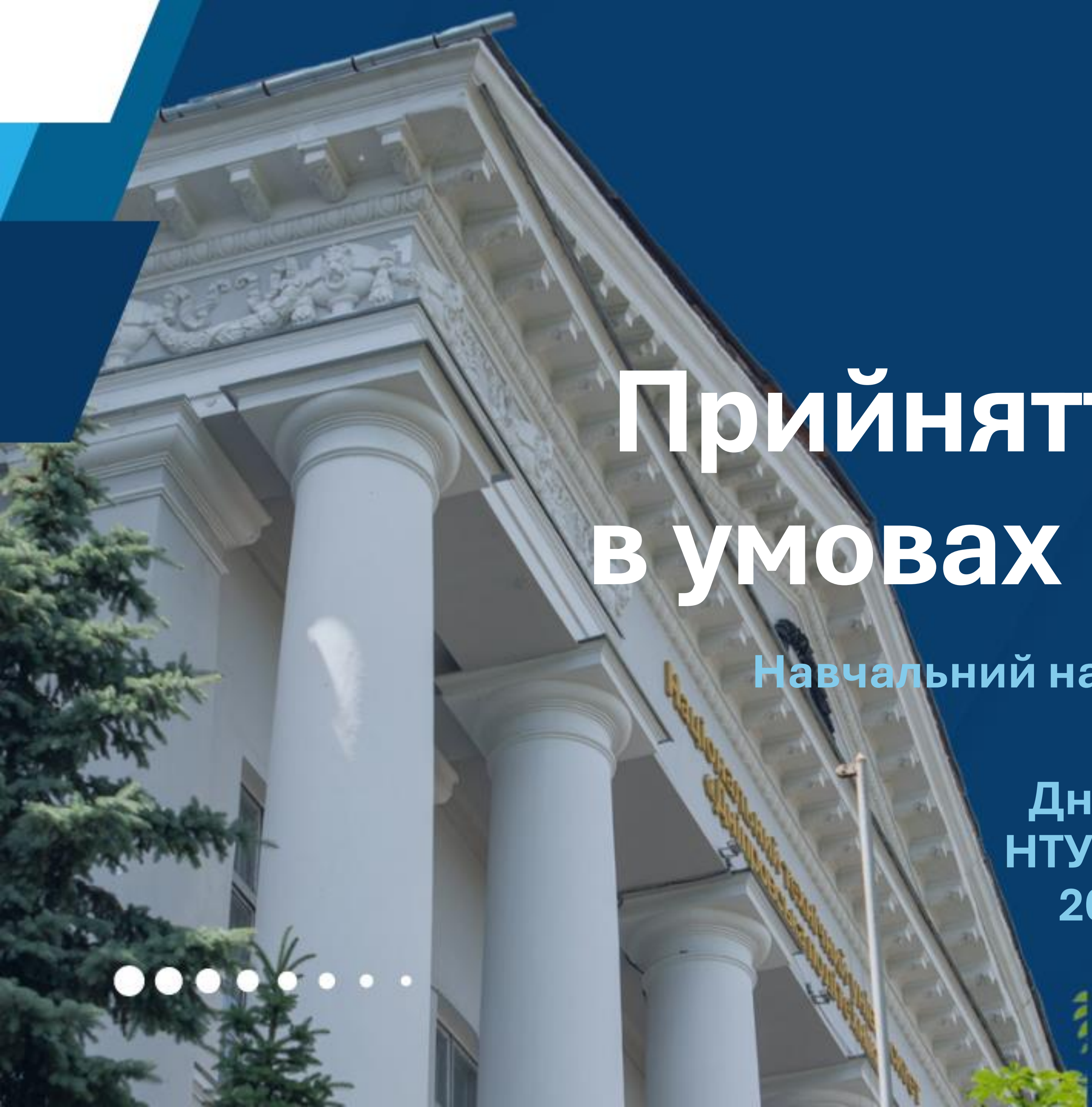


Національний технічний університет
ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА
1899

Прийняття рішень в умовах конфлікту

Навчальний наочний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»

С.А. Ус, О.Д. Станіна, М.М. Одновол

Прийняття рішень в умовах конфлікту

Навчальний наочний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

УДК 519.83
У 74

Рекомендовано
вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка» як навчальний наочний посібник
для здобувачів ступеня магістра спеціальності 124 Системний аналіз (протокол № 8 від 27.06.2024)

Рецензенти:

Двірна О. А. – канд. фіз.-мат. наук (Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»);

Пасічник А.М. – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське).

Ус С. А.

У74 Прийняття рішень в умовах конфлікту : навч. наоч. посіб. [Електронний ресурс] / С.А. Ус, О.Д. Станіна, М.М. Одновол ; Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – 146 с.

Розглянуто методи прийняття рішень в умовах конфлікту на основі теорії ігор. Подано загальні положення теорії ігор, охарактеризовано статичні ігри із повною інформацією, біматричні ігри, антагоністичні ігри в нормальній формі, методи теорії корпоративних ігор.

Посібник адресовано здобувачам ступеня магістра, які проходять підготовку за спеціальністю 124 Системний аналіз галузі знань 12 Інформаційні технології.

УДК 519.83

ЗМІСТ

Вступ

Науковий розгляд питань про вибір оптимальних рішень являє собою важливий аспект багатьох теоретичних та прикладних дисциплін. Із розвитком знань про цю сферу процеси прийняття рішень стають все більш формалізованими, потребують для свого опису математичних моделей і методів різних розділів дослідження операцій.

Серед умов прийняття рішень виділяють ті, що спричинені конфліктними ситуаціями. Актуальність їх вивчення зумовлена тим, що конфлікти можуть виникати в різних сферах діяльності й спілкування: у політиці, бізнесі, стосунках між людьми. Дослідження таких процесів потребує навичок аналізу ситуацій, оцінювання ризиків, прогнозування наслідків та вибору найкращих стратегій. Правильне застосування математичних методів підвищує ефективність прийнятих рішень, сприяє суттєвій мінімізації ризиків та досягненню оптимальних результатів у будь-яких справах, отже, зумовлює зменшення негативних впливів, спричинених конфліктами, покращення комунікації та зміцнення співпраці, що є важливим для стабільного розвитку та ефективного управління.

Вступ

Матеріал, поданий у посібнику, сприятиме досягненню таких результатів навчання:

- Спеціалізовані концептуальні знання, що включають сучасні наукові здобутки у сфері системного аналізу та інформаційних технологій і є основою для оригінального мислення та проведення досліджень.

- Застосовувати методи розкриття невизначеності в задачах системного аналізу, розкривати ситуаційні невизначеності та невизначеності в задачах взаємодії, протидії та конфлікту стратегій, знаходити компроміс при розкритті концептуальної невизначеності.

- Застосовувати методи машинного навчання та інтелектуального аналізу даних, математичний апарат нечіткої логіки, теорії ігор та розподіленого штучного інтелекту для розв’язування складних задач системного аналізу.

- Розробляти та застосовувати моделі, методи та алгоритми прийняття рішень в умовах конфлікту, нечіткої інформації, невизначеності та ризиків.

Історія та основні поняття теорії ігор

Моделі теорії ігор

1. Історія виникнення теорії ігор
2. Визначення і термінологія
3. Класифікація ігор
4. Поняття рішення в теорії ігор
5. Застосування теорії ігор

Теорія ігор

Теорія ігор - це теорія соціальної взаємодії, яка намагається пояснити взаємодію людей один з одним.

Теорія ігор розглядає людську взаємодію як гру.

Використовується у випадках, коли невизначеність ситуації обумовлена свідомими діями розумного супротивника, адже люди (організації) звичайно мають цілі, які суперечать цілям інших організацій-конкурентів.

Історичні факти

Статті Курно (Cournot, 1838), Буртрана (Bertrand, 1883) та Еджворта (Edgeworth, 1897) у яких розглядалися проблеми виробництва і ціноутворення в олігополії, потім стали класичними задачами теорії ігор.

Аналіз салонних ігор проводився ще у Давньому Китаї. Перші роботи, де це формулювалося як математична задача у XVII (Backet de Mezirak, Lion, 1612)

1912 Е. Цермело «Про застосування теорії множин до гри у шахи» (E. Zermelo, Obereine Anwendung der Mengenlehre attfdie Theorie des Schachspiels, Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge,1912), Cambridge University Press,1913, 501—504)). Показано, що у кожній позиції шахової партії один з гравців може форсовано виграти або забезпечити собі нічию, обираючи «правильні» відповіді на будь-який хід супротивника.

1944 - «The Theory of Games and Economic Behavior», Джон фон Нейманом та Оскар Моргенштерн

Творці теорії ігор

Оскар Моргенштерн

Джон фон Нейман

Джон Нэш

ДЖОН ФОН НЕЙМАН (1903 – 1957)

1928 року написав статтю «До теорії стратегічних ігор», в якій він довів теорему про мінімакс, що стала однією з основ створеної пізніше теорії ігор.

Ця стаття вийшла в результаті дослідження гри в покер двох партнерів та обговорення оптимальної стратегії для кожного з гравців.

Джон фон Нейман

ДЖОН НЕШ (1928 – 2015)

Значно розширив теорію ігор, допустивши ситуації, коли гравці не конкурують між собою, а кооперуються.

1950 – ввів поняття ситуації рівноваги, як метода розв’язування безкоаліційних ігор.

Джон Нэш

Основні поняття теорії ігор

1. Конфлікт
2. Прийняття рішення в конфлікті
3. Оптимальність прийнятого рішення

Основні поняття теорії ігор

Конфлікт - це всіляке явище, про яке можна сказати:

1) хто і як бере в ньому участь;
2) які його можливі виходи (результати);
3) хто в цих виходах зацікавлений;
4) в чому ця цікавість проявляється.

Гравці - це ті, хто бере участь у конфлікті.

Коаліції

Підмножини (групи) гравців, які є діючими сторонами конфлікту, - це **коаліція дії.**

Зацікавлені у виході конфлікту гравці утворюють **коаліцію інтересів.**

Коаліція інтересів

Коаліція дій

Коаліція дій

Кожна із коаліцій *K* може приймати деяке рішення із множини доступних для неї рішень S_k.

Елементи множини S_k називають **стратегіями** коаліції *K*.

Вибір кожною коаліцією своєї стратегії визначає **вихід (результат) конфлікту**.

Вихід може являти собою множину деяких явищ або випадкове явище.

Деякі стратегії коаліцій можуть бути *несумісними*. В цьому разі кажуть, що конфлікт є *нездійсненим*.

Всі виходи конфлікту називають **ситуаціями**.

Ситуація - це деяка множина всіх можливих комбінацій стратегій.

Коаліція інтересів

Зацікавленість проявляється в тому, що коаліція вважає деякі виходи більш прийнятними, ніж інші.

Переваги зазвичай описують у вигляді деякого відношення.

Це відношення задають, використовуючи *функцію виграшу коаліції* інтересів K.

$H_k(x)$ – це виграш, який отримує коаліція K у ситуації x.

Формальний запис гри

$$\Gamma = \left\{R_{\text{дій}}, \{S_k\}_{k \in R}, S, R_{\text{інт}}, "\succ_k", k \in R_{\text{інт}}\right\},$$

де

$R_{\text{дій}}$ – множина коаліцій дій,

S_k – стратегії коаліцій дій,

S – множина виходів

$R_{\text{інт}}$ – коаліція інтересів,

$"\succ_k"$ – відношення переваги на множині виходів,

Складності при формалізації процесу прийняття рішень

1) динамічний характер (рішення будується покроково). Стратегія конструюється залежно від обставин, які можуть бути невідомими на початку і змінюватися у ході гри;

2) аргументом функції стратегії є не реальний стан суб'єкта, а наше уявлення про нього, тобто це суб'єктивний показник.

Оптимальність

1) визначити точки $x \in M$, в яких значення функції не менше за їх значення в інших точках множини M

$$x \in M: \quad f(x) \geq f(y), \forall y \in M;$$

2) визначити такі точки x, що відхилення від них у межах множини M не збільшує значень функції

$$x \in M: \quad f(x) \geq f(y), \forall y \subset U(x) \subset M;$$

3) визначити таку множину P, що для будь яких $x, y \in R$ не може бути $f(x) > f(y)$, а для аби-якої точки $z \notin R$ існує точка $x \in R$ така, що $f(x) > f(z)$.

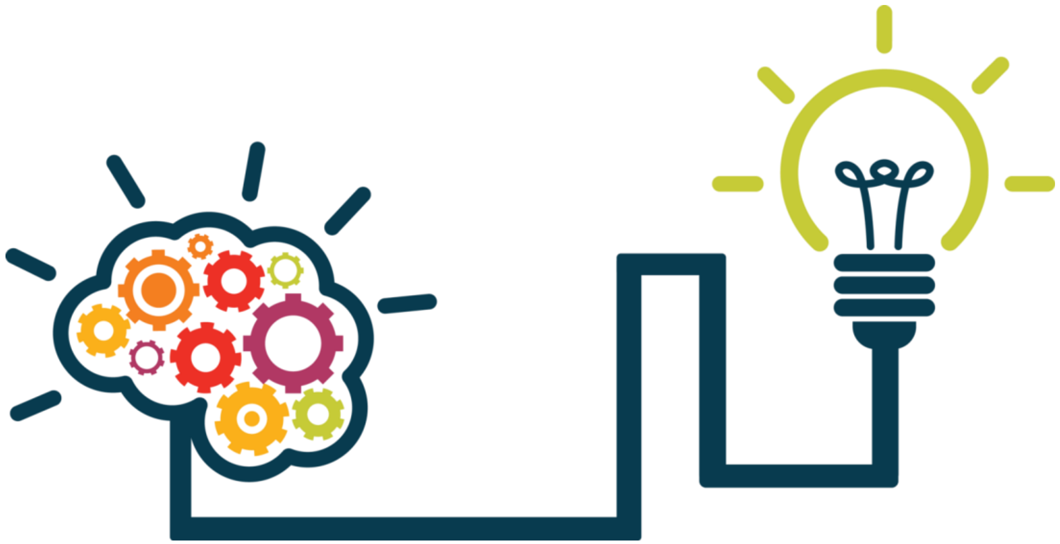
Приклад інтерактивної гри

У грі «Хто першим назве число 100» беруть участь двоє. Один називає будь-яке натуральне число від 1 до 9 включно. Другий додає до названого числа будь-яке натуральне число від 1 до 9, і називає нову суму.

До цієї суми перший також додає будь-яке натуральне число від 1 до 9, і називає суму. Виграє той, хто першим називає число 100. Який найкращий початок цієї гри?

Розв'язання

Як почати гру, не має значення. Другий гравець виграє, називаючи числа, які діляться на 10.



Класифікація ігор

1) **За коаліцією інтересів.**

Якщо множина коаліцій інтересів

- порожня - традиційна описова математика (ніхто не зацікавлений;
- містить лише один елемент - оптимізаційні задачі;
- два або більше елементів - з'являється конфлікт.

Класифікація ігор

2) **За коаліцією дій**

Коаліція дій

- порожня - не має сенсу, оскільки ніхто не може впливати на результат гри.
- містить лише одну коаліцію дій - **не стратегічні ігри.**

До них відносяться: кооперативні ігри, арбітражні схеми, теорія загроз, схеми ринку.

Схема такої гри:

- коаліція дій може створювати будь-яку ситуацію;
- коаліції інтересів на основі своїх відношень переваг висувають вимоги, які мають сенс принципу оптимальності;
- ситуація, яка відповідає цим вимогам, вважається оптимальною.

Оптимальна ситуація може бути не одна, а може і не існувати.

- більш ніж одна коаліція дій породжує **стратегічні ігри**

Класифікація ігор

Якщо Коаліції дій = Коаліції інтересів, то вони називаються *гравцями*

Такі ігри називають **безкоаліційними.**

$$\Gamma = \left\{ I, \{S_i\}, \{H_i\} \right\},$$

де

I – множина гравців;

S_i – стратегії гравців;

H_i – функції виграшів.

Якщо число гравців 2, а $H_1 = -H_2$ – це **антагоністичні** ігри.

Існують також **неантагоністичні** ігри.

Класифікація ігор

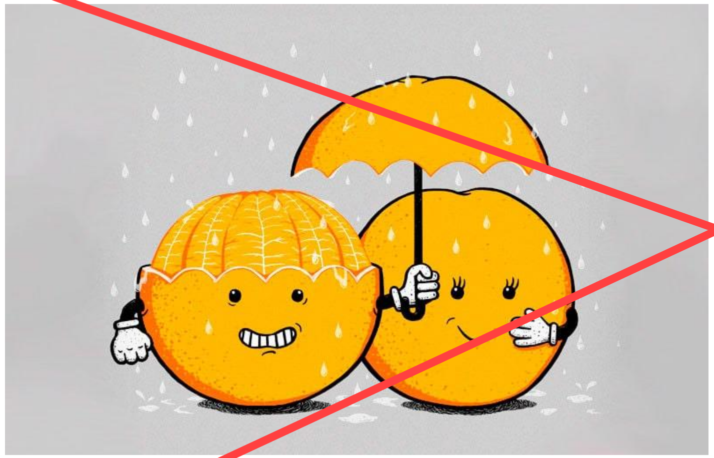
- За кількістю гравців (2 учасника або скінченне число n>2);
- За кількістю стратегій (скінченне / нескінченне число);
- За ступенем інформативності (повна / не повна інформація);
- За характером виграшів: гра з нульовою / ненульовою сумою;
- За можливістю попередніх переговорів та взаємодій між гравцями в ході гри (коаліційні, кооперативні, безкоаліційні ігри);
- Ігри з одночасним ходом;
- Ігри з послідовним ходом;
- Одноразові ігри;
- Ігри, які повторюються.

Основні питання теорії ігор

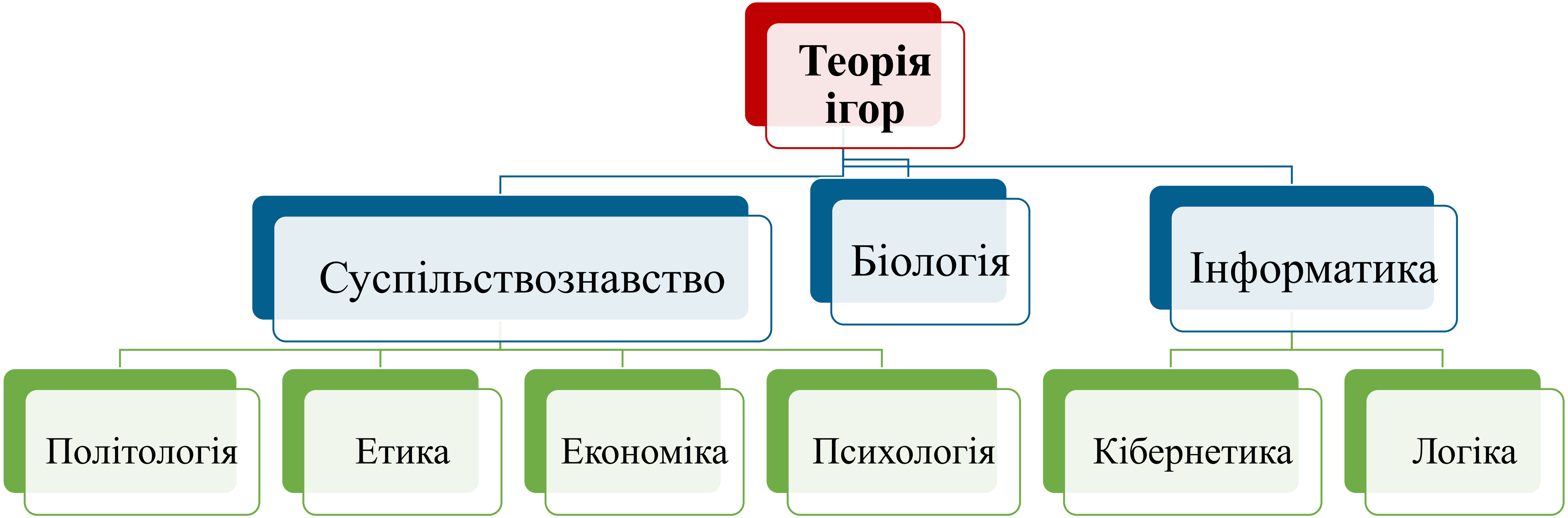
- Які принципи оптимальності необхідно застосовувати?
- Чи може даний принцип оптимальності бути застосований до даного класу ігор?
- У чому полягає застосування обраного принципу оптимальності до даної гри (класу ігор)?

Припущення

- гравці завжди діють таким чином, щоб прямо максимізувати свої виграші
- Альтруїстична та філантропічна поведінка не відповідають цій моделі



Застосування теорії ігор



Питання для самоконтролю

1. Що є предметом теорії ігор?
2. Назвіть основні питання, які постають у теорії ігор.
3. Яким чином визначають поняття рішення?
4. Які принципи оптимальності застосовують у теорії ігор?
5. Дайте визначення таких понять: конфлікт, коаліція дій, коаліція інтересів, гравець.
6. Які припущення висувають у теорії ігор?
7. Які види ігор визначають, залежно від коаліції дій? Коаліції інтересів?
8. Яким чином і за якими характеристиками здійснюють класифікацію ігор?
9. Які ігри називають стратегічними?
10. Які ігри називають кооперативними?

Позиційні ігри

Позиційні ігри

Гра починається із деякого даного положення і складається з особистих ходів, в кожному з яких гравець здійснює вибір з декількох можливих. Деякі ходи можуть бути випадковими (кидання грального кубику, тасування колоди карт).

Включають три елементи:

1. Послідовність ходів (особистих та випадкових),
2. Можлива недостатність інформації,
3. Функція виграшу.

- Шахи – немає випадкових ходів;

- Бридж – випадковість + майстерність гравця;

- Рулетка – випадковість

Під ***позиційною грою n гравців*** розуміємо:

- Топологічне дерево Г із визначеною вершиною А, - начальною позицією гри.
- Функція виграшу, що ставить у відповідність кожній кінцевій позиції (вершині) деякий n-вимірний вектор.
- Розбиття всіх некінцевих позицій дерева Г на n+1 підмножину $S_0, S_1 \ldots S_n$ які називаються множинами черги.
- Ймовірнісний розподіл для кожної позиції з S_0 на множині позицій, які безпосередньо випливають з неї.
- Розбиття множини S_i для кожного індекса $i = 1{,}2 \ldots n$ на підмножини S_i^j - які називаються *інформаційними множинами.*

Позиції з одної інформаційної множини повинні мати однакову кількість вершин, які з них випливають і не можуть випливати одна із одної.

Для кожної інформаційної множини S_i^j задано множину індексів I_i^j разом із взаємно-однозначним відображенням множини I_i^j на множину альтернатив з S_i^j.

Дерево гри

Г – топологічне дерево із визначеною вершиною А:

Вершина *C* *випливає* з вершини *B*, якщо послідовність ребер із *A* до *C* проходить через *B*.

Вершина *C* безпосередньо виходить із *B*, якщо вона випливає з *B* і існує ребро, що з’єднує *B* і *C*.

Вершина *X* називається **кінцевою**, якщо з неї не випливає жодна вершина.

Інформаційні множини повинні задовольняти такі умови:

1) містити вершини лише одного гравця;
2) кожна вершина може належати лише одному класу інформації;
3) вершини класу інформації відповідають лише одному часовому ходу;
4) з кожної з вершин, що становлять клас інформації, може виходити лише однакова кількість гілок.

Приклади дерева гри

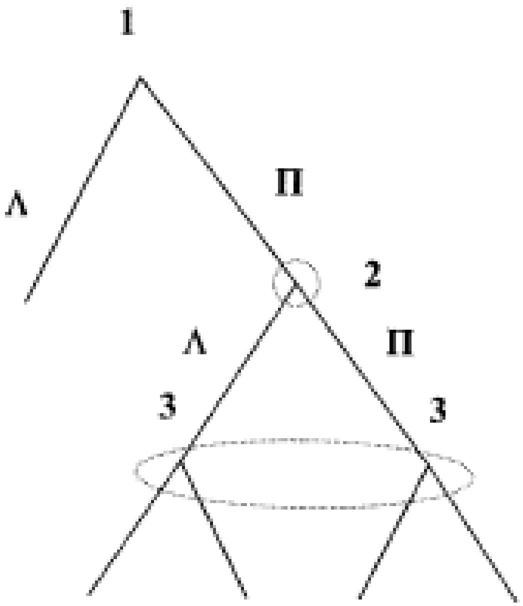


Рис.1

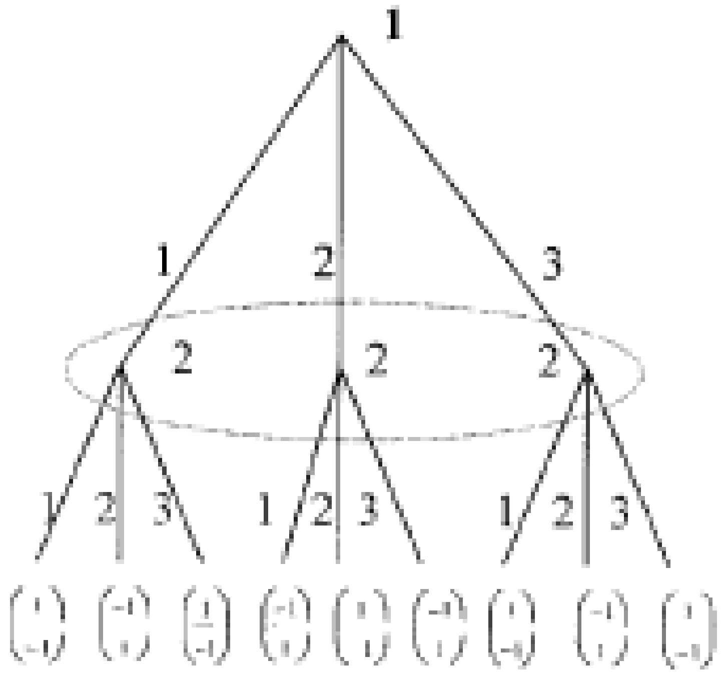
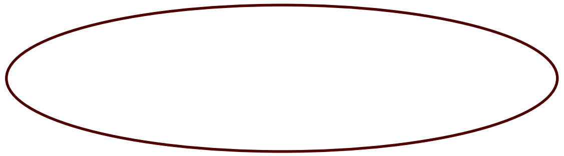


Рис.2



- Інформаційна множина

Неправильне задання інформаційних множин

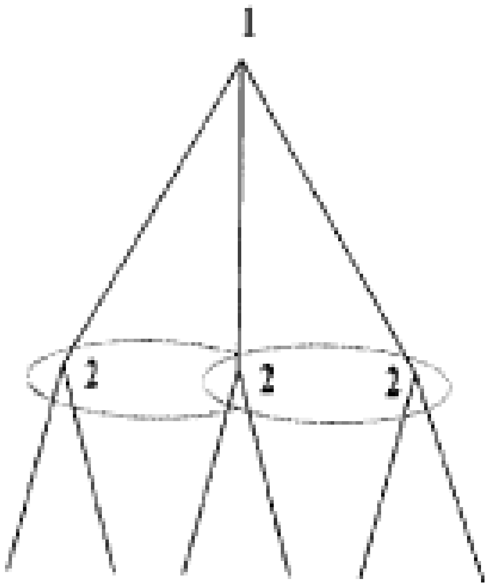


Рис.3. Інформаційні множини пересікаються

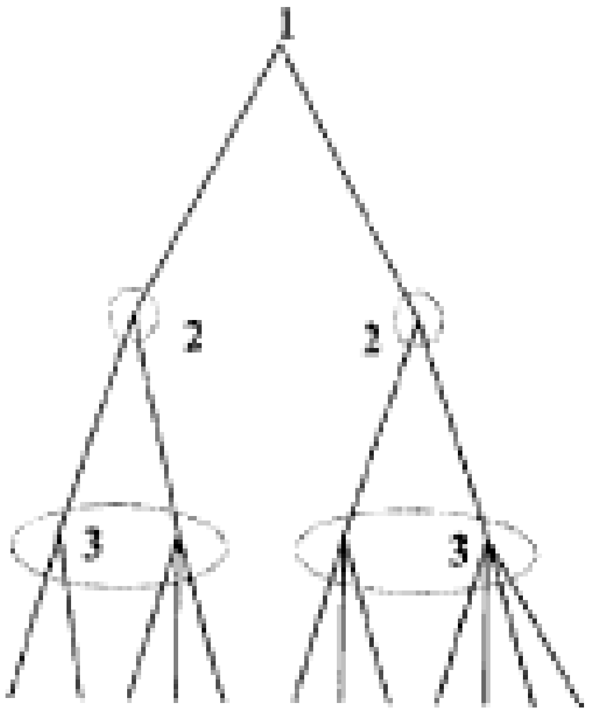


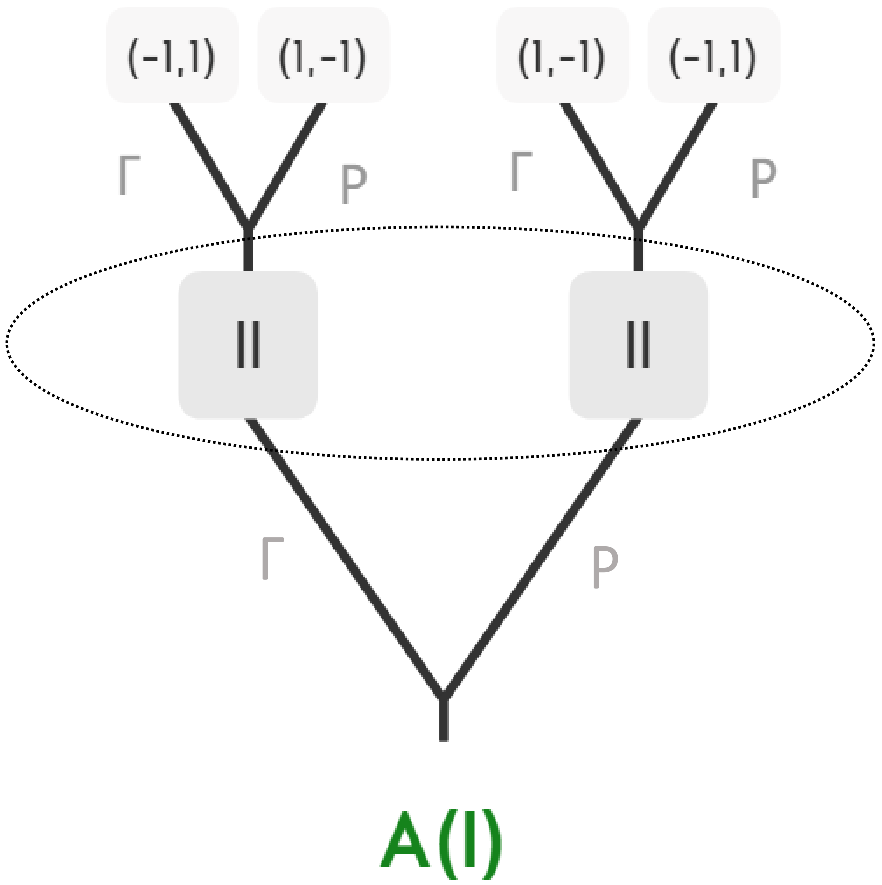
Рис.4. Вершини, які належать до однієї інформаційної множини мають різну кількість тих, що з них випливають

Приклад 1 - Гра в орлянку

Гравець 1 обирає Решітку (Р) або герб (Г).

Гравець 2 також обирає Р або Г не знаючи вибору гравця 1.

Якщо обидва гравці зробили однаковий вибір, то виграє гравець 2, інакше – гравець 1.



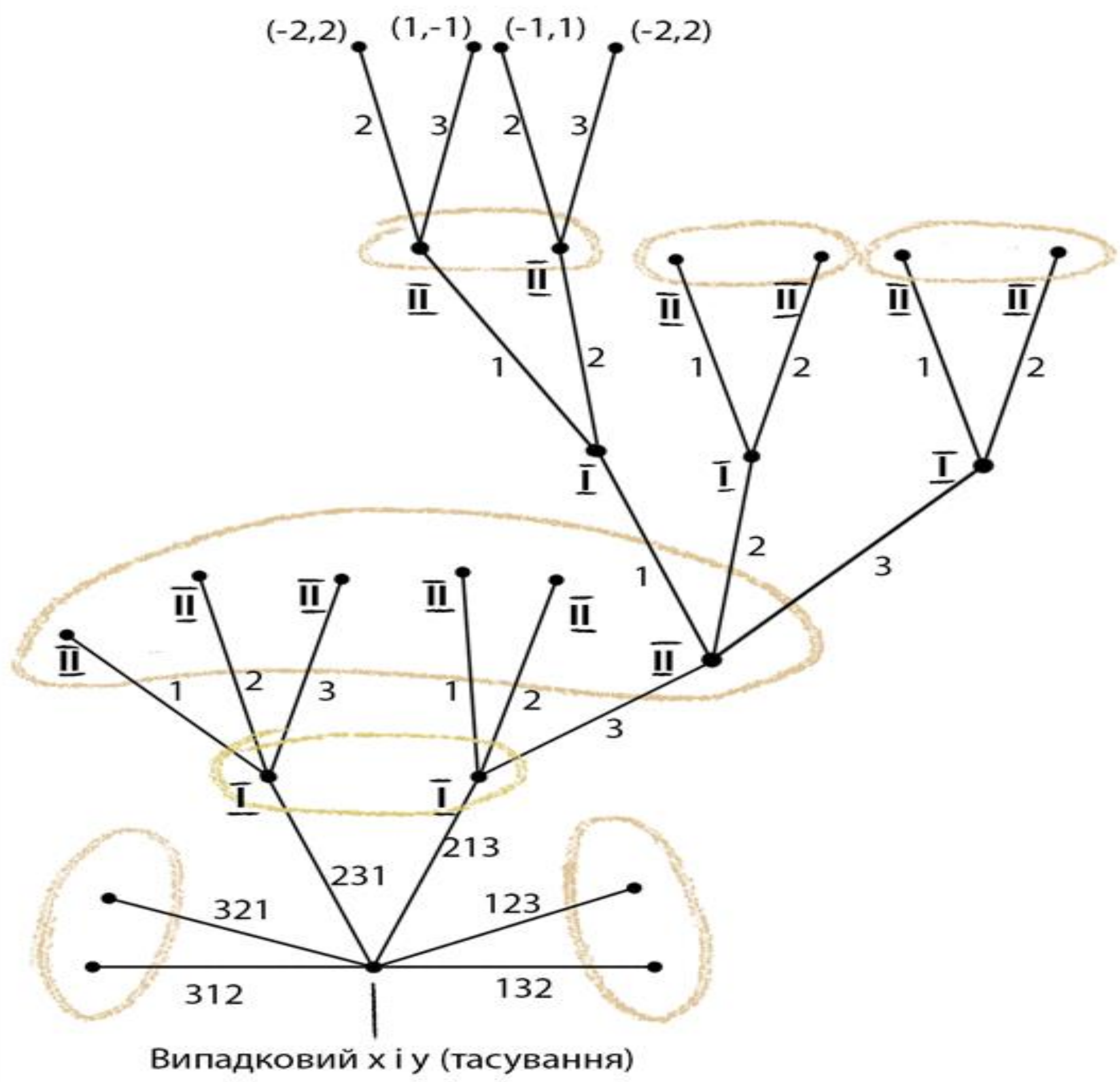
Гравець *і* має *повну інформацію* про гру Г, якщо кожна інформаційна множина складається лише з одного елемента.

ПРИКЛАД 2

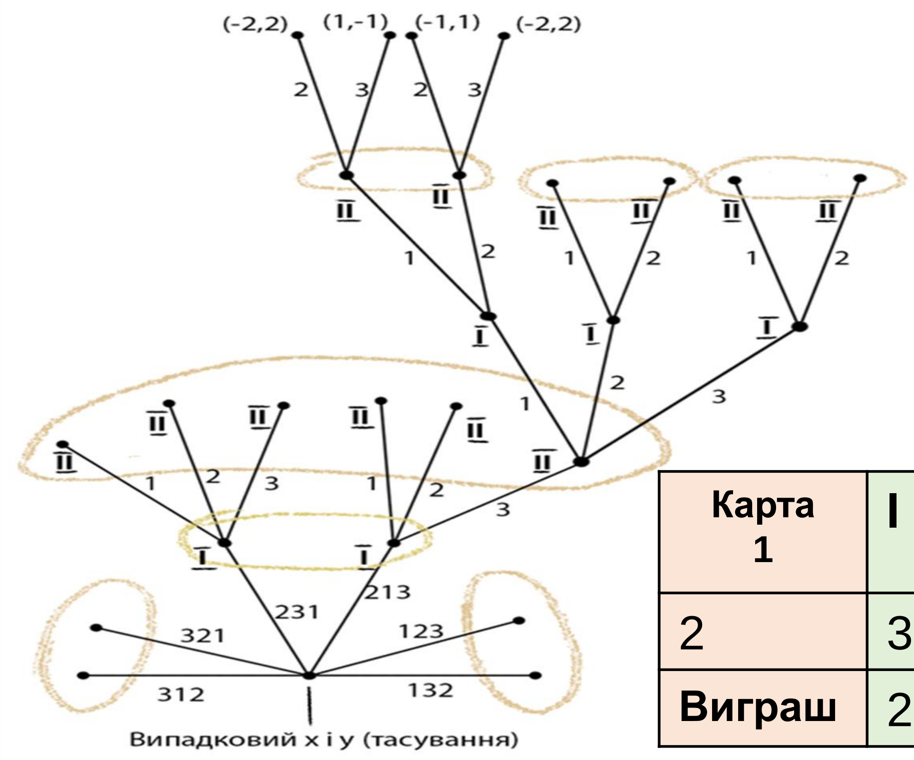
Кожному з двох гравців дають повну масть карт (13 карт). Третю масть тасують і потім відкривають одну карту. Гравці відкривають яку небудь зі своїх карт; хто відкрив найстаршу, «виграє» третю.

(Якщо обидва відкрили однакові – ніхто не виграє). Гра продовжується поки всі карти не будуть вичерпані.

Виграє гравець – який виграв найбільшу (за сумою очків) кількість карт.



ПРИКЛАД



Наприклад, карти відкриваються у такій послідовності:

2 1 3

Обчислення виграшів гравців для двох варіантів вибору показано у таблиці

Карта 1	**I**	**II**	**Карта 2**	**I**	**II**	**Карта 3**	**I**	**II**
2	3	1	1	1	2	3	2	3
Виграш	2				1			3

(-2;2)

Карта 1	**I**	**II**	**Карта 2**	**I**	**II**	**Карта 3**	**I**	**II**
2	3	1	1	1	3	3	2	2
Виграш	2				1			0

(1;-1)

Питання і завдання для самоконтролю

1. Які ігри називають позиційними? Наведіть приклади.
2. Яким чином можна задати позиційну гру?
3. Що являє собою інформаційна множина? Які правила існують для її визначення?
4. Яким чином визначається рішення у позиційній грі?
5. Двоє гравців грають у наступну гру. Є 6 камінців. Кожен із них по черзі бере або 1, або 2 камінчики. Програє той, хто взяв камінчик останнім. Побудуйте топологічне дерево для такої гри і розв’яжіть її.
6. Описати процес виконання контракту як динамічну гру. Визначити учасників гри (гравців), описати їх виграші. У скільки етапів розгортається гра? Чи можна збільшити/зменшити кількість етапів?
7. Описати процес прийняття робітника на роботу як динамічну гру. Скільки гравців є у побудованій вами грі? У скільки етапів розгортається гра? Які виграші гравців? Чи можна збільшити/зменшити кількість етапів?

Стратегічні ігри.
Нормальна форма гри

Стратегії

Визначення: Стратегія гравця *i* являє собою деяку функцію, що ставить у відповідність кожній інформаційній множині S_i^j цього гравця деякий індекс з I_i^j.

Ідеалізація:

- передбачаємо, що кожен гравець визначив свої ходи для кожної можливої ситуації;
- всі випадкові ходи об'єдуються в один хід.

σ_i – стратегія гравця *i*, $\Pi_i(\sigma_i \dots \sigma_n)$ – виграш гравця *i*, для деякого набору стратегій.

Ігри у нормальній формі

Гра у нормальній (стратегічній формі) являє собою трійку:

$$\{I, S = \prod_i \{S_i\}_{i \in I}, u = (u_1, u_2, \cdots u_n)\},$$

де $I = \{1,2, \dots n\}$ – множина гравців;

S_i – множина стратегій гравця $i = 1,2, \dots n$;

$u_i \colon S = \prod_i \{S_i\}_{i \in I} \to R^1$ функція виграша гравця i, яка ставить у відповідність кожному набору стратегій $s = (s_1, s_2, \cdots s_n)$ (ситуації) виграш цього гравця.

Ігри у нормальній формі

Для того щоб задати гру у нормальній формі, потрібно вказати

1. множину гравців.
2. множину можливих стратегій кожного гравця.
3. виграш, який одержить кожний з гравців.

У грі кожний гравець *I* вибирає одну стратегію з множини стратегій S. Виграш кожного гравця залежить як від обраної ним стратегії, так і від стратегій, обраних іншими гравцями.

Мета аналізу гри - зрозуміти, які стратегії гравці виберуть, в залежності від множини профілів стратегій S і профілю функцій виграшів u.

Ігри у нормальній формі

Припущення

1. *Всі гравці раціональні .*

Кожен з них розглядає альтернативи, які він має, формує уявлення, відносно невідомих параметрів, має чітко визначені переваги і обирає свої дії в результаті деякого процесу оптимізації.

2. *Обізнаність*

Всі гравці знають, що інші гравці також раціональні, що всі знають, що вони раціональні і т.д.

Крім того, всі гравці обізнані стосовно можливих альтернатив інших гравців.

Біматричні ігри

$I=\{1,2\}$, множини стратегій кожного гравця скінченні. Гру можна зобразити у вигляді матриці.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} s_2^1 & s_2^2 & \dots & s_2^n \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1^1 \\ s_1^2 \\ \dots \\ s_1^m \end{array} & \begin{pmatrix} (a_{11},b_{11}) & (a_{12},b_{12}) & \dots & (a_{1n},b_{1n}) \\ (a_{21},b_{21}) & (a_{22},b_{22}) & \dots & (a_{2n},b_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1},b_{m1}) & (a_{m2},b_{m2}) & \dots & (a_{mn},b_{mn}) \end{pmatrix} \end{array}$$

Або у вигляді двох матриць,

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Антагоністичні ігри

Коли $a_{ij} = -b_{\mathrm{ij}}$ для всіх індексів i, j, такі ігри називаються *антагоністичними.*

Скінченні антагоністичні ігри називаються *матричними.*

Антагоністичні ігри можна подати у вигляді однієї матриці

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Приклад 1 - Гра в «Орлянку»

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Стратегії гравця 2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Стратегії гравця 1</td><td></td><td>Р</td><td>Г</td></tr>
<tr><td>Р</td><td>(-1, 1)</td><td>(1, -1)</td></tr>
<tr><td>Г</td><td>(1, -1)</td><td>(-1, 1)</td></tr>
</table>

Матричне подання

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Гра є антагоністичною.

Приклад 2 - Ділема ув’язненого

Два бандити попалися поліції. Їх підозрюють у скоєнні пограбування. Слідчий пропонує кожному з них дати свідчення проти свого товариша. Ніяких доказів проти них немає. Вони сидять в різних камерах і позбавлені можливості спілкуватися один з одним.

Якщо ніхто з них не зізнається, то кожен проведе у в'язниці всього один рік за незаконне зберігання зброї.

Якщо один з них дасть свідчення, а інший промовчить, то той, хто промовчав, проведе у в'язниці десять років, а той, хто «розколовся», вийде на свободу.

Якщо обидва дали свідчення, то кожен отримає по вісім років.

		II	
	Стратегії	Мовчати	Зізнатися
I	Мовчати	(-1;-1)	(-10;0)
	Зізнатися	(0;-10)	(-8;-8)

Приклад 3 - «Сімейна суперечка»

Розглядається гра, в якій чоловік та дружина можуть вибрати одну з двох вечірніх розваг: футбольний матч чи театр.

Якщо вони мають різні бажання, то залишаються вдома. Чоловік віддає перевагу футбольному матчу, а дружина - театру. Проте обом набагато важливіше провести вечір разом, ніж брати участь у розвазі (хоча й кращій) одному.

Виграш кожного гравця визначається корисністю проведеного вечора і оцінюється за шкалою від 0 до 4.

«Сімейна суперечка»

Стратегії гравців		Дружина	
		Футбол	Театр
Чоловік	Футбол	4; 1	0; 0
	Театр	0; 0	1; 4

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4^* & 0 \\ 0 & 1^* \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1^* & 0 \\ 0 & 4^* \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}$$

Приклад 4 - Гра «Камінь, ножиці, папір»

Переможця визначають згідно з такими правилами:

- "ножиці" б'ють (розрізають) "папір";
- "папір" б'є (накриває) "камінь";
- "камінь" б'є (ламає) "ножиці".

Матриця гри:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Питання для самоконтролю

1. Які ігри називають стратегічними?
2. Дайте визначення стратегії.
3. Які елементи включає нормальна форма гри?
4. Які припущення висуваються при заданні гри у нормальній формі?
5. Які ігри називаються біматричними?
6. Які ігри називаються антагоністичними?
7. Наведіть приклад біматричної гри, антагоністичної гри.

Неантагоністичні ігри

Неантагоністичні ігри

1. Чисті та змішані стратегії.
2. Поняття про домінування стратегій
3. Раціоналізовані стратегії
4. Ситуації рівноваги

5.Методи знаходження рішень неантагоністичної гри у нормальній формі:

- вилучення домінованих стратегій. Рівновага у домінантних стратегіях,
- рівновага Неша,
- обережні стратегії,
- знаходження оптимуму Парето.

Змішані стратегії

Змішана стратегія σ_i являє собою ймовірнісний розподіл на множині чистих стратегій S_i.

Рандомізація кожним гравцем своїх чистих стратегій є статистично незалежною від рандомізації його опонентів.

Виграші, відповідні профілю змішаних стратегій – це очікуване значення виграшу відповідних чистих стратегій, які обираються із певною ймовірністю.

Якщо S_i – скінченна множина чистих стратегій гравця i, то змішана стратегія $\sigma_i : S_i \to [0;1]$ ставить у відповідність кожній чистій стратегії $s_i \in S_i$ ймовірність $\sigma_i(s_i) \geq 0$ того, що вона буде розігруватися, причому $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$.

Змішані стратегії

Виграш гравця i коли застосовано профіль (набор змішаних стратегій) σ обчислюється за такою формулою:

$$u_i(\sigma) = \sum_{s_i \in S_i} \left(\prod_{j}^{n} \sigma_i(s_i) \right) u_i(s)$$

Приклад. Для поданої нижче гри обчислити виграш гравців, коли вони застосовують свої змішані стратегії σ_1, σ_2

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} L & M & P \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ m \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} (4,3) & (5,1) & (6,2) \\ (2,1) & (8,4) & (3,6) \\ (3,0) & (9,6) & (2,8) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\sigma_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \qquad \sigma_2 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Відповідь: $u_1(\sigma) = 5.5, \quad u_2(\sigma) = 27/6$

Доміновані стратегії

Чиста стратегія s_i гравця i у грі Г **строго домінована,** якщо існує інша чиста стратегія $s_i{}'$ така, що що

$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \quad \forall\, s_{-i} \in S_{-i}. \tag{4.1}$$

В цьому випадку кажуть, що стратегія $s_i{}'$ **домінує** стратегію s_i.

Стратегія s_i **слабо домінована**, якщо існує така стратегія $s_i{}'$, що нерівність (4.1) виконується нестрого, але хоча б для одного набору стратегій вона виконується, як строга.

Раціоналізовані стратегії

Найкраща відповідь

Стратегія σ_i є *найкращою відповіддю* на набір стратегій опонентів σ_{-i}, якщо

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$$

Ніколи не найкраща відповідь

Стратегія σ_i є ніколи не найкращою відповіддю, якщо не існує набору σ_{-i} для якого вона була би найкращою відповіддю.

Стратегії, які залишаються після видалення ніколи не найкращих відповідей, називаються **раціоналізованими.**

Ситуації рівноваги

Визначення: Нехай задана гра Г, набір стратегій ($\sigma_1^*, \sigma_2^* \dots, \sigma_n^*$) є рівноважним, або *визначає ситуацію рівноваги*, якщо $\forall\, i, i = 1{,}2 \dots n$, та для $\forall\ \sigma_i^{\sim} \in \sum_i$ має місце така нерівність:

$$\Pi_i(\, \sigma_1^*, \dots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^{\sim}, \sigma_{i+1}^*, \dots, O_n^*) \leq \Pi_i(\, \sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*\,))$$

Методи знаходження рішень неантагоністичної гри у нормальній формі

Узгоджені стратегії

Розглянемо дві множини:
E- допустимі стратегії гравця 1,
F -допустимі стратегії гравця 2.
Пара $(x, y) \in E \times F$ називається **бістратегією**.

Механізм, який дозволяє гравцям обирати ті чи інші стратегії з усієї множини стратегій, складається з *правил прийняття ними відповідних рішень.*

Правило прийняття рішення першого гравця являє собою відображення C_E:F $\Rightarrow E,$ яке ставить у відповідність кожній стратегії супротивника $y \in F$ множину стратегій $x \in C_E(y)$, які може обрати перший гравець, коли він знає, що другий гравець обирає $y \in F$.

Правило прийняття рішення другого гравця – це відображення C_F:E $\Rightarrow F$, що ставить у відповідність кожній стратегії першого гравця $x \in E$ множину стратегій $y \in C_F(x)$, які може обрати другий гравець, за умови, що він знає вибір супротивника.

Визначення. Пара стратегій $(\bar{x}$,ȳ) таких, що $\bar{x} \in C_E(\bar{y})$ і $\bar{y} \in C_F(\bar{x})$ для правил прийняття рішень C_E і C_F гравців 1 і 2 відповідно, називається парою узгоджених стратегій (або узгодженою бістратегією).

Домінування стратегій

f – функція витрат

Стратегія $x_1 \in E$ домінує стратегію $x_2 \in E$ тоді і тільки тоді, коли

$$f_E(x_1, y) \le f_E(x_2, y), \qquad \forall y \in F$$

Мета кожного гравця полягає у мінімізації своїх витрат у рамках можливого.

f – функція, що описує корисність.

Стратегія $x_1 \in E$ домінує стратегію $x_2 \in E$ тоді і тільки тоді, коли

$$f_E(x_1, y) \ge f_E(x_2, y), \qquad \forall y \in F.$$

Мета кожного гравця полягає у максимізації своєї корисності у рамках можливого.

Якщо нерівність завжди виконується як строга , то говоримо про **строге домінування.**

Видалення домінованих стратегій

Доміновані рядки та стовбці можуть бути вилучені з матриці. Отримана після видалення оптимальна стратегія буде також оптимальною і для вихідної гри.
Видалення домінованих стратегій не завжли приводить до єлиного рішення, але дозволяє скоротити розмірність матриці, що полегшує її аналіз.

Увага ! При видаленні строго домінованих рядків та стовбців порядок вилучення не впливає на результат. У випадку слабкого домінування, порядок вилучення має значення і отриманий результат залежить від порядку видалення.

Приклад

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \quad L & \quad M & \quad R \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ m \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} (4,3) & (5,1) & (6,2) \\ (2,1) & (8,4) & (3,6) \\ (3,0) & (9,6) & (2,8) \end{pmatrix} \end{array}$$

У цій грі гравець 1 не має домінованих стратегій. Але незалежно від того, як грає гравець 1 стратегія R дає гравцю 2 строго більший виграш ніж стратегія M, тобто M строго домінована R, отже раціональний гравець не буде грати M. Знаючи це стратегію M можна видалити.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad L & \quad R \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ \cancel{m} \\ \cancel{d} \end{array} & \begin{pmatrix} (4,3) & (6,2) \\ \cancel{(2,1)} & \cancel{(3,6)} \\ \cancel{(3,0)} & \cancel{(2,8)} \end{pmatrix} \end{array}$$

У новій матриці стратегія *u* гравця 1 буде для нього краще ніж *m*, *d* . Отже, він не буде грати *m*, *d.*

Нарешті, якщо другий гравець знає, що перший не буде грати *m*, *d,* то тоді для нього краще грати стратегію *L*.

Отже, рішенням даної гри є пара стратегій (*u*, *L*).

Приклад (видалення слабо домінованих стратегій)

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ m \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (1,1) & (2,1) \\ (0,0) & (2,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

У цій грі стратегія u слабо домінується m, стратегія d слабо домінується m.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ m \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (1,1) & (2,1) \\ (0,0) & (2,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Якщо спочатку видалити u (слабо домінується m), а потім L (слабо домінується R). То у результаті залишиться пара (2,1) (другий гравець обирає R)

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ m \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (1,1) & (2,1) \\ (0,0) & (2,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Якщо спочатку видалити d (слабо домінується m), а потім R (слабо домінується L), то приходимо до виходу (1,1).

Некооперативна рівновага гри (оптимальна за Нешем)

Пара стратегій $(\bar{x}, \bar{y})$ є **некооперативною рівновагою** (оптимумом за Нешем) тоді і тільки тоді, коли одночасно виконуються такі рівності:

$$\begin{cases} f_E(\bar{x}, \bar{y}) = \inf\limits_{x \in E} f_E(x, \bar{y}), \\ f_F(\bar{x}, \bar{y}) = \inf\limits_{y \in F} f_F(\bar{x}, y). \end{cases}$$

$$\bar{C}_E(y) := \{\bar{x} \in E |\ f_E(\bar{x}, y) = \inf\limits_{x \in E} f_E(x, y)\}.$$

$$\bar{C}_F(x) := \{\bar{y} \in F |\ f_F(x, \bar{y}) = \inf\limits_{y \in F} f_F(x, y)\}.$$

Найкращі відповіді першого та другого гравців

Некооперативна рівновага – це ситуація, коли кожен гравець оптимізує власний критерій, вважаючи, що вибір його партнера фіксований. Це називається ситуацією **індивідуальної стійкості.**

У ситуації рівноваги за Нешем жодному з гравців не вигідно відхилятися від цієї стратегії, якщо партнер буде її притримуватись.

Алгоритм для знаходження рівноваги Неша (біматрична гра)

1. Для гравця 1 в кожному стовпчику – тобто для кожної його стратегії при фіксованій стратегії другого – відмічаємо найбільший виграш (його найкраща відповідь). Іншими словами, ми фіксуємо певну стратегію другого гравця і серед множини виграшів (які визначаються вже тільки вибраною стратегією першого гравця) вибираємо та позначаємо найбільше число.

2. Для гравця 2 відмічаємо у кожному рядку найбільший його виграш (найкраща відповідь на певну стратегію першого гравця).

3. Ті клітинки, де будуть відмічені обидва виграші, і будуть рівновагою Неша.

Приклад (функція описує витрати)

	B1	B2	B3	B4	Найкраща відповідь гравця 2
A1	(2,3)	(2,5)	(4,**1**)	(3,3)	B3
A2	(**1**,4)	(2,1)	(**0**,**-1**)	(**1**,5)	B3
A3	(**1**,**1**)	(**1**,3)	(2,4)	(3,3)	B1
Найкраща відповідь гравця 1	A2,A3	A3	A2	A2	

Маємо дві точки некооперативної рівноваги (рівновага за Нешем): (A2, B3) та (A3, B1)

Приклад (функція описує корисність)

	B1	B2	B3	B4	Найкраща відповідь гравця 2
A1	(4,1)	(2,2)	(-1,1)	(3,3)	B4
A2	(2,3)	(2,1)	(0,6)	(1,2)	B3
A3	(1,4)	(1,2)	(3,-4)	(2,3)	B1
Найкраща відповідь гравця 1	A1	A1, A2	A3	A1	

Маємо одну точки некооперативної рівноваги (рівновага за Нешем): (A1, B4)

Обережні стратегії

Обережні стратегії відповідають ситуації, коли кожен гравець обирає **найкраще рішення у найгіршій для себе ситуації.**

У випадку коли гра описується функцією витрат, це означає що кожен гравець обирає мінімільні витрати із максимальних, які можуть виникнути у кожній з ситуацій.

$f_E^{\#}(x^{\#}) = \inf\limits_{x\in E} f_E^{\#}(x),$ де $f_E^{\#}(x) = \sup\limits_{y\in F} f_E(x,y)$ $\quad f_F^{\#}(y) := \sup\limits_{x\in E} f_F(x,y)$

$$v_E^{\#} := \inf_{x\in E}\sup_{y\in F} f_E(x,y) = \inf_{x\in E} f_E^{\#}(x)$$

$$v_F^{\#} := \inf_{y\in F}\sup_{x\in E} f_F(x,y) = \inf_{y\in F} f_F^{\#}(y)$$

Обережні стратегії першого та другого гравців

вектор $\vec{v}^{\#} = (v_E^{\#}, v_F^{\#})$ є **гарантованим вектором** гри.

Обережна стратегія задає мінімальну величину виграшу, який гравець може собі гарантувати, якщо буде її притримуватись. Це стратегія дій у антагоністичному середовищі.

Алгоритм знаходження обережних стратегій (вигоди)

1. Для кожної стратегії обраного гравця знаходимо мінімальне значення його виграшу;
2. Серед всіх стратегій обираємо ту, яка забезпечує максимальне значення мінімального виграшу.

Алгоритм знаходження обережних стратегій (витрати)

1. Для кожної стратегії обраного гравця знаходимо максимальне значення його витрат;
2. Серед всіх стратегій обираємо ту, яка забезпечує мінімальне значення максимальних витрат.

Алгоритм не залежить від виграшу (витрат) інших гравців, а визначається лише і виключно виграшами (витратами) гравця, який розглядається.

Приклад (функція описує витрати)

Обережна стратегія гравця 2

Обережна стратегія гравця 1

	B1	B2	B3	B4	Найгірше значення для гравця 1 (max)	
A1	(2,3)	(2,5)	(4,1)	(3,3)	4	
A2	(1,4)	(2,1)	(0,-1)	(1,5)	**2**	**min**
A3	(1,1)	(1,3)	(2,4)	(3,3)	3	
Найгірше значення для гравця 2 (max)	**4**	5	**4**	5		

min

Обережна стратегія гравця 1 - А2, обережні стратегії гравця 2 - В1, В3.

Маємо два гарантовані вектори гри: (А2, В1) та (А2, В3)

Приклад (функція описує корисність)

Обережна стратегія гравця 2

Обережна стратегія гравця 1

	B1	B2	B3	B4	Найгірше значення для гравця 1 (min)	
A1	(4,1)	(2,2)	(-1,1)	(3,3)	-1	
A2	(2,3)	(2,1)	(0,6)	(1,2)	0	
A3	(1,4)	(1,2)	(3,-4)	(2,3)	1	**max**
Найгірше значення для гравця 2 (min)	1	1	-4	2		
				max		

Обережна стратегія гравця 1 - A3, обережна стратегія гравця 2 - B4

Гарантований вектор гри: (A3, B4)

Парето-оптимальні стратегії

Пара стратегій $(x^*, y^*) \in E \times F$ називається **оптимальною за Парето** (або **Парето-оптимальною**), якщо не існує інших пар стратегій $(x, y) \in E \times F$ таких, що виконуються нерівності:

$$f_E(x,\ y) \leq f_E(x^*, y^*)$$

$$f_F(x,\ y) \leq f_F(x^*, y^*),$$

і хоча б одна з них строга.

Це означає, що не можна зменшити витрати (збільшити виграш) одного гравця, не збільшивши їх для іншого.

Стратегії, оптимальні за Парето відповідають ситуації **кооперативної стійкості.**

Загальних процедур, які описують знаходження оптимуму за Парето немає.

Рекомендовані правила

Обираємо певну клітинку в таблиці, яка задає виграші, і, перебираючи всі інші клітинки, порівнюємо значення виграшів гравців між собою. Якщо в якійсь клітинці можлива ситуація, коли обом гравцям вигідно перейти в цю позицію – то цю, клітину відкидаємо. Вона не може бути Парето-оптимумом, оскільки можливим є одночасне поліпшення виграшів для обох гравців.

Також для випадку, коли можливе одночасне погіршення виграшу для обох гравців разом – це не може бути оптимумом Парето.

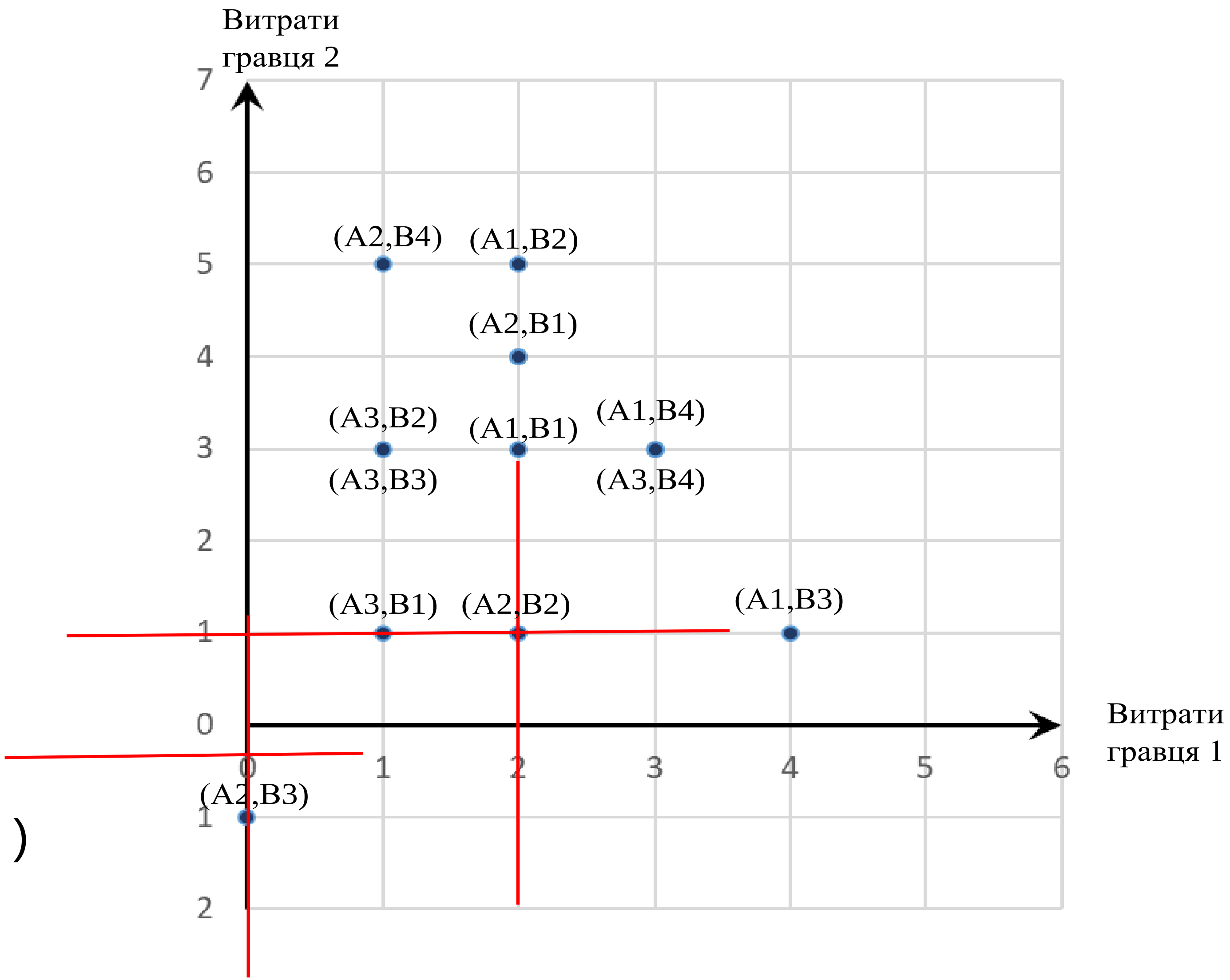
Якщо ж є така клітинка, в якій поліпшення (збільшення!) виграшу одного із гравців можливе лише тільки за умови погіршення (зменшення!) виграшу іншого гравця, і це буде виконуватись для кожної іншої клітинки – то це будуть стратегії, які задають оптимум Парето.

Приклад (функція описує витрати)

	B1	B2	B3	B4
A1	(2,3)	(2,5)	(4,1)	(3,3)
A2	(2,4)	(2,1)	(0,-1)	(1,5)
A3	(1,1)	(1,3)	(2,4)	(3,3)

Геометрично – стратегії, які є кращими за обрану пару знаходяться нижче і лівіше тієї що розглядається.

Парето оптимальне рішення (A2, B3)



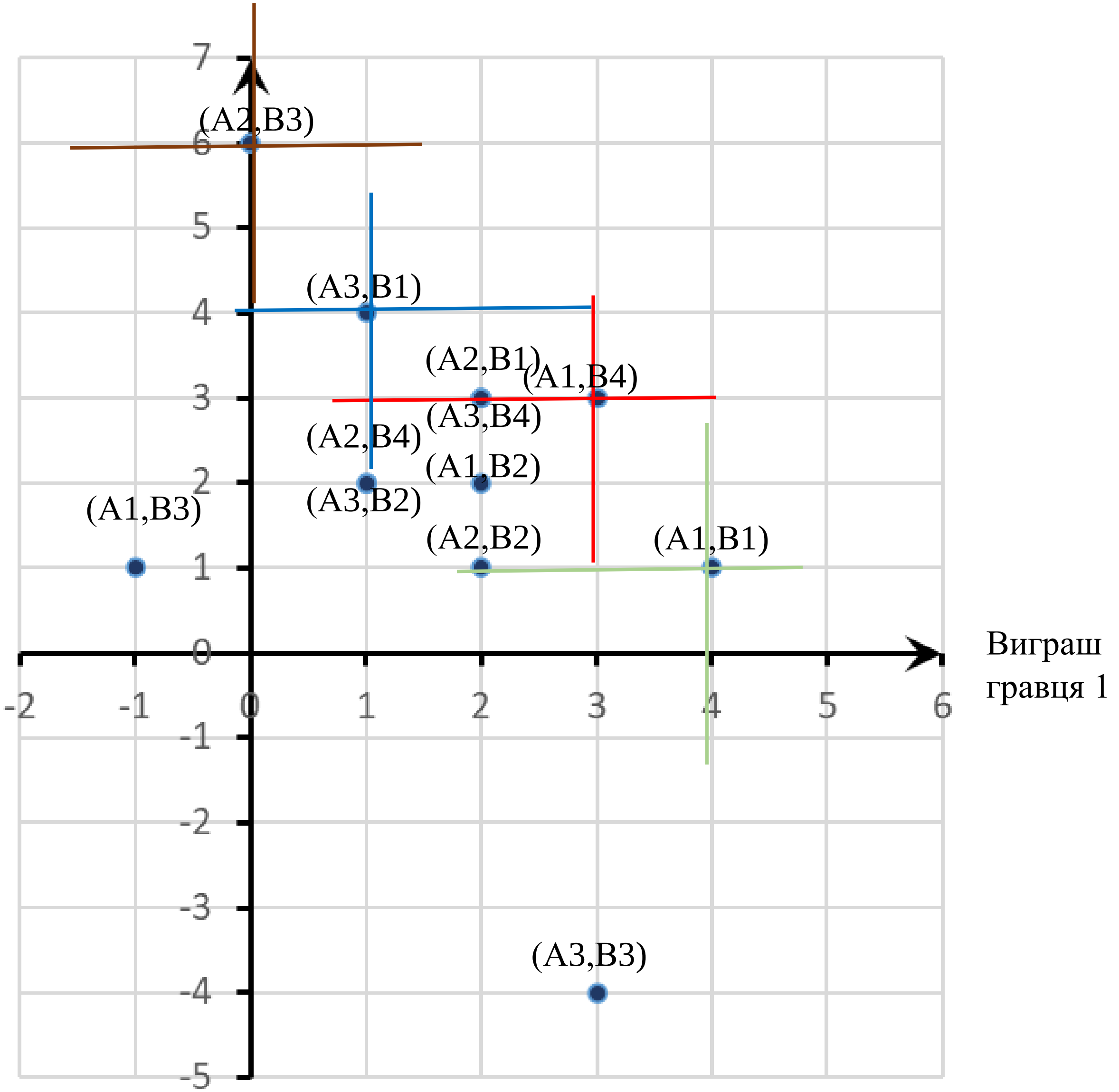
Приклад (функція описує корисність)

	B1	B2	B3	B4
A1	(4,1)	(2,2)	(-1,1)	(3,3)
A2	(2,3)	(2,1)	(0,6)	(1,2)
A3	(1,4)	(1,2)	(3,-4)	(2,3)

Геометрично – стратегії, які є кращими за обрану пару знаходяться вище і праворуч від тієї,що розглядається. Множина Парето оптимальних альтернатив це фактично альтернативи, що знаходяться на північно-східній межі множини, за виключенням горизонтальних і вертикальних ліній.

Парето оптимальні рішення

(A1, B1), (A1, B4), (A2, B3), (A3, B1)



Віртуальний мінімум (максимум) гри

$$f_E(\hat{x},\hat{y}) = \inf_{\substack{x\in E \\ y\in F}} f_E(x,y) =: \alpha_E \qquad f_F(\breve{x},\breve{y}) = \inf_{\substack{x\in E \\ y\in F}} f_F(x,y)\alpha_F$$

Якщо пара стратегій $(\tilde{x},\tilde{y})$ мінімізує на $E \times F$ одразу обидві функції витрат f_E і f_F, то вона є кращим кандидатом на роль розв'язку. В цьому випадку $\alpha_E = f_E(\tilde{x},\tilde{y})$ і $\alpha_F = f_F(\tilde{x},\tilde{y})$, що буває тільки у виключних випадках. Тому вектор $\vec{\alpha} := (\alpha_E, \alpha_F) \in R^2$ називається **віртуальним мінімумом гри.**

Бістратегії $(\hat{x},\hat{y})$ і $(\breve{x},\breve{y})$ являють собою **альтруїстичну поведінку** гравців.

Приклади

Витрати

	B1	B2	B3	B4
A1	(2,3)	(2,5)	(4,1)	(3,3)
A2	(1,4)	(2,1)	(0,-1)	(1,5)
A3	(1,1)	(1,3)	(2,4)	(3,3)

Віртуальний мінімум першого гравця (0) при альтруїстичній стратегії другого гравця B3.

Віртуальний мінімум другого гравця – (-1) при альтруїстичній стратегії першого гравця A2.

Наявний віртуальний мінімум (A2, B3)

Корисність

	B1	B2	B3	B4
A1	(4,1)	(2,2)	(-1,1)	(3,3)
A2	(2,3)	(2,1)	(0,6)	(1,2)
A3	(1,4)	(1,2)	(3,-4)	(2,3)

Віртуальний максимум першого гравця (4) при альтруїстичній стратегії другого гравця B1.

Віртуальний максимум другого гравця – (6) при альтруїстичній стратегії першого гравця A2.

Маємо такі пари: (A1, B1), (A2, B3)

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення неантагоністичної гри.
2. Дайте визначення змішаної стратегії.
3. Який сенс мають змішані стратегії гри?
4. За якіх умів біматричних гра має декілька оптимальних розв'язків?
5. Як на практиці реалізувати вибір гравцем змішаної стратегії?
6. Якщо гра має оптимальний розв'язок у чистих стратегіях, чи має вона оптимальний розв'язок у змішаних стратегіях?
7. Які стратегії називають строго домінованими? Слабо домінованими?
8. Чи впливає порядок видалення домінованих стратегій на результат гри?
9. Які стратегії називають раціоналізованими?
10. Чим відрізняються захисна та рівноважена стратегії?
11. Які підходи застосовують до визначення оптимальних стратегій гравців?
12. Опишіть метод вилучення домінованих стратегій.
13. Чи завжди існує рівновага у домінантних стратегіях?
14. Дайте визначення рівноваги Неша у чистих стратегіях, у змішаних стратегіях.
15. Опишіть алгоритм знаходження рівноваги Неша у чистих стратегіях.
16. Які стратегії називають обережними?
17. Опишіть алгоритм визначення обережних стратегій.
18. Які стратегії будуть оптимальними за Парето?
19. Які особливості розв’язування біматричних ігор 2х2.
20. Як визначаються бістратегії, які утворюють некооперативного рівновагу?
21. Як визначаються бістратегії, які утворюють кооперативні рівновагу?
22. Яким чином визначають гарантований та віртуальний вектори гри?

Антагоністичні ігри
в нормальній формі

Антагоністичні ігри у нормальній формі

1. Формалізація антагоністичної гри.

2. Методи знаходження рішень антагоністичної гри у нормальній формі

   - Сідлова точка.
   - Геометричний метод для 2×n та m ×2 ігор,
   - Лінійне програмування
   - Метод Брауна-Робінсон
   - Розв’язування ігор 2 ×2

Антагоністичні ігри

Біматрична гра двох гравців така, що для будь-яких стратегій *i*, *j* виконується рівність:

$$\alpha_j + \beta_k = const,$$

може бути задана за допомогою однієї матриці і тому такі ігри називають *матричними іграми із постійною сумою* або просто *матричними.*

Матричні ігри з нульовою сумою називають ***антагоністичними.***

Нормальна форма матричної гри з матрицею *A* позначається через Γ_A, вона являє собою платіжну матрицю *A*.

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Антагоністичні ігри

Матрична гра двох гравців з нульовою сумою може розглядатися як подана нижче абстрактна гра двох гравців.

Перший гравець має *m* стратегій $i = 1,2, \dots m$, другий − *n* стратегій $j = 1,2, \dots n$. Кожній парі стратегій (*i*, *j*) поставлено у відповідність число a_{ij}, яке описує виграш гравця 1 за рахунок гравця 2, якщо перший гравець вибере свою *i*-ту стратегію, а гравець 2 − свою *j*-ту стратегію.

Кожен із гравців робить один хід: гравець 1 вибирає свою *i*-ту стратегію ($i = 1,2, \dots m$), гравець 2 − свою *j*-ту стратегію ($j = 1,2, \dots n$), після чого гравець 1 отримує виграш a_{ij} за рахунок гравця 2 (якщо $a_{ij} < 0$, то це означає, що перший гравець платить другому суму $|a_{ij}|$ на цьому гра закінчується.

Максимінна стратегія

Визначення. Число $\underline{\alpha}$, що визначається за такою формулою:

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0 j_0} = \underline{\alpha}.$$

називається *нижньою чистою ціною гри* і показує, який мінімальний виграш може гарантувати собі гравець 1, застосовуючи свої чисті стратегії за будь-яких дій гравця 2.

Величина $\underline{\alpha}$ називається також *максиміном*, принцип побудови стратегії i_0, заснований на максимізації мінімального виграшу, − *принципом максиміну,* а вибрана відповідно до цього принципу стратегія i_0 − *максимінною* або *захисною стратегією* гравця 1.

Застосовуючи свої чисті стратегії гравець 1 може забезпечити собі виграш не менше $\underline{\alpha}$.

Мінімаксна стратегія

Визначення. Число $\overline{\alpha}$, визначене за формулою:

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i_1 j_1} = \overline{\alpha}.$$

називається *чистою верхньою ціною гри* і показує, який максимальний виграш за рахунок своїх стратегій може собі гарантувати гравець 1.

Число $\overline{\alpha}$ називається також *мінімаксом.* При цьому принцип побудови стратегії j_1, заснований на мінімізації максимальних втрат, називається *принципом мінімакса,* а вибрана відповідно до цього принципу стратегія j_1 − *мінімаксною* або *захисною* стратегією гравця 2.

Застосовуючи свої чисті стратегії гравець 2 може не допустити виграш гравця 1 більше, ніж $\overline{\alpha}$.

Сідлові точки

Сідлова точка − елемент $a_{i_0 j_0}$ визначається парою чистих стратегій (i_0, j_0) гравців 1 та 2 відповідно, при застосуванні яких досягається рівність: $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$.

$\underline{\alpha} = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} = a_{i_0 j_0}$ - нижня ціна гри, $\overline{\alpha} = \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} = a_{i_0 j_0}$ - верхня ціна гри.

Сідловий елемент $a_{i_o j_o}$, є мінімальним в *i*-му рядку і максимальним у *j*-му стовпці матриці *A*.

Якщо гра має сідлову точку, то стратегії, які її утворюють, будуть оптимальними стратегіями гравців 1 та 2 відповідно.

Пошук сідлової точки матриці *A* відбувається таким чином:

у матриці *A* послідовно в кожному рядку знаходять мінімальний елемент і перевіряють, чи є цей елемент максимальним у своєму стовпці. Якщо так, то він і є сідловим елементом, а пара стратегій, яка йому відповідає, утворює сідлову точку.

Приклад

	B1	B2	B3	$\min\limits_j a_{ij}$
A1	1	-3	-2	-3
A2	0	5	4	0
A3	2	3	2	**2**
$\max\limits_i a_{ij}$	**2**	5	4	

$$\underline{\alpha} = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\overline{\alpha} = \min_j \max_i a_{ij}$$

Сідловою точкою є пара (A3; B1), коли ціна гри $v = \underline{\alpha} = \overline{\alpha} = 2.$

Геометричний метод для 2×n та m ×2 ігор

Розглянемо (2×*n*) –гру

Припустимо, перший гравець має дві чисті стратегії – A_1, A_2, а супротивник – *n* чистих стратегій: B_1, B_2, ..., B_n. Тоді змішана стратегія першого гравця має такий вигляд:

$$p = (x, (1-x)),\ \text{де } 0 \leq x \leq 1.$$

Другий гравець при використанні своєї *j*-ї чистої стратегії проти змішаної стратегії *p* першого гравця отримує виграш: $y_j = a_{1j} \cdot x + a_{2j} \cdot (1-x)$, де $j = 1,2,\dots n$. Отже, виграш другого гравця є лінійною функцією від змішаної стратегії першого гравця.

Для знаходження значення гри і оптимальної змішаної стратегії першого гравця достатньо на відрізку [0,1] побудувати графіки сімейства лінійних функцій

$$y_j = a_{1j} \cdot x + a_{2j} \cdot (1-x),\ \text{де } j = 1,2,\dots n,$$

та знайти точку максимуму x^0 функції $\min_{1\leq j\leq n}(a_{1j}x + a_{2j}(1-x))$ – нижньої обвідної сімейства.

Приклад розв'язування 2×n гри

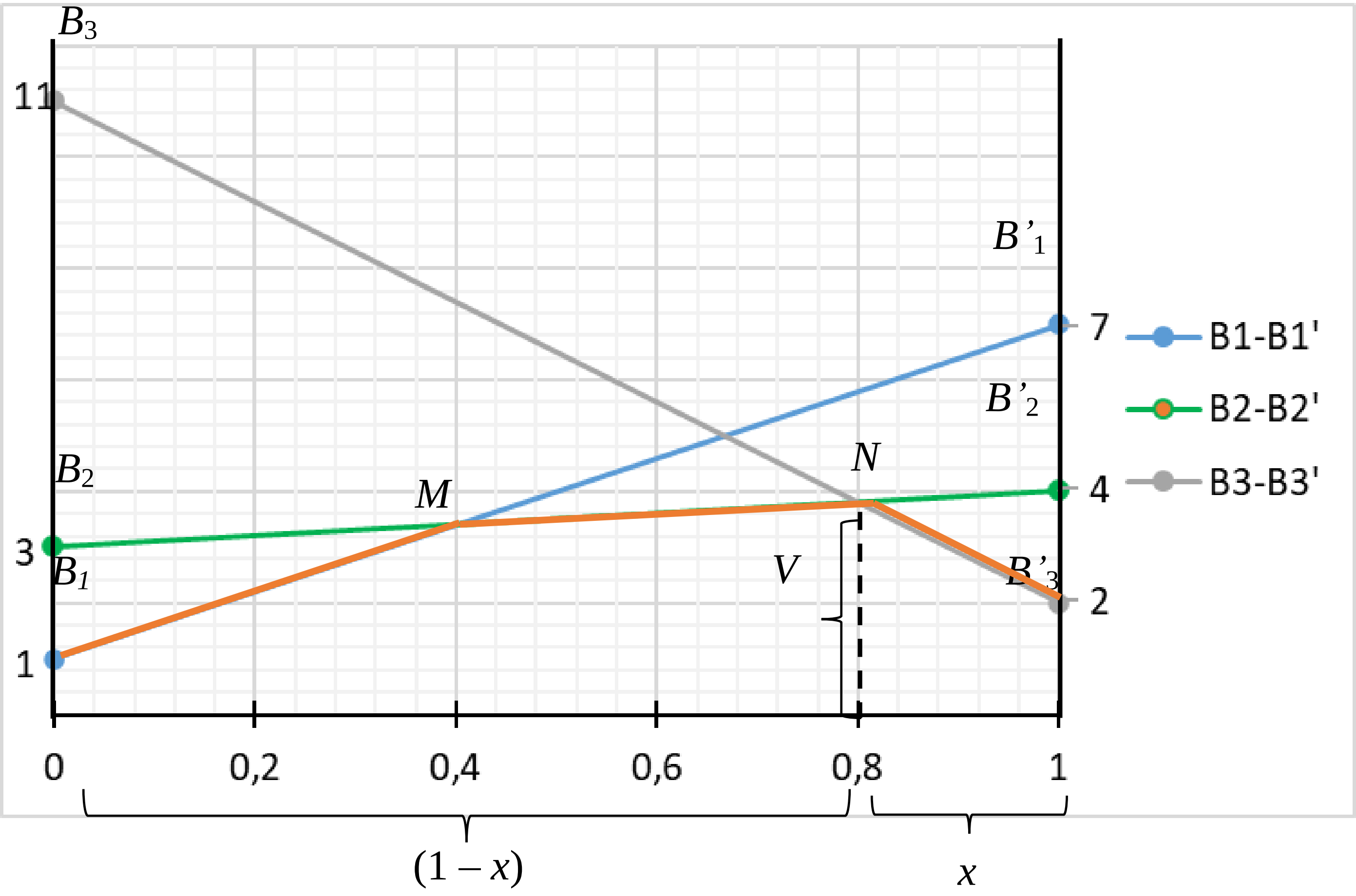
$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x + 4(1-x) = v \\ 11x + 2(1-x) = v \end{cases} \Rightarrow\ x = 0{,}2, v = 3{,}8.$$

$X = (0{,}2;\ 0{,}8)$, при ціні гри $v = 3{,}8$.

$$\begin{cases} 3y + 11(1-y) = v \\ 4y + 2(1-y) = v \end{cases} \Rightarrow\ y = 0{,}9,$$

$Y = (0;\ 0{,}9;\ 0{,}1)$.



Зведення матричних ігор до задач лінійного програмування

Матрична гра являє собою антагоністичну гру двох осіб з платіжною матрицею $A_{m\times n} = [a_{ij}]$.

Змішані стратегії являють собою ймовірнісні розподіли на множині чистих стратегій:
$\bar{p} = (p_1,\ldots,p_m)^T$– змішана стратегія першого гравця, $\bar{q} = (q_1,\ldots,q_n)^T$– змішана стратегія другого гравця, $\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Ціна гри (оптимальне очікуване значення) $V = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{\text{ij}} p_i^0 q_j^0$,
де $\bar{p}_0 = (p_1^0,\ldots,p_m^0)^T$ і $\bar{q}_0 = (q_1^0,\ldots,q_n^0)^T$.

Теорема 1. Для того, щоб число V було ціною гри, а вектори $\bar{p}_0 = (p_1^0,\ldots,p_m^0)^T$ та $\bar{q}_0 = (q_1^0,\ldots,q_n^0)^T$ були векторами ймовірностей оптимальних стратегій, необхідно і достатньо, щоб виконувалась така система нерівностей:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^0 \geq V, \quad j = 1,2,\ldots,n, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0 \leq V, \quad i = 1,2,\ldots,m. \end{cases}$$

Задачу максимізації гарантованого виграшу першого гравця та задачу гарантованого програшу другого гравця можна представити як пару взаємно двоїстих задач лінійного програмування.

Задача гравця 1:

$Z^* = V \to \max;$

$\sum_{i=1}^{m} p_i^0 a_{ij} \geq V, \; j = 1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^0 = 1,$$

$p_i^0 \geq 0, \qquad i = 1,\dots,m;$

Задача гравця 2:

$F^* = V \to \min;$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0 \leq V, \; i = 1, \dots, m;$

$$\sum_{J=1}^{n} q_j^0 = 1,$$

$q_j^0 \geq 0, \; j = 1,\dots,n.$

Задача гравця 1:

знайти $Z = x_1 + x_2 + \dots + x_m \to min$

за обмежень

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \dots + x_m a_{m1} \geq 1,$$

$$\vdots$$

$$x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \dots + x_m a_{mn} \geq 1,$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i = 1,2,\dots,m,$$

тут $\frac{p_i^0}{V} = x_i$, $i = 1, 2, \dots, m$,

Задача гравця 2:

знайти $F = y_1 + y_2 + \dots + y_n \to max$

за обмежень

$$y_1 a_{11} + y_2 a_{12} + \dots + y_n a_{1n} \leq 1,$$

$$\vdots$$

$$y_1 a_{m1} + y_2 a_{m2} + \dots + y_n a_{mn} \leq 1,$$

$$y_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

тут $\frac{q_j^0}{V} = y_j$, $j = 1,2,\dots,n$,

Задача другого гравця є двоїстою задачею відносно задачі першого гравця і навпаки.

Етапи знаходження розв’язку гри з використанням лінійного програмування

1. Побудова пари двоїстих задач лінійного програмування, які є еквівалентними матричній грі, що розглядається.
2. Знаходження оптимальних планів пари двоїстих задач.
3. Знаходження розв’язку гри, враховуючи співвідношення між оптимальними планами двоїстих задач та оптимальними стратегіями і ціною гри.

Ітеративний метод Брауна−Робінсон

Ідея методу полягає в багатократному фіктивному розігруванні гри із заданою матрицею виграшу.

Одне повторення гри називатимемо **партією.** У черговій партії гравці вибирають свої найкращі чисті стратегії проти **спостережуваного емпіричного розподілу** чистих стратегій супротивника.

Нехай розігрується гра з (m× n)-матрицею A.

У 1-й партії обох гравців вибирають абсолютно довільні чисті стратегії *i* та *j*.

Нехай супротивниками на перших *N* кроках послідовно вибирали стратегії $(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_N)$ і $(j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_N)$ та x_i^N, y_j^N − кількість кроків, на яких першим і другим гравцями вибиралися стратегії *i* та *j* відповідно.

Очевидно, що $\sum_i^m x_i^N = \sum_j^n y_j^N = N$.

Позначимо відносні частоти застосування стратегій i та j через $p_i^N = \frac{x_i^N}{N}$ і $q_j^N = \frac{y_i^N}{N}$.

На кроці N спостережувані змішані стратегії: $p^N = (p_1^N, p_2^N, \dots, p_m^N)$ і $q^N = (q_1^N, q_2^N, \dots, q_n^N)$ визначають емпіричний розподіл стратегій після перших N кроків.

На $(N + 1)$ кроці гравці вибирають такі чисті стратегії i_{N+1} та j_{N+1}, що

$$\alpha^N = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q_j^N = \sum_{j=1}^{n} a_{i_{N+1}j} q_j^N, \qquad \beta^N = \min_{1 \le i \le m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, p_j^N = \sum_{i=1}^{n} a_{i j_{N+1}} p_j^N.$$

Частоти стратегій перераховуються за такими формулами:

$$p_i^{N+1} = \begin{cases} \frac{N \cdot p_i^N}{N+1}, i \ne i_{N+1}, \\ \frac{N \cdot p_i^N + 1}{N+1}, i = i_{N+1}; \end{cases} \qquad q_j^{N+1} = \begin{cases} \frac{N \cdot q_j^N}{N+1}, j \ne j_{N+1}, \\ \frac{N \cdot q_j^N + 1}{N+1}, j = j_{N+1}; \end{cases}$$

Автори методу довели, що зі зростанням N емпіричні розподіли сходяться до оптимальних змішаних стратегій: $p^N \to p^*$, $q^N \to q^*$, $v^N = \frac{\alpha^N + \beta^N}{2} \to v$.

Метод простий в описі та реалізації, складність однієї ітерації становить O(n+m).

Недоліком методу є його повільна немонотонна збіжність. На практиці зупинка алгоритму відбувається після виконання великої кількості ітерацій.

Розв'язування ігор 2 ×2

Припустимо дано таку матричну гру: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$

Припустимо також, що ця гра не має сідлової точки. Тоді змішані стратегії першого та другого гравців $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ не містять нулевих компонентів і можуть бути обчислені за такими формулами:

$$x = \frac{JA^*}{JA^*J^T}, \qquad y = \frac{A^*J^T}{JA^*J^T}, \qquad \text{ціна гри} \qquad v = \frac{|A|}{JA^*J^T}.$$

Тут A^* приєднана матриця для *A*, $|A|$ - визначник матриці *A*, *J – вектор (1, 1)*

Приклад

Розв'язати матричну гру: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Гра не має сідлової точки, отже скористаємось теоремою.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2, \quad JA^* = (3,1), \quad A^*J^T = (2,2), \quad JA^*J^T = 4$$

$x = \dfrac{JA^*}{JA^*J^T} = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$, $\quad y = \dfrac{A^*J^T}{JA^*J^T} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, ціна гри $\quad v = \dfrac{|A|}{JA^*J^T} = \dfrac{1}{2}$.

Питання для самоконтролю

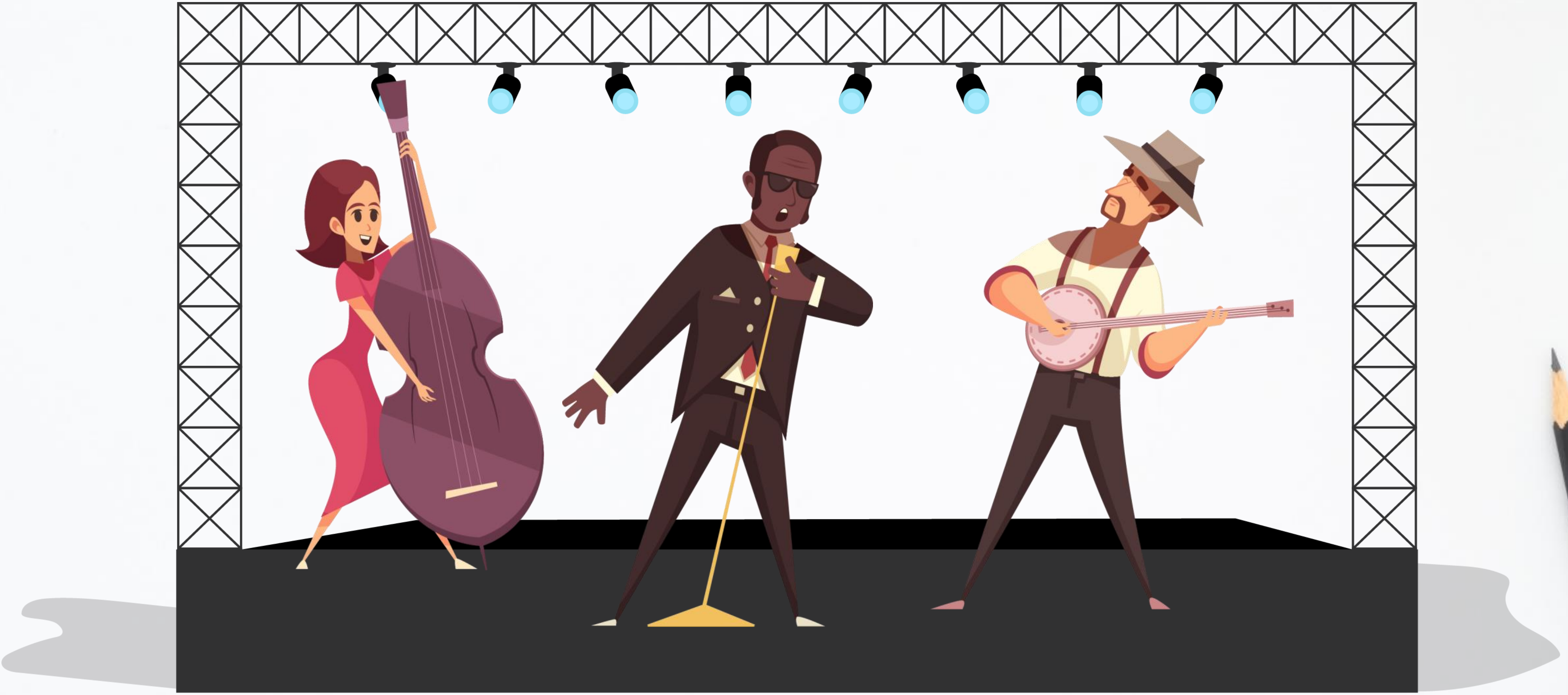
1. Дайте визначення антагоністичної гри, матричної гри.
2. Який сенс мають нижня та верхня ціни гри?
3. Дайте визначення сідлової точки.
4. Який сенс мають змішані стратегії гри?
5. Як визначаються оптимальні стратегії гравців?
6. Чим відрізняються захисна та рівноважена стратегії?
7. За якіх умов матрична гра має декілька оптимальних розв'язків?
8. Чи завжди існує сідлова точка у чистих стратегіях? У змішаних стратегіях?
9. Опишіть процедуру рішення антагоністичних ігор 2х2.
10. Опишіть графо-аналітичний метод рішення 2 x n та m x 2 ігор.
11. У чому полягає ідея методу Брауна-Робінсон?
12. У чому полягає метод зведення матричних ігор до задач лінійного програмування?
13. Як на практиці реалізувати вибір гравцем змішаної стратегії?
14. Якщо матрична гра має оптимальний розв'язок у чистих стратегіях, чи має вона оптимальний розв'язок у змішаних стратегіях?

Елементи теорії кооперативних ігор

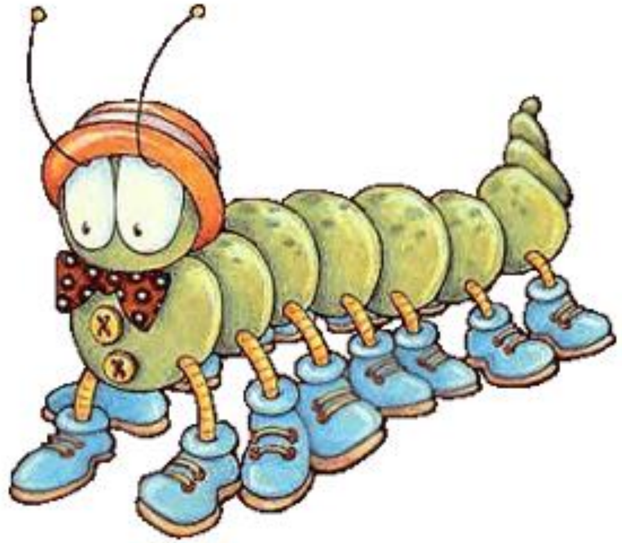
Елементи теорії кооперативних ігор

1. Поняття про кооперативні ігри
2. Характеристична функція гри. Істотні та неістотні ігри
3. Поняття розв’язку. Поділ
4. Доміновані та недоміновані поділи. C-ядро
5. Розв’язок за Нейманом−Моргенштерном
6. Вектор Шеплі

Поняття про корпоративні ігри



Коаліційна гра на прикладі «Сороконіжки»



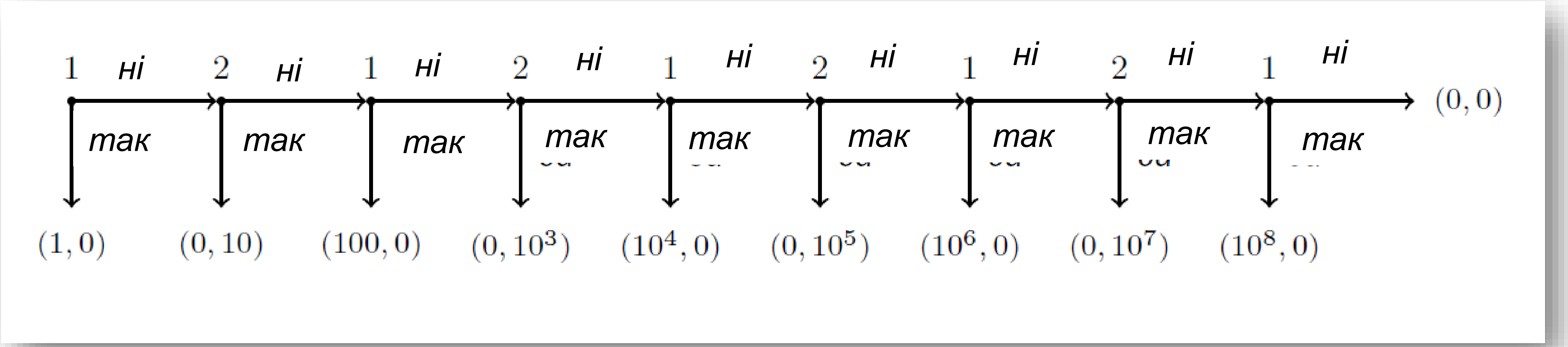
Умова

Уряд деякої держави хоче надати фінансову допомогу одному з двох найбільших університетів країни.

Щоб визначити, якому університету і в якому обсязі дістанеться фінансова допомога, двом ректорам пропонується зіграти в гру.

Хід гри

- Спочатку уряд пропонує першому ректору 1 $.
- Якщо перший ректор погоджується, то гра закінчується. Перший університет отримує 1 $, а другий - нічого.
- Якщо перший ректор відмовляється, то уряд пропонує другому ректору 10 $.
- Якщо другий ректор погоджується, то гра закінчується. Другий університет отримує 10 $, а перший - нічого.
- Так триває до тих пір, поки уряд не запропонує 100 000 000 $.
- Якщо перший ректор відмовиться від цієї суми, то на цьому все закінчиться і жоден університет нічого не отримає.

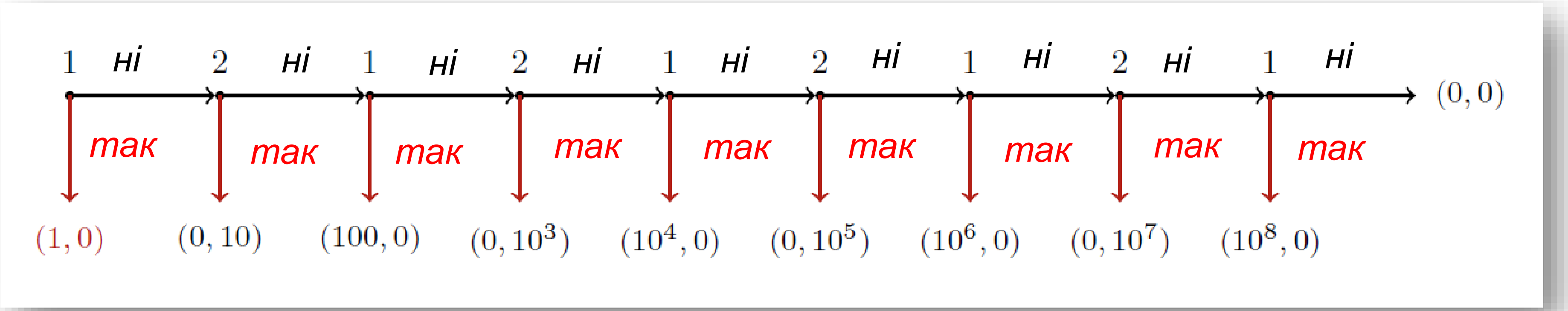


Дерево гри

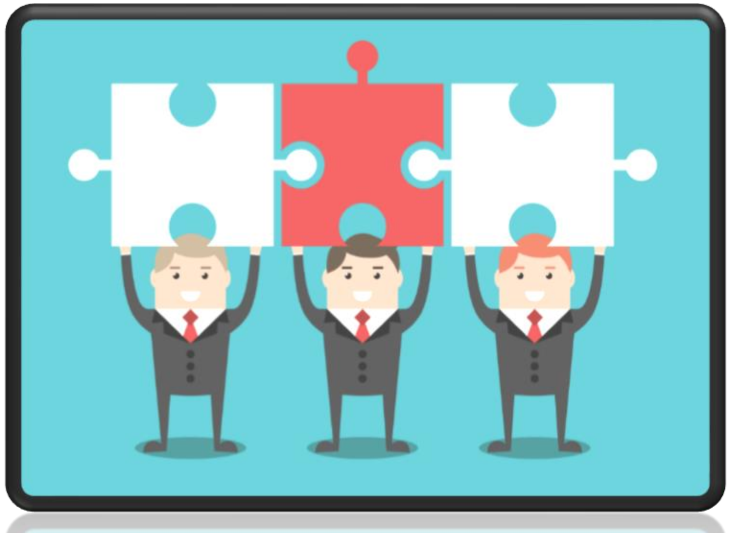
Застосовуючи метод зворотної індукції, отримаємо, що на кожній підгрі ректор, якому належить хід, повинен погоджуватися на пропозицію.

Тоді за Нешем перший ректор на першому ж ході погодиться на 1 $.

А якби ректори змовилися?



Кооперативні та некооперативні ігри



Гра називається **кооперативною**, якщо гравці можуть об'єднуватися в групи, беручи на себе деякі зобов'язання перед іншими гравцями і координуючи свої дії.

В некооперативних іграх учасник зобов'язаний грати за себе.

Некооперативні ігри описують ситуації в найдрібніших деталях і видають більш точні результати.
Кооперативні - розглядають процес гри в цілому.

Поняття про кооперативні ігри

Нехай N = {1, 2, .., n} – множина всіх гравців, а S – будь-яка його підмножина. Множини S називатимемо **коаліціями.**

Великою коаліцією будемо називати множину всіх гравців.

Гру називають **кооперативною,** якщо в ній гравцям дозволяється обговорювати перед грою свої стратегії та домовлятися про сумісні дії (добровільно обмінюватися інформацією, спільно вибирати стратегії, передавати частину виграшу один одному і тому подібне), інакше кажучи, гравці можуть утворювати коаліції.

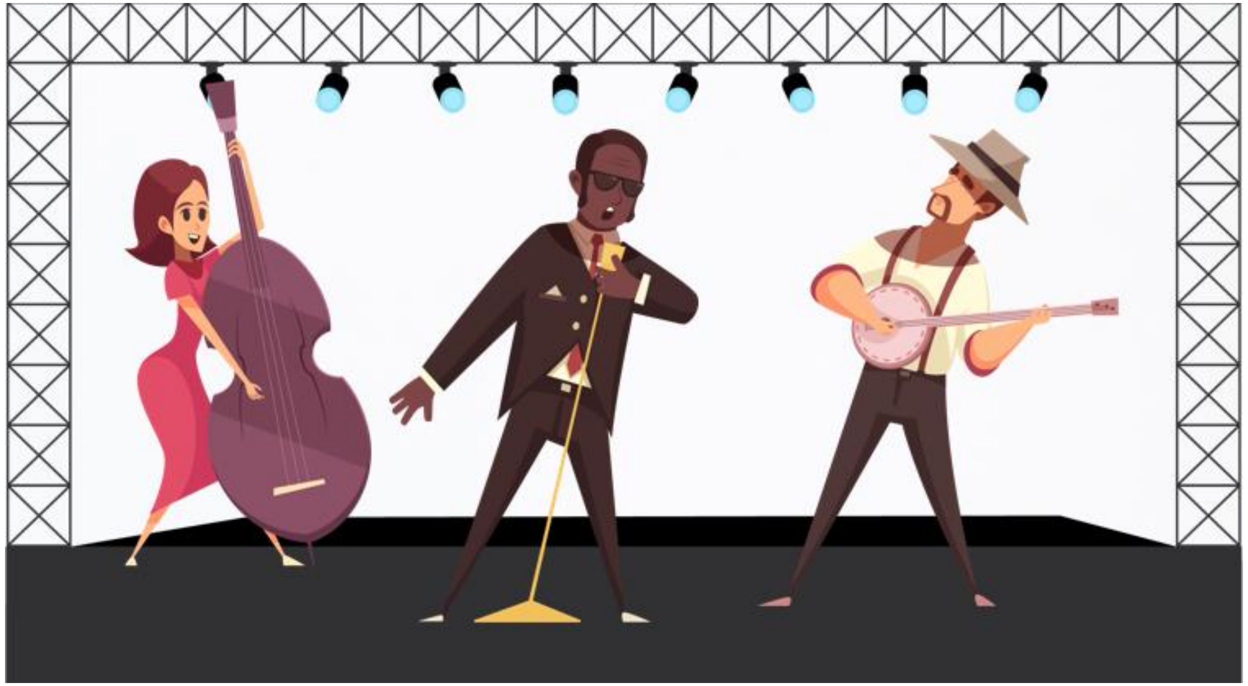
Теорія кооперативних ігор досліджує типи коаліцій, що утворюються в процесі гри, та умови, які необхідні для їх стійкого існування.

Приклад

Нехай N = {Боря, Вітя, Галя}.

всі можливі коаліції: ∅ ; {Боря} ; {Вітя} ; {Галя} ; {Боря, Вітя} ; {Вітя, Галя} ; {Боря, Галя} ; {Боря, Вітя, Галя}

Коаліція {Боря, Вітя, Галя} – це *велика коаліція.*



Поняття про кооперативні ігри

Визначення 1. Функція *V*, що ставить у відповідність кожній коаліції *S* найбільший виграш *V*(*S*), який вона може отримати, називається *характеристичною функцією*.

Визначення 2. Якщо для всіх підмножин A та B, що не мають спільних елементів, виконується нерівність

$$V(A \cup B) \geq V(A) + V(B), \tag{6.1}$$

то характеристична функція V називається *супераддитивною.*

Кооперативна гра Г = (N, V) задана у формі характеристичної функції, якщо вказана множина гравців N та супераддитивна характеристична функція V.

Найслабшою формою супераддитивності характеристичної функції є її адитивність, коли нерівність (6.1) перетворюється на рівність:

$$V(A \cup B) = V(A) + V(B), \text{ для всіх A, B} \subset \text{N, A} \cap \text{B} = \emptyset. \tag{6.2}$$

Адитивність характеристичної функції відображає незацікавленість гравців в утворенні будь-яких коаліцій.

Визначення 3. Кооперативна гра з адитивною характеристичною функцією називається *неістотною.*

Теорема 1. Для того, щоб характеристична функція була адитивною, необхідно і достатньо виконання такої рівності:

$$\sum_{i \subset N} V(i) = \text{V(N)}. \tag{6.3}$$

Гра (N,V) називається ***істотною*** в тому випадку, якщо

$$\sum_{i \subset N} V(i) < V(N). \qquad (6.4)$$

Основне завдання в кооперативних іграх полягає у поділі загального виграшу між членами коаліції.

Навіть у тому випадку, коли гра істотна, не завжди гравці захочуть об’єднуватися, оскільки вони не знають правил поділу додаткового виграшу, що виникає у результаті їх об’єднання в коаліцію. Якщо в результаті поділу виграш деякого члена коаліції буде меншим того виграшу, який він отримав би, діючи самостійно, то він не захоче входити в дане об’єднання.

Вектор виграшів (поділ)

Вектор виграшів (розподіл виграшу між гравцями) - це довільний вектор $x = (x_1,..., x_n) \in R_n$, де x_i - виграш, який отримує *i*-й гравець, $i = 1,2, \ldots n$.

Допустимим вектором виграшів називається вектор x, який задовольняє таку умову:

$$\sum_{i \in N} x_i \leqslant v(N).$$

Сума виграшів гравців не перевищує виграш великої коаліції.

Розв’язок коаліційної гри

Розв’язком коаліційної гри будемо називати деяку множину **допустимих векторів виграшів** гравців.

Ця множина матиме різний вигляд в залежності від того, яку концепцію буде обрано.

Вибір концепції залежить від того, які властивості вважаємо важливими.

Існує багато різних концепцій вирішення коаліційних ігор, наприклад:

С-ядро, вектор Шеплі, оптимальність за Парето, розв’язок за Нейманом-Моргенштерном

Визначення 4. Вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, який задовольняє умови:

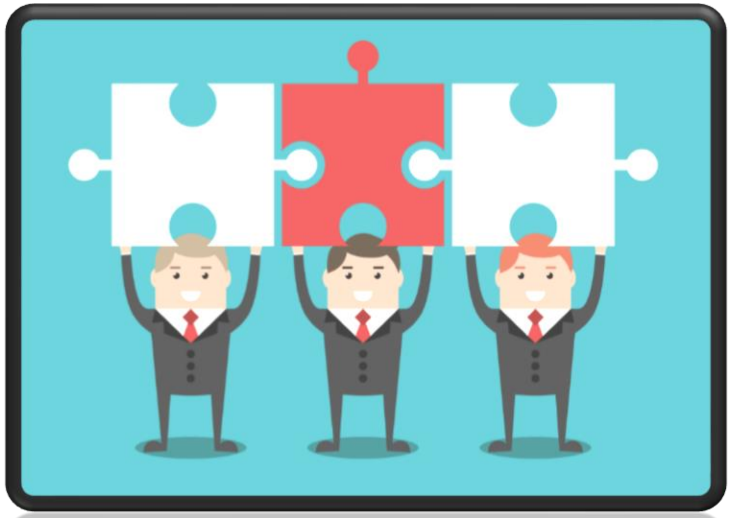
$$x_i \geq V(i) \text{ для всіх } i \in N, \tag{6.5}$$

$$\sum_{i \in N} x_i = V(N), \tag{6.6}$$

називається **поділом**.

Умова (6.5) - **умова індивідуальної раціональності.** Її сенс полягає в тому, що об’єднуватися вигідно тільки у тому випадку, коли кожен гравець, що увійшов до коаліції, отримає під час поділу загального виграшу суму не меншу, ніж та, яку він міг би отримати, діючи самостійно, не об’єднуючись з іншими гравцями ні в які коаліції.

Умова (6.6) називається **умовою колективної раціональності** і означає, що гравці повинні ділити між собою реально можливий виграш.



Визначення 5. Система (N,V), яка складається з множини гравців, характеристичної функції над цією множиною та множиною поділів, що задовольняють співвідношенням (6.4) та (6.5) називається **класичною кооперативною грою**.

Теорема 2. Для того, щоб вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, був поділом в класичній кооперативній грі (*N*, *V*), необхідно і достатньо виконання таких умов:

$$x_i = V(i) + a_i, \tag{6.7}$$

де $i \in N$, при цьому $a_i \geq 0$, $\sum_{i \in N} a_i = V(N) - \sum_{i \in N} V(i)$.

Теорема 3. У неістотній грі існує тільки один поділ [*V*(1),*V*(2), ...,*V*(*n*)].

У будь-якій істотній грі з більш ніж одним гравцем множина поділів нескінченна.

Доміновані і недоміновані поділи

Визначення 6. Поділ X **домінує** над поділом Y в коаліції S, що позначається як ($X \overset{S}{\succ} Y$), якщо виконуються наступні співвідношення:

1) $x_i > y_i$ для всіх $i \in S$;

2) $\sum_{i \in S} x_i \leq V(S)$.

Умова 1 означає, що поділ X краще за поділ Y для всіх членів коаліції S, тобто відображає необхідність «**одноголосності»** в перевазі з боку коаліції, а умова 2 означає реальну можливість коаліції S запропонувати кожному гравцеві, що увійшов до її складу, величину виграшу x_i.

Визначення 7. Поділ X називають **недомінованим,** якщо не існує поділу Y і коаліції S таких, що $X \overset{S}{\succ}$ Y.

С-ядро

Визначення 10. Множина недомінованих поділів кооперативної гри називається **С-ядром.**

Теорема 6. Поділ X належить С-ядру кооперативної гри з характеристичною функцією V тільки тоді, коли виконується така система нерівностей:

$$V(S) \leq X(S) = \sum_{i \in S} x_i \text{ для всіх } S \subset N.$$

С-ядро є замкнутою, опуклою підмножиною множини поділів.

Ядро С (v) – це множина векторів платежів, що володіють властивостями:

Ефективності - весь виграш великої коаліції повинен бути розподілений між гравцями.

Коаліційної раціональності - не повинно знайтися такої коаліції, яка захотіла б покинути велику коаліцію.

В рамках цієї концепції акцент робиться на стабільності рішення.

Розв'язок за Нейманом- Моргенштерном

Визначення 11. Підмножину поділів *R* кооперативної гри (*N*, *V*) називають **розв'язком за Нейманом−Моргенштерном** (або **Н−М розв'язком**) якщо:

1) з того, що $X \succ Y$ випливає, що або $X \notin R$, або $Y \notin R$ (внутрішня стійкість);

2) для будь-якого $X \notin R$ існує такий $Y \in R$, що $Y \succ X$ (зовнішня стійкість).

Зовнішня стійкість означає домінування над поділами, що не належать цій множині

Внутрішня стійкість - поділи, які належать цій множині не домінують один над одним

Теорема 7. Якщо в кооперативній грі є С-ядро і *R* є Н−М розв'язком, то $C \subset R$.

Теорема 8. Якщо деякий Н−М розв'язок кооперативної гри (*N*, *V*) містить єдиний поділу *X*, то характеристична функція *V* є неістотною.

Розв’язок за Нейманом- Моргенштерном

Теорема 9. Якщо для кооперативної гри (*N*, *V*) характеристична функція якої подана в 0-1 спрощеній формі, виконуються нерівності

$$V(S) \leq \frac{1}{n - |S| + 1}, \tag{6.8}$$

де *n* − кількість членів в коаліції (*N*), |*S*| − кількість членів в коаліції *S*, то С-ядро такої гри не порожнє і є Н − М розв’язком.

Якщо Н − М розв’язок існує, а С-ядро непорожнє, то Н − М розв’язок містить С-ядро.

Розв’язок (арбітражне рішення) Шеплі

Вимоги:

1) Бути справедливим;
2) Мати алгоритм формування поділу;
3) Бути єдиним, що задовольняє
   дану систему принципів.

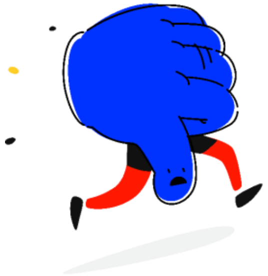
Розв’язок (арбітражне рішення) Шеплі

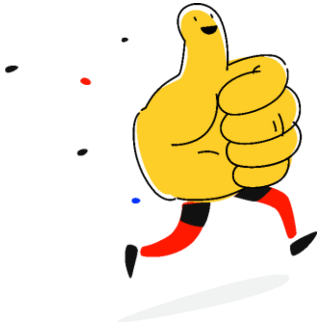
Всі учасники кооперативної гри діляться на «бовдурів» і «носіїв». Гравець називається **«бовдуром» (*b*),** якщо він не здатний збільшити виграш жодної з коаліцій *S*, до якої б він не приєднався, тобто для нього виконується співвідношення:

$$V(S \cup b) = V(S) + V(b) \text{ для } \forall b \in B \subset N, \qquad (6.9)$$

де *B* – множина «бовдурів» у грі (*N*, *V*).

«бовдур»





«носій»

Підмножина всіх «небовдурів» називається **носієм** гри, тобто це множина $D = N \backslash b$, для якої виконується така рівність:

$$V(S) = V(S \cap D) \text{ для } \forall S \subset N. \qquad (6.10)$$

Процедура формування коаліцій:

1) кожен із гравців має свій порядковий номер;

2) гравці беруть участь у переговорах не за порядковими номерами, а в послідовності, яка формується випадково з рівними ймовірностями;

3) кожен із гравців бере участь в переговорах, коли інші гравці вже утворили коаліцію $S\backslash i$. Тому його внесок під час приєднання до цієї коаліції становитиме величину $[V(S) - V(S\backslash i)]$.

Вектор Шеплі

1. Аксіома симетрії стверджує, що виграші гравців не залежать від їх порядкових номерів у довільній перестановці. Гравці які приносять однаковий прибуток мають отримати однаковий виграш.

2. Оптимальність за Парето означає, що не існує варіанту поділу загального виграшу *V*(*N*), отриманого в результаті об'єднання всіх учасників кооперативної гри, в якому виграш хоч би одного з гравців збільшився, не зменшуючи виграші інших гравців. Отже весь можливий виграш має бути розподілений.

3. Аксіома ефективності означає, що в поділі загального виграшу, отриманого від об'єднання всіх гравців, «бовдур» не бере участь, тобто якщо для будь-якої коаліції $S \subset N$ виконується рівність $V(S\{i\}) = V(S)$, то $\varphi(V) = 0$.

Тобто, «бовдур» невигідний для коаліції, оскільки його приєднання до неї не збільшить виграш.

4. Аксіома агрегації стверджує: якщо гравець бере участь у двох іграх (*N*, *V*) та (*N*, *U*), то його сумарний виграш визначатиметься як сума виграшів $\varphi(V)$ та $\varphi(U)$, отриманих у кожній з цих ігор.

Арбітр кожній кооперативній грі (*N*, *V*) ставить у відповідність вектор Шеплі: $\Phi(V) = (\varphi_1(V), \varphi_2(V), \dots, \varphi_n(V))$, компоненти якого інтерпретуються як міра цінності гравців для коаліції у результаті поділу загального виграшу, який дало об'єднання всіх учасників гри.

Теорема 10. Для будь-якої кооперативної гри $\Gamma = (N, V)$ існує єдина функція Шеплі, компоненти якої (компоненти вектора Шеплі) визначаються рівністю:

$$\varphi_i(V) = \varphi(i) = \sum_{S \subset N: i \in S} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}[V(S) - V(S \backslash \{i\})].$$

Приклад

200 $

0 $

Боря і Вітя продають млинці на вулиці.

Вітя вміє пекти млинці, а Боря - готувати начинку.

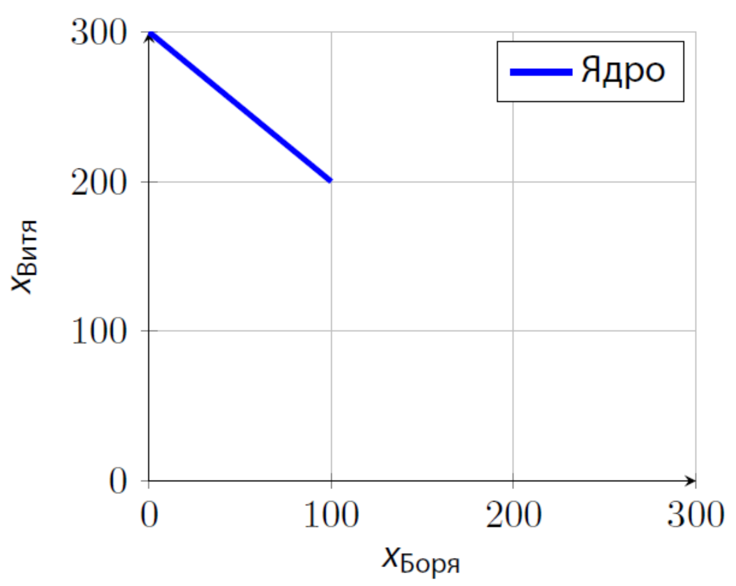
За день Боря поодинці нічого не може заробити,

Вітя може заробити 200 $, а вдвох вони можуть заробити 300 $.

300 $

При якому розподілі виручки вони погодяться працювати разом?

Розв’язок



N = {Боря, Вітя}.

Всі можливі коаліції: ∅; {Боря}; {Вітя}; {Боря, Вітя}:

Платежі:

$v(\emptyset) = v(\{\text{Боря}\}) = 0;$

$v(\{\text{Вітя}\}) = 200;$

$v(\{\text{Боря, Вітя}\}) = 300:$

Будемо шукати вектори виграшів ($x_{\text{Боря}}$; $x_{\text{Вітя}}$),

що мають властивості **ефективності** та **коаліційної раціональності.**

За визначенням (теорема 6), ядро цієї гри задається наступною системою:

$$\begin{cases} x_{\text{Боря}} \geqslant 0; \\ x_{\text{Вітя}} \geqslant 200; \\ x_{\text{Боря}} + x_{\text{Вітя}} = 300: \end{cases}$$

Тоді ядром буде наступна множина векторів виграшів:

$C(v) = \{(x_{\text{Боря}}; 300 - x_{\text{Боря}}) \mid x_{\text{Боря}} \in [0; 100]\}$

Вектор Шеплі

$$\varphi_i(v) = \sum_{K \ni i} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\left(v(K) - v(K \setminus \{i\})\right)$$

N = {Боря, Вітя}, n = 2.

v (∅) = v({Боря}) = 0, v({Вітя}) = 200, v({Боря, Вітя}) = 300.

Боря входить в дві коаліції: {Боря}, k = 1, і {Боря, Вітя}, k = 2.

$$\varphi_{\text{Боря}}(v) = \frac{(1-1)!(2-1)!}{2!} \cdot (0-0) + \frac{(2-1)!(2-2)!}{2!} \cdot (300-200) = 0 + \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$$

Вітя теж входить в дві коаліції: {Вітя}, k = 1, і {Боря, Вітя}, k = 2.

$$\varphi_{\text{Витя}}(v) = \frac{(1-1)!(2-1)!}{2!} \cdot (200-0) + \frac{(2-1)!(2-2)!}{2!} \cdot (300-0) = \frac{1}{2} \cdot 200 + \frac{1}{2} \cdot 300 = 250$$

Результати розрахунку

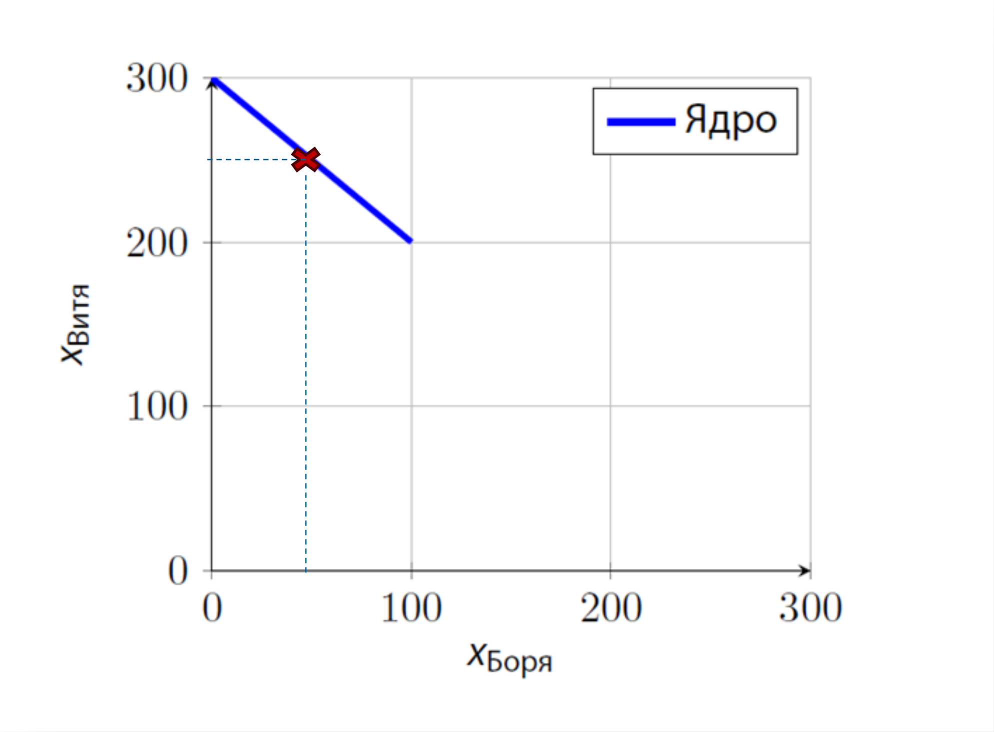
Вектор Шеплі цієї гри:

φ (v) = ($\varphi_{Боря}$; $\varphi_{Вітя}$) = (50; 250).

єдиний

належить до С-ядра

Знайдене ядро С (v) лежить у межах
{($x_{Боря}$; 300 - $x_{Боря}$) | $x_{Боря}$ ∈ [0; 100] }



С-ядро

- **Ефективність -** весь виграш великої коаліції повинен бути розподілений між гравцями.
- **Коаліційна раціональність-** не має знайтися такої коаліції, яка захотіла б покинути велику коаліцію.

Акцент робиться на стабільності рішення

Розв’язок за Нейманом-Моргенштерном

- **Зовнішня стійкість –** домінування над поділами, що не належать цій множині
- **Внутрішня стійкість -** поділи, що належать цій множині не домінують один над одним

Вектор Шеплі

- **Ефективність** - весь виграш великої коаліції має бути розподілений між гравцями.
- **Симетричність** - гравці, які вносять однаковий внесок, мають отримати однакові виграші.
- **Аксіома бовдура** – гравці, які не додають виграшу до коаліції, не повинні нічого отримати.
- **Лінійність** - виграш гравця в сумі ігор має дорівнювати сумі його виграшів в кожній з ігор.

Акцент робиться на справедливості рішення

Питання для самоконтролю

1. Які ігри називають кооперативними?
2. В чому полягають основні проблеми теорії кооперативних ігор?
3. Чому кооперативні ігри часто називають іграми у формі характерістічної функції?
4. Який сенс має поняття супераддитивності?
5. Що вважають розв'язком кооперативної гри?
6. Які підходи існують для визначення розв’язку кооперативної гри?
7. Що є С-ядром? Які умови висуваються до поділів, що належать до С-ядра?
8. Які умови має задовольняти розв’язок за Нейманом-Моргенштерном (Н-М розв’язок)?
9. Як співвідносяться С-ядро кооперативної гри та її Н-М розв'язок?
10. Які вимоги висуваються до арбітражного рішення?
11. Як визначають арбітражне рішення Шеплі?
12. Який гравець називається «бовдуром»? Носієм гри?
13. Які недоліки мають введені поняття розв'язків кооперативних ігор?

Статичні ігри з неповною інформацією

Статичні ігри з неповною інформацією

1. Поняття про Байесові ігри
2. Змішані стратегії
3. Поняття про корельовану рівновагу

Байесова гра n-осіб у стратегічній формі визначається такими елементами:

- набором множин (просторів) ходів $A_1, A_2 \dots A_n$;
- Набором множин (просторів)типів $T_1, T_2 \dots T_n$ гравців;
- Уявлення $p_1, p_2 \dots p_n$ гравців;
- Функціями виграшів $u_1, u_2 \dots u_n$.

Тип $t_i \in T_i$ гравця *i* відомий гравцію *i* й визначає функцію виграшу $u_i(a_1, a_2, \dots a_n; t_i)$. Уявлення $p_i(t_{-i}|t_i)$ гравця *i* описують невизначеність відносно типів t_{-i} інших $(n-1)$ гравців, коли гравець *i* має тип t_i .

Цю гру позначаємо $G = \{A, T, p, u\}$,
де $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, $T = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n$, $p = (p_1, p_2 \dots p_n)$,
$u = (u_1, u_2 \dots u_n)$.

Схема гри

1. Природа обирає вектор типів $t = (t_1, t_2, \dots t_n) \in T = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n$;
2. Природа повідомляє кожному гравцю i його тип t_i (і тільки йому);
3. Гравці одночасно обирають свої ходи (відповідно i –й гравець з множини A_i);
4. Гравці отримують виграші $u_i(a_1, a_2, \dots a_n; t_i),\ i \in I$.

Коли Природа «оголошує» гравцю i його тип t_i , то він може обчислити своє уявлення, використовуючи формулу Байеса:

$$p_i(t_{-i}|t_i) = \frac{p_i(t_{-i}, t_i)}{p_i(t_i)} = \frac{p_i(t_{-i}, t_i)}{\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p_i(t_{-i}., t_i)}$$

Далі інші гравці можуть обчислити різні уявлення, які гравець i може мати залежно від його типу t_i.

Вважаємо, що типи гравців незалежні, тобто $p_i(t_{-i})$ не залежить від t_i.

Визначення. В статичній Байєсовій грі $G = \{A, T, p, u\}$ стратегія гравця i - це функція $s_i: T_i \to A_i$, яка для кожного типу $t_i \in T_i$ визначає хід з A_i , котрий був би обраний гравецем i, якби Природа обрала його тип t_i.
Записується як S: $A_i^{T_i}$

Визначають стратегії, які:

розділяють – коли різні типи t_i обирають різні ходи,
об'єднують - коли всі типи обирають одну й ту саму дію.

Зауваження. Хоча тип гравця i вибраний, йому необхідно також враховувати свої дії і за умов обрання іншого типу, оскільки іншим гравцям його тип невідомий і вони розглядають його дії для всіх можливих його типів.

Рівновага Байеса-Неша

Визначення. В статичній Байєсовій грі $G = \{A, T, p, u\}$ ситуація (тобто набір чистих стратегій) s^* є рівновагою Байєса-Неша, якщо для будь-якого *i* та будь-якого типу $t_i \in T_i$ функція $s_i^*(t_i)$ є розв'язком такої задачі:

$$\max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i(s_1^*(t_1), \ldots, s_{i-1}^*(t_{i-1}), a_i, s_{i+1}^*(t_{i+1}) \ldots s_n^*(t_n); t,) \, p_i(t_{-i}|t_i).$$

Рівновага Байеса-Неша

Визначення. Рівновага за Байєсом-Нешем (Б-Н рівновага) у грі із неповною інформацією та скінченною множиною типів T_i , у кожного гравця $i \in I$, апріорним розподілом p та простором чистих стратегій i -го гравця $S_i(= A_i)$, є рівновагою Неша у розширеній грі, у котрій простір стратегій гравця i це $S_i^{T_i}$, тобто множина всіх відображень з T_i у S_i.

$$s_i(\cdot) \in \operatorname{Arg} \max_{s_i'(\cdot) \in S_i^{T_i}} \sum_{t_i} \sum_{t_{-i}} p(t_i, t_{-i})\, u_i\Big(s_i'(t_i), s_{-i}(t_{-i}); (t_i, t_{-i}) \Big).$$

де $\operatorname{Arg} \max$ означає множину стратегій, які забезпечують максимальне значення цій подвійній сумі;$\Big(s_i'(t_i), s_{-i}(t_{-i})\Big)$ - ситуація у якій гравець i грає стратегію $s_i'(t_i)$, а інші притримуються $s_i(\cdot)$:

$$\Big(s_i'(t_i), s_{-i}(t_{-i})\Big) = \Big(s_1(t_1), \quad \ldots, s_{i-1}(t_{i-1}), s_i'(t_i), s_{i+1}(t_{i+1}), \quad \ldots, s_n(t_n)\Big)$$

Зауваження. Рівновага за Нешем у змішаній грі із повною інформацією (майже завжди) може інтерпретуватися як рівновага Байєса-Неша у чистих стратегіях у деякій «близькій» грі із «трохи» неповною інформації. («Майже завжди» у тому сенсі, що можна ігнорувати ті рідкі випадки, коли така інтерпретація є недоречною).

Список рекомендованих джерел

1. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : підручник. 7-ме вид., перероб. і доп. / Ю. П. Зайченко. – Київ : Слово, 2006. – 816 с.

2. Козицький В.А. Математична теорія кооперативних ігор : підручник / В. А. Козицький; М-во освіти і науки України, Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка. – Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2016. – 419 с.

3. Козицький В.А. Математична теорія некооперативних ігор. Ігри в нормальній формі: концепції розв'язання : підручник / В. А. Козицький. М-во освіти і науки України, Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка. – Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2021. – 220 с.

4. Теорія ігор: курс лекцій : навч. посіб. Електронне мережне навчальне видання / Укл.: Л.В. Барановська; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «КПІ ім. Ігоря Сікорського». – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 245 с

5. Шиян А.А. Економічна кібернетика: вступ до моделювання соціальних і економічних систем : навч. посіб. / А.А. Шиян. – Львів : Магнолія 2006. – 2007. – 228 с.

6. Шиян А.А. Теоретико-ігровий аналіз раціональної поведінки людини та прийняття рішень в управлінні соціально-економічними системами / А.А. Шиян. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. – 414 с.

7. Шиян А.А. Теорія ігор: основи та застосування в економіці та менеджменті : навч. посіб. / А.А. Шиян; М-во освіти і науки України, Вінниц. нац. техн. ун-т. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 162 с.

8. Taha, H. A. Operation research : an introduction. – 8th ed. / Hamdy A. Taha. – Pearson Education, Inc. 2007. – 838 p.

Навчальне видання

Ус Світлана Альбертівна
Станіна Ольга Дмитрівна
Одновол Микола Миколайович

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ КОНФЛІКТУ
Навчальний наочний посібник

Видано в авторській редакції.
Підписано до видання 27.06.2024.
Електронний ресурс. Авт. арк. 6,3.

Підготовлено до видання
в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.

Відомості про авторів

Світлана Альбертівна Ус – кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри системного аналізу та управління Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». Автор більше 170 наукових та методичних праць, серед яких дві монографії, 16 навчальних посібників, понад 70 наукових статей, експерт Національного агентства забезпечення якості вищої освіти.

Наукові інтереси: прийняття рішень в умовах невизначеності, моделювання складних систем.

Ольга Дмитрівна Станіна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри системного аналізу та управління Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». Автор більше 60 наукових та методичних праць, серед яких підручник, дві монографії, два навчальних посібники, понад 20 наукових статей.

Наукові інтереси: теорія прийняття рішень.

Микола Миколайович Одновол – доцент кафедри системного аналізу та управління Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». Автор понад 70 наукових та методичних праць, серед яких 2 навчальних посібники, яким надано гриф МОН України, понад 50 наукових статей. Нагороджений двома Почесними грамотами Кабінету Міністрів України, Почесними грамотами Академії педагогічних наук та Міністерства освіти і науки України, Відмінник освіти України.

Наукові інтереси: моделювання складних систем, автоматизація виробничих процесів.