

2. ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ РАСПРЕДЕЛЕННАЯ НАГРУЗКА

В настоящем разделе изложены материалы исследований, направленных на построение общего и частных решений задачи об определении напряженно-деформированного состояния грунтового основания, внутри которого приложена осесимметричная горизонтальная распределенная нагрузка.

Материалы исследований изложены в такой последовательности.

Вначале было получено решение для произвольной осесимметричной горизонтальной нагрузки. После этого рассмотрены законы изменения нагрузки по степенному закону и по закону функции Бесселя первого рода с нулевым индексом.

Далее была выполнена апробация полученных таким образом результатов.

2.1. Постановка задачи. Граничные условия

Задача исследований была сформулирована так. Внутри линейного упругого изотропного полупространства [4, 5] на глубине h от его дневной поверхности приложена горизонтальная распределенная осесимметричная нагрузка $T(r)$ (рис. 14). Нагрузка распределена по площади круга радиуса R , а закон ее изменения подчиняется либо зависимости вида

$$T(r) = \begin{cases} T_0 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^n & \text{при } r \leq R; \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (31)$$

либо зависимости вида

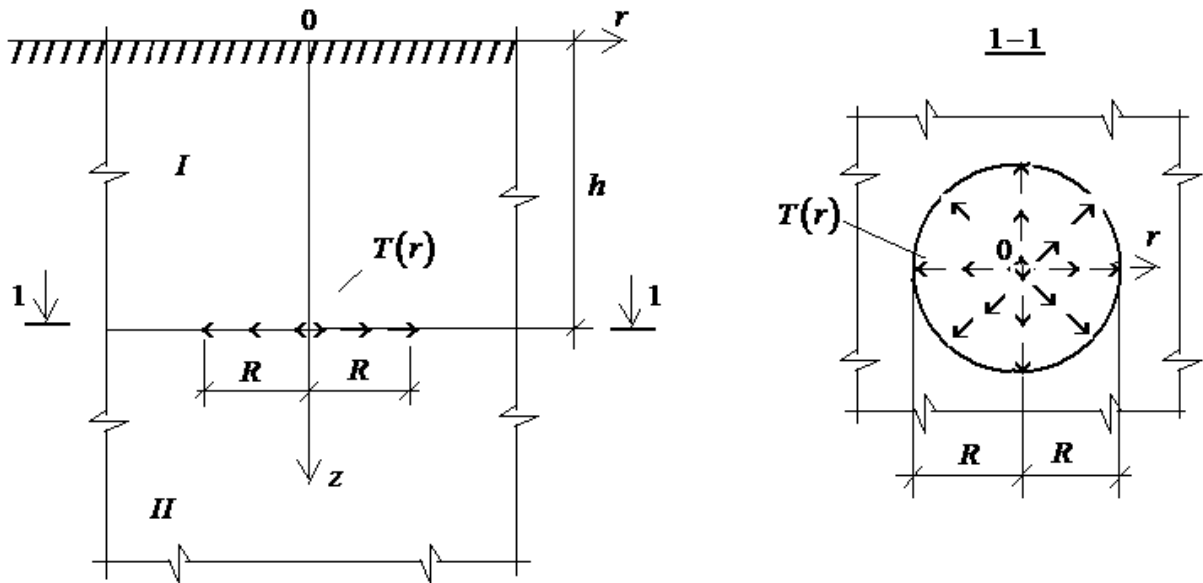


Рис. 14. К определению напряженно-деформированного состояния полупространства, находящегося под воздействием распределенной горизонтальной нагрузки:

I – область основания, расположенная выше отметки приложения нагрузки; *II* – то же, ниже отметки приложения нагрузки

$$T(r) = \begin{cases} T_0 \cdot J_1\left(\mu_i \cdot \frac{r}{R}\right) \text{ при } r \leq R; \\ 0 \text{ при } r > R. \end{cases} \quad (32)$$

Здесь $T(r)$ – зависимость от радиальной координаты приложенной внутри полупространства на глубине $z = h$ распределенной нагрузки (рис. 1); T_0 – коэффициент пропорциональности (имеет размерность МПа); r – текущая координата; R – радиус приложенной внутри основания распределенной нагрузки (рис. 1); $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ – показатель степени (целое число); $J_1(x)$ – функция Бесселя первого рода с единичным индексом; μ_i – i -тый нуль функции Бесселя [3].

Требуется определить напряженно-деформированное состояние

полупространства, находящегося под воздействием распределенной в соответствии с формулами (31) и (32) нагрузки.

Из схемы на рисунке 1 вытекает, что верхняя граница основания свободна от напряжений. В этой связи имеем такие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz}(0, r) &= 0; \\ \tau_{rz}(0, r) &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (33)$$

Здесь σ_{zz} – нормальное вертикальное напряжение; τ_{rz} – касательное напряжение.

Из условий непрерывности напряжений и перемещений на границе контакта областей *I* и *II* (т.е. при $z = h$) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\sigma_{zz}(h - \varepsilon, r) - \sigma_{zz}(h + \varepsilon, r)] &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\tau_{rz}(h - \varepsilon, r) - \tau_{rz}(h + \varepsilon, r)] &= T(r); \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [U(h - \varepsilon, r) - U(h + \varepsilon, r)] &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [W(h - \varepsilon, r) - W(h + \varepsilon, r)] &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (34)$$

Здесь U – перемещение в радиальном направлении; W – то же, в вертикальном; ε – некоторое имеющее размерность длины весьма малое число.

Кроме того, поскольку находящаяся под воздействием внешней нагрузки область основания имеет ограниченные размеры, все напряжения и перемещения при неограниченном возрастании радиуса r и глубины z должны тождественно равняться нулю.

2.2. Алгоритм построения и результаты общего решения задачи

Для построения общего решения используем изложенный в работах [4, 6, 7, 8, 9] алгоритм.

Для определения напряженно-деформированного состояния области I введем в рассмотрение функцию вида:

$$F_1 = \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left[\begin{array}{l} a_1 \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + a_2 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + \\ + a_3 \cdot z \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + a_4 \cdot z \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \end{array} \right] \cdot d\alpha, \quad (35)$$

где a_1, a_2, a_3 и a_4 – подлежащие определению путем удовлетворения граничным условиям коэффициенты, параметрически зависящие от параметра α .

При этом для определения напряженно-деформированного состояния области II введем в рассмотрение функцию вида:

$$F_2 = \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left[a_5 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + a_6 \cdot z \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \right] \cdot d\alpha, \quad (36)$$

где a_5 и a_6 – подлежащие определению путем удовлетворения граничным условиям коэффициенты, параметрически зависящие от параметра α .

Эти функции и их производные по переменной r принимают нулевые значения при $r \rightarrow \infty$. При этом функция F_2 и ее производные принимают нулевые значения при неограниченном возрастании глубины z .

Для удовлетворения граничным условиям (33) и (34) необходимо знать вертикальное нормальное напряжение σ_{zz} , касательное напряжение τ_{rz} , а также радиальное перемещение U и вертикальное перемещение W .

Согласно [9] перемещения и напряжения в основании найдем с использованием формул вида:

$$\sigma_{rr}^{1,2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \cdot \Delta F_{1,2} - \frac{\partial^2 F_{1,2}}{\partial r^2} \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{1,2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \cdot \Delta F_{1,2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_{1,2}}{\partial r} \right);$$

$$\sigma_{zz}^{1,2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \cdot \Delta F_{1,2} - \frac{\partial^2 F_{1,2}}{\partial z^2} \right];$$

$$\tau_{rz}^{1,2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \cdot \Delta F_{1,2} - \frac{\partial^2 F_{1,2}}{\partial z^2} \right];$$

$$U^{1,2} = -\frac{1}{2 \cdot G} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \cdot F_{1,2};$$

$$W^{1,2} = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \left[2 \cdot (1 - \nu) \cdot \Delta F_{1,2} - \frac{\partial^2 F_{1,2}}{\partial z^2} \right]. \quad (37)$$

Здесь G – модуль сдвига основания [4]; ν – коэффициент Пуассона основания [4]; σ_{rr} – радиальное нормальное напряжение; $\sigma_{\theta\theta}$ – то же, тангенциальное; σ_{zz} – то же, вертикальное; τ_{rz} – то же, касательное; U – радиальное напряжение; W – то же, вертикальное. При этом индексами "1" и "2" обозначены напряжения и перемещения, соответствующие I и II областям основания (см. рис. 1).

Далее с использованием равенств (35) и (37) найдем необходимые для удовлетворения граничных условий (33) и (34) напряжения и перемещения. Для области I с использованием формул (35), (36) и (37) найдем:

$$U^1 = -\frac{1}{2 \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} J_1(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot \begin{bmatrix} -a_1 \cdot \alpha \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + a_2 \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} - \\ -a_3 \cdot e^{(\alpha \cdot z)} - a_3 \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{(\alpha \cdot z)} - \\ -a_4 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + a_4 \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \end{bmatrix} \cdot d\alpha;$$

$$W^1 = -\frac{1}{2 \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} J_0(\alpha r) \cdot \alpha \cdot \begin{bmatrix} -4 \cdot k_1 \cdot a_3 \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + 4 \cdot k_1 \cdot a_4 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \\ + a_1 \cdot \alpha \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + a_2 \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + \\ + 2 \cdot a_3 \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + a_3 \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{(\alpha \cdot z)} - \\ - 2 \cdot a_4 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + a_4 \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \end{bmatrix} \cdot d\alpha;$$

$$\sigma_{zz}^1 = \int_0^{\infty} \alpha^2 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot k_2 \cdot a_3 \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + 2 \cdot k_2 \cdot a_4 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} - \\ - a_1 \cdot \alpha \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + a_2 \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} - \\ - 3 \cdot a_3 \cdot e^{(\alpha \cdot z)} - a_3 \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{(\alpha \cdot z)} - \\ - 3 \cdot a_4 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + a_4 \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \end{bmatrix} \cdot d\alpha; \quad (38)$$

$$\tau_{rz}^1 = \int_0^{\infty} \alpha^2 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot \left[\begin{array}{l} -2 \cdot k_1 \cdot a_3 \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + 2 \cdot k_1 \cdot a_4 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + \\ + a_1 \cdot \alpha \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + a_2 \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + \\ + 2 \cdot a_3 \cdot e^{(\alpha \cdot z)} + a_3 \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{(\alpha \cdot z)} - \\ - 2 \cdot a_4 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} + a_4 \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \end{array} \right] \cdot d\alpha. \quad (38)$$

Здесь $k_1 = 1 - \nu$ и $k_2 = 2 - \nu$.

Далее для области основания II с использованием формул (5), (6) и (7) найдем:

$$U^2 = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} J_1(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \cdot [a_5 \cdot \alpha - a_6 + a_6 \cdot z \cdot \alpha] \cdot d\alpha;$$

$$W^2 = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \cdot \left[\begin{array}{l} 4 \cdot k_1 \cdot a_6 + a_5 \cdot \alpha - \\ - 2 \cdot a_6 + a_6 \cdot z \cdot \alpha \end{array} \right] \cdot d\alpha;$$

$$\sigma_{zz}^2 = \int_0^{\infty} \alpha^2 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left[\begin{array}{l} 2 \cdot k_2 \cdot a_6 + a_5 \cdot \alpha - \\ - 3 \cdot a_6 + a_6 \cdot z \cdot \alpha \end{array} \right] \cdot d\alpha;$$

$$\tau_{rz,2} = \int_0^{\infty} \alpha^2 \cdot e^{(-\alpha \cdot z)} \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot \left[\begin{array}{l} 2 \cdot k_1 \cdot a_6 + a_5 \cdot \alpha - \\ - 2 \cdot a_6 + a_6 \cdot z \cdot \alpha \end{array} \right] \cdot d\alpha. \quad (39)$$

Далее подставим (38) и (39) в граничные условия (33) и (34) и найдем коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6 . Имеем:

$$a_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{[-4 \cdot k_1 + 2 + \alpha \cdot h] \cdot A(\alpha) \cdot e^{(-\alpha \cdot h)}}{k_1 \cdot \alpha^2}; \quad a_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{A(\alpha) \cdot e^{(-\alpha \cdot h)}}{\alpha \cdot k_1};$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\begin{bmatrix} -4 \cdot k_2 + 2 \cdot k_2 \cdot \alpha \cdot h + 2 + 12 \cdot k_1 \\ -5 \cdot \alpha \cdot h - 8 \cdot k_1^2 + 2 \cdot k_1 \cdot \alpha \cdot h \end{bmatrix} \cdot A(\alpha) \cdot e^{(-\alpha \cdot h)}}{k_1 \cdot (2 \cdot k_1 + 1 - 2 \cdot k_2) \cdot \alpha^2};$$

$$a_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{A(\alpha) \cdot e^{(-\alpha \cdot h)} \cdot (-1 - 6 \cdot k_1 + 2 \cdot \alpha \cdot h + 2 \cdot k_2)}{\alpha \cdot k_1 \cdot (2 \cdot k_1 + 1 - 2 \cdot k_2)}$$

$$a_5 = \frac{A(\alpha)}{4 \cdot e^{(-\alpha \cdot h)} \cdot \alpha^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot k_1 + 1 - \\ -2 \cdot k_2 \end{pmatrix} \cdot k_1} \cdot \begin{bmatrix} -2 + 4 \cdot k_2 + 12 \cdot k_1 \cdot e^{(-2 \cdot \alpha \cdot h)} - \\ -5 \cdot h \cdot \alpha \cdot e^{(-2 \cdot \alpha \cdot h)} - \\ -4 \cdot k_2 \cdot e^{(-2 \cdot \alpha \cdot h)} + \\ + 2 \cdot e^{(-2 \cdot \alpha \cdot h)} + \alpha \cdot h + 8 \cdot k_1^2 - \\ -8 \cdot k_1^2 \cdot e^{(-2 \cdot \alpha \cdot h)} \cdot k_1 + \\ + 2 \cdot k_1 \cdot \alpha \cdot h - \\ -2 \cdot k_2 \cdot \alpha \cdot h - 8 \cdot k_1 \cdot k_2 + \\ + 2 \cdot h \cdot \alpha \cdot e^{(-2 \cdot \alpha \cdot h)} \cdot k_1 + \\ + 2 \cdot h \cdot \alpha \cdot e^{(-2 \cdot \alpha \cdot h)} \cdot k_2 \end{bmatrix}; \quad (40)$$

$$a_6 = \frac{A(\alpha)}{4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot k_1 + 1 - \\ -2 \cdot k_2 \end{pmatrix} \cdot e^{(-\alpha \cdot h)} \cdot \alpha \cdot k_1} \cdot \begin{bmatrix} -(e^{(-\alpha \cdot h)})^2 + \\ +2 \cdot h \cdot \alpha \cdot (e^{(-\alpha \cdot h)})^2 - \\ -6 \cdot k_1 \cdot (e^{(-\alpha \cdot h)})^2 + \\ +2 \cdot k_2 \cdot (e^{(-\alpha \cdot h)})^2 + \\ +1 - 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_1 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} A(\alpha) &= \int_0^R T(r) \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot r \cdot dr; \\ u \\ T(r) &= \int_0^\infty A(\alpha) \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha; \end{aligned} \right\}, \quad (41)$$

где $T(r)$ – внешняя нагрузка (см. рис. 14).

Далее с использованием (37), (40) и (41) найдем напряжения и перемещения в грунтовом основании. Имеем:

$$W_1 = \frac{1}{8} \cdot \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha \cdot r) \cdot A(\alpha)}{G \cdot (-1 + \nu)} \cdot \begin{bmatrix} e^{[\alpha \cdot (-h+z)]} \cdot \alpha \cdot h - \\ -e^{[\alpha \cdot (-h+z)]} \cdot z \cdot \alpha - \\ -4 \cdot e^{[-\alpha \cdot (-h+z)]} + \\ +12 \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot \nu + \end{bmatrix} \cdot d\alpha +; \quad (42)$$

$$+ \int_0^{\infty} \frac{1}{8} \cdot \frac{J_0(\alpha \cdot r) \cdot A(\alpha)}{G \cdot (-1 + \nu)} \cdot \left[\begin{array}{l} +3 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h + \\ +2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h - \\ -4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu + \\ +4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu - \\ -3 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha - \\ -8 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu^2 \end{array} \right] \cdot d\alpha;$$

$$W_2 = \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\infty} \frac{J_0(\alpha \cdot r) \cdot A(\alpha)}{G \cdot (-1 + \nu)} \cdot \left[\begin{array}{l} \alpha \cdot h \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} - \\ -z \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} - \\ -4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} + \\ +12 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu + \\ +3 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h + \\ +2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h - \\ -4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu + \\ +4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu - \end{array} \right] \cdot d\alpha + \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\infty} \frac{J_0(\alpha \cdot r) \cdot A(\alpha)}{G \cdot (-1 + \nu)} \cdot \left[\begin{array}{l} -3 \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot z \cdot \alpha - \\ -8 \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot \nu^2 \end{array} \right] \cdot d\alpha ; \\
U_1 = & \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \cdot J_1(\alpha \cdot r)}{G \cdot (-1 + \nu)} \cdot \left[\begin{array}{l} e^{[\alpha \cdot (-h+z)]} \cdot z \cdot \alpha - \\ -e^{[\alpha \cdot (-h+z)]} \cdot \alpha \cdot h - \\ -4 \cdot e^{[\alpha \cdot (-h+z)]} \cdot \nu + \\ +3 \cdot e^{[\alpha \cdot (-h+z)]} + \\ +4 \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu - \\ -12 \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot \nu + \\ +5 \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} + \\ +4 \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu - \\ -3 \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot z \cdot \alpha + \\ +2 \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h + \\ +8 \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot \nu^2 - \\ -3 \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot \alpha \cdot h \end{array} \right] \cdot d\alpha ; \tag{42}
\end{aligned}$$

$$U_2 = \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \cdot J_1(\alpha \cdot r)}{G \cdot (-1 + \nu)} \cdot \left[\begin{array}{l} 3 \cdot e^{-\alpha \cdot (-h + z)} \cdot - \\ -4 \cdot \nu \cdot e^{-\alpha \cdot (-h + z)} \cdot + \\ + \alpha \cdot h \cdot e^{-\alpha \cdot (-h + z)} \\ -z \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot (-h + z)} \cdot + \\ +4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h + z)} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu - \\ -12 \cdot e^{-\alpha \cdot (h + z)} \cdot \nu + \\ +5 \cdot e^{-\alpha \cdot (h + z)} \cdot + \\ +4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h + z)} \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu - \\ -3 \cdot e^{-\alpha \cdot (h + z)} \cdot z \cdot \alpha + \\ +2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h + z)} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h + \\ +8 \cdot e^{-\alpha \cdot (h + z)} \cdot \nu^2 - \\ -3 \cdot e^{-\alpha \cdot (h + z)} \cdot \alpha \cdot h \end{array} \right] \cdot d\alpha;$$

$$\sigma_{zz}^1 = \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \cdot \alpha \cdot J_0(\alpha \cdot r)}{(-1 + \nu)} \cdot \left[\begin{array}{l} -e^{-\alpha \cdot (-h + z)} \cdot \alpha \cdot h + \\ +e^{-\alpha \cdot (h + z)} \cdot \alpha \cdot h + \end{array} \right] \cdot d\alpha; \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \cdot \alpha \cdot J_0(\alpha \cdot r)}{(-1+\nu)} \cdot \left[\begin{array}{l}
+e^{\left[\alpha \cdot (-h+z)\right]}_- \\
-e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]}_+ \\
+4 \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu_- \\
-3 \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot z \cdot \alpha_+ \\
+2 \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot \nu_- \\
-2 \cdot e^{\left[\alpha \cdot (-h+z)\right]} \cdot \nu_+ \\
+2 \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h_+ \\
+e^{\left[\alpha \cdot (-h+z)\right]} \cdot z \cdot \alpha
\end{array} \right] \cdot d\alpha;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^2 = \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \cdot \alpha \cdot J_0(\alpha \cdot r)}{(-1+\nu)} \cdot \left[\begin{array}{l}
e^{\left[-\alpha \cdot (-h+z)\right]}_- \\
-2 \cdot \nu \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (-h+z)\right]}_+ \\
+\alpha \cdot h \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (-h+z)\right]}_- \\
-z \cdot \alpha \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (-h+z)\right]}_+ \\
+e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot \alpha \cdot h_- \\
-3 \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot z \cdot \alpha_+
\end{array} \right] \cdot d\alpha; \tag{42}
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \cdot \alpha \cdot J_0(\alpha \cdot r)}{(-1+\nu)} \cdot \left[\begin{array}{l} +2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h- \\ -e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot + \\ +4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu+ \\ +2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu \end{array} \right] \cdot d\alpha;$$

$$\tau_{rz}^1 = \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot \alpha}{(-1+\nu)} \cdot \left[\begin{array}{l} -2 \cdot e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot + \\ +2 \cdot e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot \nu+ \\ +e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot \alpha \cdot h- \\ -e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot z \cdot \alpha+ \\ +2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h- \\ -e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h+ \\ +2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot - \\ -2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu+ \\ +4 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu- \\ -3 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha \end{array} \right] \cdot d\alpha; \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz}^2 &= \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot \alpha}{(-1+\nu)} \cdot \left[\begin{aligned} &2 \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} \cdot \alpha \cdot h - \\ &-2 \cdot \nu \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} \cdot \alpha \cdot h + \\ &+2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h - \\ &-2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h + \\ &+2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h - \\ &-2 \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h + \end{aligned} \right] \cdot d\alpha; \\
\sigma_{\theta\theta}^1 &= \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha)}{r \cdot (-1+\nu)} \cdot \left[\begin{aligned} &-J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot \alpha \cdot h + \\ &+3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot \alpha \cdot h - \\ &-4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot \alpha \cdot h + \\ &+J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot \alpha \cdot h + \\ &+2 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{\alpha \cdot (-h+z)} \cdot \alpha \cdot h + \\ &+4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h - \end{aligned} \right]; \tag{42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha)}{r \cdot (-1 + \nu)} \cdot \left[\begin{aligned}
& -3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h - \\
& -3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha + \\
& +8 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu^2 - \\
& -4 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot h + \\
& +6 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} + \\
& +2 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h + \\
& +4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu - \\
& -12 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu + \\
& +5 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} - \\
& -8 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu^2 + \\
& +8 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu^2 - \\
& -4 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot h + \\
& +6 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} + \\
& +2 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h +
\end{aligned} \right] ; \tag{42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha)}{r \cdot (-1 + \nu)} \cdot \left[\begin{aligned}
& +4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu - \\
& -12 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu + \\
& +5 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} - \\
& -8 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu^2 + \\
& +8 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu^2 - \\
& -4 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot h + \\
& +6 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} + \\
& +2 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h + \\
& +4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu - \\
& -12 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu + \\
& +5 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} - \\
& -8 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu^2
\end{aligned} \right] ; \\
\sigma_{\theta\theta}^2 = \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha)}{r \cdot (-1 + \nu)} \cdot \left[\begin{aligned}
& -J_1(\alpha \cdot r) \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} + \\
& +J_1(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot h \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} +
\end{aligned} \right] \cdot d\alpha + \tag{42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} \Big|_{r+} \\
& +3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} \Big|_{-} \\
& -4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot \nu \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} \Big|_{+} \\
& +4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu \Big|_{-} \\
& -3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h \Big|_{-} \\
& -3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha \Big|_{+} \\
& +8 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu^2 \Big|_{-} \\
& -4 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot h \Big|_{+} \\
& +6 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \Big|_{+} \\
& +2 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h \Big|_{+} \\
& +4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu \Big|_{-} \\
& -12 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu \Big|_{+} \\
& +5 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \Big|_{-} \\
& -8 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu^2 \Big|_{-}
\end{aligned}
\cdot d\alpha; \tag{42}$$

$$\sigma_{rr}^1 = \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha)}{r \cdot (-1 + \nu)} \cdot \left[\begin{array}{l}
-3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[\alpha \cdot (-h + z) \right]} \cdot _ \\
-J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[\alpha \cdot (-h + z) \right]} \cdot \cdot z \cdot \alpha + \\
+4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[\alpha \cdot (-h + z) \right]} \cdot \cdot \nu + \\
+J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[\alpha \cdot (-h + z) \right]} \cdot \cdot \alpha \cdot h + \\
+J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{\left[\alpha \cdot (-h + z) \right]} \cdot \cdot z + \\
+3 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{\left[\alpha \cdot (-h + z) \right]} \cdot _ \\
-2 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{\left[\alpha \cdot (-h + z) \right]} \cdot _ \\
-J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{\left[\alpha \cdot (-h + z) \right]} \cdot \cdot h - \\
-2 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h + z) \right]} \cdot \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h + \\
+3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h + z) \right]} \cdot \cdot \alpha \cdot h + \\
+3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h + z) \right]} \cdot \cdot z \cdot \alpha - \\
-4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h + z) \right]} \cdot \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu - \\
-3 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h + z) \right]} \cdot \cdot h - \\
-6 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h + z) \right]} \cdot \cdot z +
\end{array} \right] \cdot d\alpha; \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha)}{r \cdot (-1 + \nu)} \cdot \left[\begin{aligned}
& + 4 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{-\alpha(h+z)} \cdot z \cdot \nu + \\
& + 2 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^3 \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot z \cdot h + \\
& + 12 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu - \\
& - 6 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} - \\
& - 8 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \nu^2 - \\
& - 5 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} + \\
& + 5 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} - \\
& - 4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (h+z)} \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu
\end{aligned} \right] \cdot d\alpha; \\
\sigma_{rr}^2 = \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha)}{r(-1+\nu)} \cdot \left[\begin{aligned}
& 4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot \nu \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} - \\
& - J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot z \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} r + \\
& + 3 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} \cdot r + \\
& + J_1(\alpha \cdot r) \cdot z \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} - \\
& - 2 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} - \\
& - 3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{-\alpha \cdot (-h+z)} -
\end{aligned} \right] \cdot d\alpha + \quad (42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha)}{r(-1+\nu)} \cdot \left[\begin{aligned}
& -J_1(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot h \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (-h+z)\right]} + \\
& + J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot h \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (-h+z)\right]} \cdot r - \\
& - 2 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot h + \\
& + 3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot \alpha \cdot h + \\
& + 3 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot z \cdot \alpha - \\
& - 4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot z \cdot \alpha \cdot \nu - \\
& - 3 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot h - \\
& - 3 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot z + \\
& + 4 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^2 \cdot r \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot z \cdot \nu + \\
& + 2 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha^3 \cdot r \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot z \cdot h + \\
& + 12 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot \nu - \\
& - 6 \cdot \nu \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} - \\
& - 8 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} \cdot \nu^2 - \\
& - 5 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{\left[-\alpha \cdot (h+z)\right]} +
\end{aligned} \right] \cdot d\alpha; \quad (42)
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha)}{r(-1+\nu)} \cdot \begin{bmatrix} +5 \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot r \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \\ -4 \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot e^{[-\alpha \cdot (h+z)]} \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu \end{bmatrix} \cdot d\alpha. \quad (42)$$

Далее с использованием верхнего равенства (41) найдем значения функции $A(\alpha)$.

2.3. Частные решения. Распределение внешней нагрузки по закону степенной функции

Вначале найдем значения коэффициента $A(\alpha)$ для степенного закона распределения приложенной внутри полупространства распределенной нагрузки (31).

При $n = 0$ равенство (31) примет вид:

$$T(r) = \begin{cases} T_0 & \text{при } r \leq R; \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (43)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \int_0^R T(r) \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot r \cdot dr = A_1(\alpha) = \\ &= \frac{T_0 \cdot R \cdot \pi}{2 \cdot \alpha} [J_0(R \cdot \alpha) \cdot H_1(R \cdot \alpha) - J_1(R \cdot \alpha) \cdot H_0(R \cdot \alpha)]. \end{aligned} \quad (44)$$

При $n = 1$ равенство (1) примет вид:

$$T(r) = \begin{cases} T_0 \cdot \left(\frac{r}{R}\right) & \text{при } r \leq R; \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (45)$$

В этом случае

$$\begin{aligned}
A(\alpha) &= \int_0^R T(r) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot r \cdot dr = \\
&= \frac{T_0 \cdot R}{\alpha^2} \cdot [R \cdot \alpha \cdot J_0(R \cdot \alpha) - 2 \cdot J_1(R \cdot \alpha)].
\end{aligned} \tag{46}$$

При $n = 2$ равенство (1) примет вид:

$$T(r) = \begin{cases} T_0 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 & \text{при } r \leq R; \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases} \tag{47}$$

В этом случае

$$\begin{aligned}
A(\alpha) &= \int_0^R T(r) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot r \cdot dr = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{T_0 \cdot R}{\alpha^3} \cdot \left[\begin{aligned} &2 \cdot R^2 \cdot \alpha^2 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - 6 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_1(R \cdot \alpha) - \\ &- 3 \cdot \pi \cdot J_0(R \cdot \alpha) \cdot H_1(R \cdot \alpha) + 3 \cdot \pi \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot H_0(R \cdot \alpha) \end{aligned} \right].
\end{aligned} \tag{48}$$

Далее полагая $n = 3, 4, 5, \dots, 11$ найдем последовательно:

– при $n = 3$

$$A(\alpha) = -\frac{T_0 \cdot R}{\alpha^4} \cdot \left[\begin{aligned} &-8 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_0(R \cdot \alpha) + R^3 \cdot \alpha^3 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ &+ 16 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - 4 \cdot R^2 \cdot \alpha^2 \cdot J_1(R \cdot \alpha) \end{aligned} \right]; \tag{49}$$

– при $n=4$

$$A(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_0 \cdot R}{\alpha^5} \cdot \left[\begin{array}{l} -30 \cdot R^2 \cdot \alpha^2 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + 2 \cdot R^4 \cdot \alpha^4 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - \\ -10 \cdot R^3 \cdot \alpha^3 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + 90 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \\ + 45 \cdot \pi \cdot J_0(R \cdot \alpha) \cdot H_1(R \cdot \alpha) - 45 \cdot \pi \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot H_0(R \cdot \alpha) \end{array} \right]; \quad (50)$$

– при $n=5$

$$A(\alpha) = -\frac{T_0 \cdot R}{\alpha^6} \cdot \left[\begin{array}{l} 192 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_0(R \cdot \alpha) - 24 \cdot R^3 \cdot \alpha^3 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ + R^5 \cdot \alpha^5 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - 384 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \\ + 96 \cdot R^2 \cdot \alpha^2 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - 6 \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot R^4 \cdot \alpha^4 \end{array} \right]; \quad (51)$$

– при $n=6$

$$A(\alpha) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{T_0 \cdot R}{\alpha^7} \cdot \left[\begin{array}{l} -70 \cdot R^4 \cdot \alpha^4 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + 1050 \cdot R^2 \cdot \alpha^2 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ + 2 \cdot R^6 \cdot \alpha^6 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + 350 \cdot R^3 \cdot \alpha^3 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - \\ -14 \cdot R^5 \cdot \alpha^5 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - 3150 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_1(R \cdot \alpha) - \\ -1575 \cdot \pi \cdot J_0(R \cdot \alpha) \cdot H_1(R \cdot \alpha) + \\ + 1575 \cdot \pi \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot H_0(R \cdot \alpha) \end{array} \right]; \quad (52)$$

– при $n=7$

$$A(\alpha) = -\frac{T_0 \cdot R}{\alpha^8} \cdot \left[\begin{array}{l} 1152 \cdot R^3 \cdot \alpha^3 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - 48 \cdot R^5 \cdot \alpha^5 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - \\ -9216 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_0(R \cdot \alpha) + J_0(R \cdot \alpha) \cdot R^7 \cdot \alpha^7 - \\ -460 \cdot R^2 \cdot \alpha^2 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + 288 \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot R^4 \cdot \alpha^4 - \\ -8 \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot R^6 \cdot \alpha^6 + 18432 \cdot J_1(R \cdot \alpha) \end{array} \right]; \quad (53)$$

– при $n = 8$

$$A(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_0 \cdot R}{\alpha^9} \cdot \left[\begin{array}{l} -126 \cdot R^6 \cdot \alpha^6 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ +4410 \cdot R^4 \cdot \alpha^4 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - \\ -66150 \cdot R^2 \cdot \alpha^2 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ +2 \cdot R^8 \cdot \alpha^8 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ +882 \cdot R^5 \cdot \alpha^5 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - \\ -22050 \cdot R^3 \cdot \alpha^3 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - \\ -18 \cdot R^7 \cdot \alpha^7 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \\ +198450 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \\ +99225 \cdot \pi \cdot J_0(R \cdot \alpha) \cdot H_1(R \cdot \alpha) - \\ -99225 \cdot \pi \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot H_0(R \cdot \alpha) \end{array} \right]; \quad (54)$$

– при $n = 9$

$$A(\alpha) = -\frac{T_0 \cdot R}{\alpha^{10}} \cdot \left[\begin{array}{l} 3840 \cdot R^5 \cdot \alpha^5 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - \\ -80 \cdot J_0(R \cdot \alpha) \cdot R^7 \cdot \alpha^7 - \\ -92160 \cdot R^3 \cdot \alpha^3 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ +737280 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ +J_0(R \cdot \alpha) \cdot R^9 \cdot \alpha^9 - \\ -23040 \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot R^4 \cdot \alpha^4 + \\ +640 \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot R^6 \cdot \alpha^6 + \\ +368640 \cdot R^2 \cdot \alpha^2 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - \\ -10 \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot R^8 \cdot \alpha^8 - \\ -1474560 \cdot J_1(R \cdot \alpha) \end{array} \right]; \quad (55)$$

– при $n = 10$

$$A(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_0 \cdot R}{\alpha^{11}} \cdot \left[\begin{array}{l} 12474 \cdot R^6 \cdot \alpha^6 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - \\ -436590 \cdot R^4 \cdot \alpha^4 \cdot J_0(R \cdot \alpha) - \\ -198 \cdot R^8 \cdot \alpha^8 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ +6548850 \cdot R^2 \cdot \alpha^2 \cdot J_0(R \cdot \alpha) + \\ +2 \cdot J_0(R \cdot \alpha) \cdot R^{10} \cdot \alpha^{10} + \end{array} \right] +; \quad (56)$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
& +1782 \cdot R^7 \cdot \alpha^7 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - \\
& -87318 \cdot R^5 \cdot \alpha^5 \cdot J_1(R \cdot \alpha) + \\
& +2182950 \cdot R^3 \cdot \alpha^3 \cdot J_1(R \cdot \alpha) - \\
& -22 \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot R^9 \cdot \alpha^9 - \\
& -19646550 \cdot R \cdot \alpha \cdot J_1(R \cdot \alpha) - \\
& -9823275 \cdot \pi \cdot J_0(R \cdot \alpha) \cdot H_1(R \cdot \alpha) + \\
& +9823275 \cdot \pi \cdot J_1(R \cdot \alpha) \cdot H_0(R \cdot \alpha)
\end{aligned} \right] \cdot
\end{aligned} \tag{56}$$

При подстановке $A(\alpha)$, рассчитанных с использованием формул (44),..., (56) функций в формулы (42) и использовании принципа суперпозиции мы можем определять напряженно-деформированное состояние основания для более сложных законов изменения внешней нагрузки, чем это позволяет делать использование каждой из перечисленных формул в отдельности. Такой подход используется при решении ряда задач теории упругости [4].

2.4. Распределения внешней нагрузки по закону функций Бесселя первого рода с единичным индексом. Частные решения

С использованием функций Бесселя первого рода с единичным индексом на интервале $r \in (0, R)$ мы можем аппроксимировать достаточно широкий класс зависимостей приложенной внутри полупространства

нагрузки от координаты [3]. В частности, с их использованием можно аппроксимировать все представленные в разделе (2.3) степенные зависимости. Поэтому определение коэффициентов $A(\alpha)$ для данного класса функций очень важно для решения многих практических задач.

Далее найдем значения коэффициента $A(\alpha)$ для закона распределения приложенной внутри полупространства распределенной нагрузки в соответствии с формулами (32). Имеем:

$$\begin{aligned}
 A_i(\alpha) &= T_0 \cdot \int_0^R J_1\left(\mu_i \cdot \frac{r}{R}\right) \cdot J_1(\alpha \cdot r) \cdot r \cdot dr = \\
 &= T_0 \cdot R^2 \cdot \frac{\mu_i \cdot J_0(\mu_i) \cdot J_1(\alpha \cdot R)}{(\alpha \cdot R)^2 - \mu_i^2}. \tag{57}
 \end{aligned}$$

Здесь μ_i – нули функций Бесселя первого рода с единичным индексом $J_1(x)$ (табл. 1). Кроме того, при $n > 10$ с точностью до сотых долей единицы нули функций Бесселя могут быть установлены с использованием формул (30).

Далее исследуем область применения полученных в разделах 2.3 и 2.4 результатов. Эти данные представлены в разделе 2.5.

2.5. Область применения результатов исследований

При использовании формул (16), (18), (20),..., (56) для практических расчетов с использованием численных методов важно знать, какая погрешность имеет место между фактической зависимостью (31) и вычисленным с использованием численными методами несобственным

интегралом вида $q(r) = \int_0^{\infty} A(\alpha) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha$ (нижнее равенство (41)).

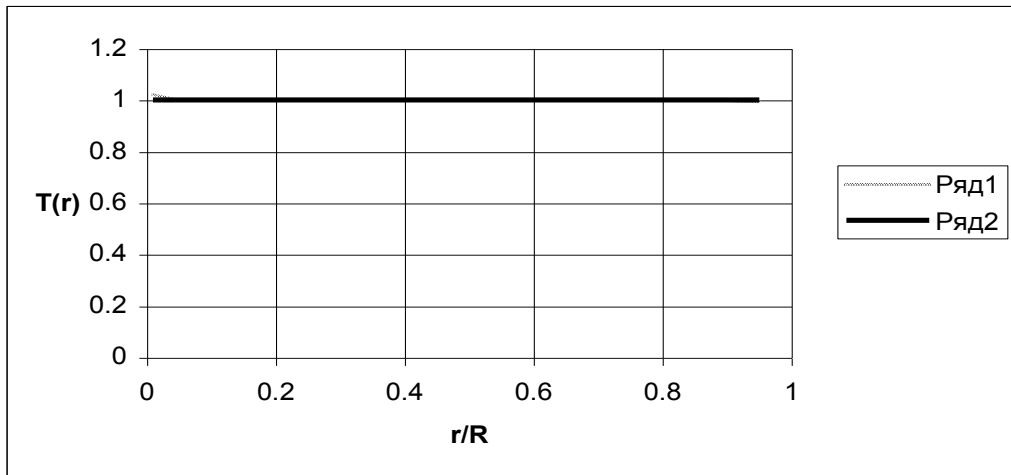


Рис. 15. Зависимости. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2– то же, рассчитанная по формуле (31). Кривые совпадают

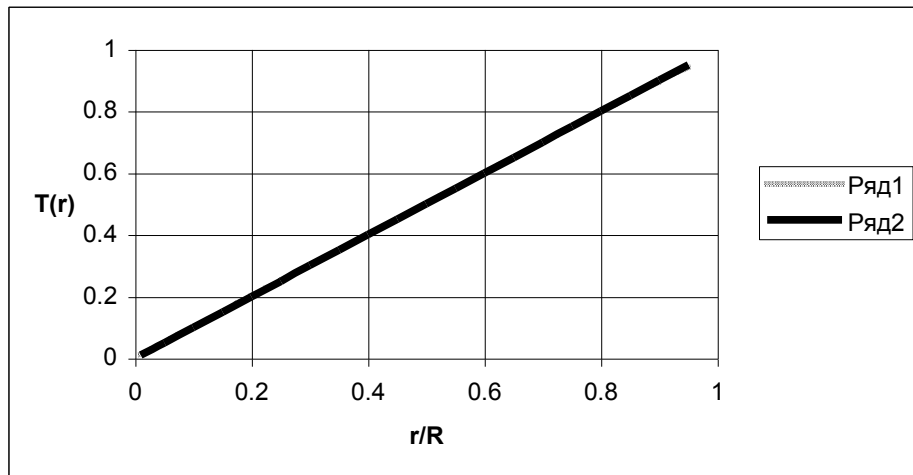


Рис. 16. Зависимости $T(r) = \frac{r}{R}$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2– то же, рассчитанная по формуле (31). Кривые совпадают

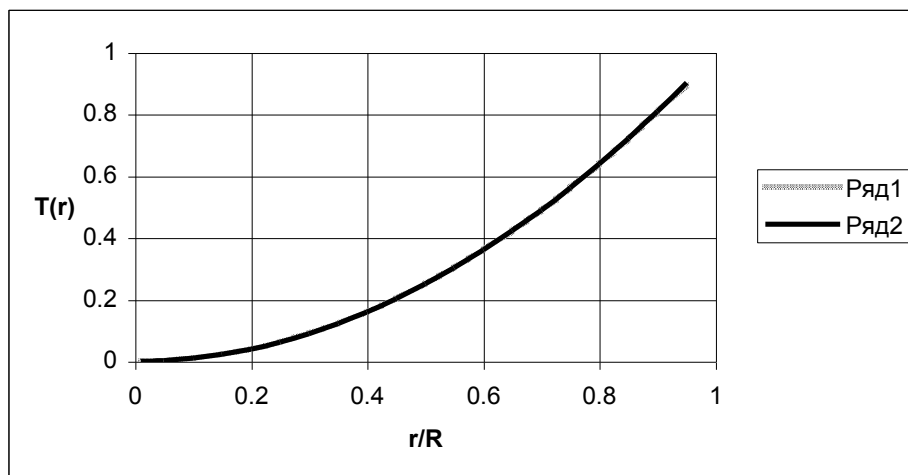


Рис. 17. Зависимости $T(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^2$. Ряд 1— фактическая зависимость; ряд 2— то же, рассчитанная по формуле (31). Кривые совпадают

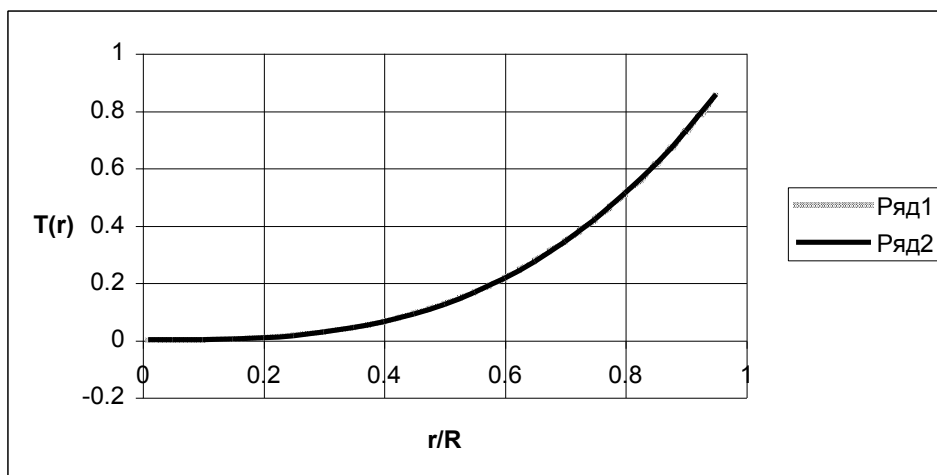


Рис. 18. Зависимости $T(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^3$. Ряд 1— фактическая зависимость; ряд 2— то же, рассчитанная по нижней формуле (31). Кривые совпадают

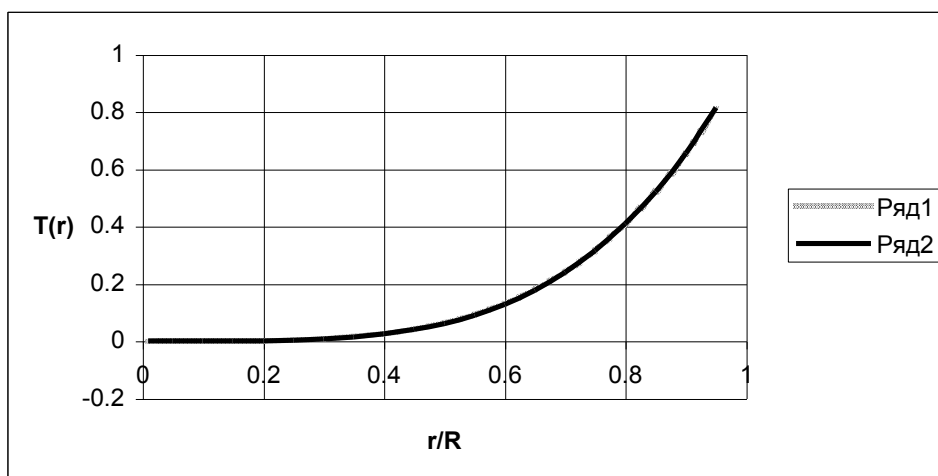


Рис. 19. Зависимости $T(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^4$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2– то же, рассчитанная по нижней формуле (31). Кривые совпадают

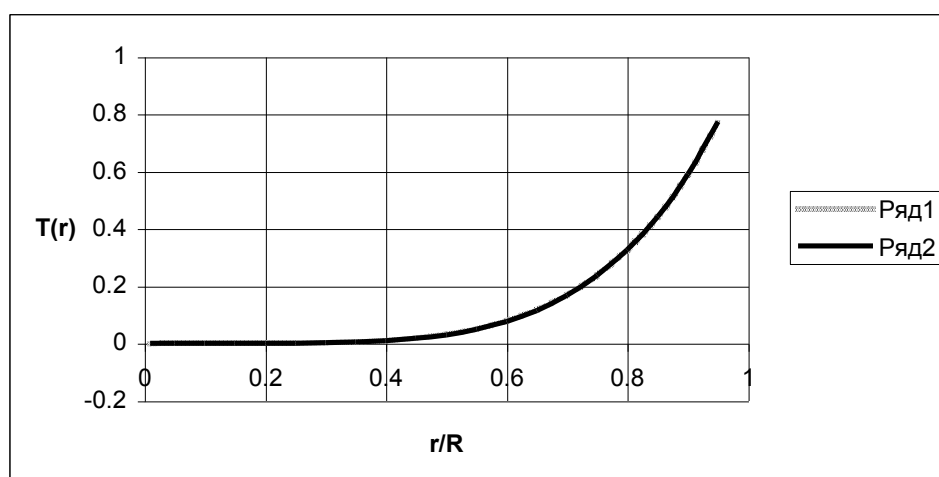


Рис. 20. Зависимости $T(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^5$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2– то же, рассчитанная по нижней формуле (31)

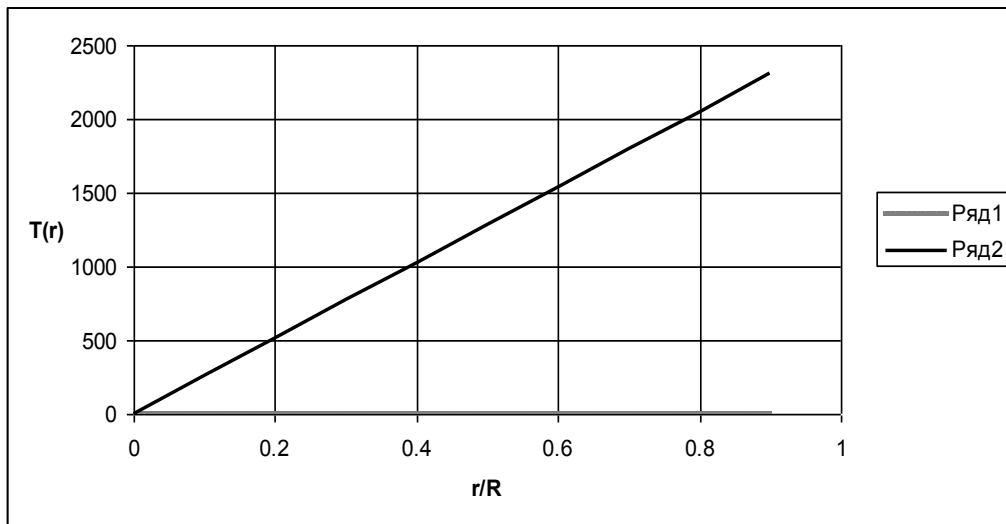


Рис. 21. Зависимости $T(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^6$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2– то же, рассчитанная по нижней формуле (31). Расхождение между кривыми составляет несколько десятичных порядков

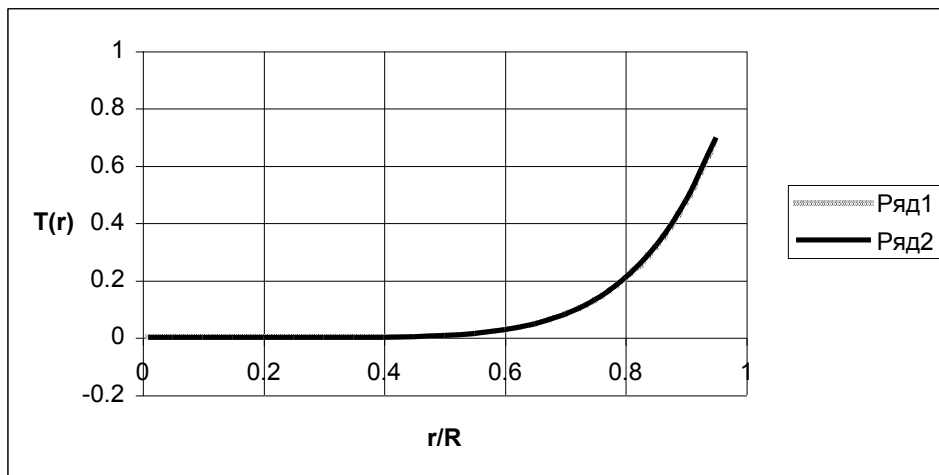


Рис. 22. Зависимости $T(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^7$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2– то же, рассчитанная по нижней формуле (31)

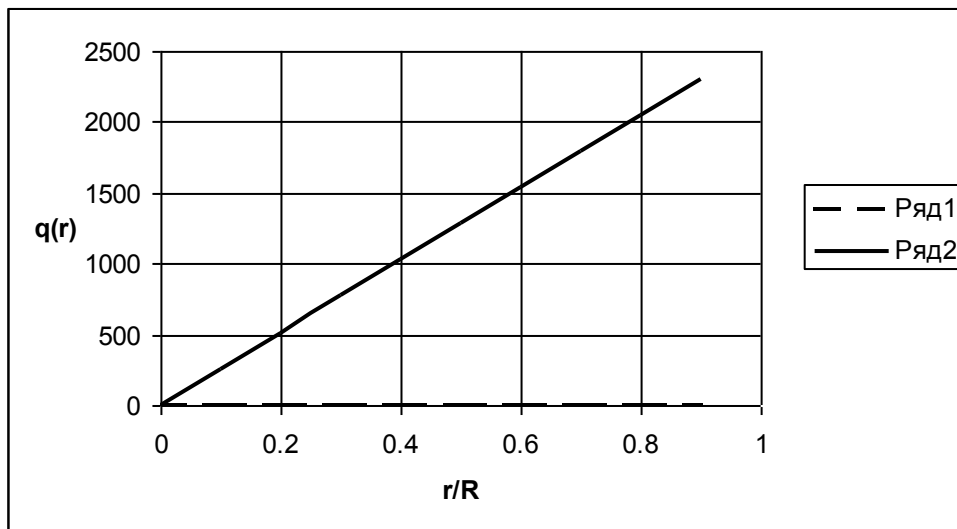


Рис. 23. Зависимости $T(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^8$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2– то же, рассчитанная по нижней формуле (31). Расхождение между кривыми составляет несколько десятичных порядков

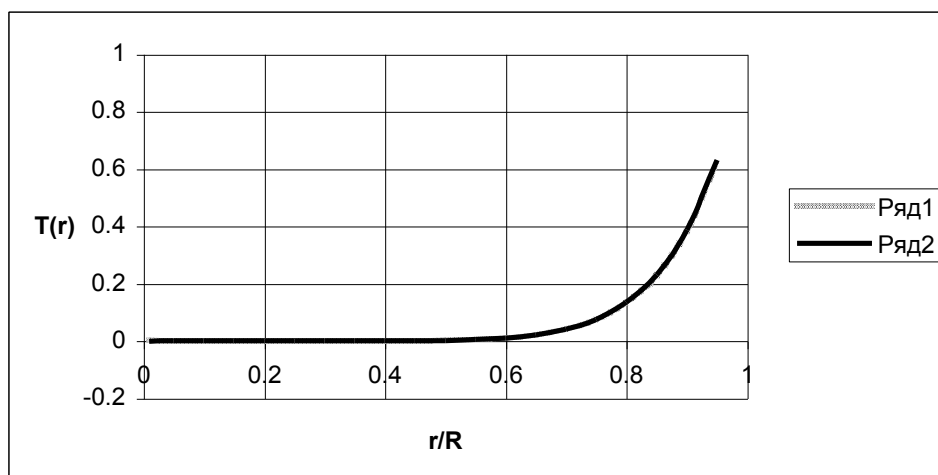


Рис. 24. Зависимость $T(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^9$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2– то же, рассчитанная по нижней формуле (31)

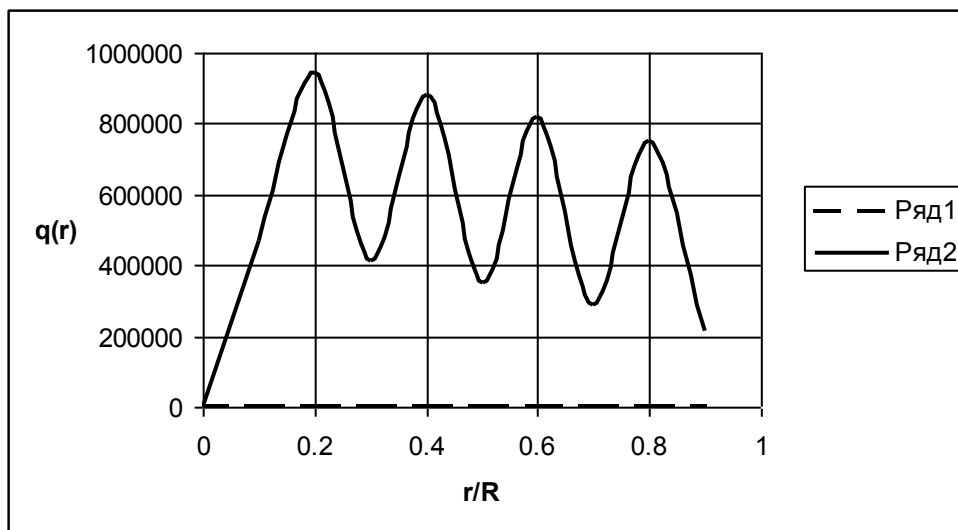


Рис. 25. Зависимости $T(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^{10}$. Ряд 1– фактическая зависимость; ряд 2– то же, рассчитанная по нижней формуле (31)

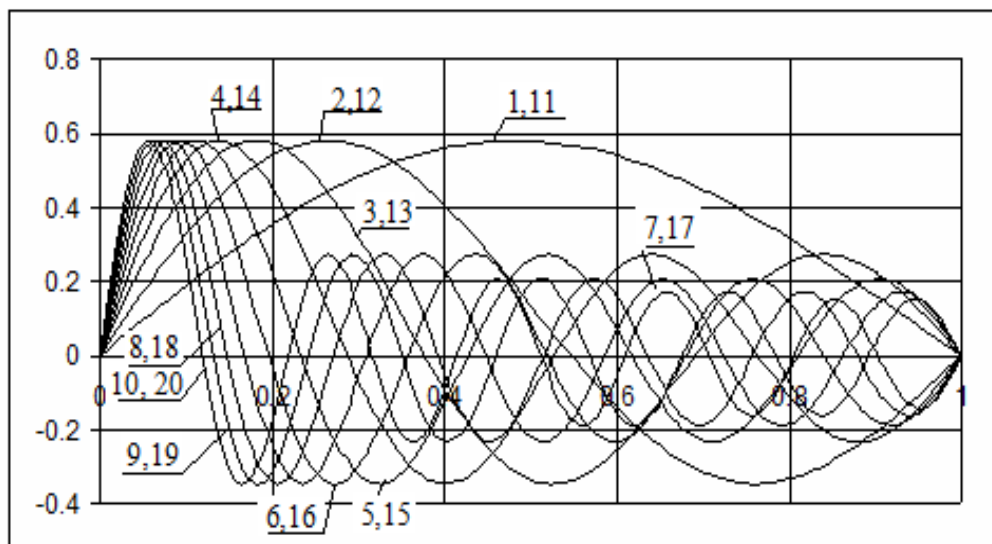


Рис. 26. Зависимости $q(r) = J_1(\mu_i \cdot r)$. 1,...,10– расчет; 11,...,20– факт. 1 и 11– $\mu = \mu_1$, 2 и 12– $\mu = \mu_2$, ..., 10 и 20– $\mu = \mu_{10}$ (см. табл. 1). Кривые полностью совпадают

В ходе численного эксперимента несобственный интеграл (31) вычислялся методом трапеций на интервале $\alpha \in (0; 10000)$. Шаг интегрирования равнялся 0,1.

На рисунках 15,...,25 представлены фактические и рассчитанные с использованием формулы (31) зависимости.

Их анализ позволил нам сделать такие выводы.

1. Из-за явления Гиббса [12] рассчитанные с использованием формул (41) зависимости $T(r)$ охватывают не весь интервал $\left(\frac{r}{R}\right) \in (0; 1)$.

2. Для четных степеней n расхождение между фактическими и расчетными кривыми имеет место, начиная с $n = 4$. При этом для нечетных степеней n полное совпадение между кривыми имеет место на всем рассмотренном интервале изменения показателя степени.

Далее определим зависимости $J_1(\mu_i \cdot r)$, установленные с использованием (32) и (41). Они представлены на рисунке 26.

Анализ представленных на рисунке 26 графических зависимостей позволил нам сделать вывод о том, что расчетные и фактические кривые полностью совпадают. В этой связи при решении практических задач в формулах (38) и (39) целесообразно принимать функции $A(\alpha)$ в виде (57), а граничное условие на глубине h целесообразно аппроксимировать с использованием формул (32).