МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Факультет архітектури, будівництва та землеустрою
Кафедра геодезії

А.В. Зуска, Г.В. Бруй, О.Є. Янкін

ВИЩА ГЕОДЕЗІЯ

Методичні рекомендації до лабораторних робіт
для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 193 Геодезія та землеустрій

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

Зуска А.В.

Вища геодезія [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до лабораторних робіт для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 193 Геодезія та землеустрій / А.В. Зуска, Г.В. Бруй, О.Є. Янкін ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – 89 с.

Автори:

– Зуска Ада Василівна – канд. техн. наук, доцентка кафедри;

– Бруй Ганна Валеріївна – канд. техн. наук, доцентка кафедри;

– Янкін Олександр Євгенович – канд. техн. наук, доцент кафедри.

Погоджено рішенням науково-методичної комісії спеціальності 193 Геодезія та землеустрій (протокол № 5 від 07.03.2024) за поданням кафедри геодезії (протокол № 9 від 07.03.2024).

Методичні рекомендації містять загальні відомості відповідно до тем лабораторних робіт, опис методики виконання лабораторних робіт з дисципліни «Вища геодезія». Наведено приклади використання програмного забезпечення Microsoft Excel і Mathcad під час виконання та оформлення зазначених робіт.

Методичні рекомендації призначені для самостійної роботи здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти очної та заочної форм навчання спеціальності 193 Геодезія та землеустрій під час виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни «Вища геодезія».

Відповідальний за випуск в. о. завідувача кафедри геодезії О.Є. Янкін, канд. техн. наук.

ЗМІСТ

Вступ 4
Лабораторна робота №1. Розв'язування малих сферичних трикутників………… 5
Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи ……………… 10
Лабораторна робота № 2. Обчислення довжин дуг меридіана……………….. 13
Приклад розв'язування та оформлення роботи………………………………… 17
Лабораторна робота № 3. Обчислення довжин дуг паралелей ……………… 19
Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи ……………… 21
Лабораторна робота № 4. Розв'язування головної прямої геодезичної задачі на поверхні еліпсоїда ……………………………………………………… 22
Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи ……………… 27
Лабораторна робота № 5. Розв'язування головної оберненої геодезичної задачі на поверхні еліпсоїда 30
Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи………. 33
Лабораторна робота № 6. Розв'язування головної прямої геодезичної задачі між точками у просторі …………………………………………………… 36
Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи………. 41
Лабораторна робота № 7. Розв'язування головної оберненої геодезичної задачі між точками у просторі.. 44
Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи………………. 48
Лабораторна робота № 8. Перерахунок плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера з однієї координатної зони до іншої………………………… 51
Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи……………….. 55
Лабораторна робота № 9. Перерахунок плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера із однієї системи координат у іншу……………………… 59
Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи………………… 62
Лабораторна робота № 10. Редукування довжин ……………………………… 64
Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи………………… 67
Лабораторна робота № 11. Редукування напрямків……………………………… 69
Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи……………… 72
Лабораторна робота № 12. Проектування лінійно-кутової мережі 4 класу. Апріорна оцінка точності елементів запроектованої мережі ……………… 74
Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи....................... 80
Список літератури…………………………………………………….............. 88

ВСТУП

Методичні рекомендації відповідають робочій програмі навчальної дисципліни «Вища геодезія» та призначені для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 193 Геодезія та землеустрій денної та заочної форм навчання.

В даних методичних рекомендаціях викладено загальні відомості відповідно до тем лабораторних робіт, наведено методику виконання робіт та алгоритми для обчислень в програмах Microsoft Excel і Mathcad.

Зміст лабораторних робіт передбачає їхнє послідовне виконання. Є роботи, виконання яких ґрунтується на результатах, отриманих у попередніх лабораторних роботах.

При цьому теми лабораторних робіт відповідають трьом розділам вищої геодезії: 1 – 8 – сферична геодезія; 9 – 11 – теоретична геодезія; 12 – геодезичні мережі та вимірювання.

Виклад матеріалу представлений від простого до складного. Спочатку переходимо від сферичних трикутників до плоских, потім розв’язуються головні геодезичні пряма та обернена задачі на поверхні еліпсоїда з дотриманням контролю, пряма та обернена геодезичні задачі між точками в просторі з дотриманням контролю (лабораторні роботи 1 – 7); далі розв’язуються задачі в системі плоских прямокутних координат проєкції Гаусса-Крюгера (лабораторні роботи 8 – 9); під час виконання названих лабораторних робіт необхідно виконати редукування геодезичних вимірювань з фізичної поверхні Землі на поверхню референц-еліпсоїда Красовського (лабораторні роботи 10, 11); після виконання робіт за темами сфероїдичної та теоретичної геодезії, здобувачі приступають до проектування геодезичної мережі на топографічній карті масштабу 1:25000 та апріорної оцінки елементів запроектованої мережі (лабораторна робота 12).

Лабораторна робота № 1

Тема: Розв'язування малих сферичних трикутників

Навчальна мета: *вивчення алгоритму переходу від сферичного трикутника на поверхні еліпсоїда з обчисленням поправок до плоского трикутника за теоремою Лежандра та способом аддитаментів.*

Загальні відомості

Розв'язування сферичного трикутника в геодезичних роботах полягає в тому, що за відомими кутами *A*, *B*, *C* сферичного трикутника та заданою однією стороною, наприклад, a обчислюють дві інші сторони b і *c*.

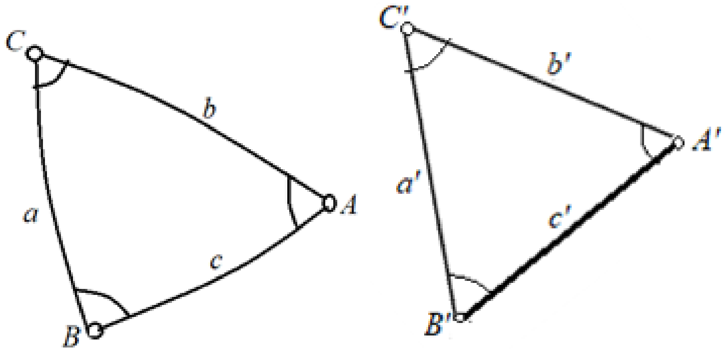
Кожна сторона сферичного трикутника *a*, *b*, *c* (формула 1.1) представляє дугу великого круга, виражена в частинах радіусу сфери в лінійній мірі:

$$a = \frac{S_a}{R},\ \ b = \frac{S_b}{R}, c = \frac{S_c}{R}, \tag{1.1}$$

де S_a, S_b, S_c – довжини дуг сторін трикутника виражені в лінійній мірі; R – радіус сфери.

Для розв'язування сферичного трикутника (рис. 1.1, а) довільного розміру застосовуються формули (1.2) сферичної тригонометрії,

$$\sin b = \sin a\ \frac{\sin B}{\sin A}, \sin c = \sin a\ \frac{\sin C}{\sin A}. \tag{1.2}$$



а б

Рис. 1.1. Геодезичні трикутники: а – сферичний трикутник довільної форми; б – плоский трикутник

Теорема Лежандра: кути сферичного трикутника більші на 1/3 сферичного надлишку *ε* відповідних кутів плоского трикутника, сторони якого дорівнюють відповідним сторонам сферичного трикутника. Слід зауважити, що при цьому нехтують величинами четвертого й вищого порядків малості, приймаючи за величини першого порядку відношення довжин сторін трикутника до радіусу сфери (1.1).

Оскільки сторони сферичного трикутника виражені в лінійній мірі, то для використання формули (1.2) треба виконати допоміжні обчислення: перейти від лінійних величин до сферичних; знайти синуси цих дуг і за формулою (1.2) виконати обернений перехід від синусів цих дуг до лінійних величин.

В геодезичних мережах довжини сторін трикутників набагато менші радіусу сфери. Внаслідок чого формулу (1.2) можна замінити більш простими виразами, які будуть найбільш простими тоді, коли сторони трикутника будуть малі настільки, що кривизною сфери можна знехтувати. Тоді трикутник сферичний розв'язується як плоский за формулами (1.3):

$$b' = a' \frac{\sin B}{\sin A}, \ c' = a' \frac{\sin C}{\sin A}, \qquad (1.3)$$

де a', b', c' – довжини сторін плоского трикутника; A, B, C – кути сферичного трикутника.

Обчислення сферичного надлишку ε. У всіх трикутниках сучасної мережі 1 класу сферичний надлишок можна обчислювати за будь-якими формулами, які наведені нижче

$$\varepsilon = f\frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin A} = f\frac{c^2 \sin A \sin B}{\sin C} = f\frac{b^2 \sin A \sin C}{\sin B}, \qquad (1.4)$$

де a, b, c – довжини сторін сферичного трикутника.

$$\varepsilon = fD_I, \ D_I = \frac{b^2 \sin A \cdot \sin C}{\sin B}, \qquad (1.5)$$

У формулі (1.5) $f = \frac{\rho''}{2R_m}$, R_m – середній радіус кривизни еліпсоїду; $R_m = \frac{a\sqrt{(1-e^2)}}{1-(e^2 \sin^2 B_m)}$; a – велика піввісь еліпсоїда; e^2 – квадрат ексцентриситету; b – відома довжина сторони сферичного трикутника; A, B, C – виправлені кути сферичного трикутника. a = 6378245 м, e^2 = 0,0066934216.

Обчислення кутів плоского трикутника A' B' C'

$$A' = A - \frac{1}{3}\varepsilon, \ B' = B - \frac{1}{3}\varepsilon, \ C' = C - \frac{1}{3}\varepsilon. \qquad (1.6)$$

Обчислення довжин сферичного трикутника.

Довжини сторін сферичного трикутника обчислюють за формулами:

$$b = D_{\text{II}} \sin B', c = D_{\text{II}} \sin C', \tag{1.7}$$

де

$$D_{II} = \frac{a}{\sin A'} = \frac{b}{\sin B'} = \frac{c}{\sin C'}.$$

2. Розв'язування сферичного трикутника ABC способом аддитаментів

В цьому способі спочатку знаходять довжини плоского трикутника через введення аддитаментів (поправок) в сторони сферичного трикутника.

Наприклад, якщо відома сторона сферичного трикутника a, тоді її довжина для плоского трикутника буде обчислюватися за таким виразом

$$\left.\begin{aligned} \text{a}' &= \text{a} - (k\text{a}^3) = b - Ab \\ b' &= b - (kb^3) = b - Ab, \\ c' &= \text{c} - (k\text{c}^3) = \text{c} - \text{Ac}. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

де

$$kb^3 = Ab,\ k\text{c}^3 = \text{Ac},\ k = \frac{1}{6R_m^2}.$$

$$R_m = \sqrt{MN} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 B_m}, \tag{1.9}$$

де Ab, Ac – аддитамента в сферичні сторони; R_m – середній радіус для середньої широти трикутника B_m; M, N – головні радіуси кривизни; e – ексцентриситет еліпсоїда; a – велика піввісь еліпсоїда.

Обчислення довжин сторін a' і c' плоского трикутника (рис. 1.1, б) виконується через обчислену вихідну сторону b' за формулою (1.3).

За сторонами плоского трикутника b' і c', отриманими за формулою (1.8) обчислюються сторони сферичного трикутника b і c з використанням аддитаментів, формула (1.10).

$$b = b' + k(b')^3 = b' + Ab; c = c' + k(c')^3 = \text{c}' + Ac, \tag{1.10}$$

де Aa, Ac – аддитаменти в сторони плоского трикутника; b', c′ – обчислені сторони плоского трикутника.

Сторони сферичного трикутника обчислені за теоремою Лежандра та методом аддитаментів повинні бути рівнозначні.

Завдання:

1. Розв'язати сферичний трикутник *ABC* за теоремою Лежандра.

2. Розв’язати сферичний трикутник *АВС* методом аддитаментів

Вихідні дані: Виміряні кути сферичного трикутника *А, В, С*; довжина сторони для кожного варіанту своя (*а*, *в*, *с*); широта середини трикутника *Вт* (табл. 1.1).

Методичні рекомендації до виконання роботи

1. Розв’язання сферичного трикутник АВС за теоремою Лежандра

1.1 Обчислення сферичного надлишку ε.

Для отримання кутів плоских трикутників необхідно знати *сферичний надлишок ε*, тобто різницю між сумою кутів сферичного та плоского трикутників (рис. 1.1).

Сферичний надлишок ε обчислюється за формулою (1.5). Результати обчислень доцільно занести в таблицю.

1.2 Обчислення кутів плоского трикутника ***A'B'C'****.*

Обчислення виконуються за формулами (1.6)

1.3. Обчислення довжин сферичного трикутника.

Для обчислення довжин сторін сферичного трикутника використовують формулу (1.7).

2. Розв’язування сферичного трикутника АВС способом аддитаментів

2.1. Обчислення сторін плоского трикутника

Довжини плоского трикутника визначають за формулою (1.8)

2.2. Обчислення сторін сферичного трикутника

За відомими сторонами плоского трикутника обчислюються сторони сферичного трикутника, формула (1.10).

Питання для самоконтролю

1. В чому полягає різниця розв’язування сферичного трикутника за теоремою Лежандра та способом аддитаментів ?

2. В яких одиницях здійснюється вимірювання кутів сферичних трикутників та геодезичних ліній (сторін) ?

4. Що необхідно знати для визначення сферичного надлишку ?

5. Які параметри необхідно знати для переходу від сторони сферичного трикутника до сторони плоского ?

6. Які дії необхідно виконати після вимірювань трикутника на фізичній поверхні, щоб перейти до розв’язування сферичного трикутника ?

Таблиця 1.1.

Вихідні дані за варіантами

Кути сферичного трикутника	***Варіант 1***	***Варіант 2***	***Варіант 3***	***Варіант 4***	***Варіант 5***
	Значення	Значення	Значення	Значення	Значення
A *B* *C*	82°37'42,67'' 60°02'17,42'' 37°20'03,18''	82°37'43,27'' 60°02'17,42'' 37°20'03,38	82°37'42,07'' 60°02'18,02'' 37°20'03,08	81°37'43,07'' 61°02'17,82'' 37°20'03,18	75°37'42,07'' 55°02'18,02'' 49°20'03,08
Довжина, м	*а = 42837,26*	*в = 37421,61*	*с = 26195,57*	*а = 42837,26*	*в = 37421,61*
Широта Вт	54°30'	54°30'	54°30'	54°30'	54°30'
Кути сферичного трикутника	***Варіант 6***	***Варіант 7***	***Варіант 8***	***Варіант 9***	***Варіант 10***
	Значення	Значення	Значення	Значення	Значення
A *B* *C*	72°37'42,67'' 60°02'17,42'' 47°20'03,18''	62°37'43,27'' 70°02'17,42'' 47°20'03,38	62°37'42,07'' 60°02'18,02'' 57°20'03,08	61°37'43,07'' 71°02'17,82'' 67°20'03,18	75°37'42,07'' 55°02'18,02'' 49°20'03,08
Довжина, м	*а =42837,26*	*в =37421,61*	*с =26195,57*	*а =42837,26*	*в =37421,61*
Широта Вт	54°30'	54°30'	54°30'	54°30'	54°30'
Кути сферичного трикутника	**Варіант11**	**Варіант12**	**Варіант13**	**Варіант14**	**Варіант15**
	Значення	Значення	Значення	Значення	Значення
A *B* *C*	80°37'42,67'' 62°02'17,42'' 37°20'03,18''	82°37'43,27'' 62°02'17,42'' 35°20'03,38	72°37'42,07'' 62°02'18,02'' 45°20'03,08	81°37'43,07'' 51°02'17,82'' 47°20'03,18	80°37'42,07'' 55°02'18,02'' 49°20'03,08
Довжина, м	*а =42837,26*	*в =37421,61*	*с =26195,57*	*а =42837,26*	*в =37421,61*
Широта Вт	54°30'	54°30'	54°30'	54°30'	54°30'
Кути трикутника	***Варіант 16***	***Варіант 17***	***Варіант 18***	***Варіант 19***	***Варіант 20***
	Значення	Значення	Значення	Значення	Значення
A *B* *C*	79°37'42,67'' 62°02'17,42'' 48°20'03,18''	79°37'43,27'' 68°02'17,42'' 42°20'03,38	70°37'42,07'' 62°02'18,02'' 47°20'03,08	81°37'43,07'' 61°02'17,82'' 37°20'03,18	75°37'42,07'' 65°02'18,02'' 49°20'03,08
Довжина, м	*а =42837,26*	*в =37421,61*	*с =26195,57*	*а =42837,26*	*в =37421,61*
Широта Вт	54°30'	54°30'	54°30'	54°30'	54°30'
Кути сферичного трикутника	***Варіант 21***	***Варіант 22***	***Варіант 23***	***Варіант 24***	***Варіант 25***
	Значення	Значення	Значення	Значення	Значення
A *B* *C*	82°37'42,67'' 60°02'17,42'' 37°20'03,18''	80°37'43,27'' 60°02'17,42'' 39°20'03,38	82°37'42,07'' 61°02'18,02'' 36°20'03,08	81°37'43,07'' 61°02'17,82'' 37°20'03,18	85°37'42,07'' 55°02'18,02'' 49°20'03,08
Довжина, м	*а =42837,26*	*в =37421,61*	*с =26195,57*	*а =42837,26*	*в =37421,61*
Широта Вт	54°30'	54°30'	54°30'	54°30'	54°30'
Кути сферичного трикутника	***Варіант 26***	***Варіант 27***	***Варіант 28***	***Варіант 29***	***Варіант 30***
	Значення	Значення	Значення	Значення	Значення
A *B* *C*	82°37'42,67'' 58°02'17,42'' 39°20'03,18''	80°37'43,27'' 62°02'17,42'' 37°20'03,38	82°37'42,07'' 60°02'18,02'' 37°20'03,08	81°37'43,07'' 61°02'17,82'' 37°20'03,18	79°37'42,07'' 65°02'18,02'' 45°20'03,08
Довжина, м	*а =42837,26*	*в =37421,61*	*с =26195,57*	*а =42837,26*	*в =37421,61*
Широта Вт	54°30'	54°30'	54°30'	54°30'	54°30'

Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи

Тема: Розв'язування малих сферичних трикутників

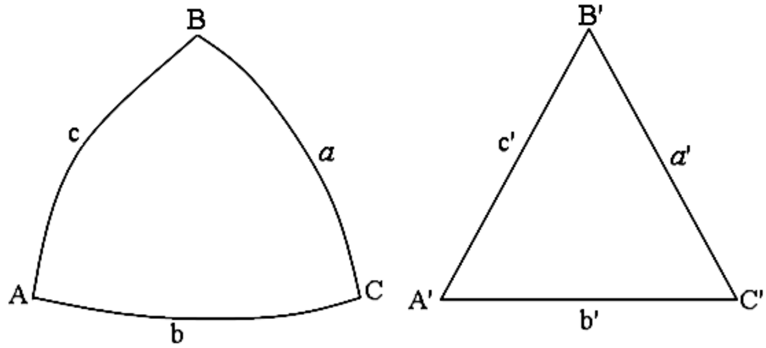
Завдання:

1. Розв'язати сферичний трикутник *ABC* за теоремою Лежандра (рис. 1.2).
2. Розв'язати сферичний трикутник *ABC* методом аддитаментів.

Вихідні дані.

Таблиця 1.1

Кути сферичного трикутника	***Варіант N Значення***
A *B* *C*	82°37'43,07" 60°02'17,82" 37°20'03,18"
Довжина а, м	42837,26 м
Широта Вт	47°16'



а б

Рис. 1.2. Загальний вид трикутників: а – сферичний: б – плоский

1. Розв'язування сферичного трикутника за теоремою Лежандра

Суть розв'язування сферичного трикутника *ABC* (рис. 1.2) в якому відомі всі кути та одна сторона *a*, ґрунтується на переході до кутів плоского трикутника *A'B'C'* за допомогою *сферичного надлишку ε*.

1.1. Обчислення сферичного надлишку

Результати обчислення сферичного надлишку *ε* заносять в табл. 1.2.

$$\varepsilon = f_m D_I = f\frac{a^2 \sin \mathrm{B} \sin C}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\rho''}{2R_m} D_I,$$

$$R_m = \sqrt{MN} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 B_m}\ , D_I = \frac{a^2 \sin \mathrm{B} \sin C}{\sin \mathrm{A}},$$

де R_m – середній радіус кривизни еліпсоїду на середніх широтах B_m; a – велика піввісь еліпсоїда, e – ексцентриситет, e^2 – квадрат ексцентриситету, a = 6378245 м, e^2 = 0,0066934216.

Таблиця 1.2.

Обчислення сферичного надлишку

Елементи формул	Значення величини	Елементи формул	Значення величини
a, м	6378245	a^2, м	2006796475
e^2	0,00669342	$sinA$	0,99173540
$1 - e^2$	0,993306578	$sinC$	0,60646334
$B^0{}_m$	47,16	$sinB$	0,86635930
$\sin^2 B_m$	0,539519533	D_I	972187758
$R_m, м$	6379902,318	f	25,34 10^{-10}
ρ	206265"	ε"	2,463

1.2. Обчислення кутів плоского трикутника

$$A' = A - \frac{1}{3}\varepsilon, B' = B - \frac{1}{3}\varepsilon, C' = B - \frac{1}{3}\varepsilon.$$

1.3. Обчислення довжин сторін сферичного трикутника.

$$D_{II} = \frac{a}{\sin A'} = \frac{b}{\sin B'} = \frac{c}{\sin C'}.$$

$$D_{\text{II}} = \frac{42837{,}26}{0{,}99173455} = 43194{,}28 \text{ м.}$$

$$b = \frac{a}{\sin A'} \sin B',\ c = \frac{a}{\sin A'} \sin C'.$$

$$b = (43194{,}28)\ 0{,}86635600 = 37421{,}62 \text{ м,}$$

$$\text{c} = (43194{,}28)\ 0{,}60645814 = 26195{,}52 \text{ м.}$$

Результати розв’язування сферичного трикутника занесені в табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Розв'язування сферичного трикутника *ABC* за теоремою Лежандра

Назва кутів	Виміряні кути сферичного трикутника	–*W*/3	Виправлені кути сферичного трикутника	–ε/3	Обчислені кути плоского трикутника	Синуси кута плоского трикутника
A	82°37'43,07"	–0,54	82°37'42,53"	–0,82	82°37'41,71"	0,99173455
B	60°02'17,82''	–0,54	60°02'17,28''	–0,82	60°02'16,46''	0,86635600
C	37°20'03,18"	–0,53	37°20'02,65"	–0,82	37°20'01,83"	0,60645814
Σβ (180°+ε) *W*	180°00'04,07" 180°00'02,46" -1,61	–1,61	180°00'02,46"	-2,46	180°00'00,00"	

2. Розв'язування сферичного трикутника ABC способом аддитаментів

2.1. Обчислення сторін плоского трикутника (рис. 1.2)

$$a' = a - k(a^3) = \mathrm{a} - \frac{1}{6R_m^2}(\mathrm{a}^3) = \mathrm{a} - A\mathrm{a}.$$

$$b' = \frac{a' \sin B}{\sin A};\ c' = \frac{a' \sin C}{\sin A},$$

де *A, B, C* – кути сферичного трикутника; *a* – відома сторона сферичного трикутника.

2.2. Обчислення невідомих сторін сферичного трикутника

$$b = b' + k(b')^3 = b' + Ab,\ c = c' + k(c')^3 = c' + Ac.$$

Обчислення аддитаментів.

$$Ab = k(b'^3) = \frac{1}{6R_m^2}(b'^3),\ A\mathrm{c} = k(\mathrm{c}'^3) = \frac{1}{6R_m^2}(\mathrm{c}'^3).$$

Результати обчислень занесені в табл. 1.4.

Таблиця 1.4.

Розв'язування сферичного трикутника *ABC* за способом аддитаментів

Назва вершин	Кути сферичного трикутника	–*W/3*	Зрівнянні кути *A, B, C*	Синуси зрівняних кутів *A, B, C*	Сторони плоского трикутника *a', b', c'*, м	Аддита-менти	Сторони сферичного трикутника *a, b, c*, м
A	82°37'43,07"	0,54	82°37'43,61"	0,9917357	42837,48	0,32	42837,80
B	60°02'17,82''	0,54	60°02'18,36''	0,8663606	37511,90	0,22	37512,12
C	37°20'03,18"	0,53	37°20'03,71"	0,6064654	26258,85	0,07	26258,92
W	–1,61"	1,61	180°00'02,46"				

Висновок. Контроль обчислень сторін сферичного трикутника полягає в порівнянні довжин сторін сферичного трикутника, визначених двома методами.

Лабораторна робота №2

Тема: Розрахунок довжин дуг меридіана

Навчальна мета: *вивчення алгоритму обчислення довжин дуг меридіана на довільних й середніх широтах і залежності між довжинами дуг меридіана й значеннями широти.*

Загальні відомості

Меридіан представляє собою половину еліпса, кінці якого співпадають з полюсами еліпсоїда. Екватор ділить меридіан на дві симетричні частини.

Для визначення довжини дуги меридіана до заданої широти *B*, застосовують формулу (2.1).

$$dX = MdB = \frac{a(1-e^2)}{W^3}dB \tag{2.1}$$

Відповідно, для обчислення довжини дуги меридіана в межах широт від 0° до заданої *B* необхідно знайти інтеграл за формулою (2.2) [1, 2]:

$$X = \int_0^{\mathrm{B}} MdB = \mathrm{a}(1-\mathrm{e}^2)\int_0^{\mathrm{B}}(1-\mathrm{e}^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}}dB. \tag{2.2}$$

Кінцевий результат інтегрування буде мати такий вигляд

$$X = \mathrm{a}_0 B - \frac{\mathrm{a}_2}{2}\sin 2\mathrm{B} + \frac{\mathrm{a}_4}{4}\sin 4\mathrm{B} - \frac{\mathrm{a}_6}{6}\sin 6\mathrm{B} + \frac{\mathrm{a}_8}{8}\sin 8\mathrm{B} - \cdots \tag{2.3}$$

Для зручності обчислення члени ряду заміняють тригонометричними функціями кратного аргументу (ступеневими функціями)

$$X = a_0 B - sinB\,cosB + \left\{(a_2 - a_4 + a_6) + \left(2a_4 - \frac{16}{3}a_6\right) sin^2 B + \frac{16}{3} a_6 sin^4 \mathrm{B}\right\} \quad (2.4)$$

Підставивши коефіцієнти *ai,* обчислені за елементами еліпсоїда Красовського, ряд (2.4) прийме такий вигляд:

$$X = 6367558{,}4969B - sin\,\mathrm{B}\,cos\,B\,[\,32005{,}7801 + (133{,}9213 + 0{,}7032\,sin^2 B)sin^2 B\,] \quad (2.5)$$

За цією формулою довжина дуги меридіана обчислюється з похибкою 0,0001 м.

З похибкою не більше 0,2 м довжину дуги меридіана можна отримати за більш простою формулою, отриманою методом зменшення членів ряду (2.5)

$$X = 6367558{,}5B - sin\,\mathrm{B}\,cos\,B\,(32005{,}6 + 134{,}6\,sin^2 B). \quad (2.6)$$

На практиці часто приходиться визначати довжину дуги меридіана між двома достатньо близькими точками з широтами B_1 = *const* і B_2 = *const*, наприклад обчислення короткої довжини меридіана ΔX східної та західної сторін сферичної трапеції в вигляді рамки листа топографічної карти крупного масштабу.

Для розв'язування цієї задачі величину ΔX визначають за різницею широт $\Delta B = B_2 - B_1$, вважаючи цю різницю малою величиною.

У цьому випадку використовується розкладення в ряд $\Delta X = \frac{dX}{dB}\Delta B$ за ступенями ΔB

$$\Delta X = \left(\frac{dX}{dB}\right)_1 \Delta B \;+\; \left(\frac{d^2X}{dB^2}\right)_1 \frac{\Delta B^2}{2} \;+\; \left(\frac{d^3X}{dB^3}\right)_1 \frac{\Delta B^3}{6} \;+\cdots. \quad (2.6)$$

$$\frac{dX}{dB} = M.$$

Кількість членів ряду можна скоротити в два рази, якщо коефіцієнти ряду розраховувати за середнім аргументом

$$\Delta X = \left(\frac{dX}{dB}\right)_m + \Delta B \left(\frac{d^3X}{dB^3}\right)_m \frac{\Delta B^3}{24} \;+\cdots. \quad (2.7)$$

Після заміни похідних їх значеннями, ряд (2.7) буде таким:

$$\Delta X = \mathrm{M}_m\, \Delta B \; + \; \frac{ae^2(1-e^2)}{8} \cos 2\, B_m\, \Delta B^3 + \cdots$$

або

$$\Delta X = \mathrm{M}_m\, \Delta B \; + \; 5300\ (1 - 2\, sin^2\, B_m)\ \Delta B^3 + \cdots \quad (2.8)$$

де M_m – головний радіус кривизни меридіана, що обчислюється за середньою широтою B_m; ΔB – різниця широт кінців дуги меридіана.

$$M_m \; = 6335552{,}8 + (538{,}4\, sin^2\, B_m + 63607{,}5)\, sin^2\, B_m. \quad (2.9)$$

Завдання:

1. Обчислити довжину дуги меридіана до точки А із заданою широтою B

2. Обчислити короткі довжини дуг меридіана ΔX між точками із різницею широт δB на середніх широтах від 0^0 до 90^0 з інтервалом ΔB.

3. Побудувати графік залежності довжини дуги меридіана від широти, зробити висновок.

Вихідні дані:

1.Широта паралелі $\mathrm{B_A} = 48^0 00' + (N^0 + N')$;

2. Інтервал ΔВ завдається викладачем;

3. $\delta B = B_2 - B_1 = 2^0 00 + N'$,

де N – номер студента в списку групи (N^0, N' – градусів і хвилин відповідно)

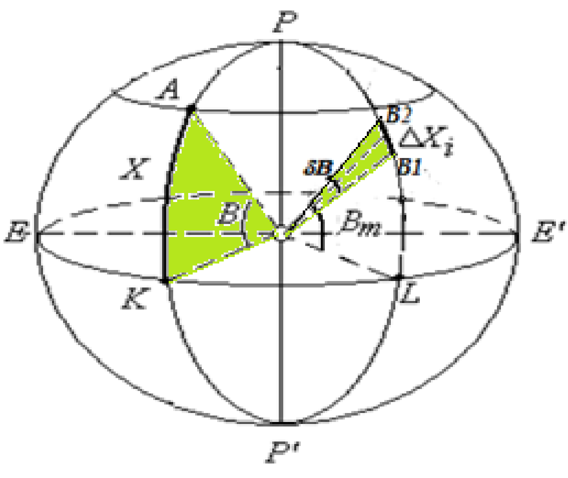


Рис. 2.1. Схема визначення довжин дуг меридіана

Методичні вказівки до виконання лабораторної роботи

(Виконання роботи доцільно здійснювати в програмі Microsoft Excel).

1. ***Обчислення довжини дуги меридіана до точки А з широтою В***

Довжина дуги меридіана X до паралелі точки A з широтою B обчислюється за формулою (2.5).

$$\mathrm{X} = 6367558{,}5\, B^{\mathrm{p}} - (32005{,}6 + 134{,}6\ \sin^2 B)\sin B\ \cos B.$$

2. ***Обчислення коротких довжин дуг меридіана***

Короткі довжини дуг меридіана з заданою різницею довгот $\delta B = B_2 - B_1$ на середніх широтах B_m обчислюються за формулою (2.8).

$$\Delta X = M_m \delta B^{\,p} + 5300(1 - 2\,sin^2 B_m)(\delta B^p)^3,$$

де M_m – середній радіус кривизни меридіана еліпсоїда на середніх широтах B_m від 0 до 90^0, $B_m = \frac{B_1+B_2}{2}$, $B1$ і $B2$ – широти початку і кінця інтервалу ΔB.

Результати обчислень ΔX заносяться в табл. 2.1.

3. Побудова графіка залежності довжин дуг меридіана від широти

Побудову графіка виконати відповідно до вимог: підписати назву осей графіка та одиниці вимірювань аргументів.

Висновок: Написати свій висновок за результатами виконаної роботи

Питання для самоконтролю

1. В чому полягає визначення довжини дуги меридіана ?
2. В яких одиницях здійснюється обчислення дуги меридіана ?
3. Від якого головного радіусу кривизни залежить довжина дуги меридіана ?
4. Які параметри необхідно знати для визначення довжини дуги меридіана для середньої широти ?
5. Що означає різниця довгот для визначення короткої довжини дуги меридіана ?
6. Дайте визначення головного радіуса кривизни меридіана.
7. Що називають дугою меридіана ?
8. Що називають короткою дугою меридіана ?

Приклад розв’язування та оформлення лабораторної роботи

Тема: Розрахунок довжин дуг меридіанів

Завдання:

1. Обчислити довжину дуги меридіана до точки А із заданою широтою B.

2. Обчислити короткі довжини дуг меридіана ΔX між точками із різницею широт δB на середніх широтах від 0^0 до 90^0 з інтервалом ΔB (рис. 2.1).

3. Побудувати графік залежності довжини дуги меридіана від широти, зробити висновок.

Вихідні дані: $\mathrm{B_A} = 47^0 30'$, ΔB – інтервал задає викладач, $\delta \mathrm{B} = 1^0$.

1. ***Обчислення довжини дуг меридіана до точки А заданої широти В.***

Довжина дуги меридіана X до заданої точки A обчислюється за формулою:

$$X = 6367558{,}5B - (32005{,}6 + 134{,}6\sin^2 B)\sin B\cos B.$$

$$X = 6367558.5\ (0{,}8290314) -$$
$$-(32005{,}6 + 134{,}6\ \sin^2 47{,}5°)\sin 47°30'\cos 47°30' = 5262925 \text{ м}$$

2. ***Обчислення коротких довжин дуг меридіана ΔX на середніх широтах B_m.***

$$\Delta X = M_m \delta B^p + 5300(1 - 2\, sinB^2\, B_m)(\delta B^p)^3,$$

де M_m – середній радіус кривизни меридіана еліпсоїда на середніх широтах B_m,

$$M_m\ = 6335552{,}8 + (538{,}4\, sin^2\, B_m + 63607{,}5)\, sin^2\, B_m,\ B_m = \frac{B_1 + B_2}{2},$$

де B_1, B_2 – широти початку і кінця інтервалу.

Результати обчислень занесені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1.

Розрахунок коротких довжин дуг меридіана

B°m	Bm^p	sin (Bm^p)	sin^2(Bm^p)	Mm, м	δB^p	δB^3	ΔX, м
2,5	0,043633	0,043619	0,001903	6335673,8	0,087266	2,17767E-05	552892
7,5	0,13090	0,130526	0,017037	6336636,6	0,087266	2,17767E-05	552976
12,5	0,218166	0,21644	0,046846	6338533,7	0,087266	2,17767E-05	553141,5
17,5	0,305433	0,300706	0,090424	6341308,8	0,087266	2,17767E-05	553383,7
22,5	0,392699	0,382683	0,146447	6344879,4	0,087266	2,17767E-05	553695,3
27,5	0,479966	0,461749	0,213212	6349139,1	0,087266	2,17767E-05	554067
32,5	0,567232	0,5373	0,288691	6353960,6	0,087266	2,17767E-05	554487,7
37,5	0,654498	0,608761	0,37059	6359199,1	0,087266	2,17767E-05	554944,8
42,5	0,741765	0,67559	0,456422	6364696,8	0,087266	2,17767E-05	555424,6
47,5	0,829031	0,737277	0,543578	6370287,5	0,087266	2,17767E-05	555912,4
52,5	0,916298	0,793353	0,629410	6375801,3	0,087266	2,17767E-05	556393,6
57,5	1,003564	0,843391	0,711309	6381069,8	0,087266	2,17767E-05	556853,3
62,5	1,090831	0,887011	0,786788	6385931,7	0,087266	2,17767E-05	557277,6
67,5	1,178097	0,92388	0,853553	6390237,5	0,087266	2,17767E-05	557653,3
72,5	1,265364	0,953717	0,909576	6393854,1	0,087266	2,17767E-05	557968,9
77,5	1,35263	0,976296	0,953154	6396669,7	0,087266	2,17767E-05	558214,6
82,5	1,439897	0,991445	0,982963	6398596,8	0,087266	2,17767E-05	558382,8
87,5	1,527163	0,999048	0,998097	6399575,6	0,087266	2,17767E-05	558468,2

3. Побудова графіка залежності коротких дуг меридіана від широти

Побудову графіка виконано в програмі Microsoft Excel (діаграми) (рис. 2.2).

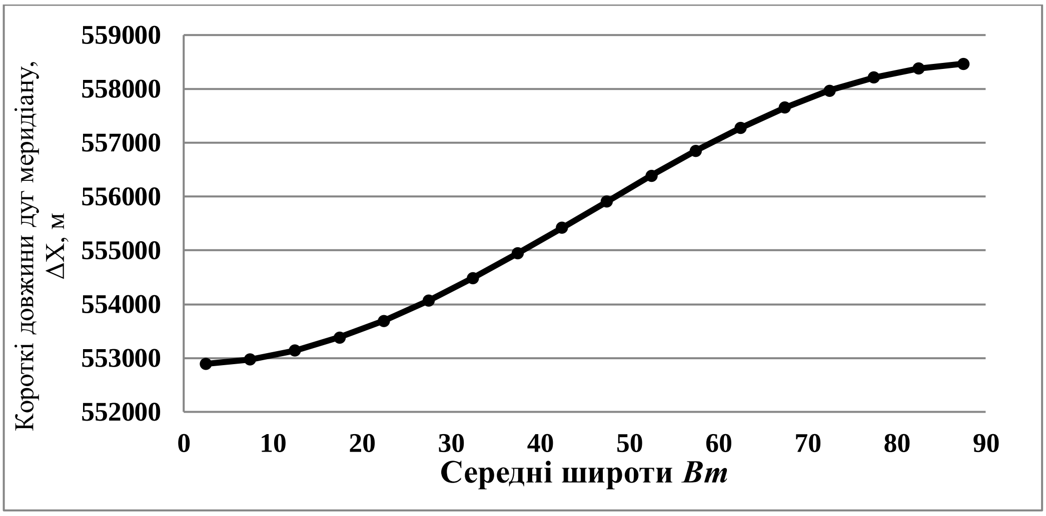


Рис. 2.2. Графік залежності довжини дуги меридіана від широти

Висновок: Написати висновок відносно отриманих результатів.

Лабораторна робота №3

Тема: Розрахунок довжин дуг паралелей

***Навчальна мета**: вивчення алгоритму обчислення довжин дуг паралелі та встановлення залежності довжин дуг паралелі від значення широти.*

Загальні відомості

Паралель – це окружність, радіус якої дорівнює $N\cos B$. Тому довжину паралелі ΔY між довготами L_1 і L_2 знаходять як множення радіуса паралелі на відповідний двохгранний кут $\Delta L = L_2 - L_1$ (рис. 3.1), тобто

$$\Delta Y = N\cos B_m\, \Delta L, \tag{3.1}$$

де N – головний радіус першого вертикала; ΔL – різниця довгот меридіанів між кінцевою та початковою точками на деякій паралелі з середньою широтою Bm, вираженою в радіанах.

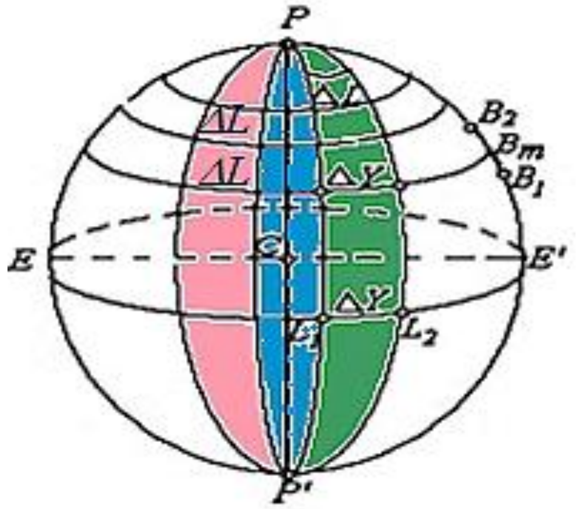


Рис. 3.1. Схема визначення довжини дуги паралелі на середніх широтах

Для наближених розрахунків корисно запам’ятати деякі співвідношення між довжинами дуг меридіанів і паралелей та відповідними різницями широт і довгот. Приймемо наближені значення головних радіусів кривизни рівними великій піввісі земного еліпсоїда. Тоді

$$\Delta X = \frac{a}{\rho''} dB'',$$

$$\Delta Y = \frac{a}{\rho''} \cos B\, dL.$$

Завдання:

1. Обчислити довжини дуг паралелей на середніх широтах (рис. 3.1).

2. Побудувати графік залежності довжин дуг паралелей від широти.

(Побудову графіка доцільно виконати в програмі Microsoft Excel (рис. 3.2).

Вихідні дані: Середні широти *Bm* (беремо з роботи № 2), різниця довгот меридіанів між кінцевою та початковою точкою паралелі, $\Delta L = (L_2 - L_1) + N$ – різниця довгот (ΔL завдає викладач), N – номер варіанту.

Методичні рекомендації до виконання роботи

1. Обчислення довжини дуг паралелей на середніх широтах.

Довжини дуг паралелей ΔY розраховуються за формулою (3.1):

Радіус кривизни першого вертикалу N обчислюється за формулою:

$$N = 6378245 + (108{,}1\sin^2 B_m + 21345{,}8)\sin^2 B_m.$$

Результати обчислень заносяться в таблицю (3.1).

2. Побудова графіка залежності довжини дуг паралелі від широти

Побудову графіка виконати відповідно до вимог; підписати назву осей графіка та одиниці вимірювань аргументів (рис. 3.2).

Висновок. Дати висновок за результатами роботи.

Питання для самоконтролю

1. В чому полягає визначення довжини дуги паралелей ?
2. В яких одиницях здійснюється обчислення дуги паралелі ?
3. Від якого головного радіусу кривизни залежить довжина дуги паралелі ?
4. Які параметри необхідно знати для визначення довжини дуги паралелі ?
5. Що означає різниця довгот для визначення короткої довжини дуги паралелі ?
6. Дайте визначення головного радіусу першого вертикала.
7. Як залежить радіус першого вертикала від широти ?
8. Від чого залежить довжина дуги паралелі ?

Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи

Тема: Розрахунок довжин дуг паралелей

Завдання: 1.Обчислити довжину дуги паралелі ΔY між точками з різницею довгот ΔL, на середніх широтах від 0^0 до 90^0 з інтервалом широт ΔB (рис. 3.1).

2. Побудувати графік залежності довжини дуги паралелі від широти в програмі Microsoft Excel (рис. 3.2). За результатами роботи зробити висновок.

Вихідні дані: середні широти *Bm;* різниця довгот *ΔL*=2°46'.

***1. Обчислення довжини дуг паралелей*.**

Довжина дуги паралелі ΔY розраховуються за формулою:

$$\Delta Y = N \cos B_m \Delta L^{рад},$$

де N – радіус кривизни першого вертикалу на середній широті; *Bm* – середня широта, в градусах; ΔL – різниця довгот.

$$N = 6378245 + (108.1 \sin^2 B_m + 21345.8) \sin^2 B_m.$$

Результати обчислень заносяться в табл. 3.1.

Таблиця 3.1.

Розрахунок довжин дуг паралелей

B°m	*Bm* ^{рад}	*sinBm*	*sin2Bm*	*N, м*	*cosBm*	Δ*L рад*	Δ*Y, м*
2,5	0,043633	0,043619	0,001903	6378286	0,999048	0,048287	307695,14
7,5	0,1309	0,130526	0,017037	6378609	0,991445	0,048287	305368,86
12,5	0,218166	0,21644	0,046846	6379245	0,976296	0,048287	300732,96
17,5	0,305433	0,300706	0,090424	6380176	0,953717	0,048287	293820,7
22,5	0,392699	0,382683	0,146447	6381373	0,92388	0,048287	284681,81
27,5	0,479966	0,461749	0,213212	6382801	0,887011	0,048287	273382,34
32,5	0,567232	0,5373	0,288691	6384416	0,843391	0,048287	260004,35
37,5	0,654498	0,608761	0,37059	6386170	0,793353	0,048287	244645,58
42,5	0,741765	0,67559	0,456422	6388010	0,737277	0,048287	227418,98
47,5	0,829031	0,737277	0,543578	6389880	0,67559	0,048287	208452,1
52,5	0,916298	0,793353	0,62941	6391723	0,608761	0,048287	187886,38
57,5	1,003564	0,843391	0,711309	6393483	0,5373	0,048287	165876,27
62,5	1,090831	0,887011	0,786788	6395107	0,461749	0,048287	142588,21
67,5	1,178097	0,92388	0,853553	6396544	0,382683	0,048287	118199,39

Продовження таблиці 3.1.

72,5	1,265364	0,953717	0,909576	6397750	0,300706	0,048287	92896,49
77,5	1,35263	0,976296	0,953154	6398689	0,21644	0,048287	66874,10
82,5	1,439897	0,991445	0,982963	6399332	0,130526	0,048287	40333,18
87,5	1,527163	0,999048	0,998097	6399658	0,043619	0,048287	13479,28

3. Побудова графіка залежності довжини дуг паралелей від широти

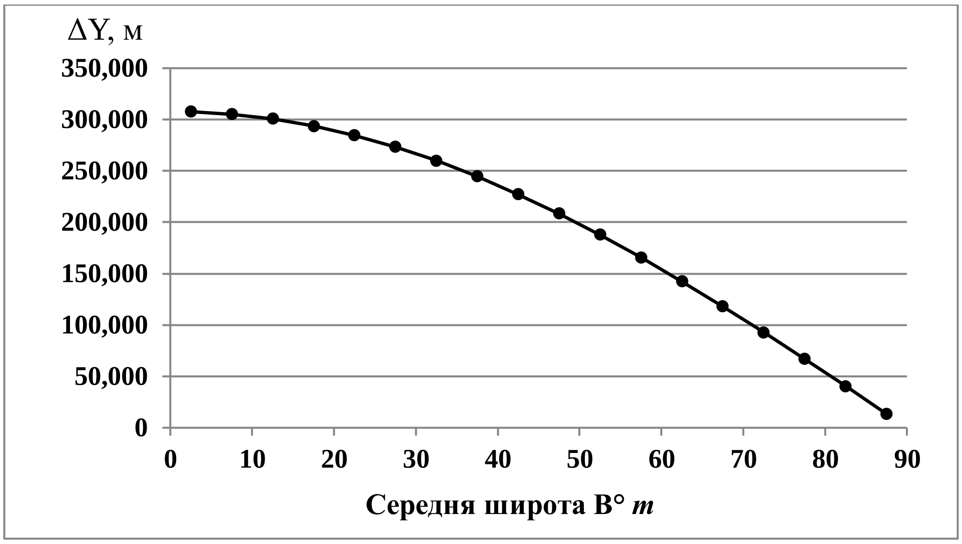


Рис. 3.2. Графік залежності довжини дуги паралелей від широти

Висновок. Зробити висновок за результатами виконаної роботи

Лабораторна робота № 4

Тема: Розв'язання головної прямої геодезичної задачі на поверхні еліпсоїда

Навчальна мета: *вивчення алгоритму розв’язування головної прямої геодезичної задачі методом Рунге-Кутта-Інгланда на поверхні еліпсоїда та встановлення точності її розв’язування.*

Загальні відомості

Суть розв’язування геодезичних задач на поверхні еліпсоїда полягає в визначенні геодезичних координат деякої точки за відомими координатами інших точок, виміряними або заданими кутовими й лінійними величинами, яка називається *головною геодезичної задачею* вищої геодезії.

Обґрунтовано, що розв’язування головних геодезичних задач на поверхні еліпсоїда зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь геодезичної лінії

$$
\left.
\begin{aligned}
dB &= \frac{\cos A}{M} dS, \\
dL &= \frac{\sin A}{N \cos B} dS, \\
dA &= \frac{\sin A}{N} \mathrm{tg} B tgS.
\end{aligned}
\right\}. \tag{4.1}
$$

Інтегруючи рівняння (4.1) вздовж дуги S (між точками Q_1 і Q_2) отримують необхідні величини прямої задачі на еліпсоїді (4.2), що доводить висунуте твердження

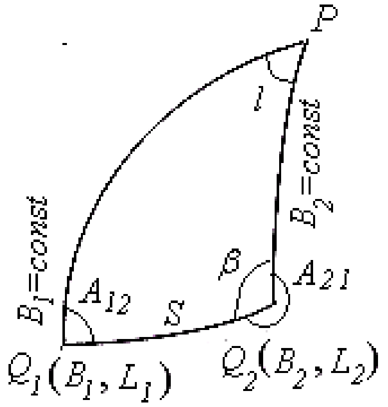


Рис. 4.1. Полярний сферичний трикутник

$$
\left.
\begin{aligned}
\Delta B &= \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{\cos A}{M} dS, \\
\Delta L &= \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{\sin A}{N \cos B} dS, \\
\Delta A &= \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{\sin A}{N} tgB\, tgS.
\end{aligned}
\right\}. \tag{4.2}
$$

Метод Рунге-Кутта-Інгланда полягає в тому, що розв’язування диференційного рівняння першого порядку в точці x_{j+1} має такий вигляд:

$$
y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4), \tag{4.3}
$$

де

$$
k_1 = \Delta x\, f\,(x_j, y_j),\; k_2 = \Delta x\, f\left(x_j + \frac{1}{2}\Delta x,\; y_j + \frac{1}{2}k_1\right),
$$

$$
k_3 = \Delta x\, f\left(x_j + \frac{1}{2}\Delta x,\; y_j + 0{,}25\,(k_1 + k_2)\right),\; k_4 = \Delta x\, f\,(x_j + \Delta x,\;\; y_j - k_2 + 2k_3),
$$

$\Delta x = x_{j+1} - x_j$ – крок інтегрування (табл. 4.3).

Застосовуючи формулу (4.3) отримують робочі формули (4.4) і (4.5) для розв’язування прямої задачі.

$$\left.\begin{aligned}
B_2 - B_1 &= \int_0^S \frac{V^3}{c} \cos A\, dS;\\
L_2 - L_1 &= \int_0^S \frac{V}{c} \sec B \sin A\, dS;\\
A_2 - A_1 \pm 180 &= \int_0^S \frac{V}{c} \sin B \sec B \sin A\, dS.
\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

$$\left.\begin{aligned}
B_2 &= B_1 + \frac{1}{6}\,(\Delta B_1 + 4\Delta B_3 + \Delta B_4),\\
L_2 &= L_1 + \frac{1}{6}\,(\Delta L_1 + 4\Delta L_3 + \Delta L_4),\\
A_2 &= A_1 + \frac{1}{6}\,(\Delta A_1 + 4\Delta A_3 + \Delta A_4).
\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

де

$$\left.\begin{aligned}
\Delta B_i'' &= S_0 V_i^3 \cos\alpha_i,\\
\Delta L_i'' &= S_0 V_i \frac{\sin\alpha_i}{\cos\varphi_i},\\
\Delta A_i'' &= \Delta L_i \sin\varphi_i,
\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

У формулі (4.6) $V_i = \dfrac{1+0{,}6\,\gamma_i}{1+0{,}2\,\gamma_i}$, $\gamma_i = \beta\cos^2\varphi_i$; $S_0'' = \dfrac{S}{c}\rho'' = 0{,}0322304 \cdot S$; $\beta = 1{,}25e'^2$, $i = 1,\ldots,6$ – номер пробного кроку інтеграла.

Для еліпсоїду Красовського : с = 6399698,9 м, β = 0,00842316.

Обчислення α_i і φ_i виконують за формулами наведеними в табл. 4.1, які ґрунтуються на формулах (4.4)

Таблиця 4.1

Формули і значення обчислень α_i і φ_i

i	α_i (A_i)	φ_i (B_i)
1	A_1	B_1
2	$A_1 + 0{,}5\Delta A1$	$B_1 + 0{,}5\Delta B_1$
3	$A_1 + 0{,}25(\Delta A_1 + \Delta A_2)$	$B_1 + 0{,}25(\Delta B_1 + \Delta B_2)$
4	$A_1 - \Delta A_2 + 2\Delta A_3$	$B_1 - \Delta B_2 + 2\Delta B_3$
5	$A_1 + 1/127(7\Delta A_1 + 10\Delta A_2 + \Delta A_3)$	$B_1 + 1/127\,(7\Delta B_1 + 10\Delta B_2 + \Delta B_3)$
6	$A_1 + 1/625\,(28\Delta A_1 - 125\Delta A_2 + {}$ $+564\Delta A_3 + 54\Delta A_4 - 378\Delta A_5)$	$B_1 + 1/625\,(28\Delta B_1 - 125\Delta B_2 + {}+564\Delta B_3$ $+ 54\Delta A_4 - 378\Delta B_5)$

Обчислені широти та азимути за кроком інтегрування в табл. 4.1 використовують для обчислення зміни широти, азимута та довготи в кожному наближенні (табл. 4.2).

Для оцінки точності розв'язування прямої задачі необхідно визначити похибку інтегрування. Похибка інтегрування – це локальна похибка для визначення координат і азимутів для розв'язуванні прямої геодезичної задачі. Локальні похибки інтегрування для координат і напрямку обчислюються за формулою (4.7).

$$\left.\begin{aligned} M''_{\Delta B} &= \frac{1}{336}(-42\Delta B''_1 - 224\Delta B''_3 - 21\Delta B''_4); \\ M''_{\Delta L} &= \frac{1}{336}(-42\Delta L''_1 - 224\Delta L''_3 - 21\Delta L''_{46}); \\ M''_{\Delta A} &= \frac{1}{336}(-42\Delta A_1 - 224\Delta A_3 - 21\Delta A_4). \end{aligned}\right\} \quad (4.7)$$

Завдання:

1.Розв'язати пряму геодезичну задачу методом Рунге-Кутта-Інгланда.

2. Виконати оцінку точності розв'язання прямої задачі.

Вихідні дані:

Геодезичні координати початкової точки Q_1; прямий азимут A_{12} напрямку геодезичної лінії Q_1Q_2; довжина геодезичної лінії S (рис. 4.1).

B_1 = 48°11'00,00"+N' + N,N", L_1 = 35°49'00,00"+ N' + N,N",

$A_{12} = A_1$ = 53°29'00,00"+ N' + N,N", $S_{1\text{-}2}$ = 480129,10 м + N м,+N см,

де *N* – номер варіанту.

Методичні рекомендації до виконання роботи

Розв'язування прямої геодезичної задачі методом Рунге-Кутта-Інгланда починають з визначення приростів інтегрування. За робочими формулами (4.4 – 4.6) визначаються покрокову зміну інтеграла широти, азимуту і довготи, а результати обчислення заносяться паралельно в табл. 4.1 і табл. 4.2. Визначення приростів інтегрування ΔB_i, ΔL_i, ΔA_i виконують способом наближень за формулами, наведеними в табл. 4.1, паралельно їх підставляють у формули 4.6. Кількість наближень *i* залежить від кроку інтегрування та широти.

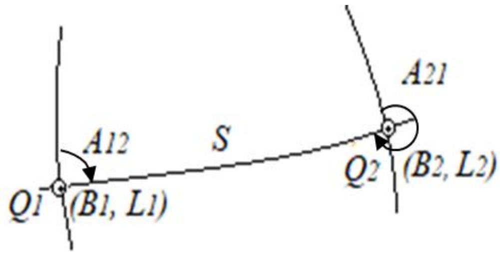


Рис.4.1. Схема прямої геодезичної задачі на поверхні еліпсоїда.

Таблиця 4.2

Схема розв’язування прямої геодезичної задачі способом
Рунге – Кутта – Інгланда

Елементи формул	*i* (наближення)					
	1	2	3	4	5	6
S'_0	9066,10	9066,10	9066,0918	9066,0918	9066,10	9066,10
A_i° ' "	53 35 40,00	53°37'8,70"	55°00’24,12’’	56°32’46,32’’	54 00 21,60	54 19 55,20
$A°i$	53,5944	53,619	55,0067	56,5462	54,006	54,332
Bi° ' "	54°17'40,00"	54°18'27,12"	55,0317	55,7435	54 57 04,67	54 57 10,80
$B°_i$	54,2944	54,3075326	0,9605	0,9729	54,9513	54,9530
$cos\alpha i$	0,593497	0,59315078	0,5735	0,5513	0,587700	0,574248
$sin\alpha i$	0,804836	0,80509139	0,8192	0,8343	0,809078	0,812409
$cos\varphi i$	0,583620	0,58343444	0,5731	0,5629	0,574272	0,574248
$sin\varphi i$	0,812027	0,81216024	0,8195	0,8265	0,818664	0,818681
$cos^2\varphi i$	0,340612	0,340396	0,3285	0,3169	0,329789	0,329761
γi	0,0029	0,0029	0,0028	0,0027	0,002778	0,002778
$1+0,6\gamma i$	1,0017	1,0017	1,0017	1,0016	1,0017	1,0017
$1+0,2\gamma i$	1,0006	1,0006	1,0006	1,0005	1,0006	1,0006
Vi	1,0011	1,0011	1,0011	1,0011	1,0011	1,0011
Vi^3	1,0034	1,0034	1,0033	1,0032	1,0034	1,0034
$sin\alpha i/cos\varphi i$	1,379042	1,379917	1,4294	1,4822	1,3934	1,4025
$\Delta B_i''$	5399	5396	5216,5025	5013,8291	5346,3221	5304,2630
$\Delta Bi^{\circ\,'\,''}$	1 29 59,24	1°29'56,07"	1,449028	1,3927	1 29 06,36	1 28 24,24
$\Delta L_i''$	12517	12525	12973,3378	13452,1184	12646,6973	12729,5462
$\Delta L_i^{\circ\,'\,''}$	3 28 36,87	3°28'44,80"	3,6037	3,7367	3 30 46,70	3 32 09,36
$\Delta A_i''$	10164"	10172	10631,2454	11118,5184	10296,2080	10376,4101
$\Delta A_i^{\circ\,'\,''}$	2,823333	2,825556	2,953124	3,088477	2,860058	2,882336

2. Оцінка точності розв’язання прямої задачі

Точність розв’язування прямої задачі на поверхні еліпсоїда виконується за формулами (4.5), в яку підставляють числові значення із табл. 4.2. Для широти менше 65° похибки повинні бути: $M\Delta B$ < 0,1 – 0,15 м; $M\Delta L$ < 0,1 – 0,15 м; $M\Delta A$ < 0,003 м.

Питання для самоконтролю

1. Яку задачу розв'язуємо за формулами в табл. 4.1 ?

2. Як знаходимо зміни широти, азимута та довготи для обчислення координат і напрямку лінії кінцевої точки Q_2 ?

3. Для чого використано для розв'язування прямої задачі інтеграли ?

4. Що означає точність розв'язування головної прямої геодезичної задачі ?

5. В яких одиницях вимірювання знаходимо похибку M визначення координат кінцевої *точки* Q_2 ?

6. Як перейти до лінійної міри визначення локальної точності положення шуканої точки Q_2 ?

7. Від чого залежить похибка приростів інтегрування широти, довготи та азимуту ?

8. Яку задачу розв'язуємо в прямій геодезичній задачі на поверхні еліпсоїда ?

Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи

Тема: Розв'язання головної прямої геодезичної задачі на поверхні еліпсоїда

Завдання:

1.Розв'язати пряму геодезичну задачу методом Рунге-Кутта-Інгланда.

2. Виконати оцінку точності розв'язання прямої задачі

Вихідні дані:

Геодезичні координати початкової точки Q_1, прямий азимут A_{12} геодезичної лінії, довжина геодезичної лінії $S_{1\text{-}2}$.

B_1 = 54°37′05.25″;

L_1 = 24°14′35,25″

A_{12} (A_1) =*53°55′05,25″*

$S_{1\text{-}2}$ = 48132,03 м,

Визначити: геодезичні координати кінцевої точки Q_2 (B_2, L_2); прямий та обернений азимути A_{12} і A_{21} (рис. 4.1).

1. ***Розв'язування прямої геодезичної задачі методом Рунге-Кутта-Інгланда***

Для розв'язування прямої геодезичної задачі використовують формули:

$$\left.\begin{aligned} B_2 - B_1 &= \int_0^S \frac{V^3}{c}\cos A dS; \\ L_2 - L_1 &= \int_0^S \frac{V}{c}\sec B \sin A dS; \\ A_2 - A_1 \pm 180 &= \int_0^S \frac{V}{c}\sin B \sec B \sin A dS. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= B_1 + \frac{1}{6}(\Delta \mathrm{B}_1 + 4\Delta \mathrm{B}_3 + \Delta \mathrm{B}_4); \\ L_2 &= L_1 + \frac{1}{6}(\Delta L_1 + 4\Delta L_3 + \Delta L_4); \\ B_2 &= B_1 + \frac{1}{6}(\Delta A_1 + 4\Delta A_3 + \Delta A_4), \end{aligned}\right\}$$

де

$$\left.\begin{aligned} \Delta B_i &= S_0 V_i^3 \cos\alpha_i, \\ \Delta L_i &= S_0 V_i \frac{\sin\alpha_i}{\cos\varphi_i}, \\ \Delta A_i &= \Delta L_i \sin\varphi_i, \end{aligned}\right\}$$

$$V_i = \frac{1 + 0{,}6\,\gamma_i}{1 + 0{,}2\,\gamma_i},\ \gamma_i = \beta\cos^2\varphi_i;\ S_0 = \frac{\rho''}{c}S = 0{,}0322304 \cdot S,$$

i = 1,…,6 – номер пробного кроку. с = 6399698,9 м, $\beta = 1{,}25e'^2$ = 0,00842316.

Локальні похибки інтегрування для координат і азимута обчислюються за формулами (4.7).

Для визначення приростів інтегрування підставляють значення у формули, наведені у табл. 4.1. Обчислені значення підставляють у формули 4.6, а результати зводять в табл. 4.2. Кількість таких обчислень буде відповідати кількості наближень *i*.

У наведеному прикладі розв'язування головної прямої геодезичної задачі (табл. 4.1 і табл. 4.2) виконано тільки чотири наближення.

Таблиця 4.1

Формули для обчислення приростів інтегрування напрямку α і широти φ

i	Ai	A	B_i	B
1	A_1	53°55′05,25″	B_1	54°37′05,25″
2	$A_1 + 0,5\Delta A_1$	54°03′41,75″	$B_1 + 0,5\Delta B_1$	54°41′33,25″
3	$A_1 + 0,25(\Delta A_1 + \Delta A_2)$	54°03′ 43,00″	$B_1 + 0,25(\Delta B_1 + \Delta B_2)$	54°41′32,45″
4	$A_1 - \Delta A_2 + 2\,\Delta A_3$	54°12′23,19″	$B_1 - \Delta B_2 + 2\Delta B_3$	54°45′59,59″

Таблиця 4.2

Схема розв’язування прямої геодезичної задачі
способом Рунге – Кутта – Інгланда

Елементи формули	i – наближення			
	1	2	3	4
S_0	907,423	907,423	907,423	907,423
A_i	53°55′05.25″	54°03′41.75″	54°03′ 43″	54°12′23.19″
A_i	53,9181250	54,0615972	54,0619444	54,2064807
B_i	54°37′05.25″	54°41′33.25″	54°41′32.45″	54°45′59.59″
B_i	54,6181250	54,6925694	54,6924305	54,766666
$cosA_i$	0,5889407	0,5869151	0,5869102	0,5848664
$sinA_i$	0,8081762	0,8096484	0,8096519	0,8111295
$cosB_i$	0,5790232	0,5779634	0,5779666	0,5769092
$sinB_i$	0,8153110	0,8160626	0,8160604	0,8168082
cos^2B_i	0,3468511	0,3340416	0,3340454	0,3328242
γ_i	0,0029215	0,0028136	0,0028137	0,0028034
$1+0,6\gamma_i$	1,0017529	1,0016881	1,0016882	1,0016820
$1+0,2\gamma_i$	1,0005843	1,0005627	1,0005627	1,0005606
V_i	1,0011679	1,0011247	1,0011248	1,0011207
V_i^3	1,0035078	1,0033780	1,0033784	1,0033660
sinαi/cosφi	1,3957578	1,4008644	1,4008627	1,4059916
$\Delta B_i''$	536	534	534	532
ΔB_i^o	0,148889	0.148333	0.148438	0.147919
$\Delta Bi^{\circ\,'\,''}$	0°08′56.00″	0°08 ′53.59″	0°08′ 54.23″	0°08′52.30″
$\Delta L_i''$	1268	1272	1272	1277
ΔL_i^o	0,3522222	0.3533333	0.3535013	0.3547941
$\Delta L_i^{o'}$	0°21′07.59″	0 °21′11 59″	0°21′12,36″	0°21′17,15″
$\Delta A_i''$	1033	1038	1038	1043
ΔA_i^o	0,2869444	0.2883333	0.2883445	0.2897400
$\Delta A_i^{o'}$	0°17′12.59″	0°17′ 17.59″	0°17′ 18.20″	0°17′23.38″

За результатами розв’язування задачі знаходять координати кінцевої точки Q_2 (B_2, і L_2) та обернений азимут A_2 за формулами (4.5 і 4.6).

Обчислення приростів широти B, довготи L та азимуту A за формулою (4.5).

$\Delta B'' = 1/6\ (536'' + 4\cdot536'' + 532'') = 534''$, $\Delta B = 0°08'54{,}00''$,
$\Delta L'' = 1/6\ (1268'' + 4\cdot1272'' + 1277'') = 1272''$, $\Delta L = 0°21'12{,}00''$,
$\Delta A'' = 1/6\ (1033'' + 4\cdot1038'' + 1043'') = 1038''$, $\Delta A = 0°17'18{,}00''$.

Обчислення координат кінцевої точки Q_2.

$B_2 = B_1 + \Delta B = 54°37'05{,}25'' + 0°08'54{,}00'' = 54°45'59{,}25''$,
$L_2 = L_1 + \Delta L = 24°14'35{,}25'' + 0°21'12{,}00'' = 24°35'47{,}25''$,
$A_2 = A_{12} + A \pm 180° = 53°55'05{,}25'' + 0°17'18{,}12'' + 180° = 234°12'23{,}25''$.

2. ***Оцінка точності похибок інтегрування розв'язування прямої задачі***
Похибка інтегрування визначається за формулою (4.7)

$M\Delta B'' = 1/336\ [-42\cdot(536) - 224\ (534) - 21\ (532)] = -456{,}25''$,
$M\Delta L'' = 1/336\ [-42\ (1268) - 224\ (1272) - 21\ (1277)] = -1086{,}31''$,
$M\Delta A'' = 1/336\ [-42\cdot(1033) - 224(1038) - 21(1043)] = -886{,}31''$.

$M\ \Delta B - 0{,}002$ м, $M\Delta L = -0{,}005$ м, $M\Delta A = -0{,}004$ м.

Висновок зробити аналіз точності похибок інтегрування розв'язування прямої геодезичної задачі відповідно до заданих похибок локальної точності.

Лабораторна робота № 5

Тема: Розв'язування головної оберненої геодезичної задачі на поверхні еліпсоїда

Навчальна мета: *вивчення алгоритму розв'язування головної оберненої геодезичної задачі на поверхні еліпсоїда способом з середніми аргументами за формулами Гаусса.*

Загальні відомості

Суть оберненої геодезичної задачі полягає в тому, що за даними геодезичними координатами B_1, L_1 і B_2, L_2 точок Q_1 і Q_2 обчислюють довжину між цими точками S, прямий A_{12} і обернений A_{21} геодезичні азимути (рис. 5.1). Одним з найбільш простих в практичному відношенні є спосіб з середніми аргументами за формулами Гаусса.

Розв'язування оберненої геодезичної задачі виконується за формулами з середньою широтою та середнім азимутом або за спрощеними формулами Гаусса.

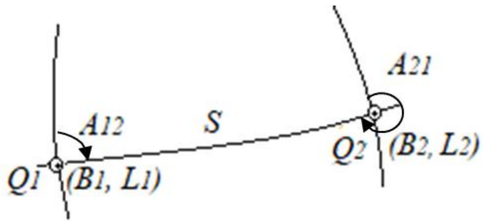


Рис. 5.1. Схема оберненої геодезичної задачі на поверхні еліпсоїда

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{B}_m = \frac{\mathrm{B}_1+\mathrm{B}_2}{2};\ b = B_2 - B_1; \\ L_m = \frac{L_1+L_2}{2};\ l = L_2 - L_1. \\ A_{1-2} = A_m - \frac{1}{2}\Delta A;\ A_{2-1} = A_m \pm 180° + \frac{1}{2}\Delta A, \\ A_m = arctg\frac{\sum 1}{\sum 2} \\ S_1 = \frac{D\sum 1}{sinA_m};\ S_2 = \frac{D\sum 2}{cosA_m}; \\ S_{cp} = \frac{S_1+S_2}{2}. \end{array}\right\} \qquad (5.1)$$

Розкриємо позначення аргументів $D\sum 1$ і $D\sum 2$ у формулі (5.1)

$$\left.\begin{array}{l} D\sum 1 = S\sin A_m = D\left[a_1\Delta\bar{l} + a_2\Delta\bar{B}^2\Delta\bar{l} + a_3\Delta\bar{l}^3\right] \\ D\sum 2 = S\cos A_m = D\left[a_4\Delta\bar{B} + a_5\Delta\bar{B}\Delta\bar{l}^2 + a_6\Delta\bar{B}^3\right] \\ \Delta A = \sin B_m\sum 3 = \sin B_m\left[a_7\Delta\bar{l} + a_8\Delta\bar{B}^2\Delta\bar{l} + a_9\Delta\bar{l}^3\right] \end{array}\right\}, \qquad (5.2)$$

де

$$D = \frac{m+\cos^2 B_m}{n+\cos^2 B_m},\ m = 593{,}602160,\ n = 197{,}867385.$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\bar{\mathrm{B}} = (\mathrm{B}_2 - \mathrm{B}_1)''10^{-4} \\ \Delta\bar{l} = (L_2 - L_1)''10^{-4} \end{array}\right\} \qquad (5.3)$$

Коефіцієнти *ai* у рівняннях (5.2) визначаються за формулами (5.4).

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= 103422{,}05 \cos B_m\,,\\
a_2 &= 9{,}5144 \cos B_m + 0{,}5525 \cos^3 B_m - 0{,}0078 \cos^5 B_m,\\
a_3 &= -10{,}1287 \cos B_m + 10.1287 \cos^2 B_m\,,\\
a_4 &= 103422{,}05 - 696{,}911 \cos^2 B_m + 4{,}6954 \cos^4 B_m - 0{,}0310 \cos^6 B_m,\\
a_5 &= -30{,}3860 + 10.3334 \cos^2 B_m - 0{,}2061 \cos^4 B_m + 0{,}0014 \cos^6 B_m\,,\\
a_6 &= -0{,}2048 + 0{,}4192 \cos^2 B_m - 0{,}0124 \cos^4 B_m\,,\\
a_7 &= 10000,\\
a_8 &= 2.9381 + 0{,}0132 \cos^2 B_m + 0.0132 \cos^4 B_m\,,\\
a_9 &= 1{,}9587 \cos^2 B_m + 0{,}0132 \cos^4 B_m\,.
\end{aligned}\right\}, \quad (5.4)$$

Примітка. Для обчислення коефіцієнтів *ai* обмежуються кількістю знаків тригонометричних функцій після коми: для a_1 = $\cos B_m$ – до 7 знаків, a_4 = $\cos B_m$ – 6 знаків, для інших $\cos B_m$ – 4 знаки.

Завдання:

Обчислити довжину геодезичної лінії *S1-2*, прямий *A12* та обернений *A21* геодезичні азимути напрямку лінії за формулами із середніми аргументами (спосіб Гаусса).

Вихідні дані:

Геодезичні координати точок Q_1 (B_1, L_1) і Q_2 (B_2, L_2), які беруться з лабораторної роботи № 4.

Методичні рекомендації до виконання роботи

Розв’язування оберненої геодезичної задачі починають з обчислень за формулою (5.1) величин b і l.

За формулою (5.2), (5.3) і (5.4) знаходимо шукані аргументи оберненої геодезичної задачі: геодезичний азимут прямий та обернений; довжину геодезичної лінії. Послідовність обчислень елементів формул розв’язування оберненої геодезичної задачі заносяться в табл. 5.1.

Обчислення доцільно проводити в програмі Microsoft Excel.

Висновок: виконати порівняння знайдених величин із їх значеннями, які є вихідними даними в лабораторній роботі № 4

Питання для самоконтролю

1. Які величини розраховуємо в оберненій геодезичній задачі на поверхні еліпсоїда ?

2. Як знаходимо зміни широти, азимута та довготи для обчислення координат і напрямку лінії Q_{2-1} ?

3. Як перевірити правильність знаходження довжини геодезичної лінії ?

4. На яку величину геодезичний азимут $A12$ напрямку Q_{1-2} буде відрізнятися від азимуту A_{21} напрямку Q_{2-1} ?

5. В яких одиницях вимірювання знаходимо значення $D\sum 1$ і $D\sum 2$?

6. Чому геодезичний азимут прямий A_{12} не буде відрізнятися від оберненого A_{21} на ± 180° ?

Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи

Тема: Розв'язування головної оберненої геодезичної задачі на поверхні еліпсоїда

Завдання:

1. Розв'язати обернену геодезичну задачу за формулами із середніми аргументами (спосіб Гаусса).

2. За відомими координатами початкової і кінцевої точки обчислити довжину геодезичної лінії, прямий і обернений геодезичні азимути (рис. 5.1).

Вихідні дані:

Координати точок

B_1 =54°17'40,00″, L_1 =23°55'10,00″;

B_2 = 55°44'33", L_2 = 27°32'57,05".

(дані беруть з розв'язування прямої геодезичної задачі)

1. Розв'язування оберненої геодезичної задачі за формулами із середніми аргументами (спосіб Гаусса).

Спосіб Гаусса заснований на розкладанні підінтегральних функцій у ряд Тейлора за середніми аргументами (5.1):

$$B_m = \frac{B_1+B_2}{2};\ L_m = \frac{L_1+L_2}{2}.$$

Формули (5.1), (5.2) і (5.3) для розв'язування оберненої геодезичної задачі

$$A_{1-2} = A_m - \frac{1}{2}\Delta A;$$
$$A_{2-1} = A_m \pm 180° + \frac{1}{2}\Delta A,$$

де

$$A_m = arctg\frac{\sum_1}{\sum_2}.$$

$$S_1 = \frac{D\sum_1}{sinA_m}, S_1 = \frac{D\sum_2}{cosA_m}. S_{cp} = \frac{S_1+S_2}{2}.$$

$$S\,sin\,A_m = D\left[a_1\bar{\Delta l} + a_2\Delta\bar{B}^2\Delta\bar{l} + a_3\Delta\bar{l}^3\right] = D\sum 1,$$
$$S\,cos\,A_m = D\left[a_4\Delta\bar{B} + a_5\Delta\bar{B}\Delta\bar{l}^{2} + a_6\bar{B}^3\right] = D\sum 2.$$
$$\Delta A = sin\,B_m\left[a_7\bar{\Delta l} + a_8\Delta\bar{B}^2\Delta\bar{l} + a_9\Delta\bar{l}^3\right] = sin\,B_m\sum 3,$$

$$\Delta\bar{B} = (B_2 - B_1)\,''10^{-4},$$

$$\Delta\bar{l} = (L_2 - L_1)\,''10^{-4}.$$

$$D = \frac{m+\cos^2 B_m}{n+\cos^2 B_m};\; m = 593{,}602160, n = 197{,}867385.$$

Обчислення коефіцієнтів виконують за формулою (5.4).

$$a_1 = 103422{,}05\,cos\,B_m,$$

$$a_2 = 9{,}5144\,cos\,B_m + 0{,}5525\,cos^3 B_m - 0{,}0078\,cos^5 B_m,$$

$$a_3 = -10{,}1287\,cos\,B_m + 10.1287\,cos^2 B_m,$$

$$a_4 = 103422{,}05 - 696{,}911\,cos^2 B_m + 4{,}6954\,cos^4 B_m - 0{,}0310\,cos^6 B_m,$$

$$a_5 = -30{,}3860 + 10.3334\,cos^2 B_m - 0{,}2061\,cos^4 B_m + 0{,}0014\,cos^6 B_m,$$

$$a_6 = -0{,}2048 + 0{,}4192\,cos^2 B_m - 0{,}0124\,cos^4 B_m,\; a_7 = 10000,$$

$$a_8 = 2.9381 + 0{,}0132\,cos^2 B_m + 0.0132\,cos^4 B_m,$$

$$a_9 = 1{,}9587\,cos^2 B_m + 0{,}0132\,cos^4 B_m.$$

Результати обчислення оберненої геодезичної задачі занесені в табл. 5.1. Обчислення проводилися в програмі Microsoft Excel.

Примітка. Для обчислення коефіцієнтів обмежуються кількістю знаків тригонометричних функцій після коми: для а$_1$ = $\cos B_m$ – до 7 знаків, а$_4$ = $\cos B_m$ – 6 знаків для інших $\cos B_m$ – 4 знаків.

Таблиця 5.1

Схема розв’язування оберненої геодезичної задачі

Елементи формул	Значення	Елементи формул	Значення	Елементи формул	Значення
B_1	54°17'40,00''	$cos^2 B_m$	0,328687	$a_4\,\Delta\overline{B}$	53794,77
B_2	55°44'33''	$cos^3 B_m$	0,188440	$a_5\,\Delta\overline{B}\ \overline{\Delta l^2}$	-24,043392
ΔB	1,448056	$cos^4 B_m$	0,108035	$a_6\,\Delta\overline{B}^3$	-0,009683
$\Delta B''$	5213,000000	$cos^5 B_m$	0,061938	$\sum 2$	53770,71
Bm	55,018472	$cos^6 B_m$	0,035510	$a_7\,\overline{\Delta l}$	13067,05
L_1	23°55'10,00''	$a1$	59293,13	$a_8\,\Delta\overline{B}^2\,\Delta\bar{l}$	1,045372
L_2	27°32'57,05''	$a2$	5,558353	$a_9\,\overline{\Delta l}^3$	1,439607
l	3,629736	$a3$	-2,477736	$\sum 3$	13069,53
l''	13067,050000	$a4$	103193,49	A_m	0,964082
L_m	25,734313	$a5$	-27,011762	$sinA_m$	0,821526
$\Delta\overline{B}$	0,521300	$a6$	-0,068354	$cosA_m$	0,570171
$\overline{\Delta l}$	1,306705	$a7$	10000,00	S_1	281300,00
$\Delta\overline{B}^2$	0,271754	$a8$	2,943865	S_2	281300,00
$\Delta\overline{B}^3$	0,141665	$a9$	0,645225	Scp	281300,00
Δl^2	1,707478	D	3,177227	$sinB_m$	0,819337
$\Delta\overline{B}^2\ \Delta\bar{l}$	0,355102	$a_1\ \Delta\bar{l}$	77478,64	ΔA	10708,35
$\Delta\overline{B}\ \Delta\bar{l}^2$	0,890108	$a2\,\Delta\overline{B}^2\,\Delta\bar{l}$	1,973782	$\Delta A'$	178,472543
$\Delta\bar{l}^3$	2,231170	$a3\,\Delta\bar{l}^3$	-5,528251	A_{1-2}	53°35'39,27''
$cosB_m$	0,573312	$\sum 1$	77475,08	A_{2-1}	231°35'39,27''

Висновок: Порівняти знайдені аргументи з вихідними даними лабораторної роботи № 4.

Лабораторна робота № 6

Тема: Розв'язування головної прямої геодезичної задачі між точками у просторі

Навчальна мета: *засвоєння алгоритму розв'язування головної прямої геодезичної задачі між точками в тривимірному просторі.*

Загальні відомості

Аналогічно з розв'язуванням головних геодезичних задач на поверхні еліпсоїда в двохвимірному просторі, розглянемо розв'язування головних геодезичних задач в тривимірному просторі.

Сутність розв'язування прямої геодезичної задачі – коли відомі просторові геодезичні координати B_1, L_1 і H_1 деякої точки Q_1 та полярні координати D_{12}, A_{12}, Z_{12} в топоцентричній системі координат між точками Q_1Q_2. Треба знайти: прямокутні декартові ξ_2, η_2, ζ_2 та геодезичні координати B_2, L_2 і H_2 кінцевої точки Q_2 (рис. 6.1) [1].

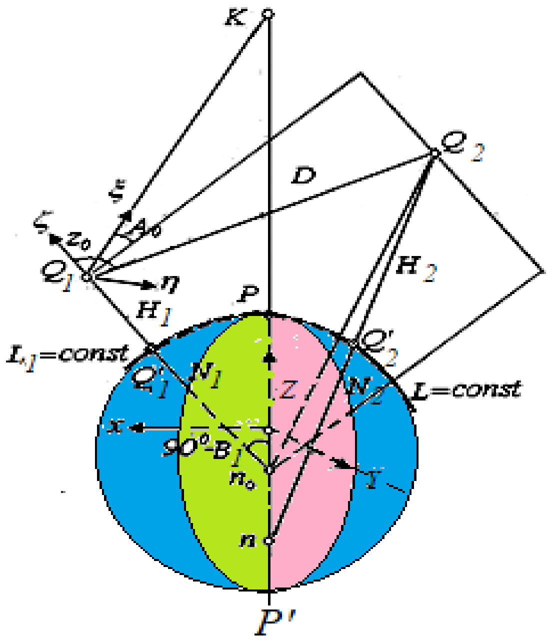


Рис. 6.1. Системи просторових координат топоцентричної системи

Нижче наведено алгоритм розв'язування головної прямої задачі між двома точками в просторі.

За заданими просторовими геодезичними координатами B_1, L_1 і H_1 обчислюються просторові прямокутні координати X_1, Y_1 і Z_1 початкової точки Q_1 в геодезичній системі координат за формулою (6.1)

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= (N_1 + H_1)cosB_1cosL_1, \\ Y_1 &= (N_1 + H_1)cosB_1sinL_{1,} \\ Z_1 &= (N_1 + H_1 - e^2N_1)sinB_1. \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

де N_1 – радіус кривизни першого вертикала для точки Q_1.

$$N_1 = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2sin^2B_1}}.$$

За полярними координатами обчислюють прямокутні декартові координати точки Q_2 $(\xi_2, \eta_2, \zeta_{2,})$ в топоцентричній системі координат за формулою (6.2)

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= D_{12}sin\,Z_{12}cos\,A_{21} \\ \eta_2 &= D_{12}sin\,Z_{12}sin\,A_{12} \\ \zeta_2 &= D_{12}cos\,Z_{12}. \end{aligned}\right\}, \tag{6.2}$$

де ξ_2 (ксі), η_2 (ета), ζ_2 (дзета) – декартові прямокутні координати в кінцевій точці Q_2; D_{12} – відстань між точками Q_1Q_2; A_{12} – геодезичний азимут – кут між площиною меридіана початкової точки Q_1 і нормальною площиною, яка проходить через нормаль точки Q_1 і шукану точку Q_2 в просторі; Z_{12} – зенітна відстань – кут між віссю ζ і прямолінійним напрямком D.

Черговим кроком є розрахунок прямокутних геодезичних координат точки Q_2 за формулою (6.3)

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= (N_1 + H_1 + \zeta_{12})cosB_1 - \xi_{12}\sin B_1, \\ Y_2 &= \eta_{12}, \\ Z_2 &= (N_1 + H_1 + \zeta_{12})sinB_1 + \xi_{12}cosB_1 - e^2N_1sinB_1. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Для зручності обчислень прямокутних координат X_2, Y_2, Z_2 кінцевої точки Q_2 запишемо рівняння (6.3) в матричному вигляді [1]

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + A_1 \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \qquad (6.4)$$

де X_1, Y_1, Z_1 – прямокутні координати в геодезичній системі координат точки Q_1; A_1 – матриця коефіцієнтів для переходу від топоцентричної системи координат в прямокутну геодезичну; ξ_2, η_2, ζ_2 – прямокутні декартові координати шуканої точки в топоцентричній системі.

Коефіцієнти матриці перетворення топоцентричних координат точки $Q2$ в геодезичну обчислюються за формулою

$$A_1 = \begin{bmatrix} -sinB_1cosL_1 & -sinL_1 & cosB_1cosL_1 \\ -sinB_1sinL_1 & cosL_1 & cosB_1sinL_1 \\ cosB_1 & 0 & sinB_1 \end{bmatrix} \qquad (6.5)$$

Після переходять до обчислення геодезичних координати B_2, L_2, H_2 кінцевої точки Q_2.

Обчислення геодезичної довготи виконують із співвідношення прямокутних координат знайдених за формулою (6.4).

$$tg\,L_2 = \frac{Y_2}{X_2}, \qquad (6.6)$$

Геодезичну широту кінцевої точки *Q2* визначають способом ітерацій (наближень) за формулою (6.7)

$$tgB_{i+1} = \frac{Z}{R} + \frac{ce^2\,\mathrm{tg}\,B_i}{R\sqrt{1+e'^2\,\mathrm{tg}^2\,B_i}}, \ (i=1, 2, 3\ldots) \qquad (6.7)$$

де

$$R = \sqrt{X_2 + Y_2.}$$

Для зручності виконання наближень у формулі (6.7) введемо деякі позначення:

$$t_1 = \frac{Z}{R}, p = \frac{ce^2}{R}, k = 1 + e'^2.$$

Після цього, формула (6.7) буде мати такий вигляд:

$$t_{i+1} = t_1 + \frac{pt_i}{\sqrt{k + t_i^2}}, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (6.8)$$

Завершення наближень за формулою (6.8) буде тоді, коли в двох останніх будуть однакові значення широти B. Широту беремо з останнього наближення $t_{\mathrm{i+1}}$.

$$B = arctg\,(t_{\mathrm{i+1}}). \tag{6.9}$$

Кількість наближень залежить від вказаної точності широти чи точності tgB (табл. 6.1).

Таблиця 6.1

Визначення кількості наближень

Точність обчислення tgB	Кількість наближень
10^{-6}	2
10^{-9}	3
10^{-12}	4

Визначення геодезичної висоти H виконують за формулою (6.10)

$$H = \frac{1}{\cos \mathrm{B}}\left(R - \frac{c}{\sqrt{1+e'^2+\mathrm{tg}^2 B}}\right). \tag{6.10}$$

де

$$R = (N + H)\cos B.$$

Для спрощення обчислень рівняння (6.10) можна представити у вигляді:

$$H = \frac{1}{\cos \mathrm{B}}\left(R - \frac{c}{\sqrt{k+t^2{}_{i+1}}}\right)\sqrt{1 + t^2{}_{i+1}}, \tag{6.11}$$

де величина $t_{\mathrm{i+1}}$, це широта, отримана за формулою (6.8) в останньому наближенні.

Завдання: Розв'язування прямої геодезичної задачі між точками в просторі.

1. Визначити просторові геодезичні координати *B2, L2, H2* кінцевої точки *Q2*.

Вихідні дані:

Геодезичні координати початкової точки Q_1:

B_1 = 55º00'00,1111″ + N' + (N 10)",

L_1 = 34º00'00,1111″ + N' + (N 10)",

H_1 = 285,000 м + N м, N – номер в списку групи

Полярні координати початкової точки $Q1$ в топоцентричній системі відносно точки $Q2$:

$Z12$ = 89°18'00,00″,

$A12$ = 53°40'00,00″

$D12$ = 29900,000 м

Методичні рекомендації до виконання роботи

1. За геодезичними координатами B^1, L_1 і H_1 початкової точки Q_1 визначаємо просторові прямокутні геодезичні координати X_1, Y_1 і Z_1 точки Q_1 за формулою (6.1).

2. За полярними топоцентричними координатами D_{12}, A_{12}, Z_{12} відносно напрямку Q_1Q_2 знаходимо просторові прямокутні Декартові координати ξ_2, η_2, ζ_2 кінцевої (шуканої) точки Q_2 в топоцентричній системи за формулою (6.2).

3. На підставі обчислених координат за формулами (6.1) і (6.2) обчислюють прямокутні геодезичні координати точки Q_2 за формулою (6.3) або (6.4).

4. Після обчислення просторових прямокутних геодезичних координат шуканої точки Q_2 (X_2, Y_2, Z_2) переходимо до визначення просторових геодезичних координат $B2$, $L2$, $H2$ точки Q_2.

5. За формулою (6.6) визначаємо геодезичну довготу. $L2$.

6. Тангенс геодезичної широти обчислюємо методом наближень за формулою (6.7) або (6.8). Арктангенс широти B знаходимо за формулою (6.9).

7. Обчислення геодезичної висоти виконують за формулами (6.10) або (6.11). Вслід за останнім наближенням обчислюються геодезичні координати в просторі кінцевої точки Q_2

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= arctg\,(t_{\mathrm{i+1}}), \\ H_2 &= \left(R - \frac{c}{\sqrt{k+t^2{}_{i+1}}}\right)\sqrt{1+t^2{}_{i+1}}, \\ L_2 - L_1 &= l = arctg\left(\frac{Y^2}{\mathrm{X}^2}\right), L_2 = L_1 + l. \end{aligned}\right\} \qquad (6.12)$$

За зональною довготою та прямокутними координатами визначають квадрант в якому знаходиться точка Q_2. (табл. 6.2).

Таблиця 6.2

Розміщення знаків у квадрантах сфероїда

Чверті /аргументи	*I*	*II*	*III*	*IV*
	знаки	*знаки*	*знаки*	*знаки*
$Y2$	+	+	–	–
$X2$	+	–	–	+
$l =$	$[l]$	$180 - [l]$	$[l] - 180$	$-[l]$

$[l]$ – аргумент в першій чверті

Результати обчислень елементів формул розв’язування прямої геодезичної задачі заносяться в табл. 6.3. Обчислення доцільно проводити в програмі Microsoft Excel.

Питання для самоконтролю

1. Сутність призначення головної прямої геодезичної задачі в просторі.
2. Чому для розв’язування прямої геодезичної задачі в просторі застосовують дві системи координат ?
3. Які вихідні дані потрібні для отримання прямокутних координат в топоцентричній системі координат ?
4. Для чого використовують матрицю коефіцієнтів для визначення прямокутних геодезичних координат точки в просторі ?
5. Які необхідно мати вимірювання, щоб визначити геодезичні координати B, L і H між точками в просторі ?
6. Чому для розв’язування прямої геодезичної задачі застосовують спосіб наближень ?
7. Які умови враховуються для вибору кількості наближень ?
8. Чим обумовлюється точність для розв’язування прямої геодезичної задачі ?
9. Що впливає найбільше на визначення геодезичної висоти ?

Приклад розв’язування та оформлення лабораторної роботи

Тема: Розв’язування головної прямої геодезичної задачі між точками у просторі

Завдання: Розв’язати головну пряму геодезичну задачу між точками Q_1Q_2 в просторі.

Визначити геодезичні координати B_2, L_2, H_2 точки Q_2.

Вихідні дані:

а) Геодезичні координати початкової точки Q_1:

B_1 = 64°22'51.1111″,

L_1 = 34°00'22.1111″,

H_1 = 385,501 м.,

б) Полярні координати точки Q_1 в топоцентричні системі координат в точці Q_1:

Z_{12} = 89°18'16.13″,

A_{12} = 53°40'51.17″

D_{12} = 2996,697 м

Постійні величини для еліпсоїда Красовського:

a = 6378245 м, *c* =6399698,902 м, $e^2 = 0{,}006693422, ce^2 = 42835{,}88$ м

1. Визначення геодезичних координат B_2, L_2, H_2 точки Q_2.

1.1. Обчислення прямокутних декартових координат початкової точки Q_1

Обчислення радіуса першого вертикала

$$N_1 = \frac{\text{c}}{\sqrt{1+e\prime^2 \cos^2 B_1}},$$

де *a* – велика піввісь;*e* – ексцентриситет еліпсоїда; *B* – широта точки Q_1

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= (N_1 + H_1)cosB_1cosL_1, \\ Y_1 &= (N_1 + H_1)cosB_1sinL_1, \\ Z_1 &= (N_1 + H_1 - e^2N_1)sinB_1. \end{aligned}\right\}.$$

1.2. Обчислення прямокутних декартових координат кінцевої точки Q_2 (ξ_2, η_2, ζ_2) в топоцентричній системі координат

$$\left.\begin{aligned} \xi_{12} &= Dsin\, z_{12}cos\, A_{12}, \\ \eta_{12} &= Dsin\, z_{12}sin\, A_{12}, \\ \zeta_{12} &= D\, cos\, z_{12}. \end{aligned}\right\}$$

1.3 Обчислення прямокутних декартових координат кінцевої точки

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + M_1 \begin{bmatrix} \xi_{12} \\ \eta_{12} \\ \zeta_{12} \end{bmatrix},$$

де M – матриця коефіцієнтів перетворення систем координат Обчислення коефіцієнтів матриці *M.*

$$\mathrm{M}_1 = \begin{bmatrix} -sinB_1cosL_1 & -sinL_1 & cosB_1cosL_1 \\ -sinB_1sinL_1 & cosL_1 & cosB_1sinL_1 \\ cosB_1 & 0 & sinB_1 \end{bmatrix}$$

1.4 Обчислення геодезичних координати B_2, L_2, H_2 кінцевої точки Q_2.

Обчислення геодезичної довготи точки Q_2.

$$tg\ L_2 = \frac{Y_2}{X_2},$$

Обчислення тангенсу геодезичної широти виконується методом наближень за формулою:

$$tg\ B_{i+1} = \frac{Z_2}{R} + \frac{ce^2\ \mathrm{tg}\, B_i}{R\sqrt{1+e'^2\ \mathrm{tg}^2\ B}},$$

де

$$R = \sqrt{X_2 + Y_2}.$$

або за формулою

$$t_{i+1} = t_i + \frac{pt_i}{\sqrt{k + t_i^2}}, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Після завершення обчислення наближень за формулою (6.7) беруть арктангенс широти B_2 за останнім наближенням t_{i+1}).

$$B_2 = arctg\ (t_{i+1}).$$

Обчислення геодезичної висоти H_2 точки Q_2.

$$H_2 = \frac{z_2}{\sin B_2} - (1 - e^2)\ N_2.\ \ N_2 = \frac{c}{\sqrt{1+e'^2\cos^2 B_2}}.$$

Результати розв'язування прямої геодезичної задачі занесені в табл. 6.3.

Таблиця 6.3

Розв'язування головної прямої геодезичної задачі в просторі

Елементи формул	Числові значення
X_1, м	2292596,7885
Y_1, м	1546733,6582
Z_1, м	5728648,5724
N_1, м	6395671,4597
M_1	$\begin{bmatrix} -0{,}747479314 & -0{,}559281771 & 0{,}358439082 \\ -0{,}504297755 & 0{,}828977624 & 0{,}241826123 \\ 0{,}432386921 & 0 & 0{,}901688167 \end{bmatrix}$
$\xi 2$, м	1774,7599
$\eta 2$, м	2414,3523
$\zeta 2$, м	36, 3763
$X2$, м	2289932,9276
$Y2$, м	1547848,8915
$Z2$, м	5729448,7554
Наближення (і)	
$B(1)$	$64°14'47{,}4458''$
$B(2)$	$64°18'42{,}7628''$
$B(3)$	$64°18'42{,}3377''$
$B2$	$64°18'42{,}3377''$
$L2$	34°3'22,2842"
$H2$, м	4974,73

Висновок. Указати аргументи, які збули знайдені під час розв'язування прямої геодезичної задачі в просторі та їх точність.

Лабораторна робота №7

Тема: Розв'язування оберненої головної геодезичної задачі між точками у просторі

Навчальна мета: *засвоєння алгоритму розв'язування головної оберненої геодезичної задачі між точками в тривимірному просторі*.

Загальні відомості

За допомогою розв'язування оберненої геодезичної задачі за відомими геодезичними координатами B, L, H двох точок Q_1 і Q_2 знаходять полярні топоцентричні координати D_{12} A_{12}, Z_{12}, початкової точки Q_1 відносно точки Q_2.

Розв'язування оберненої геодезичної задачі виконується з послідовно використання послідовно таких формул:

– визначення прямокутних координат точок Q_1 і Q_2 реалізують за формулою (7.1).

$$\left.\begin{aligned} N_\mathrm{i} &= \frac{\mathrm{a}}{\sqrt{1-e^2\ \sin^2 B_\mathrm{i}}} \\ \mathrm{X_i} &= (N_\mathrm{i}+H_\mathrm{i}) cosB_\mathrm{i} cos(L_j - L_i), \\ Y_\mathrm{i} &= (N_\mathrm{i}+H_\mathrm{i}) cosB_\mathrm{i} sin(L_j - L_i), \\ Z_\mathrm{i} &= [N_\mathrm{i}(1-e^2)+H_\mathrm{i}] sinB_\mathrm{i}. \end{aligned}\right\}. \tag{7.1}$$

$$\left.\begin{aligned} N_j &= \frac{\mathrm{a}}{\sqrt{1-e^2\ \sin^2 B_j}}, \\ \mathrm{X}_j &= (N_j+H_j) cosB_j cos(L_i - L_j), \\ Y_j &= (N_j+H_j) cosB_j sin(L_i - L_j), \\ Z_j &= [N_j(1-e^2)+H_j] sinB_j. \end{aligned}\right\}, \tag{7.2}$$

$i = 1,2; j = 2,1$ – номер точок

– обчислення прямокутних декартових координат в топоцентричній системі для точок Q_1 і Q_2 виконують за формулою (7.3)

$$\left.\begin{aligned} \xi_{ij} &= (\mathrm{Z_i}+e^2 N_\mathrm{i} sinB_\mathrm{i}) cosB_1 - (\mathrm{X_i}\ cosL_\mathrm{i} + Y_\mathrm{i} \sin L_\mathrm{i}) \sin B_\mathrm{i}, \\ \eta_{ij} &= Y_\mathrm{i}, \\ \zeta_{ij} &= (\mathrm{Z_i}+e^2 N_\mathrm{i} sinB_\mathrm{i})\ sinB_\mathrm{i} + (\mathrm{X_i}\ cosL_\mathrm{i} + Y_\mathrm{i} sinL_\mathrm{i})\ cosB_\mathrm{i} - (N_\mathrm{i} + \mathrm{H_i}). \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

$$\mathrm{tg}\,\mathrm{A}_{ij} = \frac{\eta_{ij}}{\xi_{ij}},\ \mathrm{A}_{ij} = arctg\left(\frac{\eta_{ij}}{\xi_{ij}}\right).$$

За знаками обчислених прямокутних координат та напрямком визначають квадрант розташування точки (табл. 7.1)

Таблиця 7.1

Визначення квадранта розташування точок

Аргументи	Чверті			
	I	*II*	*III*	*IV*
знаки η_{12}	+	+	–	–
знаки ξ_{12}	+	–	–	+
$\mathrm{A}_{12} =$	$\lceil \mathrm{A}_{12} \rceil$	180 – $\lceil \mathrm{A}_{12} \rceil$	180 + $\lceil \mathrm{A}_{12} \rceil$	360 – $\lceil \mathrm{A}_{12} \rceil$

A_{12} – аргумент в першій чверті

Запишемо формули (7.3) в матричному вигляді для напрямку $Q_1\ Q_2$ і $Q_2\ Q_1$ [1]

$$\begin{bmatrix}\xi_{ij}\\ \eta_{ij}\\ \zeta_{ij}\end{bmatrix}=\mathrm{M}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\mathrm{X}_j-\mathrm{X}_i\\ Y_j-Y_i\\ Z_j-Z_i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\xi_{ji}\\ \eta_{ji}\\ \zeta_{ji}\end{bmatrix}=\mathrm{M}_j^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\mathrm{X}_i-\mathrm{X}_j\\ Y_i-Y_j\\ Z_i-Z_j\end{bmatrix}, \qquad (7.4)$$

де $i=1,2$, $j=2,1$ – номер точки; $\mathrm{M}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}$ і $\mathrm{M}_j^{\mathrm{T}}$ – транспоновані матриці коефіцієнтів перетворення координат прямокутних геодезичних в прямокутні декартові топоцентричні.

Основою трансформування матриць є формула (6.5)

$$\mathrm{A}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-sinB_icosL_i & -sinB_isinL_i & cosB_i\\ -sinL_i & cosL_i & 0\\ cosB_icosL_i & cosB_isinL_i & sinB_i\end{bmatrix} \qquad (7.5)$$

$$\mathrm{A}_j^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-sinB_jcosL_j & -sinB_jsinLj_i & cosB_j\\ -sinL_j & cosL_j & 0\\ cosB_jcosL_j & cosB_jsinL_j0 & sinB_j\end{bmatrix} \qquad (7.6)$$

– зв'язок між полярними та прямокутними декартовими координатами в топоцентричній системі здійснюється за формулою (7.7).

$$\left.\begin{array}{c}\psi_{\mathrm{i}j}(A_{\mathrm{i}j})=\xi_{\mathrm{i}j}cos\,A_{\mathrm{i}j}+\eta_{\mathrm{i}j}sin\,\mathrm{A}_{\mathrm{i}j}=\sqrt{\xi_{\mathrm{i}j}^2+\eta_{\mathrm{i}j}^2},\\ Z_{\mathrm{i}j}=arctg\left(\dfrac{\zeta_{\mathrm{i}j}^2}{\psi_{\mathrm{i}j}^2}\right),\\ D_{\mathrm{i}j}=\psi_{\mathrm{i}j}sin\,Z_{\mathrm{i}j}+\zeta_{\mathrm{i}j}cos\,Z_{\mathrm{i}j}=\sqrt{\psi_{\mathrm{i}j}^2+\zeta_{\mathrm{i}j}^2,}\end{array}\right\}, \qquad (7.7)$$

У всіх цих формулах індекси координат слід замінити індексами, які відповідають вихідним даним в цій задачі ($i=1,2$, $j=2,1$).

Контроль розв’язування оберненої задачі можна виконати за формулою (7.8).

$$(N_{\mathrm{i}}+H_{\mathrm{i}})cosB_{\mathrm{i}}sinZ_{\mathrm{ij}}sin\mathrm{A}_{\mathrm{ij}}+\left(N_{\mathrm{j}}+H_{\mathrm{j}}\right)cosB_{\mathrm{j}}sinZ_{\mathrm{ji}}sin\mathrm{A}_{\mathrm{ji}}=0 \qquad (7.8)$$

Завдання: За геодезичними координатами точок Q_1 (B_1, L_1, H_1) і Q_2 (B_2, L_2, H_2) знайти полярні топоцентричні координати.

Вихідні дані: Геодезичні координати початкової точки Q_1 і точки Q_2:

B_1, L_1, H_1; B_2, L_2, H_2 – беруться з попередньої роботи № 6.

Методичні рекомендації до виконання роботи

1. Використовуючи вихідні геодезичні координати B_1, L_1, H_1; B_2, L_2, H_2 точок $Q1$ і $Q2$ визначаються їх прямокутні координати X_1, Y_1, Z_1 і X_2, Y_2 Z_2 за формулами (7.1) і (7.2).

2. Обчислення прямокутних декартових топоцентричних координат ξ_{12}, η_{12}, ζ_{12} відносно напрямку Q_1Q_2 за формулою (6.3) та азимуту напрямку $Q1$ за формулою (7.3) або (7.4).

4. Транспонування матриць коефіцієнтів перерахунку координат для точок Q_1 і Q_2 виконують за формулами (7.5) і (7.6).

3. Обчислення полярних топоцентричних координат A_{12}, Z_{12}, D_{12} відносно напрямку Q_1Q_2 за формулою (7.7)

4. Для знаходження полярних топоцентричних координат відносно для напрямку $Q2Q1$ у формулах (7.7) міняють місцями індекси *12* на *21* і, на підставі цього, отримують полярні топоцентричні координати A_{21}, Z_{21}, D_{21} для точки Q_2.

5. Контроль розв'язування головної оберненої геодезичної задачі виконують за формулою (7.8).

Послідовність обчислень елементів формул розв'язування оберненої геодезичної задачі заносяться в табл. 7.2. Обчислення доцільно проводити в програмі Microsoft Excel.

Питання для самоконтролю

1. Чому для розв'язування оберненої геодезичної задачі в просторі застосовують дві системи координат ?

2. Які вихідні дані потрібні для отримання прямокутних координат в топоцентричній системі координат ?

3. Для чого використовують матрицю коефіцієнтів для визначення прямокутних геодезичних координат точки в просторі ?

4. Які необхідно знати вихідні дані щоб визначити геодезичні полярні топоцентричні координати між точками в просторі ?

5. Як визначити достовірність отриманих аргументів під час розв'язування головної оберненої геодезичної задачі.

Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи

Тема: Розв'язування оберненої головної геодезичної задачі між точками у просторі

Завдання: Розв'язати головну обернену геодезичну задачу між двома точками *Q1Q2.* в просторі.

Вихідні дані:

B_1 = 64º22'51,1111", L_1 =34°00'22,1111", H_1 = 385,501 м,

B_2 = 64º18'42.3377", L_2 =34º03'22.2842", H_2 = 4974,73 м.

(Вихідні дані беруться з лабораторної роботи № 6)

1 Обчислення прямокутник координат в прямокутній геодезичній системі

$$X_i = (N_i + H_i)\cos B_i \cos L_i,$$
$$Y_i = (N_i + H_i)\cos B_i \sin L_i,$$
$$Z_i = (N_i + H_i - e^2 N_i)\sin B_i.$$
$$i = 1,\ 2$$

1.1 Обчислення головного радіуса першого вертикалу для початкової Q_1 та кінцевої Q_2 точок.

$$N_1 = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}, \qquad N_2 = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}},$$

1.2 Обчислення прямокутних декартових координат в топоцентричній системі координат точок Q_1 і Q_2

$$\begin{bmatrix}\xi_{12}\\ \eta_{12}\\ \varsigma_{12}\end{bmatrix}_1 = M_1^T\begin{bmatrix}X_2 - X_1\\ Y_2 - Y_1\\ Z_2 - Z_1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\xi_{21}\\ \eta_{21}\\ \varsigma_{21}\end{bmatrix} = M_2^T\begin{bmatrix}X_1 - X_2\\ Y_1 - Y_2\\ Z_1 - Z_2\end{bmatrix},$$
$$j = 2, 1. \qquad i = 1, 2. \qquad j = 2, 1. \qquad i = 1, 2.$$

1.3 Обчислення коефіцієнтів матриці перетворення координат для точок Q1 і Q2 .

$$M_i^T = \begin{vmatrix} -\sin B_i \cos L_i & -\sin B_i \sin L_i & \cos B_i \\ -\sin L_i & \cos L_i & 0 \\ \cos B_i \cos L_i & \cos B_i \sin L_i & \sin B_i \end{vmatrix}.$$

$$M_j^T = \begin{vmatrix} -\sin B_j \cos L_j & -\sin B_j \sin L_j & \cos B_j \\ -\sin L_j & \cos L_j & 0 \\ \cos B_j \cos L_j & \cos B_j \sin L_j & \sin B_j \end{vmatrix}.$$

1.4. Обчислення полярних координат точки Q_2 в топоцентричній системі координат.

Обчислення прямого азимуту A_{12} напрямку Q_1Q_2

$$tgA_{ij} = \frac{\eta_j}{\xi_j}, \quad i=1,2; \; j=2,1. \; A_{ij} = arctg\left(\frac{\eta_j}{\xi_j}\right)$$

Обчислення зенітної відстані

$$Z_{ij} = arcctg \frac{\varsigma_j}{\sqrt{\xi_j^2 + \eta_j^2}}.$$

Обчислення довжини прямої між точками $Q1$ і $Q2$.

$$D = \sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2 + \varsigma_i^2} = \sqrt{\xi_j^2 + \eta_j^2 + \varsigma_j^2}.$$
$$i = 1,2; \qquad j = 2,1.$$

Результати розв’язування занесені в табл. 7.2

Таблиця 7.2

Розв'язування головної оберненої геодезичної задачі

Елементи формул	Значення
X_1, м	2292596,7885
Y_1, м	1546733,6582
Z_1, м	5728648,5724
M_1	$\begin{bmatrix} -0{,}747479314 & -0{,}504297755 & 0{,}432386921 \\ -0{,}559281771 & 0{,}828977624 & 0 \\ 0{,}358439082 & 0{,}241826123 & 0{,}901688167 \end{bmatrix}$
N_2, м	6395651,3002
X_2, м	2289932,9189
Y_2, м	1547848,8852
Z_2, м	5729448,7342
M_2	$\begin{bmatrix} -0{,}746605926 & -0{,}504658080 & 0{,}433474121 \\ -0{,}560005673 & 0{,}828488773 & 0 \\ 0{,}359128443 & 0{,}242747967 & 0{,}901166015 \end{bmatrix}$
$\xi 1$, м	1772,9019
$\eta 1$, м	2415,7351
$\zeta 1$, м	-35,1264
$\xi 2$, м	-1774,7604
$\eta 2$, м	-2414,3519
$\zeta 2$, м	36,3525
D, м	2996,6970
$Z12$	89º18'16.70″
$Z21$	89º19'41.27″
$A12$	53º40'51.15″
$A21$	233º40'51.15″

Виконати за формулою (7.6) контроль розв'язування оберненої геодезичної задачі в просторі.

Висновок зробити на підставі порівняння отриманих аргументів з вихідними даними прямої геодезичної задачі.

Лабораторна робота № 8

Тема: Перерахунок плоских прямокутних координат в проекції Гаусса-Крюгера з однієї зони в іншу

Навчальна мета: *вивчення алгоритму перерахунку плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера із однієї координатної шестиградусної зони в іншу.*

Загальні відомості

Поділ поверхні еліпсоїда на фігури, що обмежені меридіанами певної довготи та зображення їх на площині у вигляді незалежних координатних зон створює деякі труднощі під час встановлення геодезичного зв'язку між пунктами, координати яких обчислені в різних координатних зонах.

Допустимо, що деяка точка на еліпсоїді з координатами B і L, знаходиться між осьовими меридіанами L_0 та $L_0 \pm l_0$ двох суміжних зон. Зображення, наприклад точки Q на площині в проекції Гаусса-Крюгера західної зони (з осьовим меридіаном L_0) матиме координати x_I, y_I, а в східній зоні (осьовий меридіан $L_0 + l_0$) і координати будуть x_{II}, y_{II} (рис. 8.1, а, б).

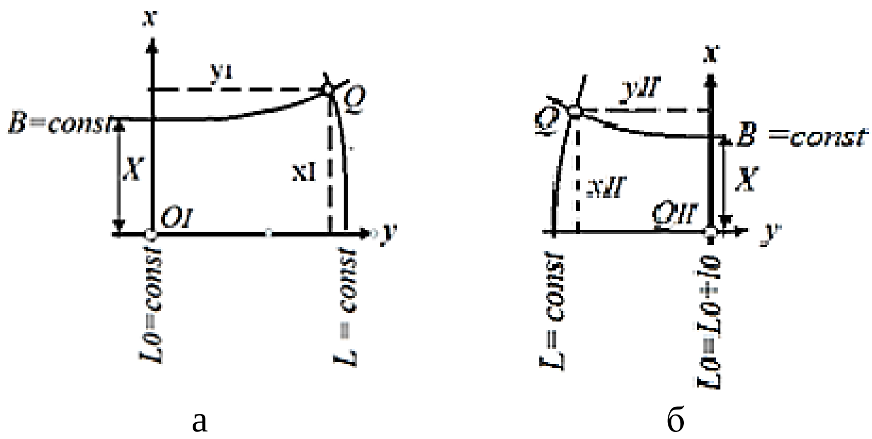


Рис. 8.1. Розташування точки відносно осьового меридіана:
а – вихідна координатна зона; б – суміжна координатна зона

Перекриття суміжних координатних зон не виключає випадків перетворення координат із зони в зону. Це виникає під час проведення топографо-геодезичних робіт на стику двох зон, а також і в одній зоні. Перерахунок координат із зони в зону необхідний для топографічного знімання, а також для перерахунку координат заданих в системі деякої координатної зони відносно осьового меридіана L_0 в місцеву систему координат відносно іншого меридіана з довготою L, прийнятого за осьовий.

Розглянемо загальну схему перерахунку координат, коли відомі прямокутні координати x_I і y_I в одній зоні (з довготою осьового меридіана L_0), треба знайти x_{II} і y_{II} в другій зоні (з осьовим меридіаном L_{II}).

Для перерахунку прямокутних координат точки з однієї координатної зони в суміжну необхідно виконати необхідно виконати обчислення в два етапи:

1) обчислити геодезичні координати B_I і L_I за відомими прямокутними;

2) перейти від геодезичних координат вихідної зони до плоских прямокутних координат в проекції Гаусса-Крюгера суміжної координатної зони [1].

1. Обчислення геодезичних координат B_I і L_I за відомими плоскими прямокутними X_I і Y_I в проекції Гаусса-Крюгера.

Перехід від плоских прямокутних координат x_I, y_I до геодезичних координат B_I і $L_I = L_0 + l$ тієї ж точки в західній координатній зоні виконують за такими формулами, наведеними в [1]:

Запишемо алгоритм обчислення геодезичних координат з точністю не більше 0,003", використовуючи формули Морозова В.П.

$$B_I = B_x - [1 - (b_4 - 0{,}12\, z^2)\, z^2]\, z^2 b_2 \rho^o, \tag{8.1}$$

$$L_{\mathrm{I}} = L_0 + l \tag{8.2}$$

де l – зональна довгота

У формулі (8.1) B_x знаходять за виразом (8.3)

$$B_x = \beta + [502217 + (2936 + 24\cos^2\beta)\cos^2\beta]\, 10^{-8} \sin\beta \cos\beta. \tag{8.3}$$

де

$$\beta = \left(\frac{\mathrm{x}}{6367558{,}5}\right),\ \rho^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = 57{,}2957795$$

Зональна довгота в формулі (8.2) визначається формулою:

$$l = [1 - (b_3 - b_5 z^2) z^2] z\,. \tag{8.4}$$

де

$$z = \frac{y}{N_x \cos B_x}.$$

N_x – радіус першого вертикалу на широті B_x розраховують за формулами:

$$N_x = 6378245 + [(0{,}605\, sin^2 B_x + 107{,}155) sin^2 B_x + 21356{,}142] sin^2 B_x \quad (8.5)$$

або

$$N_x = 6399698{,}9 – (21562{,}3 – 109{,}0\ cos^2 B_x)\ cos^2 B_x. \quad (8.6)$$

Для обчислення широти B_I і зональної довготи l вихідної точки необхідно визначити коефіцієнти b використовують формулу (8.7).

$$\left.\begin{aligned} b_2 &= (0{,}5 + 0{,}0034\ cos2B_x) sinB_x\ cosB_x, \\ b_4 &= 0{,}25 + 0{,}162\ cos2B_x, \\ b_3 &= 0{,}3333 - 0{,}1667\ cos2B_x, \\ b_5 &= 0{,}2 - 0{,}1667\ cos2B_x. \end{aligned}\right\} \quad (8.7)$$

Результати обчислення геодезичних координат B_I і L_I точки A у вихідній координатній зоні за вихідними прямокутними координатами X_I *і* Y_I занесені в (табл. 8.1).

2. Обчислення плоских прямокутних координат X_{II} і Y_{II} в суміжній координатній зоні за геодезичними координатами B_I* і *L_I у вихідній зоні

За відомими (обчисленими) геодезичними координатами B_I і L_I завданої точки A у вихідній зоні розраховуються прямокутні координати X_{II} і Y_{II} точки A на площині в проекції Гаусса-Крюгера суміжної зони. За алгоритмом обчислення координати отримаємо з точністю не більше 0,1 м.

$$X_{II} = 6367558{,}5\ B_I – [a_0 – (0{,}5 + a_4\, l^2)\ Nl^2]\ sinB_I\ cosB_I. \quad (8.8)$$

$$y_{II} = [1 + (a_3 + a_5 l^2) l^2]\ lN\ cos\ B_I, \quad (8.9)$$

де l – зональна довгота від осьового меридіана суміжної зони, яка обчислюється за формулою (8.10).

$$l = L_I - L_{0(II)} \quad (8.10)$$

Обчислення радіуса першого вертикала виконуємо за формулою (8.5) або (8.6)

Для розрахунку коефіцієнтів у формулах (8.8) і (8.9) використовуються формули (8.11). Координата B задається в радіанах.

$$\left.\begin{array}{c} a_0 = 32140{,}4 - (135{,}3 - 0{,}7\cos 2B)\cos 2B, \\ a_3 = (0{,}0011\cos 2B + 0{,}3333)\cos 2B - 0{,}1667, \\ a_4 = 0{,}25\cos 2B - 0{,}042, \\ a_5 = (0{,}2\cos 2B - 0{,}17)\cos 2B. \end{array}\right\} \quad (8.11)$$

Значення ординати одержують відносно осьового меридіана суміжної зони, тому вона буде зональна. Для переведення її до умовної необхідно додати 500 км і номер зони. Результати розрахунків плоских прямокутних координат заносяться в табл. 8.2.

Завдання:

1. Виконати перерахунок плоских прямокутних координат точки А системи Гаусса-Крюгера з одної шестиградусної координатної зони в іншу (рис. 8.2).

Вихідні дані.

Прямокутні координати точки А в шестиградусній координатній зоні з довготою осьового меридіана $L_0^I = 33^{\circ}$:

$X_A^I = 5300485{,}3 + N$ км, $Y_A^I = 6700979{,}3$ м + N км,
де N – номер студента у списку групи.

Знайти. Прямокутні координати X_{II}, Y_{II} точки A в суміжній координатній зоні з довготою осьового меридіана $L_0^{II} = 39^{\circ}$.

Методичні рекомендації до роботи

Для перерахунку прямокутних координат точки з однієї координатної зони в суміжну необхідно виконати допоміжні розрахунки.

1. За відомими плоскими прямокутними координатами заданої точки А у вихідній координатній зоні, розрахувати геодезичні координати B *і* L тієї ж точки A за формулами (8.1) і (8.2).

2. Для обчислення геодезичної широти необхідно виконати проміжні розрахунки, формула (8.3)

3. Розрахунок зональної довготи l_{I} у вихідній зони виконується за формулою (8.4)

4. Визначення радіуса першого вертикалу широти B_x здійснюють за формулами (8.5) або (8.6).)

5. Кінцеве значення геодезичних координат з точністю 0,003" знайдемо після розрахунків коефіцієнтів (8.7), що входять у формули (8.1) і (8.2). Результати перерахунку бажано занести в таблицю.

6. Для переходу від геодезичних координат у вихідній зоні B_I *і* L_I до плоских прямокутних координат X_{II} і Y_{II} з точністю 0,1 м в проекції Гаусса – Крюгера суміжної зони використовуються формули (8.8) і (8.9). Перед обчисленням прямокутних координат попередньо необхідно визначити коефіцієнти *a* за формулою (8.11).

7. Визначення зональної довготи в суміжній зоні виконують за формулою (8.10).

8. Радіус першого вертикала обчислюється за формулою (8.5) або (8.6)

9. Перейти від обчисленої зональної ординати y_{II} до приведеної Y_{II} у суміжній зоні.

Питання для самоконтролю

1. Сутність перерахунку прямокутних координат деякої точки в геодезичні.
2. Чому виникає необхідність перерахунку плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера з однієї зони в іншу ?
3. В якій системі координат беруть ординату для обчислення аргументу *z* ?
4. За якою формулою визначається зональна довгота в суміжній зоні та який вона завжди буде мати знак ?
5. Який знак має ордината *y* в суміжній зоні і чому ?
6. Що представляють геодезичні координати *B* і *L* вихідної точки *A* ? Дайте їм визначення.
7. Чому ордината в суміжній зоні обчислюється в зональній системі координат Гаусса-Крюгера ?

Приклад розв’язування та оформлення лабораторної роботи

Тема: Перерахунок плоских прямокутних координат в проекції Гаусса-Крюгера з однієї зони в іншу

Завдання:

1. Виконати перерахунок плоских прямокутних координат точки *A* системи Гаусса-Крюгера з одної шестиградусної координатної зони в іншу.

Вихідні дані.

Координати точки *A* в шестиградусній координатній зоні з довготою осьового меридіана $L_0^I = 39°$:

$$X_A^I = 6200370{,}200 + (N \text{ м} + N \text{ 10 см}),$$
$$Y_A^I = 5720028{,}500 \text{ м} + N \text{ м}, \text{ де } N \text{ – номер в списку групи } N.$$

Знайти плоскі прямокутні координати точки *A* (*XII*, *YII*) в координатній зоні с довготою осьового меридіана $L_0^{II} = 45^o$ (рис. 8.2).

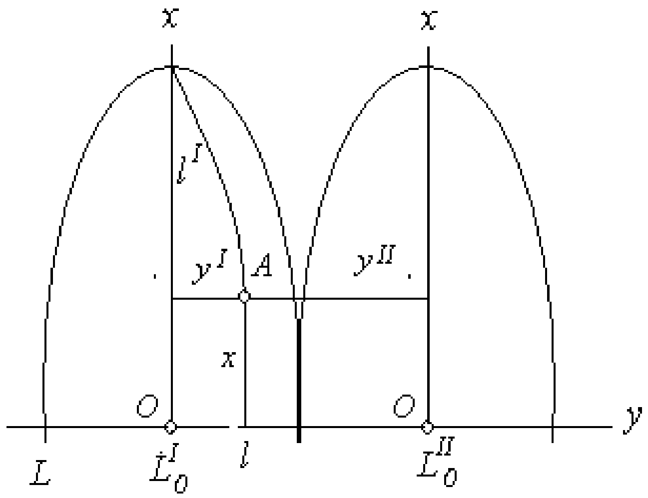


Рис. 8.2. Схема розташування точки відносно осьових меридіанів двох зон

1.Обчислення геодезичних координат BI і LI точки A у вихідній зоні за плоскими прямокутними координатами проекції Гаусса-Крюгера

Для обчислення геодезичних координат точки *BI і LI* використовують нижче наведені формули.

Зауваження. Якщо робота виконується з застосуванням програми Microsoft Excel, тоді тригонометричні функції беруться від радіана кута. Наприклад, щоб взяти синус кута 58º25´35,25", необхідно користуватися вбудованими функціями і брати синус від кута [(32",25/60+25´)/60)+58º], переведеного в радіани,

$$B_I = B_x - [1 - (b_4 - 0{,}12\, z^2)\, z^2]\, z^2\, b_2\, \rho''.$$
$$L = L_o + l,$$
$$l = [1 - (b_3 - b_5\, z^2)\, z^2]\, z\, \rho''.$$

де

$$B_x = \beta + [502217 + (2936 + 23{,}5\cos^2\beta)\cos^2\beta]\, 10^8 \sin\beta \cos\beta.$$

$$\beta = \left(\frac{x}{6367558{,}5}\right)\rho^0 . \quad \rho^0 = \frac{180^0}{\pi} = 57{,}2957795 .$$
$$z = \left(\frac{y}{N_x \cos B_x}\right).$$

$$N_x = 6399698{,}9 - (21562{,}3 - 109{,}0\cos^2 B_x)\cos^2 B_x.$$

Обчислення коефіцієнтів b_i.

$$b_2 = (0{,}5+0{,}0034\cos^2 B_x)\sin^2 B_x \cos B_x.$$
$$b_4 = 0{,}25 + 0{,}162\cos^2 B_x.$$
$$b_3 = 0{,}3333 - 0{,}1667\cos^2 B_x.$$
$$b_5 = 0{,}2 - 0{,}1667\cos^2 B_x.$$

Послідовність обчислення геодезичних координат наведено в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Обчислення геодезичних координат точки *A* за плоскими прямокутними координатами Гаусса-Крюгера

№ дії	Елементи формул	Значення
1	$\beta, рад$	0,973745
2	β''	200849
3	β°	55°47’29,41”
4	$\sin\beta$	0,826997
5	$\cos\beta$	0,562206
6	$\cos^2\beta$	0,3160756
7	$B_x, рад$	0,976085
8	B_x''	200849,60
9	$B_x^0,$	55°47’37,83”
10	$\sin B_x$	0,8270201
11	$\cos B_x$	0,5621723
12	$\cos^2 B_x$	0,3160377
13	N_x	6392895,288
14	b_2	0,1926655
15	b_3	0,2806165
16	b_4	0,3011981
17	b_5	0,1473165
18	z	0,0557984
19	z^2	0,0031135
20	B	55°45’25,98”
21	l	3°11′ 39,21″
22	L_0	39 ° 00’00”
23	$L+ l_0$	42°11′ 39,21″

2. Обчислення прямокутних координат проекції Гаусса - Крюгера за геодезичними координатами для суміжної зони

$$X_{II} = 6367558{,}5\ (B/\rho) - [a_o - (0{,}5 + a_4\, l^2)\ l^2 N]\ \sin B_I \cos B_I.$$

$$y_{II} = [1 + (a_3 + a_5\, l^2)\ l^2]\ l\ N \cos B_I,$$

де

$$l = (L - L_0^I)/\rho.$$

$$N = 6399698{,}9 - (21562{,}3 - 109{,}0 \cos^2 B) \cos^2 B.$$

$$a_o = 32140{,}4 - (135{,}3 - 0{,}7 \cos^2 B) \cos^2 B.$$
$$a_4 = 0{,}25 \cos^2 B - 0{,}042,$$
$$a_3 = 0{,}3333 \cos^2 B - 0{,}1667,$$
$$a_5 = (0{,}2 \cos^2 B - 0{,}17) \cos^2 B.$$

Прямокутні координати x і y обчислюються до 0,1 м. Значення ординат одержують відносно осьового меридіана наступної зони.

Результати розрахунків плоских прямокутних координат заносяться в табл. 8.2.

Таблиця 8.2

Розрахунок прямокутних координат на площині проєкції Гаусса-Крюгера

№ дії	Елементи формул	Значення
1	$B°$	55°45’25,98”
2	B'	200849
3	B''/ρ	0,9737425
4	$\sin B$	0,8269967
5	$\cos B$	0,5622068
6	$\cos^2 B$	0,3160764
7	l''	11499
8	$l = l''/\rho''$	0,055750
9	N	6392894,45
10	a_0	32097,70
11	a_4	0,037019
12	a_3	-0,061352
13	a_5	-0,033752
14	$\sin B \cos B$	0,464943
15	l^2	0,003108
16	$N\,l$	19869,29
17	x^{II}	6190071,81
18	y^{II}	– 200333,27
19	Y_{II}	8299666,3

Висновок дати за результатами виконаної роботи.

Лабораторна робота № 9

Тема: Перерахунок плоских прямокутних координат із одної системи в іншу

Навчальна мета: *вивчення перерахунку координат пунктів геодезичної мережі із старої системи координат (СК-63) в систему (УСК-2000).*

Загальні відомості

В геодезичній практиці часто виникає питання перерахунку координат пунктів новоствореної геодезичної мережі відносно пунктів державної геодезичної мережі. Для приведення координат до однієї системи існує декілька методів: Гельметра, Молоденського, афінний метод та інші.

Для всіх методів вихідними для перерахунку є пункти, координати яких відомі в старій та новій системах. Мінімально необхідно мати два вихідних пункти за координатами яких можна визначити параметри перерахунку – нові координати початку старої системи, кут повороту координатних осей однієї системи відносно іншої та масштабний множник.

З метою контролю правильності і перевірки якості перерахунку координат в новій системі зазвичай стараються використовувати більше двох пунктів. Розглянемо послідовність перерахунку координат для двох вихідних пунктів.

Відомі координати *n* пунктів 1, 2, 3,…,i,…,*n* в старій системі *XOY* і координати пунктів 1', 2' в новій системі *X'OY'*.

Треба знайти координати пунктів 3', 4', 5',…, *n'* в новій системі координат.

Використовуючи координати пунктів 1, 2 у старій та новій системах, розв'язується двічі обернена задача між пунктами 1, 2 і 1', 2'.

Стара система

$$tg\alpha_{12} = \frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1} = \frac{\Delta Y_{21}}{\Delta X_{21}},$$

$$\alpha_{12} = arctg\alpha_{12}.$$

$$S_{12} = \frac{X_2-X_1}{\cos\alpha_{12}} = \frac{Y_2-Y_1}{\sin_{12}}.$$

Нова система

$$tg\alpha'_{12} = \frac{Y'_2-Y'_1}{X_2-X_1} = \frac{\Delta Y'_{21}}{\Delta X_{21}},$$

$$\alpha'_{12} = arctg\alpha_{12}.$$

$$S'_{12} = \frac{X'_2-X'_1}{\cos\alpha'_{12}} = \frac{Y'_2-Y'_1}{\sin\alpha'_{12}}$$

На підставі розв'язування обернених задач знаходять параметри переходу – кут повороту Θ координатних осей систем і масштабний множник (коефіцієнт) m [1].

$$\Theta = \alpha'_{12} - \alpha_{12.} \quad (9.1)$$

$$\delta m = \frac{s' - s}{s}, m = 1 + \delta m, \quad (9.2)$$

або

$$m = \frac{s'}{s} \quad (9.3)$$

Для перерахунку координат використовують відомі формули аналітичної геометрії.

$$\left.\begin{aligned} X_i' &= X'_1 + \Delta X' = X'_1 + (X_i - X_1) m\cos\Theta - (Y_i - Y_1)\, m \sin\Theta \cdot \\ Y_i' &= Y'_1 + \Delta Y' = Y'_1 + (Y_i - Y_1)\, m \sin\Theta + (X_i - X_1)\, m\cos\Theta \end{aligned}\right\}, \quad (9.4)$$

У формулі (9.4) пункт 1 прийнято за вихідний.

Приріст координат між пунктами в новій системі визначають за формулою:

$$\left.\begin{aligned} \Delta X' &= (X_i - X_1) m\cos\Theta - (Y_i - Y_1)\, m \sin\Theta \cdot \\ \Delta Y' &= (Y_i - Y_1)\, m \sin\Theta + (X_i - X_1)\, m\cos\Theta \end{aligned}\right\}, \quad (9.5)$$

Після введення позначень

$$m \cos \Theta = A,\ m \sin \Theta = B. \quad (9.6)$$

формула (9.4) буде мати такий вигляд (9.7):

$$\left.\begin{aligned} X_i' &= X'_1 + \Delta X' = (X_i - X_1)A - (Y_i - Y_1)\, B, \\ Y_i' &= Y'_1 + \Delta Y' = (Y_i - Y_1)\, B + (X_i - X_1)\, A. \end{aligned}\right\} \quad (9.7)$$

На практиці буває зручніше виконувати перерахунок в любій послідовності від пункту *1* до любого пункту *i* за формулою (9.8).

$$\left.\begin{aligned} X_i' &= X_{i-1} + \Delta X' = X_{i-1} + (X_i - X_{i-1})A - (Y_i - Y_{i-1})\, B, \\ Y_i' &= Y_{i-1} + \Delta Y' = Y_{i-1} + (Y_i - Y_{i-1})\, B + (X_i - X_{i-1})\, A \end{aligned}\right\} \quad (9.8)$$

Результати обчислень та оцінку точності перерахунку доцільно виконати в табл. 9.1. Точність перерахунку характеризується розбіжністю координат вихідних двох пунктів і координат, які отримані з обчислень за відомими формулами в геодезії.

Завдання: Перерахувати плоскі прямокутних координати із однієї системи в іншу за наявності двох вихідних пунктів.

Вихідні дані: Плоскі прямокутні координати *n* пунктів 1, 2, 3, …, *i,…, n* в старій системі X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, …, X_i, Y_i, …, X_n, Y_n і координати пунктів 1, 2 в новій системі координат X'_1, Y'_1, X'_2, Y'_2.

Знайти Координати (*n* – 2) пунктів $X(n-2)$ і $Y(n-2)$ старої системи в новій системі $X'_{(n-2)}$ і $Y'_{(n-2)}$.

Методичні рекомендації до роботи

Перерахунок плоских прямокутних координат пунктів з однієї системи в іншу необхідно можна виконати за наявності не менше двох вихідних пунктів, координати яких є в обох системах.

До параметрів перерахунку координат відносяться: координати початку старої системи; кут повороту координатних осей однієї системи відносно іншої; масштабний множник (масштабний коефіцієнт).

Для визначення параметрів переходу між системами координат розв'язують обернену задачу між двома пунктами з відомими координатами в обох системах. Параметри перерахунку визначають за формулами (9.1 – 9.3).

За початок координат старої системи приймають вихідний пункт, координати якого відомі в обох системах.

Перерахунок координат із старої системи в нову виконують за формулами (9.4).

Для цього потрібно виконати проміжні розрахунки: коефіцієнти переходу за формулою (9.6) і прирости координат між пунктами в новій системі (9.5).

Перерахунок координат в новій системі зручніше виконувати за формулою (9.8). Результати перерахунку доцільно розмістити в табл. 9.2.

Питання для самоконтролю

1. Чому виникає необхідність перерахунку координат пунктів геодезичної мережі з однієї системи в іншу ?

2. Що необхідно мати щоб виконати перерахунок координат ?

3. Які параметри визначаються для перерахунку координат між системами за відомими координатами двох пунктів в обох системах координат ?

4. За якою формулою визначається кут повороту міх старою та новою системами ?

5. За якою формулою визначають коефіцієнти переходу між системами ?

6. Навести формулу обчислення приростів координат в новій системи.

7. Що приймають за початок нової системи для перерахунку координат із старої системи в нову ?

Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи

Тема: Перерахунок плоских прямокутних координат із одної системи в іншу

Завдання : Обчислити плоскі прямокутні координати X і Y пунктів Штольня, Бурова і Садовий в новій системі координат (рис. 9.1) за даними двох пунктів в обох системах рис.. 9.1.

Вихідні дані. Координати вихідних пунктів в обох системах координат і координати пунктів для перерахунку (табл. 9.1).

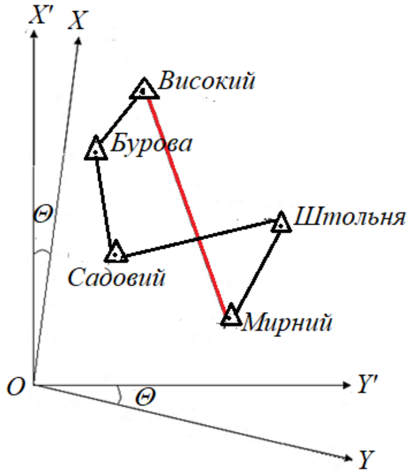


Рис. 9.1. Схема розташування осей двох систем координат

Таблиця 9.1

Вихідні пункти в обох системах координат і координати пунктів для перерахунку

Назва пунктів	Стара система		Нова система	
	X, м	Y, м	X', м	Y', м
Вихідні пункти				
Мирний	5345060,01	6679104,12	5344781,23	6679673,34
Високий	5354757,12+ N м	6682372,34+ N м	5354700,56 +N м	6683700,78 + N м
Пункти, які перераховуються				
Штольня	5348502,49	6681875,63		
Бурова	5349437,53	6677517,48		
Садовий	5352050,45	6680100,31		

1. Перерахунок координат пунктів в нову систему координат

Для обчислення координат пунктів в нову систему X_i' і Y_i' використовують формули:

$$X_i' = X'_{i-1} + \Delta X' = X'_{i-1} + (X_i - X_{i-1})A - (Y_i - Y_{i-1})\,B;$$
$$Y_i' = Y'_{i-1} + \Delta Y' = Y'_{i-1} + (Y_i - Y_{i-1})\,B + (X_i - X_{i-1})\,A,$$

де $(X_i - X_{i-1})$, $(Y_i - Y_{i-1})$ – прирости координат між пунктами мережі в старій системі координат; $A = m\ cos\Theta$, $B = m\ sin\Theta$ – коефіцієнти переходу між системами (обчислюють до семи знаків після коми); m – масштабний коефіцієнт; Θ – кут повороту координатних осей систем.

1.1. Обчислення параметрів переходу від старої системи координат до нової

Дирекційні кути та довжини сторін між двома вихідними пунктами в обох системах координат знаходять за результатами розв'язування оберненої геодезичної задачі.

Стара система	Нова система
$S = \sqrt{(X_i - X_{i-1})^2 + (Y_i - Y_{i-1})^2} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}.$	$S' = \sqrt{(X'_{i-1} - X'_i)^2 + (Y'_{i-1} - Y'_i)^2} = \sqrt{\Delta X'^2 + \Delta Y'^2}.$
S =10243,18 м α = *arctg ΔY/ΔX*; α = 18°39'12,56"	S' = 10716,19 м α′ = *arctg ΔY′/ΔX′*, α′ = 22°07'17,92".

$m = S'/S$=(10716.19 /10243,18) = 1,0461780

Θ = α'– α = 22°07'17,92"– 18°39'12,56"=3°28'05,36" = 3,46815556°,

де S' і S – горизонтальне прокладання сторін між вихідними пунктами в різних системах координат; α′і α – дирекцій ний кут сторони між вихідними пунктами

Результати перерахунку координат із системи в систему занесені в табл. 9.2.

Таблиця 9.2

Перерахунок координат пунктів із старої системи координат у нову

Назва пункта	Стара система координат				Нова система координат			
	Х, м	*У, м*	X_i–X_{i-1}	$У_i – У_{i-1}$	$Х'_i – Х'_{i-1}$	$У'_i – У'_{i-1}$	*Х′, м*	*У′, м*
A=1,044267903, B=0,063329421								
Мирний	6045060,01	679104,12					6344781,23	679673,34
			3442,480	2771,510	3419,353	3112,209		
Штольня	6048502,49	681875,63					6348200,58	682785,55
			935,040	–4358,150	1252,431	– 4491,861		
Бурова	6049437,53	677517,48					6349453,01	678293,69
			2612,920	2582,830	2565,019	2862,641		
Садовий	*6052050,45*	680100,31					6352018,03	681156,33
			2710,670	2276,030	2686,526	2548,450		
Високий	6054761,12	682376,34					6354704,56	683704,78
					Σx= 9923,33	Σy= 4031,44	*Σxm* = 9923,33	*Σy*т = 4031,44
				fx = Σx – *Σx*т = 9923,33 – 9923,33 = 0 м *fy* = Σy – *Σy*т = 4031,44 –4031,44 = 0 м. $f_{абс} = \sqrt{fx^2 + fy^2} = 0$				

Висновок. Указати точність з якою виконано перерахунок координат в новій системі

Лабораторна робота № 10

Тема: Редукування довжин

Навчальна мета: *вивчення алгоритму редукування виміряних на фізичній поверхні довжин ліній між пунктами геодезичної мережі 4 класу точності на площину проекції Гаусса-Крюгера*

Загальні відомості

Редукування довжин – це перехід від безпосередньо виміряних на фізичній поверхні Землі величин довжин ліній до відповідних їм величин на поверхні прийнятого еліпсоїда та площини проєкції *Гаусса-Крюгера*.

При цьому, залежно від практичної необхідності можна виконати спочатку перехід на поверхню еліпсоїда, сферу або площину проєкції Гаусса-Крюгера.

Розглянемо алгоритм, за яким обчислюються поправки в довжини ліній, виміряних між пунктами мережі світло- або радіовіддалемірами чи GPS-методами для редукування їх на площину проєкції Гаусса-Крюгера.

Редукування довжини виконують у два етапи: перший – редукування на поверхню референц-еліпсоїда; другий – редукування з поверхні референц-еліпсоїда на площину проєкції Гаусса-Крюгера [1].

Для редукування виміряної лінії на поверхню референц-еліпсоїда виконується з обчислення поправки за перехід від довжини на фізичній поверхні Землі до довжини на поверхні референц-еліпсоїда, прийнятого за відлікову поверхню в країні. В нашій країні прийнято референц-еліпсоїд Красовського.

1. Редукування виміряної довжини на поверхню референц-еліпсоїда

Обчислення поправки за редукування довжини на поверхню референц-еліпсоїда Красовського

$$S_0 = S_{\text{г}} + \Delta S_R, \tag{10.1}$$

де d – горизонтальне прокладення; ΔS_R – поправка за перехід на поверхню референц-еліпсоїда.

$$S_{\text{г}} = \sqrt{S^2 - (\text{H}_1 - \text{H}_2)^2}, \tag{10.2}$$

$$\Delta S_R = -S_{\text{г}} \frac{\text{H}_1 + \text{H}_2}{2(R_m + H_m)} + \frac{(S_{\text{г}})^3}{24 R_m^2} \tag{10.3}$$

де S – виміряна довжина на фізичній поверхні Землі; H_1, H_2 – геодезичні висоти початкової та кінцевої точок виміряної довжини; R_m – середній радіус кривизни еліпсоїда на середній широті; H_m – середня висота точок лінії, $H_m = \frac{H_1+H_2}{2}$.

$$R_m = \frac{b}{1 - e^2(\sin^2 B_m)}. \tag{10.4}$$

де $B_m = \frac{B_1+B_2}{2}$ – середня широта точок лінії; *в* – мала піввісі референц – еліпсоїда (*в* = 6356863 м); *е* – ексцентриситет референц – еліпсоїда. Красовського ($e^2 = 0{,}00669342$).

2. Редукування довжини з поверхні референц-еліпсоїда на площину проєкції Гаусса-Крюгера

Обчислення поправки за редукування лінії на площину проєкції Гаусса-Крюгера для мережі 4 класу точності знаходять за формулою

$$S = S_0 + \Delta S_p, \tag{10.5}$$

де ΔS_p – поправка за перехід з поверхні еліпсоїда на *на площину проєкції Гаусса-Крюгера* для мережі 4 класу

$$\Delta S_p = S_0 \left(\frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} \right), \tag{10.6}$$

де

$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $\Delta y = y_2 - y_1$, y_1, y_2 – зональні ординати

Загальна формула редукування довжини лінії

$$S = S_г + \Delta S_R + \Delta S_{p.} \tag{10.7}$$

Завдання: Редукувати на площину проєкції Гаусса-Крюгера довжину сторони трилатерації 4 класу точності, виміряну на фізичній поверхні Землі світлодалекоміром.

Вихідні дані: Виміряна довжина S = 4604,29 + N *10* м, геодезична широта точок лінії 1-2 – B_1*=47°26',* B_2*=47°28',* геодезичні висоти точок 1 і 2 – H_1 = 540,2+ N *10* м, H_2 = 832,9 м. Зональні ординати кінцевих точок лінії 1, 2 – y_1= 223406 м, y_2= 227625 м, де N – номер варіанта (номер в списку групи).

Методичні рекомендації до виконання роботи

Для виконання математичної обробки геодезичних вимірювань необхідно виконати їх проектування (редукування) на поверхню референц-еліпсоїда, який прийнятий за відлікову поверхню за формулою (10.1).

Виміряні нахилені довжини ліній приводимо до горизонтального прокладення, формула (10.2).

Обчислення поправки за перехід з довжини з поверхні Землі на поверхню референц-еліпсоїда Красовського виконують за формулою (10.3) і (10.4).

За формулою (10.5) обчислюють довжину редукованої лінії на площині проєкції Гаусса-Крюгера.

Поправку за перехід з поверхні еліпсоїда на площину проєкції Гаусса-Крюгера для мережі 4 класу точності знаходять за формулою (10.6).

Загальну редуковану довжину на площині проєкції Гаусса-Крюгера обчислюють за формулою (10.7).

Питання для самоконтролю

1. Чому виникає проблема редукування в математичній обробці геодезичних вимірювань ?
2. Коли необхідно редукувати лінійні вимірювання довжин ?
3. Від яких параметрів залежить величина поправки редукування за перехід на поверхню референц-еліпсоїда ?
4. Від яких параметрів залежить величина поправки редукування за перехід на площину проєкції Гаусса-Крюгера ?
5. Поясніть чому поправка за редукування довжини лінії на поверхню референц еліпсоїда від'ємна ?

Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи

Тема: Редукування довжин

Завдання:

1.Редукувати довжину сторони трилатераційної мережі, виміряної світлодалекоміром на площину проекції Гаусса-Крюгера (рис. 10.1).

Вихідні дані:

Виміряна довжина, S, м	47520,10
Широта початкової точки 1 лінії $B°_1$	47º45′
Широта кінцевої точки 2 лінії, $B°_2$	47º55′
Геодезична висота точки 1 H_1, *м*	785, 10
Геодезична висота точки 2 H_2, *м*	1063
Зональна ордината точки 1 y_1, *м*	157134
Зональна ордината точки 2 y_2, *м*	157518

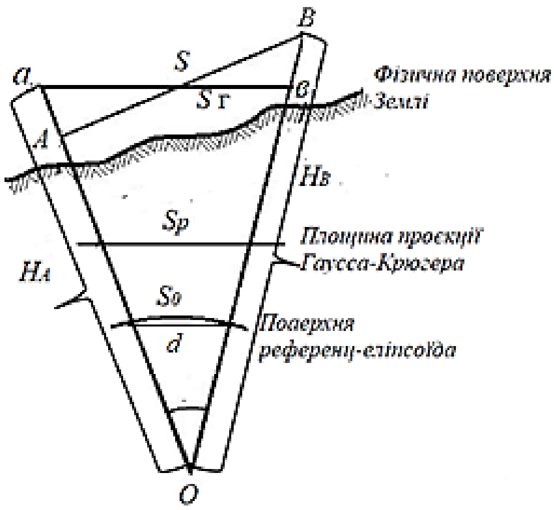


Рис.10.1. Схема редукування довжини сторони
на площину проекції Гаусса-Крюгера

1. Редукувати довжину сторони трилатераційної мережі, виміряної світлодалекоміром на площину проекції Гаусса-Крюгера

Обчислення горизонтальної прокладення виміряної довжини S

$$S_{\text{г}} = \sqrt{S_{\text{вим}}^2 - (\text{Н}_2 - \text{Н}_1)^2} = 47519{,}287 \text{ м.}$$

$$\text{Н}_m = \frac{\text{Н}_1 + \text{Н}_2}{2} = \frac{785{,}10 + 1063}{2} = 924{,}\ 05 \text{ м.}$$

Обчислення поправки за редукування на поверхню референц-еліпсоїда

$$\Delta S_R = -S_{\text{г}} \frac{\text{Н}_1 + \text{Н}_2}{2(R_m + \text{Н}_m)} + \frac{S_{\text{г}}}{24\, R_m^2} = -\,6{,}879 \text{ м,}$$

де $S_{\text{г}}$ – горизонтальної проекції довжини виміряної лінії; H_m – середня висота між точками 1 і 2 $\text{Н}_m = \frac{\text{Н}_1 + \text{Н}_2}{2}$; R_m – середній радіус кривизни меридіана на середній широті B_m.

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2} = \frac{47°\ 45' + 47°55'}{2} = 47°50'.$$

$$R_m = \frac{b}{1 - e^2(\sin^2 B_m)} = 6382460{,}472 \text{ м}$$

Обчислення довжини лінії на поверхні референт-еліпсоїда

$S_0 = S_Г + \Delta S_R$ = 47519,287 – 6,879 = 47512,408 м

2. Обчислення поправки за перехід на площину проекції Гаусса-Крюгера.

$$\Delta Sp = S_0\left(\frac{Y_m^2}{2R_m^2}\right) = 47512{,}408\left[\frac{(314\,652)^2}{2\,(6382460{,}472)^{\,2}}\right] = 14{,}437 \text{ м},$$

де y_1 і y_2 – ординати в зональній системі координат.

Визначення приведеної довжини на площині проекції Гаусса-Крюгера.

$S = S_0 + \Delta S_P$ =47512,408 +14,437=47526,845 м.

Висновок зробити за кінцевим результатом завдання.

Лабораторна робота № 11

Тема: Редукування напрямків

Навчальна мета: *вивчення алгоритму редукування напрямків геодезичних ліній на площину проекції Гаусса-Крюгера.*

Загальні відомості

Перехід з поверхні на площину проєкції Гаусса-Крюгера зводиться до введення в сфероїдичні напрямки геодезичних ліній поправок δ за кривизну зображення, що репрезентують собою кути між хордами та зображенням геодезичної лінії на площині проєкції (рис. 11.1).

Згідно рисунку 11.1 визначаємо, $d\cos\alpha = x_2 - x_1$, $d\sin\alpha = y_2 - y_1$, (y_2 і y_1 – зональні ординати точок лінії від осьового меридіана).

Запишемо формулу поправки за кривизну зображення геодезичної лінії на площині проєкції Гаусса-Крюгера [1].

$$\delta_{12} = -\frac{\rho}{2R_m^2} d\cos\alpha\left(y_1 + \frac{d\sin\alpha}{3}\right). \quad (11.1)$$

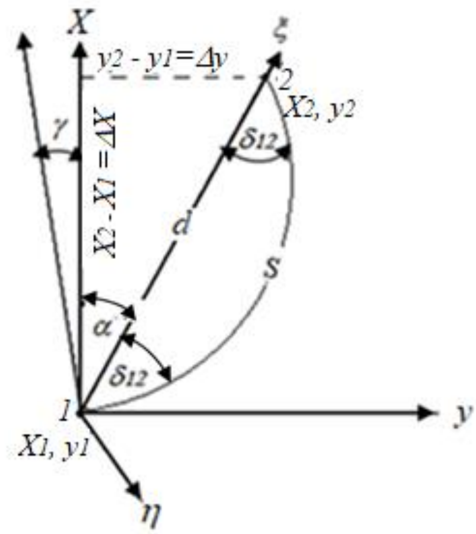


Рис. 11.1. Схема редукування геодезичної лінії на площину проекції Гаусса-Крюгера

Позначимо

$$\frac{\rho''}{2R_m^2} = f_m, \qquad (11.2)$$

У формулі (11.2) R_m – середній радіус кривизни еліпсоїда в точці з середньою широтою B_m сторони (або середньою абсцисою X_m)

$$R_m = \sqrt{M_m N_m} \text{ або } R_m = a(1 + \frac{1}{2}\, e^2 \sin^2 B_m - e^2 \cos^2 B_m \cos^2 A_{12}, \qquad (11.3)$$

$$B_m = \frac{(\text{B}_1 + \text{B}_2)}{2},\ A_{12} \text{ – азимут напрямку}$$

Враховуючи, що $d\cos\alpha = x_2 - x_1$ і $d\sin\alpha = y_2 - y_1$, тоді формулу (11.1) в кінцевому вигляді запишемо так

$$\delta_{12} = -\frac{1}{3} f_m\ (y_2 + 2y_1) = -f_m(x_2 - x_1)\left(y_m - \frac{y_2 - y_1}{6}\right), \qquad (11.4)$$

де

$$y_m = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

$$\delta_{21} = \frac{1}{3}\, f_m\,(x_2 - x_1)\,(2y_2 + y_1) = -f_m(x_2 - x_1)\left(y_m + \frac{y_2 - y_1}{6}\right), \qquad (11.5)$$

Формули (11.4) і (11.5) застосовують для мережі тріангуляції 2 класу відповідають обчисленню поправок δ до 0,01".

В геодезичних мережах нижчого класу, для довжин сторін менше 10 км і точності обчислення δ до 0,1" можна застосовувати спрощену формулу:

$$-\delta_{12} = \delta_{12} = \frac{1}{3} f\ (x_2 - x_1)\ y_m. \qquad (11.6)$$

Завдання: Обчислити поправки за кривизну зображення геодезичної лінії на площині проекції Гаусса-Крюгера в виміряний напрямок на пунктах геодезичної мережі

Вихідні дані: X_1=5313957 км , Y_1 = 6710034 +(100 N) м;
X_2=5321012 + (100 N) м, Y_2 = 6723045 м, де N – номер студента в списку групи.

Методичні рекомендації до виконання роботи

Обчислення поправок в горизонтальні напрямки за кривизну зображення геодезичної лінії на площині в прямому δ_{12}та оберненому δ_{21} напрямках на пунктах тріангуляції 2 класу точності виконують за формулами: для прямого напрямку (11.4); для оберненого – формула (11.5) [1].

Для обчислення поправок δ_{12} і δ_{21} необхідно знайти складові цих формул f_m і R_m, користуючись формулами (11.2) і (11.3).

Результати обчислень доцільно заносити в таблицю (11.1)

Слід зауважити, що під час обчислення поправок, координати точок лінії беруться в км.

Наведемо значення f залежно від широти та абсцис.

B	X, км	f, с/ км^2
46°	5096	0,0025345
48°	5319	0,0025333
50°	5541	0,0025322

Питання для самоконтролю

1. В яких одиницях обчислюється поправка в напрямок геодезичної лінії ?
2. Чому виникає необхідність визначення поправок в напрямки за зображення кривизни геодезичної лінії ?
3. В яку виміряну величину вводиться поправка за зображення кривизни геодезичної лінії?
4. Чому у формули визначення поправок δ ординати y беруться в зональній системі координат?

Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи

Тема: Редукування напрямків

Завдання: Обчислити поправку δ за кривизну зображення геодезичної лінії на площині проекції Гаусса-Крюгера в напрямок, виміряний на пунктах геодезичної мережі 2 класу.

Вихідні дані: X_1=6013960 м, Y_1 = 571024 м; X_2=6023600 м, Y_2 = 573210 м.

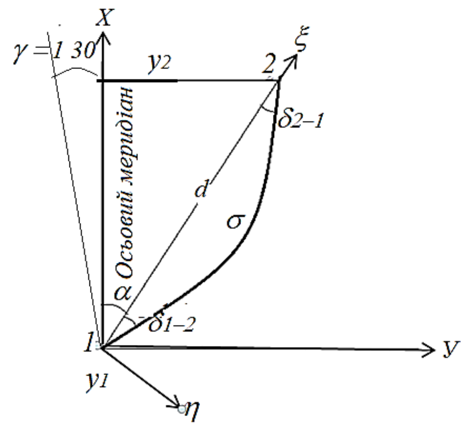


Рис. 11.1. Схема редукування напрямку на площину проекції Гаусса-Крюгера

1. Обчислення поправки δ_{12} за кривизну зображення геодезичної лінії

$$\delta_{12} = -\frac{fm}{3}1(2y_1 + y_2) = -\frac{fm}{3}(X_1 - X_2)\ y_m\ ,$$

де $f_m = \frac{\rho''}{2R^2{}_m}$= 2,52 10^{-3} , с/км^2; y_1, y_2 – зональні ординати; R_m = середній радіус кривизни еліпсоїда на середній широті лінії B_m; A_{12} – азимут напрямку лінії.

$R_m = \sqrt{MN},$ або $R_m = a\ (1 + e^2 sin^2 B_m - e^2 cos^2 B_m\ \ cos^2 A_{12}.$

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2} = 54°43'$$

Обчислення поправки $\delta\ _{21}$ в обернений напрямок 21

$$\delta_{2-1} = \frac{f_m}{3}(X_1 - X_2)(2y_1 + y_2) = \frac{f_m}{3}(X_1 - X_2)\ y_m.$$

Широти B_1 і B_2 точок 1 і 2 лінії знаходять в таблиці «Прямокутні координати…» за даними абсцис X_1 і X_2. або Xm поділити на 110 км і визначити град., і хвилини.

Обчислення азимута напрямку геодезичної лінії на площині проєкції Гаусса-Крюгера.

$$r_{12} = arctg\,\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1} = arctg\,\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{573210-571024}{23600-13960} = \frac{2186}{9640} = 0{,}226763 == 53°50''.$$

$$\alpha_{12} = 53°50'$$

Із рисунку 11.1 слідує, що гауссове зближення східне, тому азимут визначається за формулою

$$\mathrm{A}_{12} = \alpha + \gamma,$$

де γ – східне гауссове зближення γ = 2°53'.

$$\mathrm{A}_{12} = 53°50' + 2°53' = 56°43'.$$

Тоді середній радіус R_m і *fm* будуть дорівнювати

R_m = 6402402,338 м, *fm* = 2,52 10^{-4}

Підставивши всі значення у формулу (11.1) одержимо поправки за кривизну зображення геодезичної лінії (табл. 11.1)

Таблиця 11.1

Результати обчислень поправки за зображення кривизни лінії

X_1, *км*	X_2, *км*	$X_2 - X_1$, *км*	*y1*, *км*	*y2*, *км*	*2y1 + y2*, *км*	*y1 + 2y2*, *км*	δ_{12}"	
6014,0	6023,6	9,6	71,02	73,21	215,25		– 5,21	δ_{12}
6014,0	6023,6	9,6	71,02	73,21		217,44	5,26	δ_{21}

Висновок зробити за результатами, отриманих даних

Лабораторна робота № 12

Тема*:* Проектування лінійно-кутової мережі 4 класу. Апріорна оцінка точності елементів запроектованої мережі

Навчальна мета: вивчення методики проектування планової лінійно-кутової геодезичної мережі з послідуючою апріорною оцінкою точності запроектованих елементів.

Загальні відомості

Широке впровадження в практику геодезичних робіт сучасних технологій привело до поширення лінійно-кутових побудов, у яких вимірюють кути та сторони трикутників або чотирикутників.

Лінійно-кутова мережа в меншій мірі залежить від геометрії фігури; менша залежність між поздовжнім і поперечним зміщеннями; забезпечує жорсткий контроль кутових і лінійних вимірювань; координати пунктів приблизно в 1,5 рази визначаються точніше, ніж в мережах тріангуляції та трилатерації.

Проект геодезичної мережі згущення розробляється з урахуванням вимог інструкцій [2, 3], масштабу та методу зйомки на основі: матеріалів та відомостей про всі раніше виконані геодезичні роботи на площі зйомки; вивчення району майбутніх робіт за існуючими картами найкрупнішого масштабу та за літературними джерелами; матеріалів попереднього спеціального обстеження району робіт, включаючи інструментальний пошук геодезичних пунктів раніше побудованих мереж; вибору найбільш раціонального варіанта схеми проекту геодезичних мереж з урахуванням перспективи розвитку територій відповідно до генерального плану освоєння земель [2, п. 2. 11].

Завдання.

1. Скласти проект лінійно-кутової мережі 4 класу традиційним методом і визначити характеристику запроектованої мережі (кути, довжини, координати).

2. Виконати апріорну оцінку елементів запроектованої мережі параметричним способом.

Вихідні дані.

Топографічна карта масштабів 1:10000 або 25000 з нанесеною ділянкою майбутньої зйомки.

Методичні вказівки до виконання роботи

Для побудови лінійно-кутової мережі необхідно:

1. Скласти схему мережі 4 класу керуючись нормативними вимогами [2, 3, 4]. Схема лінійно-кутової мережі проектується на картах масштабу 1:10000 або 1:25000 з урахуванням ділянки знімання та вихідних пунктів існуючої мережі. (Приклад типових схем лінійно-кутової мережі наведено в дод. 5, [4].

Вибір місцеположення пунктів повинен забезпечити взаємну видимість між суміжними пунктами. Розглянемо послідовність виконання роботи на прикладі схеми геодезичної мережі, зображеної на рис. 12.1

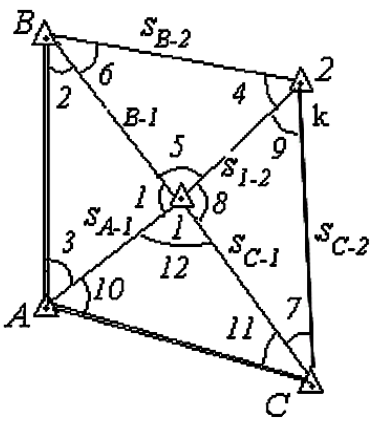


Рис 12.1. Схема лінійно-кутової мережі 4 класу.

2. На схемі лінійно-кутової мережі показати: вихідні пункти існуючої мережі; пункти запроектованої мережі; вимірювані сторони та кути, їх позначення; пронумерувати всі пункти, трикутники, кути й сторони та позначити великими буквами й цифрами.

3. Підготовити вихідні дані для розрахунку точності проекту лінійно-кутової мережі (визначити за схемою на карті координати пунктів, виміряти довжини сторін трикутників) та занести в табл. 12.1.

4. Скласти параметричні рівняння поправок напрямків на кожному пункті [4]:

– для напрямку з вихідного пункту *k* на вихідний пункт *i* відповідає рівняння

$$\vartheta_{ki} = 0$$

– для напрямку з пункту *k*, який визначається на вихідний пункт *i* рівняння має вигляд

$$\vartheta_{ki} = a_{ki_i}\,\delta x_k + b_{ki}\,\delta y_k ,$$

– для напрямку з вихідного пункту i на шуканий пункт k, відповідає рівняння

$$\vartheta_{ik} = a_{ki_i}\,\delta x_k + b_{ki}\,\delta y_k$$

– для напрямку з пункту k на пункт i, які визначаються

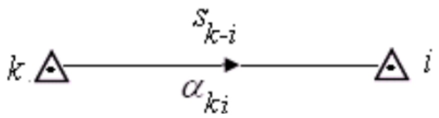
$$\vartheta_{ki} = a_{ki_i}\,\delta x_k + b_{ki}\,\delta y_k - a_{ki}\,\delta x_i - b_{ki}\,\delta y_i\ ,$$

де a_{ki} , b_{ki} – коефіцієнти перед невідомими δx_k δy_k, δx_i, δy_i; ϑ_{ki} = ϑ_{ik} – поправки у прямі та обернені напрямки між пунктами.

5. Скласти параметричні рівняння поправок для сторін $S_{k\text{-}i}$ (рис. 12.1) двох видів:

– коли один пункт, наприклад i, є вихідним, а пункт k запроектованим, (шуканим):

$$\vartheta_{S_{k-i}} = -\cos\alpha_{ki_i}\,\delta x_k - \sin\alpha_{ki}\,\delta y_k$$



– коли пункти k і i визначаються

$$\vartheta_{S_{ki}} = -\cos\alpha_{ki}\,\delta x_k - \sin\alpha_{ki}\,\delta y_k + \cos\alpha_{ki}\,\delta x_i + \sin\alpha_{ki}\,\delta y_i\,.$$

Для зручності позначимо:

$$c_{ki} = -\ \cos\alpha_{\text{ki}};\ \ d_{ki} = -\ \sin\alpha_{\text{ki}}\,.$$

З урахуванням позначень рівняння поправок сторін запишеться у вигляді:

$$\vartheta_{S_{i-k}} = c_{ki}\delta x_k + d_{ki}\delta y_k - c_{ki}\delta x_i - d_{ki}\delta y_i.$$

5. Обчислити коефіцієнти параметричних рівнянь поправок напрямків a_{ik} b_{ik} і сторін c_{ik}, d_{ik} з точністю до 0,001 та занести в табл. 12.2.

$$\left.\begin{array}{c} -a_{ik} = a_{ki} = -\frac{(Y_i - Y_k)}{S^2{}_{ik},\text{км}}\ 20626.5,\ \ b_{ik} = -b_{ki} = \frac{(X_i - X_k)}{S^2{}_{ik},\text{км}}\ 20626{,}5, \\ c_{ki} = \frac{(X_i - X_k)}{S_{ki},\text{км}},\, d_{ki} = \frac{(Y_i - Y_k)}{S_{ki},\text{км}}. \end{array}\right\}\ (12.1)$$

Таблиця 12.2

Коефіцієнти параметричних рівнянь поправок напрямків і сторін перед δx_1, δy_1, δx_2, δy_2

Номер рівнянь поправок	Коефіцієнти перед δx_1 і δy_1		Коефіцієнти перед δx_2 і δy_2	
1	$a_{AB} = 0$	b_{AB}=0	a_{AB} =**0**	b_{AB} =**0**
2	a_{A1}	b_{A1}	0	0
4	$a_{AC} = 0$	b_{AC}=0	a_{AC} =**0**	b_{AC} =**0**
5	$a_{BA} = 0$	b_{BA}=0	a_{BA} =**0**	b_{BA} =**0**
6	a_{B1}	b_{B1}	0	0
7	0	0	a_{B2}	b_{B2}
8	0	0	a_{2B}	b_{2B}
9	a_{21}	b_{21}	a_{21}	b_{21}
10	0	0	a_{2C}	b_{2C}
11	$a_{CA} = 0$	b_{CA}=0	$a_{CA} = 0$	$b_{CA} = 0$
12	a_{C1}	b_{C1}		
13			a_{C2}	b_{C2}
14	c_{A1}	d_{A1}		
15	c_{B1}	d_{B1}		
16			c_{B2}	d_{B2}
17	c_{21}	d_{21}	c_{21}	d_{21}
18			c_{2C}	d_{2C}
19	c_{C1}	d_{C1}		

7. Після обчислення коефіцієнтів (табл. 12.2) скласти параметричні рівняння поправок напрямків і сторін у числовому вигляді з урахуванням знаків коефіцієнтів для складання матриці *M*.

8. Скласти матрицю ваг вимірюваних напрямків P_β і сторін P_S за формулою (12.2). Кількість рядків n і кількість стовпців m у матриці ваг Р визначається кількістю всіх параметричних рівнянь поправок виміряних величин у мережі, тобто (n) = (m).

$$\mu^2 = m_\beta^2,$$
$$P_\beta = \frac{\mu^2}{m_\beta^2} = 1, \quad P_S = \frac{\mu^2}{m_S^2} \tag{12.2}$$

9. Обчислити матрицю коефіцієнтів нормальних рівнянь за формулою

$$N = M^{\mathrm{T}} P M. \tag{12.3}$$

де *M* – матриця коефіцієнтів параметричних рівнянь поправок; *P* – матриця ваг запроектованих вимірювань; M^{T} – транспонована матриця до матриці *M*.

Для визначення матриці обернених ваг Q необхідно знайти обернену матрицю N^{-1} коефіцієнтів нормальних рівнянь

$$N^{-1} = \frac{1}{P_F} = Q. \qquad (12.4)$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} \end{bmatrix}.$$

10. Розрахувати точність елементів проекту лінійно-кутової мережі.

Середня квадратична похибка (СКП) M положення запроектованих пунктів

$$M_i = \sqrt{m_x^2 + m_y^2},$$

де $m_{x1} = \mu\sqrt{Q_{11}}$, $m_{y1} = \mu\sqrt{Q_{22}}$, $m_{x2} = \mu\sqrt{Q_{33}}$, $m_{y2} = \mu\sqrt{Q_{44}}$ – СКП за осями абсцис і ординат, Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, Q_{44} – діагональні елементи матриці обернених ваг Q.

11. Визначити СКП дирекційного кута та довжини сторони в найбільш слабкому місці мережі

Скласти рівняння вагових функцій напрямку та довжини та скласти матрицю-рядка.

$$f_\alpha = -a_{12}\delta x_i - b_{ki}\delta y_i + a_{ki}\delta x_k + b_{ki}\delta y_k$$

$$f_S = -c_{ki}\delta x_i - d_{ki}\delta y_i + c_{ki}\delta x_k + d_{ki}\delta y_k$$

де a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}, d_{ki} – коефіцієнти вимірюваних кутів і довжин, які обчислюються за формулами (12.1) [5].

Визначити СКП дирекційного кута напрямку сторони m_α і довжини лінії m_S в найбільш слабкому місці мережі за формулами:

$$m_\alpha = \mu\sqrt{\frac{1}{P_\alpha}},\ m_S = \mu\sqrt{\frac{1}{P_S}},$$

де $\frac{1}{P_\alpha}, \frac{1}{P_S}$ – обернені ваги вимірювання кутів і довжин, відповідно

$$\frac{1}{P_\alpha} = f_\alpha\, Q\, (f_\alpha)^T, \frac{1}{P_S} = f_S\, Q\, (f_S)^T\ .$$

$(f_\alpha)^T$ і $(f_S)^T$ – транспоновані матриці – стовпці.

6. Виконати розрахунок точності запроектованої лінійно-кутової мережі в програмі Mathcad, керуючись рекомендаціями програмного забезпечення.

Питання для самоконтролю

1. В яких випадках використовують лінійно-кутову геодезичну мережу?
2. Що необхідно враховувати для вибору методу проектування геодезичної мережі?
3. Що означає геометрія мережі?
4. Які параметри характеризують геометрію запроектованої геодезичної мережі?
5. Що означає апріорна оцінка елементів запроектованої геодезичної мережі?
6. Як враховується топографія під час проектування геодезичної мережі?
7. До якого методу оцінки точності відноситься параметричний спосіб?
8. Для чого складають параметричні рівняння поправок запроектованої геодезичної мережі?
9. В лінійно – кутовій мережі які виникають труднощі під час оцінки точності ?
10. Яку роль в апріорній оцінці елементів запроектованої геодезичної мережі мають обернені ваги?

Приклад розв'язування та оформлення лабораторної роботи

Тема: Проектування лінійно-кутової мережі 4 класу. Апріорна оцінка точності елементів запроектованої мережі.

Завдання:

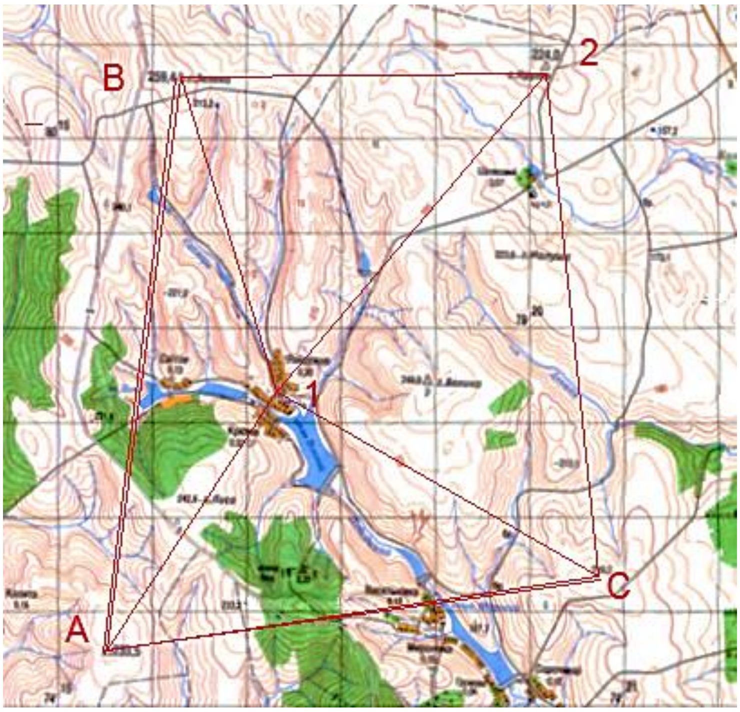
1. Скласти проект лінійно-кутової мережі 4 класу традиційним методом.

2. Визначити характеристику запроектованої мережі (кути, довжини, координати).

3. Виконати апріорну оцінку елементів запроектованої лінійно-кутової мережі параметричним способом

1. Складання проекту лінійно-кутової мережі 4 класу.

Під час складання мережі лінійно-кутового проекту необхідно врахувати геометрію мережі згідно інструкції та місце закладання пунктів. Вибір місцезнаходження пунктів повинен забезпечити взаємну видимість між ними. Вивчення майбутніх геодезичних робіт здійснюється за картою У-34-37-В-b (1:25000).



1:25000

Рис. 12.1. Проект лінійно-кутової мережі 4 класу

Місце запроектованих пунктів визначається на командних висотах.

Пункти А (Ангомер), В (Мербах), С (Руммельс) – вихідні пункти 3 класу тріангуляції

Пункти 1 та 2 – запроектовані пункти 4 класу.

Довжини між пунктами тріангуляції 3 класу знаходяться в межах 5 – 8 км, а довжини сторін трикутника 4 класу 2 – 5 км.

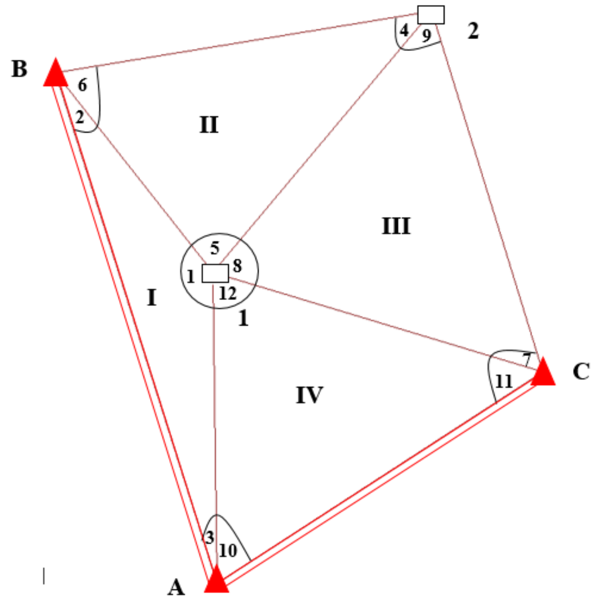


Рис 12.2. Схема лінійно-кутової мережі

2. Характеристика запроектованої лінійно-кутової мережі.

Запроектовані елементи зображені на схемі лінійно-кутової мережі (рис.12.2). Значення координат пунктів, довжини між ними та значення кутів зазначені у таблиці 12.1.

Таблиця 12.1

Характеристика запроектованої мережі

Пункт	Напрямок	Координати пункту		H, м	Довжина сторони, км	Дирекційні кути сторін α
		X, м	Y, м			
A	B C 1	6081150 6075760 6077760	4316500 4321500 4317530	259,4 219,3 160,0	6,24 5,39 3,34	α_{1A} = 210°30'37″ α_{B2} = 89°16'29″
B	A 1 2	6074960 6077760 6081200	4315700 4317530 4320450	233,5 219,3 224,0	6,24 3,55 3,96	α_{1B} = 343°05'58″
C	2 1 A	6081200 6077760 6074960	4320450 4317530 4315700	224,0 219,3 233,5	5,43 4,01 5,39	α_{C2} = 89°04'31″ α_{C1} = 296°44'17″
1	A B C 2	6074960 6081150 6075760 6081200	4315700 4316500 4321500 4320450	233,5 259,4 219,3 224,0	3,34 3,55 4,01 4,51	α_{1C} = 116°44'17″ α_{12} = 40°19'33″
2	C 1 B	6075760 6077760 6081150	4321500 4317530 4316500	219,3 160,0 259,4	5,43 4,51 3,96	α_{2C} = 169°04'31″ α_{21} = 220°19'33″ α_{B2} = 269°16'29

3. Апріорна оцінка елементів запроектованої лінійно-кутової мережі параметричним способом

3.1. Складання параметричних рівнянь поправок напрямків у буквено-символьному вигляді

Параметричне рівняння поправок напрямку в загальному вигляді, коли пункти *i k* обидва шукані

$$V_{ik} = -a_{ik}\,\delta x_i - b_{ik}\,\delta y_i + a_{ik}\,\delta x_k + b_{ik}\,\delta y_k,$$

коли пункт *i* – вихідний, *k* – шуканий

$$V_{ik} = a_{ik}\,\delta x_k + b_{ik}\,\delta y_k,$$

коли пункт *i* – шуканий, *k* – вихідний пнкт.

$$V_{ik} = -a_{ik}\,\delta x_i - b_{ik}\,\delta y_i,$$

де a_{ik}, b_{ik} – коефіцієнти перед невідомими поправками координат; δx_i , δy_i , δx_k , δy_k – поправки в координати; *i, k* – номер пунктів; V_{ik} – поправки у напрямки.

Параметричні рівняння поправок напрямків запроектованої мережі (рис. 11.2) у буквеному вигляді:

Пункт *A*

$V_{AB} = 0$

$V_{A1} = -a_{A1}\delta x_1 - b_{A1}\delta y_1$

$V_{AC} = 0$

Пункт *B*

$V_{BA} = 0$

$V_{B1} = -a_{B1}\delta x_1 - b_{B1}\delta y_1$

$V_{B2} = +a_{B2}\delta x_2 + b_{B2}\delta y_2$

Пункт *C*

$V_{CA} = 0$

$V_{C1} = -a_{C\text{-}1}\delta x_1 - b_{C\text{-}1}\delta y_1$

$V_{C2} = a_{C2}\delta x_2 + b_{C2}\delta y_2$

Пункт 1

$V_{1B} = -a_{1B}\delta x_1 - b_{1B}\delta y_1$

$V_{1A} = -a_{1A}\delta x_1 - b_{1A}\delta y_1$

$V_{12} = -a_{12}\delta x_1 - b_{12}\delta y_1 + a_{12}\delta x_2 + b_{12}\delta y_2$

$V_{1C} = -a_{1C}\delta x_1 - b_{1C}\delta y_1$

Пункт 2

$V_{2C} = +a_{2C}\delta x_2 + b_{2C}\delta y_2$

$V_{21} = a_{21}\delta x_1$ -+$b_{21}\delta y_1 - a_{21}\delta x_2 - b_{21}\delta y_2$
$V_{2B} = + a_{2B}\delta x_2 + b_{2B}\delta y_2$

3.2. Обчислення коефіцієнтів a_{ik}, b_{ik} перед невідомими δx і δy

Коефіцієнти aik, bik перед невідомими обчислюються з точністю 0,001, дані беруться з таблиці 12.1, а коефіцієнти заносяться в таблицю 12.2.

$$-a_{ik} = a_{ki} = -\frac{(Y_i - Y_k)}{S^2{}_{ik},\ \text{км}}\ 20626.5, \qquad b_{ik} = -b_{ki} = \frac{(X_i - X_k)}{S^2{}_{ik},\ \text{км}}\ 20626{,}5, \Bigg\}$$

де a_{ik}, b_{ik} – коефіцієнти перед невідомими для рівнянь поправок напрямків; X,Y – координати пунктів; S – довжина сторони мережі.

3.3. *Складання рівнянь поправок вимірюваних сторін у буквено-символьному вигляді*.

Параметричні рівняння поправок для виміряної сторони:

$$c_{ki} = -\cos\alpha_{ki}\ ,\ d_{ki} = -\sin\alpha_{ki}$$
$$-c_{ik} = -\cos\alpha_{ik}\ ,\ -d_{ik} = -\sin\alpha_{ik}$$

Для зручності обчислень формулу має такий вигляд

$$V_{Sik} = -c_{ik}\,\delta_i - d_{ki\ ik}\delta_i + c_{ki\ ik}\delta x_k + d_{ki}\ \delta y_k$$

$$c_{ki} = \frac{(X_i - X_k)}{S_{ki},\text{км}},\ d_{ki} = \frac{(Y_i - Y_k)}{S_{ki},\text{км}}.$$

де $\cos\alpha_{ik}$, $\sin\alpha_{ik}$ – коефіцієнти перед невідомими поправками координат (косинус та синус дирекційних кутів); c_{ki}, d_{ki} – коефіцієнти перед невідомими для рівнянь поправок довжин; δx_i , δy_i , δx_k , δy_k – поправки в координати ; i, k – номера пунктів; V_{Sik} – поправки в довжини сторін.

Параметричні рівняння поправок довжин сторін S_{ik} у буквеному вигляді

$V_{SB2} = +\cos_{B2}\delta x_2 + \sin_{B2}\delta y_2$
$V_{SA1} = -\cos\alpha_{A1}\delta x_1 - \sin\alpha_{A1}\delta y_1$
$V_{SB1} = -\cos_{B1}\delta x_1 - \sin b_{B1}\delta y_1$
$V_{SC1} = -\cos\alpha_{C1}\delta x_1 - \sin\alpha_{C1}\delta y_1$
$V_{S21} = -\cos\alpha_{21}\delta x_1 - \sin\alpha_{21}\delta y_1 + \cos\alpha_{21}\delta x_2 + \sin\alpha_{21}\delta y_2$
$V_{S2C} = +\cos\alpha_{2C}\delta x_2 + \sin\alpha_{2C}\delta y_2$

Коефіцієнти параметричних рівнянь поправок у виміряні напрямки та сторони заносяться в таблицю 12.2.

Таблиця 12.2

Коефіцієнти параметричних рівнянь поправок в напрямки та сторони перед поправками (δx_i, δy_i, δx_k, δy_k) в координати пунктів 1 і 2

Пункт 1		Пункт 2	
a_{ik} (δx_1)	b_{ik} (δy_1)	a_{ik} (δx_2)	b_{ik} (δy_2)
5,177	-3,384	0	0
0	0	0,066	-5,196
-5,548	1,686	0	0
0	0	-3,806	-0,735
3,488	-2,961	0	0
0	0	-0,066	5,196
2,565	5,092	-2,565	-5,092
0	0	3,806	0,735
-5,177	3,384	0	0
5,548	-1,686	0	0
-3,488	2,961	0	0
-2,565	-5,092	2,565	5,092
-0,862	-0,508	0	0
0	0	0,013	1,000
0,957	-0,291	0	0
0	0	-0,982	0,190
0,762	0,647	-0,762	-0,647
-0,450	0,893	0	0

3.4. Оцінка точності елементів проекту лінійно-кутової геодезичної мережі.

Оцінка точності проекту геодезичної мережі полягає в обчисленні очікуваної середньої квадратичної похибки (СКП) оцінюючих елементів і в порівнянні їх з нормативними величинами. Оцінюючими елементами мережі є СКП:

– положення запроектованого пункту в найбільш слабкому місці мережі M;

– дирекційного кута m_α напрямку сторони в найбільш слабкому місці мережі:

– довжини сторони m_S в найбільш слабкому місці мережі.

Відносна похибка довжини сторони в найбільш слабкому місці мережі $\frac{m_S}{S}$, яка порівнюється з нормативною.

Середня квадратична похибка елементів мережі обчислювалася з заданою похибкою кутових вимірювань $m_\beta = 3''$ і лінійних, з відносною похибкою

1 / 70000 [4]. Складання параметричних рівнянь поправок для напрямків і виміряних сторін запроектованої мережі.

Рівняння поправок напрямків у числовому вигляді

$V_{AB} = 0$
$V_{A1} = 5{,}177\ \delta x_1 – 3{,}384\ \delta y_1$
$V_{AC} = 0$
$V_{BA} = 0$
$V_{B1} = – 5{,}548\ \delta x_1 + 1{,}686\ \delta y_1$
$V_{B2} = 0{,}066\ \delta x_2 - 5{,}196\ \delta y_2$
$V_{CA} = 0$
$V_{C1} = 2{,}565\ \delta x_1 +5{,}092\ \delta y_1$
$V_{C2} = 3{,}806\ \delta x_2 + 0{,}735\ \delta y_2$
$V_{1B} = – 3{,}488\ \delta x_1 +2{,}961\ \delta y_1$
$V_{1A} = 5{,}548\ \delta x_1 – 1{,}686\ \delta y_1$
$V_{12} = – 2{,}565\ \delta x_1 – 5{,}092\ \delta y_1 + 2{,}565\ \delta x_2 + 5{,}092\ \delta y_2$
$V_{1C} = – 5{,}177\ \delta x_1 + 3{,}384 \delta y_1$
$V_{2C} = -3{,}806\ \delta x_2 -0{,}735\ \delta y_2$
$V_{21} = -2{,}565\ \delta x_1 -5{,}092\ \delta y_1 +2{,}565\ \delta x_2 +5{,}092\ \delta y_2$
$V_{2B} = 3{,}806\ \delta x_2 + 0{,}735\ \delta y_2$
Рівняння поправок для сторін S_{i-k}: у числовому вигляді
$V_{SB2} = 0{,}013\ \delta x_2 + \delta y_2$
$V_{SA1} = – 0{,}862\ \delta x_1 – 0{,}508\ \delta y_1$
$V_{SB1} = 0{,}957\ \delta x_1 – 0{,}291\ \delta y_1$
$V_{SC1} = – 0{,}450\ \delta x_1 + 0{,}893\ \delta y_1$
$S_{21} = 0{,}762\ \delta x_1 + 0{,}647\ \delta y_1 – 0{,}762\ \delta x_2 -0{,}647\ \delta y_2$
$S_{2C} = -0{,}982\ \delta x_2 + 0{,}190\ \delta y_2$

На основі параметричних рівнянь сторін і напрямків у числовому вигляді складається матриця коефіцієнтів a_{i-k}, b_{i-k} параметричних рівнянь поправок напрямків і сторін:

$$A := \begin{bmatrix} 5.177 & -3.384 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.066 & -5.196 \\ -5.548 & 1.686 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.806 & -0.735 \\ 3.488 & -2.961 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.066 & 5.196 \\ 2.565 & 5.092 & -2.565 & -5.092 \\ 0 & 0 & 3.806 & 0.735 \\ -5.177 & 3.384 & 0 & 0 \\ 5.548 & -1.686 & 0 & 0 \\ -3.488 & 2.961 & 0 & 0 \\ -2.565 & -5.092 & 2.565 & 5.092 \\ -0.862 & -0.508 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.013 & 1 \\ 0.957 & -0.291 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.982 & 0.190 \\ 0.762 & 0.647 & -0.762 & -0.647 \\ -0.450 & -0.450 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Складання матриці ваг вимірюваних напрямків P_β і сторін P_S.

Кількість рядків n і кількість стовпців m у матриці ваг P визначається кількістю всіх рівнянь поправок виміряних величин у мережі, тобто $(n) = (m)$.

Для зручності обчислень приймають $\mu^2 = \beta^2$ тоді для зрівнювання отримують:

$$P_\beta = 1,\ P_S = \frac{\mu 2}{m_S{}^2},$$

В роботі прийнято, що $\mu = 5''$ - СКП одиниці ваги, тоді

$$P_S = \frac{\mu 2}{m_S{}^2} = \frac{5^2}{10^2} = 0{,}25.$$

Матриця ваг вимірюваних напрямків P_β і сторін P_S:

$$P := \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25
\end{bmatrix}$$

Матриця коефіцієнтів для невідомих у нормальних рівняннях:

$$N := A^{\mathrm{T}} P \cdot A = \begin{bmatrix}
153.265 & -48.066 & -13.304 & -26.245 \\
-48.066 & 98.221 & -26.245 & -51.962 \\
-13.304 & -26.245 & 42.525 & 31.111 \\
-26.245 & -51.962 & 31.111 & 107.298
\end{bmatrix}$$

Матриця обернених ваг:

$$Q := N^{-1} = \begin{bmatrix} 0.011 & 0.01 & 0.005 & 0.006 \\ 0.01 & 0.024 & 0.01 & 0.011 \\ 0.005 & 0.01 & 0.034 & -0.004 \\ 0.006 & 0.011 & -0.004 & 0.017 \end{bmatrix}$$

Обчислили середню квадратичну похибку положення пункту М у найбільш слабкому місці мережі за формулою

$$M_1 = \sqrt{m_x^2 + m_y^2},$$

де $m_{x1} = \mu\sqrt{Q_{11}}$, $m_{y1} = \mu\sqrt{Q_{22}}$ – СКП за осями абсцис та ординат; Q_{11} , Q_{22} – діагональні елементи матриці обернених ваг Q, $\mu = 2{,}5$.

$$m_{x1} := \mu\sqrt{0{,}011} = 0{,}262 \text{ дм} = 0{,}026 \text{ м},\ m_{y1} := \mu\sqrt{0{,}024} = 0{,}387 \text{ дм} = 0{,}039$$

$$M_1 = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = 0{,}467 \text{ дм} = 0{,}047 \text{ м}$$

$$m_{x2} = \mu\sqrt{0{,}034} = 0{,}461 \text{ дм} = 0{,}046 \text{ м.}$$

$$m_{y2} = \mu\sqrt{0{,}017} = 0{,}326 \text{ дм} = 0{,}033 \text{ м}$$

$$M_2 = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 =} \sqrt{0{,}461^2 + 0{,}326^2} = 0{,}564 \text{ дм} = 0{,}056 \text{ м}$$

Складання рівнянь вагових функцій напрямку та довжини та скласти матриці-рядка.

$$f_\alpha = -a_{12}\delta x_i - b_{ki}\delta y_i + a_{ki}\delta x_k + b_{ki}\delta y_k$$
$$f_S = -c_{ki}\delta x_i - d_{ki}\delta y_i + c_{ki}\delta x_k + d_{ki}\delta y_k$$

де a_{ki} , b_{ki} , c_{ki} , d_{ki} – коефіцієнти вимірюваних кутів і довжин, які обчислюються за формулами (12.1):

$$\left.\begin{aligned} a_{ki} = -a_{ik} = \frac{Y_k - Y_i}{{S_{ik}}^2,\ \text{км}} 20626{,}5 = \frac{\sin a_{ki}\ 20626{,}5}{S_{ki}}, \\ b_{ki} = -b_{ik} = -\frac{X_k - X_i}{{S_{ki}}^2,\ \text{км}} 20626{,}5 = -\frac{\cos \alpha_{ki}\ 20626{,}5}{S_{ki}}, \\ c_{ki} = \frac{(X_i - X_k)}{S_{ki}, \text{км}}, d_{ki} = \frac{(Y_i - Y_k)}{S_{ki}, \text{км}}. \end{aligned}\right\}$$

Тоді матриці будуть мати такий вигляд

$$fs = (–2,565 –5,092 + 2,565 + 5,092).$$
$$f\alpha = (– 0,762 – 0,647 +0,762 + 0,647)$$

Розрахунок обернених ваги $\frac{1}{P_\alpha}$ та $\frac{1}{P_S}$ виміряних параметрів.

$$\frac{1}{P_\alpha} = f_\alpha\ Q\ (f_\alpha)^T = 0,016.$$
$$\frac{1}{P_S} = f_S\ Q\ (f_S)^T = 0,464.$$

Визначити СКП дирекційного кута сторони і довжини лінії в найбільш слабкому місці мережі за формулою (1.8) [4].

$$m_\alpha = \mu\sqrt{\frac{1}{P_\alpha}},\ m_S = \mu\sqrt{\frac{1}{P_S}}.$$

$$m_a = 2{,}2\sqrt{0{,}016} = 3{,}4'',\ m_S = 10\sqrt{0{,}464} = 7\ мм$$

Обчислення відносної похибки довжини сторони в найбільш слабкому місці мережі $\frac{m_S}{S}$ та порівняти її з нормативною $\frac{1}{T}$.

$$\frac{m_S}{S} \leq \frac{1}{T},$$

$$\frac{m_S}{S} = \frac{7}{3643} = \frac{1}{520430}.$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{520430} < \frac{1}{70000}$$

Висновок: відповідає запроектована мережа нормативним вимогам до геометрії мережі.

Список літератури

1. Савчук С.Г. Вища геодезія. Підручник – Житомир, 2005. – 315 с.

2. Інструкція з топографічного знімання у масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 та 1:500. (ГКНТА 2.04-02-98). – Київ, 1998. – 155 с.

3. Основні положення створення Державної геодезичної мережі України: пост. Кабінету Міністрів України № 844 від 8.06.1998. – 15 с.

4. Вища геодезія. Методичні рекомендації до виконання курсового проекту бакалаврами денної та заочної форм навчання спеціальності 193 Геодезія та землеустрій. / А.В. Зуска. Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро: НТУ «ДП», 2019. – 47 с.

Навчально-методичне видання

Зуска Ада Василівна
Бруй Ганна Валеріївна
Янкін Олександр Євгенович

ВИЩА ГЕОДЕЗІЯ

Методичні рекомендації до лабораторних робіт
для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 193 Геодезія та землеустрій

В авторській редакції

Електронний ресурс

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.