$

$$Z_{\max}(x) \to \max, \\ \begin{cases} Ax \le B, \\ x \ge 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

У результаті знаходимо розв'язки $x^*_{\min}$, $x^*_{\max}$ задач (4.18) і (4.19) відповідно.

Зауважимо, що така редукція цільових функцій пов'язана зі зменшенням множини допустимих компромісних розв'язків, яке не обмежується кутовими точками. Мінімізація граничних цільових функцій приводить до ситуації, коли незалежно від того, яка цільова функція: $Z(x) = c^T x$, буде істинною, використовуючи компромісний розв'язок x^*, ми завжди отримаємо результат, що перебуває між $Z_{\min}(x^*)$ та $Z_{\max}(x^*)$.

1. Уведемо такі позначення для оптимальних значень функцій, отриманих у задачах (4.18) і (4.19):

$$Z^*_{\min} = Z_{\min}(x^*_{\min}), \tag{4.20}$$

$$Z^*_{\max} = Z_{\max}(x^*_{\max}). \tag{4.21}$$

2. Обчислити значення функцій $Z_{\min}$, $Z_{\max}$ у точках $x^*_{\min}$, $x^*_{\max}$, а саме:

$$\bar{Z}_{\min} = Z_{\min}(x^*_{\max}) = \sum_{i=1}^{n} c_i^L x^*_{\max i}; \tag{4.22}$$

$$\bar{Z}_{\max} = Z_{\max}(x^*_{\min}) = \sum_{i=1}^{n} c_i^R x^*_{\min i}. \tag{4.23}$$

Можна припустити, що ОПР бажає прийняти рішення, яке буде задовольняти такі умови:

$$Z_{\min}(x) \ge \bar{Z}_{\min}, \tag{4.24}$$

$$Z_{\max}(x) \ge \bar{Z}_{\max}. \tag{4.25}$$

Це припущення скорочує множину допустимих рішень X до такої множини: $\bar{X} = \left\{ x \in X \mid Z_{\min}(x) \ge \bar{Z}_{\min},\ Z_{\max}(x) \ge \bar{Z}_{\max} \right\}$. Скориставшись цією додатковою інформацією ОПР може сформулювати свої цілі точніше, шляхом введення функцій належності $f(x)$, які відображають ступінь її задоволення досягнутими значеннями цільових функцій. Для зручності будемо вважати, що вони лінійні і мають такий вигляд:

$$f_{\max}(x) = \begin{cases} \dfrac{Z_{\max}(x) - \bar{Z}_{\max}}{Z^*_{\max} - \bar{Z}_{\max}}, \text{ якщо } \bar{Z}_{\max} \le Z_{\max}(x) \le Z^*_{\max}, \\ 0 \text{ в інших випадках;} \end{cases} \tag{4.27}$$

$$f_{\min}(x) = \begin{cases} \dfrac{Z_{\min}(x) - \bar{Z}_{\min}}{Z^*_{\min} - \bar{Z}_{\min}}, \text{ якщо } \bar{Z}_{\min} \le Z_{\min}(x) \le Z^*_{\min}, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \tag{4.28}$$

Необхідно брати до уваги тільки ті елементи, що мають додатний ступінь належності.

3. Нехай функція $\lambda(x) = \min\left\{ f_{\min}(x), f_{\max}(x) \right\}$ описує рівень задоволеності ОПР рішенням x. Тоді компромісний розв'язок можна отримати розв'язуючи таку ЛП-задачу:

$$\lambda(x) \to \max,$$

$$\begin{cases} (Z^*_{\min} - \bar{Z}_{\min})\lambda(x) - Z_{\min}(x) \le -\bar{Z}_{\min}, \\ (Z^*_{\max} - \bar{Z}_{\max})\lambda(x) - Z_{\max}(x) \le -\bar{Z}_{\max}, \\ Ax \le b, \\ x \ge 0, \\ 0 \le \lambda(x) \le 1. \end{cases} \tag{4.29}$$

Розглянемо застосування цього методу на прикладі.

Приклад 4.5. Візьмемо задачу з прикладу 4.4 і знайдемо її компромісний розв'язок методом послідовної редукції.

Отже, маємо таку задачу:

$$Z(x_1, x_2) = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 95, \\ 2x_1 + 21x_2 \le 357, \\ 2x_1 + x_2 \le 42, \\ 11x_1 + x_2 \le 198, \\ 9x_1 + 10x_2 \le 252, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0,$$

якщо $\tilde{c}_1 = [1;12]$, $\tilde{c}_2 = [3;5]$.

Для її розв'язування застосуємо описаний нижче алгоритм.

1. Знайдемо значення $x^*_{\min}$, $Z^*_{\min}$, $x^*_{\max}$, $Z^*_{\max}$. Із цією метою розв'яжемо такі задачі ЛП:

$$Z_{\min}(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 95, \\ 2x_1 + 21x_2 \le 357, \\ 2x_1 + x_2 \le 42, \\ 11x_1 + x_2 \le 198, \\ 9x_1 + 10x_2 \le 252, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0;$$

$$Z_{\max}(x_1, x_2) = 12x_1 + 5x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 95, \\ 2x_1 + 21x_2 \le 357, \\ 2x_1 + x_2 \le 42, \\ 11x_1 + x_2 \le 198, \\ 9x_1 + 10x_2 \le 252, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$

та отримуємо такі результати: $x^*_{\min} = (6,56;16,38)$, $Z^*_{\min} = 55,69$, $x^*_{\max} = (17,33;7,33)$, $Z^*_{\max} = 244,67$.

2. Підставимо значення $x^*_{\min}$, $x^*_{\max}$ у функції $Z^*_{\min}$, $Z^*_{\max}$ і обчислимо значення $\bar{Z}_{\min}$, $\bar{Z}_{\max}$, а саме:

$$\bar{Z}_{\min} = 17,33 + 3 \cdot 7,33 = 39,32;$$
$$\bar{Z}_{\max} = 12 \cdot 6,56 + 5 \cdot 16,38 = 160,62.$$

Тепер множина допустимих розв'язків скорочується до такої:

$$\bar{X} = \{x \in X \mid x_1 + 3x_2 \ge 39,32,\ 12x_1 + 5x_2 \ge 160,62\}.$$

Функції належності будуть мати такий вигляд:

$$f_{\max}(x) = \begin{cases} \dfrac{12x_1 + 5x_2 - 160,62}{84,05}, \text{ якщо } 160,62 \le 12x_1 + 5x_2 \le 244,67, \\ 0 \quad \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

$$f_{\min}(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 + 3x_2 - 39,32}{16,37}, \text{ якщо } 39,32 \le x_1 + 3x_2 \le 55,69, \\ 0 \quad \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Отже, вихідна модель задачі ЛП набуває такого вигляду:

$$\lambda\left(x_1, x_2\right) \to \max;$$
$$\begin{cases} 16,37\lambda - x_1 - 3x_2 \le -39,32 \\ 84,05\lambda - 12x_1 - 5x_2 \le -160,62 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 95, \\ 2x_1 + 21x_2 \le 357, \\ 2x_1 + x_2 \le 42, \\ 11x_1 + x_2 \le 198, \\ 9x_1 + 10x_2 \le 252; \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

За результатами розв’язування задачі $x_1 = 13,61$; $x_2 = 12,95$; $\lambda = 0,8$.

4.4.3. Вибір компромісного розв’язку задачі методом кусково-лінійної редукції

На практиці ОПР може інколи мати інформацію і про шанси появи певних значень параметрів c_i. Ясно, що її бажано використати для вибору компромісного розв’язку задачі таким чином, аби вектори коефіцієнтів цільової функції, які мають більші шанси появи, здійснювали на остаточний розв’язок більший вплив.

Зафіксуємо скінченну множину ступенів належності: $\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_r\} \subseteq [0;1]$, і замінимо кожне обмеження з нечіткими параметрами на r обмежень із відповідними інтервальними параметрами, які мають ступінь належності α. Припустимо, що нечіткі множини коефіцієнтів опуклі, тоді кожна множина α-рівня є інтервалом C_i^{α}. Тепер необхідно розв’язати ЛП-задачу із нечіткими параметрами в цільовій функції, де параметр $c \in C^0$ визначається своїми функціями належності $f_i(c_i), i = \overline{1,n}$.

У практиці прийняття рішень ОПР не може описати неперервну функцію належності, а задає деяку кількість ступенів належності α і відповідні їм множини α-рівня (інтервали). Щоб знайти компромісний розв’язок, задачу лінійної оптимізації можна редукувати в лінійну задачу з інтервальними параметрами шляхом обмеження базового інтервалу значеннями, які мають встановлені ОПР шанси появи.

Будемо вважати, що коефіцієнти цільової функції з більш високим ступенем реалізації мають важливіше значення. Тоді алгоритм формування цільової функції α-рівня передбачає виконання таких кроків:

1. Для кожного α-рівня формулюємо оптимізаційну модель з інтервальними параметрами, котра редукується до описаних вище моделей (4.18), (4.19), а саме:

$$\begin{gathered}Z^{\alpha}_{\min}(x) \to \max,\\ \begin{cases} Ax \le B,\\ x \ge 0,\end{cases}\end{gathered} \tag{4.30}$$

$$\begin{gathered}Z^{\alpha}_{\max}(x) \to \max,\\ \begin{cases} Ax \le B,\\ x \ge 0,\end{cases}\end{gathered} \tag{4.31}$$

тут $Z^{\alpha}_{\min}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^{\alpha L} x_i$, $Z^{\alpha}_{\max}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^{\alpha R} x_i$, $c_i^{\alpha L}$, $c_i^{\alpha R}$ – ліва та права межа інтервалу на α-рівні.

2. Знаходимо оптимальні розв’язки $x^{\alpha *}_{\min}$, $x^{\alpha *}_{\max}$ та оптимальні значення функцій $Z^{\alpha *}_{\min}$, $Z^{\alpha *}_{\max}$ у задачах (4.30), (4.31).

3. Для кожного рівня α обчислюємо за формулами (4.22), (4.23) значення функцій $\overline{Z}^{\alpha}_{\min}$, $\overline{Z}^{\alpha}_{\max}$, які не можуть бути перевищені.

4. Будуємо функції належності $f^{\alpha}_{\min}(x), f^{\alpha}_{\max}(x)$, які відображають ступінь задоволення ОПР значенням цільової функції за певного α-рівня, скориставшись формулами (4.27), (4.28), тобто

$$f^{\alpha}_{\max}(x) = \begin{cases} \dfrac{Z^{\alpha}_{\max}(x) - \overline{Z}^{\alpha}_{\max}}{Z^{\alpha *}_{\max} - \overline{Z}^{\alpha}_{\max}}, \text{ якщо } \overline{Z}^{\alpha}_{\max} \le Z^{\alpha}_{\max}(x) \le Z^{\alpha *}_{\max},\\ 0 \text{ в інших випадках;}\end{cases} \tag{4.32}$$

$$f^{\alpha}_{\min}(x) = \begin{cases} \dfrac{Z^{\alpha}_{\min}(x) - \overline{Z}^{\alpha}_{\min}}{Z^{\alpha *}_{\min} - \overline{Z}^{\alpha}_{\min}}, \text{ якщо } \overline{Z}^{\alpha}_{\min} \le Z^{\alpha}_{\min}(x) \le Z^{\alpha *}_{\min},\\ 0 \text{ в інших випадках.}\end{cases} \tag{4.33}$$

5. Щоб врахувати інформацію про всі множини α-рівня, необхідно знайти розв’язок такої ЛП-задачі:

$$
\lambda \to \max,
$$

$$
\begin{cases}
(Z_{\min}^{*\alpha_1} - \bar{Z}_{\min}^{\alpha_1})\lambda - Z_{\min}^{\alpha_1}(x) \le -\bar{Z}_{\min}^{\alpha_1}, \\
(Z_{\max}^{*\alpha_1} - \bar{Z}_{\max}^{\alpha_1})\lambda - Z_{\max}^{\alpha_1}(x) \le -\bar{Z}_{\max}^{\alpha_1}, \\
\ldots \\
(Z_{\min}^{*\alpha_r} - \bar{Z}_{\min}^{\alpha_r})\lambda - Z_{\min}^{\alpha_r}(x) \le -\bar{Z}_{\min}^{\alpha_r}, \\
(Z_{\max}^{*\alpha_r} - \bar{Z}_{\max}^{\alpha_r})\lambda - Z_{\max}^{\alpha_r}(x) \le -\bar{Z}_{\max}^{\alpha_r}, \\
Ax \le b; x \ge 0; 0 \le \lambda \le 1.
\end{cases}
\tag{4.34}
$$

6. Обчислюємо середнє значення цільової функції, яке відповідає оптимальному розв’язку x^*, а саме:

$$
Z^* = \frac{1}{2r}\sum_{k=1}^{r}\left(Z_{\min}^{\alpha_k}(x^*) + Z_{\max}^{\alpha_k}(x^*)\right). \tag{4.35}
$$

Розглянемо застосування описаного алгоритму.

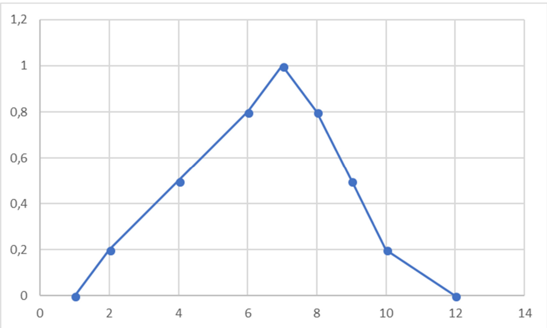
Приклад 4.6. Припустимо, у задачі з прикладу 4.5 експерт надав додаткову інформацію про шанси появи значень параметрів, що відповідають різним ступеням належності α. Ці дані подано в табл. 4.3.

Таблиця 4.3

Ступінь належності α	Множина α-рівня параметра	
	c_1	c_2
Supp ($\alpha > 0$)	[1; 12]	[3; 5]
0,2	[2; 10]	[3,25;4,75]
0,5	[4; 9]	[3,5; 4,5]
0,8	[6; 8]	[3,75; 4,25]
1	7	4

Вигляд відповідних функцій належності показано на рис. 4.4.

а



б

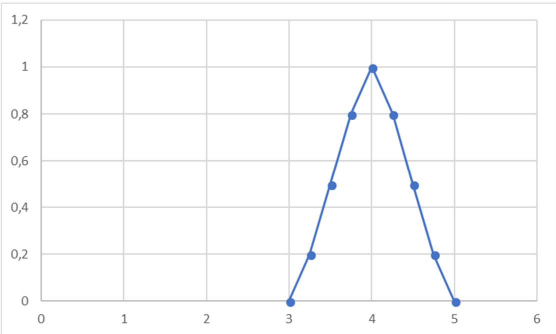


Рис. 4.4. Графіки функцій належності параметрів у задачі нечіткого математичного програмування до прикладу 4.5: *а* – стосовно параметра c_1; *б* – для параметра c_2

Розв'язування

Згідно з описаним вище підходом сформулюємо і розв'яжемо оптимізаційні задачі для крайніх точок інтервалів параметрів цільової функції. Маємо по дві задачі на кожному з чотирьох рівнів. Вони будуть відрізнятися одна від одної тільки цільовими функціями, їх вигляд показано у табл. 4.4.

Таблиця 4.4

Вигляд цільових функцій в ЛП-задачах α-рівня

α	$Z_{\min}^{\alpha}(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i^{\alpha L} x_i$	$Z_{\max}^{\alpha}(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i^{\alpha R} x_i$
α > 0	$Z_{\min}(x_1,x_2)=x_1+3x_2\to\max$	$Z_{\max}(x_1,x_2)=12x_1+5x_2\to\max$
α = 0,2	$Z_{\min}(x_1,x_2)=2x_1+3{,}25x_2\to\max$	$Z_{\max}(x_1,x_2)=10x_1+4{,}75x_2\to\max$
α = 0,5	$Z_{\min}(x_1,x_2)=4x_1+3{,}5x_2\to\max$	$Z_{\max}(x_1,x_2)=9x_1+4{,}5x_2\to\max$
α = 0,8	$Z_{\min}(x_1,x_2)=6x_1+3{,}75x_2\to\max$	$Z_{\max}(x_1,x_2)=8x_1+4{,}25x_2\to\max$
α = 1	$Z_{\min}(x_1,x_2)=7x_1+4x_2\to\max$	

Розв'яжемо ці задачі. У результаті отримаємо оптимальні розв'язки $x_{\min}^{\alpha *}$, $x_{\max}^{\alpha *}$ та оптимальні значення функцій $Z_{\min}^{\alpha *}$, $Z_{\max}^{\alpha *}$, а також обчислимо граничні значення $\overline{Z}_{\min}^{\alpha}$, $\overline{Z}_{\max}^{\alpha}$ для кожного рівня α. Результати обчислень подано в табл. 4.5.

Таблиця 4.5

Результати обчислень у задачах α-рівня

α	$x_{\min}^{\alpha *}$	$x_{\max}^{\alpha *}$	$Z_{\min}^{\alpha *}$	$Z_{\max}^{\alpha *}$	$\overline{Z}_{\min}^{\alpha}$	$\overline{Z}_{\max}^{\alpha}$
$\alpha>0$	(6,56; 16,38)	(17,33; 7,33)	55,69	244,67	39,33	160,62
$\alpha=0,2$	(12,40; 14,04)	(17,33; 7,33)	70,43	208,17	58,50	190,69
$\alpha=0,5$	(15,27; 11,45)	(15,27; 11,45)	101,18	189,00	101,18	188,99
$\alpha=0,8$	(15,27; 11,45)	(15,27; 11,45)	134,59	170,86	134,59	170,86
$\alpha=1$	(15,27; 11,45)	(15,27; 11,45)	152,72		152,72	

Тепер можна визначити функції належності на кожному α-рівні й записати вихідну задачу ЛП, а саме:

$$f_{\max}^{Supp}(x)=\begin{cases}\dfrac{12x_1+5x_2-160,62}{84,05}, \text{ якщо } 160,62\le 12x_1+5x_2\le 244,67;\\ 0 \text{ в інших випадках;}\end{cases}$$

$$f_{\min}^{\text{supp}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x_1+3x_2-39,33}{16,36}, \text{ якщо } 39,33\le x_1+3x_2\le 55,69;\\ 0 \text{ в інших випадках;}\end{cases}$$

$$f_{\max}^{0,2}(x)=\begin{cases}\dfrac{10x_1+4,75x_2-190,69}{17,48}, \text{ якщо } 190,69\le 10x_1+4,75x_2\le 208,17;\\ 0 \text{ в інших випадках;}\end{cases}$$

$$f_{\min}^{0,2}(x)=\begin{cases}\dfrac{2x_1+3,25x_2-58,50}{11,93}, \text{ якщо } 58,50\le 2x_1+3,25x_2\le 70,43;\\ 0 \text{ в інших випадках;}\end{cases}$$

Зауважимо, що для даної задачі, починаючи з рівня $\alpha=0,5$, розв'язки задач максимізації функцій $Z_{\min}^{\alpha}$, $Z_{\max}^{\alpha}$ збігаються, це означає, що рішення буде оптимальним для обох граничних функцій і тому має максимальний ступінь належності до області допустимих розв’язків, тобто $f_{\min}^{\alpha}(x)=f_{\max}^{\alpha}(x)=1$, коли $\alpha=0,5;0,8;1$.

Для того, щоб визначити кінцевий результат, необхідно розв’язати таку задачу ЛП:

$$\lambda\to\max;$$

$$\begin{cases}16,37\lambda-x_1-3x_2\le-39,32; & 84,05\lambda-12x_1-5x_2\le-160,62,\\ 11,93\lambda-2x_1-3,25x_2\le-58,50; & 17,48\lambda-10x_1-4,75x_2\le-190,69,\\ -4x_1-3,5x_2\le-101,18; & -9x_1-4,5x_2\le-189,\\ -6x_1-3,75x_2\le-134,59; & -8x_1-4,25x_2\le-170,86,\\ -7x_1-4x_2\le-152,72, & 2x_1+5x_2\le 95,\\ 2x_1+21x_2\le 357, & 2x_1+x_2\le 42,\\ 11x_1+x_2\le 198, & 9x_1+10x_2\le 252;\end{cases}$$

$$x_1,x_2,\lambda\ge 0.$$

Після розрахунку маємо такі результати: $x_1 = 15,27$; $x_2 = 11,45$: $\lambda = 0,63$. Середнє значення функції, обчислене за формулою (4.35), $F = 0,63$.

Проаналізуємо отриманий розв’язок з огляду на значення функцій належності на кожному з α -рівнів. Для цього підставимо його у вирази для функцій $f^{\alpha}_{\min}(x), f^{\alpha}_{\max}(x)$ $f^{\alpha}_{\min}(x), f^{\alpha}_{\max}(x)$. Результати подано в табл. 4.6.

Таблиця 4.6

Значення функцій належності на рівні α

	$Z^{\text{supp}}_{\min}$	$Z^{\text{supp}}_{\max}$	$Z^{0,2}_{\min}$	$Z^{0,2}_{\max}$	Z^{α}_{k}, $k = \min, \max$, $\alpha = 0,5;0,8;1$
$f^{\alpha}(x)$	0,63	0,95	0,78	0,94	1

Цей результат показує, що діапазон можливого покращення мети використаний не менше ніж на 63 %. Він збігається із значенням функції, отриманим на множині допустимих розв’язків X^{Supp} , оскільки в цій задачі множини допустимих розв’язків на кожному α -рівні мають такі властивості: $X^{1} \subset X^{0,8} \subset X^{0,5} \subset X^{0,2} \subset X^{\text{supp}}$.

Висновки

Теорія нечітких множин – це математичний апарат, що дозволяє описувати поняття, які не можуть бути висловлені чітко. Застосування цієї теорії доцільне в тих випадках, коли інформації для прийняття рішення недостатньо або коли опис ситуації засобами звичайних множин дуже «огрубляє» модель, що не дозволяє домогтись задовільного результату.

Задачі нечіткого математичного програмування являють собою узагальнення звичайних задач математичного програмування. Їх класифікують залежно від того, які елементи задачі є нечіткими, що зумовлює використання різних підходів до розв’язування. У тому разі, коли нечіткою в задачі є множина допустимих рішень, вона може бути зведена до задачі досягнення нечіткої мети або до задачі багатокритерійної оптимізації. Коли обмеження задачі задано нечітко, то може бути застосований метод розкладання на множини рівня.

Якщо ж нечіткими є параметри цільової функції, то буде корисним метод послідовної або кусково-лінійної редукції. Перелічені підходи належать до непрямих методів розв’язування задач НМП.

Питання, викладені в цьому розділі, розглянуто в науковій літературі [28, 36, 51, 64, 65, 66, 68, 70].

Контрольні питання

1. Сформулюйте задачу досягнення нечітко визначеної мети.
2. Які особливості підходу Беллмана – Заде до розв’язування задачі досягнення нечітко визначеної мети?

3. Яким чином враховують мету й обмеження формулюючи та розв'язуючи задачу досягнення нечітко визначеної мети?

4. Чи можна сформулювати задачу досягнення нечітко визначеної мети тоді, коли мета й обмеження являють собою підмножини різних універсальних множин?

5. Сформулюйте загальну постановку задачі нечіткого математичного програмування (НМП).

6. Яким чином класифікують задачі нечіткого математичного програмування?

7. Які підходи застосовують до розв'язування задач НМП?

8. У чому полягає сутність методу зведення до задачі досягнення нечітко визначеної мети при розв'язувані задач НМП?

9. Що являє собою метод розкладання на множини рівня при розв'язувані задач НМП?

10. Розкрийте суть методу модальних значень у застосуванні до задач НМП.

11. Опишіть застосування методу зведення до багатокритерійної задачі при розв'язуванні задач НМП.

12. Які методи розв'язування задач НМП із нечіткими параметрами ви знаєте?

13. Яким чином здійснюється вибір значення параметра при редукції вихідної задачі НМП до однокритерійної задачі?

14. Яким чином можна врахувати множинність значень коефіцієнтів цільової функції?

15. У чому полягає ідея методу послідовної редукції розв'язування задач НМП?

16. Опишіть алгоритм методу послідовної редукції.

17. Яка ідея методу кусково-лінійної редукції розв'язування задач НМП?

18. Опишіть алгоритм методу кусково-лінійної редукції.

Завдання до розділу 4

Завдання А

1. Розв'язати задачу досягнення нечітко визначеної мети за наведеними даними.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
G	0,8	0,6	0,7	0,4	0.2	0,1	0,1
C_1	0,5	0,3	0,5	0,4	0,6	0,5	0,4
C_2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
C_3	0,3	0,5	0,7	1	0,9	0,6	0,2

2. Мету та обмеження описано такими функціями належності:

$$\mu_C(x)=\begin{cases}-\frac{1}{4}(x-3)^2+1, & \text{якщо } x\notin(1;5),\\ 0 & \text{в інших випадках;}\end{cases}$$

$$\mu_D(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x, & \text{якщо } x\in(0;6),\\ 1, & \text{якщо } x\ge 6,\\ 0 & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Розв'язати задачу досягнення нечітко визначеної мети.

3. Розв'язати задачу досягнення нечітко визначеної мети, за такими умовами:

$$\mu_C(x)=\begin{cases}-(x-1)^2+1, & \text{якщо } x\notin(0;2)\\ 0 & \text{в інших випадках;}\end{cases}$$

$$\mu_D(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}|x|, & \text{якщо } x\notin(0;2),\\ 0 & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

4. Розв'язати таку задачу нечіткого математичного програмування:

$$\begin{aligned}&f_2(x_1,x_2)=x_1-x_2\to\min\\ &x_1-2x_2\ge 2,\\ &2x_1+5x_2\le 10,\\ &-12x_1+8x_2\ \tilde{\le}\ 24,\\ &x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

5. Розв'язати сформульовану нижче задачу нечіткого математичного програмування.

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2)=2x_1+5x_2\to\max\\ &x_1+x_2\ge 4,\\ &4x_1+6x_2\ \tilde{\le}\ 24,\\ &3x_1+8x_2\le 24,\\ &x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

6. Розв'язати подану нижче задачу нечіткого математичного програмування методом розкладання на множини рівня.

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$
$$x_1 + 2x_2 \tilde{\geqq} 2,$$
$$2x_1 + 5x_2 \le 10,$$
$$12x_1 + 8x_2 \le 24,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

7. Розв'язати сформульовану нижче задачу нечіткого математичного програмування методом зведення до багатокритерійної задачі.

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 2,$$
$$2x_1 + 5x_2 \le 10,$$
$$12x_1 + 8x_2 \le 24,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

8. Знайти розв'язок такої задачі нечіткого математичного програмування:

$$f(x_1, x_2) = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 155, \\ 3x_1 + 15x_2 \le 399, \\ 2x_1 + x_2 \le 52, \\ x_1 + 2x_2 \le 40, \\ 10x_1 + x_2 \le 185, \\ 5x_1 + 10x_2 \le 250, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$

якщо $\tilde{c}_1 = [5; 10]$, $\tilde{c}_2 = [0; 8]$.

9. Припустимо, в задачі 8 експерт надав додаткову інформацію про шанси появи значень параметрів за різних ступенів належності α. Ці відомості подано в табл. 4.7. Розв'язати отриману задачу НМП.

Таблиця 4.7

Ступінь належності α	Множина рівня параметра	
	c_1	c_2
Supp (α > 0)	[5; 10]	[0; 8]
0,2	[6; 10]	[2;7]
0,5	[7; 9]	[3; 5]
0,8	[6; 8]	[4; 5]
1	7,5	4,5

10. Розв’язати подану нижче задачу нечіткого математичного програмування у припущенні, що відомі очікувані значення параметрів залежно від стану середовища. Врахувати, що експертом визначено 5 станів середовища, їх імовірності й очікувані значення параметрів подано в табл. 4.8.

$$f\left(x_1, x_2\right) = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 \rightarrow \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 15x_2 \le 100, \\ 2x_1 + x_2 \le 40, \\ x_1 + 3x_2 \le 35, \\ 10x_1 + x_2 \le 185, \\ 5x_1 + 10x_2 \le 150, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$

Таблиця 4.8

Відомості про очікувані значення параметрів

Стан середовища, θ_j	Імовірність, p_j	Можливі значення параметрів	
		c_1	c_2
θ_1	0,2	5	0
θ_2	0,25	6	2
θ_3	0,3	10	1
θ_4	0,15	7	5
θ_5	0,1	5	8

11. Знайти розв’язок такої задачі нечіткого математичного програмування:

$$f\left(x_1, x_2\right) = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 \rightarrow \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1^2 + 5x_2^2 \le 120, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 40, \\ x_2 \le 9, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$

якщо відомі очікувані значення параметрів залежно від стану середовища.

Врахувати, що експертом визначено 5 станів середовища, їх імовірності й очікувані значення параметрів подано в табл. 4.9.

Таблиця 4.9

Відомості про очікувані значення параметрів

Стан середовища, θ_j	Імовірність, p_j	Можливі значення параметрів	
		c_1	c_2
θ_1	0,2	5	1
θ_2	0,25	8	2
θ_3	0,3	12	4
θ_4	0,15	7	5
θ_5	0,1	3	8

Завдання В

Використовуючи теорію нечітких множин, скласти математичні моделі для наведених нижче задач.

1. Комерційно-транспортна фірма (дистриб'ютор) закуповує товар одного й того самого виду в групи постачальників, а також транспортує його та реалізовує покупцям. Припустимо, що в співробітництві задіяно *M* постачальників та *N* покупців. Відомі граничні можливості кожного з них, причому ці дані описані нечітко.

Крім того, дистриб'ютор має у своєму розпорядженні таку інформацію:

– ціна придбання одиниці товару в кожного постачальника $t_i, i = 1,2,...,M;$

– ціна продажу одиниці готової продукції $s_j, i = 1,2,...,N;$

– питомі транспортні витрати $c_{ij}, i = 1,2,...,M; j = 1,2,...,N;$

– обов'язковий обсяг пропозиції за контрактом $p_i, i = 1,2,...,M;$

– обов'язковий обсяг попиту за контрактом $q_j, i = 1,2,...,N;$

– ціна одиниці товару, який закуповується поза контрактом $k_i, i = 1,2,...,M;$

– ціну одиниці товару, який продається поза контрактом, $r_j, i = 1,2,...,N;$

Необхідно визначити, якими мають бути обсяги продукції x_{ij}, $i = 1,2,...,M$, $j = 1,2,...,N$, що закуповується в кожного з постачальників і продається кожному із споживачів, аби мінімізувати суму транспортних витрат та максимізувати прибуток дистриб'ютора.

2. Скласти математичну модель задачі 1 у припущенні, що ціни на продукцію відомі лише у вигляді інтервалів.

3. На Запорізькому залізорудному комбінаті в процесі видобутку корисної копалини застосовують твердіючу суміш, яка складається з в'язких та інертних матеріалів. Інертним заповнювачем у приготуванні такої суміші слугують відходи енергетичного, металургійного й гірничого виробництва, зокрема доменні шлаки (x_1), хвости ЦГЗК (x_2), вапняно-доломітні матеріали (x_3), пісок (x_4) та суглинок (x_5). Задача полягає у визначенні такого складу суміші, щоб її вартість була мінімальною, а міцність відповідала нормативним умовам (має становити 20 – 60 кг/см^2), води повинно міститися приблизно 20 % від в'язких складових, а цементу, вапняно-доломітного матеріалу й піску приблизно 65, 9, 35 і 18 % від інертних компонентів у суміші відповідно.

Враховувати, що залежність міцності суміші від її складових описується такою функцією: $\varphi(x) = 467x_1 + 380x_2 - 54x_3 + 87x_4 - 120x_5 - 23{,}25$.

4. Скласти математичну модель задачі 3 у припущенні, що ціни на складові суміші не можуть бути визначені точно.

5. Для виготовлення сплаву зі свинцю, цинку та олова певного складу використовують сировину у вигляді п'яти сплавів з тих самих металів, але іншого складу й різної вартості за 1 кг (див. табл. 4.10). Визначити, яку кількість сплаву кожного виду потрібно взяти, щоб виготовити при мінімальній собівартості сплав, який містить олова приблизно 50 % і цинку приблизно 25 % .

Таблиця 4.10

Тип сплаву	Вміст металу, %			Питома вартість, грн/кг
	Свинець	Цинк	Олово	
I	25	30	45	280
II	10	50	40	160
III	30	30	40	155
IV	40	25	35	140
V	10	70	20	100

6. Побудувати математичну модель задачі 5 в умовах неповної інформації про вартість вихідних сплавів.

7. На шахті «Добропільска» функціонує три видобувних дільниці. Приблизний вміст сірки, вологи й зольність вугілля, що видобувається на кожній з них, різні (табл. 4.11). Відомі величини максимально можливого й мінімально необхідного обсягу видобутку вугілля та суми витрат на видобуток на кожній дільниці (табл. 4.11). Плановий обсяг видобутку на шахті становить 3000 тис. т. Необхідно, з огляду на можливості кожної дільниці, скласти план видобувних робіт таким чином, щоб витрати на видобуток були мінімальними й виконувалися б усі вимоги споживачів до якості сировини, а саме зольність має становити приблизно 47 %, вологість – приблизно 10 %, вміст сірки – приблизно 3 % .

Таблиця 4.11

Характеристики вугілля, % та показники роботи дільниці	Номер дільниці		
	1	2	3
Зольність	49	37	23
Вологість	7	8	10
Вміст сірки	1,8	2,1	3
Витрати, грн	1184,210	1381,777	1083,515
Максимальний обсяг видобутку, тис. т	1650	1090	1270
Мінімальний обсяг видобутку сировини, тис. т	1200	600	530

8. Підприємство «Технологічні системи й машини» виготовляє 5 видів котлів: Vestal 12,14,17, ВПГ-18,23. При цьому використовує 9 основних видів ресурсів. Відомі такі параметри: інтервал цін на кожну марку котлів (табл. 4.12), вартість основних частин, їх кількість для виготовлення одного котла та наявний запас на підприємстві (табл. 4.13). Необхідно визначити план виробництва котлів, який максимізує прибуток підприємства.

Таблиця 4.12

Проміжки зміни цін на різні марки котлів

№	Котли	Ціна, грн	
		C_L	C_U
1	Vestal 12	5318,53	6123,45
2	Vestal 14	5274,93	6012,88
3	Vestal 17	5885,25	6432,23
4	ВПГ-18	3913,00	4150,45
5	ВПГ-23	4515,00	4971,42

Таблиця 4.13

Використання ресурсів на виготовлення продукції

№	Ресурси	Vestal 12	Vestal 14	Vestal 17	ВПГ - 18	ВПГ - 23	Кількість ресурсів
1	Гідравлічний модуль	2	1	3	1	1	230
2	Циркуляційний насос	2	3	2	1	2	243
3	Вторинний пластинчастий теплообмінник	4	2	4	2	1	211
4	Газова арматура	2	3	1	4	2	300
5	Розширювальний бак	1	2	3	4	1	176
6	Модулювальний пальник	2	2	3	3	1	250
7	Первинний теплообмінник	2	2	3	3	1	287
8	Вентилятор	1	2	3	1	2	213
9	Коаксіальний димар	2	1	2	2	2	186

Завдання С

1 – 8. Розв’язати сформульовані в попередньому пункті задачі одним з методів.

РОЗДІЛ 5

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ НЕЧІТКИХ ВІДНОШЕННЯХ ПЕРЕВАГИ НА МНОЖИНІ АЛЬТЕРНАТИВ

Мета розділу: ознайомлення з поняттям про нечіткі відношення переваги, їхні властивості й використання у теорії прийняття рішень.

Досліджуючи реальну ситуацію або процес з метою прийняття раціонального рішення, природно спочатку виявити множину всіх допустимих розв'язків або альтернатив.

Залежно від того, яку інформацію ми маємо, цю множину вдається описати з тією чи іншою мірою чіткості. Нехай, наприклад, існує деяка універсальна множина альтернатив X і нечіткий опис її підмножини допустимих альтернатив $\mu_C(x)$. Значення функції $\mu_C(x)$ описують міру допустимості відповідних альтернатив у поданій задачі.

Якщо окрім цієї функції, немає іншої інформації про досліджувану альтернативу, то раціональним буде вибір деякої альтернативи з такої множини:

$$X^D = \left\{ x \middle| x \in X, \mu_C(x) = \sup_{y \in X} \mu_C(y) \right\},$$

тобто довільної альтернативи з тих, що мають максимальний ступінь прийнятності, оскільки не існує підстав віддавати перевагу іншим. При введені в модель додаткової інформації раціональним може виявитися вибір альтернатив з будь-якої підмножини множини X^D або будь-яких альтернатив, котрі не належать цій множині. Не виключено, що ця інформація може слугувати підставою для виявлення єдиної, найкращої з усіх альтернативи.

Інформація про реальну ситуацію або процес, на основі якої віддають перевагу одній альтернативі над іншою, може бути подана різними способами. наприклад у формі функцій корисності або описано числовими нерівностями, але такий спосіб висвітлення реальної ситуації не завжди можливий. Більш універсальним можна вважати опис інформації у формі відношень переваги на множині альтернатив. Випадок, коли на множині альтернатив подано чітке відношення переваги, було розглянуто вище в розділі 2. Але не завжди переваги можна визначити чітко, тобто іноді більш точна модель ситуації – це її опис у вигляді нечітких відношень, коли перевагу можливо виявити тільки певною мірою. Шляхи прийняття рішень за таких умов і буде розглянуто нижче.

5.1. Нечіткі відношення переваги та їхні властивості

В и з н а ч е н н я 5.1. Нехай X – задана множина альтернатив. *Нечітким відношенням нестрогої переваги* (НВП) на множині X будемо називати всіляке задане на ній рефлексивне відношення.

Це відношення описується рефлексивною функцією належності, тобто $\mu_R : X \times X \to [0;1]$, $\mu_R(x,x)=1$, $\forall x \in X$.

Якщо μ_R – нечітке відношення переваги на множині X, то для будь-якої пари альтернатив $x, y \in X$ значення $\mu_R(x, y)$ – це міра виконання переваги «x не гірше y», або $x \geq y$. З того, що $\mu_R(x, y) = 0$, випливає одне з двох тверджень: або $y = x$, або x та y не порівнянні між собою з додатною мірою. Рефлексивність цього відношення відображає той факт, що будь-яка альтернатива не гірша від себе самої.

Подане на множині X нечітке відношення переваги однозначно задає три відповідних йому нечітких відношення:

– однаковості (байдужості) $R^I\left(\mu_R^I\right)$;
– квазіеквівалентності $R^e\left(\mu_R^e\right)$;
– строгої переваги $R^S\left(\mu_R^S\right)$.

Названі відношення будуть використовуватись для визначення та аналізу властивостей недомінованих альтернатив у задачах прийняття рішень.

За аналогією до звичайних ці відношення можна визначити таким чином:

$$R^I = \left(X \times X \setminus R \bigcup R^{-1}\right) \bigcup \left(R \bigcap R^{-1}\right);$$

$$R^S = R \setminus R^{-1};$$

$$R^e = R \bigcap R^{-1},$$

де R^{-1} – обернене до R відношення, що описується такою функцією належності:

$$\mu_{R^{-1}}(x, y) = \mu_R(x, y), \qquad \forall (x,y) \in X \times X .$$

Використавши визначення операцій об’єднання, перетину та різниці нечітких множин, отримаємо наведені нижче вирази для функцій належності цих відношень.

1. Нечітке відношення байдужості

$$\mu_R^I(x, y) = \max\{1 - \max\{\mu_R(x, y), \mu_{\mathrm{R}}(y, x)\}, \min\{\mu_R(x, y), \mu_{\mathrm{R}}(y, x)\}\} =$$

$$= \max\{\min\{1-\mu_R(x,y), 1-\mu_R(y,x)\}, \min\{1-\mu_R(x,y), 1-\mu_R(y,x)\}\}.$$

2. Нечітке відношення квазіеквівалентності

$$\mu_R^e(x,y) = \min\{\mu_R(x,y), \mu_\mathrm{R}(y,x)\}.$$

3. Нечітке відношення строгої переваги

$$\mu_R^S(x,y) = \begin{cases} \mu_R(x,y) - \mu_R(y,x), \text{ коли } \mu_R(x,y) \ge \mu_R(y,x), \\ 0, \text{ коли } \mu_R(x,y) < \mu_R(y,x). \end{cases}$$

Для пояснення сенсу цих відношень розглянемо приклад.

П р и к л а д 5.1 (чітке відношення переваги). Припустимо, що на множині X подано n функцій $f_i : X \to R^1$, $i = 1, \dots, n$. Задамо на ній відношення переваги R таким чином: $x\,R\,y \Leftrightarrow f_i(x) \ge f_i(y), \ \forall \ i = 1,...,n$.

Легко помітити, що функція належності відношення R має такий вигляд:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1, \quad \text{коли } f_i(x) \ge f_i(y), i = \overline{1,n}, \\ 0 \quad \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Зауважимо, що при такому відношенні переваги в множині X можуть існувати непорівнянні альтернативи, (тобто $R \cup R^{-1} \ne X \times X$ й трапляються альтернативи x, y, для яких виконується умова: $(x,y) \notin R \cup R^{-1}$). Наприклад, альтернативи x, y, для яких $f_i(x) \ge f_i(y), \ \forall \ i \ne i_\circ$, та $f_{i_\circ}(x) < f_{i_\circ}(y)$.

З огляду на подані вище визначення

$$\mu_R^e(x,y) = \begin{cases} 1, \quad \text{коли } f_i(x) = f_i(y), \forall\, i = \overline{1,n}, \\ 0 \quad \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Підкреслимо, що альтернативи, недоміновані за даним відношенням переваги, називаються ефективними або Парето-оптимальними для функцій $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Розглянемо тепер деякі властивості визначених нечітких відношень μ_R^e та μ_R^S.

I. Нечіткі відношення μ_R^e і μ_R^I є рефлексивними і симетричними.

Дійсно, $\mu_R^e(x,x) = \mu_R^I(x,x) = \mu_R(x,x) = 1$, оскільки вихідне відношення μ_R є рефлексивним. Симетричність цих відношень випливає з їхніх визначень.

II. Відношення μ_R^S – антирефлексивне й антисиметричне.

Справді, $\mu_R^S(x,x)=0$, оскільки вихідне НВП належить до рефлексивних, тобто $\mu_R(x,x)=1$, $\forall x \in X$.

Нехай, $\mu_R^S(x,y)>0$, тобто $\mu_R(x,y)-\mu_R(y,x)>0$, тоді $\mu_R^S(y,x)=0$, а це й свідчить про антисиметричність цього відношення.

Покажемо тепер, що коли вихідне НВП μ_R на множині X належить до транзитивних, то нечіткі відношення μ_R^e і μ_R^S також транзитивні.

Т е о р е м а 5.1. Якщо НВП μ_R на множині X транзитивне, то й відповідне нечітке відношення μ_R^e також буде транзитивним.

Отже, з цієї теореми та з розглянутих вище властивостей відношення μ_R^e випливає, що в умовах теореми μ_R^e являє собою нечітке відношення еквівалентності (рефлексивне, симетричне, транзитивне).

Доведення

Припустимо, що в умовах теореми відношення μ_R^e не транзитивне. Тобто існують альтернативи $x, y, z \in X$, для яких буде справедливою така нерівність:

$$\mu_R^l(x,y)<\min\{\mu_R^l(x,z), \mu_R^l(z,y)\}. \tag{5.1}$$

Припустимо тепер, що $\mu_R(x,y)\geq \mu_R(y,x)$. Тоді з визначення μ_R^e випливає, що $\mu_R^e(x,y)=\mu_R^e(y,x)$. Користуючись цією рівністю, запишемо нерівність (5.1) в такому вигляді:

$$\mu_R(y,x)<\min\{\mu_R^e(y,z), \mu_R^e(z,x)\}. \tag{5.2}$$

Оскільки відношення μ_R^e симетричне, то з нерівності (5.2) випливає, що

$$\mu_R^e(y,z)\leq \mu_R(y,z),$$

$$\mu_R^e(z,x)\leq \mu_R(z,x),$$

тобто $\min\{\mu_R^e(y,z), \mu_R^e(z,x)\}\leq \min\{\mu_R(y,z), \mu_R(z,x)\}$, і, відповідно, $\mu_R(y,x)<\min\{\mu_R(y,z), \mu_R(z,x)\}$, а це суперечить умові транзитивності вихідного відношення: μ_R ($\mu_R(x,y)\geq \max\limits_{z\in X}\min\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\}$).

Випадок, коли $\mu_R(y,x)\geq \mu_R(x,y)$, доводимо аналогічно.

Можна довести таке твердження і стосовно відношення строгої переваги μ_R^S, тобто має місце теорема 5.2.

Т е о р е м а 5.2. Якщо нечітке відношення переваги μ_R на множині X транзитивне, то транзитивним буде також відповідне нечітке відношення строгої переваги μ_R^S.

5.2. Нечітка підмножина недомінованих альтернатив

Розглянемо тепер задачу раціонального вибору альтернатив з множини X, на якій задано нечітке відношення переваги R. Тобто відомо його функцію належності $\mu_R : X \times X \to [0;1]$.

Як було зазначено раніше, у тих випадках, коли дані про ситуацію прийняття рішень описано за допомогою звичайного відношення переваги, то раціональним можна вважати вибір максимальних (недомінованих) альтернатив. Математично така задача зводиться до визначення на поданій множині X підмножини недомінованих альтернатив.

Далі спробуємо застосувати цей підхід до задач прийняття рішень, коли відношення переваги на множині альтернатив описано нечітко.

Отже, нехай маємо звичайну (чітко описану) множину альтернатив X та подане на ній нечітке відношення нестрогої переваги μ_R і відповідне йому нечітке відношення строгої переваги μ_R^S. Визначимо підмножину недомінованих альтернатив множини (X, μ_R). Зауважимо, що оскільки вихідне відношення переваги нечітке, то природно чекати, що й відповідна підмножина недомінованих альтернатив буде нечіткою.

За визначенням відношення строгої переваги для будь-яких альтернатив $x, y \in X$ величина $\mu_R^S(y,x)$ являє собою міру, з якою альтернатива x буде домінована альтернативою y. Отже, стосовно фіксованої альтернативи $y \in X$ визначену на множині X функцію $\mu_R^S(y,x)$ можна вважати функцією належності нечіткої множини всіх альтернатив x, які строго доміновані альтернативою y.

Припустимо, наприклад, що міра належності альтернативи x_0 до цієї множини (відповідно деякій фіксованій альтернативі y) дорівнює 0,3. Це означає, що альтернатива x_0 домінується альтернативою y зі ступенем 0,3. Легко зрозуміти, що множина "всіх" альтернатив x, які не домінуються альтернативою y, являє собою доповнення множини $\mu_R^S(y,x)$ в множині X і її функцію належності можна записати таким чином:

$$1 - \mu_R^S(y,x), \; x \in X . \tag{5.3}$$

Якщо, наприклад, $\mu_R^S(y,x)$ = 0,3, то альтернатива x не домінується альтернативою y зі ступенем 0,7. Очевидно, що для визначення в множині X

підмножини "всіх" альтернатив, кожна з яких не домінується жодною альтернативою цієї множини, необхідно взяти перетин нечітких множин, що описані виразом (5.3), за всіма альтернативами $y \in X$.

В и з н а ч е н н я 5.4. Нехай X – множина альтернатив, μ_R – подане на ній нечітке відношення переваги. Нечіткою підмножиною недомінованих альтернатив $\mu_R^{н.д.}(x)$ назвемо перетин нечітких множин, що мають вигляд, відповідний виразу (5.3), за всіма альтернативами $y \in X$, тобто

$$\mu_R^{н.д.}(x) = \inf_{y \in X}\left[1 - \mu_R^S(y, x)\right], \quad x \in X \tag{5.4}$$

або

$$\mu_R^{н.д.}(x) = 1 - \sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x), \quad x \in X . \tag{5.5}$$

Значення функції $\mu_R^{н.д.}(x)$ відображає міру, з якою альтернатива x не буде домінуватись жодною альтернативою множини X.

Нехай $\mu_R^{н.д.}(x_0) = \alpha$ стосовно деякої альтернативи x_0. Тоді x_0 може домінуватися іншими альтернативами, але зі ступенем, не більшим від $(1 - \alpha)$.

Справді, при цьому

$$\sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x_0) = 1 - \alpha$$

і тоді

$$\mu_R^S(y, x_0) \le 1 - \alpha, \quad \forall y \in X .$$

Визначимо тепер нечітку підмножину альтернатив через функцію належності вихідного нечіткого відношення переваги μ_R. Для цього покажемо, що

$$\sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x) = \sup_{y \in X}\left[\mu_R(y, x) - \mu_R(x, y)\right], \ \forall\, x \in X . \tag{5.6}$$

Дійсно, нехай довільно вибрано альтернативу $x \in X$. Уведемо такі множини:

$$Y^1(x) = \left\{y \middle| y \in X, \mu_{\mathrm{R}}(y, x) > \mu_R(x, y)\right\}; \tag{5.7}$$

$$Y^2(x) = \left\{y \middle| y \in X, \mu_{\mathrm{R}}(y, x) \le \mu_R(x, y)\right\}. \tag{5.8}$$

Користуючись тим, що $Y^1(x) \cup Y^2(x) = X$, для кожної альтернативи $x \in X$ запишемо рівність (5.6) у такій формі:

$$\sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x) = \max\left\{\sup_{y \in Y^1(x)} \mu_R^S(y, x),\ \sup_{y \in Y^2(x)} \mu_R^S(y, x)\right\}. \tag{5.9}$$

Далі, спираючись на визначення μ_R^S, перетворимо вираз (5.9), а саме:

$$\sup_{y\in X}\mu_R^S(y,x)=\max\left\{\sup_{y\in Y(x)}\left[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)\right],0\right\}=$$

$$=\max\left\{\sup_{y\in Y^1(x)}\left[\mu_R(y,y)-\mu_R(x,y)\right],\ \sup_{y\in Y^2(x)}\left[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)\right]\right\}=$$

$$=\sup_{y\in X}\left[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)\right].$$

Рівність (5.6) дозволяє описати множину недомінованих альтернатив за допомогою такої функції належності:

$$\mu_R^{'н.д.}(x)=1-\sup_{y\in X}\left[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)\right]. \tag{5.10}$$

Формулу (5.10) можна використовувати для обробки інформації, поданої у вигляді нечіткого відношення переваги з метою визначення в множині X підмножини недомінованих альтернатив.

Оскільки величина $\mu_R^{н.д.}(x)$ виступає як міра "недомінованості" альтернативи x, то раціональним, з огляду на подану нечітку інформацію, природно вважати вибір альтернатив, що мають якомога більший ступінь належності до нечіткої множини $\mu_R^{н.д.}(x)$, тобто тих, які дають значення функції $\mu_R^{н.д.}(x)$, найближчі до такої величини:

$$\sup_{x\in X}\mu_R^{н.д.}(x)=1-\inf_{x\in X}\sup_{y\in X}\left[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)\right].$$

Альтернативи, для яких функція $\mu_R^{н.д.}(x)$ досягає своєї верхньої грані, тобто елементи такої множини:

$$X_{н.д.}=\left\{x\,\middle|\,x\in X,\ \mu_{\mathrm{R}}^{н.д.}(x)=\sup_{z\in X}\mu_R^{н.д.}(z)\right\},$$

будемо називати максимальними недомінованими альтернативами множини (X,μ_R).

П р и к л а д 5.2. Дано скінченну множину: $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,\}$, й нечітке відношення переваги на ній, функція належності якого має такий вигляд:

$$\mu_R(x_i, x_j) = \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}8 \\ \hline x_2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ \hline x_3 & 0{,}6 & 0{,}4 & 1 & 0{,}5 \\ \hline x_4 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 & 1 \end{array}.$$

Знайдемо множину недомінованих альтернатив множини (X, μ_R).

Згідно з поданим вище визначенням

$$\mu_R^S(x_i, x_j) = \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 \\ \hline x_2 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ \hline x_4 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \mu_R^S(x_i, x_j) = \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 \\ \hline x_2 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ \hline x_4 & 0{,}1 & 0 & 0{,}2 & 0 \end{array},$$

тоді

$$\mu_R^{н.д.}(x_i) = \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 0{,}7 & 0{,}8 & 1 & 0{,}3 \end{array}.$$

Звідси бачимо, що найбільший ступінь недомінованості має альтернатива x_3, а тому її вибір слід вважати раціональним.

В и з н а ч е н н я 5.5. Відношення R на множині X назвемо лінійним, якщо ним або оберненим до нього відношенням пов'язані кожні дві альтернативи множини X.

Тобто, якщо відношення лінійне, то на множині X не існує непорівнянних між собою альтернатив. Для звичайних відношень лінійність означає, що буде справедливим таке твердження:

$$R \cup R^{-1} = X \times X,$$

де R^{-1} – обернене до R відношення, або з використанням термінів характеристичних функцій

$$\mu_R(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_R(y, x) = 1.$$

Якщо має місце нечітке відношення, то однозначно можна виявити тільки повну відсутність лінійності, тобто нечітке відношення μ_R не буде лінійним тоді і тільки тоді, коли знайдуться альтернативи $x, y \in X$, для яких виконується така рівність:

$$\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) = 0,$$

де $\mu_R(x, y)$ – функція належності даного нечіткого відношення.

Отже, властивість лінійності стосовно нечіткого відношення можна розуміти більш широко.

В и з н а ч е н н я 5.6. Нехай λ – деяке число з інтервалу [0; 1]. Нечітке відношення μ_R будемо називати λ-лінійним, якщо його функція належності має таку властивість:

$$\max\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\} > \lambda, \quad \forall\ x, y \in X. \tag{5.11}$$

Таким чином, коли, наприклад, нечітке відношення порядку являє собою 0,7-лінійне відношення, то з кожних двох альтернатив одна не гірша від одної зі ступенем, не меншим за 0,7.

В и з н а ч е н н я 5.7. Нечітке відношення називається *сильно лінійним*, якщо його функція належності задовольняє таку умову:

$$\max\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\} = 1, \ \forall\ x, y \in X. \tag{5.12}$$

Інакше цю властивість можна визначити таким чином:

$$\mu_R(x, y) \geq \mu_R(y, x) \Rightarrow \mu_R(x, y) = 1\ . \tag{5.13}$$

Покажемо тепер, що сильна лінійність відповідає такій умові:

$$\mu_R(x, y) = 1 - \mu_R^S(y, x), \quad \forall\ x, y \in X\ , \tag{5.14}$$

де μ_R^S – відповідне нечітке відношення строгої переваги.

Дійсно, коли виконується умова (5.12), то з огляду на визначення відношення строгої переваги μ_R^S випливає, що $\mu_R^S(y, x) = 0$ і $\mu_R^S(x, y) = 1$, тобто умову (5.13) також виконано. З іншого боку, якщо виконано (5.13) й $\mu_R(x,y) \geq \mu_R(y,x)$, то $\mu_R^S(y,x) = 0$ й $\mu_R(x,y) = 1$, тобто й умова (5.12) виконується теж.

Пояснимо сенс сильної лінійності. Якщо, наприклад, альтернатива x краща від альтернативи y зі ступенем 1 $(y \succ x)$, то $(x, y) \notin R^{-1}$, тобто y не може бути кращою від x з жодним додатним ступенем. Коли ж має місце відношення $x \succ y$, то $(x, y) \in R^{-1}$, тобто $y \geq x$ зі ступенем 1. Якщо ж x краща від y зі ступенем α $(x \underset{\alpha}{\succ} y)$, то зі ступенем $(1 - \alpha)$ виконується така перевага: $y \geq x$. Таким чином, за своїм змістом сильна лінійність значною мірою аналогічна властивості лінійності звичайного відношення.

Сильно лінійні відношення мають такі властивості:

1. $\mu_R(x_1, x_2) = 1, \quad \mu_R(x_2, x_1) = 0.$

2. Відповідні сильно лінійному відношенню відношення R^e та R^I збігаються.

Дійсно, нехай для деяких пар альтернатив $(x, y) \in X$ виконано таку умову: $\mu_R(x, y) \geq \mu_R(y, x)$. Тоді з визначення (сильної лінійності) випливає, що $\mu_R(x, y) = 1$, а із визначення μ_R^I виходить, що $\mu_R^I(x, y) = \mu_R(x, y)$. Унаслідок симетричності відношення μ_R^I, коли $\mu_R(x, y) \leq \mu_R(y, x)$, то

$$\mu_R^I(x, y) = \min\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\} = \mu_R^e(x, y).$$

В и з н а ч е н н я 5.8. Нечітке відношення переваги назвемо *слабко лінійним*, якщо воно має таку властивість:

$$\mu_R(x, y) = 0 \Rightarrow \mu_R(y, x) > 0, \ \forall \ x, y \in X.$$

Наведемо приклади ліійних нечітких відношень.

Нехай X – множина, що складається з 4 елементів, тоді нечітке відношення з такою функцією належності:

$$\mu_R(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}55 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}3 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix},$$

буде 0,5-лінійним.

Відношення, що описується такою функцією належності:

$$\mu_R(x_i, y_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix},$$

буде сильно лінійним.

5.3. Чітко недоміновані альтернативи та їхні властивості

У цьому підрозділі ми розглянемо задачі, у яких множина недомінованих альтернатив являє собою нормальну нечітку підмножину універсальної множини X, тобто функція належності цієї підмножини має таку властивість:

$$\sup_{x \in X} \mu_R^{н.д}(x) = 1. \tag{5.15}$$

У цьому випадку для нашої альтернативи з множини $X^{н.д}$ максимальних недомінованих альтернатив виконано таку умову: $\mu_R^{н.д}(x)=1$, тобто міра недомінованості кожної з них дорівнює 1.

Іншими словами, для кожної альтернативи $x \in X^{н.д}$ і будь-якої альтернативи $y \in X$ при цьому виконується така рівність: $\mu_R^S(y,x)=0$, тобто жодна альтернатива не домінує з додатним ступенем над поданою альтернативою *x*.

Такі альтернативи ми будемо називати *чітко недомінованими*, а їх сукупність позначимо через $X^{\text{ЧНД}}$. Отже,

$$X^{\text{ЧНД}} = \left\{x \mid x \in X,\ \mu_R^{н.д.}(x)=1\right\}. \quad (5.16)$$

Як випливає з визначення множин $X^{\text{ЧНД}}$ та $\mu^{н.д}$, для кожної чітко недомінованої альтернативи виконується така умова:

$$\sup_{y \in X} \mu_R^S(y,x)=0, \quad \forall x \in X^{\text{ЧНД}}, \quad (5.17)$$

де μ_R^S – нечітке відношення строгої переваги, яке відповідає відношенню μ_R.

Звідси можна зробити висновок, що для будь-яких альтернатив $x_1, x_2 \in X^{\text{ЧНД}}$ справедливою буде така рівність:

$$\mu_R^S(x_1,x_2)=\mu_R^S(x_{2,}x_1)=0. \quad (5.18)$$

Із визначення випливає, що рівність (5.18) еквівалентна такій рівності:

$$\mu_R(x_1,x_2)=\mu_R(x_2,x_1),$$

але тоді

$$\mu_R^I(x_1,x_2)=\max\left\{1-\mu_R(x_1,x_2),\mu_R(x_1,x_2)\right\} \geq 0{,}5,$$

тобто будь-які дві чітко недоміновані альтернативи пов'язані відношенням байдужості зі ступенем, не меншим за 0,5.

А відповідне нечітке відношення еквівалентності μ_R^e, буде визначатися таким чином:

$$\mu_R^e(x_1,x_2)=\mu_R(x_1,x_2)=\mu_R(x_2,x_1) \quad \forall\ x_1,x_2 \in X^{\text{ЧНД}}. \quad (5.19)$$

Коли мають місце довільні нечіткі відношення переваги, то може виявитися, що $\mu_R^e(x_1,x_2)=0$ для деяких альтернатив $x_1,x_2 \in X^{\text{ЧНД}}$, тобто з жодною додатною мірою ці альтернативи не будуть еквівалентними.

Зауважимо, що тоді $\mu_R(x_1, x_2) = 0$, тобто x_1 та x_2 не порівнянні між собою. Однак це не стосується лінійних відношень.

5.4. Прийняття рішень при кількох відношеннях переваги на множині альтернатив

Розглянемо задачу, у якій задано множину альтернатив X і кожна альтернатива цієї множини характеризується кількома ознаками, номери яких $j = 1,..,m.$ Інформацію про попарне порівняння альтернатив подано у вигляді відношень переваги R_j, $j = 1,..,m.$ Таким чином, маємо m відношень переваги на множині X. Задача полягає в тому, щоб на основі даної інформації зробити раціональний вибір альтернатив з множини $(X, R_1,..., R_m)$.

Звернемося спочатку до ситуації, коли відношення описуються числовими функціями корисності $f_j : X \to R^1$, $j = 1,\ldots,m$, де R^1 – числова вісь. Значення функції $f_j(x)$ можна вважати числовою оцінкою альтернативи за ознакою j, $j = 1,..,m$. Перевага з погляду ознаки j віддається альтернативі, характерній більш високою оцінкою $f_j(x)$. Задача полягає в тому, щоб вибрати альтернативу, яка має якомога більші оцінки за всіма ознаками. Раціональним у цьому випадку природно вважати вибір альтернативи x_0, що має таку властивість:

$$\text{коли } f_j(y) \geq f_j(x_0),\ j = 1, 2, \ldots, m, \text{ то } f_j(y) = f_j(x_0),\ j = 1, 2, \ldots, m. \quad (5.20)$$

Такі альтернативи в багатокритерійній оптимізації називаються ефективними.

Легко помітити, що кожна функція $f_j(x)$, $j = 1,..,m$, описує звичайне відношення переваги на множині альтернатив таким чином:

$$R_j = \{(x, y) \mid x, y \in X,\ f_j(x) \geq f_j(y)\}. \quad (5.21)$$

Нехай $Q_1 = \bigcap_{j=1}^{m} R_j$. Покажемо, що множина всіх ефективних (недомінованих) альтернатив у множині (X, Q_1) збігається з множиною ефективних альтернатив для набору функцій f_j, $j = 1,..., m.$

Припустимо, що x_0 – альтернатива, яка не домінується в множині (X, Q_1). Це означає, що для будь-якої альтернативи $y \in X$ виконується така умова:

$$(y, x_0) \notin Q_{1,}^{S} \quad (5.22)$$

де Q_1^S – відношення строгої переваги, відповідне відношенню Q_1, воно має такий вигляд:

$$Q_1^S = \{(x, y) \mid x, y \in X, f_j(x) \geq f_j(y), \ j = 1,..,m, \exists\, j_0 : f_{j_0}(x) > f_{j_0}(y)\}. \qquad (5.23)$$

Звідси з урахуванням умови (5.22) робимо висновок, що має місце властивість (5.20), тобто x_0 – ефективна альтернатива для функції $f_j(x)$, $j = 1,...,m.$

Можна показати й зворотне, тобто, що будь-яка ефективна для множини функцій $f_j(x)$, $j = 1,...,m$, альтернатива не домінується в множині (X, Q_1). Таким чином, для того, щоб знайти множину ефективних альтернатив, можна замість набору відношень R_j, $j = 1,...,m$, взяти їхній перетин Q_1 і відшукати множину недомінованих альтернатив у множині (X, Q_1). Запишемо тепер перетин відношень R_j в іншому вигляді.

Нехай

$$\mu_j(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (x, y) \in R_j, \\ 0, \text{ якщо } (x, y) \notin R_j, \end{cases} \qquad (5.24)$$

де $\mu_j(x, y)$ – функція належності R_j. Тоді перетину цих відношень відповідає така функція належності:

$$\mu_{Q_1}(x, y) = \min\{\mu_1(x, y), ..., \mu_m(x, y)\}. \qquad (5.25)$$

Вона виступає аналогом згортки критеріїв $f_j : F(x) = \min\limits_{j=1,..,m} \lambda_j f_j$, у багатокритерійних задачах прийняття рішень. Тут числа λ_i– коефіцієнти відносної важливості критеріїв. У згортці (5.25) $\lambda_j = 1$, $j = 1,...,m$, що відповідає ситуації, коли всі подані відношення однаково важливо враховувати при виборі альтернатив. Коли такі відношення відрізняються за важливістю відповідних ознак, на основі яких порівнюють альтернативи, то в згортці (5.25) можна використовувати різні за величиною коефіцієнти λ_j. При цьому вихідні відношення маємо розглядати як нечіткі, тобто у визначенні функції належності (5.24) числа 0 та 1 необхідно вважати крайніми точками одиничного інтервалу можливих значень ступеня належності.

У результаті згортки вихідних відношень R_j з коефіцієнтами λ_j, що відповідають умові: $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$, отримуємо функцію належності, яка має такий вигляд:

$$\mu_{Q_1}(x, y) = \min\{\lambda_1 \mu_1(x, y), ..., \lambda_m \mu_m(x, y)\}, \qquad (5.26)$$

тобто функцію належності нечіткого відношення переваги. Але таке відношення не буде рефлексивним, а це означає, що воно не належить до відношень переваги в сенсі визначення з пункту 5.1.1, і тому описана згортка незручна для застосування, коли необхідно враховувати значущість поданих відношень.

Отже, розглянемо згортку вихідних відношень іншого вигляду, а саме:

$$\mu_{Q_2}(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mu_j (x, y). \tag{5.27}$$

Зауважимо, що отримане після згортки (5.27) звичайних відношень R_j нечітке відношення μ_{Q_2} буде рефлексивним, оскільки такими є вихідні відношення.

Нехай усі вихідні відношення переваги мають однакову важливість. У згортці (5.27) цьому випадку відповідають такі значення вагових коефіцієнтів: $\lambda_j = \dfrac{1}{m}$, $j = 1,...,m.$ Знайдемо підмножину альтернатив, не домінованих на множині (X, Q_2), використовуючи визначення з п. 5.1.2, таким чином:

$$\mu_{Q_2}^{н.д}(x) = 1 - \frac{1}{m} \sup_{y \in X} \sum_{j=1}^{m} \left[\mu_j (y, x) - \mu_j (x, y) \right], \qquad x \in X. \tag{5.28}$$

Позначимо через $X_1^{\text{ЧНД}}$ підмножину чітко недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{θ_1}), а через $X_2^{\text{ЧНД}}$ відповідну підмножину в (X, μ_{θ_2}). Встановимо, що $X_2^{\text{ЧНД}} \subset X_1^{\text{ЧНД}}$. Дійсно, нехай $x_0 \in X_2^{\text{ЧНД}}$, тоді згідно з визначенням чітко недомінованої альтернативи та з огляду на формулу (5.28) можемо зробити такий висновок:

$$\sup_{y \in X} \sum_{j=1}^{m} \left[\mu_j (y, x_0) - \mu_j (x_{0,y}) \right] = 0$$

або

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\mu_j (y, x_0) - \mu_j (x_0, y) \right] \le 0, \tag{5.29}$$

для всіх альтернатив $y \in X$.

Припустимо, що $x_0 \notin X_1^{\text{ЧНД}}$. Тоді, відповідно до властивості (5.20) і визначення (5.24) робимо висновок, що існує така альтернатива $y \in X$, для якої $\mu_j (y, x_0) = 1, \quad j = 1,...,m$, причому стосовно якогось індексу j_0 виконується рівність: $\mu_{j_0}(x_0, y) = 0.$ Але тоді для альтернативи y не буде справедливою нерівність (5.29). Звідси випливає, що $x_0 \in X_1^{\text{ЧНД}}$, і відповідно $X_2^{\text{ЧНД}} \subset X_1^{\text{ЧНД}}$.

З а у в а ж е н н я. Множина $X_2^{\text{ЧНД}}$ не включає в себе всі ефективні альтернативи для функцій f_j, $j=1,...,m$, тобто не збігається з множиною $X_1^{\text{ЧНД}}$, але можна показати, що кожна ефективна альтернатива, тобто кожний елемент $x \in X_1^{\text{ЧНД}}$ має додатний ступінь належності до множини $\mu_{Q_2}^{н.д}$, тобто

$$X_1^{\text{ЧНД}} \subseteq \operatorname{supp} \mu_{Q_2}^{н.д}.$$

Дійсно, коли для будь-якої альтернативи $x \in X$ виконано таку рівність: $\mu_{Q_2}^{н.д}(x)=0$, то на основі визначення (5.28) виявляємо, що в множині X можна відшукати альтернативу y, стосовно якої

$$\mu_j(y,x)-\mu_j(x,y)=1, \qquad j=1,...,m,$$

тобто $\mu_j(y,x)=1$ і $\mu_j(x,y)=0$, $j = 1, \dots, m$. Це означає, що альтернатива y домінує над альтернативою x, тобто $f_j(y)>f_j(x)$, $j = 1, \dots, m$, і тому альтернатива x не може бути ефективною для набору функцій f_j.

Функція $\mu_{Q_2}^{н.д}$ впорядковує альтернативи за ступенем їх недомінованості. Наприклад, коли $\mu_{Q_2}^{н.д}(x)=3/4$ і яка-небудь альтернатива $y \in X$ буде строго кращою від альтернативи x за якими-небудь двома ознаками, то не менше ніж за однією з решти ознак вона строго переважає альтернативу y.

Якщо взяти перетин множин $X_1^{\text{ЧНД}}$ й $\mu_{Q_2}^{н.д}$, то отримаємо відповідне впорядкування на множині ефективних альтернатив, користуючись яким серед них можна здійснити вибір.

Отже, застосування згортки (5.27) вихідних звичайних відношень до розв'язування задачі прийняття рішень на множині функцій дозволяє одержати додаткову інформацію про відносний ступінь недомінованості ефективних альтернатив, звузивши таким чином клас раціональних виборів до такої множини:

$$X^{\text{ЧНД}} = \left\{ x \,\middle|\, x \in X, \mu_{Q_2}^{н.д}(x) = \sup_{x' \in X_2^{н.д.}} \mu_{Q_2}^{н.д}(x') \right\}.$$

У загальній задачі, коли на множині альтернатив задано m нечітких відношень переваги R_j, $j = 1, \dots, m$, а також задано коефіцієнти λ_j, $j = 1, \dots, m$, відносної ваги цих відношень, можна діяти, так само, як у попередньому випадку.

Сформулюємо тепер алгоритм прийняття рішень при кількох заданих відношеннях переваги на множині альтернатив.

1. Будуємо нечітке відношення Q_1 (перетин вихідних відношень):

$$\mu_{Q_1}(x,y)=\min\{\mu_1(x,y),...,\mu_m(x,y)\}.$$

Далі визначаємо нечітку підмножину недомінованих альтернатив у множині (X,μ_{Q_1}) за такою формулою:

$$\mu_{Q_1}^{н.д}(x)=1-\sup_{y\in X}\left[\mu_{Q_1}(x,y)-\mu_{Q_1}(y,x)\right].$$

2. Створюємо нечітке відношення Q_2 [згортку відношень типу (5.27)]:

$$\mu_{Q_2}(x,y)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\mu_j(x,y)$$

і визначаємо нечітку підмножину недомінованих альтернатив у множині (X,μ_{Q_2}), а саме:

$$\mu_{Q_2}^{н.д}(x)=1-\sup_{y\in X}\left[\mu_{Q_2}(x,y)-\mu_{Q_2}(y,x)\right].$$

3. Знаходимо перетин множин $\mu_{Q_1}^{н.д}$ та $\mu_{Q_2}^{н.д}$ за таким правилом:

$$\mu^{н.д}(x)=\min\left\{\mu_{Q_1}^{н.д}(x),\mu_{Q_2}^{н.д}(x)\right\}.$$

4. Раціональним вважаємо вибір альтернатив із такої множини:

$$X^{\text{НД}}=\left\{x\in X\,\middle|\,\mu_Q^{н.д}(x)=\sup_{x'\in X}\mu^{н.д}(x)\right\}.$$

Тут слід зауважити, що залежно від типу задачі раціональними можна вважати не тільки альтернативи з множини $X^{\text{НД}}$, але в тому чи іншому сенсі й слабко (або не дуже сильно) доміновані альтернативи, тобто ті, ступінь належності яких до множини $\mu^{н.д}$ нижчий від певного заданого.

П р и к л а д 5.3. Нехай множина $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, і на ній подано три чіткі відношення переваги, що мають однакову значущість, а саме:

$R_1=$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
x_2	1	1	1	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	1	0	1

$R_2=$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
x_2	0	1	1	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	0	1	1

$R_3=$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
x_2	1	1	1	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	1	1	1

Необхідно на їхній основі здійснити раціональний вибір альтернативи з множини X.

Розв'язування

Оскільки відношення переваги мають однакову значущість, то будемо вважати, що коефіцієнти відносної ваги $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$.

1. Будуємо відношення: $Q_1 = \lambda_1 R_1 \bigcap \lambda_2 R_2 \bigcap \lambda_3 R_3$, для наших даних воно набуває такого вигляду:

$\mu_{Q_1}(x_i, x_j) =$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$1/3$	$1/3$	0	0
x_2	0	$1/3$	$1/3$	0
x_3	0	0	$1/3$	0
x_4	0	0	0	$1/3$

Знаходимо відношення строгої переваги, тобто

$\mu^s_{Q_1}(x_i, x_j) =$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	$1/3$	0	0
x_2	0	0	$1/3$	0
x_3	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0

Далі знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_1}), а саме:

$\mu^{н.д.}_{Q_1}(x_1) =$

x_1	x_2	x_3	x_4
1	$2/3$	$2/3$	1

.

2. Будуємо відношення: $Q_2 = \frac{1}{3}\left(\mu_1(x_i, x_j) + \mu_2(x_i, x_j) + \mu_3(x_i, x_j)\right)$, яке набуває за нашими даними такого вигляду:

$\mu_{Q_2}(x_i, x_j) =$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
x_2	$2/3$	1	1	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	$1/3$	$2/3$	1

Записуємо відповідне йому відношення строгої переваги, тобто

$$\mu_{Q_2}^S\left(x_i, x_j\right)= \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ \hline x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_4 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \end{array}$$

Знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині $\left(X, \mu_{Q_2}\right)$, а саме:

$$\mu_{Q_2}^{н.д}(x)= \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 1 & 2/3 & 0 & 1 \end{array}.$$

3. Множина недомінованих альтернатив являє собою перетин множин $\mu_{Q_1}^{н.д}$ та $\mu_{Q_2}^{н.д}$, тобто

$$\mu^{н.д}(x)= \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 1 & 2/3 & 0 & 1 \end{array}.$$

Звідси робимо висновок, що в поданому прикладі раціональним слід вважати вибір альтернатив x_1 та x_4, які мають максимальний ступінь недомінованості.

П р и к л а д 5.10. Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. На ній подано два нечіткі відношення переваги R_1 та R_2, причому перше з них має значущість, удвічі більшу, ніж друге, зокрема

$$R_1 = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ x_2 & 0 & 1 & 0{,}8 \\ x_3 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array} \qquad R_2 = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ x_2 & 0{,}3 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array}$$

Необхідно здійснити раціональний вибір альтернативи з множини X на основі заданих відношень переваги.

Розв'язування

1. Будуємо відношення: $Q_1 = \lambda_1 R_1 \cap \lambda_2 R_2$. Враховуючи, що $\lambda_1 = 0{,}33$ і $\lambda_2 = 0{,}67$, воно набуває такого вигляду:

$$\mu_{Q_1}\left(x_i, x_j\right)= \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}033 & 0 \\ 0 & 0{,}33 & 0{,}33 \\ 0{,}33 & 0{,}167 & 0{,}33 \end{pmatrix},$$

а відповідне йому відношення строгої переваги

$$\mu_{Q_1}^{s}\left(x_i, x_j\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0{,}033 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}167 \\ 0{,}33 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині $\left(X, \mu_{Q_1}\right)$. Її функція належності

$$\mu_{Q_1}^{н.д}\left(x\right)=\frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3}{0{,}67 \mid 0{,}967 \mid 0{,}833}.$$

2. Будуємо відношення: $Q_2 = \lambda_1\mu_1\left(x_i, x_j\right)+\lambda_2\mu_2\left(x_i, x_j\right)$. Його функція належності

$$\mu_{Q_2}\left(x_i, x_j\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}367 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}867 \\ 1 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix},$$

а відповідне відношення строгої переваги має такий вигляд:

$$\mu_{Q_2}^{S}\left(x_i, x_j\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0{,}167 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}367 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині $\left(X, \mu_{Q_2}\right)$, а саме:

$$\mu_{Q_2}^{н.д}\left(x\right)=\frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3}{0{,}2 \mid 0{,}833 \mid 0{,}633}.$$

Вихідна множина недомінованих альтернатив має таку функцію належності:

$$\mu^{н.д}\left(x\right)=\frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3}{0{,}2 \mid 0{,}833 \mid 0{,}633}.$$

Максимальним ступенем недомінованості характеризується альтернатива x_2, тому її вибір можна вважати раціональним.

5.5. Відношення переваги на нечіткій множині альтернатив

Розглянемо тепер випадок, коли підмножина припустимих альтернатив також нечітка.

Нехай X – універсальна множина альтернатив і на ній подано нечітку підмножину допустимих альтернатив, функція належності якої $\nu : X \to [0;1]$, а також задано нечітке відношення переваги з функцією належності $\mu_R(x, y)$.

У разі, коли множина допустимих альтернатив являє собою звичайну множину, вибір раціональної альтернативи визначається тільки поданими на ній нечіткими відношеннями переваги. Але тепер нам необхідно враховувати ще й ступінь належності альтернативи до множини допустимих альтернатив, тобто перевагу слід віддавати альтернативам, яким відповідає більше значення функції $\nu(x)$.

Цю вимогу можна врахувати в такий спосіб:

Визначимо відношення переваги, породжене функцією ν, таким чином:

$$\mu_A(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \nu(x) \ge \nu(y), \\ 0, & \text{якщо } \nu(x) < \nu(y). \end{cases}$$

Тепер вихідну задачу зведено до постановки, яку було розглянуто в попередньому пункті, і для її розв'язування можна використати описану там процедуру.

5.6. Прийняття рішень, коли задано перевагу на множині ознак

Нехай задано множину альтернатив X і множину ознак (або експертів) P. Кожній альтернативі $x \in X$ тією чи іншою мірою притаманна кожна ознака з множини P. Для кожної фіксованої ознаки $p \in P$ відоме нечітке відношення переваги φ на множині альтернатив X, тобто відомо функцію належності $\varphi: X \times X \times P \to [0;1]$. Її значення $\varphi(x_1, x_2, p)$ відображає ступінь переваги альтернативи x_1 над альтернативою x_2 за ознакою p. Якщо P – множина експертів, то $\varphi(x_1, x_2, p)$ – відношення переваги на множині альтернатив, яке пропонується експертом p. Таким чином, функція φ описує сім'ю нечітких відношень переваги на множині X відносно параметра p.

Елементи множини P, різняться за важливістю, а нечітке відношення $\mu: P \times P \to [0; 1]$ описує важливість ознак, зокрема величина $\mu(p_1, p_2)$ показує ступінь, з якою ознака p_1 вважається не менш важливою, ніж ознака p_2.

Задача полягає в раціональному виборі альтернативи з множини X на основі описаної вище інформації.

Розглянемо один з можливих підходів до розв'язування цієї задачі.

Позначимо через $\varphi(x, p)$ нечітку підмножину недомінованих альтернатив, яка відповідає нечіткому відношенню переваги $\varphi(x_1, x_2, p)$ для фіксованої ознаки $p \in P$, тобто

$$\varphi^{н.д}(x, p) = 1 - \sup[\varphi(y, x, p) - \varphi(x, y, p)]. \qquad (5.30)$$

Якби вибір альтернатив відбувався тільки за єдиною ознакою p, то можна було б вважати раціональним надання переваги тим із них, що забезпечують найбільше значення функції належності $\varphi(x, p)$ (ступеня недомінованості) на множині X. Але в даному випадку необхідно вибрати альтернативу з урахуванням сукупності ознак, які різняться своєю важливістю.

При фіксованій альтернативі $x_0 \in X$ функція $\varphi^{н.д.}(x_0, p)$ описує нечітку підмножину ознак, за якими вона недомінована. Зрозуміло, що коли для двох альтернатив x_1 та x_2 нечітка множина $\varphi^{н.д}(x_1, p)$ «не менш важлива», ніж нечітка множина ознак $\varphi^{н.д}(x_2, p)$, то й альтернативу x_1 належить вважати не менш прийнятною від альтернативи x_2. Таким чином, ситуація в даному випадку аналогічна тій, що розглядалася при аналізі задачі нечіткого математичного програмування.

Отже, у цьому випадку необхідно узагальнити подану нечітку підмножину множини P і вважати отримане нечітке відношення вислідним відношенням переваги на множині альтернатив X.

Згадане відношення, породжене функцією $\varphi^{н.д}(x, p)$ і нечітким відношенням μ, визначимо за такою формулою:

$$\eta(x_1, x_2) = \sup\min\{\, \varphi^{н.д}(x_1, p_1),\ \varphi^{н.д}(x_2, p_2),\ \mu^{н.д}(p_1, p_2)\}. \qquad (5.31)$$

Це нечітке відношення переваги можна вважати результатом «згортки» сім'ї нечітких відношень $\varphi(x_1, x_2, p)$ у єдине вислідне нечітке відношення переваги, яке враховує інформацію про відносну важливість критеріїв, задану у формі нечіткого відношення переваги.

Таким чином, побудовою нечіткого відношення переваги η вихідну задачу вибору зведено до задачі вибору за єдиним відношенням переваги. Для її розв'язування достатньо визначити відповідну відношенню η скореговану нечітку множину недомінованих альтернатив і вибрати ті з них, які надають максимуму функції $\eta^{н.д}(x)$.

Розглянемо задачі, які ілюструють описаний підхід.

П р и к л а д 5.4 (вибір на основі чітких відношень). Нехай задано множину альтернатив: $X = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\}$. Альтернативи порівнюються між собою за трьома ознаками A, B, C. Результати їхнього порівняння за кожною ознакою описуються такими матрицями відношень нестрогої переваги:

за ознакою A

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	1	1
x_2	1	1	1	1
x_3	0	0	1	0
x_4	1	0	1	1 ;

за ознакою B

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	1
x_2	0	1	1	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	1	1	1;

за ознакою C

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	1	1
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	1
x_4	0	0	0	1.

Відношення відносної важливості ознак описується матрицею такого вигляду:

	A	B	C
A	1	1	1
B	1	1	1
C	0	0	1.

Із цієї матриці видно, що ознаки A та B еквівалентні одна одній і кожна з них важливіша за ознаку C.

Керуючись описаним підходом, визначимо множину альтернатив, які не домінуються за кожною з ознак, у результаті чого отримаємо такі функції належності:

$$\varphi^{н.д}(x_i, A) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0};$$

$$\varphi^{н.д}(x_i, B) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0};$$

$$\varphi^{н.д}(x_i, C) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0}.$$

Отже, недомінованими виявились:

- за ознакою A альтернатива x_2;
- за ознакою B альтернатива x_1;
- за ознакою C альтернатива x_1, x_2, x_3.

Далі, за формулою (5.31), отримуємо таку матрицю вислідного відношення переваги на множині альтернатив X:

$$\eta(x_i, x_j) = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

А за формулою (5.30) маємо відповідну множину недомінованих альтернатив (нескореговану):

$$\eta^{н.д}(x_i) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1}.$$

Нарешті, використовуючи таку формулу: $\eta^{н.д}(x_i) = \min\{\eta^{н.д}(x_i), \eta^{н.д}(x_i, x_i)\}$, знаходимо скореговану множину недомінованих альтернатив, а саме:

$$\eta^{н.д}(x_i) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0}.$$

Отже, робимо висновок, що раціональним у даній задачі слід вважати вибір альтернативи x_1 або x_2. Зауважимо, що ці альтернативи є недомінованими за ознаками A та B, які найбільш (однаково) важливі.

П р и к л а д 5.5 (вибір на основі нечітких відношень). Розглянемо таку задачу: припустимо, що керівник фірми розглядає чотири проекти подальшого розвитку підприємства *А*, *Б*, *В*, *Г* і має вибрати для реалізації один з них. Із цією метою він запросив чотирьох експертів *E*1, *E*2, *E*3, *E*4, до позицій кожного з них він ставиться по-різному. Тобто до висновків одного з експертів він прислухається більш уважно, ніж до поглядів іншого. Відносні переваги позицій експертів описано такою матрицею нечіткого відношення «не менш важливо»:

	*E*1	*E*2	*E*3	*E*4
*E*1	1	0,4	0,6	0
*E*2	1	1	0,8	1
*E*3	0,2	1	1	1
*E*4	0,8	0	0	1

На думку експертів, відношення переваги між проектами описуються функціями належності, які мають такий вигляд:

$E1$	A	$Б$	$В$	$Г$
A	1	0,8	1	0
$Б$	0	1	0,2	1
$В$	0	0,8	1	0
$Г$	0	0	0	1;

$E2$	A	$Б$	$В$	$Г$
A	1	0,4	0,5	0,3
$Б$	0,8	1	0,8	0,8
$В$	0,5	1	1	0
$Г$	0,8	0	0	1;

$E3$	A	$Б$	$В$	$Г$
A	1	0	0,8	0
$Б$	0	1	0	0
$В$	0,1	0	1	0,4
$Г$	1	0	1	1;

$E4$	A	$Б$	$В$	$Г$
A	1	1	0,9	0
$Б$	0	1	1	1
$В$	0,4	0	1	0
$Г$	0	0	0	1.

Розв'язування

Знайдемо нечіткі множини недомінованих за кожною ознакою альтернатив, а саме:

	A	$Б$	$В$	$Г$
$\varphi^{н.д}(\cdot, E1)$	1	0,2	0	0
$\varphi^{н.д}(\cdot, E2)$	0,3	1	0,5	0,2
$\varphi^{н.д}(\cdot, E3)$	0	0	0,3	1
$\varphi^{н.д}(\cdot, E4)$	1	0	0	0.

Далі знаходимо нечітке відношення переваги η, визначене на множині функціями $\varphi^{н.д}$ й нечітким відношенням μ, тобто

	A	$Б$	$В$	$Г$
A	1	0,4	0,4	1
$Б$	1	1	0,5	0,8
$В$	0,5	0,5	0,5	0,5
$Г$	1	1	0,5	1

Насамкінець, визначаємо відповідну відношенню η нечітку множину недомінованих альтернатив, її функція належності має такий вигляд:

$$\eta^{н.д} = \frac{A \quad Б \quad\quad В \quad Г}{1 \quad 0,4 \quad 0,9 \quad 0,8},$$

а скорегована множина недомінованих альтернатив буде такою:

$$\eta^{н.д} = \frac{A \quad Б \quad В \quad Г}{1 \quad 0{,}4 \quad 0{,}5 \quad 0{,}8}.$$

Як бачимо, найбільший ступінь недомінованості має альтернатива A, тому вибір саме цього проекту можна вважати раціональним.

Якщо найбільший ступінь недомінованості має не одна, а кілька альтернатив, то ОПР може або самостійно обрати одну з них, виходячи з якихось додаткових міркувань, або розширити коло експертів і знову розв’язати задачу, як описано вище.

Висновки

Нечіткі відношення є узагальненням поняття бінарного відношення. Нечіткі відношення переваги використовують для опису й моделювання ситуацій, у яких інформація про переваги альтернатив не може бути висловлена однозначно. Вони дозволяють враховувати їх «деякою мірою». У багатьох випадках це дає можливість побудувати більш адекватну математичну модель і спростити розв’язування задачі.

Питання, які викладені в цьому розділі, розглянуто в літературних джералах [43, 44, 51].

Контрольні питання

1. Що являє собою нечітке відношення переваги?
2. Які властивості має нечітке відношення переваги, що воно характеризує?
3. Які альтернативи називають недомінованими?
4. Які види згорток можна використовувати при виборі альтернатив на основі кількох відношень переваги? Охарактеризуйте особливості кожної з них.
5. Яким чином здійснюють раціональний вибір альтернатив, коли відоме відношення переваги на даній множині альтернатив?
6. Як відбувається раціональний вибір альтернатив, коли задано кілька відношень переваги на множині альтернатив?
7. Яким чином виконують раціональний вибір альтернатив, коли задано відношення переваги на множині альтернатив й нечітку перевагу на множині ознак?

Завдання до розділу 5

Завдання А

1. Припустимо, множина $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, на ній подано два нечітких відношення переваги, причому відомо важливість кожного з них, а саме: $\lambda_1 = 0{,}7$, $\lambda_2 = 0{,}3$. Здійснити раціональний вибір альтернативи з множини X за даними відношеннями, якщо

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}9 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. За поданими нижче відношеннями переваги зробити раціональний вибір альтернативи із такої множини: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. За поданими нижче відношеннями переваги виконати раціональний вибір альтернативи із такої множини: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, якщо $\lambda_1 = 0{,}4$, $\lambda_2 = 0{,}6$.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання В

Використовуючи теорію нечітких множин, скласти математичні моделі для наведених нижче задач.

1. Підприємство використовує кілька виробничих приміщень. Кожне з них характеризується відмінними від інших параметрами (розміри, застосована система освітлення, рівень забрудненості атмосфери, відбивна здатність поверхні, вимоги до освітлення та економії ресурсів). Для освітлення цих приміщень можуть бути використані кілька видів ламп, що мають різні технічні параметри. Задача полягає в раціональному виборі джерела світла для кожного приміщення з огляду на перелічені вище характеристики, тобто необхідно вибрати такий вид лампи, що найбільшою мірою задовольняє всі вимоги.

2. Для проведення закладних робіт на гірничому підприємстві використовують кілька видів сумішей, що характеризуються такими ознаками: міцність, вартість, основність, усадка, вміст горючих компонентів, пористість. Кожна з цих ознак має певний пріоритет. Необхідно вибрати оптимальний вид суміші відповідно до заданих пріоритетів.

3. Покупець вибирає одну з п'яти моделей пральних машин. Кожну з них він оцінює за такими ознаками: вартість, потужність, економічність, габаритні розміри, маса завантажуваної білизни. Завдання: а) сформулювати й розв'язати з огляду на ці умови задачу досягнення нечітко визначеної мети; б) сформулювати й розв'язати задачу вибору альтернативи за нечіткими відношеннями переваги. Які припущення необхідно зробити в кожному випадку?

4. Керівництву підприємства необхідно призначити одного з трьох кандидатів на посаду головного інженера. Належить враховувати такі критерії вибору: освіта, досвід роботи, авторитет у колективі, вік, організаторські здібності. Завдання: а) сформулювати і розв'язати з урахуванням цих умов задачу досягнення нечітко визначеної мети; б) сформулювати і розв'язати задачу вибору за нечіткими відношеннями переваги. Які припущення необхідно зробити в кожному випадку?

5. Перед підприємством стоїть завдання вибору найкращого постачальника молочної продукції. Для оцінювання комерційних пропозицій претендентів використовуються такі критерії: якість продукції, вартість і надійність поставок, фінансовий стан підприємства, рівень сервісу.

Оцінки постачальників за кожним із названих критеріїв відомі. Потрібно скласти рейтинг постачальників і вибрати оптимальний варіант. Розглядається шість підприємств (П1, П2, П3, П4, П5, П6) з такими характеристиками:

П1 – велике підприємство, що добре зарекомендувало себе на ринку, ціни на його продукцію значно перевищують ціни інших виробників. Високий рівень гнучкості постачання, якісне обслуговування. Висока якість продукції. Серед недоліків – географічна віддаленість і значні транспортні витрати.

П2 – новий постачальник на ринку, який не встиг зарекомендувати себе. Фінансовий стан стійкий. Ціни порівняно невисокі, якість продукції дуже добра. Розташоване поблизу від підприємства-споживача, що значно скорочує терміни поставок.

П3 – невелике підприємство, що динамічно розвивається. Фінансовий стан фірми можна характеризувати як стійкий. Особливу увагу на підприємстві приділяють якості продукції. До недоліків треба віднести великі терміни постачання та перебої в транспортуванні сировини. Вартість продукції порівняно висока за рахунок значних транспортних витрат.

П4 – відносно низька ціна (на 10 – 12 % нижча від вартості продукції інших постачальників), але має місце віддаленість від фірми-споживача. Фінансовий стан відносно стабільний. Налагоджено мережу постачання, хороше обслуговування. Якість продукції задовільна.

П5 – високий показник якості й свіжості продуктів. Географічна віддаленість, великі терміни поставок. Високий рівень обслуговування, відносно високі, але прийнятні ціни. Стабільний фінансовий стан.

П6 – хороша репутація, налагоджено розподільну мережу, різноманітний асортимент продукції, рекламна та інформаційна підтримка. Показник свіжості досить високий. Стабільний фінансовий стан. Вартість постачання продукції трохи перевищує вартість транспортування у постачальника П1.

Кількісний вимір показників роботи можливих постачальників молочної продукції зведено в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Кількісні характеристики критеріїв вибору постачальника

Постачальник	Вартість одиниці продукції, грн	Вартість доставки, грн	Термін поставок, доба
П1	5,4	38	3
П2	4,7	30	1
П3	5,1	36	2
П4	4,1	32	2,5
П5	4,8	35	4,5
П6	5,2	39	2

6. Сучасний ринок дитячих товарів надає можливість обрати будь-який товар на смак батьків. Найбільш популярними та різноманітними за ціновою ознакою виявились дитячі візочки. Покупець має вирішити складне питання вибору цього товару з огляду на власні потреби й на різноманітність конструкцій та дизайну.

Розв’язати задачу вибору, враховуючи такі вимоги: зручність, вага, відповідність сучасним вимогам, безпека, екологічна чистота матеріалів, ціна та інші. Які припущення необхідно зробити?

Завдання С

1 – 4. Розв’язати сформульовані в попередньому пункті задачі одним з методів.

РОЗДІЛ 6

НЕЧІТКІ МНОЖИНИ В ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

Мета розділу: ознайомлення з поняттям про лінгвістичну змінну та нечіткі висловлювання. Вивчення алгоритмів нечіткого логічного виведення та їх застосування у практичних задачах.

Системи нечіткого логічного виведення мають велике значення для багатьох типів застосування теорії нечітких множин, зокрема у нечітких контролерах або нечітких експертних системах та ін. Вони базуються на конструкціях логічних правил типу «якщо …, то …», де умова й висновок (наслідок) виражені набором вербальних характеристик, описаних за допомогою нечітких множин.

Саме для формалізації процесу мислення людини в ході прийняття рішень, на чому базуються інтелектуальні, зокрема, експертні системи, з початку 1970-х років американським вченим Лотфі Заде [27] було запропоновано використовувати нечітку логіку. Пізніше цей напрям набув поширення і дав початок створенню окремої галузі штучного інтелекту, що має назву «м'які обчислення» (soft computing). Було помічено, що наближені міркування формують здатність людини розуміти природну мову, розпізнавати складні образи (наприклад, почерк), приймати рішення в складному й невизначеному середовищі.

Також Л. Заде ввів у наукову термінологію одне з головних понять нечіткої логіки – поняття лінгвістичної змінної.

6.1. Лінгвістична змінна та її опис через нечітку множину

Визначення 6.1. *Нечіткою змінною* називається трійка $\langle \alpha, X, A \rangle$, де α – ім'я змінної; X – універсальна множина (область визначення α), A – нечітка підмножина множини X, яка описує обмеження [тобто $\mu_A(x)$] на значення нечіткої змінної α.

Приклад 6.1. Нехай універсальна множина X – це цілі числа від 1 до 10. Опишемо нечітку змінну «малі числа» таким чином:

α – «малі числа»; $X = \{1, 2, \ldots 10\}$; $\mu_A(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in X$.

Визначення 6.2. *Лінгвістичною змінною* називається набір параметрів $\langle \beta, T, X, G, M \rangle$, у якому β – назва лінгвістичної змінної; T – множина її значень (базова множина лінгвістичної змінної), що являє собою найменування нечітких змінних, областю визначення кожної з яких є множина X; G – синтаксична процедура, яка дозволяє оперувати елементами базової множини T, зокрема, генерувати нові терми (значення); множина $T \cup G(T)$, у якій $G(T)$ – набір згенерованих термів, названий розширеною базовою множиною лінгвістичної змінної; M – семантична процедура, яка дозволяє перетворити кожне нове значення лінгвістичної змінної, створене через процедуру G, у нечітку змінну, тобто сформувати відповідну нечітку множину.

Зауваження. Щоб уникнути великої кількості символів, літеру β використовують як ім'я самої змінної, а також для запису її значень. Один і той самий символ використовують також для запису нечіткої множини та її назви, наприклад термін «*молодий»* означає, що лінгвістична змінна: β = «*вік*», відповідає його змісту і водночас є нечіткою множиною M (*молодий*).

Надання символам кількох значень у їх тлумаченні припускає обов'язкове врахування контексту.

Приклад 6.2. Нехай експерт визначає товщину продукції, що випускається за допомогою таких понять: «*мала*», «*середня*» і «*велика*». При цьому мінімальна товщина виробу становить 10 мм, максимальна – 80 мм.

Формалізувати цей опис можна за допомогою лінгвістичної змінної $\langle \beta, T, X, G, M \rangle$, де β – товщина виробу; T – {«*мала*», «*середня»*, «*велика*»}; X – множина [10; 80]; G – формування нових термів за допомогою зв'язків «і», «*або*» та модифікаторів типу «*дуже*», «*не*», «*злегка*» та інших, наприклад, «*невелика або середня товщина*», «*дуже мала товщина*» і т. д.; M – процедура опису на множині: $X = [10;\ 80]$, таких нечітких підмножин: A_1 = «*мала*», A_2 = «*середня» A_3* = «*велика*», а також нечітких множин для термів із процедури $G(T)$ відповідно до правил трансляції нечітких зв'язків і модифікаторів «*і*», «*або*» «*дуже*», «*не*», «*злегка*» та інших операцій над нечіткими множинами, наприклад, $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, CON $A = A^2$, DIL $A = A^{0,5}$ та ін.

Зауваження. Поряд із розглянутими вище основними значеннями лінгвістичної змінної «*товщина виробу*» (Т = {«*мала*», «*середня*», «*велика»*}) допустимими будуть також значення, залежні від області їх перебування на множині *X*. Зокрема, лінгвістична змінна «*товщина продукту*» може відповідати величинам нечітких чисел «*близько 20 мм*», «*близько 50 мм*», «*близько 70 мм*», тобто мати вигляд набору *нечітких чисел*.

На рис. 6.1 показано можливий вигляд графіків функцій належності нечітких множин «*мала товщина*», «*середня товщина*», «*велика товщина*».

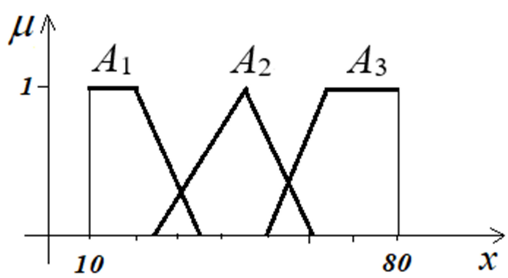


Рис. 6.1. Графіки функцій належності нечітких множин: «*мала товщина*» = A_1, «*середня товщина*» = A_2, «*велика товщина*» = A_3

6.2. Нечіткі висловлювання та операції з ними

В и з н а ч е н н я 6.3. *Нечіткими* будемо називати такі висловлювання, що описуються одним з трьох поданих нижче способів.

1. $\left\langle \beta \in \beta' \right\rangle$, де β – найменування нечіткої змінної, β' – її значення, якому відповідає нечітка множина на універсальній множині *X*.

Наприклад, у висловлюванні <тиск великий> лінгвістична змінна «тиск» набуває значення «великий», для якого на деякій універсальній множині, що також має назву *базової шкали X,* задано відповідну нечітку множину.

2. $\left\langle \beta \in m\beta' \right\rangle$, де m – модифікатор, якому відповідають слова «дуже», «більше або менше», «набагато більше» та ін.

Наприклад: <тиск дуже великий>, <швидкість набагато більша від середньої> і подібні.

3. Складені висловлювання, створені з описаних у пунктах 1 і 2, та сполучників «і», «або», «якщо .., то ...», «якщо .., то .., інакше».

В и з н а ч е н н я 6.4. *Базовою шкалою* називається об’єктивна рангова або інтервальна шкала, на значеннях якої задається нечітка множина.

Зазвичай базова шкала містить одиниці вимірювання і зосереджує в собі той чи інший фізичний сенс.

Той факт, що значення фіксованої лінгвістичної змінної відповідають нечітким множинам однієї і тієї самої універсальної множини *X*, дозволяє ототожнювати модифікатори «дуже», «не дуже» та «не» з такими операціями: посилення властивості – $\text{CON}\, A = A^2$, послаблення властивості – $\text{DIL}\, A = A^{0,5}$, «не» – доповнення $\overline{A}$, а сполучники «і» та «або» – з операціями перетину й об'єднання нечітких множин.

При цьому слід пам’ятати, що названі операції стосуються виключно функції належності нечіткої множини, але в жодному разі не об’єктивної базової шкали.

П р и к л а д 6.3. Експертом було встановлено для лінгвістичної змінної «вік» одне із значень «похилий», описане такою нечіткою множиною: $A = \left\{ \frac{60}{0,6}; \frac{70}{0,8}; \frac{80}{0,9}; \frac{90}{1} \right\}$. Тоді значення «дуже похилий» для змінної «вік» на тій самій базовій множині X виводиться таким чином: $\text{CON}(A) = A^2 = \sum_i \frac{\mu_i^2}{x_i}$, тобто значення «дуже похилий» для змінної «вік» матиме такий вигляд:

$$A^2 = \left\{ \frac{60}{0,36}; \frac{70}{0,64}; \frac{80}{0,91}; \frac{90}{1} \right\}.$$

Наведений приклад показує дві властивості операцій над нечіткими множинами, що описують значення лінгвістичних змінних. По-перше, значення на базовій шкалі об’єктивні й жодна операція з нечіткими множинами не змінює їх. По-друге, використання модифікаторів може суттєво змінити належність того чи іншого конкретного об’єкта тій чи іншій лінгвістичній змінній. Наприклад, людину віком 60 років за умовами задачі скоріше за все можна віднести до множини «вік похилий», адже її показник $\mu_A = 0{,}6 > 0{,}5$. Водночас, ця сама людина вже не підпадає під інше визначення: «вік дуже похилий», адже показник $\mu_{A^2} = 0{,}36 < 0{,}5$. При цьому належність людини віком 90 років до згаданих множин не зазнає змін.

Подібні тонкі нюанси встановлення нечітких значень лінгвістичних змінних часто використовуються в інтелектуальних системах, зокрема в експертних, для якомога повнішого опису предметної області й стратегій прийняття рішень у ній.

Повернемось до прикладу 6.2, де для лінгвістичної змінної β – «товщина виробу» ми окреслили таку базову множину T = {«*мала*», «*середня*», «*велика»*}, а на множині $X = [10;\, 80]$ було визначено нечіткі множини A_1, A_2, A_3, що відповідають базовим значенням «*мала товщина*», «*середня товщина*», «*велика товщина*». У цьому випадку висловлюванню «*товщина виробу дуже мала*» відповідає така нечітка множина: $\mathrm{CON}\, A = A^2$; висловлюванню «*товщина виробу не велика або середня*» – $A_2 \cup \overline{A}_3$, висловлюванню «*товщина виробу не мала і не велика*» – $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_3$.

На рис. 6.2. показано графік функції належності реальних значень товщини виробу нечіткій множині, що відповідає значенню лінгвістичної змінної «*мала або середня*» за умовами прикладу 6.2.

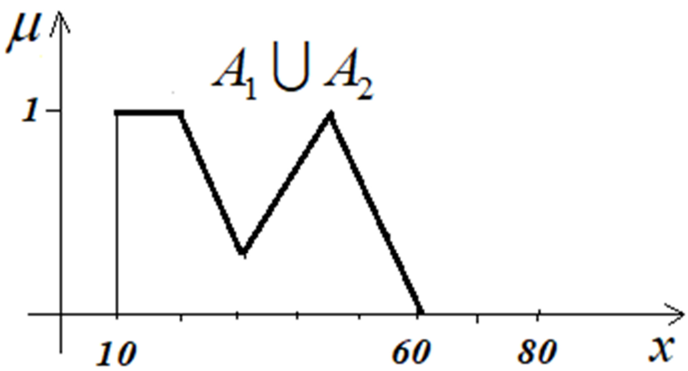


Рис. 6.2. Графік функції належності реальної товщини виробу нечіткій множині: «*мала або середня*» = $A_1 \cup A_2$

Висловлювання типу «*товщина виробу набагато більша за середню*» або «*товщина виробу близька до середньої*» потребують використання нечітких відношень R_1 («*набагато більше, ніж*») та R_2 («*близько до*»), заданих на декартовому добутку $X \times X$. Тоді цим висловлюванням будуть відповідати нечіткі множини AR_1 і AR_2, індуковані нечіткими відношеннями R_1 і R_2.

За аналогією можна визначити багатовимірні лінгвістичні змінні. Розглянемо випадок з двома лінгвістичними змінними.

Припустимо, що $\langle \alpha, T_\alpha, X, G_\alpha, M_\alpha \rangle$ та $\langle \beta, T_\beta, Y, G_\beta, M_\beta \rangle$ – лінгвістичні змінні, а висловлюванням $\langle \alpha \in \alpha' \rangle$, $\langle \beta \in \beta' \rangle$ відповідають нечіткі множини A і B, визначені на множинах X та Y відповідно.

Складені нечіткі висловлювання, наведені в пункті 3, що пов'язують значення лінгвістичних змінних α і ß, можна звести до висловлювань з пункту 1, скориставшись двовимірною лінгвістичною змінною (α, β), значенням якої будуть відповідати нечіткі множини на декартовому добутку $X \times Y$.

Нагадаємо, що нечіткі множини A і B, задані на множинах X і Y, породжують на декартовому добутку $X \times Y$ нечіткі множини A' і B', що мають назву *циліндричних продовжень* множин A і B, і мають при цьому такі функції належності: $\mu_{A'}(x, y) = \mu_A(x)$, за будь-якого значення змінної y, а $\mu_{B'}(x, y) = \mu_B(y)$ за всякого значення змінної x, коли $(x, y) \in X \times Y$.

Нечіткі множини, що відповідають таким складеним висловлюванням: $\langle (\alpha \in \alpha') \cap (\beta \in \beta') \rangle$ і $\langle (\alpha \in \alpha') \cup (\beta \in \beta') \rangle$, визначаються за наведеними вище правилами шляхом перетворення до вигляду, описаного в п. 1 визначення 6.3, які будуть справедливим за умови, коли змінні не взаємодіють, тобто в множинах X та Y елементи не пов'язані будь-якою функціональною залежністю.

6.3. Нечітке логічне виведення

Відомо, що булівське логічне виведення базується на таких тавтологічних висловлюваннях [61]:

- модус поненс: $(A \,\&\, (A \to B)) \to B$;
- модус толенс: $((A \to B) \,\&\, \overline{B}) \to \overline{A}$;
- силогізм: $((A \to B) \,\&\, (B \to C)) \to (A \to C)$;
- контрапозиція: $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$.

В и з н а ч е н н я 6.5. *Нечітким логічним виведенням* називається отримання висновку у вигляді нечіткої множини, що відповідає поточним значенням вхідних змінних з використанням нечіткої бази знань і нечітких операцій.

Отримати висновок у вигляді нечіткої множини можна, застосовуючи так зване *композиційне правило виведення Заде* [26]: якщо відоме нечітке відношення R між вхідною X та вихідною Y змінними, то коли нечітке значення вхідної змінної $x = A$, то нечітке значення вихідної змінної знаходять таким чином:

$$y = A \circ R, \tag{6.1}$$

де ° – знак максимінної композиції.

Визначення 6.6. *Максимінною композицією* нечітких відношень *A* і *B,* заданих на декартових добутках $X \times Z$ і $Z \times Y$, називається таке відношення: $G = A \circ B$ на множині $X \times Z$, функція належності якого має вигляд $\mu_G(x, y) = \sup\limits_{z \in Z} \min\{\mu_A(x, z), \mu_B(z, y)\}$, якщо $(x, y) \in X \times Y$, $(x, z) \in X \times Z$, а $(z, y) \in Z \times Y$.

Зі скінченними множинами X, Y, Z таку матрицю нечіткого відношення: $G = A \circ B$, одержують як максимінний добуток матриць *A* і *B*. Причому таку операцію виконують шляхом звичайного множення матриць, до того ж операцію поетапного множення замінюють знаходженням мінімуму, а обчислення суми матриць – пошуком максимуму.

Приклад 6.4. Візьмемо такі нечіткі множини: $A = \left\{ \frac{1}{0,1}; \frac{2}{0,2}; \frac{4}{0,4}; \frac{8}{0,8} \right\}$ та $B = \left\{ \frac{10}{0,3}; \frac{20}{0,5}; \frac{30}{0,8} \right\}$, на яких задано таке нечітке правило: «якщо *x = A*, то *y = B*». Знайти значення вихідної змінної *y*, коли $x = C = \left\{ \frac{1}{0,2}; \frac{2}{0,6}; \frac{4}{0,7}; \frac{8}{0,3} \right\}$.

Розв'язування

Розрахуємо нечітке відношення, що відповідає правилу R, тобто якщо *x = A*, то *y = B*, застосовуючи операцію визначення мінімуму, а саме:

$$R = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,5 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Далі за формулою (6.1) розрахуємо нечітке значення вихідної змінної з огляду на такі умови:

– коли *y* = 10, $\mu_G =$ max {min (0,1; 0,2); min (0,2; 0,6); min (0,3; 0,7); min (0,3; 0,3)} = max {0,1; 0,2; 0,3; 0,3} = 0,3;

– якщо *y* = 20, $\mu_G =$ max {min (0,1; 0,2); min (0,2; 0,6); min (0,4; 0,7); min (0,5; 0,3)} = max {0,1; 0,2; 0,4; 0,3} = 0,4;

– коли *y* = 30, $\mu_G =$ max {min (0,1; 0,2); min (0,2; 0,6); min (0,4; 0,7); min (0,8; 0,3)} = max {0,1; 0,2; 0,4; 0,3} = 0,4.

Висновком буде така нечітка множина: *y* = 10/0,3+ 20/0,4 + 30/0,4.

Для використання викладеного методу нечіткого логічного виведення в базах знань інтелектуальних систем необхідно описати предметну область у вигляді набору нечітких предикатних правил такого вигляду:

$$R_i : \text{якщо } x \in A_i, \text{ то } y \in B_i,\ i = \overline{1, n}, \tag{6.2}$$

де x – вхідна змінна, y – змінна виведення, A_i, B_i – нечіткі множини, що мають сенс значень лінгвістичної змінної.

У загальному випадку логічне виведення здійснюється в чотири етапи:

1. *Уведення нечіткості* (фазифікація, fuzzification). Функції належності, обчислені на базі вхідних змінних, застосовуються до їхніх фактичних значень для встановлення ступеня істинності кожної передумови в кожному із правил.

2. *Пошук логічного висновку*. Обчислене значення істинності передумов кожного із правил застосовується для отримання висновків із них. Це зумовлює появу однієї нечіткої підмножини, призначеної кожній змінній висновку стосовно кожного правила. Найчастіше для отримання логічного висновку використовуються тільки операції min (мінімум) чи prod (множення). Коли виконуються операції мінімуму, то функція належності висновку «відтинається» по висоті, що відповідає обчисленому ступеню істинності передумови правила. У разі використання операції множення функція належності висновку масштабується за допомогою обчисленого ступеня істинності передумови правила.

3. *Побудова композиції*. Усі нечіткі підмножини, призначені кожній змінній висновку (у всіх правилах), об'єднують, щоб сформувати одну нечітку підмножину для всіх змінних висновку. При цьому зазвичай виконують операції max (максимум) чи sum (сума). У першому випадку комбінований висновок нечіткої підмножини конструюється як поелементний максимум стосовно всіх нечітких підмножин. Коли виконують операцію підсумовування, то комбінований висновок нечіткої підмножини формується як поелементна сума стосовно всіх нечітких підмножин, призначених правилами логічного висновку.

4. *Зведення до чіткості* (дефазифікація, defuzzification). Виконують тоді, коли потрібно перетворити нечіткий набір висновків у чітке число. Існує декілька методів зведення до чіткості, деякі з яких будуть розглянуті нижче.

П р и к л а д 6.5. Нехай деяка система описується такими нечіткими правилами:

R_1 : якщо $x \in A$, то $\omega \in D$;

R_2 : якщо $y \in B$, то $\omega \in E$;

R_3 : якщо $z \in C$, то $\omega \in F$,

де x, y та z – імена вхідних лінгвістичних змінних; ω – ім'я лінгвістичної змінної висновку, *A, B, C, D, E* та *F* – задані функції належності.

Графічну інтерпретацію процедури одержання логічного висновку показано на рис. 6.3. Передбачається, що задано конкретні (чіткі) значення вхідних змінних x_0, y_0 та x_0.

На першому етапі, скориставшись значеннями змінних і виходячи з функцій належності *A, B, C*, знаходять ступені істинності $\mu_A(x_0)$, $\mu_B(y_0)$ та $\mu_C(z_0)$ передумов кожного з наведених трьох правил.

На другому етапі відбувається «відсічення» функцій належності висновків стосовно правил *D, E* та *F* на рівнях $\mu_A(x_0)$, $\mu_B(y_0)$ та $\mu_C(z_0)$ відповідно.

На третьому етапі розглядають функції належності, відсічені перед цим, і здійснюють їхнє об'єднання за допомогою операції max, внаслідок чого утворюється комбінована нечітка підмножина, що описується функцією належності $\mu_\Sigma(\omega)$ і відповідає логічному висновку з вихідної змінної ω.

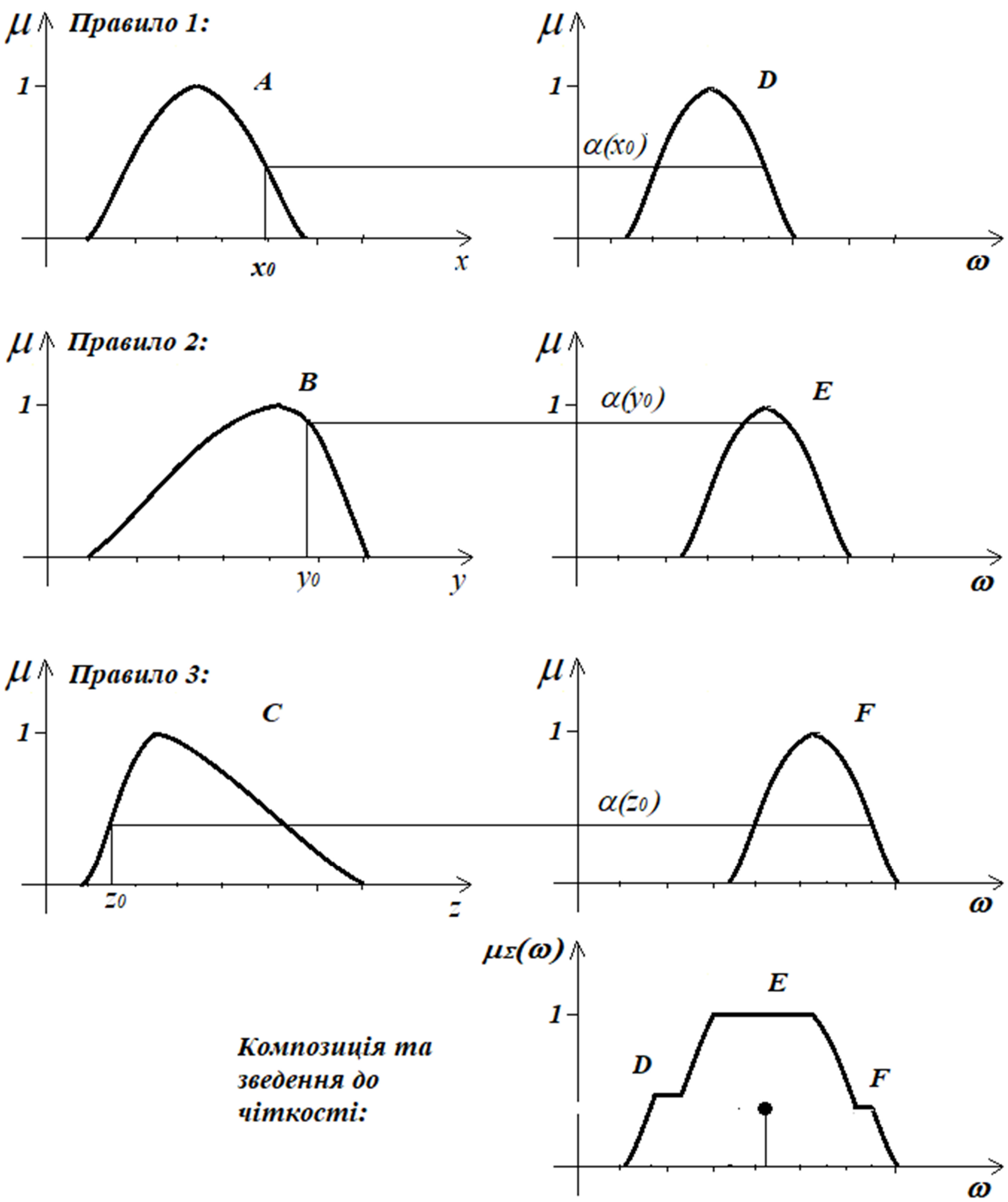


Рис. 6.3. Графічна інтерпретація процедури логічного виведення стосовно трьох правил

Нарешті, на четвертому етапі обчислюють за потреби чітке значення вихідної змінної, наприклад, застосовуючи метод центра мас, за яким чітке значення вихідної змінної знаходять як центр маси фігури, обмеженої кривою $\mu_\Sigma(\omega)$, а саме:

$$\omega_0 = \frac{\int\limits_{\Omega} \omega \cdot \mu_\Sigma(\omega) d\omega}{\int\limits_{\Omega} \mu_\Sigma(\omega) d\omega}.$$

6.4. Алгоритми логічного виведення

Відомо декілька алгоритмів логічного виведення, які реалізують другий етап отримання висновку. Залежно від змісту задачі кожен з них має певні переваги й недоліки. Розглянемо їх детально.

Далі для простоти вважатимемо, що базу знань для логічного виведення організують тільки два нечіткі правила такого вигляду:

$$R_1 : \text{якщо } x \in A_1 \text{ і } y \in B_1, \text{ то } z \in C_1;$$

$$R_2 : \text{якщо } x \in A_2 \text{ і } y \in B_2, \text{ то } z \in C_2,$$

де x та y – імена вхідних лінгвістичних змінних; z – ім’я лінгвістичної змінної висновку, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, та C_2 – деякі задані на відповідних базових шкалах функції належності.

Нижче охарактеризуємо декілька способів отримання чіткого значення параметра z_0 на основі наявної інформації і чітких значень змінних x_0 та y_0.

6.4.1. Алгоритм Мамдані (Mamdani)

Цей алгоритм (найчастіше вживаний завдяки своїй простоті) може бути застосований до системи в поданому вище прикладі 6.5, а його графічну інтерпретацію наведено на рис. 6.4, де враховано поставлені умови задачі. У зв’язку з цим його можна описати у вигляді таких кроків [81]:

1. Уведення нечіткості. Визначають ступені істинності передумов кожного правила, тобто $\mu_{A_1}(x_0)$, $\mu_{A_2}(x_0)$, $\mu_{B_1}(y_0)$ та $\mu_{B_2}(y_0)$.

2. Отримують логічний висновок шляхом знаходження рівнів «відсікання» передумов кожного з правил за допомогою операції логічного множення, а саме:

$$\mu_{R_1} = \mu_{A_1}(x_0) \wedge \mu_{B_1}(y_0) \text{ та } \mu_{R_2} = \mu_{A_2}(x_0) \wedge \mu_{B_2}(y_0),$$

де через «$\wedge$» позначена операція логічного множення («та»).

Потім знаходять «відсічені» функції належності, тобто

$$\mu_1(z) = \mu_{R_1} \wedge \mu_{C_1}(z) \text{ та } \mu_1(z) = \mu_{R_2} \wedge \mu_{C_2}(z).$$

3. Створення композиції. Виконують об'єднання знайдених відсічених функцій з використанням операції логічного підсумовування («або», позначено як «$\vee$»), що зумовлює одержання підсумкової нечіткої підмножини для змінної виходу з такою функцією належності:

$$\mu_\Sigma(z) = \mu_{R_1} \vee \mu_{R_2} = \left(\mu_{R_1} \wedge \mu_{C_1}(z)\right) \vee \left(\mu_{R_2} \wedge \mu_{C_2}(z)\right).$$

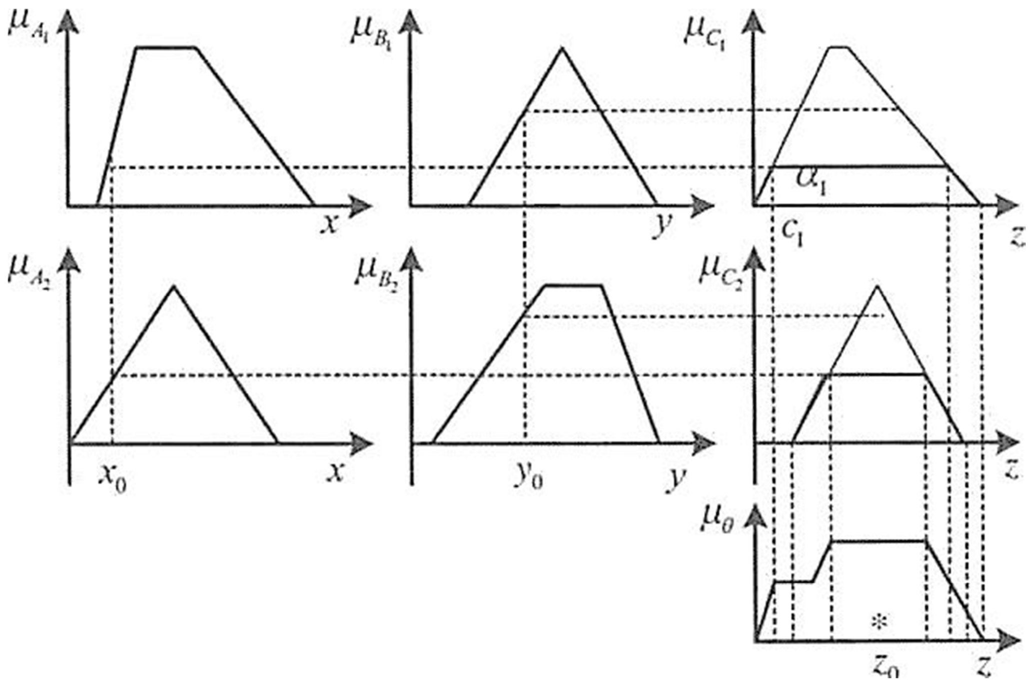


Рис. 6.4. Графічна інтерпретація нечіткого логічного виведення за алгоритмом Мамдані

4. Зведення до чіткості з метою одержання значення лінгвістичної змінної z_0, наприклад, методом центра мас.

6.4.2. Алгоритм Цукамото (Tsukamoto)

Вихідні передумови цього алгоритму аналогічні розглянутому вище алгоритму Мамдані, але функції належності вихідної змінної $\mu_{C_1}(z)$ $\mu_{C_2}(z)$ не можуть бути трикутними, а задані як монотонні на інтервалі визначення. Алгоритм передбачає послідовне виконання описаних далі операцій.

1. Уведення нечіткості. Аналогічно до алгоритму Мамдані знаходять ступені істинності передумов кожного правила, тобто $\mu_{A_1}(x_0)$, $\mu_{A_2}(x_0)$, $\mu_{B_1}(y_0)$ та $\mu_{B_2}(y_0)$. Графічну інтерпретацію наведено на рис. 6.5.

2. Робимо нечіткий висновок шляхом пошуку рівнів «відсікання» передумов кожного з правил за допомогою операції логічного множення (як в алгоритмі Мамдані), а саме:

$$\mu_{R_1} = \mu_{A_1}(x_0) \wedge \mu_{B_1}(y_0) \text{ та } \mu_{R_2} = \mu_{A_2}(x_0) \wedge \mu_{B_2}(y_0).$$

Після цього на таких заданих рівнях: $\mu_{R_1} = \mu_{C_1}$ та $\mu_{R_2} = \mu_{C_2}$, знаходять відповідні їм чіткі значення змінних z_1 та z_2 стосовно кожного із вихідних правил.

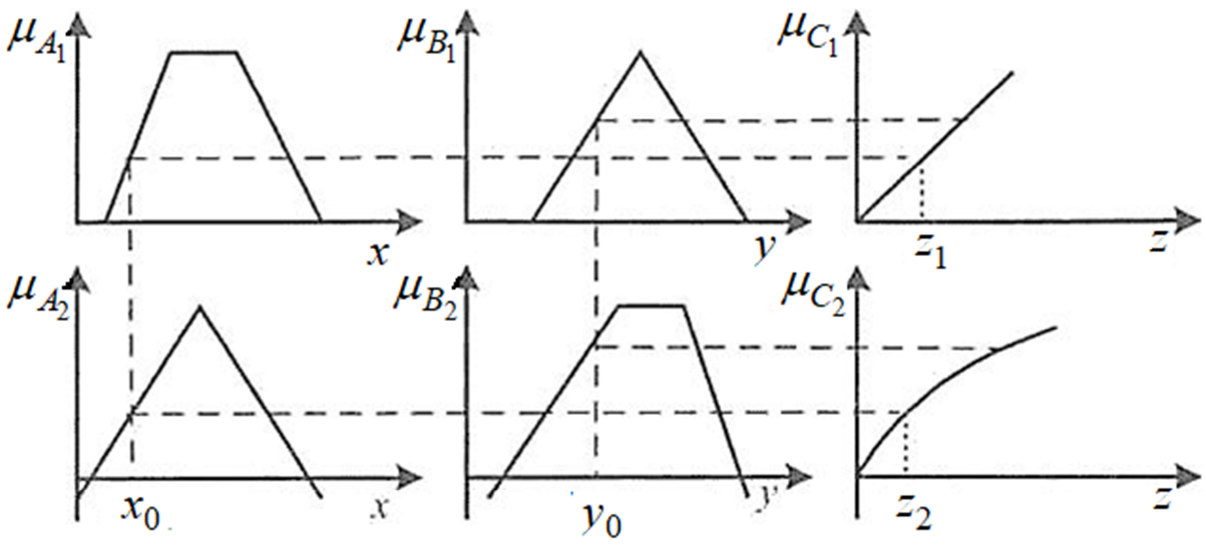


Рис. 6.5. Графічна інтерпретація нечіткого логічного виведення за алгоритмом Цукамото

3. Перехід до чіткості. Обчислюємо чітке значення вихідної змінної як зважене середнє між змінними z_1 та z_2, тобто

$$z_0 = \frac{\mu_{R_1} z_1 + \mu_{R_2} z_2}{\mu_{R_1} + \mu_{R_2}}. \tag{6.3}$$

У загальному випадку (для довільної кількості правил n) формула (6.3) має такий вигляд:

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_{R_i} z_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_{R_i}}. \tag{6.4}$$

6.4.3. Алгоритм Сугено і Такагі (Sugeno & Takagi)

Відмітною ознакою цього алгоритму є те, що замість функції належності вихідної змінної (трикутної чи лінійної, як раніше), розглядається функціональна залежність вихідної змінної від комбінації вхідних. Для спрощення задамо, що така залежність лінійна. Відтак, два правила, що ілюструють алгоритм нечіткого логічного виведення за методом Сугено і Такагі, набувають такого вигляду:

$$R_1 : \text{якщо } x \in A_1 \text{ і } y \in B_1, \text{ то } z_1 = a_1 x + b_1 y;$$

$$R_2 : \text{якщо } x \in A_2 \text{ і } y \in B_2, \text{ то } z_2 = a_2 x + b_2 y.$$

З урахуванням цього алгоритм Сугено і Такагі складається з описаних нижче кроків. Його графічну інтерпретацію подано на рис. 6.6.

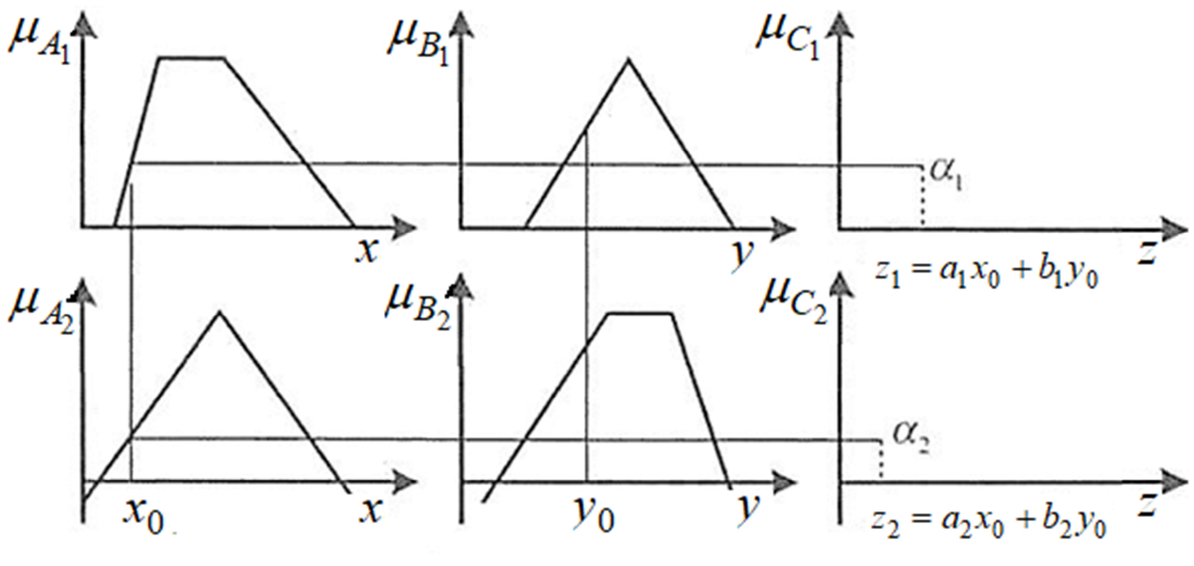


Рис. 6.6. Графічна інтерпретація нечіткого логічного виведення за алгоритмом Сугено і Такагі

1. Уведення нечіткості. Аналогічно до алгоритму Мамдані встановлюють ступені істинності передумов кожного з правил, тобто $\mu_{A_1}(x_0)$, $\mu_{A_2}(x_0)$, $\mu_{B_1}(y_0)$ та $\mu_{B_2}(y_0)$.

2. Отримання нечіткого висновку шляхом розрахунку достовірності за такими виразами: $\alpha_1 = \mu_{A_1}(x_0) \wedge \mu_{B_1}(y_0)$ та $\alpha_2 = \mu_{A_2}(x_0) \wedge \mu_{B_2}(y_0)$, та індивідуальних значень вихідних змінних у правилах, тобто $z_1 = a_1 x_0 + b_1 y_0$ та $z_2 = a_2 x_0 + b_2 y_0$.

3. Перехід до чіткості шляхом обчислення чіткого значення вихідної змінної як зваженого середнього величин z_1 та z_2 за формулою (6.3), а саме:

$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

6.4.4. Алгоритм Ларсена (Larsen)

В алгоритмі Ларсена, на відміну від усіх попередніх, нечітка імплікація моделюється за рахунок оператора множення. Перші два кроки аналогічні алгоритму Мамдані, їхню графічну форму подано на рис. 6.7.

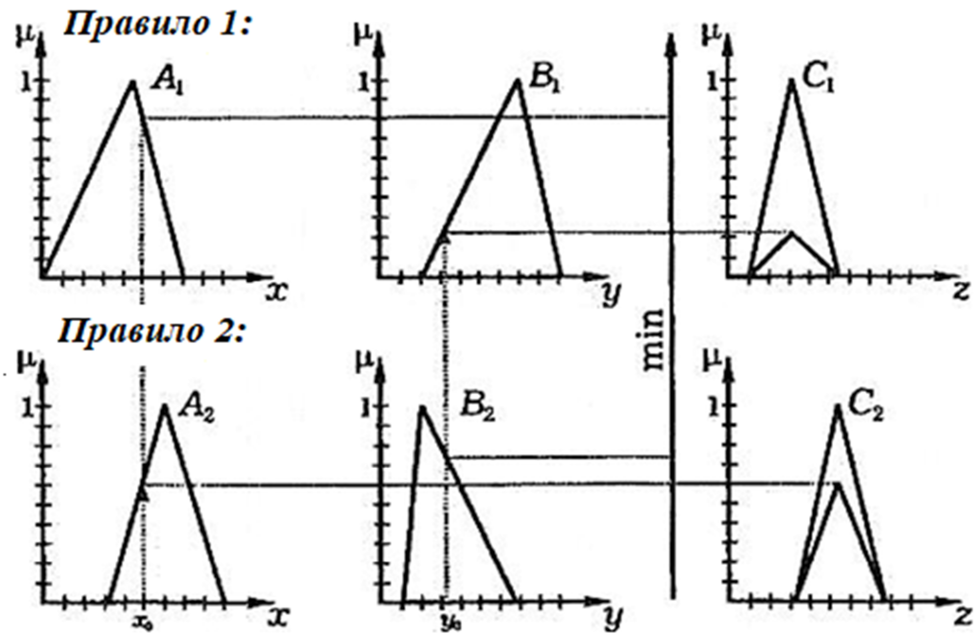


Рис. 6.7. Графічна інтерпретація нечіткого логічного виведення за алгоритмом Ларсена

1. Уведення нечіткості за допомогою встановлення ступенів істинності передумов кожного правила, тобто $\mu_{A_1}(x_0)$, $\mu_{A_2}(x_0)$, $\mu_{B_1}(y_0)$ та $\mu_{B_2}(y_0)$.

2. Отримання логічного виведення шляхом визначення рівнів «відсікання» передумов кожного з правил, а саме: $\mu_{R_1} = \min\{\mu_{A_1}(x_0); \mu_{B_1}(y_0)\}$ та $\mu_{R_2} = \min\{\mu_{A_2}(x_0); \mu_{B_2}(y_0)\}$. Після цього визначають «відсічені» функції належності, тобто $\mu_1(z) = \mu_{R_1} \cdot \mu_{C_1}(z)$ та $\mu_1(z) = \mu_{R_2} \cdot \mu_{C_2}(z)$.

3. Побудова композиції через визначення підсумкової нечіткої множини за такою формулою:

$$\mu_\Sigma(z) = \max\{\mu_{R_1}; \mu_{R_2}\} = \left(\mu_{R_1} \cdot \mu_{C_1}(z)\right) \vee \left(\mu_{R_2} \cdot \mu_{C_2}(z)\right).$$

У загальному випадку з урахуванням n правил формула набуває такого вигляду:

$$\mu_{\Sigma}(z) = \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} \left(\mu_{R_i} \cdot \mu_{C_i}(z)\right). \qquad (6.5)$$

4. Зведення до чіткості виконують при необхідності. Для отримання чіткого числа може бути застосований один з методів, які будуть розглянуті нижче.

6.5. Методи зведення змінних до чіткості

В алгоритмах дефазифікації з попереднього розділу ми використовували найпоширеніший метод зведення до чіткості – так званий центроїдний, або *метод центра мас*. У ньому передбачено, що чітке значення вихідної величини (назвемо її для загальності z) знаходять у загальному випадку за такою формулою:

$$z_0 = \frac{\int\limits_U z \cdot \mu_{\Sigma}(z) dz}{\int\limits_U \mu_{\Sigma}(z) dz}. \qquad (6.6)$$

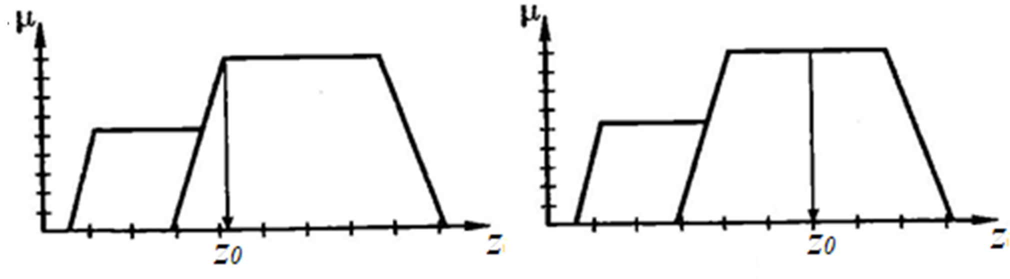
Коли ж випадок дискретний, то вона набуває вигляду формули (6.4).

Утім такий підхід не єдиний, що застосовується у функціонуванні інтелектуальних експертних систем та в прийнятті рішень.

Метод першого максимуму (First-of-Maxima) передбачає, що чітку величину вихідної змінної в ході нечіткого виведення знаходять як найменше значення, за якого досягається максимум підсумкової нечіткої множини (див. рис. 6.8, *а*). Математично це можна описати таким чином:

$$z_0 = \min\left\{z \middle| \mu_C(z) = \max_U \mu_c(U)\right\}. \qquad (6.7)$$

Інший підхід, який має назву *метод середини максимуму* (Middle-of-Maxima) полягає в тому, що, на відміну від методу центра мас, в обчисленні чіткого значення нечіткої висхідної множини мають брати участь не всі числа базової шкали (універсальної множини U, на якій задано цю нечітку множину), а лише ті, де вона дорівнює максимальному значенню функції належності (див. рис. 6.7, *б*).



а *б*

Рис. 6.8. Ілюстрація до застосування методів зведення змінної до чіткості:
а – метод першого максимуму; *б* – метод середини максимуму

Отже, чітке значення змінної знаходять за такою формулою:

$$z_0 = \frac{\int\limits_G z \cdot dz}{\int\limits_G dz}, \tag{6.8}$$

де G – підмножина елементів, які максимізують функцію $\mu_\Sigma(z)$.

Для дискретного варіанта визначення вихідної нечіткої множини формула (6.8) набуває такого вигляду:

$$z_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i\,. \tag{6.9}$$

Метод критеріального максимуму (Max-Criterion) передбачає, що чітке значення вихідної величини вибирається довільно серед множини елементів, для яких функція $\mu_C(z)$ досягає максимуму, тобто

$$z_0 = \mathrm{rand}\{z \mid \mu_C(z) = \max_U \mu_c(U)\}. \tag{6.10}$$

Нарешті, останній із розглянутих методів зведення до чіткості – *метод висотної дефазифікації* (Height defuzzification), пропонує відсікання від вислідної нечіткої множини, що описує вихідну змінну, усіх елементів області визначення U, функція належності яких менша, ніж деякий рівень належності α. Частини множини, де функція $\mu_C(z) < \alpha$, у розрахунок не беруть, а чітке значення знаходять відповідно до такого виразу:

$$z_0 = \frac{\int\limits_{C_\alpha} z \cdot \mu_C(z) dz}{\int\limits_{C_\alpha} \mu_C(z) dz}, \tag{6.11}$$

де C_α – нечітка множина α-рівня.

Приклад 6.6. Проілюструємо особливості аналізу нечітких експертних висновків на прикладі розрахунку можливого фінансування деякого проекту. Припустимо, що у фінансуванні проекту беруть участь чотири організації, про які нам відома така інформація [61]:

Організація А – абсолютно надійна й стабільна, сума фінансування буде становити 100 ум. од.

Організація В – стабільна, можливе фінансування проекту в сумі від 70 до 140 ум. од., причому існує більша впевненість у тому, що сума буде становити від 100 до 120 ум. од.

Організація С – стабільна, але ненадійна, існує велика впевненість, що сума фінансування проекту буде становити від 100 до 200 ум. од., але можливо, що його не буде зовсім.

Організація Д – ненадійна й нестабільна, напевно проект не профінансує, а якщо профінансує, то в розмірі 20 – 30 ум. од., причому впевненість у наданні коштів зменшується зі зростанням суми.

Необхідно встановити найбільш можливу загальну суму фінансування, найменш імовірну і т. д.

Різні джерела фінансування подамо у вигляді нечітких множин, які будемо інтерпретувати нечіткими інтервалами, заданими п'ятіркою елементів $\left(\underline{m},\overline{m},\alpha,\beta,h\right)$, де $\underline{m}$ – ліве модальне значення, $\overline{m}$ – праве модальне значення, α – лівий коефіцієнт скошеності графіка, β – правий коефіцієнт скошеності графіка, h – висота графіка.

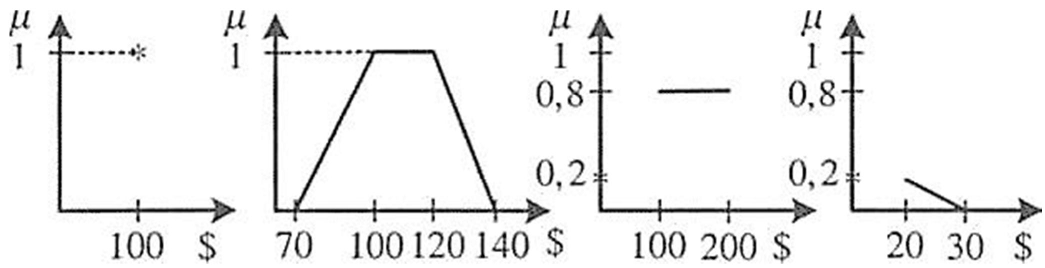


Рис. 6.9. Графічне подання нечітких множин до прикладу 6.6

Нечіткі величини зобразимо за допомогою графіків функцій належності (див. рис. 6.9), де кожен фрагмент відображає ймовірність фінансування проекту окремою організацією.

Зазначимо, що нечітка величина $M = M_i \oplus M_j$, у якій M_i та M_j являють собою дві нечіткі множини, що утворюють трапецієподібні графіки, є також нечіткою величиною такого (трапецієподібного) типу. Параметри цієї множини можна визначити за такими формулами:

$$h = \min(h_i, h_j);\quad \alpha = h\left(\frac{\alpha_i}{h_i} + \frac{\alpha_j}{h_j}\right);\quad \beta = h\left(\frac{\beta_i}{h_i} + \frac{\beta_j}{h_j}\right);$$

$$\underline{m} = \underline{m_i} + \underline{m_j} - \alpha_i - \alpha_j + \alpha;\ \overline{m} = \overline{m_i} + \overline{m_j} + \beta_i + \beta_j - \beta.$$

Нечіткі множини, у яких враховано умови цього прикладу, виразимо відповідно до даних рис. 6.9 таким чином:

A = (100,100, 0, 0,1);

B = (100,120, 30, 20,1);

C = C1 ⋃ C2 = (100, 200, 0, 0, 0,8) U (0, 0, 0, 0, 0,2);

D = D1 ⋃ D2 = (0, 0, 0, 0, 0,8) U (20, 20, 0,10, 0,2).

Можливі чотири варіанти фінансування проекту, а саме:

$S_1 = A \oplus B \oplus C_1 \oplus D_1$; $S_2 = A \oplus B \oplus C_1 \oplus D_2$; $S_3 = A \oplus B \oplus C_2 \oplus D_1$ та $S_4 = A \oplus B \oplus C_2 \oplus D_2$.

Розрахувавши за вищенаведеними формулами значення множин S_1, S_2, S_3, S_4, виконуємо нечітке виведення й отримуємо значення вислідної нечіткої множини S, графік якої наведено на рис. 6.10.

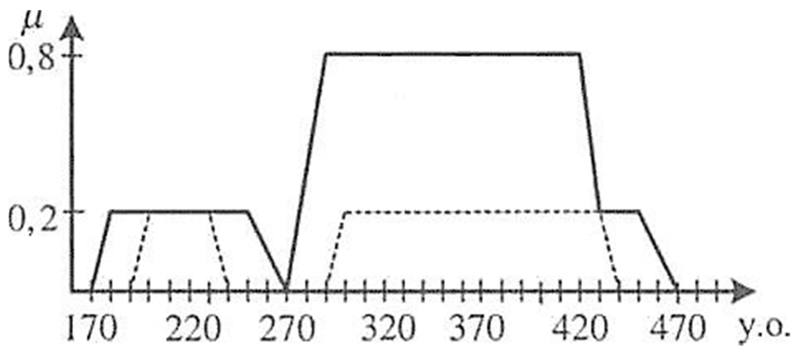


Рис. 6.10. Графічне подання вислідної нечіткої множини за умовами прикладу 6.6

Отже, S = (294,424,24,16,0,8) ⋃ (296,456,614,0,2) ⋃ (176,236,6,4,0,2) ⋃ (196,256,6,14,0,2).

З огляду на одержаний результат, область найбільш можливого фінансування (з максимальною достовірністю 0,8) перебуває в діапазоні 294 – 424 ум. од. Перевищення цієї суми може мати місце, але впевненість у цьому зменшується пропорційно її зростанню до 470 ум. од.

Існує деяка впевненість у тому, що надходження коштів не перевищить, 176 – 256 ум. од. (з достовірністю 0,2). У будь-якому випадку обсяг фінансування не буде меншим від 170 ум. од. та більшим від 470 ум. од.

Висновки

Лінгвістичні змінні являють собою математичний опис якісних понять, їх використовують для формального відображення процесу мислення людини в ході прийняття рішень. Для цього створюють нечіткі логічні висловлювання та алгоритми нечіткого виведення. Існує декілька видів таких алгоритмів. Найбільш відомі серед них алгоритми Мамдані, Цукамото, Сугено, Ларсена.

Системи нечіткого логічного виведення відіграють важливу роль у багатьох ситуаціях застосування теорії нечітких множин, зокрема, при побудові нечітких контролерів, у розробці нечітких експертних систем та ін.

Розглянуті в цьому розділі питання та більш детальну інформацію про практичне застосування описаних алгоритмів можна знайти в літературі [6, 7, 13, 14, 15, 20 – 26, 44, 53, 61, 73].

Контрольні питання

1. Дайте визначення лінгвістичної змінної. Який вона має зміст? Наведіть приклади.
2. Що являє собою нечітка змінна? Чи завжди вона є лінгвістичною?
3. Як називаються підсилювачі чи послаблювачі значень лінгвістичних змінних? Яким чином вони впливають на нечітку множину?
4. Що таке базова шкала для вимірювання нечіткої множини? Її характер суб’єктивний чи об’єктивний?
5. Що таке нечітке висловлювання? Скільки видів таких висловлювань ви знаєте?
6. Чим багатовимірні лінгвістичні змінні відрізняються від одновимірних?
7. На яких тавтологічних висловах базується булівське логічне виведення?
8. Із яких чотирьох етапів складається алгоритм логічного виведення?
9. Що являє собою максимінна композиція нечітких відношень?
10. Які операції можуть бути застосовані для отримання логічного висновку?
11. Які операції передбачені для побудови композиції вихідної нечіткої множини?
12. Які методи дефазифікації нечітких множин ви знаєте? Яка між ними існує відмінність?
13. Наведіть приклад застосування алгоритму узагальнення Заде в системі прийняття рішень.

14. Опишіть алгоритм логічного виведення Мамдані, наведіть приклад його застосування.

15. Із яких кроків формується алгоритм логічного виведення Ларсена? Наведіть приклад його застосування.

16. Яка послідовність дій в алгоритмі логічного виведення Цукамото? Наведіть приклад його використання.

17. Дати опис алгоритму логічного виведення Сугено і Такагі й навести приклад його застосування.

18. Наведіть приклад розв'язування задачі аналізу експертних висловлювань.

19. Який метод зведення до чіткості застосовується в системах прийняття рішень найчастіше? Які його варіанти вам відомі?

20. Чим відрізняється зведення до чіткості на безперервній нечіткій множині значень вихідної величини від виконання тієї самої операції на дискретній множині цих значень? Наведіть приклад застосування обох методів зведення до чіткості.

Завдання до розділу 6

1. Відомо, що у фінансуванні деякого проекту беруть участь п'ять фінансових установ, характеризованих таким чином: установа А надійна і стабільна, очікується фінансування в сумі 300 ум. од.; установа Б надійна, але сума фінансування залежить від часу надання коштів (з повною впевненістю можна стверджувати, що вона становитиме від 250 до 400 ум. од., причому найбільш ймовірною буде сума від 300 до 350 ум. од.); установа В планує фінансування проекту в сумі 200 – 300 ум. од., а збільшення впевненості в її отриманні підвищується в міру зростання виплати; установа Г нестабільна, але має можливість виділення значних коштів (існує деяка впевненість щодо отримання суми в 2000 – 2400 ум. од., при цьому найбільш імовірно, що це буде 2100 – 2200 ум. од.); установа Д ненадійна й нестабільна, навряд чи буде фінансувати проект, але з невисокою ймовірністю сума може становити 300–500 ум. од. зі зменшенням упевненості в наданні коштів пропорційно збільшенню їхнього обсягу. Визначити найбільшу можливу та найімовірнішу суми фінансування, а також такі межі, коли ступінь належності вислідної множини $\alpha = 0{,}5$ і вище.

2. Знайти чітке значення найімовірнішого сукупного рівня фінансування за умовами задачі, описаної в пункті 1. Шукане чітке число розрахувати методами центра мас та середини максимуму. Пояснити різницю в результатах.

3. Нехай маємо таку нечітку множину для визначення поняття "чоловік середнього зросту": $A = \{155/0, 160/0{,}1, 165/0{,}3,\ 170/0{,}8,\ 175/1,\ 180/1,\ 185/0{,}5, 190/0\}$. Виконати дефазифікацію нечіткої множини «чоловік середнього росту» методом центра мас.

4. Нехай базу знань для прийняття рішення формують два правила:

$$R_1 : \text{якщо } x \in A_1 \text{ і } y \in B_1, \text{ то } z \in C_1;$$

$$R_2 : \text{якщо } x \in A_2 \text{ і } y \in B_2, \text{ то } z \in C_2,$$

де $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2,$ та C_2 – нечіткі множини із трапецієподібними графіками функцій належності.

Відомо, що

$$\mu_{A_1} = <100,200,30,40,1>;\ \mu_{A_2} = <200,300,20,60,1>;$$

$$\mu_{B_1} = <140,240,30,40,1>;\ \mu_{B_2} = =<240,320,50,40,1>;$$

$$\mu_{C_1} = <50,100,10,30,1>;\ \mu_{C_2} = <100,150,20,50,1>.$$

Знайти значення змінної z_0 за умови, що $x_0 = 220$ і $y_0 = 200$.

5. Розробити систему оцінювання спортивних пар на змаганнях з фігурного катання, скориставшись наведеними в таблиці даними про синхронність, вигляд костюмів і якість виконання спортсменами складних елементів, якщо розглядаються три пари учасників.

№	Виконання елементів	Синхронність	Естетика костюмів
1	60 %	4	8
2	87 %	7	6
3	89 %	9	5

6. Необхідно розробити систему нарахування чайових офіціантові в кафе на базі таких даних: наскільки клієнту смакувало замовлення; як він оцінив затишність інтер’єру та обстановки в кафе; як влаштовує його якість обслуговування (оформлення страв, ввічливість офіціанта).

7. Розробити систему нарахування заробітної плати працівникам, беручи до уваги відомості про запізнення на роботу, про якість і кількість виконаних робіт. Визначити суму заробітної плати чотирьох осіб.

№	Запізнення на роботу	Якість роботи	Виконано робіт
1	10 %	90 %	10
2	20 %	80 %	10
3	60 %	50 %	7
4	80 %	10 %	3

8. Розробити систему визначення вартості квартири з огляду на відомості про час проїзду від неї до центру міста, площу помешкання і оздоблення житла. Обчислити вартість трьох квартир.

№	Час проїзду до центру, хв	Площа квартири, кв. м.	Якість житла
1	10	120	10
2	20	70	5
3	70	50	1

9. Розробити систему формування рейтингу студентів на основі даних про відвідування ними лекцій, кількості прочитаних книг і виконання лабораторних робіт. Визначити рейтинг двох студентів.

№	Відвідування лекцій	Прочитано книг	Виконано лабораторних робіт
1	40 %	2	5
2	80 %	1	8

РОЗДІЛ 7
НЕЙРОННІ МЕРЕЖІ З НЕЧІТКОЮ ЛОГІКОЮ ЯК УНІВЕРСАЛЬНІ АПРОКСИМАТОРИ

Мета розділу – ознайомлення із видами нечітких нейронних мереж та прикладами їх застосування у практичних задачах апроксимації функцій

У попередніх розділах показано, що апарат нечітких множин і нечіткої логіки вже давно з успіхом застосовується для виконання завдань і розв’язування задач, у яких вихідні дані ненадійні та слабко формалізовані. Переваги такого підходу:

– для опису умов і методу розв’язання задачі користуються мовою, що близька до природної;

– універсальність (відповідно до теореми Б. Коско [34], будь-яка математична система може бути апроксимована системою, що побудована на нечіткій логіці);

– ефективність (пов’язана з універсальністю), що підтверджується рядом теорем, аналогічних теоремам про повноту штучних нейронних мереж.

Разом з тим, нечіткі системи прийняття рішень, викладені вище, мають і певні недоліки:

– вихідний набір нечітких правил формулюється експертом-людиною і може виявитися неповним чи суперечливим;

– вигляд і параметри функцій належності, що описують вхідні й вихідні змінні системи, обираються суб’єктивно і можуть виявитися такими, що не цілком відбивають реальність.

Для усунення, принаймні частково, зазначених недоліків було запропоновано створювати нечіткі системи адаптивними, коректуючи в процесі їхньої роботи правила й параметри функцій належності. Одними з найбільш вдалих серед таких систем є *нечіткі нейронні мережі*.

7.1. Теоретичні засади застосування нечітких нейронних мереж для апроксимації функцій

Визначення 7.1. *Штучною нейронною мережею* називається обчислювальна система, що ґрунтується на сукупності з'єднаних вузлів, які називають штучними нейронами (аналогічно до біологічних нейронів у головному мозку живих організмів).

Кожне з'єднання між штучними нейронами (аналогічне синапсу в живих організмах) може передавати сигнал від одного до іншого. Штучний нейрон, що отримує сигнал, може обробляти його, а потім сигналізувати штучним нейронам, приєднаним до нього. Штучні нейрони та з'єднання зазвичай мають певний коефіцієнт – *вагу*, яка налаштовується в перебігу *навчання*.

Визначення 7.2. *Навчанням штучної нейронної мережі* називається обчислювальний процес зміни ваги зв’язків її нейронів з метою зменшення похибки відтворення цією мережею певного набору кортежів вхідних і вихідних даних.

Штучні нейрони зазвичай організовано в *шари*.

Визначення 7.3. *Шаром нейронної мережі* називається сукупність штучних нейронів, об'єднаних структурно та функціонально для виконання ідентичної задачі в багатошарових нейронних мережах.

Різні шари можуть виконувати різні види перетворень своїх вхідних сигналів. Сигнали прямують від першого (вхідного) до останнього (вихідного) шару, можливо, що процес відбувається декілька разів.

Визначення 7.4. *Нечіткою нейронною мережею називається* поєднання штучної нейронної мережі з механізмом нечіткого логічного виведення, тобто являє собою обчислювальну систему, котра містить кілька шарів штучних нейронів, хоча б один з яких відповідає системі правил (базі знань).

Нечітка нейронна мережа формально за структурою ідентична багатошаровій нейронній мережі з навчанням, наприклад, у ній використовується алгоритм зворотного поширення помилки, але її приховані шари відповідають таким етапам функціонування нечіткої системи [46]:

– перший шар нейронів виконує функцію введення нечіткості (fuzzification) на основі заданих функцій належності вхідних параметрів;

– другий шар відображає сукупність нечітких правил;

– третій шар виконує функцію зведення результатів до чіткості (defuzzification).

Кожен з цих шарів характеризується набором параметрів (функціями належності, нечіткими правилами виведення, активаційними функціями, вагою зв'язків), налаштування яких відбувається, по суті, так само, як і в звичайних нейронних мережах. Нижче розглядаються теоретичні аспекти створення подібних мереж, їх можливі архітектури, методи навчання та застосування до задачі апроксимації функцій.

Апроксимація функцій, в основі якої лежать локальні навчальні стратегії, є однією з традиційних сфер застосування нейронних мереж і зокрема нечітких. Однак нечіткі нейромережі мають переваги перед звичайними, оскільки можуть використовувати попередні знання у формі нечітких правил, тоді як останні навчаються з нуля.

Надалі розглянемо ряд архітектур нечітких нейронних мереж, що апроксимують n-вимірні невідомі функції, які частково визначені навчальними даними.

7.2. Нечітка нейронна мережа архітектури ANFIS

Розглянемо як приклад гібридну систему з механізмом логічного виведення, запропонованого Сугено, на базі правил «якщо – то» [47, 48], котру було названо мережею ANFIS (Adaptive Network-Based Fuzzy Inference System). Цю систему можна успішно використовувати для налаштування функції належності, а також бази правил у нечіткій експертній системі.

Нижче розглянуто модель побудови нечіткого виведення Сугено та структурну схему мережі ANFIS.

Отже, нехай мережа ANFIS використовує базу знань, що складається тільки з таких двох правил:

1) якщо $x = A_1$ та $y = B_1$, то $z = f_1(x, y)$;

2) якщо $x = A_2$ та $y = B_2$, то $z = f_2(x, y)$.

де A_i та B_i – певні лінгвістичні змінні; $f_i(x, y)$ – якісь довільні функції, котрі можуть бути задані на інтервалі визначення змінних x та y і встановлені таблично чи взагалі є константами, відомими з навчальної вибірки даних.

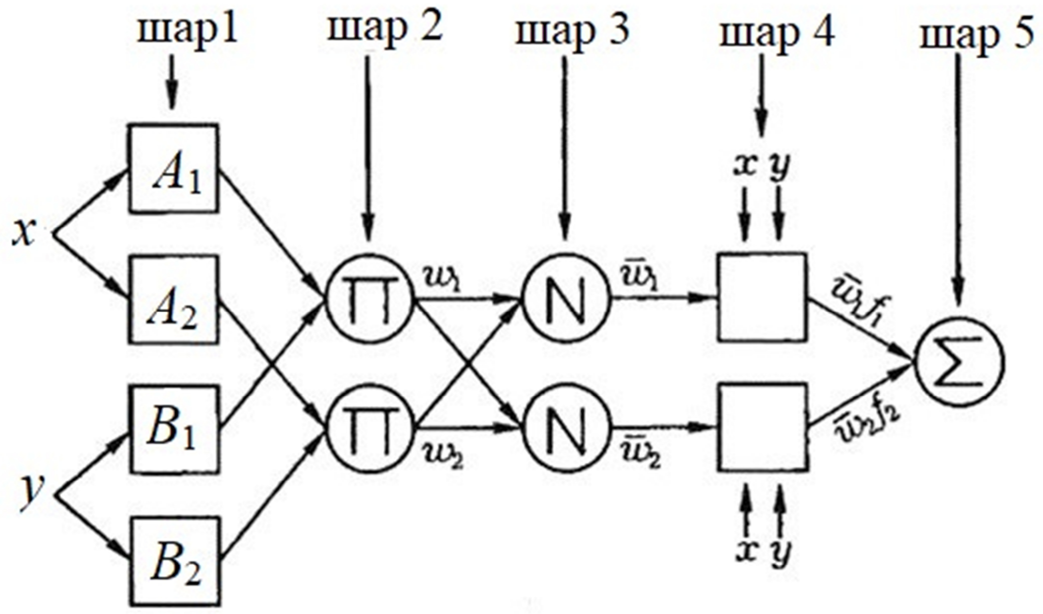


Рис. 7.1. Структура нейронної мережі ANFIS для розглянутого прикладу

Структура нейронної мережі ANFIS стосовно цього випадку (дві вхідні змінні, кожна з яких може набувати двох значень, загалом, це два правила) зображена на рис. 7.1, де кожен з шарів виконує такі функції:

Шар 1 – фазифікатор. Кожен нейрон цього шару перетворює вхідний сигнал x чи y в нечітку множину за допомогою функції належності. Крім традиційної, розглянутої вище трикутної функції належності, часто застосовують дзвіноподібну функцію такого вигляду:

$$\mu_{A_i}(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - c_i}{\sigma_i}\right)^2}, \qquad (7.1)$$

або функцію Гаусса (гаусіан), тобто

$$\mu_{A_i}(x) = \exp\left[-\left(\frac{x - c_i}{\sigma_i}\right)^2\right]. \quad (7.2)$$

Шар 2 – активатор правил. Кожен нейрон у цьому шарі позначений як П і здійснює логічне множення вхідних сигналів, моделюючи логічну операцію AND і посилаючи сигнал на вихід, а саме:

$$\omega_i = \mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y),\ i = 1,2. \quad (7.3)$$

По суті, кожен нейрон другого шару реалізує активність одного правила. Фактично будь-який оператор, що узагальнює операцію AND, може бути використаний у цих нейронах.

Шар 3 – нормування. Тут кожен нейрон виконує обчислення нормованої сили правила, тобто

$$\overline{\omega}_i = \frac{\omega_i}{\sum \omega_i},\ i = 1,2. \quad (7.4)$$

Шар 4 – обчислювач. У нейронах цього шару формуються значення вихідних змінних, тобто $z_i = f_i(x, y)$.

Шар 5 – дефазифікатор. Є заключним, де отримують вихідний сигнал нейронної мережі та виконують зведення результатів до чіткості для дефазифікації використовують просту згортку вихідних змінних, що еквівалентна методу центра мас, а саме:

$$z = \frac{\sum z_i \overline{\omega}_i}{\sum \overline{\omega}_i},\ i = 1,2. \quad (7.5)$$

Нейронна мережа архітектури ANFIS навчається за допомогою методу градієнтного спуску, який у контексті нечітких нейронних мереж буде детальніше розглянуто в наступному підрозділі.

7.3. Алгоритм навчання нечіткої нейронної мережі

В и з н а ч е н н я 7.5. *Алгоритм навчання нейронної мережі* – це метод або математична модель переважно багаторазового застосування, що використовується для підвищення ефективності цієї мережі.

Навчання – це один з визначальних факторів швидкості й точності розробки штучних нейронних мереж.

У наявних системах, де діють нечіткі нейронні мережі, одним з найважливіших питань є розробка оптимального методу налаштування нечіткої бази правил на основі навчальної вибірки для отримання конструктивних та оптимальних моделей нечітких систем з подальшим їх використанням на практиці. Нечіткі правила формулюються переважно експертами чи операторами з використанням знань і досвіду про відповідні процеси. Проте, розробляючи нечіткі системи, деколи досить проблематично чи навіть неможливо отримати чіткі правила або функції належності (membership functions) унаслідок неясності, неповноти чи складності таких систем.

У подібних випадках найбільш доцільним вважається генерування та уточнення нечітких правил за допомогою спеціальних навчальних методик. Наприклад, досить часто для побудови нечітких мереж застосовують *алгоритм зворотного поширення помилки* [57], що дозволяє генерувати оптимальні моделі нечітких систем та бази правил. Розробниками цього алгоритму були Ічіаші (Ichihashi), Номура (Nomura) та Ванг і Мендель (Wang and Mendel) [47], які запропонували його незалежно один від одного.

Основна характерна риса алгоритму полягає в тому, що налаштування параметрів нечітких правил здійснюється без модифікації таблиці правил. Перевагою даного методу навчання слід вважати той факт, що алгоритм працює навіть в умовах поганої активації нейронів, що відрізняє його від інших методів, зокрема, стохастичних.

Розглянемо такий алгоритм стосовно описаної вище моделі, що має два вхідні сигнали x та y та одну вихідну змінну z. Алгоритм реалізується в нечіткій нейронній мережі архітектури ANFIS, яка відрізняється від розглянутої вище тим, що тут нечітке виведення здійснюється не за моделлю Сугено, а за простішим алгоритмом Цукамото (див. розділ 6). Схему мережі показано на рис. 7.2.

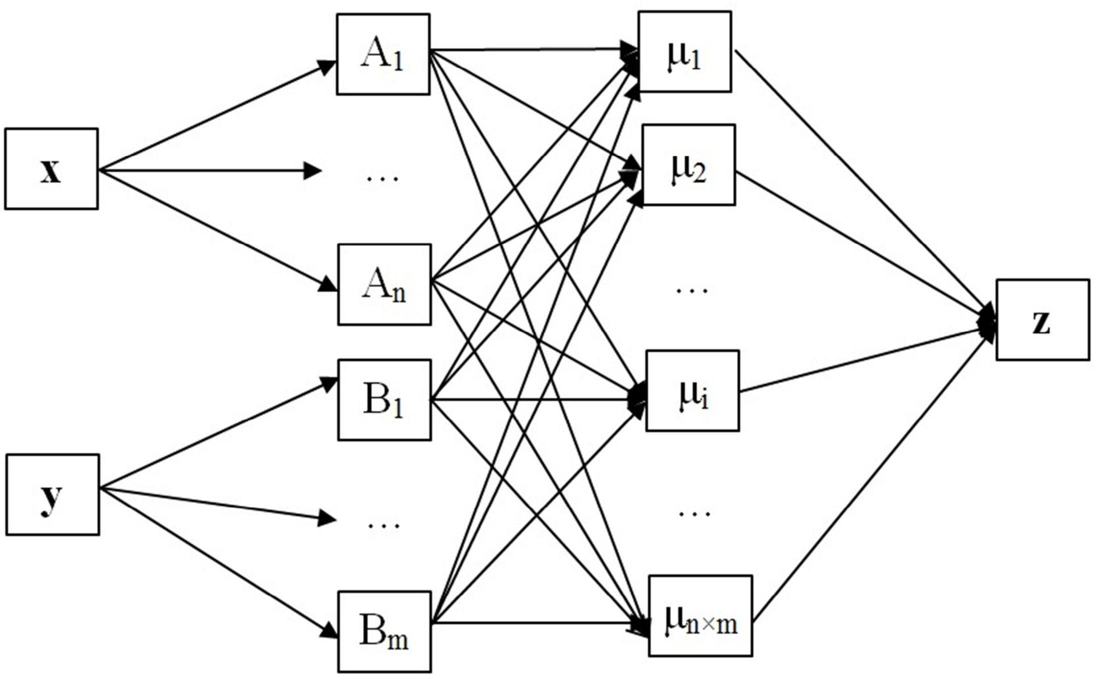


Рис. 7.2. Схема моделі нечіткої нейронної мережі

Для навчання нечіткої нейронної мережі необхідно фазифікувати всю область визначення вхідних змінних на нечіткі множини. Нехай лінгвістична змінна x розкладається на n нечітких множин $A_1, A_2, ..., A_n$, а лінгвістична змінна y – на m нечітких множин $B_1, B_2, ..., B_m$. Для визначення простору вихідної змінної необхідно задати базу правил такого вигляду:

$$\text{якщо } x = A_i \text{ і } y = B_j \text{, то } z = z_{i,j}. \tag{7.6}$$

Тут значення змінної $z_{i,j}$, як показано вище, може бути задано певною функцією від x та y, але в спрощеному випадку вона може являти собою нечітке число. Базу правил зручно подати у вигляді таблиці 7.1, де кожна клітинка показує поєднання значень вхідних змінних, а її вміст відповідає вихідному значенню. Надалі, будуючи алгоритм навчання, будемо використовувати позначення індексів відповідно до рис. 7.2 і табл. 7.1.

Таблиця 7.1

База правил нечіткої нейронної мережі ANFIS

Значення z		Значення y					
		B_1	B_2	…	B_j	…	B_m
Значення x	A_1	$z_{1,1}$	$z_{1,2}$	…	$z_{1,j}$	…	$z_{1,m}$
	A_2	$z_{2,1}$	$z_{2,2}$	…	$z_{2,j}$	…	$z_{2,m}$
	…	…		…	…	…	…
	A_i	$z_{i,1}$	$z_{i,2}$	…	$z_{i,j}$	…	$z_{i,m}$
	…	…	…	…	…	…	…
	A_n	$z_{n,1}$	$z_{n,2}$	…	$z_{n,j}$	…	$z_{n,m}$

Визначимо величину достовірності кожного з правил відповідно до логічної операції AND, перетворивши формулу (7.3), тобто

$$\mu_{i,j} = \mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{Bj}(y),\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}. \tag{7.7}$$

Згідно з методом центра мас вихідний параметр системи z можна визначити таким чином:

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\mu_{i,j} z_{i,j}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\mu_{i,j}\right)}. \tag{7.8}$$

Коли навчання системи виконують за допомогою навчальної вибірки у вигляді подачі послідовних кортежів $\left(x, y, z^*\right)$, то її помилка стосовно кожного окремого прикладу може бути описана таким чином:

$$E = \frac{\left(z - z^*\right)^2}{2}. \tag{7.9}$$

Коли ж, як зазначалось вище, вхідні множини – це трикутні числа, кожне з яких має центр функції належності (c_i^A для множини та c_j^B для множини B_j), а також ширину діапазону визначення для даної функції, (аналогічно σ_i^A для множини та σ_j^B для множини B_j), то згідно з методом градієнтного спуску, аби мінімізувати помилку вихідного параметра системи (7.9), можна скористатись формулами для розрахунку коефіцієнтів c_i^A, c_j^B, σ_i^A, σ_j^B значень параметрів $z_{i,j}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, а саме [29]:

$$c_i^A(t+1) = c_i^A(t) - \alpha \frac{\left(z^* - z\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} B_j \left(z_{i,j} - z\right) \right) \frac{\partial A_i}{\partial c_i^A(t)}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(\mu_{i,j}\right)}; \tag{7.10}$$

$$\sigma_i^A(t+1) = \sigma_i^A(t) + \beta \frac{\left(z^* - z\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} B_j \left(z_{i,j} - z\right) \right) \frac{\partial A_i}{\partial \sigma_i^A(t)}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(\mu_{i,j}\right)}; \tag{7.11}$$

$$c_j^B(t+1) = c_j^B(t) - \beta \frac{\left(z^* - z\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \left(z_{i,j} - z\right) \right) \frac{\partial B_j}{\partial c_j^B(t)}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(\mu_{i,j}\right)}; \tag{7.12}$$

$$\sigma_j^B(t+1) = \sigma_j^B(t) + \beta \frac{\left(z^* - z\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \left(z_{i,j} - z\right) \right) \frac{\partial B_j}{\partial \sigma_j^B(t)}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(\mu_{i,j}\right)}; \tag{7.13}$$

$$z_{i,j}(t+1) = z_{i,j}(t) - \gamma \frac{\left(z^* - z\right)\mu_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\mu_{i,j}\right)}, \tag{7.14}$$

де α, β, γ – величини швидкості навчання за координатами (у загальному випадку можуть набувати значень від 0,01 до 0,25, для простоти можна припустити, що $\alpha = \beta = \gamma = 0{,}1$); $t-$ номер ітерації в процесі навчання (номер навчального прикладу).

Проблема визначення частинних похідних у виразах (7.10) – (7.13) для трикутної функції належності вирішується через використання функцій належності Гаусса за формулою (7.2) щодо вхідних змінних. Враховуючи, що частинні похідні за коефіцієнтами у виразі (7.2) – це простий дріб, формули для опису ітераційного процесу навчання мережі ANFIS набувають такого вигляду:

$$c_i^A(t+1) = c_i^A(t) - \alpha \frac{\left(z^* - z\right)\cdot\left(x - A_i\right)\cdot\sum_{j=1}^{m}\mu_{i,j}\left(z_{i,j} - z\right)}{\left[\sigma_i^A(t)\right]^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\mu_{i,j}\right)}; \tag{7.15}$$

$$\sigma_i^A(t+1) = \sigma_i^A(t) - \beta \frac{\left(z^* - z\right)\cdot\left(x - A_i\right)^2\cdot\sum_{j=1}^{m}\mu_{i,j}\left(z_{i,j} - z\right)}{\left[\sigma_i^A(t)\right]^3\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\mu_{i,j}\right)}; \tag{7.16}$$

$$c_j^B(t+1) = c_j^B(t) - \alpha \frac{\left(z^* - z\right)\cdot\left(y - B_j\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,j}\left(z_{i,j} - z\right)}{\left[\sigma_j^B(t)\right]^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\mu_{i,j}\right)}; \tag{7.17}$$

$$\sigma_j^B(t+1) = \sigma_j^B(t) - \beta \frac{\left(z^* - z\right)\cdot\left(y - B_j\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\mu_{i,j}\left(z_{i,j} - z\right)}{\left[\sigma_j^B(t)\right]^3\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\mu_{i,j}\right)}. \tag{7.18}$$

При цьому формула (7.14) не зазнає змін.

Для використання цього алгоритму на практиці достатньо заповнити табл. 7.1 початковими наближеннями і показати в ній таку кількість прикладів, аби кожному правилу відповідало би їх кілька. Коли початкові значення випадкові, то алгоритм показує збіжність за наявності 10 – 15 прикладів на кожне правило.

Приклад 7.1. Використання нейронечіткої мережі ANFIS для моделювання міркувань викладача, який оцінює знання студентів.

Уявімо, що підсумкова оцінка з певної навчальної дисципліни чи предмета складається з трьох модулів – двох теоретичних і одного практичного. При цьому практичний модуль у підсумковій оцінці має більшу вагу, ніж кожен окремо теоретичний, але не більшу, ніж обидва теоретичні разом. Система оцінок – традиційна і передбачає чотири бали: «незадовільно», «задовільно», «добре» й «відмінно». До того ж, якщо хоча б один модуль оцінено «незадовільно» (не складено), то підсумкова оцінка має бути незадовільною, не залежно від оцінок за інші модулі.

Перед початком навчання моделі ANFIS, що описує міркування викладача при виставленні оцінок і пов’язує терми таких вхідних змінних: x_1 – оцінка за перший теоретичний модуль, x_2 – оцінка за другий теоретичний модуль та x_3 – оцінка за практичний модуль з вихідною змінною y – підсумкова оцінка, кожну з лінгвістичних змінних задають у вигляді нечіткої множини, складеної з чотирьох значень:

$$A_1 = A_2 = A_3 = B = \{\text{"незадовільно"}; \text{"задовільно"}; \text{"добре"}; \text{"відмінно"}\}.$$

Аби описати повну базу знань нейронечіткої системи, необхідні правила (їх кількість $4^3 = 64$) такого вигляду:

$$R_k : \text{якщо } x_1 = A_j \wedge x_2 = A_q \wedge x_3 = A_p, \text{ то } y_k = B_{j,q,p} = B_l, \qquad (7.19)$$

тут $k = \overline{1{,}64}$ – номер правила, $j, q, p, l = \overline{1{,}4}$ – номер значення відповідних лінгвістичних змінних.

Як показує практика, достатньо і меншої кількості правил – залежно від урахування аспектів постановки задачі їх може бути 28 або 32. Зобразити базу знань у вигляді таблиці неможливо, оскільки це тривимірний масив, але його шар для випадку, коли $x_1 = \{\text{"добре"}\}$, наведено в табл. 7.2.

Зауважимо, що суттєва особливість оцінювання – суб’єктивне уявлення експерта (в даному випадку викладача) про співвідношення реальних балів, відповідних знанням з того чи іншого модуля (за об’єктивною шкалою, наприклад 100-бальною) і кожної з оцінок. Для прикладу можна взяти відповідність між оцінюванням за 4-бальною і 100-бальною системами у ВНЗ України, де нижня межа між «незадовільно» і «задовільно» може становити 50 або 60 балів, а між «відмінно» та «добре» – 80, 85 або 90.

Таблиця 7.2

База правил нечіткої нейронної мережі оцінювання знань студентів

Значення y за умови, що $x_1 = \{"\text{добре}"\}$		Значення x_3			
		«незадовільно»	«задовільно»	«добре»	«відмінно»
Значення x_2	«незадовільно»	«незадовільно»	«незадовільно»	«незадовільно»	«незадовільно»
	«задовільно»	«незадовільно»	«задовільно»	«добре»	«добре»
	«добре»	«незадовільно»	«добре»	«добре»	«добре»
	«відмінно»	«незадовільно»	«добре»	«добре»	«відмінно»

Відтак, для навчання нейронної мережі слід завантажити кілька підсумкових відомостей контролю, проведеного бажано різними викладачами з різних дисциплін, і відновити значення параметрів нечітких множин $A_1 \dots A_3$ та B для подальшого автоматичного виставляння підсумкової оцінки тільки за фактичними показниками модульного контролю.

В останній задачі слід використовувати алгоритм, описаний у даному розділі, з рекомендованою швидкістю навчання не вище 0,1 і трикутними або дзвоноподібними функціями належності нечітких множин вхідних лінгвістичних змінних. Для вихідної змінної краще застосувати точкову або лінійну нечітку множину.

Нейронечітка мережа типу ANFIS реалізована в багатьох сучасних математичних пакетах та аналітичних середовищах, зокрема в MATLAB, SPSS, Statistica, у спеціальних бібліотеках більшості сучасних алгоритмічних мов, зокрема R, Python та інших.

Основним недоліком нейронної мережі ANFIS є те, що в процесі навчання налаштовуються тільки параметри функцій належності нечітких правил. Проте параметри функцій логічного виведення (коли такі задані), як і набір правил, у ході навчання не змінюються. Це обмежує гнучкість алгоритму навчання та потенційну можливість нейронної мережі ANFIS. Згаданий недолік буде усунено в алгоритмі навчання більш перспективної нейромережі TSK.

7.4. Нечітка нейронна мережа TSK

Узагальненням нейронної мережі ANFIS є ННМ (нечітка нейронна мережа), що отримала назву TSK (Takagi, Sugeno і Kang'a). Узагальнену схему логічного виведення в моделі TSK при використанні M правил і N змінних x_j можна подати в такому вигляді:

$$R_k\text{: якщо } x_1 \in A_1^k \wedge x_2 \in A_2^k \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n^k \text{, то } y_k = p_{0,k} + \sum_{j=1}^{N} p_{j,k} x_j \,, \quad (7.19)$$

тут $k = \overline{1, M}$, це номер правила; A_j^k – значення лінгвістичної змінної x_j для правила R_k із такою функцією належності:

$$\mu_A^k(x_j) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x_j - c_j^k}{\sigma_j^k} \right)^{2b_j^k}}, \; j = \overline{1, N}. \quad (7.20)$$

У нечіткій мережі TSK перетин умов правила R_k визначається функцією належності у формі добутку, тобто

$$\mu_A^k(x) = \prod_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{1 + \left(\dfrac{x_j - c_j^k}{\sigma_j^k} \right)^{2b_j^k}} \right]. \quad (7.21)$$

За наявності M правил виведення композиція вихідних результатів у мережі визначається (аналогічно до логічного виведення за алгоритмом Сугено) таким чином:

$$y(x) = \frac{\sum_{k=1}^{M} (\omega_k \cdot y_k(x))}{\sum_{k=1}^{M} \omega_k}, \quad (7.22)$$

тут $y_k(x) = p_{0,k} + \sum_{j=1}^{N} p_{j,k} \cdot x_j$ і являє собою лінійні функції від вхідних змінних, аналогічні до тих, що застосовувались у мережі ANFIS. Наявні у виразі (7.22) параметри ω_k інтерпретуються як ступені виконання умов таких правил: $\omega_k = \mu_A^k(x)$, що випливають з формули (7.21).

Нечітка мережа TSK, яка реалізує логічне виведення згідно з виразом (7.22), задана багатошаровою структурою мережі. Її схему подано на рис. 7.3. У такій мережі виділяють п’ять шарів.

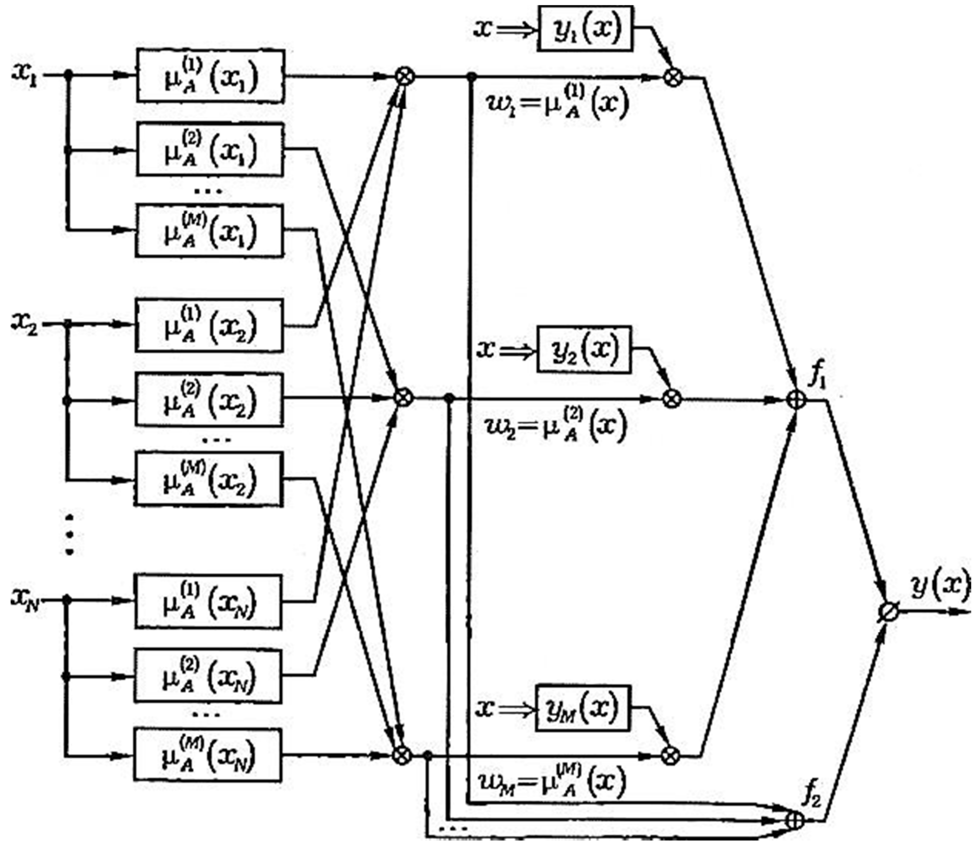


Рис. 7.3. Структура нейронечіткої мережі TSK

Перший шар виконує роздільну фазифікацію кожної змінної x_j, $j = \overline{1, N}$, формуючи для кожного k-го правила логічного виведення значення функції належності $\mu_A^k(x_j)$ відповідно до функції фазифікації, що застосовується, наприклад, у формулі (7.20). Це параметричний шар, що має змінні c_j^k, σ_j^k та b_j^k, котрі підлягають адаптації в процесі навчання.

Другий шар виконує агрегування окремих змінних x_j для визначення вислідного ступеня належності поточного вектора x умовам k-го правила, тобто $\omega_k = \mu_A^k(x)$. Це непараметричний шар.

Третій шар являє собою генератор функцій TSK, у якому розраховуються значення такої функції: $y_k(x) = p_{0,k} + \sum_{j=1}^{N} p_{j,k} \cdot x_j$, у ньому відбувається також множення функцій $y_k(x)$ на ω_k, сформованих на попередньому шарі. Це параметричний шар, у якому адаптації підлягають лінійні змінні (вага кожного зв'язку) $p_{0,k}$, $p_{j,k}$, $j = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, M}$, за допомогою котрих визначають функції наслідків правил.

Четвертий шар утворюють два нейрони-суматори, один із яких розраховує зважену суму сигналів $y_k(x)$, а другий – суму значень ваги кожної функції належності, тобто $\sum_{k=1}^{M}\omega_k$.

Останній, *п'ятий шар*, складається з єдиного вихідного нейрона. У ньому значення ваги зв'язків піддаються нормалізації й обчислюється вихідний сигнал $y(x)$ відповідно до виразу (7.22). Це також непараметричний шар.

З наведеного вище опису випливає, що нечітка мережа ТБК містить тільки два параметричних шари (перший і третій), де значення сигналів уточнюються в процесі навчання. Параметри першого шару c_j^k, σ_j^k та b_j^k будемо називати нелінійними, а параметри третього шару $p_{0,k}$, $p_{j,k}$ – лінійними значеннями ваги.

Загальний вираз перетворення функціональної залежності (7.22) у мережі TSK має такий вигляд:

$$y(x)=\frac{\sum_{k=1}^{M}\left(p_{0,k}+\sum_{j=1}^{n}p_{j,k}x_j\right)\cdot\prod_{j=1}^{N}\mu_A^k\left(x_j\right)}{\sum_{k=1}^{M}\prod_{j=1}^{N}\mu_A^k\left(x_j\right)}. \tag{7.23}$$

Якщо припустити, що в конкретний момент часу параметри умов фіксовані, то функція $y(x)$ є лінійною відносно змінної x_j.

За наявності *N* вхідних змінних у кожному правилі R_k може бути сформульовано N+1 змінних $p_{j,k}$ лінійної залежності $y_k(x)$. Коли існує *M* правил логічного виведення, то маємо *M(N*+1*)* лінійних параметрів мережі.

Своєю чергою, кожна функція належності містить три параметри (c_j^k, σ_j^k та b_j^k), які підлягають адаптації. За наявності *M* правил логічного виведення одержуємо 3*MN* нелінійних параметрів. У підсумку виходить *M(*4*N* + 1*)* лінійних і нелінійних параметрів, які потрібно визначати в процесі навчання. У реальних умовах, коли задача включає хоча б 10 змінних, а правил буде більше сотні – це дуже велика кількість. Успіх вдалого підбору чи налаштування такої кількості параметрів дуже залежить від початкових умов.

Аби скоротити число параметрів, що підлягають адаптації, оперують меншою кількістю незалежних функцій належності. Зокрема, можна передбачити, що частина параметрів функцій належності однієї змінної $\mu_A^k\left(x_j\right)$ фіксується. Наприклад, вважають, що для всіх значень даної лінгвістичної змінної j параметри ширини і стовбчастості функції належності однакові, тобто $\sigma_j^k=\text{const}$ та $b_j^k=\text{const}$.

Задача навчання нейронної мережі TSK полягає в пошуку такого відображення множини пар даних $\{X, Y^*\}$, при якому очікуване значення Y^*, що відповідає вхідному вектору X, формувалося б вихідною функцією мережі $y(x)$.

Навчання нечітких нейромереж, так само, як і класичних чітких, може проводитися як відповідно до алгоритму з учителем, коли використовується цільова функція, так і за алгоритмом самоорганізації без учителя.

7.5. Нечіткі нейронні мережі з самоорганізацією

Розглянемо нейронну мережу, у якій наявна самоорганізація, тобто коли навчання відбувається без учителя.

Алгоритм самоорганізації відносить вектор x до відповідного кластера даних з центром c_i, використовуючи змагальне навчання, характерне для мереж Кохонена із самоорганізацією [29].

Базова форма алгоритму самоорганізації дозволяє точно знайти положення центрів c_i відповідних груп даних (кластерів), на які розбивається вихідний багатовимірний простір. Такі центри надалі можуть використовуватися в гібридному алгоритмі навчання нейронечіткої мережі. відіграючи роль початкових значень, що суттєво прискорює процес навчання й гарантує збіжність до глобального мінімуму.

Алгоритм самоорганізації нечіткої нейронної мережі методом k***-середніх.*** Припустимо, що в мережі існує k нечітких нейронів з центрами в точках c_i, $i = 1,2,...,k$. Початкові значення центрів можуть бути вибрані випадково з області допустимих значень відповідних компонент векторів x_j, $j = 1,2,...,N$, із навчальної вибірки обсягом N прикладів. Нехай фазифікацію задано у формі узагальненої функції Гаусса, тобто

$$\mu_{A_i}(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - c_i}{\sigma_i}\right)^{2b_i}}, \; i = \overline{1,k}. \tag{7.24}$$

Вектор x_j, що подається на вхід, належатиме k різним кластерам (нечітким нейронам), які подано своїми центрами c_i, ступінь їхньої належності $u_{ij} = \mu_{A_i}(x)$, відтак $0 \le u_{ij} \le 1$. Сумарний ступінь належності вектора до всіх кластерів має становити одиницю, тобто

$$\sum_{i=1}^{k} u_{ij} = 1, \; \forall j. \tag{7.25}$$

Функцію помилки, яка відповідає такому формулюванню, можна визначити як суму відхилень векторів від центрів c, із урахуванням їхніх функцій належності зі ступенем m. Отже,

$$E = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} u_{ij}^{m} \left\| c_i - x_j \right\|^2 , \qquad (7.26)$$

де m – ваговий коефіцієнт, який набуває значень на інтервалі $(1;\infty)$ (зазвичай це тільки цілі числа).

Мета навчання з самоорганізацією цим методом полягає в такому підборі центрів c_i, щоб для заданої множини навчальних векторів x_j забезпечити досягнення мінімуму min (E) при виконанні умови (7.25).

Розв’язок цієї задачі можна отримати методом множників Лагранжа. Для цього спочатку будуємо функцію Лагранжа, тобто

$$LE = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} u_{ij}^{m} \left\| c_i - x_j \right\|^2 + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{k} u_{ij} - 1 \right), \qquad (7.27)$$

враховуємо умови екстремуму (оптимуму), а саме:

$$c_i \sum_{j=1}^{N} u_{ij}^{m} = \sum_{j=1}^{N} u_{ij}^{m} x_j , \; i = \overline{1,k} . \qquad (7.28)$$

Оскільки сума значень функцій належності кожного вхідного вектора до всіх кластерів за умовою (7.25) має дорівнювати одиниці, то

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{q=1}^{k} \left(\dfrac{d_{ij}^2}{d_{qj}} \right)^{\frac{1}{m-1}}} , \qquad (7.29)$$

де d – евклідова відстань між векторами, що обчислюється наступним чином $d_{ij} = \left\| c_i - x_j \right\| = \sqrt{\left(x_j - c_i\right)^T \left(x_j - c_i\right)}$.

Через те, що точні значення центрів c_i на початку процесу невідомі, алгоритм навчання має бути ітераційним, наприклад, таким, як описано нижче. Він включає такі кроки:

Крок 1. Виконати випадкову ініціалізацію коефіцієнтів u_{ij}, вибираючи їх значення з інтервалу [0;1] так, щоб виконувалась умова (7.25).

Крок 2. Визначити координати центрів c_i нечітких нейронів кількістю k, використовуючи залежність (7.28), тобто

$$c_i = \sum_{j=1}^{N} u_{ij}^m x_j \bigg/ \sum_{j=1}^{N} u_{ij}^m \, , \; i = \overline{1,k} \, .$$

Крок 3. Розрахувати значення функції похибки відповідно до формули (7.26). Коли воно виявиться меншим за встановлений поріг ($E \le \varepsilon$), то закінчити обчислення, це означає, що знайдені значення центрів c_i є шуканими. Коли ні, то перейти до кроку 4.

Крок 4. Розрахувати нові значення належностей u_{ij} за формулою (7.29) й повернутися до виконання кроку 2.

Алгоритм описаний.

Багаторазове використання ітераційної процедури забезпечує досягнення мінімуму функції E (але не обов’язково глобального). Найкращим може вважатися таке розміщення центрів, при якому вони будуть перебувати в областях, котрі включають найбільшу кількість пред’явлених векторів x_j, тобто в центрах мас кластерів. У цьому випадку центри являють собою вектори даних з найменшою сумарною помилкою. Таким чином, перед застосуванням ітераційного алгоритму k-середніх для оптимального розміщення центрів необхідно виконати процедуру їх ініціалізації. До найбільш відомих алгоритмів ініціалізації відносяться *процедури пікового* та *різницевого групування даних*.

Процедура пікового групування була запропонована Єгером і Філевом [57]. Ідея процедури полягає в тому, що при використанні N вхідних векторів будується сітка, яка рівномірно покриває їхній простір, а вузли цієї сітки розглядаються як потенційні центри τ. Для кожного з них розраховується пікова функція, а саме:

$$m(\tau) = \sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\frac{\left\| \tau - x_j \right\|^{2b}}{2\sigma^2} \right), \tag{7.30}$$

тут σ – деяка константа, яку підбирають окремо для кожної конкретної задачі. Коефіцієнт σ має несуттєвий вплив на кінцеві пропорції меж $m(\tau)$ для різних значень τ.

Величина $m(\tau)$ розглядається як оцінка висоти пікової функції. Вона обернено пропорційна кількості векторів x_j, які потрапляють в окіл потенційного центра τ. Мале значення параметра $m(\tau)$ свідчить про те, що центр τ розміщений в області, де зосереджено найбільшу кількість векторів x_j.

Після розрахунку значень пікової функції $m(\tau)$ для всіх потенційних центрів відбирають перший центр c_1, який має найбільшу величину $m(\tau)$. Для вибору наступних центрів необхідно вилучити з розрахунку c_1 та вузли, котрі розміщені в безпосередній близькості до нього.

Це можна зробити шляхом перевизначення пікової функції за рахунок відділення від неї функції Гаусса з центром у точці c_1. Позначивши цю нову функцію через $m_{new}(\tau)$, отримаємо таку залежність:

$$m_{new}(\tau) = m(\tau) - m(c_1) \cdot \exp\left(-\frac{\|\tau - c_1\|^{2b}}{2\sigma^2} \right). \tag{7.31}$$

Зауважимо, що ця функція має нульове значення в точці c_1.

Потім ту саму процедуру повторюють стосовно наступних центрів c_2, c_3 і т. д.

Процес визначення наступних центрів реалізується послідовно з модифікованими значеннями функцій $m_{new}(\tau)$, отриманими внаслідок вилучення з розгляду найближчих сусідів центра, який було знайдено на попередньому етапі. Пошук завершується в момент локалізації всіх центрів, наявних у моделі нечіткої мережі.

Метод пікового групування ефективний, якщо розмірність вектора навчальних прикладів X не дуже велика. Інакше ітераційний процес стає обчислювально невиправданим.

Процедура різницевого групування являє собою модифікацію попередньої процедури, де вектори розглядаються як потенційні центри τ. Пікова функція $D(x_i)$ в цьому випадку задається у такому вигляді:

$$D(x_i) = \sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\frac{\|x_i - x_j\|^{2b}}{\left(r_a / 2 \right)^2} \right), \tag{7.32}$$

де значення коефіцієнта r_a окреслює сусідство центрів. На значення пікової функції $D(x_i)$ суттєво впливають тільки вектори x_j, зосереджені в межах сфери з центром x_i та радіусом r_a.

При високій щільності точок навколо x_i значення функції $D(x_i)$ велике. Після розрахунку значень пікової функції для кожної точки x_i відбирається вектор x, для якого міра щільності $D(x)$ виявиться найбільшою. Саме ця точка стає першим центром c_1.

Вибір наступного центра c_2 можливий після вилучення з розгляду попереднього та всіх точок, що лежать у його околі.

Так само, як і в попередньому випадку, пікова функція перевизначається, а саме:

$$D_{new}(x_i) = D(x_i) - D(c_1) \cdot \exp\left(-\frac{\|x_i - c_1\|^{2b}}{\left(r_b / 2 \right)^2} \right). \tag{7.33}$$

У цьому виразі коефіцієнти r_b показують нові значення змінної, яка задає радіус сфери сусідства чергового центра. Зазвичай дотримуються умови, що $r_a \le r_b \le ...$. Після модифікації значення пікової функції виконують пошук нової точки x, для якої $D_{new}(x) \to \max$. Вона стає новим центром.

Процес пошуку чергового центра відновлюється після вилучення з розгляду всіх компонент, які відповідають вже відібраним точкам. Ініціалізація завершується в момент фіксації всіх центрів, передбачених початковими умовами.

За описаним алгоритмом відбувається самоорганізація множини векторів X, яка полягає у виборі оптимальних значень центрів, котрі утворюють множину даних з мінімальною похибкою.

7.6. Застосування нечітких нейронних мереж для апроксимації функцій

Визначення 7.6. *Апроксимація* – це наближене вираження одних математичних об'єктів через інші, близькі за значенням, але більш прості, наприклад, заміна кривих ліній ламаними, ірраціональних чисел – раціональними, неперервних функцій – поліномами.

Нечіткі системи – це універсальні апроксиматори функцій. Їх можна розглядати як тришарову нейронну мережу (НМ) прямої дії. Перший шар містить вхідні змінні, середній (прихований) шар – нечіткі правила і третій –

вихідні змінні. Іноді використовують п’ятишарову архітектуру, де нечіткі множини являють собою нейрони другого – четвертого рівнів.

Нечіткі нейронні системи апроксимують *n*-вимірні невідомі функції, що частково визначені навчальними даними.

Апроксимація функцій, яка базується на локальних навчальних стратегіях, – це одна зі сфер застосування нейромереж, зокрема нечітких. Однак останні мають переваги перед звичайними нейромережами, оскільки в них задіяні попередні знання у формі нечітких правил, на відміну від звичайних мереж, котрі навчаються з нуля.

Розглянемо приклад апроксимації нелінійної функції довільного вигляду за допомогою нечіткої нейромережі. Для цього значення залежної та незалежної змінних подамо у вигляді таблиці 7.3.

Таблиця 7.3

Вихідні дані для навчання нечіткої мережі

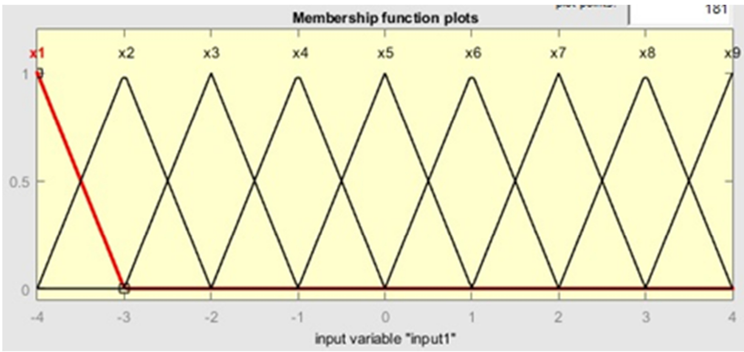
Значення x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Значення y	–60	–14	10	18	16	10	6	10	28

Для прикладу обрано поліном третього ступеня, тобто $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 16$, який на інтервалі $[-4;4]$ має два екстремуми. Цей приклад потребує складних обчислень, пов’язаних з апроксимацією як лінійними, так і нелінійними моделями, у яких використовують метод найменших квадратів для пошуку коефіцієнтів.

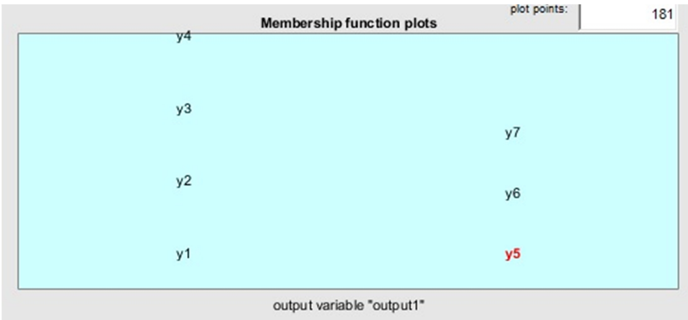
Утім, використавши для вхідного шару трикутну або дзвіноподібну функцію дефазифікації, а для вихідного – точкові функції належності [вона існує лише в певній точці, де $\mu(y_i) = 1$, на решті числової прямої дорівнює нулю], та використавши певний набір правил, досягаємо якісної апроксимації.

Етапи роботи навчання мережі в середовищі MATLAB ілюструє рис. 7.4, де перше зображення відповідає фазифікації вхідної величини, друге – вихідної (кількість унікальних значень змінної y менша, ніж змінної x, адже значення в другому рядку табл. 7.4 повторюються). Третій фрагмент відображає базу правил з описом вхідного простору прикладів, а четвертий – апроксимувальну криву, створену на базі правил і нечітких множин. Чи не схоже це на заданий поліном?

а



б



в

1. If (input1 is x1) then (output1 is y1) (1)
2. If (input1 is x2) then (output1 is y2) (1)
3. If (input1 is x3) then (output1 is y4) (1)
4. If (input1 is x4) then (output1 is y6) (1)
5. If (input1 is x5) then (output1 is y5) (1)
6. If (input1 is x6) then (output1 is y4) (1)
7. If (input1 is x7) then (output1 is y3) (1)
8. If (input1 is x8) then (output1 is y4) (1)
9. If (input1 is x9) then (output1 is y7) (1)

г

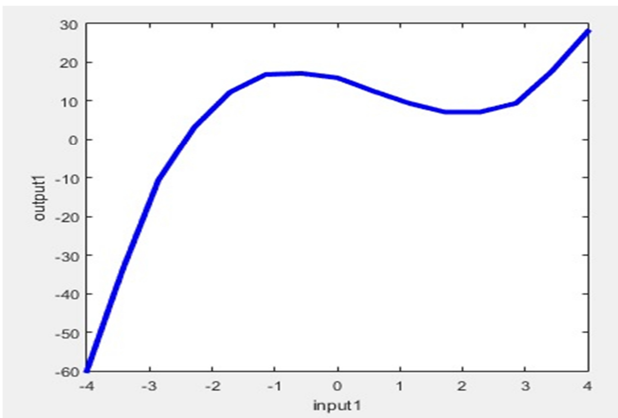


Рис. 7.4. Етапи апроксимації нелінійної функції: *а* – фазифікація вхідного діапазону значень; *б* – множина значень вихідної змінної; *в* – нечітка множина правил; *г* – апроксимувальна крива

Як видно з рис. 7.5, скориставшись лише дев’ятьма прикладами значень з діапазону дослідження і не маючи жодного уявлення про справжній вигляд апроксимувальної функції, наша нечітка нейронна мережа вдало апроксимує поліном третього порядку. Зокрема в обраній для прикладу точці ($x = -3{,}33$) точне значення функції $y = -26{,}454$, при цьому апроксимоване значення $\hat{y} = -26{,}6$.

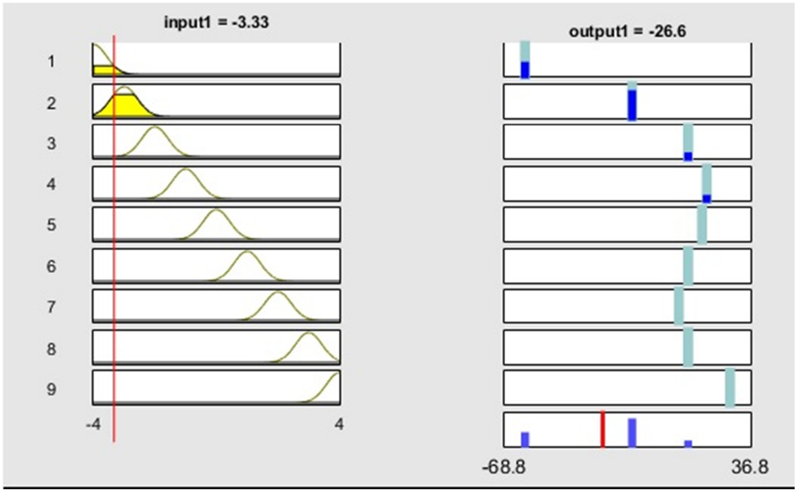


Рис. 7.5. Приклад результату роботи навченої нейронечіткої мережі

Виконавши перевірку із застосуванням даних, які не входили у вибірку, бачимо, що мережа з трикутною формою належності апроксимує значення, відносна помилка якого не перевищує 10 %. Водночас у мережі з функцією належності типу «гаусіан» за тих самих умов відносна помилка апроксимації не перевищуватиме 7 %. При збільшенні кількості вхідних даних (навчальних прикладів) точність мережі відповідно зростатиме.

Висновки

Нечіткою нейронною мережею називається поєднання штучної нейронної мережі з механізмом нечіткого логічного виведення. Інакше кажучи, це обчислювальна система, котра містить кілька шарів штучних нейронів, хоча б один з яких відповідає системі правил (базі знань).

Нечітка нейронна мережа формально за структурою ідентична багатошаровій нейронній мережі з навчанням, але сховані в ній шари відповідають таким етапам функціонування нечіткої системи:

– перший шар нейронів виконує функцію введення нечіткості (fuzzification) на основі заданих функцій належності вхідних параметрів певній базовій шкалі;

– другий шар відображає сукупність нечітких правил;

– третій шар виконує функцію приведення результатів виведення до чіткості (defuzzification).

У розділі розглянуто мережу ANFIS, яку можна використовувати для налаштування функції належності, а також бази правил у нечіткій експертній системі.

Алгоритм навчання нейронної мережі – це метод або математична модель переважно багаторазового застосування, що використовується для підвищення ефективності цієї мережі. Нейронна мережа архітектури ANFIS навчається за допомогою методу градієнтного спуску.

Для використання цього алгоритму на практиці достатньо заповнити таблицю початкових наближень, аби на кожне правило їх припадало не менше 10 – 15, тоді алгоритм стає стабільним і збіжним.

Узагальненням нейронної мережі ANFIS виступає нечітка нейронна мережа називана TSK (за прізвищами авторів – Takagi, Sugeno і Kang), яка реалізує логічне виведення і задана п’ятишаровою структурою.

Навчання нечітких нейромереж, так само, як і класичних чітких мереж, може відбуватись і відповідно до алгоритму навчання з учителем, коли використовується цільова функція, і за алгоритмом самоорганізації без учителя. Базова форма алгоритму самоорганізації дозволяє точно знайти положення центрів відповідних груп даних (кластерів), на які розбивається вихідний багатовимірний простір. Такі центри надалі можуть використовуватися в гібридному алгоритмі навчання нейронечіткої мережі. відіграючи роль початкових значень, що суттєво прискорює процес навчання й гарантує збіжність до глобального мінімуму.

Нечіткі системи – це універсальні апроксиматори функцій. Їх можна розглядати як тришарову нейронну мережу (НМ) прямої дії. Перший шар містить вхідні змінні, середній (прихований) шар – нечіткі правила і третій – вихідні змінні. Іноді використовують п’ятишарову архітектуру, де нечіткі множини являють собою нейрони другого – четвертого рівнів). Нечіткі нейронні системи апроксимують n-вимірні невідомі функції, що частково визначені навчальними даними.

Питання, викладені в цьому розділі, також розглянуто в літературі [15, 18, 20–25, 30–34, 45, 60, 61].

Контрольні питання

1. У чому полягає перевага застосування нечітких множин до задач, де вхідні дані ненадійні чи слабко формалізовані?
2. Які ви знаєте недоліки нечітких систем прийняття рішень?
3. Скільки шарів має найпростіша нечітка нейронна мережа?
4. Яка основна галузь застосування нейронних нечітких мереж з нечіткими функціями?
5. Хто є автором ідеї нейронечіткої мережі ANFIS?
6. Яку функцію мають нейрони кожного з шарів мережі ANFIS?

7. Який основний метод навчання нечіткої нейронної мережі ANFIS?

8. Скільки правил необхідно задати для опису нейронечіткої мережі ANFIS з двома входами, кожен з яких описується чотирма нечіткими множинами?

9. Яка основна проблема алгоритму навчання нейронечіткої мережі ANFIS з трикутними функціями належності? Яким чином вона вирішується?

10. Чи є база правил з прикладу 7.1 симетричною відносно вхідних змінних? Чому?

11. У чому полягає навчання нейронечіткої нейронної мережі?

12. Який основний недолік нейронечіткої мережі ANFIS?

13. Яку функцію виконують нейрони кожного з шарів мережі TSK?

14. Скільки параметричних шарів має мережа TSK? Які саме шари називають параметричними?

15. Скільки параметрів необхідно налаштувати для навчання нейронечіткої мережі TSK з трьома вхідними змінними, якщо для лінгвістичних змінних задано 20 правил?

16. Яка основна проблема алгоритму навчання нейронечіткої мережі TSK? Яким чином її вирішують?

17. Як називаються групи даних, на які розбивається вхідний багатовимірний простір у задачах самонавчання нейронних мереж?

18. Який метод є основним у розв’язуванні оптимізаційної задачі самонавчання нечітких нейронних мереж?

19. Яку метрику використовують у розв’язуванні оптимізаційної задачі навчання функцій належності нейронів до кластерів у мережах із самонавчанням?

20. Які алгоритми дозволяють правильно обрати початкові центри кластерів для розв’язуванні задачі самонавчання нечітких нейронних мереж?

21. Чому в задачі апроксимації нелінійної функції для опису вихідної змінної використовується нечітка множина з точковими значеннями? Що буде, якщо замінити її лінійною?

22. Яка функція належності забезпечує меншу помилку при розв’язуванні задачі апроксимації нелінійних функцій вхідної змінної? Чому?

23. Які вимоги мають висуватися до навчальної вибірки під час самонавчання нечіткої нейронної мережі та як це буде на нього впливати?

Завдання до розділу 7

1. Для задачі з прикладу 7.1 (про викладача і нейронну мережу) сформуйте базу знань мінімального обсягу без використання в правилах логічної функції «або». Яким буде обсяг такої бази?

2. Для задачі з прикладу 7.1 (про викладача і нейронну мережу) сформуйте базу знань мінімального обсягу з використанням у правилах логічної функції «або». Яким буде обсяг такої бази?

3. Здійснити навчання нейромережі для задачі з прикладу 7.1, взявши за початкові значення термів середини інтервалів відповідних балів системи

оцінювання, прийнятої у вашому університеті. У процесі навчання скористайтеся 4–5 відомостями академічних груп та проаналізуйте, як змінилися центральні значення термів вхідних змінних.

4. Виконати дії, передбачені в п. 3, взявши за початкові значення середини термів вхідних змінних математичні очікування оцінок студентів з навчальної вибірки відомостей. Яким чином вони зміняться після навчання?

5. На базі довільного набору даних із загальної генеральної сукупності, котрі описують таку залежність: $y = \sin(2x)/e^{x/5}$, на інтервалі $x \in [0; 10]$, поділивши дані на навчальну й тестову вибірки, за допомогою редактора anfisedit, що входить до пакета прикладних програм MATLAB, побудувати нейронечітку модель самонавчання. Спробувати задіяти різні алгоритми кластеризації, різну кількість функцій належності для вхідних змінних, різну кількість циклів навчання та різні алгоритми навчання. Виконати тестування побудованої моделі й дати рекомендації, який алгоритм кластер-аналізу зумовлює створення мережі меншої складності?

6. Виконати дії, передбачені в пункті 5, визначивши як впливає задана кількість циклів навчання на його точність. Побудувати відповідний графік.

7. Виконати дії, описані в пункті 5, визначивши вплив заданої точності навчання на його тривалість. Побудувати відповідний графік.

8. На базі довільного набору даних із загальної генеральної сукупності, які описують на інтервалі $x \in [-4; 4]$ таку залежність:

$$y = \begin{cases} 8 + 2x, & x \le -2, \\ (x^2 + 4)/2, & -2 \le x \le 2, \\ 8 - 2x, & x \ge 2, \end{cases}$$

побудувати нейронечітку модель, розподіливши дані на навчальну й тестову вибірки, за допомогою редактора anfisedit пакета прикладних програм MATLAB.

Використавши різні алгоритми кластеризації, різну кількість функцій належності вхідних змінних, різне число циклів навчання та різні його алгоритми, зробити висновок, який алгоритм кластерного аналізу зумовлює побудову мережі меншої складності.

9. Виконати завдання, описані в пункті 8, визначивши, яким чином впливає задана кількість циклів навчання на його точність. Побудувати відповідний графік.

10. Виконати дії, передбачені пунктом 8, визначивши вплив заданої точності навчання на його тривалість. Побудувати відповідний графік.

РОЗДІЛ 8
ЗАСТОСУВАННЯ НАБЛИЖЕНИХ ВИСЛОВЛЕНЬ У ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ

Мета розділу – ознайомлення із основними принципами та моделями, що застосовуються у нечіткому керуванні, та сферою його використання

Поняття керування стало основою кібернетики, що вивчає загальні закони впливу на природні та штучні системи і зв’язки, які там виникають.

Теорія керування (ТК) – це наука про принципи й методи спрямування функцій різних систем, процесів та об’єктів. Її сутність полягає в побудові математичної моделі об’єкта керування на основі його системного аналізу та в синтезуванні алгоритму для досягнення бажаних характеристик перебігу процесу або цілей керування.

Теорія керування базується на положеннях кібернетики і теорії інформації. Предметом її вивчення є процеси керування, зокрема методи дослідження та основи створення систем керування (СК), принципи їхньої побудови та закономірності функціонування. Визначальна мета теорії керування – побудова роботоздатних та ефективних СК.

У цьому розділі розглянуто теоретичні основи застосування нечітких множин у системах керування. Також запропоновано керувальні пристрої на основі нечітких баз знань, що застосовуються в системах керування з нечіткою логікою (fuzzy logic). Викладено принципи побудови та навчання нечітких контролерів з базами знань на прикладі моделей автоматичного керування двигуном ліфта й паровим котлом.

8.1. Основні поняття теорії керування

Визначимо основні поняття теорії керування.

Фундаментальним поняттям кібернетики як науки про керування є «*система*». Воно має кілька визначень. Одне з них таке: *система є засобом досягнення мети*. Це тлумачення відображає функціональне призначення системи. Крім того, існують визначення, які розкривають її через внутрішню будову, наприклад: *система являє собою сукупність зв’язаних елементів, що взаємодіють між собою задля досягнення спільної мети*. Зауважимо, що в цьому визначенні виявлено такі істотні властивості системи:

– існування кількох елементів;
– взаємодія елементів між собою;
– існування спільної мети.

Система керування являє собою окремий різновид системи, а саме той, де реалізовано однойменний процес. Він передбачає наявність принаймні двох складових: керованої та керувальної. Таким чином, кожна з таких систем має дві частини: керовану – об'єкт керування (ОК) і керувальну – пристрій керування (ПК).

У теорії керування *вхід системи* – це сукупність змінних параметрів впливу на неї зовнішнього середовища, що зумовлюють перехід такої системи від одного стану до іншого; *вихід системи* являє собою сукупність її змінних параметрів, котрі впливають на зовнішнє середовище.

Таким чином, вхід і вихід системи являють собою сукупність впливів на неї зовнішнього середовища і впливів її самої на середовище. Вихід однієї системи неминуче буде входом іншої – у цьому сенс загального взаємозв'язку явищ у світі.

Отже, кожен вхід може бути двох основних видів: результат попереднього процесу, послідовно пов'язаного з нинішнім, і результат попереднього процесу, випадковим чином пов'язаного з наявним. Крім того, вхід може виявитися результатом дії тієї самої системи, який знову вводиться в неї (так званий *зворотний зв'язок*). Будь-який процес має вхід і вихід, тому функціонування системи іноді називають «перетворенням входу у вихід, а правило такого перетворення – *оператором*. Математично входи й виходи системи описуються у вигляді наборів (векторів і кортежів) змінних величин.

Якщо позначити оператор перетворення через P, то вплив на систему (вхід) x, що має результатом (виходом) y, можна виразити такою формулою: $y = P(x)$. У керованих системах серед вхідних величин (їх називають також сигналами) можна виділити дві різні за характером дії групи: керувальний вплив і збурення (збурювальні впливи). До першої групи відносяться такі величини (керувальні або інструментальні змінні), на значення яких можна впливати для отримання бажаного (зазвичай оптимального) вихідного параметра, до другої – впливи на систему, які порушують її нормальне функціонування і розвиток у бажаному напрямі.

Об'єкт керування (ОК) являє собою будь-який пристрій, призначений для досягнення заданих цілей, котрий підлягає керуванню. У загальному випадку він має два входи, їх позначають через F та U, і вихід Y.

Пристрій керування (ПК) узагальнює всі елементи системи керування, що слугують для організації цього процесу. У загальному випадку ПК має три входи F, Y, Z і один вихід U.

Більшість СК має канал зв'язку від виходу ОК до входу ПК – *зворотний зв'язок* (ЗЗ). Він призначений для передачі в ПК інформації про те, наскільки вихід ОК відрізняється від бажаного (заданого). Системи із наявним каналом ЗЗ називаються *системами регулювання.*

У найбільш загальному випадку функціональна схема системи керування має вигляд, зображений на рис. 8.1. Тут $Y(t)$ – вихід СК, $F(t)$ – збурювальний вплив, $Z(t)$ – завдання (воно зазвичай визначає мету керування), $U(t)$ – керувальний вплив.

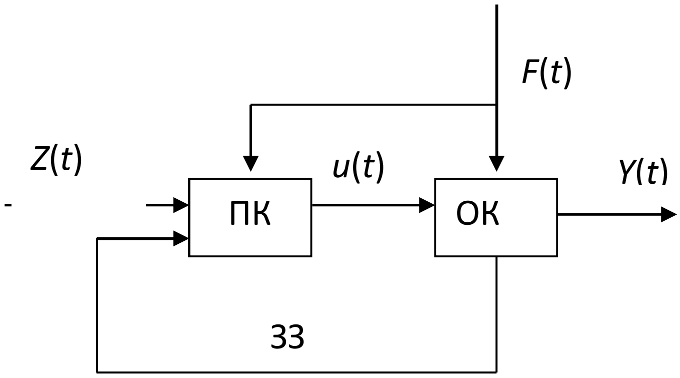


Рис. 8.1. Функціональна схема системи керування

Якщо в СК каналу ЗЗ немає, її називають системою з *програмним керуванням* (рис. 8.2). Такі системи використовують, коли існує висока ймовірність того, що вихід ОК під дією керування $U(t)$ буде відповідати бажаному.

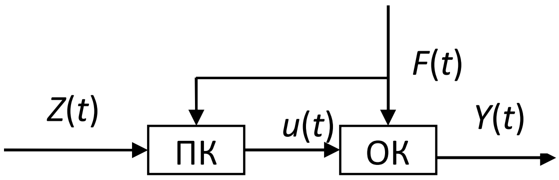


Рис. 8.2. Загальна схема системи з програмним керуванням

Зазвичай модель ОК відома після виконання процедури ідентифікації[3], тобто її подано в такому вигляді: $Y = L_{0Y}(U, F)$, тут L_{0Y} – оператор об’єкта.

Основна задача керування полягає у виборі (визначенні) оператора керувального пристрою: $U = L_{YY}(Y, Z, F)$, який забезпечує реалізацію мети керування. Оператор L_{YY} визначає структуру керувального пристрою. У системах з програмним керуванням розв’язок цієї задачі шукають у вигляді явної функції часу $U^*(t)$.

Класифікацію СК зазвичай здійснюють за такими ознаками:

1. За основними видами рівнянь, що описують рух системи, а саме:
 – лінійні;
 – нелінійні.

[3] Ідентифікація (від лат. – identifico – ототожнення) – це процес побудови математичної моделі об’єкта, адекватної (від лат. adaequatus – прирівняний) йому із заданою точністю. Розрізняють ідентифікацію у вузькому і в широкому сенсі. Під ідентифікацією у вузькому сенсі розуміють оцінювання за результатами вимірювань вхідних і вихідних сигналів та параметрів математичної моделі, коли відомо її структуру. Під ідентифікацією в широкому сенсі мають на увазі побудову як самої моделі об’єкта, так і визначення її параметрів, зазвичай – це тривалий процес. Отже, загальна задача ідентифікації формулюється таким чином: за результатами спостережень над вхідними і вихідними змінними системи має бути побудована оптимальна в деякому розумінні модель, тобто виконано формалізоване подання цієї системи.

2. За типом параметрів математичних моделей:
– системи із сталими параметрами;
– системи зі змінними параметрами;
– системи з розподіленими параметрами.

3. За характером передачі сигналів у системах:
– безперервні;
– дискретні.

4. За наявністю випадкових факторів:
– детерміновані;
– стохастичні.

5. За характером функціонування:
– неадаптивні;
– адаптивні.

6. За природою об’єкта керування:
– фізичні;
– біологічні;
– економічні;
– екологічні;
– організаційні і т. д.

Одним із завдань ТК є синтез систем керування. У загальному випадку цей процес можна описати такою схемою:

1. Визначення цілей керування.

2. Вибір змінних, що підлягають керуванню (вихід).

3. Формулювання вимог до цих змінних.

4. Вибір конфігурації системи, датчиків і виконавчих механізмів.

5. Побудова моделей об’єкта керування, датчиків і виконавчих механізмів.

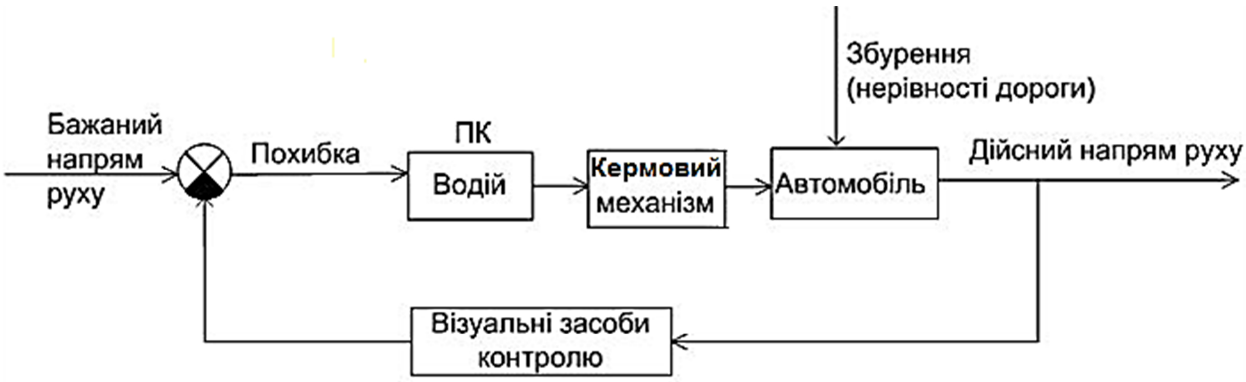
6. Вибір (визначення) закону керування.

7. Оптимізація (розрахунок) параметрів закону керування та аналіз якості керування.

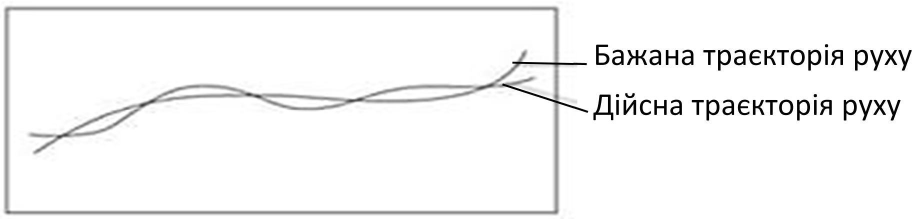
Коли якість керування не відповідає вимогам п. 3, то необхідно змінити конфігурацію системи.

Розглянемо кілька прикладів керування в технічних системах.

Приклад 8.1. Система керування автомобілем за допомогою кермового механізму. Система дозволяє керувати рухом автомобіля в заданому напрямку за командою водія. Її схематично зображено на рис. 8.3.



а



б

Рис. 8.3. СК автомобілем з використанням кермового механізму:
а – загальна схема СК; *б* – вигляд бажаної та реальної траєкторій руху автомобіля

Приклад 8.2. СК рівнем рідини в резервуарі (рис. 8.4). Ця система стабілізує висоту шару рідини *h* на заданому рівні за допомогою поплавкового механізму.

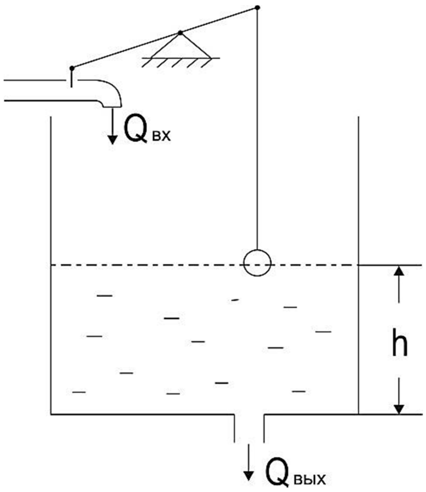


Рис. 8.4. Загальна схема СК рівнем рідини в резервуарі

Приклад 8.3. СК швидкістю обертання диска цифрового пристрою (програмне керування). Загальну схему керування подано на рис. 8.5.

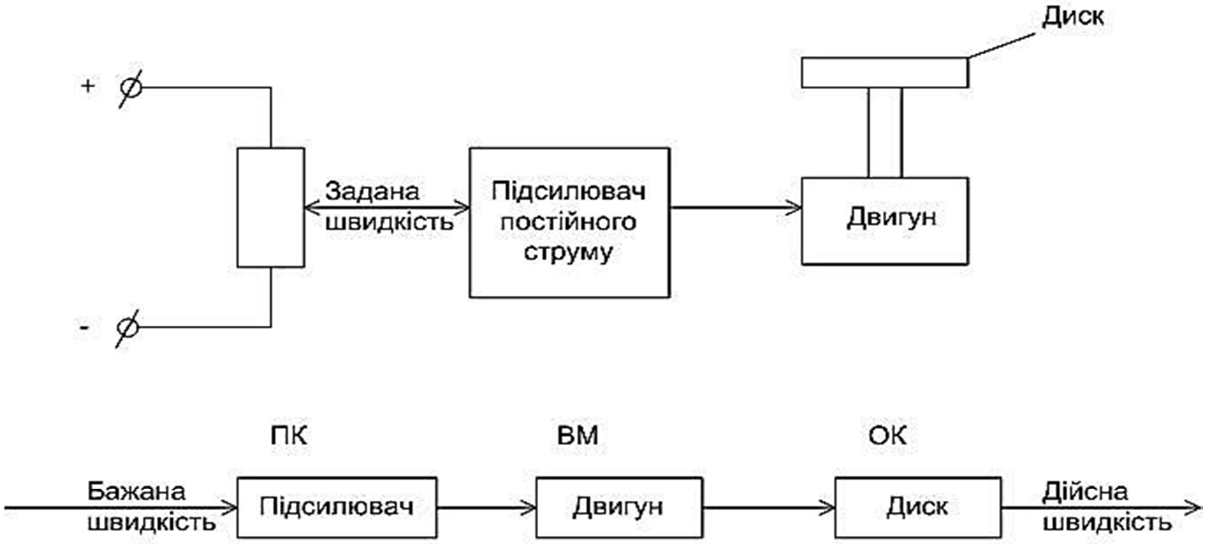


Рис. 8.5. Загальна схема СК швидкістю обертання диска

Приклад 8.4. СК зчитуванням інформації з диска. (рис. 8.6, 8.7)

Мета системи – позиціонування головки для зчитування даних на певній доріжці диска (етап 1).

Змінна, якою потрібно керувати із високою точністю, – це положення зчитувальної головки, закріпленої на кінці важеля, точніше кутова координата важеля, див. рис. 8.6 (етап 2).

Схематично конфігурацію системи зображено на рис. 8.7 (етап 4).

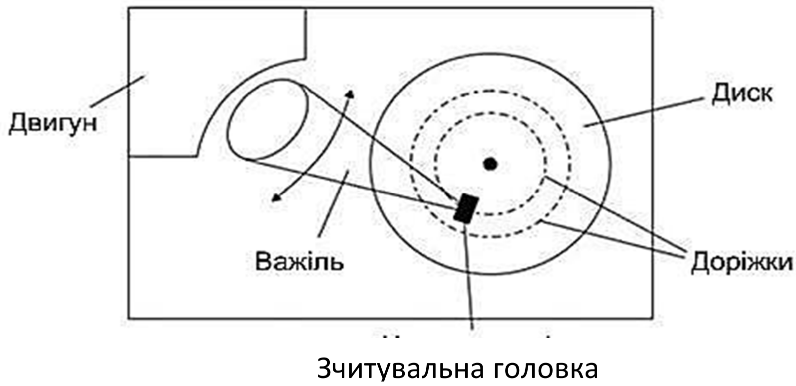


Рис. 8.6. Загальна схема СК зчитуванням інформації з диска та будова дисковода

Диск обертається з частотою 1800–7200 хв$^{-1}$, а головка розташована над диском на відстані 100 мкм. Початкова вимога до точності позиціонування становить 1 мкм. Крім того, переміщення головки від однієї доріжки до іншої має відбуватися менше ніж за 50 мс (етап 3).

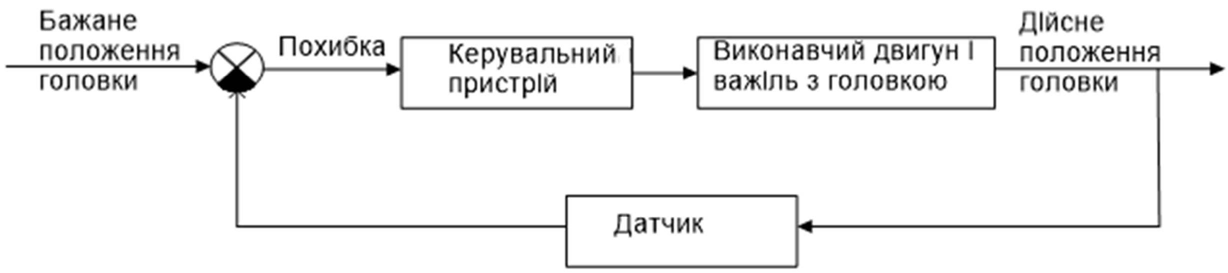


Рис. 8.7. Загальна схема замкненої СК до прикладу 8.4

8.2. Основні ідеї нечіткого керування

Як можна бачити із огляду основних понять теорії керування, що наведений вище, застосування класичних методів можливе за наявності моделі середовища та моделі об’єкта керування. А що робити, коли таких моделей немає, або вони занадто складні й потребують для реалізації великої кількості ресурсів? Це може бути суттєвим недоліком у виконанні практичних завдань, особливо, коли йдеться про керування в режимі реального часу, і тривалість обчислень тут відіграє вирішальну роль.

Основна ідея нечіткого керування полягає в тому, що складна математична модель реального процесу замінюється на логіко-лінгвістичну модель керування таким процесом.

Якщо задано мету керування (наприклад, знайти значення керованого параметра *g* у межах деякої допустимої області значень *G*), модель процесу можна виразити як множину правил типу «якщо…, то…».

Припустимо, що стан керованого об'єкта описується набором значень якісних ознак $I(\theta)$. Множина значень ознак D фіксована й скінченна, тобто $D=\{d_1,d_2\ldots d_m\}$. Процес можна описати як послідовність станів об'єкта в момент часу $t_1,t_2\ldots$, тобто $\left\{I\left(\theta_{t_i}\right)_{i=1,2,\ldots}\right\}$. Для досягнення мети керування маємо можливість змінювати значення деяких керованих параметрів із такої множини: $A=\{a_1,a_2\ldots a_n\}$.

Аби описати ідею використання нечітких лінгвістичних регуляторів, розглянемо таку ситуацію, коли існує одна ознака і один керований параметр, тобто $D=\{d\}$, $A=\{a\}$.

Як було зазначено вище, експерт може сформулювати свій досвід керування тільки для якісних значень *d* та *a*. Припустимо, що $d=\left\{d^1,d^2\ldots d^s\right\}$ і $a=\left\{a^1,a^2\ldots a^r\right\}$, тобто маємо набір якісних значень d і a відповідно. Моделлю для параметрів *d* та *a* може слугувати лінгвістична змінна із фіксованою множиною значень. У цьому випадку d і a – назви відповідних лінгвістичних змінних; d^i, a^j ($i=1,\ldots s$, $j=1,\ldots r$) – їх можливі значення.

Останнім часом контроль функціонування об’єктів на основі застосування теорії нечітких множин став однією із найбільш досліджуваних тем. Кожний логічний зв’язок асоціюється з таким виразом: $\varphi\to\psi$, що дозволяє встановити істинність логічного виразу. Розглянемо деяку імплікацію $(\varphi\to\psi)$. Для оцінки її істинності можна використовувати різні функції, деякі з них наведено в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Варіанти функцій належності імплікації

Автор	$\varphi\to\psi$
Гедель	$\begin{cases}1, & if \quad [\varphi]\le[\psi] \\ [\psi], & else\end{cases}$
Лукашевич	$\min\{1-[\varphi]+[\psi];1\}$
Гоген	$\begin{cases}1, & if \quad [\varphi]=0 \\ \max\{1;[\varphi]/[\psi]\}, & else\end{cases}$
Кліні-Дінс	$\max\{1-[\varphi];[\psi]\}$
Заде	$\max\{1-[\varphi];\min([\varphi];[\psi])\}$
Рейхенбах	$1-[\varphi]+[\varphi]\cdot[\psi]$

Отже, відомості про хід процесу, на які спирається оператор, реалізуються ним у вигляді правил «якщо…, то…», котрі мають нечіткий інформаційний зміст. Той самий принцип використано в автоматизованому керуванні процесами на базі нечіткого контролера.

Ідея нечіткого контролера вперше була запропонована Мамдані [49], після чого вона набула значного розвитку, зокрема в Японії.

У разі наявності нечіткої інформації, браку вихідних даних задачу керування процесом можна не розв'язати традиційним способом, тоді необхідно сформулювати задачу нечіткого керування. Нечіткий контролер дозволяє вирішити цю проблему шляхом завдання експертом нечітких правил типу «якщо …, то …».

Наприклад: «якщо X – це велике додатне число і Y – мале додатне, то C – додатне среднє», тоді контролер має два вхідні сигнали X та Y та одну вихідну змінну C. Терми «додатне велике», «додатне середнє» і «додатне мале» – це так звані лінгвістичні змінні (розглянуті раніше), що являють собою нечіткі описи значень вхідних змінних X та Y і вихідної змінної C.

Кожне лінгвістичне правило інтерпретується початковим відношенням, що своєю чергою, визначає в загальному випадку відношення між нечіткими вхідними значеннями і нечіткими вихідними значеннями.

8.3. Контролер Мамдані

Першим контролером, у якому була використана нечітка база правил та нечітке логічне виведення, був *контролер Мамдані* [49].

Маємо систему з n входами $x_1, x_2, ...x_n$, заданими на базових множинах значень (доменах) $X_1, X_2, ...X_n$, та з однією керувальною змінною y з доменом Y. Аби створити правила, придатні для бази знань (БЗ) нечіткого контролера, множини $X_1, X_2, ...X_n$ і Y мають бути розподілені на нечіткі множини у межах множини X_i.

Зазвичай множини X_i характеризуються наявністю інтервалу дійсних чисел, а самі вони визначаються трикутними функціями, тобто

$$\mu : X_i \to [0;1],\ x = 1 - \min\{\varepsilon \cdot |x - x_0|; 1\},\ \text{де}\ \varepsilon > 0. \tag{8.1}$$

На границях інтервалу $[a; b]$

$$\mu_1 : [a; b] \to [0; 1],\ x = \begin{cases} 1, & if\ x < x_0 \\ 1 - \min\{\varepsilon \cdot |x - x_0|; 1\}, & else. \end{cases} \tag{8.2}$$

Такий вигляд функції найчастіше обирають тому, що обчислення з нечітким контролером значно спрощуються в разі використання кусочно-лінійної функції нечіткої множини. Вище було показано, що найбільш адекватним людському уявленню про нечіткі числа є використання функції Гаусса. За допомогою трикутних функцій можна спростити розрахунки на порядок, при цьому помилка апроксимації не виходить за межі 3–5 %.

На рис. 8.8 показана схема розподілу семи множин, асоційованих з лінгвістичними термами: велике від'ємне число (*NL* = Negative Large); середнє від'ємне число (*NM* = Negative Mean); від'ємне мале число (*NS* = Negative Small); приблизно нуль (*Z* = Zero); додатне мале число (*PS* = Positive Small); додатне середнє число (*PM* = Positive Mean); велике додатне число (*PL* = Positive Large).

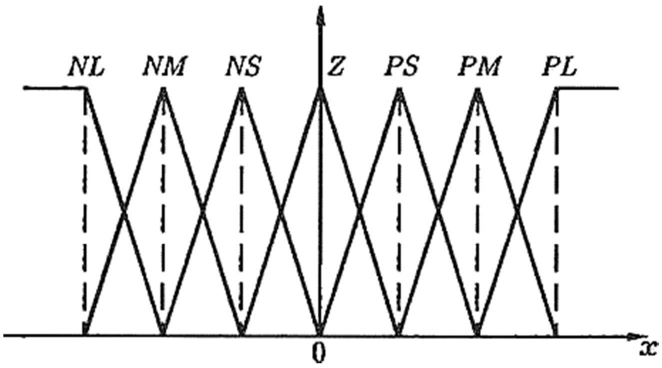


Рис. 8.8. Схема розподілу семи множин для лінгвістичних термів

База знань для контролера складається з правил такої форми:

$$R_q: \text{ якщо } \left(x_1 \in A^1_{l_1 q}\right) \wedge \left(x_2 \in A^2_{l_2 q}\right) \wedge \ldots \wedge \left(x_n \in A^n_{l_n q}\right), \text{ то } y \in B_{lq}, \qquad (8.3)$$

де $A^1_{l_1 q}, \ldots A^n_{l_n q}, B_{lq}$ – лінгвістичні терми, зумовлені нечіткими множинами $\mu^1_{l_1 q}, \ldots \mu^n_{l_n q}, \mu_{lq}$, що відповідають нечіткому розподілу множини $X_1, X_2, \ldots X_n$ і Y відповідно.

У нечіткому контролері реалізовано алгоритм логічного виведення Мамдані, який було розглянуто вище.

Приклад 8.5. Задача визначення параметрів балансування оберненого маятника. Ми використовуємо множини X_1, X_2 та Y, які є доменами кута θ відхилення маятника від вертикальної осі, кутової швидкості Ω і сили *F,* що змушує маятник прагнути до вертикального стану відповідно.

Використовуючи наведене вище розбиття кожної базової шкали на сім інтервалів і маючи дві вхідні змінні, можемо отримати максимальну кількість правил (7^2 = 49), що описують рух маятника. Водночас, як показують дослідження, деякі стани не спостерігаються одночасно, тому до бази правил включаємо тільки ті, що описують стани реального об'єкта, їх налічується 23. Символічну форму бази знань див. у табл. 8.2.

Розуміти зашифровані правила потрібно таким чином: скажімо, перша клітинка третього рядка описує ситуацію: якщо кут відхилення «від'ємний великий» (*NL*), а швидкість «від'ємна маленька» (*NS*), то на маятник діє середня від'ємна сила (*NM*). Так задається процес фазифікації.

Таблиця 8.2

База знань нечіткого контролера

Сила F		Кут θ						
		NL	*NM*	*NS*	*Z*	*PS*	*PM*	*PL*
Кутова швидкість Ω	*NL*			*PS*	*PL*			
	NM			Z	*PM*			
	NS	*NM*	*NS*	*NS*	*PS*	Z		
	Z	*NL*	*NM*	*NS*	*Z*	*PS*	*PM*	*PL*
	PS			Z	*NS*	*PS*	*PS*	*PM*
	PM				*NM*	Z		
	PL				*NL*	*NS*		

Фазифікувавши вхідні дані, тобто перетворивши дійсні величини на нечіткі множини, переходять до процесу логічного виведення. При цьому всі правила розглядаються не залежно одне від одного. На цьому етапі ми обчислюємо значення $\mu_{l_v q}^{v}(x_v)$, у якому $v = \overline{1,n}$ – номер змінної. Отримані величини функцій належності показують, якою мірою змінна x_v відповідає лінгвістичному терму, асоційованому з нечіткою множиною $\mu_{l_v q}^{v}$. Тобто $x_1,\ldots,x_n$ мають відповідати термам $A_{l_1 q}^{1},\ldots A_{l_n q}^{n}$, а значення $\mu_{l_v q}^{v}$ ($v = \overline{1,n}$) повинні сполучатися. Це досягається через визначення такої функції належності:

$$\alpha_q = \min\left\{\mu_{l_1 q}^{1}(x_1),\ldots,\mu_{l_n q}^{n}(x_n)\right\}. \tag{8.4}$$

Величина α_q показує, якою мірою виконано умови правила R_q. Вихідне значення правила R_q – це нечітка множина керувальних змінних, отримана шляхом відтинання вихідної нечіткої множини μ_{lq} функцією належності α_q.

Математично це можна записати в такий спосіб:

$$\mu_{lq}(y) = \mu_{x_1,\ldots,x_n}^{output} : Y \to [0;1], \tag{8.5}$$

$$y \to \min\left\{\mu_{l_1 q}^{1}(x_1),\ldots,\mu_{l_n q}^{n}(x_n), \mu_{lq}(y)\right\}. \tag{8.6}$$

Після того, як стосовно всіх правил буде виконано обчислення, усі нечіткі множини вихідної величини необхідно об’єднати в одну нечітку множину, використовуючи процедуру взяття максимуму (тобто операцію об’єднання). У результаті процесу логічного виведення одержуємо таку нечітку множину:

$$y = \max_q \left[\min \left\{ \mu_{l_1 q}^1 (x_1), \ldots, \mu_{l_n q}^n (x_n), \mu_{lq}(y) \right\} \right]. \tag{8.7}$$

На рис. 8.9 схемачно подано кроки роботи мінімаксного контролера Мамдані.

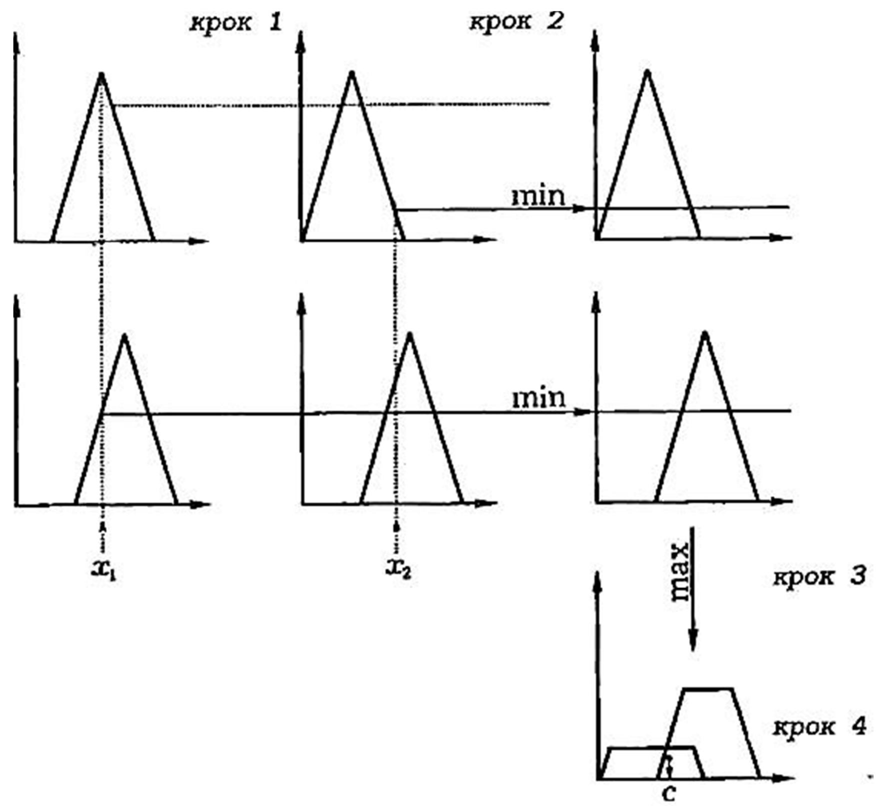


Рис. 8.9. Схема кроків нечіткого виведення контролера Мамдані

На останньому етапі отриману нечітку множину вихідної величини потрібно перетворити в чітке значення за допомогою процесу дефазифікації. Останній можна реалізувати одним з вищерозглянутих методів:

- Максимуму критерію (max criterion method, MCM).
- Середнього значення максимуму (middle of maxima method, MOM).
- Центра мас області (центроїдний), (the center of area method, COA).

Метод COA гарантує більш плавний контроль (керування) порівняно з двома іншими методами, тому його рекомендовано застосовувати в контролерах людино-машинних систем. Водночас його недоліком є необхідність виконання більш складних обчислень.

Слід відзначити, що забезпечення коректного формування керувального впливу можливе за двох умов:

– нечітка множина, що описує кожну з координат, за якими здійснюється керування, має бути опуклою;

– метод дефазифікації, обраний за координатою, має створювати можливість інтерпретації розв’язку як чіткого значення на інтервалі оцінювання (базовій шкалі).

У разі виникнення конфліктів (два чи більше значень керованої величини мають однаковий ступінь належності) метод дефазифікації повинен сприяти вибору між різними керувальними діями, а потім трансформувати кожну множину в чітке значення.

Принципову структуру нечіткого керування зображено на рис. 8.10, до неї входять функціональні компоненти нечіткого контролера, що виконують процедури фазифікації на базі лінгвістичних правил, композиції бази правил і логічного виведення, а також дефазифікації.

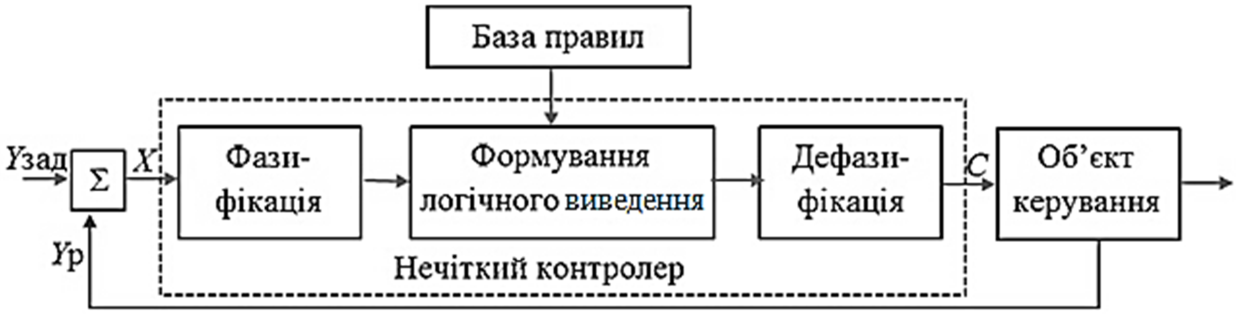


Рис. 8.10. Структура системи нечіткого керування

8.4. Нечіткий контролер на базі нейронних мереж

Для проектування нечіткого контролера мають бути задані лінгвістичні правила і функція належності для відображення лінгвістичних величин. Формулювання якісних лінгвістичних правил у необхідній (достатній і водночас не надлишковій) кількості сильно залежить від знання експертом особливостей об’єкта й роботи його системи керування. Але навіть чітко знаючи поведінку об’єкта і всі особливості керування ним, подати ці знання у вигляді нечітких множин – це аж ніяк не формалізоване завдання. Визначальними тут можуть бути і кількість інтервалів розбиття величин, і центральні значення термів, і навіть форма функції належності. У літературі [51] описано випадки, коли саме вибір форми останньої суттєво впливав на якість роботи нечіткого контролера.

Штучні нейронні мережі являють собою високопаралельну архітектуру і складаються з аналогічних обробних елементів, що взаємодіють через зв’язки, що задаються значеннями ваги кожного. Використовуючи нейронні мережі, ми можемо не тільки апроксимувати функції, але і вивчати (досліджувати) об’єкти керування, застосовуючи методи навчання і самонавчання. Проблема полягає в тому, що на навчання витрачається досить багато часу, а бажаний результат не завжди гарантований. Але є можливість скористатись раніше набутими знаннями у вигляді правил *G* уже навченої нейромережі, це спрощує процедуру навчання.

Поєднання нечіткого контролера і нейронної мережі дозволяє ефективно використати всі їхні переваги й уникнути недоліків. У цьому підході нейромережі слугують для оптимізації скінченних параметрів звичайного нечіткого контролера або для формування правил на базі даних. Вибір функції належності, що характеризує лінгвістичний терм, більш-менш довільний. Для прикладу розглянемо лінгвістичний терм «приблизно нуль». Очевидно, що відповідна нечіткій множині функція належності повинна бути унімодальною, досягати свого максимуму в значенні нуля. Але таких функцій існує певна кількість і показують вони себе в аналогічних ситуація по-різному. Відтак, правильний вибір функції належності став основним і найважливішим завданням при застосуванні нечітких контролерів.

Апарат нейронних мереж створює можливість вирішення цієї проблеми. Метод прямого поширення (сигналів) у нейромережах припускає вибір форми функції належності, яка залежить від декількох параметрів і може бути скорегована в процесі навчання. Тут можна взяти симетричну трикутну форму (найпростіший випадок), зумовлений такими двома параметрами:

– центральним значенням, у якому функція досягає максимальної величини,

– довжиною (шириною) інтервалу визначення, на якому функція відмінна від нуля.

Ми розглядаємо динамічну систему S , якою керує одна змінна *C,* а її стан може бути описано *n* змінними $x_1,...,x_n$. Дані для навчання повинні бути розділені на q кластерів, що не перетинаються $K_1,...,K_q$, Кожен кластер K_i відповідає одному правилу R_i з бази знань. Елементи кластера подають у вигляді значень змінних (*X, y*), тут $X = [x_1,...,x_n]$ і являє собою вектор координат (центральних значень, характеристичних величин) цього кластера в просторі вхідних змінних, а *y* – вихідна змінна (центральне, очікуване чи найбільш імовірне значення – залежно від методу обчислення).

Лінгвістичні значення змінних моделюються функціями належності, а керувальний вплив (керування), що приводить систему до бажаного стану, описується нечітким правилами типу «якщо…, то…». Щоб одержати вихідне значення змінних (тобто керування), необхідно вирішити проблему дефазифікації, для чого ми використовуємо монотонну функцію належності Цукамото (Tsukamoto). На рис. 8.11 можна побачити, що згідно з цим алгоритмом, дефазифікація зводиться до застосування оберненої функції.

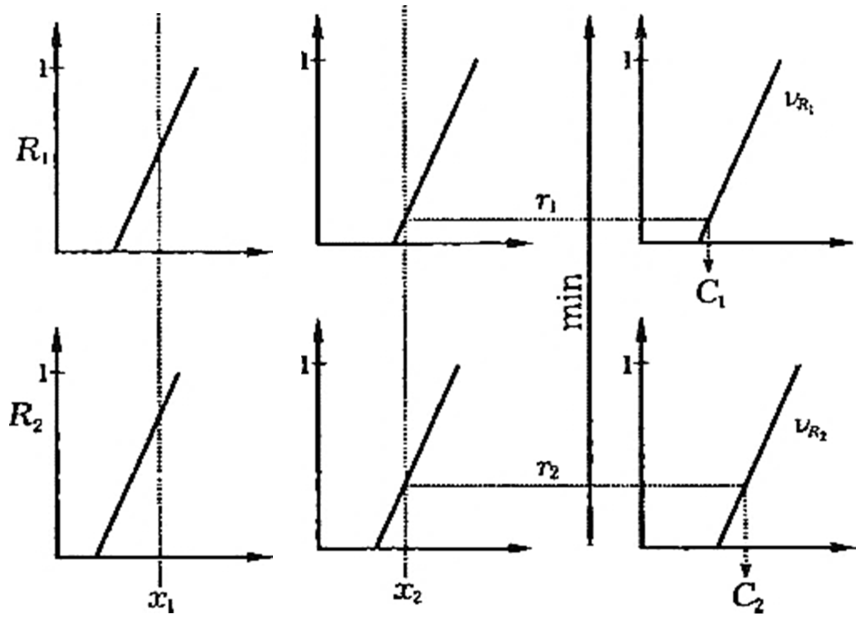


Рис. 8.11. Схема алгоритму дефазифікації з використанням монотонної функції належності Цукамото

Така функція належності μ характеризується двома точками a і b, для яких виконуються такі умови: $\mu(a)=0$, $\mu(b)=1$, а визначають її таким чином:

$$\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{a-x}{a-b}, & if\ x\in[a,b]\vee\left(x\in[b,a]\wedge a>b\right),\\ 0, & else.\end{cases} \tag{8.8}$$

Дефазифікацію здійснюють за таким виразом:

$$x=\mu^{-1}(y)=-y(a-b)+a=a+y(b-a);\quad y\in[0,1]. \tag{8.9}$$

Для роботи контролера необхідно обмежити монотонну функцію належності, щоб знайти лінгвістичне значення вихідної змінної. Для визначення вхідної величини звичайно використовують трикутну чи трапецоїдну функцію належності.

На рис. 8.12 зображено структуру нечіткого нейронного контролера.

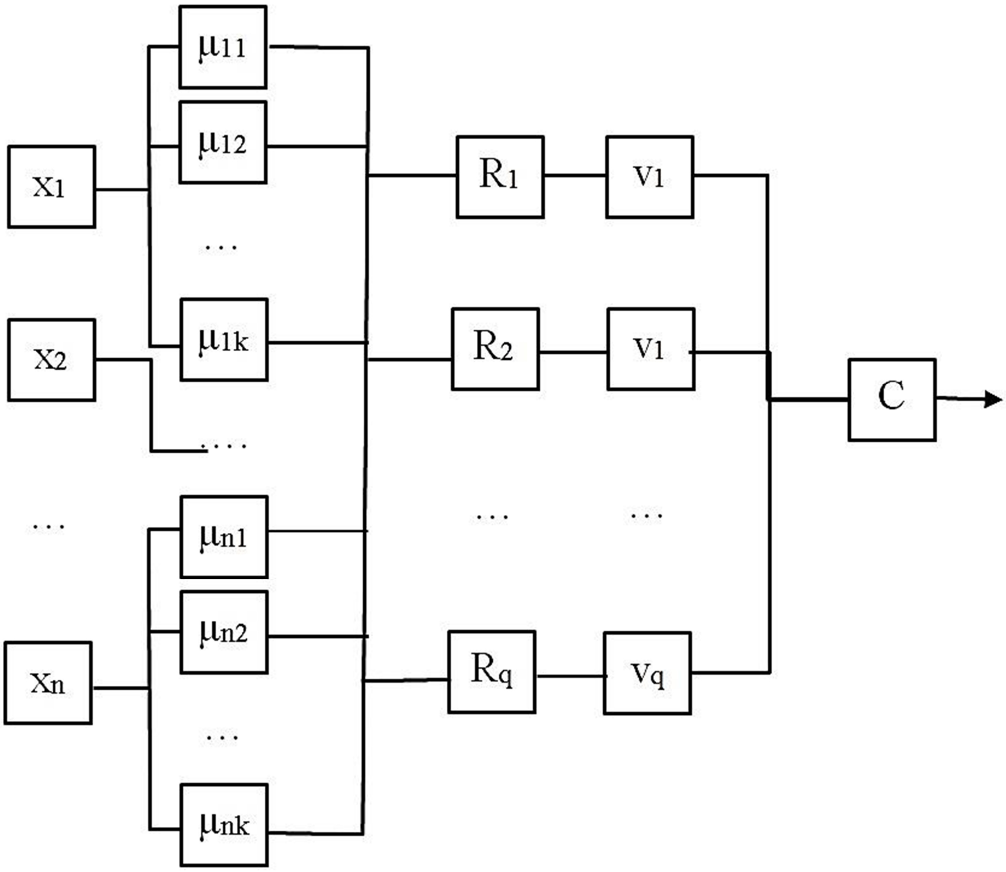


Рис. 8.12. Структура нечіткого нейронного контролера

Модулі $x_1, x_2,...x_n$ тут являють собою вхідні змінні. Зазвичай у системах автоматизованого керування таких змінних дві: статична й динамічна помилки керування. Але потенційно їх може бути довільна кількість n.

Сигнал кожного вхідного параметра потрапляє на блоки фазифікації. Кожному сигналу $(i = \overline{1, n})$ тут поставлено у відповідність k функцій належності μ_{ij}, $j = \overline{1, k}$. У загальному випадку для кожної змінної може бути задане власне значення k_n функцій належності.

Нечіткі множини, активовані вхідними змінними, передають сигнал на шар, що включає q правил. Кожне з нечітких правил R_l, $l = \overline{1, q}$, як сказано вище, описує певну ситуацію керування у вигляді сукупності значень вхідних змінних. Отже, при потраплянні якогось сигналу (комбінації сигналів) на вхід нечіткого нейрон-регулятора активується не якесь одне правило, а одразу всі.

Унаслідок дії нечітких правил шляхом використання операції перетину множин знаходять $\min_i \{\mu_{ij}(x_i)\}$ і передають ці значення далі – на шар функцій належності вихідної величини v_l.

Блоки шару v_l, за рахунок дії їх монотонних функцій належності, виконують обчислення величини r_l та $v^{-1}(r_l)$ і передають їх у модуль-дефазифікатор *C*. Отримуючи на вході нечітку множину, останній обчислює вихідну змінну, тобто формує керувальний вплив C з використанням алгоритму центра мас (COA) відповідно до такої формули:

$$C = \frac{\sum_{l=1}^{q} \left(r_l \cdot v^{-1}(r_l)\right)}{\sum_{l=1}^{q} r_l}, \tag{8.10}$$

де q – кількість правил виведення (кластерів, для яких задано правила); r_l – ступінь виконання правила R_l.

Як легко помітити, система на рис. 8.12 нагадує послідовну багатошарову нейронну мережу, де шари змінних, правил та дефазифікатор виконують роль нейронів вхідного, прихованого й вихідного шару відповідно, а функції належності входу μ_{ij} та виходу v_l відіграють роль ваги зв'язків мережі. Останні адаптуються під час налаштування контролера.

Вочевидь, задача навчання такої нейронної мережі зводиться до отримання оптимальних значень параметрів нечітких множин входу й виходу, котрі б забезпечували мінімум критерію оптимальності, яким може бути середньоквадратична помилка керування, час керування або інший показник, важливий для експлуатації системи.

8.5. Приклади задач нечіткого керування

8.5.1. Модель керування роботою парового котла

Прототипом моделі був паровий двигун (лабораторний) з двома входами (подача тепла, відкриття дроселя) й двома виходами (тиск у котлі, швидкість двигуна)

Мета керування: підтримання заданого тиску в котлі (залежить від подачі тепла) та заданої швидкості двигуна (залежить від положення дроселя).

Відповідно до мети керування, схему системи керування двигуном подано з такими позначеннями: відхилення тиску (різниця між дійсним та заданим значенням) – вхідна лінгвістична змінна PE; швидкість зміни відхилення тиску – вхідна лінгвістична змінна CPE; зміна кількості тепла (керувальний вплив) – вихідна лінгвістична змінна HC. Для всіх лінгвістичних змінних обрано однакову шкалу з дев'ятьма рівнями значень:

NB – від'ємне велике;
NM – від'ємне середнє;
NS – від'ємне мале;
NO – від'ємне близьке до нуля;
ZO – близьке до нуля;
PO – додатне близьке до нуля;

PS – додатне мале;

PM – додатне середнє;

PB – додатне велике.

Керувальні правила (їх 15), визначені експертом, описують можливі випадки керування і зв'язують значення вхідних і вихідної лінгвістичних змінних, маючи такий вигляд: «*Якщо відхилення тиску = A_j і якщо швидкість відхилення тиску = B_j, то зміна кількості тепла, що подається, дорівнює C_i*», де A_i , B_j , C_i – одне з перерахованих вище лінгвістичних значень. Повний набір правил зосереджено в табл. 8.3.

Таблиця 8.3

База знань контролера для керування роботою парового котла

№ правила	Відхилення тиску PE	Швидкість зміни відхилення тиску CPE	Зміна кількості теплоти, що подається, HC
1	NB	NB або NM	PB
2	NB або NM	NS	PM
3	NS	PS або NO	PM
4	NO	PB або PM	PM
5	NO	NB або NM	NM
6	PO або ZO	NO	NO
7	PO	NB або NM	PM
8	PO	PB або PM	NM
9	PS	PS або NO	NM
10	PB або PM	NS	NM
11	PB	NB або NM	NB
12	NO	PS	PS
13	NO	NS	NS
14	PO	PS	PS
15	PO	PS	NS

Лінгвістичні значення відхилень було задано у вигляді нечітких підмножин на зведеній шкалі нормованих значень кожної з величин в інтервалі [–6; 6]. Тобто область значень вхідних змінних PE, CPE та вихідної змінної HC мала вигляд 13 точок [–6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6], рівномірно розташованих між максимальними можливими від'ємним і додатним значеннями на нормованій шкалі. Відповідність поданими на шкалі й нечіткими значеннями лінгвістичних змінних показано в табл. 8.4.

Зведемо керувальні правила до такого вигляду: «*якщо* ($A_i \times B_i$), *то* C_i», де ($A_i \times B_i$) – декартів добуток нечітких множин A і B, заданих на шкалі координат X та Y, функцію належності яких $\mu(A_i \times B_i)(x,y) = \mu_{Ai}(x,y) \wedge \mu_{Bi}(y)$ визначено на просторі $X \times Y$.

Для кожного з таких правил: «*якщо (Ai× Bi), то Ci*», де ($A_i \times B_i$) – вхідна нечітка множина, а C_i – відповідне нечітке значення керувального впливу, визначали таке нечітке відношення: $R_i = (A_i \times B_i) \times C_i, i = 1,2,\dots,15$, функція належності якого $\mu_{Ri}\big((x,y),z\big) = \big(\mu_{Ai}(x) \wedge \mu_{Bi}(y)\big) \wedge \mu_{Ci}(z)$.

Таблиця 8.4

Фазифікація лінгвістичних змінних керування роботою парового кола

		Значення змінної на шкалі												
		–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6
Значення лінгвістичної змінної	PB											0,3	0,7	1
	PM									0,3	0,7	1	0,7	0,3
	PS							0,3	0,7	1	0,7	0,3		
	PO						0,3	1	0,7	0,3				
	NO					0,3	0,7	1	0,3					
	NS			0,3	0,7	1	0,7	0,3						
	NM	0,3	0,7	1	0,7	0,3								
	NB	1	0,7	0,3										

Сукупності всіх правил відповідає нечітке відношення, тобто

$$R = \bigcup_{i=1}^{15} R_i$$

а його функція належності

$$\mu_R(x,y,z) = \bigvee_{i=1}^{15} \mu_{Ri}\big((x,y),z\big).$$

Якщо задано значення A', B' вхідних змінних, то керувальний вплив C' визначають на основі такого композиційного правила виведення:

$$C' = (A' \times B') \circ R,$$

де ¤ – оператор максимінної композиції.

Функція належності C' має такий вигляд:

$$\mu_{C'}(z) = \vee_{x \in X} \vee_{y \in Y} \big(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y)\big) \wedge \mu_R(x,y,z). \qquad (8.11)$$

Числове значення параметра z_0 (зміна тепла, що подається) розраховується при цьому за такої умови: $\mu_{C'}(z_0) = \max_z \mu_{C'}(z)$ (методом максимуму критерію) або за такою формулою (метод середнього центра мас):

$$z_0 = \frac{\sum_{n=1}^{N} \left(z_n \mu_{C'}(z_n)\right)}{\sum_{n=1}^{N} \left(\mu_{C'}(z_n)\right)}, \tag{8.12}$$

де N – кількість точок у множині Z (у даному випадку $N = 15$, за кількістю правил, що перевіряються).

8.5.2. Модель системи автоматичного керування двигуном ліфта

Система керування пуском ліфта має забезпечувати такі умови:

– пуск без ривка з прискоренням, близьким до рівномірного;

– переміщення кабіни з постійною швидкістю незалежно від напрямку руху та навантаження в межах нормованого.

Об’єкт керування (механічну частину ліфта) описано двома передатними функціями, а саме:

– $W_1 = \dfrac{K}{Tp+1}$ – це аперіодична ланка, яка показує інерційність ротора двигуна, де K – коефіцієнт передачі, T – стала часу механічної системи двигуна;

– $W_2 = e^{-p\tau}$, тобто це ланка запізнення, що описує передачу зусилля вздовж тросів від двигуна до рухомих частин (кабіни й противаги).

Тут і далі p – оператор Лапласа.

У традиційній системі автоматичного керування використано лінійний безперервний пропорційно-інтегральний (ПІ) регулятор, функцію якого з урахуванням змінної похибки регулювання: $\varepsilon(t) = Y(t) - \widehat{Y}(t)$, описано диференційним рівнянням, тобто

$$C(t) = K_1 \cdot \varepsilon(t) + K_0 \int_0^t \varepsilon(t) \cdot dt, \tag{8.13}$$

або в операторній формі

$$W(p) = K_1 + \frac{K_0}{p}. \tag{8.14}$$

Значення коефіцієнтів регулятора залежно від обраного критерію оптимальності його налаштування зведено в табл. 8.5.

Таблиця 8.5

Можливі налаштування ПІ-регулятора керування роботою двигуна ліфта

Критерій оптимальності	Модульний оптимум (перерегулювання неприпустиме)	Симетричний оптимум (перерегулювання не більше 20 %)	Мінімальний час регулювання (перерегулювання не обмежене)
Пропорційна складова	$K_1 = \dfrac{0{,}6 \cdot T}{K \cdot \tau}$,	$K_1 = \dfrac{0{,}7 \cdot T}{K \cdot \tau}$,	$K_1 = \dfrac{T}{K \cdot \tau}$,
Інтегральна складова	$K_0 = \dfrac{1}{K \cdot \tau}$	$K_0 = \dfrac{1}{K \cdot \tau}$	$K_0 = \dfrac{1}{K \cdot \tau}$

Структурну схему замкненої системи керування швидкістю привідного двигуна ліфта з урахуванням параметрів розробленої моделі наведено на рис. 8.13, де використано такі позначення: $Y_{зад}$ – задана швидкість $\widehat{Y}(t)$; Y – реальна швидкість $Y(t)$; $F(t)$ – навантаження; C – керувальний вплив $C(t)$ на об’єкт у вигляді двох послідовних ланок.

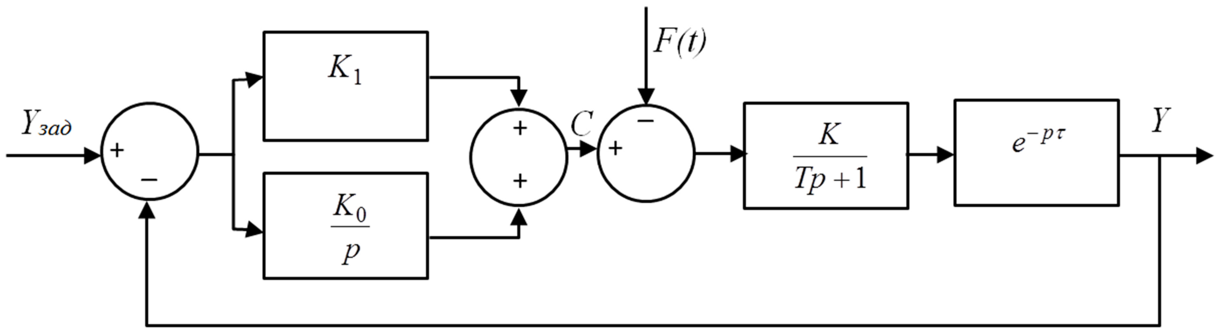


Рис. 8.13. Структурна схема системи автоматизованого керування роботою двигуна ліфта з ПІ-регулятором

Аби замінити ПІ-регулятор швидкості нечітким на базі нейронної мережі ANFIS, використаємо не диференційне рівняння регулятора, а його рівняння в різницевій формі, де замість миттєвого керувального впливу C будемо розглядати зміну цього впливу на наступному кроці, тобто $\Delta C_t = C_t - C_{t-1}$.

Тоді вираз (8.14) набуває вигляду різницевого рівняння, а саме:

$$\Delta C_t = k_d \cdot \Delta\varepsilon_t + k_p \cdot \Delta t \cdot \varepsilon_t = k_d \cdot \left(Y_t - \widehat{Y}_t - Y_{t-1} + \widehat{Y}_{t-1}\right) + k_p \cdot \Delta t \cdot \left(Y_t - \widehat{Y}_t\right). \quad (8.15)$$

Таким чином, для отримання значення вихідної змінної Δc_t відповідно до значень вхідних змінних «миттєва помилка регулювання» ε_t та «зміна миттєвої помилки регулювання» $\Delta\varepsilon_t$ може бути синтезований нечіткий регулятор на базі нейронної мережі ANFIS, еквівалентний ПІ-регулятору, але з набагато більшими можливостями, адже його параметрами, замість констант, виступає цілий набір правил, кожне з яких буде визначати нечітку множину керувального впливу.

Описану заміну виконуємо таким чином:

1) Поділяємо діапазони можливої варіації вхідних змінних, наприклад, на сім трикутних термів (NB – від'ємне велике; NM – від'ємне середнє; NS – від'ємне мале; ZE – близьке до нуля; PS – додатне мале; PM – додатне середнє; PB – додатне велике). Діапазон варіації вхідних змінних має відповідати обраному закону роботи ПІ-регулятора і встановлюється в таких межах: $x_1 \in \left[-\frac{1}{K_1 \cdot \tau}; \frac{1}{K_1 \cdot \tau} \right]$ для пропорційної частини (стосовно входу $\Delta\varepsilon_t$) та $x_2 \in \left[-\frac{1}{K_0 \cdot \tau}; \frac{1}{K_0 \cdot \tau} \right]$ для інтегральної (стосовно входу ε_t), де K_1 та K_0 – оптимальні налаштування пропорційної та інтегральної частин ПІ-регулятора відповідно до обраного критерію оптимальності (табл. 8.5).

2) Поділяємо діапазон вихідної змінної на таку саму кількість термів, при цьому ліпше, аби вони не перетиналися. Це підвищить точність регулювання. Діапазон фазифікації для значень вихідної змінної встановлюємо такий: $c \in \left\lfloor -\alpha C_{\max}^{PI}; \alpha C_{\max}^{PI} \right\rfloor$, де α – коефіцієнт, що обирається в межах [1,1…2], з огляду на те, що його менші значення відповідають більш плавному регулюванню, але підвищують тривалість перехідного процесу, тоді як більші значення сприяють прискоренню перехідного процесу з одночасним підвищенням коливальності та перерегулювання.

3) Сформуємо базу знань нечіткого регулятора у вигляді набору правил для всіх можливих випадків поєднання вхідних та вихідної змінних. Лінгвістичні правила роботи ПІ-подібного нечіткого регулятора наведено в табл. 8.6.

Таблиця 8.6

База знань нечіткого регулятора системи керування ліфтом

Зміна керувального впливу Δc_t		Миттєва помилка регулювання, ε_t						
		NB	NM	NS	ZE	PS	PM	PB
Зміна миттєвої помилки регулювання $\Delta\varepsilon_t$	NB	NB	NB	NB	NB	NM	NS	ZE
	NM	NB	NB	NB	NM	NS	ZE	PS
	NS	NB	NB	NM	NS	ZE	PS	PM
	ZE	NB	NM	NS	ZE	PS	PM	PB
	PS	NM	NS	ZE	PS	PM	PB	PB
	PM	NS	ZE	PS	PM	PB	PB	PB
	PB	ZE	PS	PM	PB	PB	PB	PB

4) Проводимо навчання регулятора, використовуючи різні керувальні впливи (пуск, зупинка двигуна, зміна навантаження в русі, у статиці) на базі системи з ПІ-регулятором для встановлення найкращих налаштувань нейро-нечіткого регулятора. Зберігаємо оптимальні значення налаштувань.

Загалом, у реальних умовах, коли регулювання роботи об’єкта здійснюється не за допомогою двох констант, а на базі набору із семи діапазонів керувального впливу (з урахуванням 49 поєднань значень вхідних змінних), застосування нечіткого регулятора для даної задачі дозволяє зменшити динамічну помилку на 25–40 %, час регулювання – у 1,5–3 рази без істотного перерегулювання.

8.6. Сфери, у яких застосовують нечітке керування

Нечітке керування виявляється особливо корисним, коли досліджувані процеси занадто складні для аналізу за допомогою загальноприйнятих методів чи коли доступні джерела інформації мають багато якісних і неточних ознак. Нечітка логіка, завдяки наявності ефективних засобів відображення невизначеності й неточності реального світу (і на якій базується нечітке керування) ближча до людського мислення і природних мов, ніж традиційні логічні системи. У загальних словах визначимо сфери застосування нечіткого керування.

Отже, методи нечіткого керування рекомендовані:

– для впливу на дуже складні процеси, коли створення простої математичної моделі неможливе;

– за наявності нелінійних процесів високого порядку;

– якщо необхідно виконувати обробку (лінгвістично сформульованих) експертами знань.

Водночас використовувати нечітке керування не рекомендовано в таких обставинах:

– якщо прийнятного результату можна досягти за допомогою загальної теорії керування;

– вже існує формалізована і адекватна математична модель процесу.

Насамкінець визначимо, робота яких реальних систем сьогодні неможлива без застосування методів нечіткого керування:

– використання Агентством космічних досліджень (NASA) нечіткої логіки в маневрах стикування літальних апаратів;

– автоматичне керування воротами шлюзів на гідроелектростанції;

– вибір ракурсу знімання при телетрансляції спортивних подій;

– ефективне й стабільне керування роботою автомобільних двигунів;

– вибір економічних показників швидкості автомобіля;

– системи прогнозування землетрусів;

– діагностика раку в медицині;

– розпізнавання рукописних символів у нотатках кишенькових комп'ютерів;

– розпізнавання руху зображення у відеокамерах;

– автоматичне керування роботою двигунів пилососів з визначенням типу поверхні та ступеня її засміченості;

– однокнопкове керування роботою пральної машини;

– навігація та курсове керування польотами гелікоптерів;

– керування швидкістю ліній виробництва сталі з контролем температури плавлення;

– керування функціями електропоїздів метрополітену для підвищення точності зупинки та економії енергії;

– оптимізація витрат пального в автомобілях і мотоциклах;

– підвищення чутливості електронних засобів керування ліфтами;

– підвищення безпеки функціонування ядерних реакторів на АЕС.

Висновки

Нечітке керування – один з актуальних напрямів використання нечітких множин, а також механізму нечіткого логічного виведення на практиці. За допомогою нечітких множин можна моделювати поведінку особи, що приймає рішення в антропотехнічних системах, та поліпшувати показники систем автоматичного й автоматизованого керування за рахунок підвищення точності моделей процесів.

Нечітка множина може застосовуватися для опису об’єкта керування або середовища, але більш сучасним є підхід, в основі якого використання нечіткого регулятора, котрий формує вплив на об’єкт керування з урахуванням нечітких правил.

Застосувавши для розбиття області припустимих значень вхідних і вихідних параметрів регулятора на нечіткі множини та встановивши між ними відповідність, можна створити базу правил, за допомогою якої формуватиметься автоматичне логічне виведення контролера.

Нечіткі контролери складаються з блока фазифікації, формування логічного виведення і блока дефазифікації для отримання керувального впливу. У ролі кожного з блоків можуть розглядатися різні функції, що впливає на якість керування процесами в системі.

Нечіткий контролер з кількома вхідними змінними і однією вихідною може бути нейронною мережею прямого поширення, де вхідний, прихований та вихідний шари відповідають значенням вхідних змінних, правилам нечіткого виведення та вихідній змінній, а функції належності вхідного та вихідного шарів – ваговим коефіцієнтам. За рахунок навчання останніх можна отримати оптимальні згідно з обраним критерієм налаштування системи нейронечіткого керування.

Питання, які розглянуто в цьому розділі, також висвітлено в літературі [45, 46, 52, 54, 56, 60, 67, 73, 86, 90].

Контрольні питання

1. Дайте визначення поняття системи керування.
2. Який сенс вкладають у поняття входу і виходу системи?
3. Визначте поняття об’єкта керування і керувального пристрою. Як вони взаємодіють?
4. Що являє собою зворотний зв’язок у системі керування? Яка його функція?
5. Які основні класифікації систем керування ви знаєте?
6. У чому полягає алгоритм синтезу системи керування?
7. Який тип керування називається нечітким? У яких випадках його застосовують?
8. У яких випадках використовувати нечітке керування не бажано (не рекомендовано)?

9. Яку форму функції належності використано в контролері Мамдані? Чому це зручно?

10. Чи мають бути нечіткі множини, що описують вхідні змінні, симетричними? Обґрунтуйте відповідь.

11. Якщо вхід системи описано трьома змінними, визначеними через п’ять термів кожна, то яка максимальна кількість правил має бути в базі знань для роботи контролера такої системи керування?

12. Чи завжди необхідно вводити всі можливі правила для опису роботи нечіткого контролера?

13. Яка послідовність операцій при обчисленні керувального впливу з використанням регулятора Мамдані?

14. Які ви знаєте методи дефазифікації керувального впливу? У чому полягають їхні переваги й недоліки?

15. За яких умов можливе отримання коректного вихідного сигналу в нечіткому регуляторі?

16. Які дії передбачені в системі нечіткого керування в разі виникнення двох або більше рішень?

17. У чому полягає перевага використання нейронної мережі в ролі регулятора? Які це створює можливості?

18. Яка мінімальна кількість параметрів необхідна для опису функції належності в процесі фазифікації вхідних сигналів?

19. Скільки екстремумів має апроксимаційна функція Цукамото? Яка її перевага?

20. Яким чином працює дефазифікатор нейронечіткого контролера? Яку роль відіграє функція належності вихідної змінної?

21. Скільки правил виведення необхідно, аби запрограмувати нечіткий контролер на базі нейронної мережі?

22. У чому полягає навчання нейронечіткого контролера?

Завдання до розділу 8

1. Навести приклад системи автоматичного керування, де опис об’єкта має вигляд нечітких визначень.

2. Навести приклад системи автоматизованого керування, де може бути використана нечітка множина в ролі моделі прийняття рішень.

3. Змоделювати систему керування роботою парового котла на базі опису й правил, викладених у розділі 8.5.1. Яка максимальна кількість правил спрацьовує одночасно (дає на виході ненульове значення)? Чи є суттєвою різниця в разі використання методів максимуму критерію та центра мас при дефазифікації?

4. Змоделювати систему керування роботою парового котла з п. 3, замінивши систему фазифікації, наведену в таблиці 8.4, набором із 9 рівномірно

розподілених на інтервалі трикутних чисел (аналогічно контролеру Мамдані з розділу 8.3), оцінити якість регулювання. Пояснити результат.

5. Об’єкт керування описується аперіодичною ланкою, коефіцієнт підсилення якої $K = 2$, часова константа $T = 1{,}5$ с, а також ланкою, чисте запізнення якої $\tau = 0{,}1$ с. Використовуючи налаштування на перехідний процес без перерегулювання, розрахувати параметри пропорційно-інтегрального (ПІ) регулятора. Провести імітаційне моделювання замкненої системи керування.

6. Виконати завдання відповідно до умов п. 5, використовуючи налаштування ПІ-регулятора з перерегулюванням, яке не перевищує 20 % (налаштування на модульний оптимум).

7. Виконати завдання відповідно до умов п. 5, використовуючи налаштування ПІ-регулятора на мінімум часу перехідного процесу (налаштування на симетричний оптимум).

8. Об’єкт керування описується аперіодичною ланкою, коефіцієнт підсилення якої $K = 1{,}2$, а часова константа $T = 1{,}8$ с, а також ланкою, чисте запізнення якої $\tau = 0{,}05$ с. Синтезувати нечіткий регулятор Мамдані, використовуючи по 7 рівнів значень статичної та динамічної похибки. Визначити вихідний діапазон нечіткої множини сигналу керування, беручи до уваги налаштування на перехідний процес без перерегулювання.

9. Виконати завдання відповідно до умов п. 8, використовуючи налаштування нечіткого регулятора з перерегулюванням, яке не перевищує 20 %.

10. Виконати завдання відповідно до умов п. 8, використовуючи налаштування нечіткого регулятора на мінімальний час перехідного процесу (налаштування на симетричний оптимум).

11. Роботу системи автоматичного керування з аналоговим регулятором задано відповідно до навантажувальної діаграми (у вигляді таблиці, яку видає викладач). Визначити оптимальну кількість правил нечіткого логічного виведення та синтезувати нечіткий регулятор з нейронною мережею.

12. Роботу системи автоматичного керування задано у вигляді системи правил. Запропонувати алгоритм синтезу нейронечіткого регулятора та його навчання.

РОЗДІЛ 9

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Мета розділу: вивчення методів моделювання прикладних задач із застосуванням теорії нечітких множин, розв'язування прикладних задач.

9.1. Задача вибору оптимального дебіту свердловини (підхід Беллмана – Заде)

Розглянемо задачу вибору оптимального дебіту свердловини, описану в літературі [6].

Відомо, що оптимальний дебіт газовидобувної свердловини має бути близьким до 1,2 млн м^3 на добу і перевищувати об'єм 0,8 млн м^3 на добу. Необхідно визначити оптимальний дебіт свердловини, враховуючи ці вимоги.

Опишемо це завдання, як задачу досягнення нечітко визначеної мети. Нагадаємо, що в цьому разі мета й обмеження є рівноправними нечіткими множинами. Опишемо їх.

За мету візьмемо умову «дебіт свердловини має бути близьким до 1,2 млн м^3 газу на добу». Функцію належності цієї множини можна описати таким чином:

$$\mu_G(q) = \left[1 + 5(1,2 - q)^2\right]^{-1}. \tag{9.1}$$

Обмеження «дебіт свердловини має бути більшим за 0,8 млн м^3 на добу» може бути подано за допомогою такої функції належності:

$$\mu_C(q) = \begin{cases} \left[1 + 0,1(q - 0,8)^{-1}\right]^{-1}, & \text{коли } q \geq 0,8, \\ 0\,, \ \text{коли } q < 0,8. \end{cases} \tag{9.2}$$

У загальному випадку ці лінгвістичні обмеження можуть бути подані у вигляді однієї із функцій $\mu_A(x,a,b,c)$ (див. табл. 3.7). Тут характер функції залежить від трьох параметрів: c – визначає точку максимуму функції належності: $\mu_A(c) = 1$, коли $b > 0$, або мінімуму: $\mu_A(c) = 0$, якщо $b < 0$; a – розмах кривої; b – поведінка фронтів кривої.

Нечіткий розв'язок D із врахуванням мети G та обмеження C може бути описано такою функцією належності:

$$\mu_D(q) = \mu_{G \cap C}(q) = \mu_{G \cap C}(q) = \min\{\mu_G(q), \mu_C(q)\}. \tag{9.3}$$

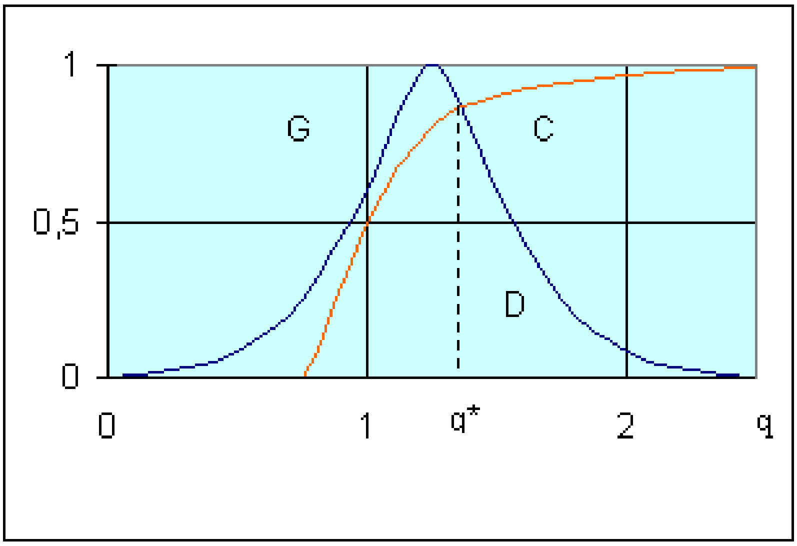


Рис. 9.1. Графічне подання нечіткого розв'язку задачі про вибір дебіту свердловини із врахуванням нечіткої мети *G* та обмеження *C* [6]

Легко бачити, що максимізувальний розв'язок задачі буде таким: $q^* = 1{,}36$ млн м^3 на добу, для нього функція належності набуває максимального значення.

9.2. Задача розподілу ринку банківських послуг на зони впливу

Постановка задачі. Припустимо, існує деяка множина банків: $Z = \{z_1, z_2, \dots z_m\}$. Відомо також множину: $X = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$, потенційних клієнтів банків. «Клієнтами» в цій задачі будемо вважати певні їхні категорії. Уведемо такі позначення:

Клієнти $X = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$:

x_1 – студенти (вікова категорія від 16 – 20 років);
x_2 – фізичні особи категорії від 21 – 35 років;
x_3 – фізичні особи категорії від 36 – 45 років;
x_4 – юридичні особи;
x_5 – пенсіонери.

Множина послуг, які надають банки, $Y = \{y_1, y_2, \dots y_p\}$, серед них

y_1 – ведення поточних рахунків;
y_2 – депозитні операції;
y_3 – операції із картковими продуктами;
y_4 – програми кредитування, які здійснюються в партнерстві з провідними вітчизняними та зарубіжними компаніями;
y_5 – різноманітні грошові перекази;
y_6 – операції з іноземною валютою;
y_7 – послуги інтернет-банкінгу;

y_8 – оплата комунальних платежів;

y_9 – поповнення рахунків за допомогою терміналів та зняття грошей з рахунків.

Для кожної з категорій клієнтів ступінь важливості тієї чи іншої послуги різна, крім того, усякий банк має певний рівень відповідності вимогам різних клієнтських груп.

Необхідно визначити зони впливу кожного банку на множині клієнтів.

Розв'язування

Для розв'язування поставленої задачі скористаємось методом, описаним у літературі [50]. Коротко розглянемо його.

Позначимо через $\Phi_R : X \times Y \to [0;1]$ функцію належності нечіткого бінарного відношення *R*, яке описує ступінь важливості послуги *y* за оцінкою клієнта *x* при визначенні ним переваги у виборі банку. Чим більше значення функції належності, тим важливішою є ознака.

Відношення *R* можна подати в такому вигляді:

$$
R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_p \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\Phi_R(x_1, y_1) & \Phi_R(x_1, y_2) & \dots & \Phi_R(x_1, y_p) \\
\Phi_R(x_2, y_1) & \Phi_R(x_2, y_2) & \dots & \Phi_R(x_2, y_p) \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\Phi_R(x_n, y_1) & \Phi_R(x_n, y_2) & \dots & \Phi_R(x_n, y_p)
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Ступінь належності або сумісності банку з відповідними критеріями описано матрицею $\pi : Y \times Z \to [0;1]$, тобто функцією належності нечіткого бінарного відношення *S*. Для всіх елементів $y \in Y$ і $z \in Z$ значення $\pi_s(y, z)$ означає ступінь належності або сумісності банку *Z* із відповідною послугою *Y*.

У матричній формі це відношення має такий вигляд:

$$
S = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_p \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \cdots & z_m \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\pi_s(y_1, z_1) & \pi_s(y_1, z_2) & \dots & \pi_s(y_1, z_m) \\
\pi_s(y_2, z_1) & \pi_s(y_2, z_2) & \dots & \pi_s(y_2, z_m) \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\pi_s(y_p, z_1) & \pi_s(y_p, z_2) & \dots & \pi_s(y_p, z_m)
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Складемо матрицю *T*, яка описує ступінь відповідності банку z_i вимогам клієнта x_j, а саме:

$$T = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{z}_1 & \mathrm{z}_2 & \dots & \mathrm{z}_\mathrm{m} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mu_{A_1}(x_1,z_1) & \mu_{A_2}(x_1,z_2) & \dots & \mu_{A_m}(x_1,z_m) \\ \mu_{A_1}(x_2,z_1) & \mu_{A_2}(x_2,z_2) & \dots & \mu_{A_m}(x_1,z_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{A_1}(x_n,z_1) & \mu_{A_2}(x_n,z_2) & \dots & \mu_{A_m}(x_n,z_m) \end{bmatrix} \end{array}.$$

Її елементи визначаються функцією належності такого вигляду:

$$\mu_A(x,z_i) = \frac{\sum\limits_y \Phi_R(x,y)\pi_s(y,z_i)}{\sum\limits_y \Phi_R(x,y)}, \qquad (9.4)$$

для всіх елементів $x \in X$, $y \in Y$ та $z \in Z$.

Сума $\sum\limits_y \Phi_R(x,y)$ дорівнює ступеню належності нечіткій підмножині, котра показує кількість найважливіших послуг *y*, котрі клієнт *x* використовує для оцінювання банку, а кожен елемент $\mu_{A_i}(x,z_i)$ можна тлумачити як зважений ступінь переваги клієнтом *x* банку z_i. Функція переваги, описана рівнянням (9.4), задовольняє визначення опуклої нечіткої підмножини, тобто

$$\mu_{A_1}[\lambda(x_1,z_i)+(1-\lambda)(x_2,z_i)] \geq \min[\mu_{A_i}(x_1,z_i),\mu_{A_i}(x_2,z_i)], \qquad (9.5)$$

для всіх елементів x_1 і x_2, всіх $z_i \in Z$ і всіх $\lambda \in [0;1]$.

Оскільки всі функції $\mu_{A_i}(x,z_i)$ опуклі, їх перерізи також будуть опуклими функціями. Отже, можна побудувати матрицю *W*, елементами якої будуть всі можливі перерізи, а саме:

$$W = \begin{bmatrix} \mu_{A_1}(x_1,z_1)\wedge\mu_{A_2}(x_1,z_2) & & \mu_{A_{m-1}}(x_1,z_{m-1})\wedge\mu_{A_m}(x_1,z_m) \\ \mu_{A_1}(x_2,z_1)\wedge\mu_{A_2}(x_2,z_2) & & \mu_{A_{m-1}}(x_2,z_{m-1})\wedge\mu_{A_m}(x_2,z_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu_{A_1}(x_n,z_1)\wedge\mu_{A_2}(x_n,z_2) & & \mu_{A_{m-1}}(x_2,z_{m-1})\wedge\mu_{A_m}(x_2,z_m) \end{bmatrix}. \qquad (9.6)$$

Перекривання зон впливу окремих банків швидше за все можна вважати загальним феноменом, ніж винятком, у цій моделі поріг розділення таких зон можна визначити за такою умовою:

$$l > \min_{ij}\max_x \min[\mu_{A_i}(x,z_i),\mu_{A_j}(x,z_j)]. \qquad (9.7)$$

Якщо поріг l вибраний, то зона впливу альтернативних банків $M_i, i = 1,2,...,m$ описується такою рівневою множиною:

$$M_i = \{x \mid \mu_{A_i}(x) \geq \min_{ij} \max_{x} \min[\mu_{A_i}(x, z_i), \mu_{A_j}(x, z_j)]\} \quad (9.8)$$

для всіх елементів $x \in M_i$.

Тепер застосуємо описану методику для розв’язування поставленої задачі.

Функція належності нечіткого бінарного відношення *R*, яке описує ступінь важливості послуги y_j за оцінкою клієнта x_i при визначенні ним переваги банку, залежно від категорії клієнтів була визначена методом експертних оцінок і подана у вигляді матриці (див. табл. 9.1).

Таблиця 9.1

Функція належності нечіткого бінарного відношення *R*

Клієнт	Послуга								
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
x_1	0,3	0,1	0,8	0,3	0,2	0,1	0,7	0	1
x_2	0,4	0,6	0,9	0,7	0,8	0,5	0,7	0,8	1
x_3	0,4	0,8	1	0,7	0,7	0,4	0,5	0,9	1
x_4	0,8	1	1	0,8	1	0,8	0,9	0,9	1
x_5	0,2	0,2	0,6	0,4	0,6	0,2	0,1	1	0,8

Функція належності нечіткого бінарного відношення *S*, яке описує ступінь сумісності банку z_j з відповідними критеріями (послугами) y_j, була визначена у вигляді, поданому в табл. 9.2.

Таблиця 9.2

Функція належності нечіткого бінарного відношення *S*

Критерій (послуга)	Банк					
	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
y_1	0,7	0,9	0,8	0,6	0,7	0,7
y_2	0,7	0,9	0,8	0,4	0,5	0,5
y_3	0,8	1	0,9	0,7	0,7	0,6
y_4	0,6	0,9	0,7	0,4	0,5	0,7
y_5	0,9	0,9	0,9	0,7	0,7	0,8
y_6	0,8	1	0,9	0,7	0,6	0,7
y_7	0	1	0,7	0,2	0,3	0,7
y_8	0,9	0,8	0,8	0,4	0,5	0,8
y_9	0,8	1	0,8	0,7	0,7	0,7

Тепер за формулами (9.4) обчислимо матрицю T – ступінь відповідності банку z_j вимогам клієнта x_i. Результати обчислень зведено в табл. 9.3.

Таблиця 9.3

Ступінь відповідності банку z_j вимогам клієнта x_i (матриця *T*)

Клієнт	Банк					
	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
x_1	0,617	0,974	0,803	0,557	0,594	0,677
x_2	0,700	0,936	0,813	0,541	0,583	0,692
x_3	0,722	0,931	0,814	0,542	0,588	0,684
x_4	0,694	0,934	0,813	0,537	0,580	0,687
x_5	0,790	0,917	0,822	0,566	0,607	0,715

Далі обчислимо матрицю W (табл. 9.4).

З огляду на дані табл. 9.4 визначимо мінімальний поріг розділення множини клієнтів на зони впливу банків. Він дорівнює 0,537.

Тепер, беручи до уваги дані матриці *T* (табл. 9.3), запишемо ці зони для кожного із банків, а саме:

$$M_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},\ M_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},\ M_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},$$

$$M_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\},\ M_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},\ M_6 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}.$$

Виходячи з умови (9.7), виберемо поріг, тобто $l = 0{,}588$. Тоді зони впливу банків будуть такими:

$$M_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},\ M_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},\ M_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},$$

$$M_4 = \{\},\ M_5 = \{x_1, x_5\},\ M_6 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}.$$

Якщо скористатися іншим значенням, наприклад, $l = 0{,}7$, то маємо такий результат:

$$M_1 = \{x_3, x_5\},\ M_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},\ M_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},$$

$$M_4 = \{\},\ M_5 = \{\},\ M_6 = \{x_5\}.$$

Отже, результати розрахунків показують, що серед усіх банків з огляду на збільшення порогових значень, що зумовлюють розділення множин, тільки два залишаються конкурентоспроможними, оскільки ступінь їхнього впливу на множину споживачів банківських послуг найвищий.

Зауважимо, що відповідність банку потребам споживача обчислювалась з урахуванням множини ознак і була отримана у вигляді нечіткої оцінки.

Розглянуту вище задачу та описаний метод її розв’язування можна застосувати в маркетингу будь-яких комерційних організацій. Завдяки цьому з’являється можливість враховувати вимоги кожного клієнта, важливість послуг для конкретного сегмента споживачів і ступінь задоволення їхніх вимог, а відтак, оцінити конкурентоспроможність організації та виявити можливості для її подальшого розвитку.

Таблиця 9.4

Перекривання зон впливу банків (матриця W)

0,617	0,617	0,557	0,594	0,617	0,803	0,557	0,594	0,677	0,557	0,594	0,677	0,557	0,557	0,594
0,7	0,7	0,541	0,583	0,692	0,813	0,541	0,583	0,692	0,541	0,583	0,692	0,541	0,541	0,583
0,722	0,722	0,542	0,588	0,684	0,814	0,542	0,588	0,684	0,542	0,588	0,684	0,542	0,542	0,588
0,694	0,694	0,537	0,58	0,687	0,813	0,537	0,58	0,687	0,537	0,58	0,687	0,537	0,537	0,58
0,79	0,79	0,566	0,607	0,715	0,822	0,566	0,607	0,715	0,566	0,607	0,715	0,566	0,566	0,607

9.3. Задача визначення оптимальної рецептури закладної суміші для заповнення гірничих виробок

9.3.1. Постановка задачі та побудова математичної моделі

Закладні роботи докорінно змінюють технологію видобування рудної сировини підземним способом, унаслідок чого значно поліпшуються економічні та екологічні показники виробничої діяльності підприємства. Основна проблема в забезпеченні якості заповнення виробленого простору – це виготовлення твердіючої закладної суміші з потрібними технологічними та фізико-хімічними параметрами, що пов'язане з необхідністю вирішення питання про мінімізацію витрат на виробництво цієї суміші.

На ЗАТ «Запорізький ЗРК» в процесі видобутку залізної руди виконують закладання вироблених просторів. При цьому інертним заповнювачем для приготування закладної суміші слугують відходи енергетичного, металургійного й гірничого виробництва, а саме: вапняно-доломітний матеріал, пісок, щебінь, золошлак, порода тощо. Враховуючи значну частку витрат на закладні роботи у собівартості залізної руди, необхідно визначити оптимальну структуру закладної суміші за її складовими. Керування цією структурою буде забезпечувати мінімальну вартість робіт за умови належної міцності закладання.

Сформулюємо розв'язувану задачу в загальному вигляді.

Постановка задачі. Припустимо наявність n можливих компонентів, з яких формується закладна суміш. Відомі норми вмісту компонентів, ціна кожного з них і вимоги до міцності закладної суміші. Необхідно визначити склад суміші, який відповідає заданим нормам вмісту компонентів, вимогам міцності, маючи при цьому найнижчу собівартість.

Для побудови математичної моделі позначимо вихідні величини таким чином: x_i – частка i-го компонента суміші ($i = 1, n$); b_j – норма вмісту компонентів закладної суміші ($j = 1, m$); a_{ij} – задане співвідношення між компонентами суміші; c_i – ціна однієї тонни i-го компонента суміші. Тоді вимога мінімізації сумарної вартості 1 м^3 закладної суміші може бути описана в такому вигляді:

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min. \qquad (9.9)$$

Обмеження на склад суміші в загальному вигляді можна сформулювати таким чином:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i = b_j \ \ (j = 1, m); \qquad (9.10)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \tag{9.11}$$

Функцію, що описує міцність суміші, позначимо через $\varphi(x)$. У такому разі вимоги міцності можна записати у вигляді такої нерівності:

$$\alpha \le \varphi(x) \le \beta, \tag{9.12}$$

де α, β – відповідно нижня та верхня межа припустимих значень міцності закладної суміші.

Отже, загальна економіко-математична модель задачі оптимізації структури та вартості закладної суміші має такий вигляд:

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min, \tag{9.13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i, \quad j = \overline{1,m}; \tag{9.14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \; x_i \ge 0 \;\; i = \overline{1,n}; \tag{9.15}$$

$$\alpha \le \varphi(x) \le \beta. \tag{9.16}$$

Аналізуючи цю модель, можна зробити кілька зауважень.

По-перше, параметри задач математичного програмування залежать від багатьох факторів, які важко врахувати в моделі через її значне ускладнення та підвищення розмірності при спробі взяти до уваги всі необхідні умови. Наприклад, у нашому випадку, структура, а отже, й міцність закладної суміші залежать від того, які саме в'язкі матеріали та інертні заповнювачі будуть використані для її приготування, маємо на увазі відходи енергетичного, металургійного або гірничого виробництва.

По-друге, величину кожного уведеного в модель фактора неможливо виміряти із заданим рівнем точності, а деякі з них можуть бути описані тільки якісно.

І по-третє, обмеження на вміст компонентів суміші в реальності також не є точно визначеними, оскільки точні дані про пропорції компонентів закладної суміші відсутні. Наприклад, вміст вапняно-доломітного матеріалу має становити приблизно 35 % від інертних компонентів.

Враховуючи це, можна зробити висновок, що рішення про вибір структури закладної суміші приймається в умовах суттєвої невизначеності й побудована модель (9.13) – (9.16) буде дуже жорсткою, отже, занадто огрубляти дійсну ситуацію. Тому для врахування неточної інформації, яка включена в модель, доцільно використовувати математичний апарат теорії нечітких множин [66, 67].

З використанням термінів нечіткого математичного програмування задачу (9.13) – (9.16) можна записати таким чином:

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min ; \tag{9.17}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \cong b_i , \quad j = \overline{1,m} ; \tag{9.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 , \; x_i \geq 0 , \; i = \overline{1,n} ; \tag{9.20}$$

$$\varphi(x) \cong \eta , \tag{9.21}$$

де η – наближене значення міцності, символ $\cong$ означає нечітке виконання відповідної рівності, тобто можливість її порушення деякою мірою.

Функцію $\varphi(x)$, що описує міцність закладної суміші, було визначено за результатами експериментальних досліджень. Вона матиме такий вигляд:

$$\varphi (x) = 467{,}21x_1 + 380{,}53x_3 - 54{,}31x_5 + 87{,}65x_6 - 120{,}86x_9 - 23{,}25. \tag{9.22}$$

Тепер можна конкретизувати постановку задачі визначення оптимальної структури твердіючої суміші для закладних робіт на Запорізькому ЗРК.

Необхідно визначити склад суміші, який забезпечить її мінімальну вартість за умов дотримання встановленої міцності. При цьому міцність суміші має приблизно дорівнювати 40 кгс/см^2, води в ній має бути близько 20 %, цементу – 5 %, щебеню та золошлаку (разом) – 22 % від інертних компонентів, породи – 35 % і піску 18 % від інертних компонентів суміші.

Конкретизована економіко-математична модель оптимізації складу та вартості закладної суміші виглядає таким чином:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & 14{,}39x_1 + 363{,}45x_2 + 20{,}35x_3 + 30{,}76x_4 + 25{,}63x_5 + \\ & + 13{,}99x_6 + 1{,}2x_7 + 9x_8 + 6x_9 + 15x_{10} \to \min \end{aligned} \tag{9.23}$$

за умови виконання таких обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{10} x_i = 1, \\ 467{,}21x_1 + 380{,}53x_2 - 54{,}31x_5 + 87{,}65x_6 - 120{,}86x_9 - 23{,}25 \cong 40, \\ x_{10} = 0{,}2, \\ x_5 + x_6 - 0{,}22\left(x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9\right) \cong 0, \\ x_2 = 0{,}05, \\ x_7 - 0{,}35\left(x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9\right) \cong 0, \\ x_4 - 0{,}18\left(x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9\right) \cong 0, \\ x_i \geq 0, \; i = \overline{1,10} \end{cases} \tag{9.24}$$

де $x_1, x_2, \dots x_{10}$ – частки в закладній суміші граншлаку, цементу, вапняково-доломітного матеріалу, піску, щебеню не поіменованого, золошлаку, породи, суглинку, глини та води відповідно. Неповну визначеність складу суміші в обмеженнях моделі (9.24) позначено символом ($\cong$).

Кожне нечітке обмеження описується за допомогою функції належності $\mu(x)$, котра показує якою мірою порушення цього обмеження припустиме. Інакше кажучи, чим більше значення функції $\mu(x)$, тим більш припустимим є рішення.

Конкретний вигляд функцій належності кожного з параметрів моделі x_i був визначений шляхом експертних оцінок на основі додаткових припущень про властивості цих функцій та з урахуванням реальних умов закладання виробленого простору і практики ведення цих робіт на шахтах ЗЗРК. Так, функція належності для нечітких обмежень щодо міцності закладної суміші в умовах задачі має такий вигляд:

$$\mu_{C_1}(x) = \begin{cases} 1, & 35 \le \varphi(x) \le 45, \\ 0{,}8 & 30 \le \varphi(x) \le 50, \\ 0{,}5, & 25 \le \varphi(x) \le 55, \\ 0{,}2, & 20 \le \varphi(x) \le 60, \\ 0, & \varphi(x) < 20 \text{ або } \varphi(x) > 60. \end{cases} \tag{9.25}$$

Її графік показано на рис. 9.2.

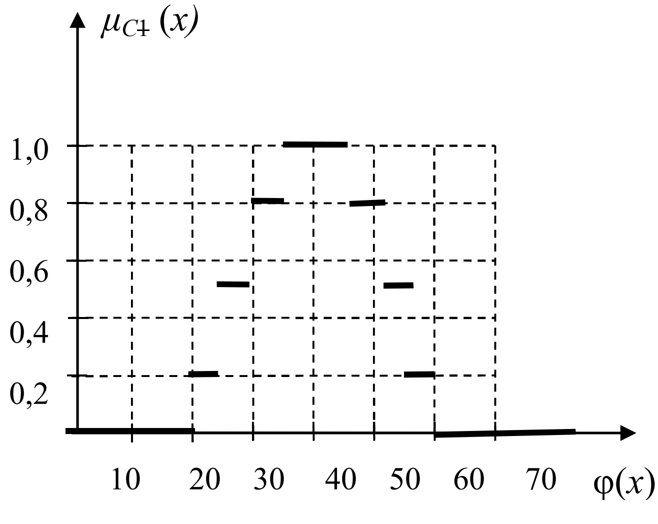


Рис. 9.2. Графік функції належності нечітких обмежень щодо міцності закладної суміші

Таким чином, коли ступінь належності $\lambda = 1$, то міцність суміші може коливатися в межах від 35 до 45; а якщо $\lambda = 0{,}8$ – то це інтервал (30; 50); $\lambda = 0{,}5$ – (25; 55); і якщо $\lambda = 0{,}2$, то від 20 до 60 кгс/см^2. Тож, чим меншим буде ступінь належності λ, тим вищий ступінь невизначеності міцності суміші. Аналогічно встановлено конкретний вигляд функцій належності інших обмежень моделі.

Обмеження на вміст води в суміші мають такий вигляд:

$$\mu_{C_2}(x)=\begin{cases} 1, \text{ коли } 0,19 \le x_{10} \le 0,21, \\ 0,8, \text{ коли } 0,18 \le x_{10} \le 0,22, \\ 0,5, \text{ коли } 0,17 \le x_{10} \le 0,23, \\ 0,2, \text{ коли } 0,16 \le x_{10} \le 0,24, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \tag{9.26}$$

Обмеження на вміст щебеню та золошлаку сформульоване таким чином:

$$\mu_{C_3}(x)=\begin{cases} 1, \text{ коли } 0,21\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_5+x_6 \le 0,23\sum_{i=3}^{9} x_i, \\ 0,8, \text{ коли } 0,20\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_5+x_6 \le 0,24\sum_{i=3}^{9} x_i, \\ 0,5, \text{ коли } 0,19\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_5+x_6 \le 0,25\sum_{i=3}^{9} x_i, \\ 0,2, \text{ коли } 0,18\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_5+x_6 \le 0,26\sum_{i=3}^{9} x_i, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \tag{9.27}$$

Вміст цементу обмежено за допомогою таких співвідношень:

$$\mu_{C_4}(x)=\begin{cases} 1, \text{ коли } 0,04 \le x_2 \le 0,06, \\ 0,8, \text{ коли } 0,035 \le x_2 \le 0,065, \\ 0,5, \text{ коли } 0,03 \le x_2 \le 0,07, \\ 0,2, \text{ коли } 0,025 \le x_2 \le 0,075, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \tag{9.28}$$

Нечітке обмеження на вміст породи описується функцією належності, яка подана нижче.

$$\mu_{C_5}(x) = \begin{cases} 1, \text{ коли } 0{,}34\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_7 \le 0{,}36\sum_{i=3}^{9} x_i, \\ 0{,}8, \text{ коли } 0{,}33\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_7 \le 0{,}37\sum_{i=3}^{9} x_i, \\ 0{,}5, \text{ коли } 0{,}32\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_7 \le 0{,}38\sum_{i=3}^{9} x_i, \\ 0{,}2, \text{ коли } 0{,}30\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_7 \le 0{,}4\sum_{i=3}^{9} x_i, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \tag{9.29}$$

І, нарешті, обмеження стосовно вмісту піску має таку функцію належності:

$$\mu_{C_6}(x) = \begin{cases} 1, \text{ коли } 0{,}17\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_4 \le 0{,}19\sum_{i=3}^{9} x_i, \\ 0{,}8, \text{ коли } 0{,}16\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_4 \le 0{,}20\sum_{i=3}^{9} x_i, \\ 0{,}5, \text{ коли } 0{,}15\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_4 \le 0{,}21\sum_{i=3}^{9} x_i, \\ 0{,}2, \text{ коли } 0{,}14\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_4 \le 0{,}22\sum_{i=3}^{9} x_i, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \tag{9.30}$$

Таким чином, модель задачі нечіткого математичного програмування описано повністю.

9.3.2. Вибір методу та розв'язування задачі

Сформульовану задачу (9.24) можна розв'язувати методами нечіткого математичного програмування (НМП), зокрема, методом розкладання на множини рівня (див. розділ 4.3).

Нагадаємо, що сутність цього методу полягає в тому, що вихідна задача нечіткого математичного програмування замінюється сукупністю звичайних (чітких) задач оптимізації, які відповідають множинам рівня нечіткої множини припустимих альтернатив вихідної задачі.

У випадку, коли нечіткі обмеження, а також критерій являють собою лінійні функції, після розкладання на множини рівня отримуємо кілька задач лінійного програмування, які можуть бути розв’язані стандартним симплекс-методом.

Нечіткий розв’язок задачі оптимізації будемо мати, об’єднавши рішення, отримані на кожній із множин рівня.

Отже, враховуючи вигляд конкретних функцій належності, розкладемо задачу на множини рівня.

Коли $\lambda = 1$, то маємо таку задачу:

$$f(x) = 14{,}39x_1 + 363{,}45x_2 + 20{,}35x_3 + 30{,}76x_4 + 25{,}63x_5 + 13{,}99x_6 + 1{,}2x_7 + \\ + 9x_8 + 6x_9 + 15x_{10} \to \min,$$

з огляду на подані нижче обмеження.

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 1,$$

$$\begin{aligned}
&467{,}21x_1 + 380{,}53x_2 - 54{,}31x_5 + 87{,}65x_6 - 120{,}86x_9 - 23{,}25 \le 45,\\
&467{,}21x_1 + 380{,}53x_2 - 54{,}31x_5 + 87{,}65x_6 - 120{,}86x_9 - 23{,}25 \ge 35,\\
&0{,}19 \le x_{10} \le 0{,}21,\\
&0{,}21\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_5 + x_6 \le 0{,}23\sum_{i=3}^{9} x_i,\\
&0{,}04 \le x_2 \le 0{,}06,\\
&0{,}34\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_7 \le 0{,}36\sum_{i=3}^{9} x_i,\\
&0{,}17\sum_{i=3}^{9} x_i, \le x_4 \le 0{,}19\sum_{i=3}^{9} x_i,\\
&x_i \ge 0,\ i = \overline{1{,}10}.
\end{aligned}$$

Це задача лінійного програмування і для її розв'язування можна використовувати стандартні пакети програм, наприклад, засіб «Пошук розв’язку» MS Excel.

Таким чином, маємо такий розв'язок: x_1 = 0,16; x_2 = 0,04; x_3 = 0; x_4 = 0,104; x_5 = 0; x_6 = 0,128; x_7 = 0,207; x_8 = 0; x_9 = 0,171; x_{10} = 0,19.

При цьому $f(x)$ = 25,95 грн/м^3, а $\varphi(x)$ = 35 кгс/см^2.

Коли $\lambda = 0{,}8$, то задача набуває такого вигляду:

$$f(x) = 14{,}39x_1 + 363{,}45x_2 + 20{,}35x_3 + 30{,}76x_4 + 25{,}63x_5 + 13{,}99x_6 + 1{,}2x_7 + \\ + 9x_8 + 6x_9 + 15x_{10} \to \min,$$

з урахуванням таких обмежень:

$$467,21x_1 + 380,53x_2 - 54,31x_5 + 87,65x_6 - 120,86x_9 - 23,25 \le 50,$$

$$467,21x_1 + 380,53x_2 - 54,31x_5 + 87,65x_6 - 120,86x_9 - 23,25 \ge 30,$$

$$0,18 \le x_{10} \le 0,22,$$

$$0,20\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_5 + x_6 \le 0,24\sum_{i=3}^{9} x_i,$$

$$0,035 \le x_2 \le 0,065,$$

$$0,33\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_7 \le 0,37\sum_{i=3}^{9} x_i,$$

$$0,16\sum_{i=3}^{9} x_i, \le x_4 \le 0,20\sum_{i=3}^{9} x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1;10}.$$

За результатами її розв'язування отримано такий результат: $x_1 = 0,164$; $x_2 = 0,03$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0,1$; $x_5 = 0$; $x_6 = 0,125$; $x_7 = 0,207$; $x_8 = 0$; $x_9 = 0,194$; $x_{10} = 0,18$. При цьому $f(x) = 22,21$ грн/м^3, а $\varphi(x) = 30$ кгс/см^2.

Коли $\lambda = 0,5$, то формулюємо таку задачу:

$$f(x) = 14,39x_1 + 363,45x_2 + 20,35x_3 + 30,76x_4 + 25,63x_5 + 13,99x_6 + 1,2x_7 +$$
$$+9x_8 + 6x_9 + 15x_{10} \to \min,$$

$$467,21x_1 + 380,53x_2 - 54,31x_5 + 87,65x_6 - 120,86x_9 - 23,25 \le 55,$$

$$467,21x_1 + 380,53x_2 - 54,31x_5 + 87,65x_6 - 120,86x_9 - 23,25 \ge 25,$$

$$0,17 \le x_{10} \le 0,23,$$

$$0,19\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_5 + x_6 \le 0,25\sum_{i=3}^{9} x_i,$$

$$0,03 \le x_2 \le 0,07,$$

$$0,32\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_7 \le 0,38\sum_{i=3}^{9} x_i,$$

$$0{,}15\sum_{i=3}^{9} x_i, \le x_4 \le 0{,}21\sum_{i=3}^{9} x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1{,}10}.$$

Розв'язок цієї задачі дає такі результати:

$x_1 = 0{,}167$; $x_2 = 0{,}02$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0{,}096$; $x_5 = 0$; $x_6 = 0{,}122$; $x_7 = 0{,}206$; $x_8 = 0$; $x_9 = 0{,}218$; $x_{10} = 0{,}17$. При цьому $f(x) = 19{,}88$ грн/м^3, а $\varphi(x) = 25$ кгс/см^2.

Коли $\lambda = 0{,}2$, то задача буде такою:

$$f(x) = 14{,}39x_1 + 363{,}45x_2 + 20{,}35x_3 + 30{,}76x_4 + 25{,}63x_5 + 13{,}99x_6 + 1{,}2x_7 +$$
$$+ 9x_8 + 6x_9 + 15x_{10} \to \min,$$

$$467{,}21x_1 + 380{,}53x_2 - 54{,}31x_5 + 87{,}65x_6 - 120{,}86x_9 - 23{,}25 \le 60,$$

$$467{,}21x_1 + 380{,}53x_2 - 54{,}31x_5 + 87{,}65x_6 - 120{,}86x_9 - 23{,}25 \ge 20,$$

$$0{,}16 \le x_{10} \le 0{,}24,$$

$$0{,}18\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_5 + x_6 \le 0{,}26\sum_{i=3}^{9} x_i,$$

$$0{,}025 \le x_2 \le 0{,}075,$$

$$0{,}30\sum_{i=3}^{9} x_i \le x_7 \le 0{,}40\sum_{i=3}^{9} x_i,$$

$$0{,}14\sum_{i=3}^{9} x_i, \le x_4 \le 0{,}22\sum_{i=3}^{9} x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1{,}10}.$$

Отриманий розв'язок має такий вигляд: $x_1 = 0{,}172$; $x_2 = 0{,}01$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0{,}092$; $x_5 = 0$; $x_6 = 0{,}118$; $x_7 = 0{,}197$; $x_8 = 0$; $x_9 = 0{,}25$; $x_{10} = 0{,}16$. При цьому $f(x) = 16{,}12$ грн /м^3, а $\varphi(x) = 20$ кгс/см^2.

Нечіткий розв'язок задачі визначення оптимальної структури закладної суміші показано в табл. 9.5.

Таблиця 9.5

Результати розв'язування задачі визначення оптимальної рецептури закладної суміші методом розкладання на множини рівня

Компоненти закладної суміші, %	Ступінь належності до нечіткого розв'язку			
	1	0,8	0,5	0,2
x_1 – граншлак	16	16,4	16,7	17,2
x_2 – цемент	4	3	2	1
x_3 – вапняково-доломітний матеріал	0	0	0	0
x_4 – пісок	10,4	10	9,6	9,2
x_5 – щебінь не поіменований	0	0	0	0
x_6 – золошлак	12,8	12,5	12,2	11,8
x_7 – порода	20,7	20,7	20,6	19,7
x_8 – суглинок	0	0	0	0
x_9 – глина	17,1	19,4	21,8	25
x_{10} – вода	19	18	17	16
$f(x)$ – вартість суміші, грн/м^3	25,95	22,21	19,88	16,12
$\varphi(x)$ – міцність суміші, кгс/см^2	35	30	25	20

9.3.3. Висновки

Аналіз даних табл. 9.5 свідчить про те, що зі зменшенням вартості суміші знижується і її міцність. Це, своєю чергою, зумовлено зменшенням вмісту цементу (з 4 до 1 %), вартість якого висока порівняно з іншими компонентами, а також збільшенням вмісту порівняно дешевої глини. Вибір конкретної структури суміші здійснюється особою, що приймає рішення, виходячи із конкретних умов задачі. Аналіз економічних результатів розв'язування цієї задачі можна знайти в літературі [69].

9.4. Керування запасами сировини на підприємстві в умовах нечітко визначеного попиту

9.4.1. Постановка задачі та побудова математичної моделі

Постановка задачі. На підприємстві для організації виробництва продукції, а саме: алюмінієвих сплавів, фероалюмінію, феротитану та феромангану, існує потреба в запасах сировини, але інформація про неї не повна. Тобто неможливо з високою точністю визначити необхідну кількість сировини й витрат на її зберігання для задоволення попиту на продукцію. Оскільки потреби й витрати носять коливальний характер, то вони можуть бути задані ОПР тільки інтервально (табл. 9.6).

Таблиця 9.6

Вихідні дані для розрахунку моделі керування запасами

Виробництво	Витрати на оформлення замовлення *K*, грн	Потреба в сировині *M*, т/міс	Витрати на зберігання *S*, грн/т
алюмінієвих сплавів	1200	[20; 35]	[50; 100]
фероалюмінію	1200	[17; 30]	[50; 100]
феротитану	1400	[15; 28]	[60; 120]
феромангану	1400	[12; 25]	[60; 120]

Ці дані отримані шляхом аналізу продажу продукції, статистики обсягу замовлень та кількості відвантаженої сировини зі складу, розрахованого плану виробництва, а також після консультації з менеджерами та комерційним директором. Нечіткість або неповноту інформації відображено за допомогою інтервально заданих потреб щодо сировини й витрат на її зберігання. Це викликано неспроможністю чітко визначити згадані параметри через коливання в попиті та фінансових можливостях підприємства.

Площа складу для зберігання сировини становить 1000 м^2, отже, склад може вміщувати до 500 т сировини. Необхідно визначити оптимальний обсяг замовлення на сировину, потрібну для виготовлення кожного виду продукції на склад підприємства, тривалість циклу й витрати на керування запасами (КЗ).

Для побудови математичної моделі зробимо такі припущення:

– попит на сировину сталий;

– поповнення запасів миттєве;

– дефіцит неприпустимий.

Тобто, вважаємо, що запаси рівномірно використовуються із сталою інтенсивністю попиту.

На основі зроблених припущень багатопродуктову модель керування запасами (КЗ) із обмеженням на місткість складського приміщення можна описати в такому вигляді [36]:

$$Z = \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{K_i M_i}{y_i} + \frac{S_i y_i}{2} \right) \to \min .$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} y_i \le V, \\ y_i > 0, \; i = \overline{1,4}, \end{cases} \tag{9.31}$$

де Z – сумарні витрати на зберігання сировини, грн/міс; K_i – витрати на оформлення замовлення сировини i-го виду, грн; M_i – обсяг потреби в запасі i-го виду, т/міс; S_i – витрати на зберігання 1т запасу i-го виду, грн/міс; y_1 – обсяг замовлення сировини для алюмінієвих сплавів, т; y_2 – обсяг замовлення сировини для фероалюмінію, т; y_3 – обсяг замовлення сировини для феротитану, т; y_4 – обсяг замовлення сировини для феромангану, т; V – максимальна місткість складського приміщення, т.

Сформульовану задачу з нечіткою цільовою функцією можна розв'язувати методами послідовної редукції, кусково-лінійної редукції та за допомогою інтервальної арифметики Каухера. Розглянемо кожен з них у застосуванні до розв'язування поставленої задачі.

9.4.2. Розв'язування задачі методом послідовної редукції

Метод послідовної редукції полягає у зведені вихідної нечіткої задачі до багатокритерійної і далі в пошуку компромісного розв'язку отриманої нелінійної задачі оптимізації [28].

Згідно з методом спочатку знайдемо значення цільових функцій, коли коефіцієнти набувають граничних значень (тобто дорівнюють числам на кінцях інтервалів). Отже, отримуємо такі задачі:

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{K_i M_{\min i}}{y_i} + \frac{S_{\min i} y_i}{2}\right) \to \min, \tag{9.32}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{4} y_i \le 500, \\ y_i > 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases} \tag{9.33}$$

$$Z_{\max} = \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{K_i M_{\max i}}{y_i} + \frac{S_{\max i} y_i}{2}\right) \to \min, \tag{9.34}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{4} y_i \le 500, \\ y_i > 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases} \tag{9.35}$$

Позначимо розв'язок задачі (9.32) – (9.33) через $y^*_{\min}$, а розв'язок задачі (9.34) – (9.35) через $y^*_{\max}$. Результати їх розв'язування записуємо у табл. 9.7.

Таблиця 9.7

Результати розв’язування задач з граничними значеннями параметрів

	Розв’язок задачі (9.32) – (9.33), $y^*_{\min}$	Розв’язок задачі (9.34) – (9.35), $y^*_{\max}$
Z	5984,8	11547,1
y_1	31	29
y_2	28,6	26,9
y_3	26,5	25,6
y_4	23,7	24,2
Сума	109,7	105,6

Знайдемо значення функцій за формулами (9.32) та (9.34), тобто

$$\overline{Z}_{\min} = Z_{\min}\left(y^*_{\max}\right) = 5992,$$

$$\overline{Z}_{\max} = Z_{\max}\left(y^*_{\min}\right) = 11561,6.$$

Користуючись формулами (4.27), (4.28), уведемо функції належності $f(y)$, які відображають ступінь задоволення ОПР досягнутими значеннями цільових функцій.

Позначимо через $\lambda(y)$ рівень задоволення ОПР отриманим розв’язком. Тоді компромісний розв’язок задачі може бути отримано за формулою (4.29) таким чином:

$$\lambda \to \max$$

$$\begin{cases} (5992 - 5984{,}8)\lambda + Z_{\min}(y) \le 5992, \\ (11561{,}6 - 11547{,}1)\lambda + Z_{\max}(y) \le 11561{,}6, \\ \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{4} y_i \le 500, \\ y_i > 0, i = \overline{1,4}, \\ 0 \le \lambda \le 1. \end{cases} \tag{9.36}$$

Результат розв’язування задачі буде мати такий вигляд: $\lambda = 0{,}75$; $y_1 = 30$; $y_2 = 27{,}7$; $y_3 = 24$; $y_4 = 30$.

За такого обсягу замовлення сировини оптимальні витрати, пов’язані із керуванням запасами, набувають значень в інтервалі [5986,6; 11550,7]. Рівень задоволеності ОПР отриманим розв’язком задачі становить 0,75, що є достатньо високим результатом.

Розрахуємо інтервали поповнення запасів, їх середні величини. Загальні результати розв'язування задачі подано в табл. 9.8.

Таблиця 9.8

Результати розв'язування задачі КЗ методом послідовної редукції

Вид сировини	Оптимальний обсяг замовлення, т	Тривалість циклу замовлення, міс	Середня тривалість циклу замовлення, днів
Алюмінієві сплави	30	[1,2; 1,5]	40,5
Фероалюміній	27,7	[0,9; 1,6]	37,5
Феротитан	26	[0,9; 1,7]	39
Фероманган	24	[0,96; 2]	44,4
Загальні витрати, грн		[5986,6; 11550,7]	
Середні загальні витрати, грн		8768,6	

9.4.3. Розв'язування задачі керування запасами сировини методом кусково-лінійної редукції

Застосування цього методу потребує визначення функцій належності кожного із нечітких параметрів задачі. Припустимо, що ОПР може надати інформацію про потребу в кожному виді сировини та про витрати на її зберігання і визначити ступінь належності кожного значення до нечітких множин «потреба у сировині» і «вартість зберігання сировини». На основі цих даних можна визначити множини рівня для нечітких параметрів, що описують потребу в кожному виді сировини і вартість її зберігання з урахуванням заданих ступенів належності α. Їх вигляд подано в табл. 9.9, 9.10. Графіки функцій належності зображено на рис. 9.3, 9.4.

Таблиця 9.9

Множини рівня нечітких параметрів, що описують потребу в сировині

№	Назва сировини	Ступінь належності				
		Supp (A)	α = 0,25	α = 0,5	α = 0,75	α = 1
1	Алюмінієві сплави	[20; 35]	[21; 34]	[22; 32]	[24; 30]	25
2	Фероалюміній	[17; 30]	[18; 28]	[19; 26]	[20; 25]	23
3	Феротитан	[15; 28]	[16; 27]	[17; 25]	[18; 24]	20
4	Фероманган	[12; 25]	[14; 24]	[15; 22]	[16; 21]	18

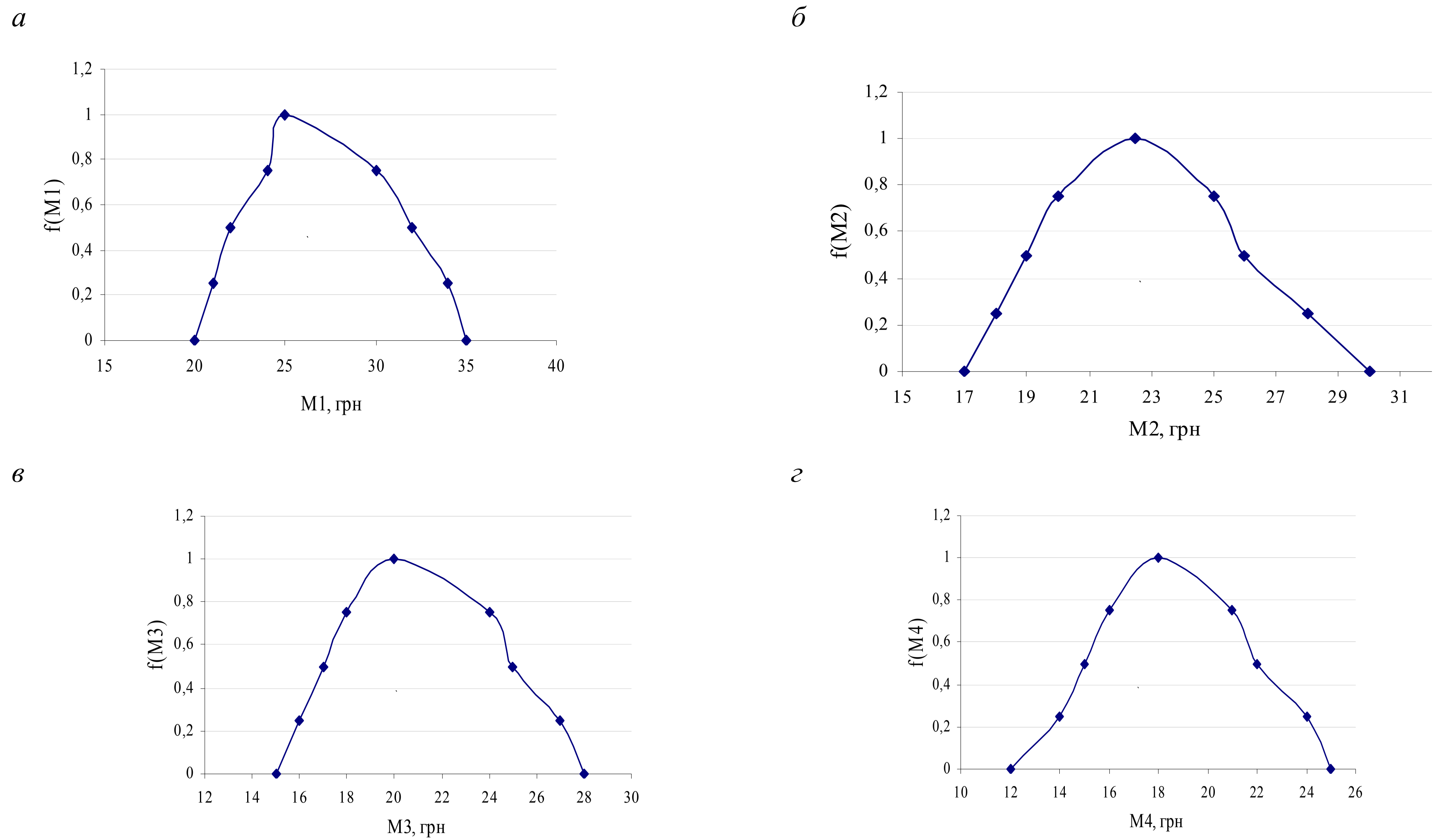


Рис. 9.3. Криві розподілу шансів появи нечіткої потреби в сировині: *а* – для алюмінієвих сплавів; *б* – для фероалюмінію; *в* – для феротитану; *г* – для феромангану

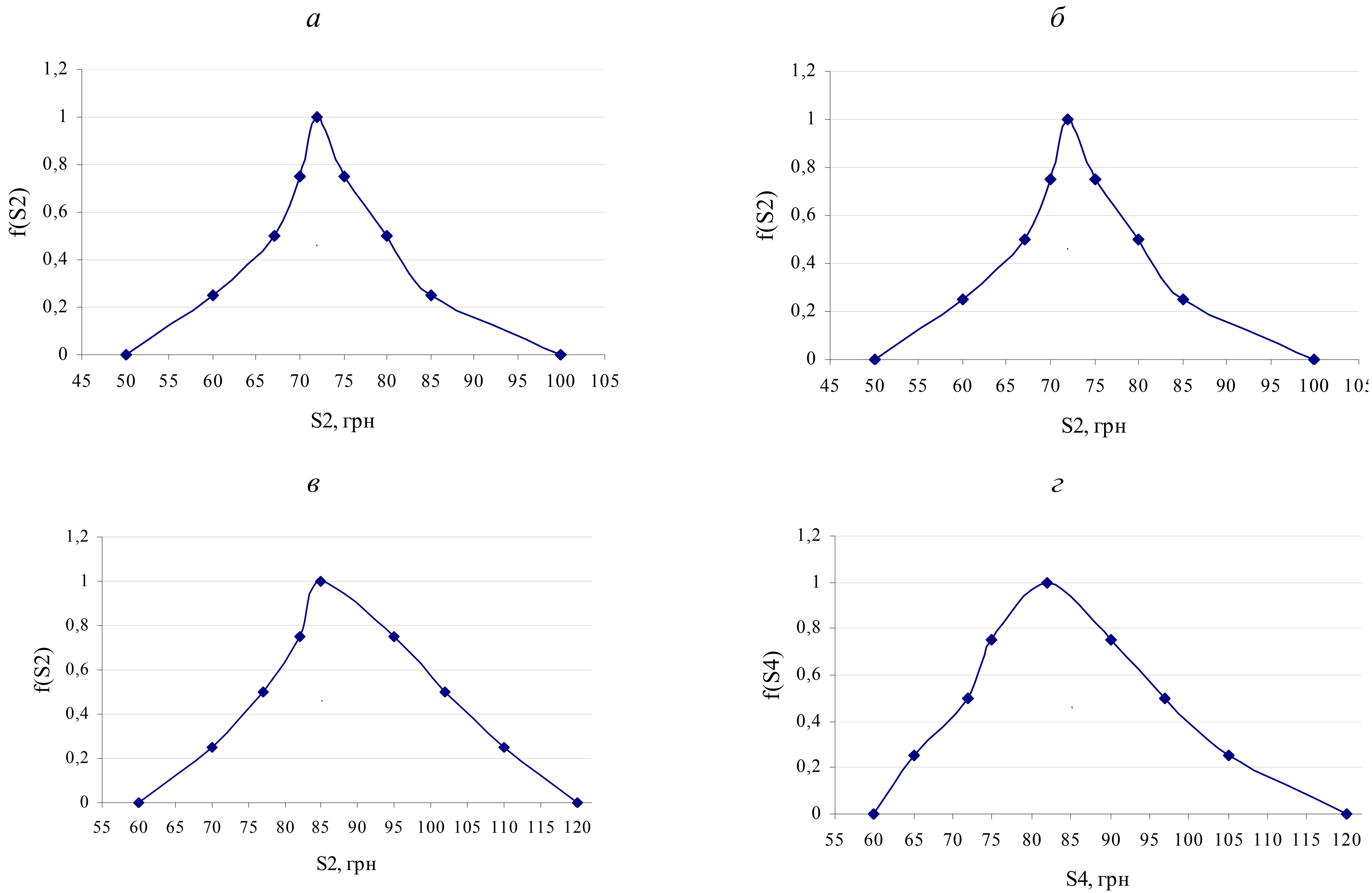


Рис. 9.4. Криві розподілу шансів появи нечітких витрат на зберігання сировини: *а* – для алюмінієвих сплавів; *б* – для фероалюмінію; *в* – для феротитану; *г* – для феромангану

Таблиця 9.10

Множини рівня нечітких параметрів, що описують вартість зберігання сировини

№	Назва сировини	Ступінь належності				
		Supp (A)	α = 0,25	α = 0,5	α = 0,75	α = 1
1	Алюмінієві сплави	[50;100]	[60;90]	[70;85]	[75;80]	77
2	Фероалюміній	[50;100]	[60;85]	[67;80]	[70;75]	73
3	Феротитан	[60;120]	[70;110]	[77;102]	[82;95]	85
4	Фероманган	[60;120]	[65;105]	[72;97]	[75;90]	83

Сформуємо цільові функції для побудови задач α-рівня і на кожному з них розв'яжемо отриману задачу методом послідовної редукції.

Результати розв'язування задач на всіх рівнях α зведено в табл. 9.11.

Таблиця 9.11

Результати розв'язування задач α-рівня

Параметр	Ступінь належності			
	Supp (A)	α = 0,25	α = 0,5	α = 0,75
$y_{1\min}$	31	29	27,5	27,7
$y_{2\min}$	28,6	26,9	26,1	26,2
$y_{3\min}$	26,5	25,3	24,9	24,8
$y_{4\min}$	23,7	24,6	24,2	24,4
$Z_{\min}$	5984,8	6716,1	7323,8	7777,5
$\overline{Z}_{\min}$	5992	6720,9	7339,9	7796,3
$y_{1\max}$	29	30,1	30,1	30,0
$y_{2\max}$	26,9	28,1	27,9	28,3
$y_{3\max}$	25,6	26,2	26,2	26,6
$y_{4\max}$	24,2	25,3	25,2	25,6
$Z_{\max}$	11547,1	10640	9905,8	9348,4
$\overline{Z}_{\max}$	11561,6	10647,6	9927,2	9370,8

Позначимо через λ ступінь задоволення ОПР отриманим розв'язком задачі. Тепер, щоб врахувати інформацію про всі множини α-рівня, необхідно розв'язати таку задачу:

$$\lambda \to \max,$$

$$\begin{cases} (5992-5984{,}8)\lambda + Z_{\min}^{0}(y) \le 5992, \\ (11561{,}6-11547{,}1)\lambda + Z_{\max}^{0}(y) \le 11561{,}6, \\ (6720{,}9-6716{,}1)\lambda + Z_{\min}^{0,25}(y) \le 6720{,}9, \\ (10647{,}6-10640)\lambda + Z_{\max}^{0,25}(y) \le 10647{,}6, \\ (7339{,}9-7323{,}85)\lambda + Z_{\min}^{0,5}(y) \le 7339{,}9, \\ (9927{,}2-9905{,}8)\lambda + Z_{\max}^{0,5}(y) \le 9927{,}2, \\ (7777{,}5-7796{,}3)\lambda + Z_{\min}^{0,75}(y) \le 7777{,}5, \\ (9370{,}82-9348{,}4)\lambda + Z_{\max}^{0,75}(y) \le 9370{,}82, \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} y_i \le 500, \\ y_i > 0,\ i=\overline{1,4}, \\ 0 \le \lambda \le 1. \end{cases} \qquad (9.37)$$

Розв’язок, знайдений за допомогою функції MS Excel «Пошук рішення», має такий вигляд: $y_1 = 29{,}4$; $y_2 = 27{,}5$; $y_3 = 25{,}8$; $y_4 = 24{,}2$; $\lambda = 0{,}6$. При цьому середнє значення цільової функції витрат, знайдене для оптимального розв’язку за формулою (4.35), буде таким:

$$Z = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{4}(Z_{\min}^{\alpha i}(y) + Z_{\max}^{\alpha i}(y)) = 8659{,}9 \text{ грн/міс.}$$

Побудуємо графік зміни величини витрат залежно від α-рівня (рис. 9.5).

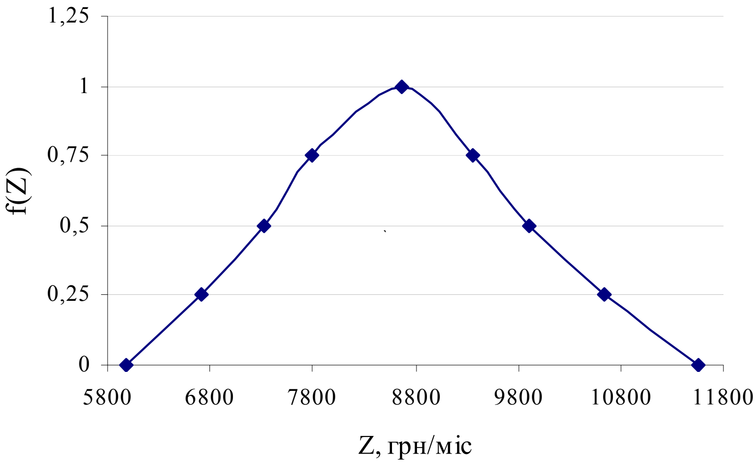


Рис. 9.5. Динаміка зміни витрат, пов’язаних із КЗ, залежно від α-рівня

Обчислимо інтервали циклу поповнення запасів та зведемо отримані результати розв'язування задачі в табл. 9.12.

Таблиця 9.12

Результати розв'язування нечіткої задачі методом кусково-лінійної редукції

Вид сировини	Оптимальний розмір замовлення, т	Тривалість циклу замовлення, міс	Середня тривалість циклу замовлення, днів
Алюмінієві сплави	29,4	[0,84; 1,2]	30,6
Фероалюміній	27,5	[0,9; 1,6]	37,5
Феротитан	25,8	[0,9; 1,7]	39
Фероманган	24,2	[0,97; 2]	44,6
Середні загальні витрати, грн		8659,9	

9.4.4. Розв'язування задачі КЗ із використанням інтервальної арифметики Каухера

Тепер розрахуємо оптимальну програму замовлення сировини за допомогою інтервальної арифметики Каухера. У розглянутій багатопродуктовій системі КЗ з миттєвим постачанням інтервально задано такі величини: інтенсивність попиту $\mu = [\underline{\mu}, \overline{\mu}]$ та витрати на зберігання $s = [\underline{s}, \overline{s}]$. Необхідно визначити інтервали оптимального обсягу замовлення сировини й величини витрат на КЗ, а саме: $Y^* = [\underline{Y}, \overline{Y}]$, $L^* = [\underline{L}, \overline{L}]$.

Цільова функція інтервальної моделі згідно з правилами арифметики Каухера (див. розділ 3, § 3.4) має такий вигляд:

$$L = \sum_{i=1}^{4} \frac{k_i \cdot [\underline{\mu}_i, \overline{\mu_i}]}{Y_i} + \frac{[\underline{s}_i, \overline{s_i}] \cdot Y_i}{2} = \left[\sum_{i=1}^{4} \frac{k_i \cdot \underline{\mu_i}}{Y_i} + \frac{\underline{s_i} \cdot Y_i}{2}; \sum_{i=1}^{4} \frac{k_i \cdot \overline{\mu}_i}{Y_i} + \frac{\overline{s_i} \cdot Y_i}{2} \right]. \quad (9.38)$$

Для того, щоб визначити оптимальний обсяг замовлення на кожний вид сировини, візьмемо похідні від функції витрат (9.38) за кожною змінною Y_i і прирівняємо їх до нуля. Розв'язуючи отримані інтервальні рівняння, знаходимо шукані значення параметрів, тобто

$$Y_1^* = [\underline{Y_1^*}, \overline{Y_1^*}] = \left[\sqrt{\frac{2 \cdot k_1 \cdot \underline{\mu_1}}{\overline{s}_1}}; \sqrt{\frac{2 \cdot k_1 \cdot \overline{\mu_1}}{\underline{s}_1}} \right] = [21{,}9; 40{,}9];$$

$$Y_2^* = [\underline{Y_2^*}, \overline{Y_2^*}] = [20{,}2; 37];$$

$$Y_3^* = [\underline{Y_3^*}, \overline{Y_3^*}] = [18{,}7; 36{,}1];$$

$$Y_4^* = [\underline{Y_4^*}, \overline{Y_4^*}] = [16{,}7; 34{,}2].$$

Інтервал для визначення періоду замовлень обчислимо згідно з формулою (9.31), а саме:

$$T_1^* = [\underline{T_1^*}, \overline{T_1^*}] = [0{,}63; 2];$$

$$T_2^* = [\underline{T_2^*}, \overline{T_2^*}] = [0{,}67; 2{,}2];$$

$$T_3^* = [\underline{T_3^*}, \overline{T_3^*}] = [0{,}67; 2{,}4];$$

$$T_4^* = [\underline{T_4^*}, \overline{T_4^*}] = [0{,}67; 2{,}9].$$

Інтервал величин очікуваних витрат (грн/міс) згідно з правилами арифметики Каухера за формулою (9.38) обчислено таким чином:

$$L^* = [\underline{L^*}, \overline{L^*}] = [4325{,}6; 16005{,}1].$$

Результати обчислень подано в табл. 9.13.

Таблиця 9.13

Результати розв’язування задачі керування запасами за допомогою арифметики Каухера

Вид сировини	Оптимальний обсяг замовлення на сировину, т	Середній обсяг замовлення на сировину, т	Тривалість циклу замовлення, міс	Середня тривалість циклу замовлення, днів
Алюмінієві сплави	[21,9; 40,9]	31,4	[0,63; 2]	39,5
Фероалюміній	[20,2; 37]	28,6	[0,67; 2,2]	43,1
Феротитан	[18,7; 36,1]	27,4	[0,67; 2,4]	46,1
Фероманган	[16,7; 34,2]	25,45	[0,67; 2,9]	53,6
Загальні витрати, грн			[4325,6; 16005,1]	
Середні загальні витрати, грн:			10165,4	

9.4.5. Порівняння результатів розв’язування нечіткої задачі керування запасами та висновки

Проаналізуємо результати розрахунків параметрів системи керування запасами, отримані трьома методами, а саме, методом послідовної редукції, кусково-лінійної редукції та з використанням інтервальної арифметики Каухера (табл. 9.14). Очевидно, що завдяки інтервальному аналізу вдалося визначити прийнятні границі параметрів стратегії керування та функції витрат при достатньо широкому діапазоні зміни інтенсивності потреб і видатків на зберігання сировини. Розраховані величини й інтервали мають достатньо великий розкид значень, бо вихідні дані мали нечіткий характер з великою різницею між нижньою і верхньою границею інтервалів.

Методами послідовної та кусково-лінійної редукції отримано схожі результати, крім того ці методи дають змогу оцінити ступінь відповідності запропонованого рішення вимогам ОПР.

Отже, вибір того чи іншого методу розв’язування задачі залежить від особистих міркувань дослідника та ОПР. Методами редукції отримані точні значення обсягу замовлення сировини, що може бути недоліком при завантажуванні транспорту, натомість третій метод дозволяє одержати інтервальні значення параметрів. Але застосування всіх методів дає схожі середні значення, різниця полягає лише у величині їх діапазону.

Таблиця 9.14

Порівняння результатів розв’язування задачі КЗ, отриманих трьома методами

Вид сировини	Обсяг замовлення, т			Тривалість циклу керування запасами, міс		
	Метод послідовної редукції	Метод кусково-лінійної редукції	За допомогою арифметики Каухера	Метод послідовної редукції	Метод кусково-лінійної редукції	За допомогою арифметики Каухера
Алюмінієві сплави	30	29,4	[21,9; 40,9]	[1,2; 1,5]	[0,84; 1,2]	[0,63; 2]
Фероалюміній	27,7	27,5	[20,2; 37]	[0,9; 1,6]	[0,9; 1,6]	[0,67; 2,2]
Феротитан	26	25,8	[18,7; 36,1]	[0,9; 1,7]	[0,9; 1,7]	[0,67; 2,4]
Фероманган	24	24,2	[16,7; 34,2]	[0,96; 2]	[0,97; 2]	[0,67; 2,9]
Рівень задоволеності ОПР результатами, α				0,75	0,6	–
Загальні витрати, грн				[5986,6; 11550,7]	–	[4325,6; 16005,1]
Середні загальні витрати, грн				8768,6	8659,9	10165,4

9.5. Вибір постачальника палива на основі нечітких відношень переваги

9.5.1. Постановка задачі й побудова математичної моделі

Постановка задачі. Припустимо, що перед підприємством постала проблема вибору найкращого постачальника палива. При цьому для оцінювання комерційних пропозицій суттєвими є кілька критеріїв, а саме:

– надійність постачальника (репутація на ринку, своєчасність поставок, фінансовий стан);

– характеристика продукції (якість, вартість доставки, вартість палива);

– рівень сервісу (обсяг одноразової поставки, термін доставки, система знижок);

Оцінки постачальників за кожним із обраних критеріїв відомі. Потрібно визначити рейтинг кожного з них і вибрати оптимальний варіант.

До розгляду було прийнято шість постачальників (П1, П2, П3, П4, П5, П6) із такими характеристиками:

П1 – велике підприємство, яке добре зарекомендувало себе на ринку, ціни на продукцію значно перевищують ціни інших постачальників. Високий рівень гнучкості поставок, якісне обслуговування, висока якість продукції. Недоліком є географічна віддаленість і високі транспортні витрати. Термін постачання палива становить 20 год. Об’єм одноразової поставки 10000 л. Якщо замовлена кількість палива становить більше ніж 10000 л, діє знижка.

П2 – новий постачальник на ринку, який ще не встиг зарекомендувати себе. Фінансовий стан стійкий. Ціни порівняно невисокі, якість продукції дуже добра. Розташоване поблизу від підприємства-споживача, що значно зменшує терміни постачання. Замовлене паливо надходить протягом 7 год. Об’єм одноразової поставки становить 7000 л. Знижка діє, якщо замовлена кількість дорівнює 8000 л і вище.

П3 – невелике підприємство, яке динамічно розвивається. Фінансовий стан фірми можна характеризувати як стійкий. Особливу увагу на підприємстві приділяють якості продукції. Ціни несуттєво перевищують ціни постачальника П2. Недоліком є великі терміни постачання і труднощі з транспортуванням продукції. Замовлене паливо надходить протягом 17 год. Вартість поставки порівняно висока через вплив високих транспортних витрат. Об’єм одноразової поставки становить 5000 л. Знижка діє, коли об’єм замовлення перевищує 5000 л.

П4 – фінансовий стан компанії відносно стабільний. Достатньо низька ціна (на 10 – 12 % нижча, ніж в інших постачальників). Недоліком є віддаленість від фірми-споживача, але вартість доставки продукції невисока. Налагоджено мережу постачання, якісне обслуговування. Якість продукції задовільна. Термін доставки палива дорівнює 15 год. Об’єм поставленої продукції за один раз 9000 л. Знижка діє, якщо замовлена кількість палива становить 9000 л або більше.

П5 – постачальник, який непогано зарекомендував себе на ринку. Показник якості палива високий. Має місце географічна віддаленість, тоді як терміни постачання становлять 16 год. Високий рівень обслуговування, відносно високі, але прийнятні ціни. Стабільний фінансовий стан. Об'єм одноразової поставки визначено на рівні 15000 л. Знижки діють, якщо кількість замовленої продукції становить або перевищує 20000 л.

П6 – добра репутація на ринку, розвинена розподільна мережа, існує рекламна та інформаційна підтримка. Показник якості палива досить високий. Фінансовий стан компанії стабільний. Ціна палива невисока. Вартість доставки несуттєво перевищує ту, що пропонує постачальник П1. Має місце незначна географічна віддаленість. Продукція надходить протягом 12 год. Об'єм одноразової поставки дорівнює 13000 л. Знижка діє, якщо замовлена кількість продукції становить 10000 л.

Відомі результати попарного порівняння альтернатив за кожним з критеріїв. Необхідно виконати оптимальний вибір постачальника.

Опишемо математичну модель задачі.

Нехай множина $X = \{П1, П2, П3, П4, П5, П6\}$. На цій множині задано три відношення переваги R_1, R_2, R_3, які описують результати порівняння альтернатив за кожним з критеріїв, а саме:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,4 & 0,2 & 0,8 & 0,7 \\ 0,1 & 1 & 0,3 & 0,5 & 0,6 & 0,9 \\ 0,4 & 0,6 & 1 & 0,2 & 0,1 & 0,9 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 1 & 0,3 & 0,8 \\ 0,8 & 0,5 & 0,3 & 0,7 & 1 & 0,6 \\ 0,7 & 0.4 & 0,6 & 0,2 & 0,5 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,7 & 0,5 & 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,1 & 1 & 0,1 & 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 & 1 & 0,2 & 0,4 & 0,9 \\ 0,7 & 0,5 & 0,2 & 1 & 0,3 & 0,9 \\ 0,8 & 0,5 & 0,7 & 0,3 & 1 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 & 0,2 & 0,4 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0,7 & 0,9 & 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,1 & 1 & 0,8 & 0,5 & 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,6 & 1 & 0,5 & 0,1 & 0,9 \\ 0,2 & 0,7 & 0,4 & 1 & 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,5 & 0,3 & 0,7 & 1 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 & 0,2 & 0,7 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$$

Необхідно здійснити вибір альтернативи з множини X на основі заданих відношень переваги, якщо пріоритети критеріїв (коефіцієнти довіри) мають такі значення: $\lambda_1 = 0,5$; $\lambda_2 = 0,25$; $\lambda_3 = 0,25$.

9.5.2. Розв'язування задачі вибору на основі нечітких відношень переваги

Для розв'язування будемо використовувати метод, описаний у розділі 4, п. 4.6. Згідно з алгоритмом, спочатку будуємо таке відношення:

$$Q_1 = \lambda_1 R_1 \cap \lambda_2 R_2 \cap \lambda_3 R_3.$$

З урахуванням заданих пріоритетів вихідних відношень воно набуває такого вигляду:

$$\mu_{Q_1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,175 & 0,125 & 0,05 & 0,025 & 0,175 \\ 0,025 & 0,25 & 0,025 & 0,125 & 0,1 & 0,05 \\ 0,075 & 0,15 & 0,25 & 0,05 & 0,025 & 0,225 \\ 0,05 & 0,125 & 0,05 & 0,25 & 0,075 & 0,2 \\ 0,2 & 0,05 & 0,125 & 0,075 & 0,25 & 0,15 \\ 0,15 & 0,1 & 0,05 & 0,1 & 0,025 & 0,25 \end{pmatrix},$$

а відповідне йому відношення строгої переваги буде таким:

$$\mu^s_{Q_1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0,15 & 0,05 & 0 & 0 & 0,025 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,125 & 0 & 0 & 0 & 0,175 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0,175 & 0,025 & 0,05 & 0 & 0 & 0,125 \\ 0 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо підмножину недомінованих альтернатив на множині $\left(X, \mu_{Q_1}\right)$. Вона буде мати такий вигляд:

$$Q_1^{н.д.} = \{(П1/0,825);(П2/0,85);(П3/0,95);(П4/1);(П5/1);(П6/0,825)\}.$$

Тепер будуємо відношення: $Q_2 = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3$. Воно матиме такий вигляд:

$$\mu_{Q_2}(x,y)=\begin{pmatrix} 1 & 0,6 & 0,55 & 0,2 & 0,45 & 0,7 \\ 0,1 & 1 & 0,375 & 0,5 & 0,575 & 0,55 \\ 0,35 & 0,65 & 1 & 0,275 & 0,175 & 0,9 \\ 0,325 & 0,5 & 0,3 & 1 & 0,375 & 0,825 \\ 0,8 & 0,5 & 0,4 & 0,6 & 1 & 0,6 \\ 0,65 & 0,4 & 0,4 & 0,375 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідне йому відношення строгої переваги

$$\mu^s_{Q_2}(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,2 & 0 & 0 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,15 \\ 0 & 0,275 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,125 & 0 & 0,025 & 0 & 0 & 0,45 \\ 0,35 & 0 & 0,225 & 0,225 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині $\left(X,\mu_{Q_2}\right)$, а саме:

$$Q_2^{н.д} = \{(П1/0{,}65);(П2/0{,}5);(П3/0{,}775);(П4/0{,}775);(П5/0{,}925);(П6/0{,}5)\}.$$

Вихідну множину недомінованих альтернатив отримуємо як переріз множин $Q_1^{н.д.}$, $Q_2^{н.д.}$, тобто

$$Q = \{(П1/0{,}65);(П2/0{,}5);(П3/0{,}775);(П4/0{,}775);(П5/0{,}925);(П6/0{,}5)\}.$$

Максимальним ступенем недомінованості характеризується альтернатива П5, тому її вибір можна вважати раціональним. Отже, варто обрати постачальника П5.

Висновки

Методи, що базуються на теорії нечітких множин, мають широке застосування в різних галузях діяльності і дозволяють знаходити оптимальні рішення при неповних або неточних даних.

Питання, викладені в цьому розділі, розглянуто в багатьох наукових публікаціях [37, 47, 67, 68, 71, 79, 84 – 86, 90].

Відповіді на завдання, подані в кінці розділів, і деякі зауваження до їх виконання

Відповіді до завдань розділу 1

1. Множини A, C, D – нормальні, B – субнормальна, Supp A = $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, Supp B = $\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, Supp C = (0; 6), Supp D = (0; + ∞). **2.** $A \cap B = \{(x_1\backslash 0),\ (x_2\backslash 0{,}3),\ (x_3\backslash 0{,}4),\ (x_4\backslash 0{,}8),\ (x_5\backslash 0{,}6),\ (x_6\backslash 0{,}7),\ (x_7\backslash 0{,}5)\}$, $A \cup B = \{(x_1\backslash 0{,}5),\ (x_2\backslash 0{,}4),\ (x_3\backslash 0{,}7),\ (x_4\backslash 0{,}8),\ (x_5\backslash 1),\ (x_6\backslash 1),\ (x_7\backslash 0{,}9)\}$, $A \cap B = \{(x_1\backslash 0),\ (x_2\backslash 0{,}12),\ (x_3\backslash 0{,}28),\ (x_4\backslash 0{,}64),\ (x_5\backslash 0{,}6),\ (x_6\backslash 0{,}7),\ (x_7\backslash 0{,}45)\}$, $A \cup B ==\{(x_1\backslash 0{,}5),\ (x_2\backslash 0{,}58),\ (x_3\backslash 0{,}82),\ (x_4\backslash 0{,}96),\ (x_5\backslash 1),\ (x_6\backslash 1),\ (x_7\backslash 0{,}95)\}$, $A \cap B = \{(x_1\backslash 0),\ (x_2\backslash 0),\ (x_3\backslash 0{,}1),\ (x_4\backslash 0{,}6),\ (x_5\backslash 0{,}6),\ (x_6\backslash 0{,}7),\ (x_7\backslash 0{,}4)\}$, $A \cup B = \{(x_1\backslash 0{,}5),\ (x_2\backslash 0{,}7),\ (x_3\backslash 1),\ (x_4\backslash 1),\ (x_5\backslash 1),\ (x_6\backslash 1),\ (x_7\backslash 1)\}$.

$$\mu_{C\cap D}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6}x, \text{ якщо } 0 \le x \le 4{,}5, \\ -\dfrac{1}{9}(x-3)^2 + 1, \text{ якщо } 4{,}5 \le x \le 6, \\ 0 \text{ в інших випадках;} \end{cases} \quad \mu_{C\cup D}(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 0, \\ -\dfrac{1}{9}(x-3)^2 + 1, \text{ якщо } 0 \le x \le 4{,}5, \\ \dfrac{1}{6}x, \text{ якщо } 4{,}5 \le x \le 6, \\ 1, \text{ якщо } x \ge 6; \end{cases}$$

$$\mu_{C\cap D}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{54}x^2 + \dfrac{1}{9}x, \text{ якщо } 0 \le x \le 6, \\ 0 \text{ в інших випадках;} \end{cases} \quad \mu_{C\cup D}(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 0, \\ \dfrac{1}{54}x^3 - \dfrac{1}{9}x^2 + \dfrac{45}{54}x, \text{ якщо } 0 \le x \le 6, \\ 1, \text{ якщо } x \ge 6; \end{cases}$$

$$\mu_{C\cap D}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{9}x^2 + \dfrac{45}{54}x - 1, \text{ якщо } 1{,}5 \le x \le 6, \\ 0 \text{ в інших випадках;} \end{cases} \quad \mu_{C\cup D}(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 0, \\ -\dfrac{1}{9}x^2 + \dfrac{45}{54}x, \text{ якщо } 0 \le x \le 1{,}5, \\ 1, \text{ якщо } x \ge 1{,}5. \end{cases}$$

3. $\overline{A} = \{(x_1\backslash 0{,}5),\ (x_2\backslash 0{,}6),\ (x_3\backslash 0{,}3),\ (x_4\backslash 0{,}2),\ (x_5\backslash 0),\ (x_6\backslash 0),\ (x_7\backslash 0{,}1)\}$, $\overline{B} = \{(x_1\backslash 1),\ (x_2\backslash 0{,}7),\ (x_3\backslash 0{,}6),\ (x_4\backslash 0{,}2),\ (x_5\backslash 0{,}4),\ (x_6\backslash 0{,}3),\ (x_7\backslash 0{,}0{,}5)\}$; $\mu_{\overline{C}}(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{1}{9}(x-3)^2, \text{ якщо } x \in (0;6), \\ 1, \text{ якщо } x \notin (0;6); \end{cases}$

$\mu_{\overline{D}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \le 0, \\ \dfrac{6-x}{6}, \text{ якщо } x \in (0;6), \\ 0, \text{ якщо } x \ge 6. \end{cases}$ **4.** $CON\ B = \{(x_1\backslash 0), (x_2\backslash 0{,}09), (x_3\backslash 0{,}16), (x_4\backslash 0{,}64), (x_5\backslash 0{,}36),$

$(x_6\backslash 0{,}49), (x_7\backslash 0{,}25)\}$, $DIL\ B = \{(x_1\backslash 0), (x_2\backslash 0{,}54), (x_3\backslash 0{,}63), (x_4\backslash 0{,}89), (x_5\backslash 0{,}77), (x_6\backslash 0{,}84), (x_7\backslash 0{,}71)\}$,

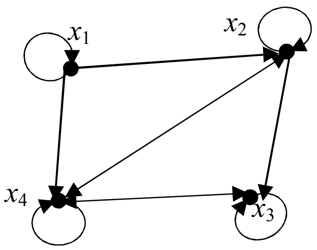
$$\mu_D^2(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{36}, & \text{якщо } x\in(0;6),\\ 1, & \text{якщо } x\ge 6;\end{cases}\quad \mu_D^{0,5}(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ 0{,}41\sqrt{x}, & \text{якщо } x\in(0;6),\\ 1, & \text{якщо } x\ge 6.\end{cases}$$

5. $A_{0,4}=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $A_{0,5}=\{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $A_{0,7}=\{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $A_{0,8}=\{x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $A_{0,9}=\{x_5, x_6, x_7\}$, $A_1=\{x_5, x_6\}$, $B_{0,3}=\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $B_{0,4}=\{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $B_{0,5}=\{x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $B_{0,6}=\{x_4, x_5, x_6\}$, $B_{0,7}=\{x_4, x_6\}$, $B_{0,8}=\{x_4\}$. **6.** $\underline{A}=\{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $\underline{B}=\{x_4, x_5, x_6\}$, $\underline{C}=\left(3-1{,}5\sqrt{2};\ 3+1{,}5\sqrt{2}\right)$, $\underline{D}=(3;+\infty)$. **7.** $d(A, B)=2$; $e(A, B)=0{,}81$; $d(C, D)=2{,}375$; $e(C, D)=1{,}09$. **8.** $\nu(A)=0{,}21$; $\eta(A)=0{,}28$; $\nu(B)=0{,}3$; $\eta(B)=0{,}32$. **9.** Supp A = {(< яблуко>, < груша>, < слива>, < ранет>, < вишня>, <черешня>, < манго>}, $h(A)=1$, $A_{0,3}$ = {(< яблуко>, < груша>, < слива>, < вишня>, <черешня>, < манго>}. **10.** 0,2.

Відповіді до завдань розділу 2

Завдання А

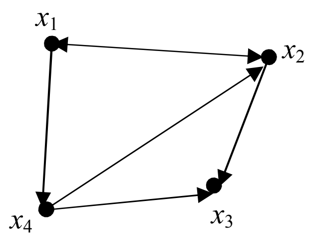
1. *а*)



б) $R^+(x_1)=\{x_1\}$, $R^+(x_2)=\{x_1,x_2,x_4\}$, $R^+(x_3)=\{x_2,x_3,x_4\}$, $R^+(x_4)=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$;

в) $R^-(x_1)=\{x_1,x_2,x_4\}$, $R^-(x_2)=\{x_2,x_3,x_4\}$, $R^-(x_3)=\{x_3,x_4\}$, $R^-(x_4)=\{x_2,x_3,x_4\}$.

2. *а*)



б) $R^+(x_1)=\{x_1\}$, $R^+(x_2)=\{x_1,x_4\}$, $R^+(x_3)=\{x_2,x_4\}$, $R^+(x_4)=\{x_1\}$
$R^-(x_4)=\{x_2,x_3\}$.

3.

$$R_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

4. *а*) $R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$; *б*) $R^+(a)=\varnothing$, $R^+(b)=\{a\}$, $R^+(c)=\{b\}$, $R^+(d)=\{b\}$;
в) $R^-(a)=\{b\}$, $R^-(b)=\{c,d\}$, $R^-(c)=\varnothing$, $R^-(d)=\varnothing$.

5. *а*) $R=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$; *б*) $R^+(a)=\varnothing$,

$R^+(b)=\{a\}$, $R^+(c)=\{a,b,d\}$, $R^+(d)=\{a\}$; *в*) $R^-(a)=\{b,c,d\}$, $R^-(b)=\{c\}$, $R^-(c)=\varnothing$, $R^-(d)=\{c\}$.

6. *а*) рефлексивне, не є симетричним, не є антисиметричним і асиметричним, не є транзитивним; *б*) рефлексивне, антисиметричне, транзитивне; *в*) антирефлексивне, антисиметричне, асиметричне, не транзитивне; *г*) не є рефлексивним і антирефлексивним, симетричне, не транзитивне.

7.

$$а)\ \ \overline{R}=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix},\ R^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix};\ б)\ \ \overline{R}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ R^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix};$$

$$в)\ \ \overline{R}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&0\\1&0&1&1\end{pmatrix},\ \ R^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix};\quad г)\ \overline{R}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ R^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}.$$

8.

$$R_1\bigcap R_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&1\end{pmatrix},\ \ R_1\bigcap R_2=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

9.

$$а)\ R^s=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ R^e=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},\ R^I=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&1&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix};б)\ \ R^s=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\end{pmatrix},$$

$$R^e=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ R^I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};в)\ R^s=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ R^e=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R^I=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};г)\ R^s=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ R^e=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&1\end{pmatrix},\ R^I=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

10. *а*) найбільших і найменших немає, максимальні x_1, x_2, x_3, мінімальні x_2, x_4; *б*) найменший і мінімальний x_1, найбільший і максимальний x_4; *в*) найбільших, найменших і мінімальних немає, максимальний x_3; *г*) найбільших і найменших немає, усі елементи є максимальними і мінімальними одночасно.

11. *а*) $C(\{a\}) = \{a\}$, $C(\{b\}) = \{ b\}$, $C(\{c\}) = \{c\}$, $C(\{d\}) = \{d\}$, $C(\{a, b\}) = \{a, b\}$, $C(\{a, c\}) = \{a, c\}$, $C(\{a, d\}) = \{a\}$, $C(\{b, c\}) = \{b, c\}$, $C(\{b, d\}) = \{b, d\}$, $C(\ c, d\}) = \{c\}$, $C(\{a, b, c\}) = \{a, b, c\}$, $C(\{a, b, d\}) = \{a, b\ \}$, $C(\{a, c, d\}) = \{a, c\}$, $C(\{b, c, d\})= \{b, c\}$, $C(\{a, b, c, d\}) = \{a, b, c\}\ d\}$; *б*) $C(\{a\}) = \{a\}$, $C(\{b\}) = \{b\}$, $C(\{c\}) = \{c\}$, $C(\{d\}) = \{d\}$, $C(\{a, b\}) = \{b\}$, $C(\{a, c\}) = \{c\}$, $C(\{a, d\}) = \{d\}$, $C(\{b, c\}) = \{c\}$, $C(\{b,d\}) = \{d\}$, $C(\{a, b, c\}) = \{c\}$, $C(\{a, b, d\}) = \{d\}$, $C(\{a, c, d\}) = \{d\}$, $C(\{b, c, d\}) = \{d\}$, $C(\{a, b, c, d\}) = \{d\}$.

15. $\max\min R_1R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & 0,45 \\ 0,3 & 1 & 0,3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\min\max R_1R_2 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,45 & 0,5 \\ 1 & 0,8 & 0,4 \\ 0,5 & 0,8 & 0,4 \end{pmatrix}$,

$\max \bullet R_1R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & 0,45 \\ 0,3 & 1 & 0,2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **16.** *а*) рефлексивне, симетричне, не має жодного виду транзитивності; *б*) не є рефлексивним, антирефлексивним, симетричним, анти- та асиметричним, не має жодного виду транзитивності; *в*) не є рефлексивним, антирефлексивним, симетричним, асиметричне, не має жодного виду транзитивності; *г*) не є рефлексивним, антирефлексивним, симетричним, анти- та асиметричним, не має жодного виду транзитивності. **17.** $B = \{((y_1/1)), (y_2/0,8), (y_3\ /1)\}$; **18.** $B = \{((y_1/1)), (y_2/0,7), (y_3\ /1)\}$.

Відповіді до завдань розділу 3

1. *а*) $A+B=\{(2/0,5);(3/0,5);(4/1);(5/0,8);(6/0,7);(7/0,5)\}$, $A-B=\{(-2/0,5); (-1/0,7);(0/1);(1/0,8);(2/0,5);(3/0,5)\}$, $AB=\{(1/0,5);\ (2/0,5);\ (3/0,5);\ (4/1); (6/0,8);\ (8/0,5);(9/0,7);(12/0,5)\}$, $\frac{A}{B}=\{\left(\frac{1}{3}/0,5\right);\ \left(\frac{1}{2}/0,5\right);\ \left(\frac{2}{3}/0,7\right); (1/1);\left(\frac{4}{3}/0,5\right);(1,5/0,8);\ (2/0,5);\ (3/0,5);\ (4/0,5)\}$; *б*) $A+B=\{(5/0,1);\ (6/0,5); (7/0,5);\ (8/0,8);\ (9/0,7);\ (10/0,3)\}$, $A-B=\{(-7/0,1);(-6/0,5);(-5/0,7);, (-4/0,8);(-3/0,5);(-2/0,3)\}$ $AB=\{(0/0,1);\ (5/0,5);\ (6/0,5);\ (7/0,5);\ (10/0,5); (12/0,8);\ (14/0,7);\ (15/0,3);\ (18/0,3);\ (21/0,3)\}$, $\frac{A}{B}=\{\left(0/\frac{1}{10}\right);\ \left(\frac{1}{7}/0,5\right);\ \left(\frac{2}{6}/0,5\right); (0,2/0,5);\ \left(\frac{2}{7}/0,5\right);\ \left(\frac{2}{6}/0,8\right);\ (0,4/0,7);\left(\frac{3}{7}/0,3\right);\ (0,5/0,3);\ \left(\frac{3}{5}/0,3\right)\}$; *в*) $A+B=\{(5/0,4);\ (6/0,4);\ (7/0,7);\ (8/0,8);\ (9/1);\ (10/0,7)\}$, $A-B=\{(-1/0,4);\ (0/0,6);\ (1/0,7);(2/0,8);(3/1);(4/0,7)\}$, $AB=\{(6/0,4);\ (8/0,6); (9/0,4);\ (10/0,7);\ (12/0,7);\ (15/0,8);\ (18/1);\ (20/0,7);\ (24/0,7)\}$, $\frac{A}{B}=\{\left(\frac{3}{4}/0,4\right);\ (1/0,6); \left(\frac{5}{4}/0,7\right);\left(\frac{4}{3}/0,6\right);\left(\frac{3}{2}/0,7\right);\left(\frac{5}{3}/0,8\right);(2/1);\left(\frac{5}{2}/0,7\right);\ (3/0,7)\}$.

2.

а) $$\mu_{A+B}(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{8}, \text{ якщо } 0<x\le 8,\\ \dfrac{15-x}{7}, \text{ якщо } 8<x<15,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 10.\end{cases} \qquad \mu_{A-B}(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le -5,\\ \dfrac{x+5}{7}, \text{ якщо } -5<x\le 2,\\ \dfrac{10-x}{8}, \text{ якщо } 2<x<10,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 10.\end{cases}$$

б) $$\mu_{A+B}(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 3,\\ \dfrac{x-3}{6}, \text{ якщо } 3<x\le 9,\\ 1, \text{ якщо } 9<x\le 11,\\ \dfrac{15-x}{4}, \text{ якщо } 11<x<15,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 15.\end{cases} \qquad \mu_{A-B}(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le -6,\\ \dfrac{x+6}{5}, \text{ якщо } -6<x\le -1,\\ 1, \text{ якщо } -1<x<1,\\ \dfrac{6-x}{5}, \text{ якщо } 1<x\le 6,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 6.\end{cases}$$

в) $$\mu_{A+B}(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 3,\\ \dfrac{x-3}{5}, \text{ якщо } 3<x\le 8,\\ 1, \text{ якщо } 8<x<13,\\ \dfrac{18-x}{5}, \text{ якщо } 13<x\le 18,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 18.\end{cases} \qquad \mu_{A-B}(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le -7,\\ \dfrac{x+7}{5}, \text{ якщо } -7<x\le -2,\\ 1, \text{ якщо } -2<x<3,\\ \dfrac{9-x}{6}, \text{ якщо } 3<x\le 9,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 9.\end{cases}$$

3. *а)* $A_1+A_2=\langle 7,4,3\rangle$, $A_1-A_2=\langle -1,4,3\rangle$, $A_1A_2=\langle 12,14,10\rangle$, $\dfrac{A_1}{A_2}=\left\langle \dfrac{3}{4},\dfrac{5}{8},\dfrac{5}{8}\right\rangle$, $L(x)=f_1(x)$, $R(x)=f_1(x)$; *б)* $A_1+A_2=\langle 7,4,3\rangle$, $A_1-A_2=\langle -1,4,3\rangle$, для обчислення добутку й частки скористатися такими формулами: $A_1A_2=\langle a_1a_2, b_1b_2, a_1\alpha_2+a_2\alpha_1, b_1\beta_2+b_2\beta_1\rangle$, $\dfrac{A_1}{A_2}=\left\langle \dfrac{a_1}{b_2},\dfrac{b_1}{a_2},\dfrac{a_1\beta_2+b_2\alpha_1}{b_2^2},\dfrac{b_1\alpha_2+a_2\beta_1}{a_2^2}\right\rangle$, враховуючи, що нечітке число A_1 можна подати в такому вигляді: $A_1=\langle 3,3,2,2\rangle$, тоді $A_1A_2=\langle 9,10,12,16\rangle$, $\dfrac{A_1}{A_2}=\left\langle \dfrac{3}{5},1,\dfrac{16}{25},\dfrac{12}{9}\right\rangle$, $L(x)=f_2(x)$, $R(x)=f_1(x)$; *в)* $A_1+A_2=\langle 4,6,3,4\rangle$, $A_1-A_2=\langle -2,-2,3,4\rangle$, для обчислення добутку й частки скористатися формулами з п. 3. *б*, тоді $A_1A_2=\langle 3,8,5,10\rangle$, $\dfrac{A_1}{A_2}=\left\langle \dfrac{1}{4},\dfrac{2}{3},\dfrac{7}{16},\dfrac{7}{9}\right\rangle$, $L(x)=f_2(x)$, $R(x)=f_2(x)$.

4 – 8. Функції належності нечітких множин задайте самостійно. **9.** $A=\{(1/1);(2/1);(3/0{,}8);(4/0{,}4);(5/0);(6/0)\}$; **10.** $\{(x_1/0{,}35);(x_2/0{,}35);(x_3/0{,}25);(x_4/0{,}5)\}$;

11. $\{(x_1/0{,}3);(x_2/0{,}13);(x_3/1);(x_4/0{,}07);(x_5/0{,}47);(x_6/0{,}1);(x_7/0{,}44)\}$.

12 –18. Функції належності нечітких множин задайте самостійно.

Відповіді до завдань розділу 4

Завдання А

1. $D = \{(x_1/0,3); (x_2/0,3); (x_3/0,5); (x_4/0,4); (x_5/0,2); (x_6/0,1); (x_7/0,1)\}$, $x^* = x_3$.

2. $$\mu_D(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 1, \text{ якщо } 1 \le x \le \dfrac{8-\sqrt{19}}{3}, \\ \dfrac{1}{6}x, \text{ якщо } \dfrac{8-\sqrt{19}}{3} \le x \le \dfrac{8+\sqrt{19}}{3}, \\ -(x-1)^2 + 1, \text{ якщо } \dfrac{8+\sqrt{19}}{3} \le x \le 6, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

3. $$\mu_D(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}|x|, \text{ якщо } 0 \le x \le 1,5, \\ -(x-1)^2 + 1, \text{ якщо } 1,5 \le x \le 2, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

4, 5, 6, 7. Функцію належності нечіткого обмеження задайте самостійно. **10.** Коли значення коефіцієнтів мінімальні (песимістична позиція): $x_1^* = 18,5$, $x_2^* = 0$, $f^* = 92,5$; якщо значення коефіцієнтів максимальні (оптимістична позиція): $x_1^* = 18,2$, $x_2^* = 3,02$, $f^* = 206,19$; коли значення коефіцієнтів обрано як середні: $x_1^* = 18,2$, $x_2^* = 3,02$, $f^* = 148,59$; за критерієм Бернуллі – Лапласа: $x_1^* = 18,2$, $x_2^* = 3,02$, $f^* = 129,79$; за критерієм Байєса: $x_1^* = 18,2$, $x_2^* = 3,02$, $f^* = 135,4$; якщо коефіцієнти дорівнюють найбільш імовірним значенням: $x_1^* = 18,5$, $x_2^* = 0$, $f^* = 185$. **11.** Коли значення коефіцієнтів мінімальні (песимістична позиція): $x_1^* = 7,58$, $x_2^* = 1,01$, $f^* = 23,75$; якщо значення коефіцієнтів максимальні (оптимістична позиція): $x_1^* = 7,14$, $x_2^* = 1,9$, $f^* = 100,9$; коли значення коефіцієнтів обрано як середні: $x_1^* = 7,24$, $x_2^* = 1,74$, $f^* = 62,14$; за критерієм Бернуллі – Лапласа: $x_1^* = 7,28$, $x_2^* = 1,67$, $f^* = 57,65$; за критерієм Байєса: $x_1^* = 7,47$, $x_2^* = 1,3$, $f^* = 63,86$; якщо коефіцієнти дорівнюють найбільш імовірним значенням: $x_1^* = 7,58$, $x_2^* = 1,01$, $f^* = 94,99$.

Завдання В.

1. Позначимо через x_{ij} кількість продукції, що закуповується у i-го постачальника і продається j-му покупцеві. Тоді модель має такий вигляд:

$$f_1(x_{11},\dots x_{MN}) = \sum_{j=1}^{N} q_j s_j + \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{M} x_{ij} - q_j\right) r_j - \sum_{i=1}^{M} p_i t_i - \sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j=1}^{N} x_{ij} - p_i\right) k_i \to \max,$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{N} x_{ij} \mathrel{\tilde{\ge}} p_i, \; i = \overline{1,M}; \\ \sum\limits_{i=1}^{M} x_{ij} \mathrel{\tilde{\ge}} q_j, \; j = \overline{1,N}; \\ x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,M}, i = \overline{1,M}. \end{cases}$$

2. З огляду на позначення в п.1

$$f_1\left(x_{11},\dots x_{MN}\right)=\sum_{j=1}^{N}q_j\tilde{s}_j+\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{M}x_{ij}-q_j\right)\tilde{r}_j-\sum_{i=1}^{M}p_i\tilde{t}_i-\sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j=1}^{N}x_{ij}-p_i\right)\tilde{k}_i\to\max,$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{N}x_{ij}\ge p_i,\ i=\overline{1,M};\\ \sum_{i=1}^{M}x_{ij}\ge q_j,\ j=\overline{1,N};\\ x_{ij}\ge 0, i=\overline{1,M}, i=\overline{1,M}.\end{cases}$$

3. Позначення: доменні шлаки – x_1, хвости ЦГЗК – x_2, вапняно-доломітні матеріали – x_3, пісок – x_4 та суглинок – x_5, $\varphi(x) = 467x_1 + 380x_2 - 54x_3 + 87x_4 - 120x_5 - 23{,}25$;

$$f\left(x_1,\dots x_5\right)=\sum_{i=1}^{5}c_ix_i\to\max,$$

$$\begin{cases}20\le\varphi(x)\le 60,\\ 3x_1+15x_2\le 399,\\ 2x_1+x_2\le 52,\\ x_1+2x_2\le 40,\\ 10x_1+x_2\cong 18,\\ 5x_1+10x_2\le 65,\end{cases}$$

$$x_1,\dots x_5\ge 0,$$

4. З огляду на позначення в п.3 $f\left(x_1,\dots x_5\right)=\sum_{i=1}^{5}c_ix_i\to\max$, враховуючи такі обмеження:

$$\begin{cases}20\le\varphi(x)\le 60,\\ 3x_1+15x_2\le 399,\\ 2x_1+x_2\le 52,\\ x_1+2x_2\le 40,\\ 10x_1+x_2\cong 18,\\ 5x_1+10x_2\le 65,\end{cases}$$

$$x_1,\dots x_5\ge 0,$$

5. Позначення: x_i – кількість сплаву типу i, i = 1, 2,…5.

$$f\left(x_1,\dots x_5\right)=8x_1+17x_2+10x_3+12x_4+15x_5\to\min,$$

$$\begin{cases}0,45x_1+0,4x_2+0,4x_3+0,35x_4+0,2x_5\approx 0,5\sum_{i=1}^{5}x_i,\\ 0,3x_1+0,5x_2+0,3x_3+0,25x_4+0,7x_5\approx 0,25\sum_{i=1}^{5}x_i,\\ x_1,\dots x_5\ge 0.\end{cases}$$

6. Позначення: x_i – кількість сплаву типу i, $\tilde{c}_i$, i = 1, 2,…5, нечіткий параметр, який описує його вартість i.

$$f\left(x_1,\dots x_5\right)=\sum_{i=1}^{5}\tilde{c}_i x_i \to \min,$$

$$\begin{cases} 0,45x_1+0,4x_2+0,4x_3+0,35x_4+0,2x_5 \approx 0,5\sum_{i=1}^{5}x_i, \\ 0,3x_1+0,5x_2+0,3x_3+0,25x_4+0,7x_5 \approx 0,25\sum_{i=1}^{5}x_i, \\ x_1,\dots x_5 \ge 0. \end{cases}$$

7. Позначення: x_i – кількість вугілля, видобутого на ділянці i, i = 1, 2, 3.

$$f\left(x_1, x_2\right)=1184,21x_1+1381,78x_2+1083,52x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 0,49x_1+0,37x_2+0,23x_3 \approx 0,47\left(x_1+x_2+x_3\right), \\ 0,7x_1+0,8x_2+0,10x_3 \approx 0,1\left(x_1+x_2+x_3\right), \\ 0,018x_1+0,021x_2+0,03x_3 \approx 0,3\left(x_1+x_2+x_3\right), \\ 1200 \le x_1 \le 1650, \\ 600 \le x_2 \le 1090, \\ 530 \le x_3 \le 1270, \\ x_1+x_2+x_3 \ge 3000 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

8. Позначення: x_1, x_2, x_3 – кількість котлів виду Vestal 12, 14,17 відповідно, x_4, x_5 – кількість котлів виду ВПГ-18, 23 відповідно; $\tilde{c}_i$, i = 1, 2,…5, нечіткий параметр, який описує проміжки цін на різні марки котлів.

$$f\left(x_1,\dots x_5\right)=\sum_{i=1}^{5}\tilde{c}_i x_i \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3+x_4+x_5 \le 230, \\ 2x_1+3x_2+2x_3+x_4+2x_5 \le 243, \\ 4x_1+2x_2+4x_3+2x_4+x_5 \le 211, \\ 2x_1+3x_2+x_3+4x_4+2x_5 \le 300, \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4+x_5 \le 176, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+3x_4+x_5 \le 250, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+3x_4+x_5 \le 287, \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4+2x_5 \le 213, \\ 2x_1+x_2+2x_3+2x_4+2x_5 \le 186, \end{cases}$$

$$x_1,\dots x_5 \ge 0, \text{ цілі.}$$

Відповіді до завдань розділу 5

Завдання А

1. $X^{н.д}=\left\{\left(x_1 \backslash 0,315\right),\left(x_2 \backslash 0,32\right),\left(x_3 \backslash 1\right)\right\}$, $x^*=x_3$. **2.** Передбачити, що $\lambda_1=\lambda_2=0,5$; $X^{н.д}=\left\{\left(x_1 \backslash 0,875\right),\left(x_2 \backslash 0,5\right),\left(x_3 \backslash 85\right)\right\}$, $x^*=x_1$. **3.** $X^{н.д}=\left\{\left(x_1 \backslash 0,8\right),\left(x_2 \backslash 0,5\right),\left(x_3 \backslash 84\right)\right\}$, $x^*=x_3$.

Список літератури

1. Абрамович Ф. П. Решение нечетких систем линейных алгебраических уравнений LR-типа / Ф. П. Абрамович, М. А. Вагенкнехт, Я. И. Хургин; Рижский политех. ин-т. // Методы и системы принятия решений. – Рига : РПИ, 1987. – С. 35 – 47.
2. Адлер Ю. П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю. П. Адлер, Е. В. Маркова, Ю. В. Грановский. – Москва : Наука, 1976. – 280 с.
3. Алексеев А. В. Проблемы разработки математического обеспечения выполнения нечетких алгоритмов / А. В. Алексеев // Модели выбора альтернатив в нечеткой среде. – Рига, 1984. – С. 79 – 82.
4. Алексеев А. В. Применение нечеткой математики в задачах принятия решений / А. В. Алексеев; Рижский политех. ин-т. // Методы и системы принятия решений. – Рига : РПИ, 1983. – С. 38 – 42.
5. Аленфельд Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Аленфельд, Ю. Херцбергер. – Москва : Мир, 1987. – 360 с.
6. Алтунин А. Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях / А. Е. Алтунин, М. В. Семухин; Тюменский государственный университет. – Тюмень : Изд-во Тюменского гос. ун-та, 2000. – 352 с.
7. Беллман Р. Вопросы принятия решений в расплывчатых условиях / Р. Беллман, Л. Заде // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – Москва : Мир, 1976. – 46 с.
8. Блюмин С. Л. Введение в математические методы принятия решений / С. Л. Блюмин, И. А. Шуйкова. – Липецк : Изд-во Липецкого гос. пед. ин-та, 1999. – 100 с.
9. Борисов А. Н. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А. Н. Борисов, А. В. Алексеев, Г. В. Меркурьева. – Москва : Радио и связь, 1989. – 304 с.
10. Борисов А. Н. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования / А. Н. Борисов, О. А. Крумберг, И. П. Федоров. – Рига : Зинатне, 1990. – 184 с.
11. Борисов А. Н. Методика оценки функций принадлежности элементов размытого множества / А. Н. Борисов, Я. Я. Осис; Рижский политех. ин-т // Кибернетика и диагностика. – Рига : РПИ, 1970. – С. 125 – 134.
12. Бочарников В. П. Fuzzy-технология: Математические основы. Практика моделирования в экономике / В. П. Бочарников. – Санкт-Петербург : Наука, 2000. – 328 с.
13. Бочарников В. П. Fuzzy-технология: Основы моделирования и решения экспертно-аналитических задач / В. П. Бочарников, С. В. Свешников. – Киев : Эльга, Ника-Центр, 2003. – 296 с.
14. Воловенко Д. А. Подходы к построению интеллектуальной системы, управляющей кислородным конвертером / Д. А. Воловенко, Т. А. Желдак // Автоматизація: проблеми, ідеї, рішення: Матеріали міжнар. наук.-техн. конф.

Севастополь, 5 – 9 вересня 2011 р. – Севастополь : СевНТУ. – 2011. – С. 225 – 227.

15. Гнатієнко Г. М. Експертні технології прийняття рішень / Г. М. Гнатієнко, В. Є. Снитюк. – Київ : Маклаут, 2008. – 444 с.

16. Грешилов А. А. Как принять наилучшее решение в реальных условиях? /А. А. Грешилов. – М. : Радио и связь, 1991. – 317 с.

17. Губко М. В. Лекции по принятию решений в условиях нечеткой информации [Электронный ресурс] / М. В. Губко. – Москва, 2004. – Режим доступа: http://www.mtas.ru/search/search_results_ubs_new.php?publication_id=2703&IBLOCK_ID=10.

18. Джарратано Дж. Экспертные системы: принципы разработки и программирование / Дж. Джарратано, Г. Райли. – 4-е изд.: пер. с англ. – Москва : И.Д. Вильямс, 2008. – 1152 с.

19. Джонс М. Т. Программирование искусственного интеллекта в приложениях / М. Т. Джонс. – Москва : ДМК Пресс, 2004. – 312 с.

20. Желдак Т. А. Використання систем самонавчання для ідентифікації марки сталі в киснево-конвертерному виробництві / Т. А. Желдак, Н. А. Кучеренко; Мін-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т // Науковий вісник НГУ. – Дніпропетровськ : НГУ. – 2011. – № 1. – С. 94 – 98.

21. Желдак Т. А. Подходы к построению интеллектуальной системы, управляющей кислородным конвертером / Т. А. Желдак, Д. А. Воловенко; Мін-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т // Науковий вісник НГУ. – Дніпропетровськ : НГУ. – 2011. – № 5 – С. 133–136.

22. Желдак Т. А. Застосування методів формування знань в складі інтелектуальної СППР оптимізації процесу розкислення сталі в конвертерному виробництві / Т. А. Желдак, В. В. Слєсарєв, Д. О. Воловенко // Системні технології. – Вип. 3 (86). – Дніпропетровськ, 2013. – С. 29 – 39.

23. Желдак Т. А. Система підтримки прийняття рішень планування виробництва та контролю перебігу технологічного процесу / Т. А. Желдак, Д. М. Гаранжа // 17-та міжнародна коференція з автоматичного управління “Автоматика-2010”. Тези доповідей, Т. 1 / Мін-во освіти і науки України; Харк. нац. ун-т радіоелектроніки. – Харків : ХНУРЕ, 2010. – С. 212 – 214.

24. Желдак Т. А. Системный анализ процесса горячей прокатки бесшовных труб с оптимизацией системы обработки заказов / Т. А. Желдак // Междун. науч.-техн. конф. «Информационные технологии и информационная безопасность в науке, технике и образовании "ИНФОТЕХ-2011"». Севастополь, 5 – 10 сентября 2011 г. – Тезисы докл. / Мин-во образ. и науки Украины, Севастопольский нац. техн. ун-т. – Севастополь : СевНТУ. – 2011. – С. 133 – 134.

25. Желдак Т. А. Експертна система статистичного контролю механічних властивостей прокатної продукції / Т. А. Желдак, Д. М. Гаранжа // Праці VII міжнародної школи-семінару «Теорія прийняття рішень» / Мін-во освіти і науки України, Ужгор. нац. ун-т. – Ужгород : УжНУ, 2014. – С. 107 – 108.

26. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде. – Москва : Мир, 1976. – 165 с.

27. Заде Л. А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений / Л. А. Заде // Математика сегодня. – Москва : Знание, 1974. – С. 5 – 49.

28. Зайченко Ю. П. Исследование операций: нечеткая оптимизация. учеб. пос. / Ю. П. Зайченко. – Киев : Вища шк., 1991. – 191 с.

29. Зайченко Ю. П. Основи проектування інтелектуальних систем: навч. посіб. для вузів / Ю. П. Зайченко. – Київ : Слово, 2004 . – 352 с.

30. Зеленцов Д. Г. Использование принципа обобщения нечётких параметров агрессивной среды в моделях оптимизации конструкций / Д. Г. Зеленцов, Л. И. Короткая // Математичне моделювання. – Вип. – 1(24). – 2011. – С. 20 – 23.

31. Зеленцов Д. Г. Моделирование задач весовой оптимизации корродирующих конструкций при нечеткой исходной информации / Д. Г. Зеленцов, Л. И. Короткая // Вопросы химии и химической технологии. – 2010. – № 1. – С. 202 – 205.

32. Зеленцов Д. Г. Моделирование нечётких ограничений в задачах оптимизации корродирующих конструкций / Д. Г. Зеленцов, Л. И. Короткая // Проблеми інформаційних технологій. – 2010. – № 1 (007). – С. 26 – 31.

33. Зеленцов Д. Г. Оптимальное проектирование корродирующих конструкций при интервальных характеристиках параметра агрессивной среды / Д. Г. Зеленцов, Л. И. Короткая // Системні технології. [Регіональний міжвузівський збірник наукових праць]. – Вип. 4 (69). – 2010. – С. 51–57.

34. Зеленцов Д. Г. Технологии вычислительного интеллекта в задачах моделирования динамических систем: монография / Д. Г. Зеленцов, Л. И. Короткая. – Днепр : Баланс-Клуб, 2018. – 178 с. (http://dx.doi.org/10.32434/mono-1-ZDG-KLI)

35. Ибрагимов В. А. Элементы нечеткой математики / В. А. Ибрагимов. – Баку : АГНА, 2010. – 394 с.

36. Исследование операций. Т. 1. Методологические основы и математические методы: пер. с англ. / под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – Москва : Мир, 1981. – 712 с.

37. Галушко О. С. Вибір ефективних напрямків розвитку промислового підприємства в умовах глобалізації на основі економіко-математичного моделювання / О. С. Галушко, Ю. В. Никифорова, Л. С. Коряшкіна // Економічний вісник НГУ. – 2012. – № 3. – С. 103 – 115.

38. Казиев В. М. Введение в анализ, синтез и моделирование систем: учебное пособие / В. М. Казиев; Интернет-ун-т инф. техн. – 2-е изд. – Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 244 с.

39. Короткая Л. И. Моделирование поведения корродирующих конструкций при неполной информации о параметрах агрессивной среды /Л. И. Короткая // Вісник НТУ «ХПІ». 2016. – № 16 (1188). – С. 48 – 52.

40. Короткая Л. И. Нечёткое моделирование поведения элементов химического оборудования / Л. И. Короткая // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2013. – № 2/4 (62). – С. 12 – 15.

41. Короткая Л. И. Проблемные аспекты решения задач прогнозирования долговечности корродирующих конструкций при неполной информации /Л. И. Короткая // Математическое моделирование. – 2013. – № 1 (28). – С. 8 – 10.

42. Короткая Л. И. Способы формализации неточных данных в задачах прогнозирования долговечности корродирующих конструкций /Л. И. Короткая // Системні технології [Регіональний міжвузівський збірник наукових праць]. – Вип. 5 (88). – 2013. – С. 98 – 105.

43. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – Москва : Радио и связь, 1982. – 432 с.

44. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH / А. В. Леоненков. – Санкт-Петербург : БХВПетербург, 2005. – 736 с.

45. Малышев Н. Г. Нечеткие модели для экспертных систем в САПР / Н. Г. Малышев, Л. С. Бернштейн, А. В. Боженюк. – Москва : Энергоатомиздат, 1991. – 136 с.

46. Мелихов А. Н. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой / А. Н. Мелихов, Л. С. Бернштейн, С. Я. Коровин. – Москва : Наука, 1990. – 272 с.

47. Недосекин А. О. Методологические основы моделирования финансовой деятельности с использованием нечетко-множественных описаний: дис. … д-ра экон. наук: 08.00.13; защищена в 2003 г. / А. О. Недосекин. – Санкт-Петербург, 2003 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.mirkin/ru/_docs/ doctor005/pdf.

48. Нестеров М. Е. Повышение эффективности устаревшего производства с помощью современных самообучающихся систем поддержки принятия решений на примере кислородно-конвертерного цеха ДМЗ им. Петровского / М. Е. Нестеров, Т. А. Желдак // Збірник наукових праць НГУ; Мін-во освіти і науки України; Нац. гірн. ун-т. – Дніпропетровськ : НГУ. – 2010. – № 34. – Т. 2. – С. 202 – 207.

49. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / под ред. Д. А. Поспелова. – Москва : Наука, 1986. – 312 с.

50. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения / под ред. Р. Ягера. – Москва : Радио и связь, 1986. – 406 с.

51. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский. – Москва : Наука, 1981. – 206 с.

52. Пивкин В. Я. Нечеткие множества в системах управления. Метод. пос. / В.Я. Пивкин, Е.П. Бакулин, Д.И. Кореньков. – Новосибирск : НГУ, 1997. – 42 с.

53. Прикладные нечеткие системы / под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. – пер. с япон. – Москва : Мир, 1993. – 368 с.

54. Павлов А. Н. Принятие решений в условиях нечеткой информации: учеб. пос. / А. Н. Павлов, Б. В. Соколов; Санкт-Петербургский гос. ун-т аэрокосмического приборостроения. – Санкт-Петербург : СПб ГУАП, 2006. – 72 с.

55. Романов В. Н. Системный анализ для инженеров / В. Н. Романов; Северо-западный гос. заоч. техн. ун-т. – Санкт-Петербург : СЗГЗТУ, 2006. – 186 с.

56. Рубанов В. Г. Интеллектуальные системы автоматического управления. Нечеткое управление в технических системах: учеб. пос. [Электронный ресурс] / В. Г. Рубанов, А. Г. Филатов; Федеральное агентство по образованию, Белгородский гос. технол. ун-т им. В. Г. Шухова. – 2-е изд., стер. – Белгород : БГТУ им. В. Г. Шухова, 2010. – 170 с. – Режим доступа: http://nrsu.bstu.ru/.

57. Рутковская Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский. – пер. с польск. – Москва : Горячая линия – Телеком, 2007. – 452 с.

58. Рыжов А. П. Элементы теории нечетких множеств и ее приложений / А. П. Рыжов. – Москва, 2003. – 81 с.

59. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. – Москва : Радио и связь, 1993. – 278 с.

60. Слєсарєв В. В. Інтегровані системи керування багатоетапним металургійним виробництвом на прикладі прокатки труб / В. В. Слєсарєв, Т. А. Желдак // Системні технології. – 2011. – № 4. – С. 77 – 84.

61. Снитюк В. Є. Прогнозування. Моделі, методи, алгоритми / В. Є. Снитюк. – Київ : Маклаут, 2008. – 364 с.

62. Советов Б. Я. Моделирование систем: учеб. для вузов // Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – Москва : Высш. шк., 2001. – 343 с.

63. Теория выбора и принятия решений / И. М. Макаров, Т. М. Виноградская, А. А. Рубчинский, В. Б. Соколов. – Москва : Наука, 1982. – 328 с.

64. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности / Р. И. Трухаев. – Москва : Наука, 1981. – 168 с.

65. Ус С. А. Моделі й методи прийняття рішень: навч. посіб. / С. А. Ус, Л. С. Коряшкіна; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – 2-ге вид. випр. – Дніпро : НТУ «ДП», 2018. – 302 с.

66. Ус С. А. Теорія нечітких множин у системах прийняття рішень: навч. посіб. / С. А. Ус; Мін-во освіти і науки України, Нац. гірн. акад. України. – Дніпропетровськ : НГА України, 2001. – 86 с.

67. Ткачев В. В. Идентификация управления сушкой зерна в шахтных зерносушилках на основе нечетких множеств / В.В. Ткачев, К.В. Соснин, С.А. Ус // Международная научно-техническая конференция «Проблемы ресурсо- и энергосберегающих технологий в промышленности и АПК» (23 – 26 сентября, 2014) Иваново, 2014 – С. 123 – 125.

68. Тимошенко Л. В. Оптимізація запасів сировини на виробничому підприємстві в умовах неповноти інформації / Л. В. Тимошенко, С. А. Ус // Економічний Вісник НГУ. – 2013. – № 4. – С. 147 – 153.

69. Тимошенко Л. В. Управління витратами екологічної системи при підземному видобуванні рудної сировини / Л. В. Тимошенко, С. А. Ус // Науковий вісник НГУ. – 2010. – № 7 – 8. – С. 128 – 134.

70. Ус С. А. Обоснование параметров управления запасами сырья на производственном предприятии [Электронный ресурс] / С. А. Ус, Л. В. Тимошенко // Наука XXI века: актуальные направления развития: сб. науч. ст. IV Междунар. заоч. науч.-практ. конф., посвящ. 85-летию Самар. гос. экон. ун-та, 30 сент. 2016 г. / [редкол.: Г. Р. Хасаев, С. И. Ашмарина (отв. ред.) и др.]. – Вып. 2 : в 2 ч. – Самара : Изд-во Самар. гос. экон. ун-та, 2016. – Ч. 2. – 248 с. – С. 190 – 195. – http://si.sseu.ru/content/uvazhaemye-kollegi-8.

71. Ус С. А. Задача оптимального розбиття множин із нечітким цільовим функціоналом / С. А. Ус // Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНеМ-2011) Матеріали всеукраїнського наукового семінару (м. Полтава 26 – 27 серп. 2011) Укр. федер. інф-ки, Ін-т кіберн. ім. В. М. Глушкова Нац. акад. наук України, Полтав. ун-т економіки і торгівлі. – Полтава : ПУЕТ, 2013. – С.107 – 109.

72. Ус С. А. Застосування інтервальної регресійної моделі до задачі визначення оптимального складу суміші / С. А. Ус, К. С. Іщенко, А. О. Корела // Науковий вісник НГУ. – 2011. – № 6. – С. 126 – 130.

73. Шев'яков В. О. Програмна підтримка прийняття рішень при виборі маршруту прокатки безшовних труб в умовах НТЗ «Інтерпайп» / В. О. Шев'яков, Т. А. Желдак, Д. М. Гаранжа // Системний аналіз та інформаційні технології: Матеріали XI міжнар. наук.-техн. конф. (26 – 30 трав. 2009 р., Київ) – Київ : Нац. техн. ун-т «Київ. політехн. ін-т». – 2009. – С. 376.

74. Шелудько А. О. Інформаційна підсистема формалізації нечіткої інформації у прикладних задачах / А. О. Шелудько, Л. І. Коротка // Комп'ютерне моделювання: аналіз, управління, оптимізація. – 2018. – № 2 (4). – С. 81 – 88. (http://dx.doi.org/10.32434/2521-6406-2018-4-2-81-88).

75. Штовба С. Д. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику / С. Д. Штовба. – URL: matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/bookl/.

76. Якушкина Н. Г. Основы теории нечетких и гибридных систем / Н. Г. Якушкина. – Москва : Финансы и статистика, 2004. – 320 с.

77. Яхъяева Г. Э. Нечеткие множества и нейронные сети: учебн. пос. / Г. Э. Яхъяева; Интернет-ун-т инф. техн. – 2-е изд., испр. – Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 316 с.

78. Іванова Є. О. Інтелектуальна підсистема діагностування захворювань на основі аналізу крові / Є. О. Іванова, Л. І. Коротка // Комп'ютерне моделювання: аналіз, управління, оптимізація. – 2017. – № 2 (2). – С. 35 – 41. (DOI: http://dx.doi.org/10.32434/2521-6406-2017-2-2).

79. Іщенко К. С. Обґрунтування складу твердіючої суміші для закладки виробленого простору з використанням інтервальної регресійної моделі / К. С. Іщенко, С. А. Ус, А. О. Корела // Геотехнічна механіка. Міжвід. зб. наук.

праць / Ін-т геотехнічної механіки ім. М. С. Полякова НАН України. – Дніпропетровськ, 2011. – Вип. 95. – С. 54 – 62.

80. Buckley J. The Fuzzv Mathematics of Finance / J. Buckley // Fuzzv Sets & Systems. – 1987. – № 21. – P. 47 – 67.

81. Fuller R. Introduction to Neuro-Fuzzy Systems / R. Fuller // Advances in Soft Computing Series. Springer. – Verlag, Berlin. – 1999. – 286 p.

82. Ian Shi. A New approach of neuro- fuzzy learning algorithm for tuning fuzzy rules / Ian Shi, Masahara Mizumoto // Fuzzy Sets and Systems. – Vol. 112. – 2000. – P. 99 – 116.

83. Jyh-Shing. ANFIS: Adaptive — Network — Based Fuzzy Inference System / Jyh-Shing, Roger Jang; Department of Electrical Engineering and Computer Science. University of California // IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics. – 1993. – 23(3). – P. 665 – 685.

84. Korotka L. I. The use of elements of computational intelligence in problems of forecasting of corroding constructions durability / L. I. Korotka, Y.A.Korotka // Mathematical and computer modelling. Series: Technical sciences – 2017. Issue 16. – P. 64 –71.

85. Koriashkina L. S. The decision support system in selecting further industrial enterprise direction / L. S. Koriashkina, Y. Nikiforova, A. Pavlova // Energy Efficiency Improvement of Geotechnical Systems: International Forum on Energy Efficiency. – London : CRC Press Balkema, 2013. – P. 145 – 150.

86. Sosnin K. Multiobjective identification of convective drying of grain based on fussy sets / K. Sosnin, V. Tkachev, S. Us, M. Taradaichenko // Proceeding of the 19th International Drying Symposium (IDS 2014), Lyon, France, August 24 – 27, 2014. – Lyon, 2014.

87. Us S. A. A New Method to Solve a Continuous Facility Location Problem Under Uncertainty / S. A. Us // Power Engineering, Control and Inforvation Technologies in Geotechnical Systems. – London : CRC Press Balkema. – 2015. – P. 127 – 133.

88. Zadeh L. Fuzzy sets / L. Zadeh // Information and Control. – 1965. – № 8. – P. 338 –353.

89. Zadeh L. A. Fuzzy logic, neural network and soft computing / L. A. Zadeh // Communications of the ACM. − 1994. − Vol. 37. – № 3. − P. 77 – 84.

90. Zheldak T. A. Knowledge-Based Intellectual DSS of Steel Deoxidation in BOF Production Process / T. A. Zheldak, V. V. Slesarev, D. O. Volovenko // American Journal of Mining and Metallurgy. – Vol. 1.1. – 2013. – P. 7 – 10.

Додаток 1

Індивідуальні завдання до розділу 1

Тема завдання: Нечіткі множини.

Мета завдання: вивчення властивостей нечітких множин, операцій над ними, набуття навичок роботи з нечіткими множинами.

Порядок виконання завдання

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал.
2. Виконати кожен з поданих нижче пунктів завдання, використовуючи множини відповідно до варіанта (див. далі перелік), при виконанні завдань можна застосовувати стандартні засоби ЕОМ або власноруч написані програми.
3. Вибір варіанта визначає викладач.

Зміст завдання

1. Дано нечіткі множини A, B, C, D (див. табл.).

Чи будуть ці множини нормальними? Субнормальними? Визначити їхні носії.

2. Знайти перетин та об’єднання таких множин: а) A та B , б) C та D (за трьома визначеннями).

3. Визначити доповнення множин A, C.

4. Виконати операції концентрування й розтягування множин B та D .

5. Розкласти нечіткі множини A, B, D на множини рівня.

6. Знайти найближчі до множин A, B, C, D із завдання 1 звичайні множини.

7. Визначити відстань Хеммінга та евклідову відстань між такими множинами: а) A та B, б) C та D.

8. Знайти лінійний і квадратичний індекси нечіткості множин B та D.

Зауваження. У всіх завданнях прийняти, що універсальна множина для множин C і D являє собою відрізок $[0;10]$.

Варіанти індивідуальних завдань до розділу 1

№ 1

$A = $

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,4	0,7	0,8	1	1	0,9

;

$B = $

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,4	0,8	0,7	0,7	0,9

;

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{8}, \text{ якщо } 0 < x \le 2, \\ 1 - \dfrac{(4-x)^2}{8}, \text{ якщо } 2 < x < 4, \\ 1, \text{ якщо } x \ge 4; \end{cases} \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le a, \\ x-1, \text{ якщо } 1 < x \le 2, \\ 3-x, \text{ якщо } 2 < x < 3, \\ 0, \text{ якщо } x \ge 3. \end{cases}$$

№ 2

$A = $

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,1	0	0,1	0,7	0,2

;

$B = $

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	0,5	0,4	0,2	0,5	0,7	0

;

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ 2(x-1)^2, \text{ якщо } 1 < x \le 1{,}5, \\ 1 - 2(2-x)^2, \text{ якщо } 1{,}5 \le x < 2, \\ 1, \text{ якщо } 2 \le x \le 3, \\ 1 - 2(x-3)^2, \text{ якщо } 3 < x \le 3{,}5, \\ 1 - 2(4-x)^2, \text{ якщо } 3{,}5 < x \le 4, \\ 0, \text{ якщо } x > 4; \end{cases} \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 2, \\ \dfrac{x-2}{2}, \text{ якщо } 2 < x \le 4, \\ 5-x, \text{ якщо } 4 < x < 5, \\ 0, \text{ якщо } x > 5. \end{cases}$$

№ 3

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,3	0,2	0,1	0	0	0

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	0,9	0,8	0,8	0,7	0,5	0,3

;

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \le 1, \\ \dfrac{1}{1+2(x-1)}, \text{ якщо } 1 < x < 10, \\ 0, \text{ якщо } x \ge 10; \end{cases} \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1 < x < 3, \\ 1, \text{ якщо } 3 \le x \le 5, \\ 6 - x, \text{ якщо } 5 < x < 6, \\ 0, \text{ якщо } x \ge 6. \end{cases}$$

№ 4

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,4	0,7	0,8	1	1	1

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,7	0,9	1	1	0,7	0,5

;

$$\mu_C(x) = \begin{cases} \exp\left[-\dfrac{(x-3)^2}{2}\right], \text{ якщо } x \in [0; 6], \\ 0, \text{ якщо } x \notin [0; 6]; \end{cases} \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ x - 1, \text{ якщо } 1 < x < 2, \\ 1, \text{ якщо } 2 \le x \le 3, \\ 4 - x, \text{ якщо } 3 < x < 4, \\ 0, \text{ якщо } x \ge 4. \end{cases}$$

№ 5

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	0,3	0,8	1	0,9	0,5

;

$B =$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0	0,3	0,4	0,8	0,7	0,8	0,9

;

$$\mu_C(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\exp\left[-\left(x-3\right)\right]}, \text{ якщо } x\in\left[0;6\right],\\ \text{якщо } x\notin\left[0;6\right];\end{cases}\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, \text{ якщо } 0<x\le 2,\\ \dfrac{4-x}{2}, \text{ якщо } 2<x<4,\\ 0, \text{ якщо } x>4.\end{cases}$$

№ 6

$A =$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0,1	0,2	0,3	0,5	0,5	0,6	0,9

;

$B =$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0,9	0,7	0,6	0,8	0,4	0,2	0

;

$$\mu_C(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{18}, \text{ якщо } 0<x\le 3,\\ 1-\dfrac{\left(6-x\right)^2}{18}, \text{ якщо } 3<x<6,\\ 1, \text{ якщо } x\ge 6;\end{cases}\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ x-1, \text{ якщо } 1<x<2,\\ 1, \text{ якщо } 2\le x\le 3,\\ 4-x, \text{ якщо } 3<x<4,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 4.\end{cases}$$

№ 7

$A =$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0,5	0,6	0,7	0,8	1	1	0,9

;

$B =$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0	0	0,4	0,8	1	1	0,9

;

$$\mu_C(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x\le 3,\\ \dfrac{1}{1+(x-3)^2}, \text{якщо } 3<x\le 6,\\ 0, \text{ якщо } x>6;\end{cases}\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ x-1, \text{ якщо } 1<x<2,\\ 1, \text{ якщо } 2\le x\le 4,\\ 5-x, \text{ якщо } 4<x<5,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 5.\end{cases}$$

№ 8

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,2	0,5	0,8	1	0,9	0,7

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	1	0	0,2	0,5	0,5	0

;

$$\mu_C(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{8}, \text{ якщо } 0<x\le 2,\\ 1-\dfrac{(4-x)^2}{8}, \text{ якщо } 2<x<4,\\ 1, \text{ якщо } x\ge 4;\end{cases}\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1<x\le 3,\\ \dfrac{5-x}{2}, \text{ якщо } 3<x<5,\\ 0, \text{ якщо } x>5.\end{cases}$$

№ 9

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	1	0	0,5	0,5	1	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	0,2	0,5	0,7	0,9	0,1

;

$$\mu_C(x)=\begin{cases}\exp\left[-\dfrac{(x-2)^2}{2}\right], \text{ якщо } x\in[0;6],\\ 0, \text{ якщо } x\notin[0;6];\end{cases}\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1<x\le 3,\\ 4-x, \text{ якщо } 3<x<4,\\ 0, \text{ якщо } x>4.\end{cases}$$

№ 10

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	1	0,7	0,5	0,3	0	0

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,5	0,8	0,9	0,7	0,5

;

$$\mu_C(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\exp\left[-\left(x-4\right)\right]}, \text{якщо } x \in [0;\, 8], \\ 0, \text{ якщо } x \notin [0;\, 8]; \end{cases} \quad ; \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, \text{ якщо } 0 < x \le 2, \\ \dfrac{6-x}{4}, \text{ якщо } 2 < x < 6, \\ 0, \text{ якщо } x > 6. \end{cases}$$

№ 11

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,3	0,4	0,7	0,8	1	0,9	0,7

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,4	0,8	1	1	0,9

;

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \notin [0;10], \\ \dfrac{1}{1+x^2}, \text{ якщо } x \in [0;10]; \end{cases} \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ x-1, \text{ якщо } 1 < x < 2, \\ 1, \text{ якщо } 2 \le x \le 3, \\ \dfrac{5-x}{2}, \text{ якщо } 3 < x < 5, \\ 0, \text{ якщо } x \ge 5. \end{cases}$$

№ 12

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,1	0,7	0,8	1	0,5	0,1

;

$B =$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	1	0,7	0,4	0,3	0,1	0	0

;

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } 0 \le x \le 3, \\ \dfrac{1}{1+(x-3)^2}, \text{ якщо } x > 3, \\ 0, \text{ якщо } x \le 0; \end{cases} \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1 < x < 3, \\ 1, \text{ якщо } 3 \le x \le 5, \\ 6-x, \text{ якщо } 5 < x < 6, \\ 0, \text{ якщо } x \ge 6. \end{cases}$$

№ 13

$A =$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0,5	0,4	0,7	0,8	1	1	0,9

;

$B =$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0	0,3	0,4	0,8	0,7	0,7	0,9

;

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{8}, \text{ якщо } 0 < x \le 2, \\ 1-\dfrac{(4-x)^2}{8}, \text{ якщо } 2 \le x < 4, \\ 1, \text{ якщо } 4 \le x \le 5, \\ 1-\dfrac{(x-5)^2}{8}, \text{ якщо } 5 < x \le 7 \\ \dfrac{(9-x)^2}{8}, \text{ якщо } 7 < x \le 9, \\ 0, \text{ якщо } x > 9; \end{cases} \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1 < x < 3, \\ \dfrac{6-x}{3}, \text{ якщо } 3 < x < 6, \\ 0, \text{ якщо } x \ge 6. \end{cases}$$

№ 14

$A =$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0,4	0,3	0,6	0,8	0	1	0,2

;

$B=$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0	0	0,5	0,8	0,1	0,7	0,4

;

$$\mu_C(x)=\frac{1}{1+\exp\left[-2\left(x-4\right)\right]};\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \frac{x-1}{3}, \text{ якщо } 1<x\le 4,\\ 5-x, \text{ якщо } 4<x<5,\\ 0, \text{ якщо } x>5.\end{cases}$$

№ 15

$A=$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0,5	0	0,9	0,8	0,1	1	0,9

;

$B=$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0	0,3	0,2	0,5	0,9	0,7	0

;

$$\mu_C(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x\le 2,\\ \frac{1}{1+2\left(x-2\right)^2}, \text{ якщо } x>2;\end{cases}\qquad \mu_D\left(x\right)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0\\ \frac{x}{4}, \text{ якщо } x\in\left(0;4\right),\\ 1, \text{ якщо } x\ge 4\ .\end{cases}$$

№ 16

$A=$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0,5	0,4	0,1	0,8	0,6	1	0,9

;

$B=$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	1	0,5	0,4	0,8	0,6	0,7	0,9

;

$$\mu_C(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{(x-1)^2}{2}, \text{ якщо } 1<x\le 2,\\ 1-\dfrac{(3-x)^2}{2}, \text{ якщо } 2\le x<3,\\ 1, \text{ якщо } 3\le x\le 5,\\ 1-\dfrac{(x-5)^2}{2}, \text{ якщо } 5<x\le 6,\\ \dfrac{(7-x)^2}{2}, \text{ якщо } 6<x\le 7,\\ 0, \text{ якщо } x>7;\end{cases}\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{якщо } x\le 3,\\ x-3, \text{ якщо } 3<x<4,\\ 1, \text{ якщо } 4\le x\le 6,\\ 7-x, \text{ якщо } 6<x<7,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 7.\end{cases}$$

№ 17

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,1	0,4	0,5	0,8	1	0,7	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,1	0,2	0,3	0,7	0	0

;

$$\mu_C(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{8}, \text{ якщо } 0<x\le 2,\\ 1-\dfrac{(4-x)^2}{8}, \text{ якщо } 2<x<4,\\ 1, \text{ якщо } x\ge 4;\end{cases}\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1<x\le 3,\\ \dfrac{5-x}{2}, \text{ якщо } 3<x<5,\\ 0, \text{ якщо } x>5.\end{cases}$$

№ 18

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,6	0,7	0,1	0	0,4	1

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0	0,8	0,7	0,1	0,9

;

$$\mu_C(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{1}{1+\left(x-1\right)^2}, \text{ якщо } x>1.\end{cases}$$

$$\mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, \text{ якщо } 0<x\le 2,\\ \dfrac{5-x}{3}, \text{ якщо } 2<x\le 5,\\ 0, \text{ якщо } x>5.\end{cases}$$

№ 19

$A=$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,4	0,8	0,8	0,3	0,1	0,9

;

$B=$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,4	0,8	0,1	0,5	0,4

;

$$\mu_C(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ 2\left(x-1\right)^2, \text{ якщо } 1<x\le 1{,}5,\\ 1-2\left(2-x\right)^2, \text{ якщо } 1{,}5\le x<2,\\ 1, \text{ якщо } 2\le x\le 3,\\ 1-2\left(x-3\right)^2, \text{ якщо } 3<x\le 3{,}5,\\ 1-2\left(4-x\right)^2, \text{ якщо } 3{,}5<x\le 4,\\ 0, \text{ якщо } x>4;\end{cases}$$

$$\mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1<x<3,\\ 1, \text{ якщо } 3\le x\le 5,\\ 6-x, \text{ якщо } 5<x<6,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 6.\end{cases}$$

№ 20

$A=$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,5	0,7	0,2	1	0,1	0,9

;

$B=$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,1	0,2	0,5	0,8	0,7	1

;

$$\mu_C(x)=\exp\left[-\frac{(x-3)^2}{2}\right];\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1<x<3,\\ 1, \text{ якщо } 3\le x\le 5,\\ 6-x, \text{ якщо } 5<x<6,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 6.\end{cases}$$

№ 21

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,3	0,1	0,8	1	0,1	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,7	0,1	0,6	0,5	0,1	0,3	0

;

$$\mu_C(x)=\frac{1}{1+\exp\left[-(x-3)\right]};\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, \text{ якщо } 0<x\le 2,\\ \dfrac{5-x}{3}, \text{ якщо } 2<x\le 5,\\ 0, \text{ якщо } x>5.\end{cases}$$

№ 22

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,8	0,7	0,4	1	0,1	0,7

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,5	0,8	0,1	0,7	0,1

;

$$\mu_C(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{2x^2}{25}, \text{ якщо } 0<x\le 2{,}5,\\ 1-\dfrac{2(5-x)^2}{25}, \text{ якщо } 2{,}5<x<5,\\ 1, \text{ якщо } x\ge 5;\end{cases}\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, \text{ якщо } 0<x<2,\\ 1, \text{ якщо } 2\le x\le 3,\\ 4-x, \text{ якщо } 3<x<4,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 4.\end{cases}$$

№ 23

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,8	0	0,2	0,4	0	1	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,1	1	0,8	0,7	0,1	0

;

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \le 3, \\ \dfrac{1}{1+\left(x-3\right)^2}, \text{ якщо } x > 3; \end{cases} \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ x-1, \text{ якщо } 1 < x < 2, \\ 1, \text{ якщо } 2 \le x \le 4, \\ 5-x, \text{ якщо } 4 < x < 5, \\ 0, \text{ якщо } x \ge 5. \end{cases}$$

№ 24

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,2	0,4	0,3	0,8	0,1	1	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,9	0,8	1	0,5	0,9

;

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ \dfrac{\left(x-1\right)^2}{2}, \text{ якщо } 1 < x \le 2, \\ 1-\dfrac{\left(4-x\right)^2}{8}, \text{ якщо } 2 < x < 4, \\ 1, \text{ якщо } x \ge 4; \end{cases} \qquad \mu_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1 < x \le 3, \\ \dfrac{5-x}{2}, \text{ якщо } 3 < x < 5, \\ 0, \text{ якщо } x > 5. \end{cases}$$

№ 25

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,4	0,6	0,3	0,9	0	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,6	0,8	0,1	0	0,9

;

$$\mu_C(x)=\frac{1}{1+\exp\left[-(x-3)\right]};\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, \text{ якщо } 0<x\le 2,\\ \dfrac{4-x}{2}, \text{ якщо } 2<x\le 4,\\ 0, \text{ якщо } x>4.\end{cases}$$

№ 26

$A=$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,2	0,4	0,3	0,8	0,1	1	0,9

;

$B=$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,9	0,8	1	0,5	0,9

;

$$\mu_C(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ 2(x-1)^2, \text{ якщо } 1<x\le 1{,}5,\\ 1-2(2-x)^2, \text{ якщо } 1{,}5\le x<2,\\ 1, \text{ якщо } 2\le x\le 3,\\ 1-2(x-3)^2, \text{ якщо } 3<x\le 3{,}5,\\ 1-2(4-x)^2, \text{ якщо } 3{,}5<x\le 4,\\ 0, \text{ якщо } x>4;\end{cases}\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, \text{ якщо } 0<x\le 2,\\ \dfrac{5-x}{3}, \text{ якщо } 2<x\le 5,\\ 0, \text{ якщо } x>5.\end{cases}$$

№ 27

$A=$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,2	0,4	0,3	0,8	0,1	1	0,9

;

$B=$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,9	0,8	1	0,5	0,9

;

$$\mu_C(x)=\frac{1}{1+\exp\left[-(x-2)\right]};\qquad \mu_D(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ x, \text{ якщо } 0<x\le 1,\\ \dfrac{3-x}{2}, \text{ якщо } 1<x\le 3,\\ 0, \text{ якщо } x>3.\end{cases}$$

Додаток 2

Індивідуальні завдання до розділу 2 (п. 2.1 – 2.3)

Тема завдання: Бінарні відношення.

Мета завдання: вивчення властивостей бінарних відношень, операцій над відношеннями, набуття навичок прийняття рішень на основі заданих відношень.

Порядок виконання завдання

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал.
2. Скласти програму для визначення властивостей бінарного відношення.
3. Визначити властивості даного бінарного відношення згідно з варіантом індивідуального завдання, вибір якого здійснити за рекомендацією викладача.
4. Скласти звіт про виконання завдання, який має включати такі елементи:
   - постановку індивідуального завдання;
   - лістинг програми;
   - результати роботи програми;
   - аналіз отриманих результатів.

Зміст і варіанти індивідуального завдання до розділу 2 (п. 2.1 – 2.3)

Перевірити, чи буде дане відношення рефлексивним, антирефлексивним, симетричнимм, антисиметричним, асиметричним, транзитивним. Відшукати для нього найбільший, найменший, максимальний та мінімальний елементи, якщо такі існують, і побудувати обернене й додаткове відношення.

1. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2.** $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **3.** $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $R=\begin{pmatrix}0&0&1&1&0\\0&0&1&1&0\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$. **5.** $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&0&0&1\\1&0&1&1&0\\1&0&0&1&1\\0&1&0&0&1\end{pmatrix}$. **6.** $R=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$.

7. $R=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&0&1&1\\0&1&0&0&1\end{pmatrix}$. **8.** $R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&0&0&1\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}$. **9.** $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$.

10. $R=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. **11.** $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. **12.** $R=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&1\\1&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

13. $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&0&1&1\\1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$. **14.** $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0\\1&0&0&1&1\\1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. **15.** $R=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\\0&1&1&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$.

16. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **17.** $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **18.** $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **20.** $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **21.** $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

22. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **23.** $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **24.** $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

25. $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **26.** $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **27.** $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

28. $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **29.** $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **30.** $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Додаток 3

Індивідуальні завдання до розділу 2 (п. 2.4 – 2.6)

Тема завдання: Нечіткі відношення.

Мета завдання: вивчення властивостей нечітких відношень переваги та операцій над ними.

Порядок виконання завдання

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал.
2. Визначити властивості поданих нечітких відношень згідно з варіантом індивідуального завдання, вибір якого здійснити за рекомендацією викладача.
3. Для кожного із заданих відношень визначити обернене та додаткове.
4. Знайти переріз, об'єднання, різницю та максимінну (max min), мінімаксну (min max) і максмультиплікативну (max-•) композиції нечітких відношень R_1 та R_2.

Зміст і варіанти індивідуального завдання до розділу 2 (п. 2.4 – 2.6)

Припустимо, що множина $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. На ній подано два нечіткі відношення переваги: R_1 та R_2. Визначити властивості поданих нечітких відношень, для кожного із заданих відношень визначити обернене та додаткове, знайти переріз, об'єднання, різницю та максимінну (max min), мінімаксну (min max) і максмультиплікативну (max-•) композиції заданих нечітких відношень.

1. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,9 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 1 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,6 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 & 0,5 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 1 & 0,5 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,7 & 0,9 & 0,8 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,3 & 0,8 & 0,7 \\ 0,8 & 0,5 & 1 & 0,9 & 0,6 \\ 0,7 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 1 & 0,5 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,7 & 0,9 & 0,8 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0 & 0{,}7 & 1 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}.$

9. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 1 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 1 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 1 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$

10. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}9 & 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix},$

11. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0 & 1 & 0{,}4 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 & 1 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7 & 1 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}.$

12. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}9 & 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0 & 0{,}7 & 1 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}5 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}.$

13. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,7 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,5 & 0,7 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,6 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0,8 & 0 & 0,6 \\ 0,8 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,5 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

15. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0,4 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 0,7 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,5 & 0,7 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,6 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

16. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0,6 & 0,6 \\ 0 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,7 & 0,7 & 1 & 0,7 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

17. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,5 & 0,7 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,6 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

18. $R_1=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $R_1=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 1 & 0{,}4 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}9 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$.

20. $R_1=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$.

21. $R_1=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0 & 0{,}7 & 1 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$.

22. $R_1=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0 & 0{,}7 & 1 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$.

23. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$

24. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,7 & 0,2 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,7 & 0,8 & 0,4 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$

25. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,2 & 1 & 0,1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,8 & 0,9 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,6 & 1 & 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 1 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0,8 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$

26. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,2 & 1 & 0,1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,8 & 0,9 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$

27. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,2 & 1 & 0,1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,8 & 0,9 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,7 & 0,6 & 0,4 & 1 & 0,7 \\ 0,3 & 0,4 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$

Додаток 4

Індивідуальні завдання до розділу 3

Тема завдання: Нечіткі числа.

Мета завдання: вивчення різних способів задання нечітких чисел та операцій над ними.

Порядок виконання завдання

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал.

2. Виконати завдання згідно з індивідуальним варіантом (табл. 1), вибір якого здійснити за рекомендацією викладача.

Зміст індивідуального завдання до розділу 3

1. Дано два дискретні нечіткі числа *A* та *B*:

1.1. $A=\{(1/0{,}5);(2/1);(3/0{,}8);(4/0{,}5)\}$; $B=\{(1/0{,}5);(2/1);(3/0{,}7)\}$.

1.2. $A=\{(0/0{,}1);(1/0{,}5);(2/0{,}8);(3/0{,}3)\}$; $B=\{(5/0{,}5);(6/1);(7/0{,}7)\}$.

1.3. $A=\{(3/0{,}4);(4/0{,}6);(3/0{,}8);(4/1)\}$; $B=\{(2/0{,}7);(3/1);(4/0{,}7)\}$.

1.4. $A=\{(2/0{,}6);(3/1);(4/0{,}5);(5/0{,}2)\}$; $B=\{(1/0{,}5);(2/1);(3/0{,}7)\}$.

1.5. $A=\{(0/0{,}3);(1/0{,}8);(2/0{,}1);(3/0{,}5)\}$; $B=\{(1/0{,}5);(2/1);(3/0{,}7)\}$.

1.6. $A=\{(3/0{,}2);(4/0{,}8);(3/1);(4/0{,}5)\}$; $B=\{(-2/0{,}7);(-1/1);(0/0{,}7)\}$.

1.7. $A=\{(4/0{,}5);(5/1);(6/0{,}8);(7/0{,}5)\}$; $B=\{(-1/0{,}5);(0/1);(1/0{,}7)\}$.

1.8. $A=\{(-2/0{,}1);(-1/0{,}5);(0/1);(1/0{,}5)\}$; $B=\{(1/0{,}5);(2/1);(3/0{,}7)\}$.

1.9. $A=\{(2/0{,}8);(3/0{,}1);(4/0{,}8);(5/0{,}6)\}$; $B=\{(2/0{,}7);(3/1);(4/0{,}7)\}$.

1.10. $A=\{(3/0{,}7);(4/1);(5/0{,}8);(6/0{,}5)\}$; $B=\{(3/0{,}7);(4/1);(5/0{,}7)\}$.

Застосовуючи принцип узагальнення, визначити їхню суму $(A+B)$, різницю $(A-B)$, добуток $A\cdot B$ та частку A/B (якщо вони існують).

2. Для заданих неперервних нечітких чисел визначити суму $(A+B)$, різницю $(A-B)$, добуток $A\cdot B$ та частку A/B, скориставшись принципом узагальнення. Результати подати графічно. Для обчислення можна використовувати наявні засоби інформаційних технологій або самостійно написану програму.

2.1.
$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{5}, \text{ якщо } 0<x\le 5,\\ \dfrac{10-x}{5}, \text{ якщо } 5<x\le 10,\\ 0, \text{ якщо } x>10.\end{cases} \qquad \mu_B(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1<x\le 3,\\ \dfrac{5-x}{2}, \text{ якщо } 3<x\le 5,\\ 0, \text{ якщо } x>5.\end{cases}$$

2.2.
$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 2,\\ \dfrac{x-2}{3}, \text{ якщо } 2<x\le 5,\\ \dfrac{7-x}{2}, \text{ якщо } 5<x\le 7,\\ 0, \text{ якщо } x>7.\end{cases} \qquad \mu_B(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{3}, \text{ якщо } 1<x\le 4,\\ 1, \text{ якщо } 4<x\le 6,\\ \dfrac{8-x}{2}, \text{ якщо } 6<x\le 8,\\ 0, \text{ якщо } x>8.\end{cases}$$

2.3.
$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 2,\\ \dfrac{x-2}{2}, \text{ якщо } 2<x\le 4,\\ 1, \text{ якщо } 4<x\le 7,\\ \dfrac{10-x}{3}, \text{ якщо } 7<x\le 10,\\ 0, \text{ якщо } x>10.\end{cases} \qquad \mu_B(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{3}, \text{ якщо } 1<x\le 4,\\ 1, \text{ якщо } 4<x\le 6,\\ \dfrac{8-x}{2}, \text{ якщо } 6<x\le 8,\\ 0, \text{ якщо } x>8.\end{cases}$$

2.4.
$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le a,\\ x-1, \text{ якщо } 1<x\le 2,\\ 3-x, \text{ якщо } 2<x<3,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 3.\end{cases} \qquad \mu_B(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 2,\\ \dfrac{x-2}{2}, \text{ якщо } 2<x\le 4,\\ 5-x, \text{ якщо } 4<x<5,\\ 0, \text{ якщо } x>5.\end{cases}$$

2.5. $\mu_A(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1<x<3,\\ 1, \text{ якщо } 3\le x\le 5,\\ 6-x, \text{ якщо } 5<x<6,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 6.\end{cases}$ $\mu_B(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, \text{ якщо } 0<x\le 2,\\ \dfrac{4-x}{2}, \text{ якщо } 2<x<4,\\ 0, \text{ якщо } x>4.\end{cases}$

2.6. $\mu_A(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1<x\le 3,\\ \dfrac{5-x}{2}, \text{ якщо } 3<x<5,\\ 0, \text{ якщо } x>5.\end{cases}$ $\mu_B(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ x-1, \text{ якщо } 1<x<2,\\ 1, \text{ якщо } 2\le x\le 3,\\ 4-x, \text{ якщо } 3<x<4,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 4.\end{cases}$

2.7. $\mu_A(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1<x\le 3,\\ 4-x, \text{ якщо } 3<x<4,\\ 0, \text{ якщо } x>4.\end{cases}$ $\mu_B(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ x-1, \text{ якщо } 1<x<2,\\ 1, \text{ якщо } 2\le x\le 3,\\ 4-x, \text{ якщо } 3<x<4,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 4.\end{cases}$

2.8. $\mu_A(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ x-1, \text{ якщо } 1<x<2,\\ 1, \text{ якщо } 2\le x\le 4,\\ 5-x, \text{ якщо } 4<x<5,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 5.\end{cases}$ $\mu_B(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, \text{ якщо } 0<x\le 2,\\ \dfrac{6-x}{4}, \text{ якщо } 2<x<6,\\ 0, \text{ якщо } x>6.\end{cases}$

2.9. $\mu_A(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1<x\le 3,\\ \dfrac{5-x}{2}, \text{ якщо } 3<x<5,\\ 0, \text{ якщо } x>5.\end{cases}$ $\mu_B(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ якщо } 1<x<3,\\ \dfrac{6-x}{3}, \text{ якщо } 3<x<6,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 6.\end{cases}$

2.10. $\mu_A(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{3}, \text{ якщо } 1<x\le 4,\\ 5-x, \text{ якщо } 4<x<5,\\ 0, \text{ якщо } x>5.\end{cases}$ $\mu_B(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 3,\\ x-3, \text{ якщо } 3<x<4,\\ 1, \text{ якщо } 4\le x\le 6,\\ 7-x, \text{ якщо } 6<x<7,\\ 0, \text{ якщо } x\ge 7.\end{cases}$

3. Записати аналітично нечіткі *L–R*-числа A та B та зобразити їх графічно. Визначити $A+B$, $A-B$, $A\cdot B$, A/B, A^{-1}. Результати навести у вигляді *L–R*-числа, аналітичного запису й графічного подання.

3.1. $A=\langle 3;2;1\rangle, B=\langle 4;2;2\rangle$, $L=f_1,\ R=f_1$.

3.2. $A=\langle 3;2;2\rangle, B=\langle 4;3;3\rangle$, $L=f_1, R=f_2$.

3.3. $A=\langle 3;1;3\rangle, B=\langle 4;3;4\rangle$, $L=f_2, R=f_3$.

3.4. $A=\langle 3;4;2;1\rangle, B=\langle 4;5;2;2\rangle$, $L=f_2,\ R=f_4$.

3.5. $A=\langle 2;3;1;3\rangle, B=\langle 4;5;3;4\rangle$, $L=f_3,\ R=f_1$.

3.6. $A=\langle 3;2;3\rangle, B=\langle 4;3;4\rangle$, $L=f_3,\ R=f_2$.

3.7. $A=\langle 3;2;1\rangle, B=\langle 4;2;2\rangle$, $L=f_4,\ R=f_3$.

3.8. $A=\langle 5;1;3\rangle, B=\langle 4;3;3\rangle$, $L=f_4\ R=f_4$.

3.9. $A=\langle 3;1;3\rangle, B=\langle 4;3;4\rangle$, $L=f_3\ R=f_3$.

3.10. $A=\langle 3;2;2\rangle, B=\langle 4;3;3\rangle$, $L=f_2\ R=f_2$.

Тут $f_1(x)=\begin{cases}1-|x|, \text{ якщо } -1<x\le 1,\\ 0 \text{ в інших випадках;}\end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases}1-x^2, \text{ якщо } -1<x\le 1,\\ 0 \text{ в інших випадках;}\end{cases}$

$f_3(x)=e^{-x^2}$; $f_4(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

4. Описати нечіткі числа, відповідно до наведеного нижче варіанта. Результат подати графічно.

4.1. Описати такі нечіткі трикутні числа (ТНЧ): «приблизно 2», «приблизно 5» і, використовуючи їх, отримати нечіткі числа : «приблизно 4», «приблизно 3», «приблизно (– 3)», «приблизно (– 1)».

4.2. Записати такі трапецоїдні нечіткі числа (ТНІ): «від 1 до 3», «від 4 до 7». Визначити їх суму, різницю, добуток та частку.

4.3. Записати такі ТНІ: «від 3 до 5», «від (– 1) до (– 0,1)». Визначити їх суму, різницю, добуток та частку.

4.4. Описати такі ТНЧ: «приблизно 3», «приблизно 5» і , використовуючи їх, отримати нечіткі числа: «приблизно 2», «приблизно 9», «приблизно 1/3», «приблизно (– 5)».

4.5. Записати такі ТНІ: «від 2 до 4», «від 1 до 2». Визначити їх суму, різницю, добуток та частку.

4.6. Описати два ТНЧ: «приблизно 2», «приблизно 6» і, використовуючи їх, отримати нечіткі числа: «приблизно 3», «приблизно 8», «приблизно 1/3», «приблизно (– 5)».

4.7. Записати такі ТНІ: «від 2 до 4», «від (– 2) до (– 1)». Визначити їх суму, різницю, добуток та частку.

4.8. Описати два нечітких трикутних числа «приблизно 1», «приблизно 3» й, використовуючи їх, отримати такі нечіткі числа: «приблизно 4», «приблизно 2», «приблизно 1/3», «приблизно (– 2)».

4.9. Записати ТНІ: «від 1 до 2», «від (–2) до (–1)». Визначити їхню суму, різницю, добуток та частку.

4.10. Описати два нечітких трикутних числа «приблизно 2», «приблизно 3» і, використовуючи їх, отримати такі нечіткі числа : «приблизно 5», «приблизно 1», «приблизно 1/3», «приблизно (– 2)».

Таблиця Д1

Перелік варіантів завдань до розділу 3

№ варіанта	№ завдання			
1	1.1	2.5	3.1	4.1
2	1.2	2.6	3.2	4.2
3	1.3	2.7	3.3	4.3
4	1.4	2.8	3.4	4.4
5	1.5	2.9	3.5	4.5
6	1.6	2.10	3.6	4.6
7	1.7	2.1	3.7	4.7
8	1.8	2.2	3.8	4.8
9	1.9	2.3	3.9	4.9
10	1.10	2.4	3.10	4.10
11	1.1	2.1	3.4	4.1
12	1.2	2.2	3.5	4.2
13	1.3	2.3	3.6	4.3
14	1.4	2.4	3.7	4.4
15	1.5	2.5	3.8	4.5
16	1.6	2.6	3.9	4.6
17	1.7	2.7	3.10	4.7
18	1.8	2.8	3.1	4.8
19	1.9	2.9	3.2	4.9
20	1.10	2.10	3.3	4.10
21	1.1	2.7	3.7	4.1
22	1.2	2.8	3.8	4.2
23	1.3	2.9	3.9	4.3
24	1.4	2.10	3.10	4.4
25	1.5	2.1	3.1	4.5
26	1.6	2.2	3.2	4.6
27	1.7	2.3	3.3	4.7
28	1.8	2.4	3.4	4.8
29	1.9	2.1	3.5	4.9
30	1.10	2.2	3.6	4.10

Додаток 5

Індивідуальні завдання до розділу 4

Тема роботи: Розв’язування задач нечіткого математичного програмування.

Мета роботи: вивчення методів розв’язування задач нечіткого математичного програмування

Порядок виконання роботи

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал.
2. Розв’язати запропоновану у варіанті задачу нечіткої оптимізації, використовуючи один з таких методів: зведення до задачі досягнення нечітко визначеної мети, розкладання на множини рівня, зведення до задачі багатокритерійної оптимізації.
4. Скласти звіт про виконання роботи, який повинен містити такі елементи
   - постановку задачі;
   - опис розв’язування задачі із необхідною деталізацією;
   - результати розв’язування задачі;
   - аналіз отриманих результатів.

Варіанти індивідуальних завдань до розділу 4

1.
$$f(x_1,x_2)=2x_1+5x_2\to\max;$$
$$x_1+x_2\ge 4,$$
$$4x_1+6x_2\le\approx 32,$$
$$x_1-x_2\le 2,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

2.
$$f(x_1,x_2)=x_1-5x_2\to\max;$$
$$x_1+x_2\ge 4,$$
$$4x_1+6x_2\le\approx 32,$$
$$-x_1+x_2\le 1,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

3.
$$f(x_1,x_2)=x_1-x_2\to\max;$$
$$x_1+2x_2\ge 2,$$
$$2x_1+5x_2\le\approx 10,$$
$$12x_1+8x_2\le 24,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

4.
$$f(x_1,x_2)=2x_1+3x_2\to\max;$$
$$x_1+2x_2\ge 2,$$
$$2x_1+5x_2\le\approx 10,$$
$$12x_1+8x_2\le 24,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

5. $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \max;$
$2x_1 + 3x_2 \geq 6,$
$x_1 + 6x_2 \leq\approx 18,$
$2x_1 + 3x_2 \leq 12,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

6. $f(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \to \max;$
$x_1 + 2x_2 \geq\approx 2,$
$2x_1 + x_2 \leq\approx 10,$
$-x_1 + x_2 \leq 3,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

7. $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \min;$
$x_1 + x_2 \geq\approx 4,$
$4x_1 + 3x_2 \leq 24,$
$3x_1 + 2x_2 \leq 24,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

8. $f(x_1, x_2) = 10x_1 - x_2 \to \max;$
$x_1 + 2x_2 \geq 2,$
$x_1 + 5x_2 \leq 10,$
$x_1 + x_2 \leq\approx 5,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

9. $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \to \min;$
$3x_1 + x_2 \geq\approx 4,$
$x_1 - 6x_2 \leq\approx 24,$
$3x_1 + 8x_2 \leq\approx 24,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

10. $f(x_1, x_2) = 12x_1 - 3x_2 \to \max;$
$2x_1 + 3x_2 \geq\approx 6,$
$2x_1 + 6x_2 \leq\approx 18,$
$2x_1 + x_2 \leq\approx 12,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

11. $f(x_1, x_2) = 2x_1 - 5x_2 \to \min;$
$x_1 + x_2 \geq\approx 4,$
$4x_1 + 6x_2 \leq 24,$
$3x_1 + 8x_2 \leq 24,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

12. $f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2 \to \max;$
$7x_1 + 2x_2 \geq\approx 21,$
$x_1 + 2x_2 \leq 10,$
$x_1 + 2x_2 \leq 4,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

13. $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \to \max;$
$x_1 + 2x_2 \geq 2,$
$2x_1 + 5x_2 \leq\approx 10,$
$2x_1 + 8x_2 \leq 24,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

14. $f(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 \to \max;$
$-3x_1 + 2x_2 \geq\approx 2,$
$2x_1 + 5x_2 \geq 10,$
$x_1 + x_2 \leq 8,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

15. $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$
$5x_1 + 2x_2 \geq 12,$
$2x_1 + x_2 \leq 10,$
$3x_1 + 6x_2 \leq\approx 24,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

16. $f(x_1, x_2) = 7x_1 - 5x_2 \to \max;$
$2x_1 + x_2 \geq\approx 4,$
$4x_1 + 6x_2 \leq\approx 24,$
$3x_1 + 8x_2 \leq\approx 24,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

17. $f(x_1,x_2)=2-3x_1+5x_2\to\max;$
$x_1+x_2\ge 4,$
$4x_1+6x_2\lesssim\!\approx 36,$
$3x_1+2x_2\le 24,$
$x_1,x_2\ge 0.$

18. $f(x_1,x_2)=4x_1-5x_2\to\min;$
$x_1+x_2\ge\!\approx 4,$
$4x_1+6x_2\le 36,$
$3x_1+8x_2\le 40,$
$x_1,x_2\ge 0.$

19. $f(x_1,x_2)=5x_1-2x_2\to\max;$
$x_1+2x_2\ge 2,$
$2x_1+5x_2\le\!\approx 10,$
$-2x_1+x_2\le 4,$
$x_1,x_2\ge 0.$

20. $f(x_1,x_2)=12x_1-5x_2\to\min;$
$x_1+2x_2\ge\!\approx 2,$
$2x_1+5x_2\le 10,$
$12x_1+8x_2\le 24,$
$x_1,x_2\ge 0.$

21. $f(x_1,x_2)=2x_1+5x_2\to\max;$
$2x_1+3x_2\ge 16,$
$x_1+6x_2\le\!\approx 28,$
$2x_1+3x_2\le 24,$
$x_1,x_2\ge 0.$

22. $f(x_1,x_2)=2x_1+3x_2\to\max;$
$x_1-2x_2\ge 2,$
$x_1+2x_2\le\!\approx 10,$
$2x_1+x_2\le 24,$
$x_1,x_2\ge 0.$

23. $f(x_1,x_2)=12x_1+5x_2\to\min;$
$2x_1+x_2\ge\!\approx 14,$
$4x_1+6x_2\le\!\approx 32,$
$3x_1+8x_2\le\!\approx 32,$
$x_1,x_2\ge 0.$

24. $f(x_1,x_2)=5x_1-2x_2\to\max;$
$-x_1+2x_2\ge 6,$
$x_1+2x_2\le\!\approx 10,$
$2x_1-x_2\le 8,$
$x_1,x_2\ge 0.$

25. $f(x_1,x_2)=8x_1+5x_2\to\min;$
$7x_1+3x_2\ge\!\approx 21,$
$4x_1+6x_2\le 48,$
$3x_1+8x_2\le 48,$
$x_1,x_2\ge 0.$

26. $f(x_1,x_2)=2x_1-5x_2\to\max;$
$2x_1+3x_2\ge 6,$
$x_1+6x_2\le 18,$
$2x_1+3x_2\le\!\approx 12,$
$x_1,x_2\ge 0.$

27. $f(x_1,x_2)=2x_1+5x_2\to\min;$
$x_1+x_2\ge 4,$
$4x_1+3x_2\le\!\approx 24,$
$3x_1+2x_2\le 24,$
$x_1,x_2\ge 0.$

28. $f(x_1,x_2)=2x_1+3x_2\to\max;$
$x_1+2x_2\ge 2,$
$2x_1+5x_2\le 10,$
$12x_1+8x_2\le\!\approx 24,$
$x_1,x_2\ge 0.$

Додаток 6

Індивідуальні завдання до розділу 5

Тема завдання: Прийняття рішень на основі нечітких відношень переваги.

Мета завдання: вивчення властивостей нечітких відношень переваги та методів прийняття рішень з їх використанням.

Порядок виконання завдання:

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал.

2. Здійснити вибір альтернативи з множини X, враховуючи переваги, описані поданими відношеннями.

3. Скласти програму, яка реалізує раціональний вибір альтернативи з даної множини на основі поданих відношень переваги.

3. Розв’язати задачу вибору згідно з варіантом індивідуального завдання.

4. Скласти звіт про виконання роботи, який повинен містити такі елементи:

– постановку індивідуального завдання;
– лістинг програми;
– результати розрахунків;
– аналіз отриманих результатів.

Зміст і варіанти індивідуального завдання до розділу 5

Нехай множина $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$. На ній подано два нечіткі відношення переваги: R_1 та R_2, значущість яких, на думку ОПР, дорівнює відповідно λ_1 і λ_2. Необхідно здійснити раціональний вибір альтернативи з множини X на основі заданих відношень переваги.

1. $$R_1=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix},\qquad R_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0 & 0{,}7 & 1 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 0{,}3$ i $\lambda_2 = 0{,}7$.

2. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7 & 1 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}6 & 0 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0{,}4$ i $\lambda_2 = 0{,}6$.

3. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0 & 0{,}7 & 1 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0{,}6$ i $\lambda_2 = 0{,}4$.

4. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0 & 0{,}7 & 1 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0{,}5$ i $\lambda_2 = 0{,}5$.

5. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 1 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 1 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 1 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0{,}2$ i $\lambda_2 = 0{,}8$.

6. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,3 & 0,8 & 0,7 \\ 0,8 & 0,5 & 1 & 0,9 & 0,6 \\ 0,7 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,4$ i $\lambda_2 = 0,6$.

7. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 1 & 0,5 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,7 & 0,9 & 0,8 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,7$ i $\lambda_2 = 0,3$.

8. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 & 0,5 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}$,

$\lambda_1 = 0,8$ i $\lambda_2 = 0,2$.

9. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 & 0,5 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 1 & 0,5 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,7 & 0,9 & 0,8 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,7$ i $\lambda_2 = 0,3$.

10. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,4 \\ 0,9 & 1 & 0,7 & 0,8 & 0,7 \\ 0,6 & 0,6 & 1 & 0,7 & 0,5 \\ 0,3 & 0,8 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,7 & 0,5 & 0,1 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 & 0,5 & 0,7 & 1 \end{pmatrix},$

$\lambda_1 = 0,6$ i $\lambda_2 = 0,4$.

11. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0,4 & 0,9 \\ 0,9 & 1 & 0,6 & 1 & 0,8 \\ 0,5 & 0,4 & 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & 1 & 0,7 & 0,6 \\ 0,1 & 1 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$

$\lambda_1 = 0,3$ i $\lambda_2 = 0,7$.

12. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,4 \\ 0,9 & 1 & 0,7 & 0,8 & 0,7 \\ 0,6 & 0,6 & 1 & 0,7 & 0,5 \\ 0,3 & 0,8 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,7 & 0,5 & 0,1 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 & 0,5 & 0,7 & 1 \end{pmatrix},$

$\lambda_1 = 0,5$ i $\lambda_2 = 0,5$.

13. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,7 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,5 & 0,7 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,6 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$

$\lambda_1 = 0,5$ i $\lambda_2 = 0,5$.

14. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0,8 & 0 & 0,6 \\ 0,8 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,5 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,7$ i $\lambda_2 = 0,3$.

15. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0,4 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 0,7 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,5 & 0,7 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,6 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,3$ i $\lambda_2 = 0,7$.

16. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0,6 & 0,6 \\ 0 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,7 & 0,7 & 1 & 0,7 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,2$ i $\lambda_2 = 0,8$.

17. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,5 & 0,7 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,6 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$. $\quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}$,

$\lambda_1 = 0,4$ i $\lambda_2 = 0,6$.

18. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0{,}7$ i $\lambda_2 = 0{,}3$.

19. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 1 & 0{,}4 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}9 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0{,}7$ i $\lambda_2 = 0{,}3$.

20. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0{,}7$ i $\lambda_2 = 0{,}3$.

21. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0 & 0{,}7 & 1 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0{,}5$ i $\lambda_2 = 0{,}5$

22. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,1$ i $\lambda_2 = 0,9$.

23. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,9$ i $\lambda_2 = 0,1$.

24. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,7 & 0,2 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,7 & 0,8 & 0,4 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,3$ i $\lambda_2 = 0,7$.

25. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,2 & 1 & 0,1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,8 & 0,9 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,6 & 1 & 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 1 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0,8 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,1$ i $\lambda_2 = 0,9$.

26. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,2 & 1 & 0,1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,8 & 0,9 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$

$\lambda_1 = 0,8$ i $\lambda_2 = 0,2$.

27. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,2 & 1 & 0,1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,8 & 0,9 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,7 & 0,6 & 0,4 & 1 & 0,7 \\ 0,3 & 0,4 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$

$\lambda_1 = 0,8$ i $\lambda_2 = 0,2$.

28. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,8 & 1 & 0,7 & 0,8 & 0,7 \\ 0,6 & 0,8 & 1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,7 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,7 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,4 & 0,7 \\ 0,7 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,7 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$

$\lambda_1 = 0,3$ i $\lambda_2 = 0,7$.

29. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$

$\lambda_1 = 0,8$ i $\lambda_2 = 0,2$.

30. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,7 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,4 & 0,7 \\ 0,7 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,7 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$

$\lambda_1 = 0,6$ i $\lambda_2 = 0,4$.

Додаток 7

Індивідуальні завдання до розділу 6

Тема завдання: Системи підтримки прийняття рішень на базі нечіткої логіки.

Мета завдання: Вивчення моделей і методів нечіткої логіки.

Порядок виконання завдання:

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал.

2. Виконати завдання відповідно до варіанта.

3. Скласти звіт про виконання роботи, який повинен містити такі елементи:

– постановку індивідуального завдання;
– опис вхідних даних за допомогою векторів лінгвістичних змінних;
– опис вихідних даних за допомогою векторів лінгвістичних змінних;
– графіки всіх описаних лінгвістичних змінних;
– таблицю, котра описує правила «якщо…, то…» поданої нижче форми;

Значення вихідної лінгвістичної змінної	Складові правила і оцінки		

– опис та обґрунтування використаних правил перетворення;
– результати розрахунків та графіки, які відповідають вихідним параметрам системи;
– дефазифікацію із використанням наближеної оцінки;
– аналіз отриманих результатів.

Приклад виконання індивідуального завдання

Постановка задачі. Розробити систему побудови рейтингу студентів на основі даних про відвідування ними лекцій, прочитанні книг і здачі лабораторних робіт. Побудувати рейтинг для двох студентів.

Послідовність виконання завдання

1. Опис вхідних даних за допомогою векторів лінгвістичних змінних.

1.1. Для опису вхідних даних про *відвідування лекцій* введемо три трапецоїдних нечітких числа:

A_1 = "низьке" $= \langle 20; 30; 20; 20 \rangle$,

A_2 = "середнє" $= \langle 50; 70; 20; 10 \rangle$,

A_3 = "високе" $= \langle 90; 100; 20; 0 \rangle$.

Отже, маємо таку нечітку змінну:

Назва змінної: ω = «відвідування лекцій»;

Терм-множина значень:

T_1 = «низьке»,

T_2 = «середнє»,

T_3 = «високе»;

Носій: U = проміжок від 0 до 100;

Синтаксичне правило: Рівень відвідування лекцій

Семантичне правило: зумовлене функціями належності, для значення T_1 це $\mu_1(u)$, для T_2 – $\mu_2(u)$, для T_3 – $\mu_3(u)$, їх зображено на рис. 1. Причому перша з них відповідає нечіткій підмножині M_1^A, друга – M_2^A, третя – M_3^A.

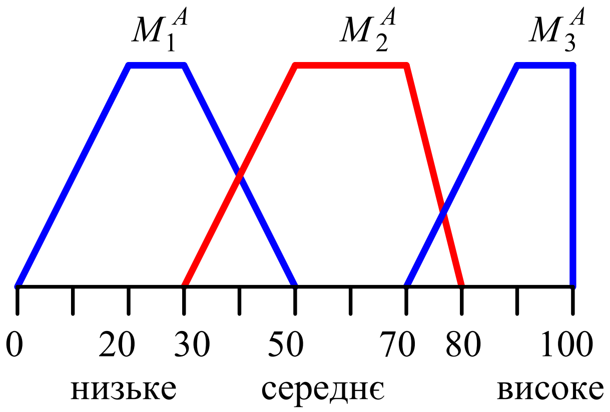


Рис.1. Графіки функцій належності лінгвістичної змінної «відвідування лекцій»

1.2. Для даних про *читання книг* (в одиницях від 0 до 10) опишемо чотири трикутних числа, а саме:

B_1 = "не читав" $= \langle 0; 0; 1 \rangle$,

B_2 = "трохи" $= \langle 2; 0; 4 \rangle$,

B_3 = "достатньо" $= \langle 4; 3; 5 \rangle$,

B_4 = "багато" $= \langle 10; 5; 0 \rangle$.

Отже, отримуємо таку нечітку змінну:

Назва змінної: ω = «читання книг»;

Терм-множина значень:

T_1 = «не читав»,

T_2 = «трохи»,

T_3 = «достатньо»,

T_4 = «багато»;

Носій: U = проміжок від 0 до 10, цілі числа;

Синтаксичне правило: Як читалися книги.

Семантичне правило: зумовлене функціями належності, для значення T_1 це $\mu_1(u)$, для T_2 – $\mu_2(u)$, для T_3 – $\mu_3(u)$ і для T_4 – $\mu_4(u)$, їх графіки зображено на рис. 2. Причому перша з них відповідає нечіткій підмножині M_1^B, друга – M_2^B, третя – M_3^B, четверта – M_4^B.

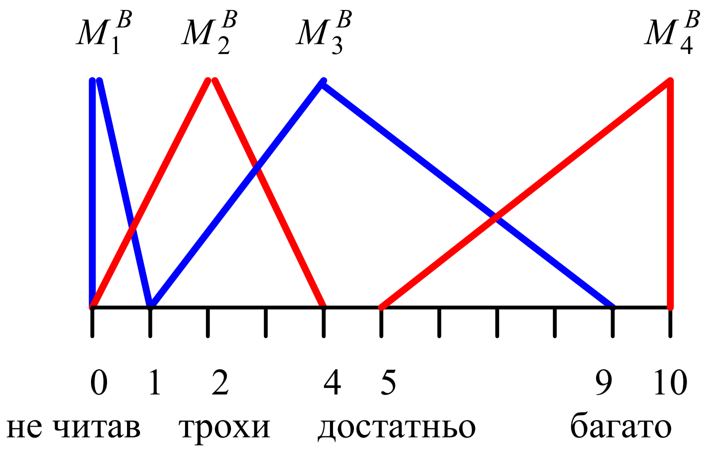


Рис. 2. Графіки функцій належності лінгвістичної змінної «читання книг»

1.3. Для даних про *виконання лабораторних робіт* (вимірюється в одиницях від 0 до 8) уведемо три трикутних числа

C_1 = "декілька" = $\langle 2; 2; 2\rangle$,

C_2 = "майже всі" = $\langle 5; 3; 3\rangle$,

C_3 = "усі" = $\langle 8; 2; 0\rangle$.

Отже, можемо описати таку лінгвістичну змінну:

Назва змінної: ω = «виконання лабораторних робіт»;

Терм-множина значень:

T_1 = «декілька»,

T_2 = «майже всі»,

T_3 = «усі»;

Носій: U = проміжок від 0 до 8, цілі числа;

Синтаксичне правило: Скільки робіт виконано;

Семантичне правило: зумовлене функціями належності, для значення T_1 це $\mu_1(u)$, для T_2 – $\mu_2(u)$, для T_3 – $\mu_3(u)$, їх графіки зображено на рис. 3. Причому перша з них відповідає нечіткій підмножині M_1^C, друга – M_2^C, третя – M_3^C.

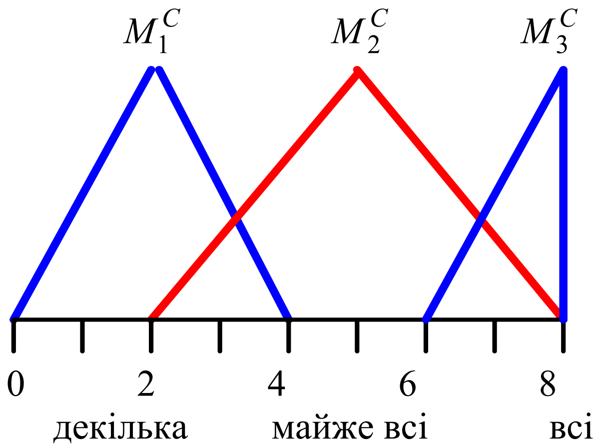


Рис. 3. Графіки функцій належності лінгвістичної змінної «виконання лабораторних робіт»

2. Опис вихідних даних за допомогою векторів лінгвістичних змінних.

Рейтинг студента буде оцінюватись у балах від 0 до 10. Для його опису введемо чотири трапецоїдних нечітких числа:

D_1 = "низький" $= \langle 0; 2; 0; 3 \rangle$,

D_2 = "середній" $= \langle 3; 4; 2; 2 \rangle$,

D_3 = "високий" $= \langle 6; 7; 1; 2 \rangle$,

D_4 = "дуже високий" $= \langle 9; 10; 1; 0 \rangle$.

Отже, можемо описати таку лінгвістичну змінну:

Назва змінної: ω = «рейтинг»;

Терм-множина значень:

T_1 = «низький»,

T_2 = «середній»,

T_3 = «високий»,

T_4 = «дуже високий»;

Носій: U = проміжок від 0 до 10, цілі числа;

Синтаксичне правило: Якісне визначення рейтингу;

Семантичне правило: зумовлене функціями належності, для значення T_1 це $\mu_1(u)$, для T_2 – $\mu_2(u)$, для T_3 – $\mu_3(u)$ і для T_4 – $\mu_4(u)$, їх зображено на рис. 4. Причому перша з них відповідає нечіткій підмножині M_1^D, друга – M_2^D, третя – M_3^D, четверта – M_4^D.

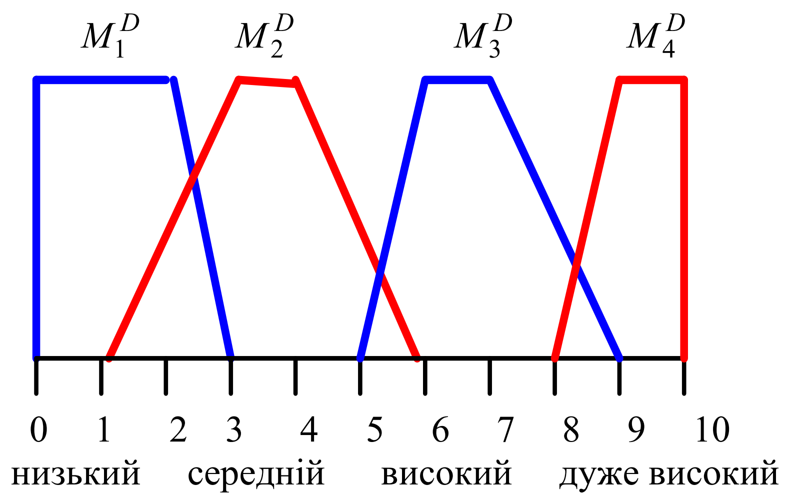


Рис. 4. Графіки функцій належності лінгвістичної змінної «рейтинг»

3. Для розв'язування задачі сформулюємо такі правила типу «якщо…, то…»:

1) **Якщо** відвідування лекцій *низьке*, **І** книги *не читав*, **І** лабораторних робіт виконано *декілька*, **ТО** рейтинг *низький*;

2) **Якщо** відвідування лекцій *середнє*, **І** книг прочитано *трохи*, **І** лабораторні роботи виконані *майже всі*, **ТО** рейтинг *середній*;

3) **Якщо** книг прочитано *достатньо*, **І** лабораторні роботи виконано *всі*, **ТО** рейтинг *високий*;

4) **Якщо** відвідування лекцій *високе*, **І** книг прочитано *багато*, **І** лабораторні роботи виконані *всі*, **ТО** рейтинг *дуже високий*.

Для зручності запишемо правила в таблицю.

Таблиця Д1

Рейтинг	Складові правила правила і оцінки		
	Відвідування лекцій	Читання книг	Виконання лабораторних робіт
Низький	низьке	не читав	декілька
Середній	середнє	трохи	майже всі
Високий	——	достатньо	всі
Дуже високий	високе	багато	всі

4. Для виконання операції **І** будемо використовувати перетворення мінімум, для операції **ТО** – мінімум, правила агрегуємо за допомогою операції **АБО** та перетворення максимум.

Отже, вихідну лінгвістичну змінну можемо обчислити таким чином:

$$M_1^D(u) = \max\left\{\min\left(M_1^A, M_1^B, M_1^C\right), \min\left(M_1^A, M_1^B, M_1^C\right), \min\left(M_2^A, M_2^B, M_2^C\right),\right.$$

$$\left.\min\left(M_3^B, M_3^C\right), \min\left(M_4^A, M_4^B, M_4^C\right)\right\}.$$

5. Перевіримо роботу системи, скориставшись такими вихідними даними про двох студентів (див. табл. Д2):

Таблиця Д2

№	Відвідування лекцій	Читання книг	Виконання лабораторних робіт
1	40 %	3	7
2	80 %	6	8

Запишемо результати обчислень у таблицю.

Таблиця Д3

<table>
<tr><th rowspan="2">Рейтинг</th><th rowspan="2">Складові правила правила</th><th rowspan="2">значення</th><th colspan="2">Студент 1</th><th colspan="2">Студент2</th></tr>
<tr><th>$\mu(u)$</th><th>min</th><th>$\mu(u)$</th><th>min</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Низький</td><td>Відвідування лекцій</td><td>низьке</td><td>0,5</td><td rowspan="3">0</td><td>0</td><td rowspan="3">0</td></tr>
<tr><td>Читання книг</td><td>не читав</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Виконання лабораторних робіт</td><td>декілька</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Середній</td><td>Відвідування лекцій</td><td>середнє</td><td>0,5</td><td rowspan="3">0,33</td><td>0</td><td rowspan="3">0</td></tr>
<tr><td>Читання книг</td><td>трохи</td><td>0,5</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Виконання лабораторних робіт</td><td>майже всі</td><td>0,33</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Високий</td><td>Відвідування лекцій</td><td>——</td><td></td><td rowspan="3">0,5</td><td></td><td rowspan="3">0,58</td></tr>
<tr><td>Читання книг</td><td>достатньо</td><td>0,66</td><td>0,58</td></tr>
<tr><td>Виконання лабораторних робіт</td><td>усі</td><td>0,5</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Дуже високий</td><td>Відвідування лекцій</td><td>високе</td><td>0</td><td rowspan="3">0</td><td>0.5</td><td rowspan="3">0,2</td></tr>
<tr><td>Читання книг</td><td>багато</td><td>0</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>Виконання лабораторних робіт</td><td>усі</td><td>0,5</td><td>1</td></tr>
</table>

6. Побудуємо графіки, відповідні вихідним параметрам системи. Їх показано на рис. 5, 6.

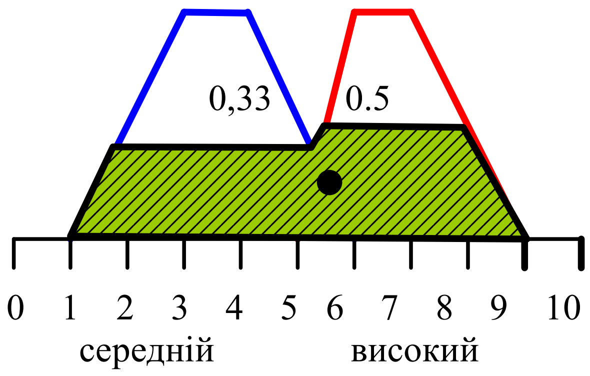


Рис. 5. Графічна ілюстрація обчислення рейтингу першого студента

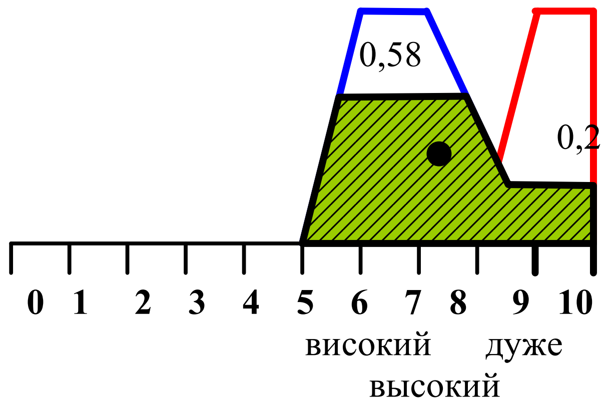


Рис. 6. Графічна ілюстрація обчислення рейтингу другого студента

7. Дефазифікація з використанням приблизної оцінки.

Для визначення приблизної оцінки рейтингів студентів використовуємо метод пошуку центра мас (див. п. 6.5). При цьому на основі побудованих графіків, відповідних вихідним параметрам системи, розглядаємо утворену ними фігуру і визначаємо центр мас (точку, у якій різниця мас фігури праворуч і ліворуч буде набувати найменшого значення). Ці точки за результатами обчислення рейтингу двох студентів показано на рис. 5, 6.

Для отримання кінцевого результату знаходимо значення рейтингу, найближче до отриманої точки.

З огляду на дані про двох студентів їхній рейтинг буде дорівнювати 6 і 8 відповідно.

Зведемо остаточні результати в табл. Д4.

Таблиця Д4

№	Відвідування лекцій	Читання книг	Виконання лабораторних робіт	Рейтинг
1	40 %	3	7	6
2	80 %	6	8	8

Варіанти індивідуальних завдань до розділу 6

1. Побудувати нечітку базу знань (використовувати не менше трьох лінгвістичних змінних) для визначення заявки на закупівлю товарів (співвідношення ціни, якості, обсягу і т. д.), перевірити її на повноту й зробити нечіткий висновок з урахуванням конкретних значень критеріїв (вибрати їх випадковим чином).

2. Побудувати нечітку базу знань (використовувати не менше трьох лінгвістичних змінних) для розподілу навантажень спортсмена (обсягів навантажень протягом доби, фізичного стану, споживаних калорій і т. д.), перевірити її на повноту й зробити нечіткий висновок з урахуванням конкретних значень параметрів (вибрати їх випадковим чином).

3. Побудувати нечітку базу знань (використовувати не менше трьох лінгвістичних змінних) для процесу керування транспортним засобом (регулювання швидкості відповідно до передачі, погодних умов, інтенсивності транспортного потоку і т. д.), перевірити її на повноту й зробити нечіткий висновок з урахуванням конкретних значень параметрів (вибрати їх випадковим чином).

4. Побудувати нечітку базу знань (застосувати не менше трьох лінгвістичних змінних) для процесу керування транспортним засобом (за допомогою керма, педалей газу та гальм) при в'їзді в гараж, перевірити її на повноту й зробити нечіткий висновок, скориставшись конкретними значеннями параметрів (вибрати їх випадковим чином).

5. Побудувати нечітку базу знань (на основі не менше трьох лінгвістичних змінних) для процесу регулювання теплопостачання будинку (співвідношення середньодобової температури повітря, сили вітру, розміру будівлі і т. д.), перевірити її на повноту й зробити нечіткий висновок, використовуючи конкретні значення параметрів (вибрати їх випадковим чином).

6. Побудувати нечітку базу знань (застосувати не менше трьох лінгвістичних змінних) для процесу регулювання реверсним рухом транспорту через міст (враховувати час доби, інтенсивність транспортного потоку, день тижня і т. д.), перевірити її на повноту і зробити нечіткий висновок на основі конкретних значень параметрів (вибрати їх випадковим чином).

7. Побудувати нечітку базу знань (на основі не менше трьох лінгвістичних змінних) для підбору спецій до страви (співвідношення кількості й гостроти приправ, рецептури, переваг споживача, об'єму їжі і т. д.), перевірити її на повноту і зробити нечіткий висновок, скориставшись конкретними значеннями параметрів (вибрати їх випадковим чином).

8. Побудувати нечітку базу знань (використовувати не менше трьох лінгвістичних змінних) для підбору об'єму страв (з огляду на калорійність, смакові переваги, кількість споживачів і т. д.), перевірити її на повноту та зробити нечіткий висновок на базі конкретних значень параметрів (вибрати їх випадковим чином).

9. Побудувати нечітку базу знань (на основі не менше трьох лінгвістичних змінних) для розрахунку обсягів подачі електроенергії споживачам в умовах економії (врахувати час доби, тип приміщень, кількість осіб, вид обладнання і т. д.), перевірити її на повноту й зробити нечіткий висновок, скориставшись конкретними значеннями параметрів (вибрати їх випадковим чином).

10. Побудувати нечітку базу знань (застосувати не менше трьох лінгвістичних змінних) для визначення інтенсивності занять з навчальної дисципліни (враховувати початковий рівень підготовки студентів, обсяг навчального матеріалу, кількість осіб у групі, необхідний рівень засвоєння матеріалу і т. д.), перевірити її на повноту й зробити нечіткий висновок, використавши конкретні значення параметрів (вибрати їх випадковим чином).

11. Побудувати нечітку базу знань (на основі не менше трьох лінгвістичних змінних) для розрахунку споживання бензину двигуном автомобіля (враховувати тип здійснюваних транспортним засобом маневрів, рівень підготовки водія, стан автомобіля, його тип і т. д.), перевірити її на повноту й зробити нечіткий висновок за допомогою конкретних значень параметрів (вибрати їх випадковим чином).

12. Побудувати нечітку базу знань (використовувати не менше трьох лінгвістичних змінних) для регулювання системи зрошення овочевої плантації (враховувати пору року, кількість опадів, вид зрошуваної культури і т. д.), перевірити її на повноту й зробити нечіткий висновок на основі конкретних значень параметрів (вибрати їх випадковим чином).

13. Побудувати нечітку базу знань (застосувати не менше трьох лінгвістичних змінних) для налаштування аудіосистеми (з огляду на потужність колонок, їх кількість, розмір приміщення, призначення установки і т. д.), перевірити її на повноту й зробити нечіткий висновок, скориставшись конкретними значеннями параметрів (вибрати їх випадковим чином).

14. Побудувати нечітку базу знань (на основі не менше трьох лінгвістичних змінних) для вибору дози снодійного (враховувати кількість препарату, особливості його дії, сприйнятливість організмом хворого, мету застосування і т. д.), перевірити її на повноту і зробити нечіткий висновок за допомогою конкретних значень параметрів (вибрати їх випадковим чином).

15. Побудувати нечітку базу знань (застосовувати не менше трьох лінгвістичних змінних) для планування обсягу виробництва продукції (з

урахуванням можливого прибутку, наявності необхідних ресурсів, платоспроможності населення, ринку збуту і т. д.), перевірити її на повноту й зробити нечіткий висновок на основі конкретних значень параметрів (вибрати їх випадковим чином).

16. Побудувати нечітку базу знань (на основі не менше трьох лінгвістичних змінних) для регулювання роботи кондиціонера (з огляду на його потужність, розмір приміщення, температуру навколишнього середовища, підтримання необхідної температури в приміщенні і т. д.), перевірити її на повноту й зробити нечіткий висновок, скориставшись конкретними значеннями параметрів (вибрати їх випадковим чином).

17. Побудувати нечітку базу знань (до уваги взяти не менше трьох лінгвістичних змінних) для розподілу навантаження між комп'ютерами в складі кластерів (враховувати характеристики комп'ютерів, їх кількість, обсяг паралельного коду, характеристики мережі й т. д.), перевірити її на повноту та зробити нечіткий висновок на основі конкретних значень параметрів (вибрати їх випадковим чином).

18. Побудувати нечітку базу знань (на основі не менше трьох лінгвістичних змінних) для вибору складського приміщення (з огляду на площу складу, кількість і розміри продукції, віддаленість від місця виробництва й точок реалізації, якість продукції, характеристику приміщень і т. д.), перевірити її на повноту й зробити нечіткий висновок, скориставшись конкретними значеннями параметрів (вибрати їх випадковим чином).

19. Побудувати нечітку базу знань (брати до уваги не менше трьох лінгвістичних змінних) для вибору комплектувальних елементів для комп'ютера (враховувати ціну, потреби користувача, сумісність елементів, терміни використання і т. д.), перевірити її на повноту й зробити нечіткий висновок з огляду на конкретні значення параметрів (вибрати їх випадковим чином).

20. Побудувати нечітку базу знань (застосовувати не менше трьох лінгвістичних змінних) для визначення кількості ліній в службі підтримки споживачів певної послуги (враховувати кількість обслуговуваних клієнтів, середню частоту звернення до служби одного клієнта, середній час обслуговування однієї заявки, кваліфікацію персоналу і т. д.), перевірити її на повноту та зробити нечіткий висновок на основі конкретних значень параметрів (вибрати їх випадковим чином).

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Е

З

І

К

Л

М

Т

У

Ф

Ц

Ч

Ш

Навчальне видання

Тимур Анатолійович **Желдак**
Лариса Сергіївна **Коряшкіна**
Світлана Альбертівна **Ус**

НЕЧІТКІ МНОЖИНИ В СИСТЕМАХ УПРАВЛІННЯ ТА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Навчальний посібник

За редакцією С.А. Ус

Редактор О.Н. Ільченко

Підписано до друку 30.06.2020. Формат 30х42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 16,5.
Обл.-вид. арк. 21,2. Тираж 300 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видрукувано
в Національному технічному університеті
«Дніпровська політехніка»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004 р.
49005, м Дніпро, просп. Д. Яворницького,19