

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



ФАКУЛЬТЕТ АРХІТЕКТУРИ, БУДІВНИЦТВА ТА ЗЕМЛЕУСТРОЮ
Кафедра фізики

В. В. Титаренко, Н. О. Куцева, М. О. Журавльов

ФІЗИКА

**Методичні рекомендації
до самостійної роботи у 3 частинах
Частина 1. Кінематика. Динаміка матеріальної точки**

для здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей
131 Прикладна механіка, 132 Матеріалознавство,
133 Галузеве машинобудування

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

Титаренко В. В.

Фізика [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до самостійної роботи для здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей 131 Прикладна механіка, 132 Матеріалознавство, 133 Галузеве машинобудування : у 3 ч. / В. В. Титаренко, Н. О. Куцева, М. О. Журавльов ; Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – Ч. 1. Кінематика. Динаміка матеріальної точки. – 41 с.

Автори:

В. В. Титаренко, канд. фіз.-мат. наук, доц.,

Н. О. Куцева, канд. фіз.-мат. наук, доц.,

М. О. Журавльов.

Затверджено науково-методичними комісіями спеціальностей 131 Прикладна механіка (протокол № 4 від 01.07.2024), 132 Матеріалознавство (протокол № 7 від 26.06.2024), 133 Галузеве машинобудування (протокол № 2 від 22.10.2024), за поданням кафедри фізики (протокол № 15 від 06.06.2024).

Методичні рекомендації містять приклади розв'язування задач за програмою навчальної дисципліни «Фізика» з розділів «Кінематика. Динаміка матеріальної точки», для здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей 131 Прикладна механіка, 132 Матеріалознавство, 133 Галузеве машинобудування. Також ці методичні рекомендації можуть стати в пригоді студентам інших спеціальностей.

Методичні рекомендації орієнтовано на підвищення ефективності самостійної підготовки студентів до поточного та підсумкового контролів.

Видано в рамках теми Ш-518 «Розробка методичного забезпечення за дисциплінами, що викладаються кафедрою фізики НТУ «Дніпровська політехніка».

Відповідальний за випуск завідувач кафедри фізики В. М. Горев, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Зміст

Вступ.....	4
1. КІНЕМАТИКА	9
1.1 Основні поняття, закони і формули.....	9
1.2 Приклади розв'язання задач	11
1.3 Задачі для самостійного розв'язування.....	18
2. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ.....	20
2.1 Основні поняття, закони і формули.....	20
2.2 Приклади розв'язання задач	21
2.3 Задачі для самостійного розв'язування.....	28
3. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ ТА ЕНЕРГІЇ	30
3.1 Основні поняття, закони і формули.....	30
3.2 Приклади розв'язання задач	32
3.3 Задачі для самостійного розв'язування.....	38
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	40

Вступ

Дисципліна «Фізика» є базовим освітнім компонентом за галуззю знань циклу спеціальної підготовки для здобувачів освітньо-професійних програм спеціальностей 131 Прикладна механіка, 132 Матеріалознавство, 133 Галузеве машинобудування першого (бакалаврського) рівня вищої освіти.

У рамках курсу викладено матеріал щодо фундаментальних понять, законів і теорій класичної та сучасної фізики, що забезпечує здобувачам ефективне опанування спеціальних дисциплін і подальшу можливість використання фізичних принципів у галузі механічної інженерії.

Ці методичні матеріали присвячені першій частині курсу, а саме таким розділам, як кінематика поступального та обертального руху, динаміка матеріальної точки, закони збереження імпульсу та енергії.

У методичних рекомендаціях надані приклади розв'язування задач, що містять основні теоретичні відомості та задачі для самостійного розв'язування. Опанування матеріалу, наведеного в даних методичних рекомендаціях, дозволить підвищити ефективність самостійної підготовки здобувачів освіти до поточного та підсумкового контролю.

Тематика наведених у методичних рекомендаціях прикладів задач і розподіл годин на кожну тему визначено в робочій програмі та силабусі дисципліни.

Згідно з робочою програмою відповідної дисципліни критерії оцінювання є такими:

**Загальні критерії досягнення результатів навчання
для 6-го кваліфікаційного рівня за НРК**

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
Знання		
♦ концептуальні наукові та практичні знання, критичне осмислення теорій, принципів, методів і понять у сфері професійної діяльності та/або навчання	Відповідь відмінна – правильна, обґрунтована, осмислена. Характеризує наявність: - концептуальних знань; - високого ступеню володіння станом питання; - критичного осмислення основних теорій, принципів, методів і понять у навчанні та професійній діяльності	95-100
	Відповідь містить негрубі помилки або описки	90-94
	Відповідь правильна, але має певні неточності	85-89
	Відповідь правильна, але має певні неточності й недостатньо обґрунтована	80-84
	Відповідь правильна, але має певні неточності, недостатньо обґрунтована та осмислена	74-79
	Відповідь фрагментарна	70-73
	Відповідь демонструє нечіткі уявлення студента про об'єкт вивчення	65-69
	Рівень знань мінімально задовільний	60-64
Рівень знань незадовільний	<60	
Уміння/навички		
♦ поглиблені когнітивні та практичні уміння/навички, майстерність та інноваційність на рівні, необхідному для розв'язання складних спеціалізованих задач і практичних проблем у сфері професійної діяльності або навчання	Відповідь характеризує уміння: - виявляти проблеми; - формулювати гіпотези; - розв'язувати проблеми; - обирати адекватні методи та інструментальні засоби; - збирати та логічно й зрозуміло інтерпретувати інформацію; - використовувати інноваційні підходи до розв'язання завдання	95-100
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності з не грубими помилками	90-94
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації однієї вимоги	85-89
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації двох вимог	80-84

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації трьох вимог	74-79
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації чотирьох вимог	70-73
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності при виконанні завдань за зразком	65-69
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання при виконанні завдань за зразком, але з неточностями	60-64
	рівень умінь/навичок незадовільний	<60
Комунікація		
<ul style="list-style-type: none"> ◆ донесення до фахівців і нефахівців інформації, ідей, проблем, рішень, власного досвіду та аргументації; ◆ збір, інтерпретація та застосування даних; ◆ спілкування з професійних питань, у тому числі іноземною мовою, усно та письмово 	<p>Вільне володіння проблематикою галузі. Зрозумілість відповіді (доповіді). Мова:</p> <ul style="list-style-type: none"> - правильна; - чиста; - ясна; - точна; - логічна; - виразна; - лаконічна. <p>Комунікаційна стратегія:</p> <ul style="list-style-type: none"> - послідовний і несуперечливий розвиток думки; - наявність логічних власних суджень; - доречна аргументації та її відповідність відстоюваним положенням; - правильна структура відповіді (доповіді); - правильність відповідей на запитання; - доречна техніка відповідей на запитання; - здатність робити висновки та формулювати пропозиції 	95-100
	<p>Достатнє володіння проблематикою галузі з незначними хибами. Достатня зрозумілість відповіді (доповіді) з незначними хибами. Доречна комунікаційна стратегія з незначними хибами</p>	90-94
	<p>Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано три вимоги)</p>	85-89
	Добре володіння проблематикою галузі.	80-84

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано чотири вимоги)	
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано п'ять вимог)	74-79
	Задовільне володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано сім вимог)	70-73
	Часткове володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано дев'ять вимог)	65-69
	Фрагментарне володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано 10 вимог)	60-64
	Рівень комунікації незадовільний	<60
<i>Відповідальність і автономія</i>		
<p>◆ управління складною технічною або професійною діяльністю чи проектами;</p> <p>◆ спроможність нести відповідальність за вироблення та ухвалення рішень у непередбачуваних робочих та/або навчальних контекстах;</p> <p>◆ формування суджень, що враховують соціальні, наукові та етичні аспекти;</p> <p>◆ організація та керівництво професійним розвитком осіб та груп;</p>	<p>Відмінне володіння компетенціями менеджменту особистості, орієнтованих на:</p> <p>1) управління комплексними проектами, що передбачає:</p> <ul style="list-style-type: none"> - дослідницький характер навчальної діяльності, позначена вмінням самостійно оцінювати різноманітні життєві ситуації, явища, факти, виявляти і відстоювати особисту позицію; - здатність до роботи в команді; - контроль власних дій; <p>2) відповідальність за прийняття рішень в непередбачуваних умовах, що включає:</p> <ul style="list-style-type: none"> - обґрунтування власних рішень положеннями нормативної бази галузевого та державного рівнів; - самостійність під час виконання поставлених завдань; - ініціативу в обговоренні проблем; - відповідальність за взаємовідносини; <p>3) відповідальність за професійний розвиток окремих осіб та/або груп осіб, що передбачає:</p> <ul style="list-style-type: none"> - використання професійно-орієнтованих навичок; - використання доказів із самостійною і правильною аргументацією; - володіння всіма видами навчальної діяльності; 	95-100

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
♦ здатність продовжувати навчання із значним ступенем автономії	4) здатність до подальшого навчання з високим рівнем автономності, що передбачає: <ul style="list-style-type: none"> - ступінь володіння фундаментальними знаннями; - самостійність оцінних суджень; - високий рівень сформованості загальнонавчальних умінь і навичок; - самостійний пошук та аналіз джерел інформації 	
	Упевнене володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано дві вимоги)	90-94
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано три вимоги)	85-89
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано чотири вимоги)	80-84
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано шість вимог)	74-79
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано сім вимог)	70-73
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано вісім вимог)	65-69
	Рівень відповідальності і автономії фрагментарний	60-64
	Рівень відповідальності і автономії незадовільний	<60

1. Кінематика

1.1 Основні поняття, закони і формули

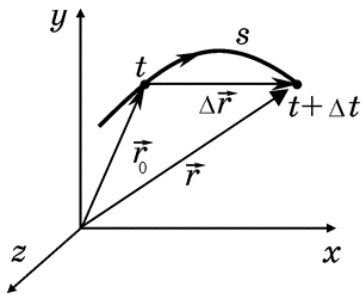
Механіка - частина механіки, яка вивчає закони механічної взаємодії тіл і явища механічного руху. Механічний рух - зміна положення рухомого тіла відносно інших тіл, які називають тілами відліку. Кінематика - частина механіки, яка вивчає геометричні і математичні характеристики руху без дослідження фізичних причин руху і його зміни.

Сукупність тіла відліку, зв'язаної з ним системи координат і приладів для вимірювання інтервалу часу, утворює систему відліку в механіці.

Матеріальна точка - модель протяжного тіла, яку застосовують у випадку поступального руху цього тіла, нехтуючи його дійсними розмірами і формою.

Траєкторія - лінія, яку описує у просторі рухома точка в процесі механічного руху. Розрізняють рухи прямолінійні і криволінійні. Окремий випадок останніх - рух по колу.

Шлях S - скалярна характеристика механічного руху. Він вимірюється відстанню, пройденою точкою за відповідальний час уздовж траєкторії. Переміщення точки $\Delta \vec{r}$ - вектор, проведений з початкового положення точки у кінцеве.



Положення матеріальної точки можна задати радіус - вектором \vec{r} , або його проекціями на координати вісі. Радіус - вектор - це вектор, проведений з початку координат у положення матеріальної точки в даний момент часу її руху. Кінець \vec{r} описує траєкторію.

Швидкість \vec{v} або миттєва швидкість матеріальної точки - вектор, що визначається значенням похідної за часом від радіуса - вектора.

$$v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}; \quad [v] = \left[\frac{m}{c} \right]. \quad (1.1.1)$$

Швидкість \vec{v} у кожній точці траєкторії направлена по дотичній до траєкторії точки і зображується відповідним вектором, а якщо під час руху точки її швидкість не змінюється ні за модулем ні за напрямком, то такий рух є прямолінійний рівномірний.

$$v = \frac{S}{t} \quad S = vt; \quad t = \frac{S}{v}. \quad (1.1.2)$$

Коли протягом часу t по довільній траєкторії був пройдений шлях S , то можна визначити середню швидкість $v_{\text{сеп}}$. Це скаляр

$$v_{\text{сеп}} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n} \quad (1.1.3)$$

Якщо вектор швидкості змінюється з часом, головною характеристикою цих змін є прискорення \vec{a} . Це похідна за часом від швидкості або друга похідна за часом від радіуса - вектора \vec{r} точки:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \quad [a] = [m/c^2]. \quad (1.1.4)$$

Якщо рух відбувається по прямій і модуль прискорення сталий, його називають рівноприскореним прямолінійним рухом.

$$a = \frac{v - v_0}{t} \quad v = v_0 + at \quad v_{\text{сєр.}} = \frac{v + v_0}{2}. \quad (1.1.5)$$

Пройдений за час шлях дорівнює:

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (1.1.6)$$

Якщо виключити час руху, то:

$$2aS = v^2 - v_0^2. \quad (1.1.7)$$

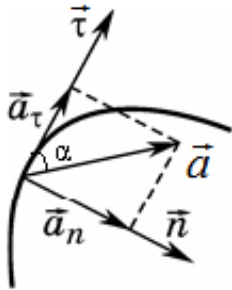
Якщо кінцева швидкість менша від початкової, рух називають рівносповільненим.

Тоді

$$v = v_0 - at; \quad S = v_0 t - \frac{at^2}{2} \quad 2aS = v_0^2 - v^2. \quad (1.1.8)$$

Окремим випадком прискореного прямолінійного руху є вільне падіння. Прискорення вільного падіння $g = 9,8 \text{ м/с}^2 = 10 \text{ м/с}^2$.

У випадку вільного падіння використовують формули (1.1.5)-(1.1.8) виконуючи заміни a на g ; S на h .



При вивченні криволінійного руху вектор прискорення розкладають на дотичній a_τ і нормалі a_n до траєкторії

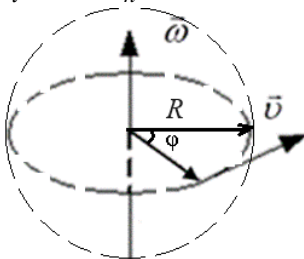
$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \quad a_n = a \sin \alpha; \quad a_\tau = a \cos \alpha, \quad (1.1.9)$$

α - кут між напрямком вектора прискорення і дотичної до траєкторії.

Дотичне прискорення спрямовано по швидкості, або протилежно їй. Воно характеризує зміну модуля швидкості.

Нормальне прискорення перпендикулярно до швидкості і характеризує зміну швидкості за напрямком.

Рух по колу - це найпростіший випадок криволінійного руху. $R = \text{const}$; $a_\tau = 0$; $a_n = \text{const}$; $v = \text{const}$



T - період обертання $T = \frac{t}{N}$, N - кількість обертів, ν - частота обертання, ω - кутова швидкість, ϕ - кут повороту.

$$v = 2\pi R / T; \quad a_n = v^2 / R; \quad a_n = \omega^2 R. \quad (1.1.10)$$

При обертальній русі тіла всі його точки рухаються по колу, центри яких знаходяться на одній прямій, яка називається віссю обертання.

$$\omega = \phi / t; \quad S = R\phi; \quad \phi = 2\pi N; \quad \omega = 2\pi / T; \quad v = \omega R. \quad (1.1.11)$$

ε - кутове прискорення. Це похідна за часом від кутової швидкості.

$$\varepsilon = \lim \Delta\omega / \Delta t = d\omega / dt. \quad (1.1.12)$$

Якщо тіло обертається з сталим кутовим прискоренням, то:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \quad \omega_{\text{сер.}} = \omega + \omega_0 / 2, \quad (1.1.13)$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}; \quad a_{\tau} = \varepsilon R - \text{дотичне прискорення, } 2a\varphi = \omega^2 - \omega_0^2,$$

$$(1.1.14)$$

$[\omega] = \text{рад/с}$; $[\varepsilon] = \text{рад/с}^2$; $[\omega] = 1/\text{с}$.

1.2 Приклади розв'язування задач

Приклад 1.

Першу половину свого шляху автомобіль рухався зі швидкістю $v_1 = 80 \text{ км/год}$, а другу половину шляху - зі швидкістю $v_2 = 40 \text{ км/год}$. Яка середня швидкість руху автомобіля?

Дано:

$$S_1 = S_2 = S$$

$$v_1 = 80 \text{ км/год}$$

$$v_2 = 40 \text{ км/год}$$

$$v_{\text{сер.}} - ?$$

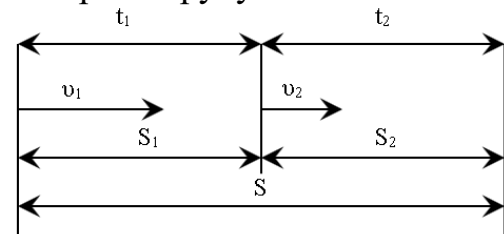
Розв'язок:

На кожному відрізку шляху тіло рухається рівномірно

$$v_{\text{сер.}} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2};$$

за умовою $S_1 = S_2 = 1/2 \cdot S$, то $S_1 + S_2 = S$.

Час руху тіла знаходимо з закону рівномірного руху



$$t_1 = S / 2v_1; \quad t_2 = S / 2v_2,$$

$$v_{\text{сер.}} = \frac{S}{\frac{S}{2v_1} + \frac{S}{2v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$v_{\text{сер.}} = \frac{2 \cdot 80 \cdot 40}{120} = 53,3 \text{ км/год.}$$

Відповідь: середня швидкість руху автомобіля 53,3 км/год.

Приклад 2.

Два велосипедиста рухаються назустріч один одному. Перший має швидкість 18 км і рухається рівносповільнено з прискоренням 20 м/с^2 . Другий має швидкість 5,4 м/с. Через який час вони зустрінуться? Яке переміщення зробив кожний з них, якщо на початок руху відстань між ними 130 м?

Дано:

$$v_{01} = 18 \text{ км/год}$$

$$v_{02} = 5,4 \text{ км/год}$$

$$a_1 = 20 \text{ см/с}^2$$

$$a_2 = 0,2 \text{ м/с}^2$$

$$S_1, S_2, t - ?$$

Сі:

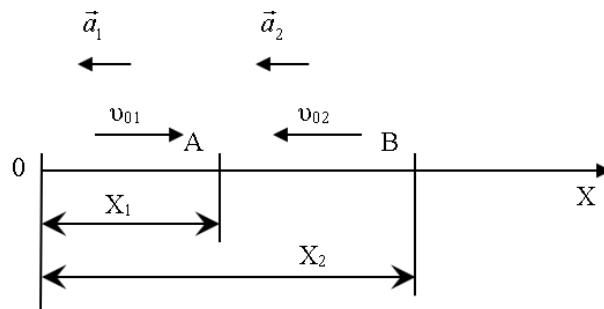
$$v_{01} = 5 \text{ м/с}$$

$$v_{02} = 5 \text{ м/с}$$

$$a_1 = 0,2 \text{ м/с}^2$$

$$a_2 = 0,2 \text{ м/с}^2$$

Розв'язок:



Вісь x співпадає з напрямком руху першого тіла, а початок координат - з точкою "0", де знаходилось тіло на початку свого руху ($t=0$) ($x=0$). Тоді друге тіло знаходилось у точці B і його координата початкова $X_{02}=130\text{м}$. Запишемо рівняння руху цих тіл.

$$X_1 = v_{01}t - \frac{a_1 t^2}{2}; \quad X_2 = v_{02}t - \frac{a_2 t^2}{2}; \quad S_1 = X_1; \quad S_2 = X_{02} - X_1$$

Тіла рухалися одночасно, тому $t_1 = t_2 = t$. У момент зустрічі у точці A тіла мають однакову координату: $X_1 = X_2$

$$v_{01}t - \frac{a_1 t^2}{2} = X_{02} - v_{02}t - \frac{a_2 t^2}{2} \Rightarrow v_{01}t = X_{02} - v_{02}t,$$

$$t = \frac{X_{02}}{v_{01} + v_{02}}; \quad t = \frac{130}{5 + 1,5} = 20 \text{ с},$$

$$X_1 = 5 \cdot 20 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 400 = 60 \text{ м},$$

$$X_2 = 130 - 60 = 70 \text{ м}.$$

Відповідь: велосипедисти зустрінуться через 20с, перший проїде 60 м, а другий - 70 м.

Приклад 3

Тіло вільно падає з висоти 490 м. Визначити переміщення тіла в останню секунду падіння.

Дано:

$$g = 9,8 \text{ м/с}$$

$$h = 490 \text{ м}$$

$$\Delta t = 1 \text{ с}$$

$$\Delta y - ?$$

Розв'язок:

Вісь координат зв'яжемо з тілом, яке знаходиться на висоті h і додатковий напрям вісі Y виберемо у низ.

$$\Delta Y = Y_2 - Y_1; \text{ коли тіло впаде на землю.}$$

$$Y_2 = h = gt_2^2 / 2; \quad (1.2.1)$$

Коли тіло буде у точці A , його координата

$$y_1 = g(t_2 - \Delta t)^2 / 2.$$

Так як час руху тіла $t_1 = t_2 - \Delta t$ тоді

$$\Delta y = gt_2^2 - g / 2(t_2 - \Delta t)^2;$$

$$\Delta y = g / 2(t_2^2 - t_2^2 + 2t_2\Delta t - \Delta t^2) = g / 2\Delta(2t_2 - \Delta t).$$

Час t_2 знаходимо з рівняння (1.2.1)

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Отже

$$\Delta y = g\Delta t / 2 \left(2\sqrt{\frac{2h}{g}} - \Delta t \right).$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$\Delta y \approx 9,8 \cdot 1 / 2 \left(2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 490}{9,8}} - 1 \right) = 93 \text{ м.}$$

Перевіримо одиниці отриманої величини:

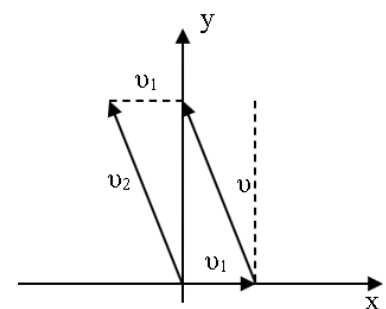
$$[\Delta y] = [g] \cdot [\Delta t] \left(\sqrt{\frac{[h]}{[g]}} - [\Delta t] \right) = \frac{\text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}^2} \left(\sqrt{\frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}} - \text{с} \right) = \text{м.}$$

Відповідь: в останню секунду тіло пройде 93 м.

Приклад 4.

Човен рухається перпендикулярно до берега зі швидкістю 2 м/с. Швидкість течії 5 км/год. Під яким кутом до вісі "Y" і з якою швидкістю відносно поверхні води човен тримає курс?

Дано: $v = 2 \text{ м/с}$ $v_1 = 5 \text{ км/год}$ $\alpha, v_2 - ?$	Сі: $v_1 = 1,4 \text{ м/с}$	Розв'язок: Розглядаємо рух човна відносно берега. Тоді швидкість човна $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, де \vec{v}_1 - швидкість течії води,
--	---------------------------------------	---



\vec{v}_2 - швидкість човна відносно води. Так як $v \perp v_1$ по умові задачі, то

$$v_2 = \sqrt{v^2 + v_1^2}; \quad v_2 = \sqrt{1,4^2 + 2^2} \approx 2,4 \text{ м/с};$$

$$\text{tg} \alpha = v_1 / v; \quad \alpha = \text{arctg}(v_1 / v).$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$\alpha = \text{arctg}(1,4 / 2) \approx 0,84 \text{ рад.}$$

Відповідь: човен рухається зі швидкістю 2,4 м/с.

Приклад 5

Літак летить горизонтально зі швидкістю 360 км/год на висоті 490 м. Коли він пролітає над точкою A , з нього кидають вантаж на який відстань від точки A він впаде на землю?

Дано:

$$v_0 = 360 \text{ км/ год}$$

$$h = 490 \text{ м}$$

$$g = 9,8 \text{ м/ с}^2$$

$$S - ?$$

Розв'язок:

Початок координат зв'яжемо з точкою A . Одночасно тіло приймає участь у двох рухах рівномірний і прямолінійний рух вздовж вісі X і вільне падіння з початковою швидкістю $v_{0y} = 0$ вздовж вісі Y .

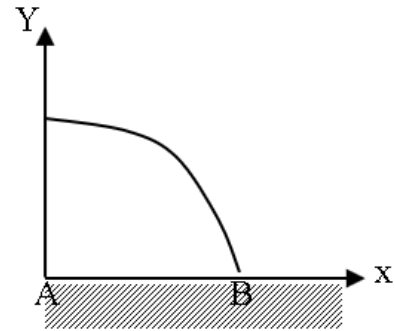
$$\left. \begin{aligned} X = S = AB = v_0 t \\ v = v_0 - gt^2 / 2 \end{aligned} \right\} \text{ під час падіння } y=0; \quad v_0 = h.$$

Тоді

$$h = gt^2 / 2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad S = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$S = 100 \sqrt{\frac{2 \cdot 490}{9,8}} = 10^3 \text{ м.}$$



Відповідь: вантаж впаде на землю на відстані 10^3 м від точки A .

Приклад 6.

Тіло кинуте зі швидкістю 50 м/с під кутом 35° до горизонту. Визначити максимальну висоту підйому і дальність польоту.

Дано:

$$v_0 = 50 \text{ м/ с}$$

$$\alpha = 35^\circ \approx 0,61 \text{ рад}$$

$$h, S - ?$$

Розв'язок:

Початок системи відліку зв'яжемо з моментом, коли тіло вилітає. Запишемо рівняння руху тіла

$$x = v_{0x} \cdot t; \quad (1.2.2)$$

$$y = v_{0y} - gt^2 / 2. \quad (1.2.3).$$

Швидкість тіла вздовж вісі Y змінюється по закону

$$v_y = v_{0y} - gt. \quad (1.2.4).$$

Для точки A час $t = t_{\max}$; $Y = h$; $v_y = 0$.

Тоді рівняння (1.2.4) має вигляд:

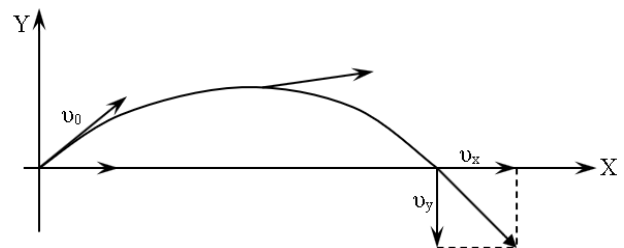
$$0 = v_{0y} - gt_{\max}, \quad t_{\max} = v_{0y} / g.$$

Застосовуючи рівняння (1.2.3) до точки A , маємо:

$$h = v_{0y} \cdot v_{0y} / g - gv_{0y}^2 / 2g^2 = \frac{v_{0y}^2}{2g}.$$

Враховуючи, що $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ сполучаємо

$$h = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g.$$



Зробивши розрахунки, одержимо:

$$h = \frac{50^2 \cdot 0,57^2}{2 \cdot 9,8} \approx 41,3 \text{ м}$$

Залишимо рівняння (1.2.3) до точки B , коли тіло падає на землю:

$$t = t_B; \quad y = 0; \quad x = S, \quad 0 = v_{oy} t_B - g^2 t_B / 2,$$

де t_B - це час руху тіла до точки B .

$$t_B = 2v_{oy} / g = 2v_0 \sin \alpha / g; \quad (1.2.5)$$

$$S = v_{ox} t_B; \quad v_{ox} = v_0 \cos \alpha \quad (1.2.6)$$

$$S = v_o \cdot v_0 \cdot 2 \cos \alpha \sin \alpha / g = v_0^2 \sin 2\alpha / g; \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$S = \frac{50^2 \cdot 0,94}{9,8} \approx 240 \text{ м.}$$

Відповідь: максимальна висота польоту 41,3м, а далекість польоту 240 м.

Приклад 7

Тіло рухається вздовж вісі X по закону $x = 6 - 3t + 2t^2$. Знайти середню швидкість тіла і прискорення за час 1-4с. Побудувати графіки переміщення, швидкості та прискорення.

Дано:

$$x = 6 - 3t + 2t^2$$

$$t_1 = 1\text{с}$$

$$t_2 = 4\text{с}$$

$$\langle v \rangle, \quad a - ?$$

Розв'язок:

Знайдемо залежність швидкості від часу. Швидкість, за визначенням, є першою похідною від переміщення по часу:

$$v = \frac{dx}{dt}. \quad (1.2.7)$$

Підставимо у формулу (1.2.7) надану в умові залежність координати від часу:

$$v = \frac{d}{dt}(6 - 3t + 2t^2) = -3 + 4t. \quad (1.2.8)$$

Середня швидкість визначається за виразом

$$\langle v \rangle = \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (1.2.9)$$

Визначимо швидкість тіла у моменти часу t_1 і t_2

$$v_1 = -3 + 4 \cdot 1 = 1 \text{ м/с}, \quad v_2 = -3 + 4 \cdot 4 = 13 \text{ м/с}.$$

та за виразом (1.2.9) отримаємо:

$$\langle v \rangle = \frac{1 + 13}{2} = 7 \text{ м/с}.$$

Визначимо прискорення тіла. Прискорення, за визначенням, є першою похідною від швидкості по часу:

$$a = \frac{dv}{dt}. \quad (1.2.10)$$

Підставимо у формулу (1.2.10) отриману залежність (1.2.8):

$$a = \frac{d}{dt}(-3 + 4t).$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

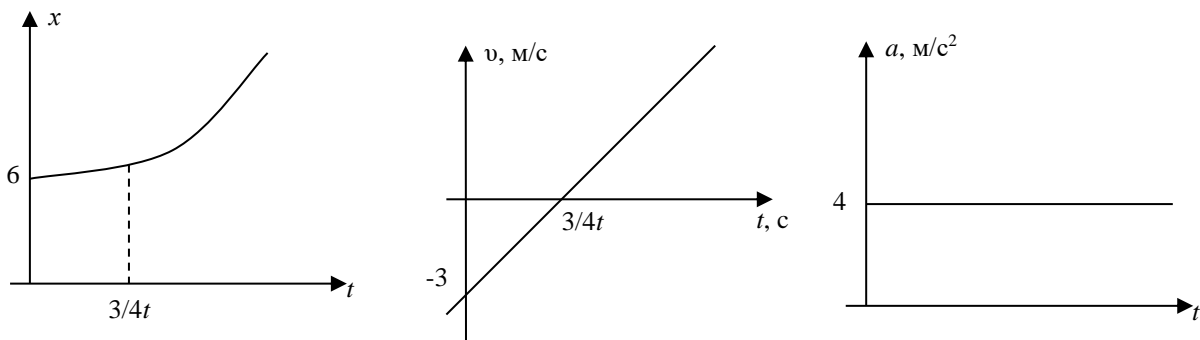
$$a = \frac{d}{dt}(-3 + 4t) = 4 \text{ м/с}^2 = \text{const}.$$

Із порівняння рівняння руху, наданого в умові, з рівнянням рівноприскореного прямолінійного руху:

$$x = x_0 + v_0 t + at^2 / 2$$

$$x = 6 - 3t + 2t^2$$

отримаємо $x_0 = 6 \text{ м}$; $v_0 = -3 \text{ м/с}$.



Приклад 8.

Колесо під час обертання має початкову частоту 5 с^{-1} . Під час гальмування за 1 хвилину його частота зменшилася до 3 с^{-1} . Знайти кутове прискорення колеса і кількість обертів, які воно зробило.

Дано:

$$v_0 = 5 \text{ с}^{-1}$$

$$v = 3 \text{ с}^{-1}$$

$$t = 60 \text{ с}$$

$$\varepsilon, N - ?$$

Розв'язок:

Запишемо рівняння руху колеса:

$$\varphi = \omega_0 t - \varepsilon t^2 / 2, \quad (1.2.11)$$

та залежність кутової швидкості від часу:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t. \quad (1.2.12)$$

Повний кут повороту тіла виразимо через кількість обертів:

$$\varphi = 2\pi N. \quad (1.2.13)$$

Зв'язок кутової швидкості з частотою обертання:

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (1.2.14)$$

Отже, рівняння (1.2.12) можна записати:

$$2\pi\nu = 2\pi\nu_0 - \varepsilon t \Rightarrow \varepsilon = \frac{2\pi\nu_0 - 2\pi\nu}{t} = \frac{2\pi(\nu_0 - \nu)}{t}$$

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot (5 - 3)}{60} = 0,21 \text{ рад/с}^2$$

Підставимо (1.2.13) у (1.2.11) тоді

$$2\pi N = 2\pi v_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} \Rightarrow N = v_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{4\pi}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$N = 5 \cdot 60 - \frac{0,21 \cdot 60^2}{4 \cdot 3,14} = 240.$$

Відповідь: кутове прискорення колеса $0,21 \text{ рад/с}^2$ і колесо зробило 240 обертів.

Приклад 9

Колесо обертається по закону $\phi = 4 + 5t - t^2$. Знайти кутову швидкість, лінійну швидкість і повне прискорення точок, якщо вони знаходяться на ободі колеса у кінці першої секунди обертання. Радіус колеса 20 см.

<p>Дано: $\phi = 4 + 5t - t^2$ $R = 20 \text{ см}$ $t = 1 \text{ с}$ <hr style="width: 100%;"/> $\omega, v, a - ?$</p>	<p>Сі: $R = 0,2 \text{ м}$</p>	<p>Розв'язок: За означенням кутова швидкість дорівнює першій похідній кута повороту за часом: $\omega = \frac{d\phi}{dt}. \quad (1.2.15)$ Підставимо у формулу (1.2.15) надану в умові залежність: $\omega = \frac{d}{dt}(4 + 5t - t^2) = 5 - 3t^2. \quad (1.2.16)$</p>
---	---	---

Розрахуємо кутову швидкість точок у кінці першої секунди обертання:

$$\omega = 5 - 3 \cdot 1 = 2 \text{ рад/с}$$

Із зв'язку лінійної та кутової швидкостей:

$$v = \omega \cdot R$$

розрахуємо лінійну швидкість точок у кінці першої секунди обертання

$$v = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м/с}.$$

За означенням кутове прискорення дорівнює першій похідній кутової швидкості за часом:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.2.17)$$

Підставимо у формулу (1.2.17) отриману залежність (1.2.16)

$$\varepsilon = \frac{d}{dt}(5 - 3t^2) = -6t$$

і розрахуємо кутове прискорення точок у кінці першої секунди обертання

$$\varepsilon = -6 \cdot 1 = -6 \text{ рад/с}^2.$$

Повне прискорення

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

де тангенційне та нормальне прискорення:

$$a_{\tau} = \varepsilon \cdot R, \quad a_n = \omega^2 \cdot R.$$

Тоді

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$a = 0,2\sqrt{(-6)^2 + (2)^4} \approx 1,44 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: кутова швидкість точок 2 рад/с, лінійна швидкість точок 0,4 м/с, повне прискорення точок 1,44 м/с².

Приклад 10

Тіло обертається згідно закону $\varphi = 20t - 2t^3$. Через який час тіло зупиниться?

Дано:

$$\frac{\varphi = 20t - 2t^3}{t_3 - ?}$$

Розв'язок:

Знайдемо залежність кутової швидкості від часу. Кутова швидкість, за визначенням, є перша похідна від кута повороту по часу:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.2.18)$$

Підставимо у формулу (1.2.18) надану в умові залежність:

$$\omega = \frac{d}{dt}(20t - 2t^3) = 20 - 6t^2 \quad (1.2.19)$$

Зупинка тіла означає, що його кутова швидкість стає рівною нулю $20 - 6t_3^2 = 0$. Звідси знайдемо час зупинки

$$t_3 = \sqrt{\frac{20}{6}} = 1,826 \text{ с.}$$

Відповідь: тіло зупиниться через 1,826 с.

1.3 Задачі для самостійного розв'язування

1. Першу половину часу свого руху автомобіль рухався зі швидкістю $v_1=80$ км/год, а другу половину часу - зі швидкістю $v_2=40$ км/год. Яка середня швидкість руху автомобіля (у км/год)?

2. Знайти швидкість v відносно берега ріки: а) човна, що іде за течією; б) човна, що іде проти течії; в) човна, що іде під кутом 90° до течії. Швидкість течії ріки $u=1$ м/с, швидкість човна відносно води $v_0=2$ м/с.

3. Камінь кинули вертикально угору на висоту 10 м. Через який час t він упаде на землю? На яку висоту h підніметься камінь, якщо початкову швидкість каменю збільшити вдвічі?

4. Поїзд рухається рівносповільнено, маючи початкову швидкість $v_0=54,0$ км/год

і прискорення $a = -0,50 \text{ м/с}^2$. Через який час t і на якій відстані S від початку гальмування поїзд зупиниться.

5. М'яч кинутий з швидкістю $v_0 = 10,00 \text{ м/с}$ під кутом 40° до горизонту. На яку висоту h підніметься м'яч? На якій відстані l від місця кидання він упаде на землю? Який час t камінь буде в русі?

6. Знайти радіус R колеса, що обертається, якщо відомо що лінійна швидкість v_1 точки, яка, лежить на ободі, в 2,5 рази більша лінійної швидкості v_2 точки, яка лежить на відстані $r = 5,00 \text{ см}$ ближче до вісі колеса.

7. Колесо обертаючись рівноприскорено, досягло кутової швидкості $\omega = 20,0 \text{ рад/с}$ через $N = 10$ обертів після початку обертання. Знайти кутове прискорення ε колеса.

8. Вентилятор обертається з частотою $\nu = 900 \text{ об/хв}$. Після вимикання, вентилятор, обертаючись рівносповільнено, зробив до зупинки $N = 75$ обертів. Який час t пройшов з моменту вимикання вентилятора до повної його зупинки?

9. Точка рухається по колу радіусом $R = 10 \text{ см}$ з постійним тангенціальним a_t прискоренням. Знайти нормальне a_n прискорення точки через час $t = 20 \text{ с}$ після початку руху, якщо відомо що до кінця п'ятого оберту після початку руху лінійна швидкість точки $v = 10 \text{ см/с}$.

10. Колесо радіусом $R = 0,1 \text{ м}$ обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу дається рівнянням $\phi = A + Bt + Ct^3$, де $B = 2 \text{ рад/с}$ і $C = 1 \text{ рад/с}^3$ для точок які знаходяться на ободі колеса, знайти через час $t = 2 \text{ с}$ після початку руху: а) кутову швидкість ω ; б) лінійну швидкість v ; в) кутове прискорення ε ; д) нормальне a_n , і тангенціальне a_t прискорення.

2 Динаміка

2.1 Основні поняття, закони і формули

Динаміка - розділ механіки, що вивчає рух і взаємодію механічних об'єктів, зміни характеристик їх руху під дією сили. Сила - міра взаємодії тіл під час якої тіла деформуються, або набувають прискорення. Сила - векторна величина. Вона характеризується числовим значенням, напрямком дії і точкою прикладання .

Сила гравітаційної взаємодії об'єктів природи

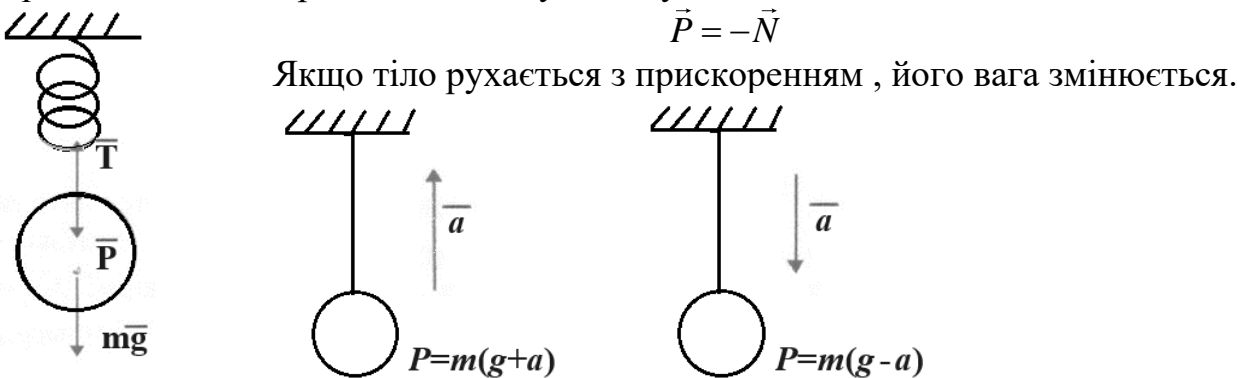
$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \quad (2.1.1)$$

де G - гравітаційна стала ($G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ м/кг·с²).

Прискорення вільного падіння "g" створюється притяганням тіла до землі. Цю силу прийнято називати силою тяжіння землі \vec{F}_T . Вона прикладена до "центра тяжіння тіла", спрямована до центра Землі, а модуль її дорівнює:

$$\vec{F}_T = m\vec{g}. \quad (2.1.2)$$

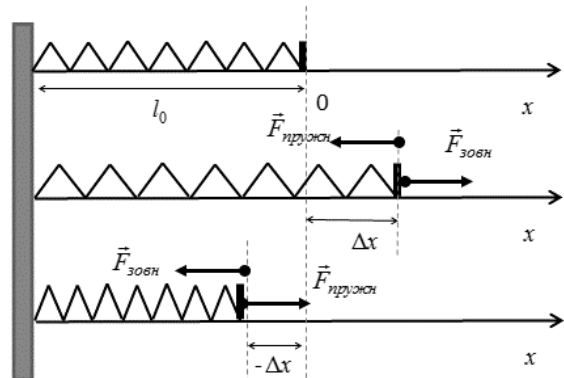
Вага тіла P - це сила, з якою воно діє на нитку підвісу, або горизонтальну опору. Отже вага тіла прикладена до опори, або до підвісу і спрямована до центру Землі. Модуль ваги $P=mg$ лише тоді, коли тіло нерухоме або рухається прямолінійно і рівномірно. Сила ваги рівна і протилежна силі реакції горизонтальної опори N , або натягу підвісу - T .



Важливим випадком реакції опори є пружна сила $\vec{F}_{пр}$. Вона виникає під час деформації пружини. Гук експериментально показав, що модуль цієї сили пропорційний величині зміщення кінця пружини.

$$F_{пр} = -k \cdot \Delta x, \quad (2.1.3)$$

де k - характеристика жорсткості даної пружини. Знак "-" показує, що напрям $\vec{F}_{пр}$ протилежний напрямку зміщення пружини .



Сила тертя \vec{F}_{np} прикладена у точці дотику -тіл, лежить у площині їх дотику і напрямлена проти швидкості руху тіла по опорі. При ковзанні тіла по опорі модуль сили тертя записують у вигляді формули Кулона-Алеонтонна:

$$F_{тер} = \mu \cdot N,$$

де N - реакція опори, μ - коефіцієнт тертя ковзання. Вектор реакції опори N завжди спрямований перпендикулярно до дотичної площини у точці дотику. Реакція опори тим більше, чим дужче деформується тіла у точці дотику.

Найважливішим у динаміці є три закони Ньютона. Вони пояснюють взаємозв'язок сил, характеристик тіл та їх руху.

I Закон Ньютона: якщо рівнодіюча всіх сил, прикладених до матеріальної точки, дорівнює нулю, то точка знаходиться у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху.

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{v} = const$$

Отже, стан спокою і рівномірного прямолінійного руху з точки зору динаміки не відрізняються.

II Закон Ньютона: зміна імпульсу ΔP за інтервал часу Δt дорівнює рівнодіючій силі і відбувається за напрямком її дії.

$$\frac{\Delta \vec{P}}{t} = \vec{F}; \quad \Delta \vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1; \quad \vec{P}_1 = m\vec{v}_1; \quad \vec{P}_2 = m\vec{v}_2;$$

отже

$$\frac{m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{\Delta t} = \vec{F} \Rightarrow m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Отже, в інерційній системі відліку прискорення частинки пропорційне результуючій прикладних до неї сил і обернено пропорційне масі частинки. Якщо з бігом часу рівнодіюча не змінюється, тіло рухається рівноприскорено.

$$\vec{F} = const; \quad \vec{a} = const$$

Якщо $\vec{F} = 0$, то і $\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = const$

III Закон: Сили, з якими два тіла діють одне на одне ,однакові за модулем, протилежні за напрямком, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Ці сили прикладені до різних тіл.

2.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 1.

Вагон масою 20 т рухається рівносповільнено з прискоренням $0,3 \text{ м/с}^2$ і початковою швидкістю 54 км/год. Знайти силу гальмування, що діє на вагон, час гальмування і переміщення до зупинки.

Дано:

$$m = 20 \text{ т}$$

$$a = 0,3 \text{ м/с}^2$$

$$\frac{v_0}{\text{ГОД}} = 54 \text{ км/}$$

$$F, t, S - ?$$

СІ:

$$m = 2 \cdot 10^4 \text{ кг}$$

$$a = 0,3 \text{ м/с}^2$$

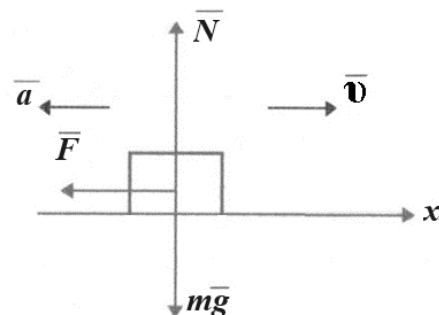
$$v_0 = 15 \text{ м/с}$$

Розв'язок:

На тіло діють: сила тяжіння $m\vec{g}$; сила реакції опори \vec{N} і сила гальмування, $-\vec{F}$;
Запишемо друге рівняння Ньютона у векторному вигляді

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} \quad (2.2.1)$$

За додатковий напрям вісі x візьмемо напрям руху вагона. Так як рух рівносповільнений, вектор прискорення спрямований у бік, протилежний напрямку руху. Знайдемо проекцію рівняння (2.2.1) на вісь x .



$$-F = -ma \Rightarrow F = ma.$$

Зробивши розрахунки, одержимо чисельне значення сили гальмування:

$$F = 2 \cdot 10^4 \cdot 0,3 \text{ Н} = 6 \text{ кН}$$

Час руху вагона до зупинки, і пройдений шлях знайдемо з рівнянь кінематики:

$$v = v_0 - at,$$

так як $v = 0$, то

$$v_0 = at \Rightarrow t = \frac{v_0}{a}; \quad t = \frac{15}{0,3} = 50 \text{ с.}$$

$$2aS = v_0^2 - v^2 \Rightarrow S = \frac{v_0^2}{2a}; \quad S = \frac{15^2}{2 \cdot 0,3} = 375 \text{ м.}$$

Відповідь: Сила гальмування 6 кН, час гальмування 50 с, шлях до зупинки 375 м.

Приклад 2.

Людина, маса якої 70 кг, піднімається у ліфті, який рухається в рівносповільнено угору з прискоренням 1 м/с^2 . Визначити силу тиску людини на підлогу кабіни.

Дано:

$$m = 70 \text{ кг}$$

$$a = 1 \text{ м/с}^2$$

$$F = ?$$

Розв'язок:

На людину діє сила тяжіння і сила реакції підлоги кабіни.

Прискорення спрямовано униз $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$

Знайдемо проекцію цих векторів на вісь y .

$$-ma = -mg + N \Rightarrow N = m(g - a)$$

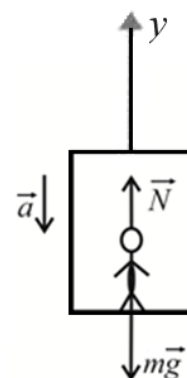
$$N = 70 \cdot (9,8 - 1) = 616 \text{ Н.}$$

За третім законом Ньютона сила тиску людини на підлогу кабіни по модулю дорівнює силі реакції пола кабіни. Отже, $P = N = 616 \text{ Н}$.

Відповідь: Сила тиску людини на підлогу кабіни 616 Н.

Приклад 3.

Вантаж масою 45 кг переміщується дією сили 294 Н, яка направлена під кутом 30° до горизонту. Коефіцієнт тертя вантажу о площину 0,1. Визначити прискорення, з яким рухається вантаж.



Дано:

$$F = 294 \text{ Н}$$

$$m = 45 \text{ кг}$$

$$\mu = 0,1$$

$$\alpha = 30^\circ \approx 0,52 \text{ рад}$$

$$a = ?$$

Розв'язок:

На вантаж діють сили: сила тяжіння – $m\vec{g}$; сила тертя – $\vec{F}_{\text{тер}}$; сила тяги – \vec{F} ; сила реакції опори – \vec{N} .

Запишемо третій закон Ньютона у векторному вигляді:

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}}. \quad (2.2.2)$$

Вибираємо напрямки вісі x і y . Знайдемо проекцію сил і прискорення на вісь x і y .

$$ox: ma = F_x - F_{\text{тер}} \quad (2.2.3)$$

$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$oy: 0 = F_y - mg + N \quad (2.2.4)$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

Зрівнянь (2.2.3) і (2.2.4) знайдемо

$$N = mg - F \cdot \sin \alpha \quad (2.2.5)$$

Ми знаємо, що $F_{\text{тер}} = \mu \cdot N$. Отже,

$$F_{\text{тер}} = \mu(mg - F \cdot \sin \alpha) \quad (2.2.6)$$

Підставимо рівняння (2.2.6) у рівняння (2.2.2)

$$F \cdot \cos \alpha - \mu(mg - F \cdot \sin \alpha) = ma \Rightarrow a = \frac{F \cdot \cos \alpha - \mu(mg - F \cdot \sin \alpha)}{m}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$a = \frac{294 \cdot 0,87 - 0,1 \cdot (45 \cdot 9,8 - 294 \cdot 0,5)}{45} \approx 5,9 \text{ м/с}^2$$

Відповідь: Вантаж рухається з прискоренням $5,9 \text{ м/с}^2$

Приклад 4

Автомобіль масою 1 т піднімається у гору схил якої 30° під дією сили тяги 4 кН . Знайти прискорення автомобіля, враховуючи, що сила опори не залежить від швидкості і складає $0,1$ від сили нормальної реакції опори.

Дано:

$$m = 1 \text{ т}$$

$$F = 7 \text{ кН}$$

$$\alpha = 30^\circ \approx 0,52 \text{ рад}$$

$$\mu = 0,1$$

$$a = ?$$

СІ:

$$m = 10^3 \text{ кг}$$

$$F = 7 \cdot 10^3 \text{ Н}$$

Розв'язок:

На автомобіль діють сили: сила тяжіння – mg , сила нормальної реакції – \vec{N} , сила тяги – \vec{F} , сила тертя – $\vec{F}_{\text{тер}}$.

Вісь x спрямовано в бік руху автомобіля.

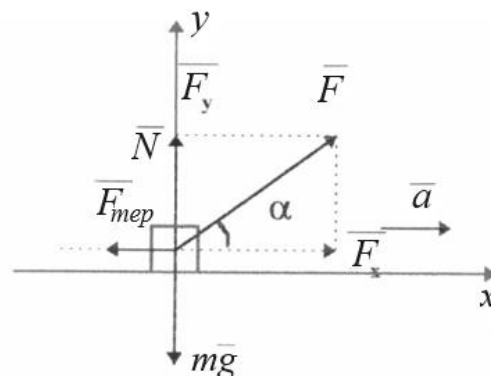
Запишемо II закон Ньютона у векторному вигляді:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}}.$$

Знайдемо проекцію сил і прискорення на вісь x і y :

$$ox: ma = -mg_x + F_x - F_{\text{тер}} \quad (2.2.7)$$

$$oy: 0 = -mg_y + N \quad (2.2.8)$$



$$mg_x = mg \cdot \sin \alpha$$

$$mg_y = mg \cdot \cos \alpha$$

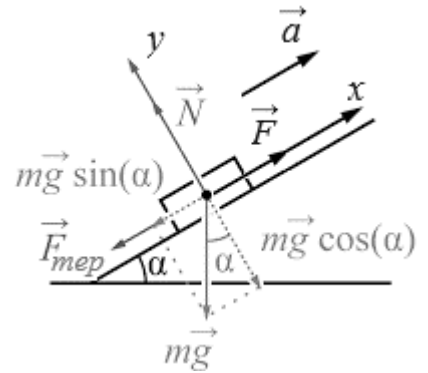
Ми знаємо, що $\vec{F}_{\text{тер}} = \mu \cdot N$. З рівняння (2.2.7):

$$N = mg \cdot \cos \alpha.$$

Тоді рівняння (2.2.7) можливо записати так :

$$ma = -mg \sin \alpha + F - \mu \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$a = \frac{F - mg(\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)}{m}.$$



Зробивши розрахунки, одержимо:

$$a = \frac{7 \cdot 10^3 - 10^3 \cdot 9,8(0,5 + 0,1 \cdot 0,87)}{10^3} = 1,2 \text{ м/с}^2$$

Відповідь: прискорення автомобіля 1,2 м/с²

Приклад 5

До нитки, перекинutoї через нерухомий блок, підвішено вантажі. Чому дорівнює сила натягу нитки, якщо один з вантажів маси 3 кг пройшов шлях 2 м за час 2 с після початку руху?

Дано:	Розв'язок:
$m = 3 \text{ кг}$	Запишемо II рівняння Ньютона
$S = 2 \text{ м}$	$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$
$t = 2 \text{ с}$	1) Якщо прискорення вантажу спрямоване вниз:
$T = ?$	$ma = mg - T \Rightarrow a = g - \frac{T}{m}$

Запишемо рівняння руху вантажу:

$$s = \frac{at^2}{2} = \left(g - \frac{T}{m}\right) \frac{t^2}{2} \Rightarrow T = m \left(g - \frac{2s}{t^2}\right).$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$T = 3 \cdot \left(9,8 - \frac{2 \cdot 2}{2^2}\right) = 26,4 \text{ Н}.$$

2) Якщо прискорення вантажу спрямоване вгору:

$$ma = T - mg \Rightarrow a = \frac{T}{m} - g$$

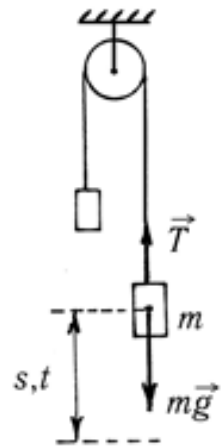
Запишемо рівняння руху вантажу:

$$s = \frac{at^2}{2} = \left(\frac{T}{m} - g\right) \frac{t^2}{2} \Rightarrow T = m \left(g + \frac{2s}{t^2}\right).$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$T = 3 \cdot \left(9,8 + \frac{2 \cdot 2}{2^2}\right) = 32,4 \text{ Н}.$$

Відповідь: сила натягу нитки: 1) 26,4 Н; 2) 32,4 Н.



Приклад 6.

Автомобіль масою 5т проїжджає по опуклому мосту зі швидкістю 21,6 км/год. З якою силою він натискає на середину моста, якщо його кривизна 50м.

Дано:

$$m = 5 \text{ т}$$

$$v = 21,6 \text{ км/ год}$$

$$R = 50 \text{ м}$$

$$F = ?$$

СІ:

$$m = 5 \cdot 10^3 \text{ кг}$$

$$v = 6 \text{ м/ с}$$

Розв'язок:

На автомобіль діють сили: сила тяжіння - $m\vec{g}$; сила нормальної реакції моста - \vec{N} .

Вісь у спрямовано вздовж радіуса - R.
Рівняння Ньютона у векторному виді:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

У проекції на вісь у;

$$ma_{\text{доц}} = mg - N, \quad (2.2.8)$$

де доцентрове прискорення $a_{\text{доц}} = \frac{v^2}{R}$,

тоді рівняння (2.2.8) набуває виду:

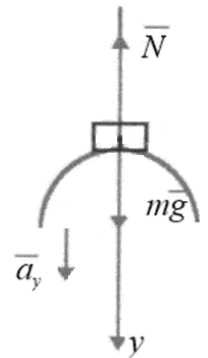
$$\frac{mv^2}{R} = mg - N \Rightarrow N = mg - \frac{mv^2}{R}; \quad N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right).$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$N = 5 \cdot 10^3 \cdot \left(9,8 - \frac{36}{50}\right) \approx 4,5 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

За III законом Ньютона $F=N=4,5 \cdot 10^4 \text{ Н.}$

Відповідь: Автомобіль натискає на середину моста з силою $4,5 \cdot 10^4 \text{ Н.}$



Приклад 7.

Кулька масою 200 г. підв'язана до ниті і рухається у горизонтальній площині по колу зі сталою швидкістю. Визначити швидкість кульки і період її обертання по колу якщо довжина ниті 1 м, а кут з вертикаллю 30° .

Дано:

$$m = 200 \text{ г}$$

$$l = 1 \text{ м}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$v, T = ?$$

СІ:

$$m = 0,2 \text{ кг}$$

Розв'язок:

На кульку діють лише сила тяжіння mg і сила натягу нитки F_n . Запишемо II рівняння Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + F_n$$

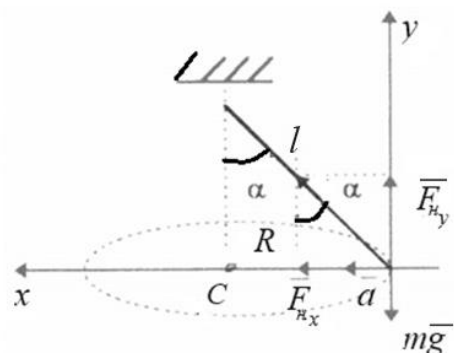
У проекції на вісі x і y рівняння має вид:

$$x: F_{n_x} = ma_x; \quad F_{n_x} = F_n \cdot \sin \alpha$$

$$y: -mg + F_{n_y} = 0 \quad F_{n_y} = F_n \cdot \cos \alpha$$

$$\left. \begin{aligned} F_n \cdot \sin \alpha &= m \frac{v^2}{R} \\ N \cdot \cos \alpha - mg &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F_n \cdot \sin \alpha \cdot R &= mv^2 \\ F_n \cdot \cos \alpha &= mg \end{aligned} \right\}$$

Поділимо рівняння:



$$R \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{g} \Rightarrow v = \sqrt{R \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

З рисунку

$$R = l \cdot \sin \alpha,$$

тоді швидкість кульки

$$v = \sqrt{l \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha} = \sin \alpha \sqrt{\frac{l \cdot g}{\cos \alpha}}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$v = 0,87 \sqrt{9,8 \cdot 1 \cdot (1/0,5)} \approx 3,8 \text{ м/с}.$$

Період обертання

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi l \sin \alpha}{v}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$T = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ}{3,8} \approx 1,4 \text{ с}.$$

Відповідь: швидкість руху кульки 3,8 м/с, а період обертання 1,4с.

Приклад 8.

Кулька закріплена на нитці довжиною 1 м і здійснює коливання у вертикальній площині. Знайти силу натягу нитки, коли вона утворює з вертикаллю кут 60° . Швидкість кулі у той час 1,5 м/с.

Дано:
 $m = 500 \text{ г}$
 $l = 1 \text{ м}$
 $\alpha = 60^\circ$
 $v = 1,5 \text{ м/с}$
 $T = ?$

СІ:
 $m = 0,5 \text{ кг}$

Розв'язок:

На кульку діють сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила натягу нитки \vec{T}

Запишемо другий закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

Спрямуємо вісь y вздовж нитки. Знайдемо проекцію сил і прискорення на вісь y .

$$ma_{\text{д.ц.}} = T - mg_y. \quad (2.2.9)$$

Проекція сили тяжіння на вісь y :

$$mg_y = mg \cdot \cos \alpha. \quad (2.2.10)$$

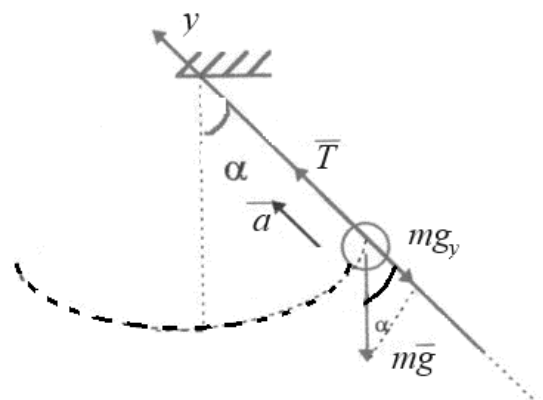
Доцентрове прискорення:

$$a_{\text{д.ц.}} = \frac{v^2}{R}. \quad (2.2.11)$$

Підставимо вирази (2.2.10) і (2.2.11) у рівняння (2.2.9):

$$\frac{mv^2}{R} = T - mg \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$T = m \frac{v^2}{R} + mg \cdot \cos \alpha, \quad R = l \text{ тому:}$$



$$T = m\left(\frac{v^2}{l} + g \cdot \cos \alpha\right).$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$T = 0,5 \cdot ((2,25 / 1) + 9,8 \cdot 0,5) \approx 3,6 \text{ Н.}$$

Відповідь: Сила натягу нитки 3,6 Н.

Приклад 9.

Визначити прискорення тіла, що зісковзує з похилої площини з кутом нахилу 30° до горизонту. Коефіцієнт тертя 0,3.

Дано:

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\mu = 0,3$$

$$a = ?$$

Розв'язок:

Тіло на похилій площині зазнає дію з боку Землі (яка характеризується силою $m\vec{g}$) і дію з боку площини (яка характеризується силою нормальної реакції \vec{N} і силу тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$).

Рівняння другого закону Ньютона матиме вигляд:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}}.$$

Направимо вісь x системи відліку вздовж похилої площини так, щоб її додатний напрям співпадав з напрямом прискорення \vec{a} . Визначимо проекції всіх сил на вісі x і y .

У відповідності з другим законом Ньютона можна записати:

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тер}}.$$

Сила тертя має значення $F_{\text{тер}} = \mu N$. Отже

$$ma = mg \sin \alpha - \mu N.$$

У проекції на вісь y :

$$mg \cos \alpha - N = 0.$$

З двох останніх рівнянь знаходимо прискорення тіла:

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$a = 9,8 \cdot (\sin 30^\circ - 0,3 \cdot \cos 30^\circ) = 3,6 \text{ Н.}$$

Відповідь: Сила натягу нитки 3,6 Н.

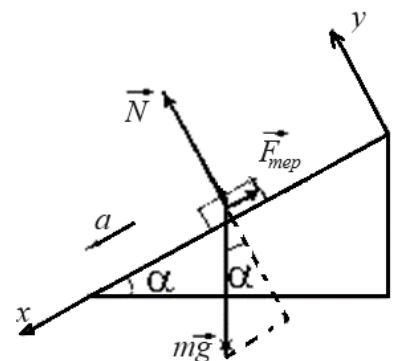
Приклад 10.

До сталевго стержня завдовжки 3 м та діаметра 2 см підвішено вантаж масою $2,5 \cdot 10^3$ кг. Визначити напруження у стержні, його відносне та абсолютне подовження.

Дано:

Сі:

Розв'язок:



$l = 3 \text{ м}$	$d = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$	Напруження σ у будь-якому перерізі стержня з координатою x створюється вагою вантажу mg та вагою тієї частини стержня, яка знаходиться нижче перерізу
$d = 2 \text{ см}$		
$m = 2,5 \cdot 10^3 \text{ кг}$		
$\rho_{cm} = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$		
$E_{cm} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$		
$\sigma, \varepsilon, \Delta l - ?$		$\rho \frac{\pi d^2}{4} (l-x) g .$

$$\sigma(x) = \frac{P}{S} = \frac{m + \rho \frac{\pi d^2}{4} (l-x)}{\frac{\pi d^2}{4}} g .$$

Таким чином, напруження в стержні залежить від координати x . Підставивши числові значення, одержимо:

$$\sigma(x) = 7,81 \cdot 10^7 + 7,65(3-x) \cdot 10^4 ,$$

де σ – у Па, x – у метрах.

Середнє значення напруження:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\sigma(0) + \sigma(l)}{2} ,$$

$$\langle \sigma \rangle = \frac{7,81 \cdot 10^7 + 7,65 \cdot 3 \cdot 10^4 + 7,81 \cdot 10^7}{2} = 7,81 \cdot 10^7 \text{ Па} .$$

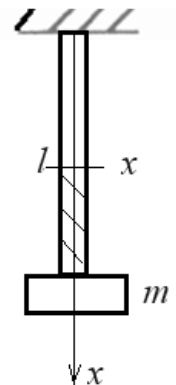
Відносне подовження:

$$\varepsilon = \frac{\langle \sigma \rangle}{E} , \quad \varepsilon = \frac{7,81 \cdot 10^7}{2 \cdot 10^{11}} = 3,91 \cdot 10^{-4} .$$

Абсолютне подовження:

$$\Delta l = \varepsilon l , \quad \Delta l = 3,91 \cdot 10^{-4} \cdot 3 = 1,17 \cdot 10^{-3} \text{ м} .$$

Відповідь: Напруження у стержні $\sigma(x) = 7,81 \cdot 10^7 + 7,65(3-x) \cdot 10^4$, де σ – у Па, x – у метрах; відносне подовження стержня $3,91 \cdot 10^{-4}$ та абсолютне подовження стержня $1,17 \text{ мм}$.



2.3 Задачі для самостійного розв'язування

1. Тіло масою $m=0,5 \text{ кг}$ рухається прямолінійно так, що залежність шляху S , що проходить тіло на протязі часу t , має вигляд: $S=A-Bt+Ct^2-Dt^3$, де $C=5 \text{ м/с}^2$, $D=1 \text{ м/с}^3$. Знайти силу F , що діє на тіло наприкінці першої секунди руху.

2. Вагон масою $m=20 \text{ т}$ рухається рівносповільнено с прискоренням $a=0,3 \text{ м/с}^2$ та початковою швидкістю $v_0=54 \text{ км/год}$. Знайти силу F , що діє на вагон, час t руху вагона до зупинки та переміщення S вагона.

3. До нитки підвішений вантаж масою $m=1 \text{ кг}$. Знайти силу натягу нитки T , якщо нитку з вантажем: а) піднімати с прискоренням $a=5 \text{ м/с}^2$. б) опускати з таким самим прискоренням.

4. Вантаж масою $m=50$ кг рівноприскорено піднімають за допомогою канату вертикально вгору на протязі двох секунд на висоту $h=10$ м. Визначити силу натягу канату T .
5. Людина масою $m=70$ кг піднімається в ліфті, що рухається рівносповільнено вертикально вгору з прискоренням $a=1$ м/с². Визначити силу тиску P людини на підлогу кабіни ліфту.
6. Автомобіль масою 1 т піднімається по шосе на схилі з кутом $\alpha=30^\circ$ під дією сили $F=7$ кН. Знайти прискорення автомобіля a , якщо сила опору поверхні шосе $F_{\text{тер}}$ не залежить від швидкості і складає 0,1 від сили нормальної реакції опори N .
7. Під час руху на автомобілі масою $m=1$ т діє сила тертя, $k=0,1$. Знайти силу тяги мотору автомобіля, якщо він рухається з постійною швидкістю: а) вгору з схилом $h=1$ м на кожні $S=25$ м шляху; б) під гору з тим же схилом.
8. Автомобіль з вантажем масою $m=5$ т рухається по випуклому мосту зі швидкістю $v=21,6$ км/год. З якою силою F він тисне на середину моста, якщо радіус кривизни моста $R=50$ м?
9. На шнурі, який перекинуто через нерухомий блок, знаходяться вантажі масами $m_1=0,3$ кг, $m_2=0,2$ кг. З яким прискоренням a рухаються вантажі?
10. Потяг вагою $P=4,9 \cdot 10^6$ Н після припинення тяги паровоза під дією сили тертя $F_{\text{тер}}=9,8 \cdot 10^4$ Н зупиняється через $t=60$ с. З якою швидкістю v рухався потяг?

3. Закони збереження імпульсу та енергії

3.1 Основні поняття, закони і формули

Найбільш загальною векторною характеристикою поступального руху є імпульс тіла \vec{P} . Це добуток маси тіла на його швидкість руху:

$$\vec{P} = m\vec{v}, [P] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} \right]$$

З другого закону Ньютона відомо, що $\vec{F} = d\vec{P} / dt$; у скалярному вигляді

$$F = \frac{dP}{dt},$$

де dP - зміна імпульсу тіла за інтервал часу dt .

$$dP = m\omega_1 - m\omega_2 \quad F\Delta t \text{ - це імпульс сили.}$$

Отже, імпульс сили дорівнює зміні імпульсу тіла. Для визначення імпульсу системи тіл або точок необхідно знайти векторну суму імпульсів окремих частин системи.

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n$$

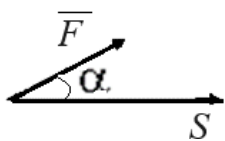
Якщо система замкнена (ізолювана) і на неї не діють зовнішні сили (або вони весь час зрівноважені), то $\vec{F} = 0$ і зміна імпульсу відсутня: $\Delta p = 0$, а отже, імпульс системи лишається незмінним

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 + \dots + m_n\vec{v}'_n,$$

де v_i - швидкості тіл у початковий, а v'_i - швидкості цих же тіл у будь-який інший момент. Це твердження називають законом збереження імпульсу для замкненої системи тіл.

Це універсальний закон, тобто виконується завжди. На відміну від буденного розуміння роботи як корисної діяльності людини у фізиці роботу A виконує сила \vec{F} , рухаючи довільне тіло на відстань уздовж лінії своєї дії

$$A = FS; \quad [A] = [\text{Н} \cdot \text{м}] = [\text{Дж}]$$



Якщо між векторами сили і напрямом переміщення кут α , то формула матиме вигляд $A = FS \cos \alpha$ Роботу змінної сили

треба розраховувати по формулі $A = \int_{S_2}^{S_1} F_s dS$. Сила

перпендикулярна до переміщення, не виконує роботи і не змінює модуль швидкості тіла.

Потужність - це робота, яка виконується за одиницю часу.

$$N = A / t; \quad [N] = [\text{Дж} / \text{с}] = [\text{Вт}]$$

Якщо вектори \vec{F} і \vec{v} мають однаковий напрям потужність можна визначити: $N = Fv$

Енергія E - це скалярна фізична характеристика усіх форм руху матерії та варіантів її взаємодій.

Енергію механічного руху називають кінетичною E_k , а енергію механічної взаємодії - потенціальною E_n .

Зміна енергії тіла (системи) E дорівнює роботі A , яку виконала система, або яку виконали над нею .

$$\Delta E = A; \Rightarrow A = E_1 - E_2 \quad [E] = [\text{Дж}]$$

Повна механічна енергія, це сума кінетичної енергії і потенціальної

$$E = E_k + E_n.$$

Виконану роботу можна обчислити за зміною його кінетичної енергії

$$A = E_{k2} - E_{k1}; \quad A = m / 2(v_2^2 - v_1^2), \quad E_k = mv_1^2 / 2 = P_2 / 2m$$

або за зміною його потенціальної енергії $A = -E_n = -(E_{n2} - E_{n1}) = E_{n1} - E_{n2}$

Якщо на тіло діє сила тяжіння, то вона виконує роботу $A = -mg(h_2 - h_1)$, отже $E_n = mgh$.

Кінетична енергія завжди позитивна, а потенціальна може мати і від'ємне значення. Ще одним видом механічної потенціальної енергії є енергія деформації. Стиснена на відстань x пружина з жорсткістю k має потенціальну енергію:

$$E_n = \frac{1}{2} F_n x = \frac{1}{2} kx \cdot x = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{F^2}{2k}. \quad \text{Тоді } A = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2).$$

Так як при розпрямленні її на відстань x середня сила дорівнює половині максимальній.

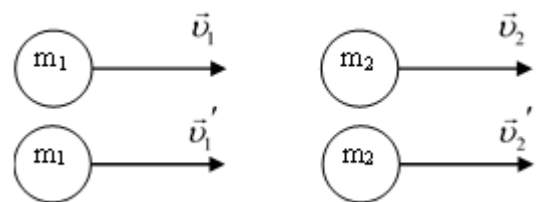
Надзвичайно важливе теоретичне та практичне значення має закон збереження енергії. Енергія має безліч форм: механічну, теплову енергію молекулярного руху, електричну енергію систем зарядів. Одна форма може переходити в іншу.

Якщо сил тертя немає і тепло не утворюється, то механічна енергія $E = E_k + E_n$ залишається сталою у процесі руху або взаємодії тіл. Це твердження відоме як закон збереження механічної енергії. Наприклад, під час вільного падіння без опору повітря виконується співвідношення; $mgH = mgh + mv^2 / 2$.

Прикладом застосування законів збереження імпульсу і енергії є удар. Удар - це дуже короткочасна взаємодія двох тіл та більше. Абсолютно пружній удар-тіла не деформуються під час взаємодії і їх кінетична енергія після удару перетворюється у кінетичну. Для такого удару виконується і закон збереження імпульсу і закон збереження енергії.

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V_1' + m_2 V_2' \quad (3.1.1)$$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2} \quad (3.1.2)$$



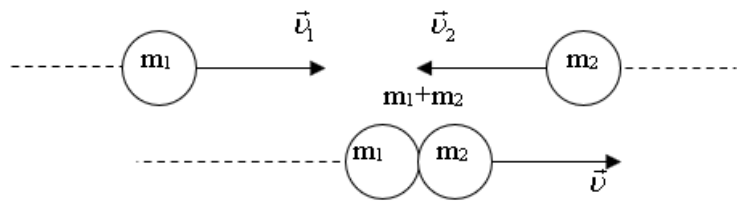
Після перетворення рівняння (3.1.1) і (3.1.2) можна сполучити що

$$\left. \begin{aligned} m_1(v_1 - v_1') &= m_2(v_2' - v_2) \\ m_1(v_1^2 - v_1'^2) &= m_2(v_2'^2 - v_2^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (v_1 + v_1') = (v_2 + v_2')$$

абсолютно не пружній удар - після співудару тіла рухаються як одне тіло. Швидкість їх руху можна знайти з закону збереження імпульсу:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Якщо тіла рухаються назустріч, то вони будуть рухатись в той бік, в який рухається тіло з більшим імпульсом. Якщо $m_1 = m_2$, то $v = v_1 + v_2 / 2$



Закон збереження механічної енергії не виконується, т. як частина кінетичної енергії перетворюється у теплову енергію. Цю "втрату" енергії можна визначити:

$$\Delta T = (m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2) - (m_1 + m_2) v^2 / 2.$$

Коли на тіло діють зовнішні сили, повна механічна енергія системи змінюється. При цьому виконується співвідношення $A = \Delta E = E_2 - E_1$, де A - робота зовнішніх сил. Це співвідношення можна використовувати і коли діють неконсервативні сили (сила тертя, опору). Тоді A - це робота цих сил.

3.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 1:

Тіло маса якого 0,2 кг падає з висоти 1 м з прискоренням 8 м/с^2 . Знайти зміну імпульса тіла.

Дано:	Розв'язок:
$m = 0,2 \text{ кг}$	Імпульс змінюється тому, що тіло рухається з прискоренням і його швидкість збільшується
$h = 1 \text{ м}$	$\Delta(m\vec{v}) = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = m(\vec{v} - \vec{v}_0).$
$a = 8 \text{ м/с}^2$	Напрямок вісі у вниз. Знайдемо проекцію рівняння (1) на вісь у
$\Delta(mv) - ?$	

$$\Delta(mv) = m(v - v_0)$$

Тіло почало рух із стану спокою. Отже $v_0 = 0$ для знаходження швидкості v використаємо рівняння:

$$2ah = v - v_0^2 \Rightarrow v = \sqrt{2ah}.$$

Отже

$$\Delta(mv) = m\sqrt{2ah}.$$

Підставивши числові значення, одержимо:

$$\Delta(mv) = 0,2 \cdot \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 1} = 0,8 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Відповідь: імпульс тіла $0,8 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$.

Приклад 2

Снаряд масою 100 кг рухається горизонтально уздовж залізничної дорозі зі швидкістю 500 м/с. Він попадає у вагон з піском, маса якого 10 т, і залишається

там. Знайти швидкість вагона, якщо він рухався зі швидкістю 36 км/год назустріч снаряду.

Дано:

$$m_1 = 100 \text{ кг}$$

$$v_1 = 500 \text{ м/с}$$

$$m_2 = 10 \text{ т}$$

$$v_2 = 36 \text{ км/год}$$

$$u - ?$$

Сі:

$$m_2 = 10 \text{ т}$$

$$v_2 = 36 \text{ км/год}$$

Розв'язок:

Запишемо рівняння для непружного співудару:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{u}$$

Вісь x співпадає з напрямком руху снаряду.

Знайдемо проекцію рівняння на вісь

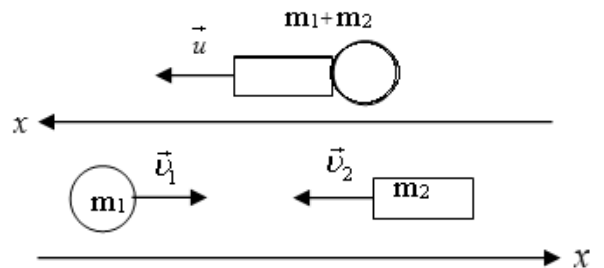
$$ox: m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u \quad (3.2.1)$$

З рівняння (3.2.1) отримаємо

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$u = \frac{100 \cdot 500 - 10^4 \cdot 10}{100 + 10^4} = -5 \text{ м/с}$$



Відповідь: напрям руху вагона не змінився, а його швидкість руху стала 5 м/с.

Приклад 3

Граната, що рухалася зі швидкістю 15 м/с, розірвалася на два уламка, маса яких 6 кг і 14 кг. Швидкість більшого уламка збільшилася до 24 м/с по напрямку руху. Знайти швидкість і напрям руху меншого уламку.

Дано:

$$v = 15 \text{ м/с}$$

$$v_2' = 24 \text{ м/с}$$

$$m_1 = 6 \text{ кг}$$

$$m_2 = 14 \text{ кг}$$

$$v_1' - ?$$

Розв'язок:

Вісь x спрямуємо вздовж руху гранати. Запишемо рівняння у векторному вигляді:

$$m \vec{v} = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \quad (3.2.2)$$

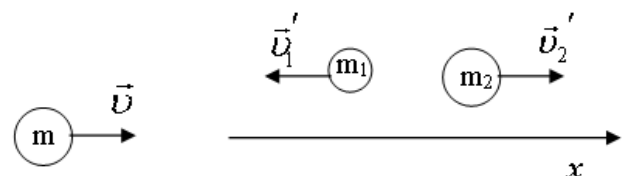
де $m = m_1 + m_2$.

У проекції на вісь x рівняння (3.2.2) має вид:

$$(m_1 + m_2)v = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow v_1' = \frac{(m_1 + m_2)v - m_2 v_2'}{m_1}$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$v_1' = (20 \cdot 15 - 14 \cdot 24) / 6 = -6 \text{ м/с}$$



Відповідь: Знак (-) означає, що менший уламок почне рухатися у бік протилежний руху більшого уламка, зі швидкістю 6 м/с.

Приклад 4

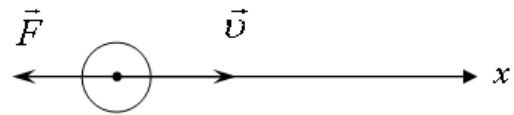
Куля, що рухається зі швидкістю 400 м/с попадає у вал і проходить до зупинки 0,5 м. Визначити силу опору вала кулі, якщо її маса 24 г.

Дано:
$v_0 = 400 \text{ м/с}$
$S = 0,5 \text{ м}$
$m = 24 \text{ г}$
$F - ?$

СІ:
$m = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ кг}$

Розв'язок:

Вісь x спрямуємо вздовж руху кулі.



Отже $\alpha = \pi$, а $\cos \alpha = -1$, тому

$$A = -FS, \quad (3.2.3)$$

інакше:

$$A = E - E_0.$$

За умовою $E=0$, так як куля зупиняється, отже

$$A = -E_0 = -mv_0^2 / 2. \quad (3.2.4)$$

З рівнянь (3.2.3) і (3.2.4) випливає, що $FS = mv_0^2 / 2 \Rightarrow F = mv_0^2 / 2S$.

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$F = 2,4 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{400}{2 \cdot 0,5} \approx 3,8 \text{ кН}.$$

Відповідь: Сила опору вала кулі 3,8 кН.

Приклад 5

Потяг масою 600т набув швидкість 60 км/год, коли пройшов 2,5км. Яку середню потужність він розвив, якщо коефіцієнт тертя 0,005?

Дано:
$m = 600 \text{ т}$
$v = 60 \text{ км/год}$
$S = 2,5 \text{ км}$
$\mu = 0,005$
$N - ?$

СІ:
$m = 6 \cdot 10^5 \text{ кг}$
$v = 16,7 \text{ м/с}$
$S = 2,5 \cdot 10^3 \text{ м}$
$\mu = 5 \cdot 10^{-3}$

Розв'язок:

Вісь x спрямуємо вздовж руху потяга. На потяг діють сили: mg - сила тяжіння, N - сила нормальної реакції; F - сила тяги ; $F_{\text{тер}}$ - сила тертя. Зміна кінетичної енергії:

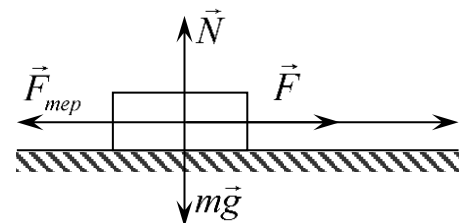
$$\Delta E_k = E - E_0.$$

Початкова кінетична енергія $E_0 = 0$, так як потяг почав рух зі стану спокою $v_0 = 0$.

Кінетична енергія у кінці пройденого шляху:

$$E = mv^2 / 2. \quad (3.2.5)$$

Зміна кінетичної енергії дорівнює роботі зовнішніх сил:



$$\Delta E_k = A,$$

$$A = A_1 + A_2,$$

де A_1 -робота сили тяги, A_2 - робота сили тертя, тому

$$E = A_1 + A_2, \quad (3.2.6), \quad A_1 = F \cdot S, \quad (3.2.7) \quad A_2 = F_{\text{тер}} S. \quad (3.2.8)$$

Робота сили тяжіння і сили нормальної реакції дорівнюють нулю, так як $\alpha=90^\circ$. Для горизонтальної площини:

$$F_{\text{тер}} = \mu N \Rightarrow F_{\text{тер}} = \mu mg. \quad (3.2.9)$$

Отже маємо, якщо підставимо (3.2.6), (3.2.7)-(3.2.9) у рівняння (3.2.5)

$$\frac{mv^2}{2} = FS - \mu mgS \Rightarrow FS = \frac{mv^2}{2} + \mu mgS \Rightarrow$$

$$F = \frac{mv^2}{2S} + \mu mg = m\left(\frac{v^2}{2S} + \mu g\right)$$

Так як треба визначити середню потужність $\langle N \rangle$, то треба взяти і середню швидкість $\langle v \rangle$, а для рівноприскореного руху вона визначається так:

$$\langle v \rangle = \frac{v + v_0}{2} = \frac{v}{2} \quad (v_0 = 0)$$

Для потужності маємо: $\langle N \rangle = F \cdot \langle v \rangle = mv / 2(v^2 / 2S + \mu g)$.

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$\langle N \rangle = 6 \cdot 10^5 \cdot 16,7 / 2 \cdot (16,7^2 / 2 \cdot 2,5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8) \approx 0,52 \text{ МВт.}$$

Відповідь: Потяг розвив середню потужність 0,52 МВт.

Приклад 6

Вантаж масою 2 кг падає з висоти 5 м у м'який ґрунт на глибину 5 см. Визначити середню силу опору ґрунту.

Дано:	Сі:	Розв'язок:
$m = 2 \text{ м}$	$h_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$	Вісь у спрямуємо вертикально вгору. Початок вісі візьмемо на глибині h_1 від поверхні землі. На ділянці CO діє зовнішня сила, тому $A = \Delta E = E - E_0$ $E_0 = mgh + mgh_1,$
$h = 5 \text{ м}$		
$h_1 = 5 \text{ см}$		
$\langle F \rangle = ?$		

де E_0 - це механічна енергія вантажу у точці B , E - механічна енергія на глибині. Так як $y=0$; $v=0$, то і $E=0$

$$A = -E_0 \quad (3.2.10)$$

З другого боку, робота зовнішніх сил на ділянці CO дорівнює

$$A = -\langle F \rangle h_1 \quad (3.2.11)$$

Порівнявши рівняння (3.2.10) і (3.2.11) маємо:

$$-E_0 = -\langle F \rangle h_1 \Rightarrow \langle F \rangle = E_0 / h_1 ; \langle F \rangle = mg(h + h_1) / h_1$$

$$\langle F \rangle = mg(h / h_1 + 1).$$

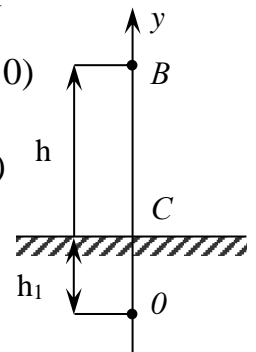
Зробивши розрахунки, одержимо:

$$\langle F \rangle = 2 \cdot 9,8(5 / 0,05 + 1) \text{ Н} \approx 1,98 \text{ кН}$$

Відповідь: Середня сила опору ґрунту 1,98 кН.

Приклад 7

Куля масою m підвішена на нитці довжиною l . Її відхилили на кут 90° від вертикалі і відпустили. Визначити максимальну силу натягу.



Дано:

$m;$

$l;$

$\alpha = 90^\circ$

$T_{\max} - ?$

Розв'язок:

Сила натягу мах, коли тіло проходить положення рівноваги, тобто знаходиться у точці B . На тіло діють дві сили: mg - сила тяжіння і T - сила натягу.

Другий закон Ньютона має вигляд:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

Вісь y спрямована як і вектор \vec{a} , знайдемо проекцію рівняння на вісь y і маємо:

$$ma = -mg + T_{\max}, \quad (3.2.12)$$

де a - доцентрове прискорення $a = v^2 / R$.

Але $l = R$, тому $a = v^2 / l$; з рівняння (3.2.12) випливає, що

$$T_{\max} = mg + mv^2 / l. \quad (3.2.13)$$

Для визначення енергії $E_A = E_B$; $E_A = mgl$; $E_A = mv^2 / 2$.

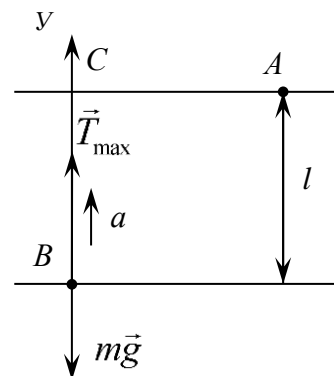
Отже

$$mgl = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gl}.$$

Підставимо у рівняння (3.2.13), отримаємо

$$T_{\max} = mg + m/l \cdot 2gl \Rightarrow T_{\max} = 3mg.$$

Відповідь: максимальна сила потягу $3mg$.



Приклад 8

Знайти роботу, яку треба виконати щоб стиснути пружину жорсткістю 29,4 Н/см на 20 см.

Дано:

$x_1 = 0$

$x_2 = 20 \text{ см}$

$k = 29,4 \text{ Н/см}$

$A - ?$

СІ:

$x_2 = 0,2 \text{ м}$

$k = 29,4 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$

Розв'язок:

Робота по стисненню пружини дорівнює зміні її потенціальної енергії

$$A = \Delta E,$$

де $\Delta E = E - E_0$; $E_0 = 0$ ($x_1 = 0$).

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла:

$$E = \frac{kx_2^2}{2}.$$

Отже, робота по стисненню пружини

$$A = \frac{kx_2^2}{2}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$A = \frac{2,94 \cdot 10^3 \cdot 0,2^2}{2} \text{ Дж} = 58,8 \text{ Дж}.$$

Відповідь: по стисненню пружини була виконана робота 58,8 Дж.

Приклад 9

Кулька рухається горизонтально і попадає у кулю, який закріплена на стержні. Маса кульки у 1000 разів менша за масу кулі. Відстань від точки закріплення до центра кулі 1м. Знайти швидкість кульки якщо відомо, що під час удару стержень відхилився на кут 10°

Дано:
 $m_2 = 1000m_1$
 $l = 1 \text{ м}$
 $\alpha = 10^\circ$
 $v - ?$

Розв'язок:

Для визначення швидкості кулі залишимо закон збереження імпульсу.

$$m_1 \vec{v}_1 = (m_1 + m_2) \vec{v}. \quad (3.2.14)$$

Вісь x напрямлена вздовж руху кульки. Знайдемо проекцію рівняння (3.2.14) на вісь x :

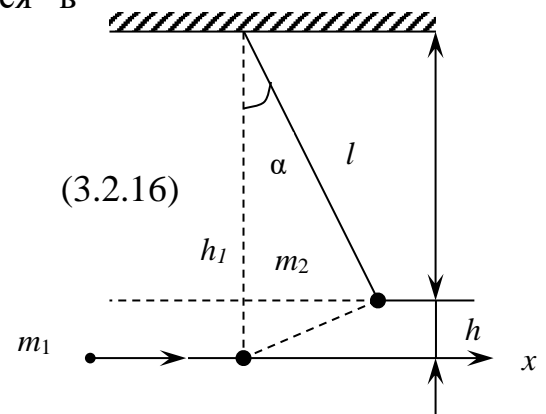
$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v \Rightarrow v = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_1 \quad (3.2.15)$$

де v - швидкість кулі до співудару кулі; v_1 - швидкість кульки і шару після співудару. Щоб знайти цю швидкість застосуємо закон збереження енергії. Кінетична енергія кульки й кулі перетворилася в потенціальну енергію:

$$\frac{(m_1 + m_2) v_1^2}{2} = (m_1 + m_2) gh \Rightarrow v_1^2 = 2gh, \quad (3.2.16)$$

$$v_1 = \sqrt{2gh}.$$

Висота h невідома і її знайдемо з рисунку



$$h = l - h_1; \quad h_1 = l \cos \alpha \Rightarrow h = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha)$$

Але ми знаємо, що $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \alpha / 2$, тому $h = 2l \cdot \sin^2 \alpha / 2$. Підставляємо це визначення h у рівняння (3.2.16)

$$v_1 = \sqrt{2g \cdot 2l \sin^2 \alpha / 2} = 2 \sin \alpha / 2 \sqrt{gl} \quad (3.2.17).$$

А зараз рівняння (3.2.17) підставляємо у рівняння (3.2.15) і знайдемо швидкість кульки:

$$v = \frac{2(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \sin \alpha / 2 \cdot \sqrt{gl}; \quad v = \frac{2(m_1 + 1000m_1)}{m_1} \cdot \sin \alpha / 2 \cdot \sqrt{gl}.$$

Зробивши розрахунки, одержимо:

$$v = \frac{2 \cdot (1 + 1000)}{1} \cdot 0,09 \sqrt{9,8 \cdot 1} \approx 564 \text{ м/с}.$$

Відповідь: швидкість кульки 564 м/с.

Приклад 10

Дві пружини однакової довжини, які мають жорсткість $k_1 = 9,8 \text{ Н/см}$ $k_2 = 19,6 \text{ Н/см}$, з'єднані між собою кінцями (паралельно). Яку роботу треба виконати, щоб

розтягнути пружини на $S_0=1\text{ см}$? Чому буде дорівнювати робота, якщо пружини будуть з'єднані одним кінцем між собою (послідовне).

Дано:	СИ:	Розв'язок:
$k_1 = 9,8 \text{ Н/ см}$	$k_1 = 9,8 \cdot 10^2 \text{ Н/ м}$	Щоб розтягнути, або стиснути пружину, треба прикласти силу, модуль якої залежить від пружних властивостей пружини (закон Гука) $F = -kS_0, \quad F = kS_0.$
$k_2 = 19,6 \text{ Н/ см}$	$k_2 = 19,6 \cdot 10^2 \text{ Н/ м}$	
$S_0 = 1 \text{ см}$	$S_0 = 10^{-2} \text{ м}$	
$A_1, A_2 - ?$		

Робота такої сили може бути визначена за рівнянням:

$$A = F_{\text{сер}} S_0; \quad F_{\text{сер}} = \frac{F + F_0}{2} \Rightarrow A = \frac{FS_0}{2}; \quad A = \frac{kS_0^2}{2}$$

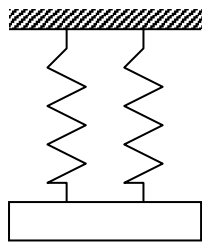
Знайдемо жорсткість при різних формах з'єднання пружин.

Паралельне з'єднання

Загальне розтягнення однакове:

$$S_0 = S_1 = S_2.$$

Модуль сили, що деформує пружини, дорівнює сумі модулів сил F_1 і F_2 .



отже, $F = F_1 + F_2$; $F_1 = k_1 S_1$; $F_2 = k_2 S_2$.

Знаходимо що, $k = k_1 + k_2$.

$$\text{Тому } A_1 = \frac{kS_0^2}{2} = \frac{(k_1 + k_2)S_0^2}{2},$$

$$A_1 = \frac{(9,8 \cdot 10^2 + 19,6 \cdot 10^2) \cdot (10^{-2})^2}{2} \approx 0,147 \text{ Дж}$$

Послідовне з'єднання

При послідовному з'єднанні натяг кожної пружини дорівнює зовнішньої сили:

$$F = F_1 = F_2.$$

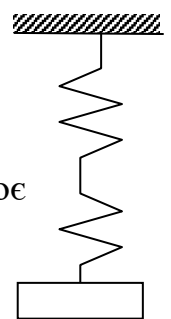
Загальне видовження дорівнює сумі видовженню кожної пружиною: $S_0 = S_1 + S_2$.

З закону Гука $S = F / k$

$$\text{отже, } \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}.$$

$$A_2 = \frac{k \cdot S_0^2}{2} = \frac{k_1 \cdot k_2 S_0^2}{2(k_1 + k_2)}$$

$$A_2 = \frac{9,8 \cdot 10^2 \cdot 19,6 \cdot 10^2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot (9,8 \cdot 10^2 + 19,6 \cdot 10^2)} = 0,037 \text{ Дж}$$



Відповідь: щоб розтягнути пружини при паралельному з'єднанні треба виконати роботу $A_1=0,147$ Дж, а при послідовному з'єднанні пружин роботу треба виконати меншу $A_2=0,037$ Дж.

3.3 Задачі для самостійного розв'язування

- Відзначити роботу A , яку треба виконати, щоб стиснути пружину на $x=10$ см, якщо для її стискання на $x_1=1$ см необхідна сила $F=100$ Н.
- Вагон масою $m=2 \cdot 10^4$ кг, рухаючись зі швидкістю $v=0,5$ м/с, ударяється в два нерухомі пружинні буфери. Знайти найбільше стиснення буферів x , якщо буфер стискається на $x_1=1$ см при дії сили $F=5 \cdot 10^4$ Н.
- Тіло кинуте вертикально угору зі швидкістю $v=16$ м/с. На якій висоті h кінетична енергія тіла буде дорівнювати потенційній енергії?

4. Ковзаняр масою $M=70$ кг, стоячи на ковзанах на льоду, кидає у горизонтальному напрямі камінь масою $m=3$ кг зі швидкістю $v=8$ м/с. Знайти на яку відстань S відкотиться при цьому ковзаняр, якщо відомо, що коефіцієнт тертя об лід $0,02$.
5. Яку роботу A треба зробити, щоб заставити тіло, яке рухається вагою 2 кг: а) підвищити свою швидкість з $v_0=2$ м/с до $v=5$ м/с; б) зупинитись при початковій швидкості $v_0=8$ м/с.
6. Людина масою $m_1=60$ кг, яка біжить зі швидкістю $v_1=8$ км/год доганяє возик масою $m_2=80$ кг рухаючись зі швидкістю $v_2=2,9$ км/ч, та застрибує на нього. З якою швидкістю v буде рухатися возик? З якою швидкістю v' буде рухатися возик, якщо людина бігла на зустріч?
7. На горизонтальних рейках стоїть платформа з піском загальна маса $m_1=5 \cdot 10^3$ кг. У пісок потрапляє снаряд маси $m_2=5$ кг, що летить вздовж райок. У мить попадання швидкість снаряду $v=400$ м/с і спрямована зверху вниз під кутом $\alpha=37^\circ$ до горизонту. Знайти швидкість u платформи, якщо снаряд застряє у піску.
8. Камінь масою $m=0,5$ кг прив'язаний до мотузки довжиною $l=50$ см рівномірно обертається в вертикальній площині. Сила натягу мотузки у нижній точці кола $T=44$ Н, на яку висоту h підніметься камінь, якщо мотузка обірветься тоді коли швидкість буде спрямована вертикально догори?
9. Знайти роботу A , яку треба виконати, для того щоб стиснути пружину на $x=20$ см, якщо сказано, що сила пропорційна стисканню і жорсткість пружини $k=2,94$ Н/м.
10. Гиря масою $m=0,5$ кг падає з деякої висоти на плиту масою $M=1$ кг, яка закріплена на пружині з жорсткістю $k=980$ Н/м. Знайти значення максимального стиснення пружини x , якщо в момент удару гиря мала швидкість $v=5$ м/с, Удар вважати непружним?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Загородній В. В. Загальна фізика. Механіка [Електронний ресурс] : підручник для студентів спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / В. В. Загородній ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – 2-е вид., виправл. і доповн. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,89 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 364 с.
2. Загородній В. В. Механіка в задачах [Електронний ресурс]: навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Прикладна фізика» спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / В. В. Загородній, С. В. Бех ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 4.54 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 402 с.
3. Фізика. Механіка, молекулярна фізика та термодинаміка: навчальний посібник / Ю. О. Шкурдода, О. О. Пасько, О. А. Коваленко. – Суми : Сумський державний університет, 2021. – 221 с.
4. Сергеева О. Є. Основи загальної фізики. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. Електрика [Текст]: навч. посіб. / Сергеева Олександра Євгенівна, Федосов Сергій Никифорович; Одес. нац. акад. харч. технологій, Каф. фізики і матеріалознавства. – Одеса : ОНАХТ, 2018.
5. Збірник задач із загальної фізики [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів інженерно-технічних спеціальностей./ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В.П. Бригінець, І.М. Репалов, Л.П. Пономаренко, Н.О. Якуніна. – Електронні текстові дані (1 файл: 4.1Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 230 с.
6. Ю.І. Горобець, О.Ю. Горобець, А.М. Кучко, С.О. Решетняк, А.М. Красіко, М.Г. Мусієнко, Т.М. Ніколаєва, П.О. Юрачківський, Л.Г. Лосицька. Фізика. Механіка. – К.: Хімджест, 2018. – 192 с.
7. Лекції з механіки: навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей університетів / В. М. Дубовик, В. М. Сухов. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2019. – 312 с.

Навчальне видання

Титаренко Валентина Василівна
Куцева Наталія Олександрівна
Журавльов Михайло Олександрович

ФІЗИКА

**Методичні рекомендації
до самостійної роботи у 3 частинах
Частина 1. Кінематика. Динаміка матеріальної точки**

для здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей
131 Прикладна механіка, 132 Матеріалознавство,
133 Галузеве машинобудування

Видано в авторській редакції

Електронний ресурс.
Підписано до видання 12.11.2024. Авт. арк. 2,95.

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.