

3. КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПОД ПОДОШВОЙ РАСПОЛОЖЕННОГО ВНУТРИ ПОЛУПРОСТРАНСТВА АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОГО ШТАМПА

При написании настоящего раздела нами преследовалась цель проиллюстрировать новые возможности, которые возникают в результате использования полученных в разделах 1 и 2 результатов при решении практических задач. В качестве примера исследуем контактные напряжения, возникающие в основании жесткого плитного заглубленного грунтового анкера, находящегося под воздействием вертикальной выдергивающей силы. При этом для аппроксимации эпюры контактных напряжений используем метод граничных элементов.

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу об определении контактных напряжений в основании круглого в плане плоского заглубленного грунтового анкера, получившего вертикальное перемещение W_0 . Соответствующая рассматриваемой задаче расчетная схема представлена на рисунке 27.

Задачу исследований сформулируем так. На глубине h параллельно горизонтальной дневной поверхности основания расположен круглый в плане плоский штамп толщиной t . Радиус штампа равен R . Толщина штампа значительно меньше его радиуса и глубины, на которой находится штамп, т.е. $R \gg t$ и $h \gg t$. Также известны упругие свойства основания – его модуль сдвига G и коэффициент Пуассона ν .

Требуется определить эпюру контактных напряжений $q(r)$ и величину

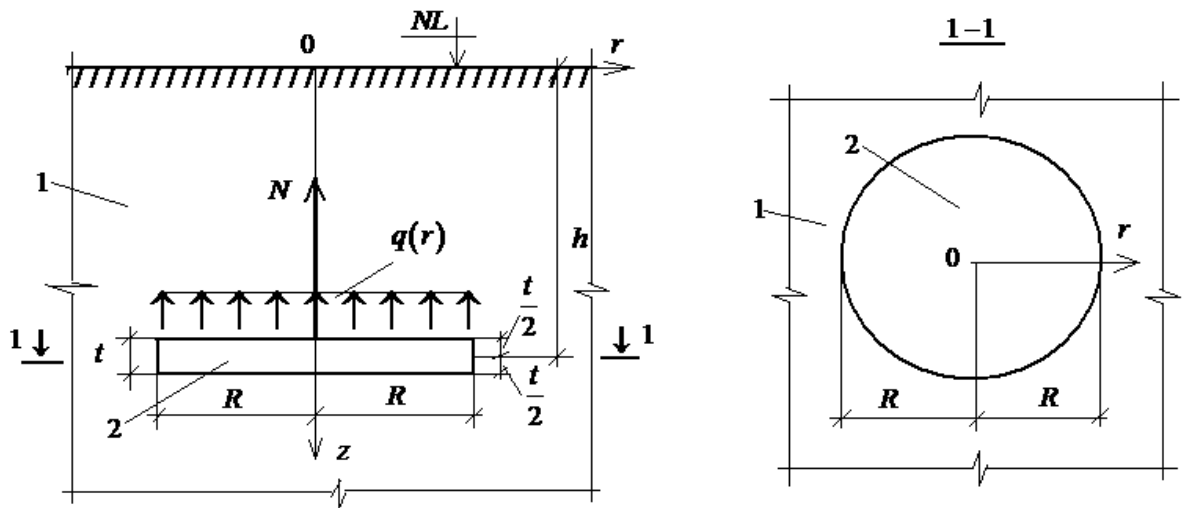


Рис. 27. К определению контактных напряжений:

1– основание; 2– жесткий штамп

выдерживающей сосредоточенной силы N . При определении указанных характеристик деформациями штампа в радиальном направлении можно пренебречь, а его изгибные деформации равны нулю.

3.2. Алгоритм построения и результаты решения задачи

Для решения задачи используем полученные ранее (раздел 1) результаты. Из (12) имеем:

$$\begin{aligned}
 W &= \lim_{z \rightarrow h} (W_1) = \lim_{z \rightarrow h} (W_2) = \\
 &= \frac{1}{8 \cdot (1 - \nu) \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} \left[\begin{array}{l} 3 - 4 \cdot \nu + \\ \left(\begin{array}{l} 8 \cdot \nu^2 + 6 \cdot \alpha \cdot h - \\ - 8 \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu - 12 \cdot \nu + \\ + 5 + 2 \cdot \alpha^2 \cdot h^2 \end{array} \right) \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot h} \end{array} \right] \cdot A(\alpha) \cdot J_0(\alpha \cdot r) d\alpha \quad \cdot (58)
 \end{aligned}$$

Здесь W – вертикальное перемещение жесткого штампа.

Далее выполним асимптотические оценки решения (58). При $h \rightarrow 0$ имеем:

$$W_0 = \lim_{h \rightarrow 0} (W) = \frac{(1-\nu)}{G} \cdot \int_0^{\infty} A(\alpha) \cdot J_0(\alpha \cdot r) d\alpha. \quad (59)$$

Эта оценка справедлива в том случае, когда штамп расположен на верхней границе (т.е. дневной поверхности) основания. Следует отметить, что формула (59) обычно используется для определения контактных напряжений в основании расположенных на границе грунтового основания плоских жестких штампов (см., например, [7, 13, 14]).

Полагая в (58) $h \rightarrow \infty$, имеем:

$$W_{\infty} = \lim_{h \rightarrow \infty} (W) = \frac{3-4 \cdot \nu}{8 \cdot G \cdot (1-\nu)} \cdot \int_0^{\infty} A(\alpha) \cdot J_0(\alpha \cdot r) d\alpha. \quad (60)$$

Эта оценка справедлива в том случае, когда штамп расположен на большой глубине (т.е. на значительном расстоянии от дневной поверхности основания).

Далее найдем отношение перемещения штампа на значительной глубине (60) к перемещению штампа на дневной поверхности основания (59). Имеем (см. также рис. 28):

$$W^* = \frac{W_{\infty}}{W_0} = \frac{3-4 \cdot \nu}{8 \cdot (1-\nu)^2}. \quad (61)$$

Здесь W^* – отношение перемещений.

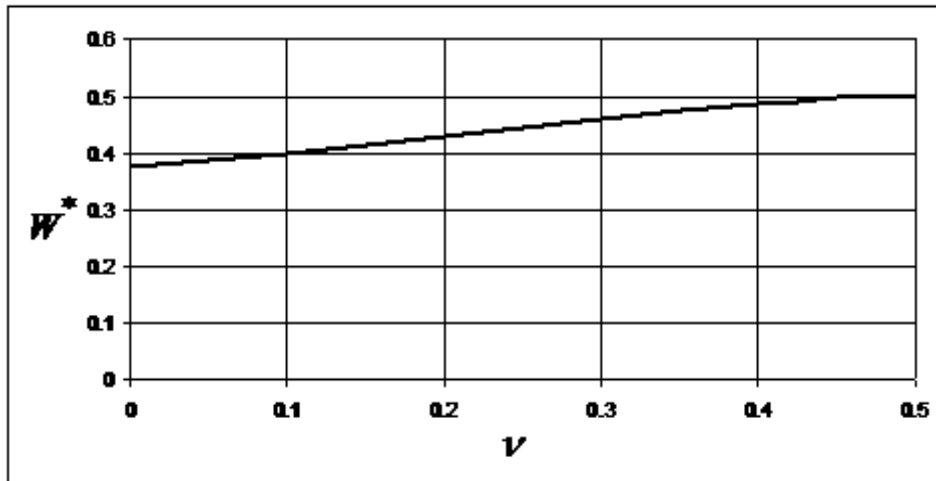


Рис. 28. Зависимость относительного перемещения жесткого штампа W^* от коэффициента Пуассона основания ν

Из формулы (61) и рисунка 28 вытекает, что при прочих равных условиях (т.е. при одинаковых свойствах основания, величине и законе распределения вертикальной нагрузки) в зависимости от значения коэффициента Пуассона отношение осадок при $h \rightarrow 0$ и $h \rightarrow \infty$ изменяется в 2, ..., 2,7 раза.

Далее найдем контактное давление по подошве жесткого штампа. Из формулы (12) на 17-й странице имеем:

$$\sigma_{zz}^- = \lim_{z \rightarrow h} \left(\sigma_{zz}^1 \right) = -\frac{1}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \int_0^{\infty} \alpha \cdot A(\alpha) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left. \begin{array}{l} 2 \cdot h \cdot \alpha \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot h} - 1 + \\ + h^2 \cdot \alpha^2 \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot h} + \\ + \nu - 2 \cdot h \cdot \alpha \cdot \nu \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot h} + \\ + e^{-2 \cdot \alpha \cdot h} - \nu \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot h} \end{array} \right\} \cdot d\alpha \quad (62)$$

Из формулы (12) на 18-й странице имеем:

$$\sigma_{zz}^+ = \lim_{z \rightarrow h} (\sigma_{zz}^2) = \left. \begin{aligned} &= -\frac{1}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \int_0^{\infty} \alpha \cdot A(\alpha) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left(\begin{aligned} &- \nu - 2 \cdot h \cdot \alpha \cdot \nu \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot h} + \\ &+ e^{-2 \cdot \alpha \cdot h} + 1 - \nu \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot h} + \\ &+ 2 \cdot h \cdot \alpha \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot h} + \\ &+ h^2 \cdot \alpha^2 \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot h} \end{aligned} \right) \cdot d\alpha \end{aligned} \right\}. \quad (62)$$

После этого с использованием формулы (4) найдем контактное давление по подошве штампа на глубине h :

$$q(r) = \sigma_z^- - \sigma_z^+ = \int_0^{\infty} A(\alpha) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha. \quad (63)$$

Формулы (58) и (63) позволяют построить точное решение задачи. Для построения приближенного решения используем метод граничных элементов [15, 16, 17, 18]. При этом учтем осевую симметрию задачи. Разобьем область контакта на n участков, а контактную эпюру аппроксимируем ступенчатой линией (рис. 29):

Далее найдем осадку основания, обусловленную кольцевой нагрузкой q_i , ширина которой равна (рис. 30).

$$a = r_{i+1} - r_i. \quad (64)$$

В соответствии с формулой (16) и схемой на рисунке 30 имеем:

$$A(\alpha) = \frac{q_i}{\alpha} \cdot [r_{i+1} \cdot J_1(r_{i+1} \cdot \alpha) - r_i \cdot J_1(r_i \cdot \alpha)], \quad (65)$$

где q_i – распределенная нагрузка в пределах i -того кольца.

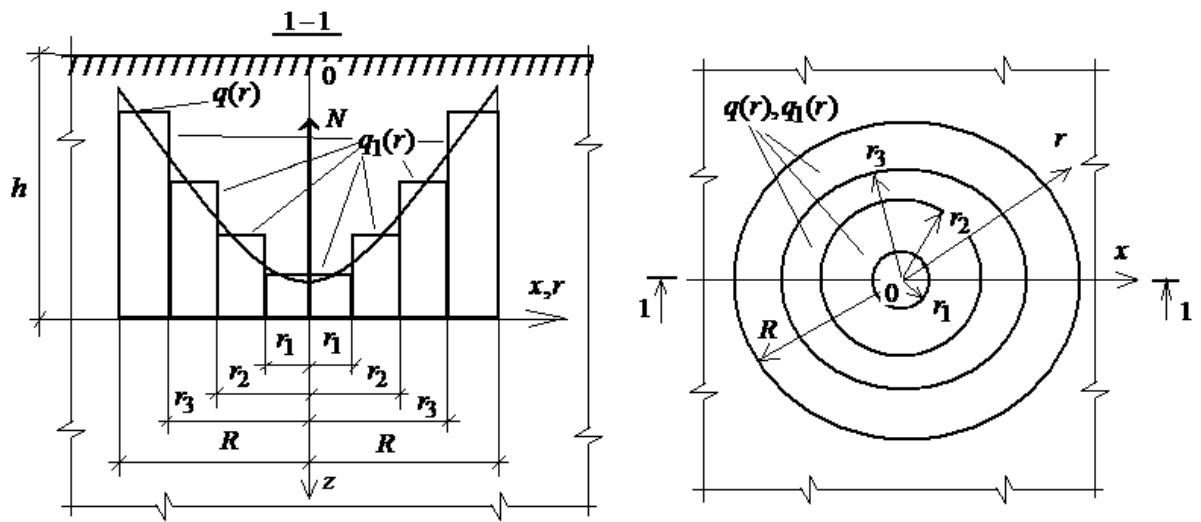


Рис. 29. К аппроксимации фактической контактной эпюры $q(r)$ ступенчатой линией $q_1(r)$. Здесь N – результирующая сила контактных напряжений

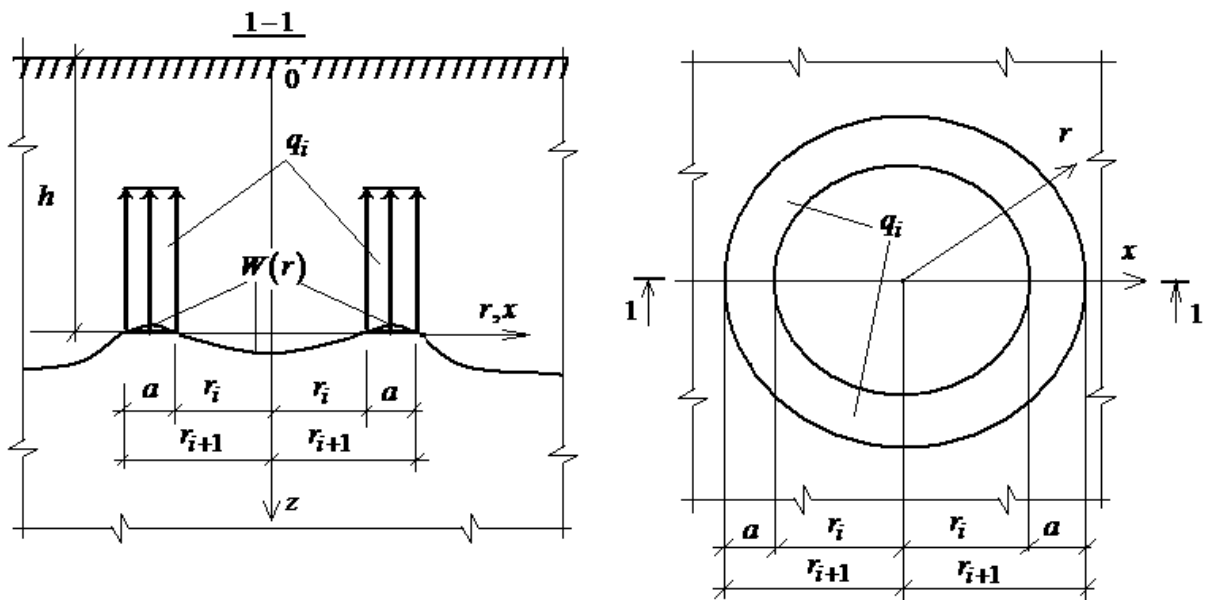


Рис. 30. К определению перемещений основания $W(r)$, обусловленных кольцевой ступенчатой нагрузкой q_i

Далее подставим (65) в (58) и найдем осадку основания на глубине h в точке с координатой $r_j + \frac{a}{2} = \frac{r_{j+1} + r_j}{2}$ при $q_i = 1$. Имеем:

$$B_{ij} = W = \left. \frac{1}{8 \cdot (1-\nu) \cdot G} \cdot \int_0^{\infty} \left[\begin{array}{c} 3 - 4 \cdot \nu + \\ \left(\begin{array}{c} 8 \cdot \nu^2 + \\ + 6 \cdot \alpha \cdot h - \\ - 8 \cdot \alpha \cdot h \cdot \nu - \\ - 12 \cdot \nu + \\ + 5 + \\ + 2 \cdot \alpha^2 \cdot h^2 \end{array} \right) \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot h} \end{array} \right] \cdot A(\alpha) \cdot J_0 \left(\alpha \cdot \frac{r_{j+1} + r_j}{2} \right) d\alpha \right\}, (66)$$

где $A(\alpha) = \left[\frac{r_{j+1} \cdot J_1(r_{j+1} \cdot \alpha)}{\alpha} - \frac{r_j \cdot J_1(r_j \cdot \alpha)}{\alpha} \right]$.

Далее найдем осадки центра каждого из колец, на которые разбита контактная эпюра. Имеем:

$$W_i = \sum_{i=1}^n B_{ij} \cdot q_i. \quad (67)$$

Здесь n – число кольцевых участков, на которые разбита контактная эпюра.

По условию задачи штамп является абсолютно жестким. Поэтому перемещения на контакте штампа с основанием равны между собой и заранее известны. Исходя из этих соображений, имеем такую систему уравнений для определения неизвестных напряжений q_i :

$$|B_{ij}| \cdot \vec{q}_i = \vec{W}_i. \quad (68)$$

Определив в пределах каждого из концентрических колец значение действующей в его пределах нагрузки q_i (см. рис. 29 и 30) найдем величину результирующей силы N . Имеем:

$$N = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R q(r) \cdot r \cdot dr \approx \sum_{i=1}^n \pi \cdot (r_{i+1}^2 - r_i^2) \cdot q_i. \quad (69)$$

Для ряда значений, входящих в формулы (58),..., (69) параметров, нами были рассчитаны распределения контактных напряжений $q(r)$ и значения выдергивающей силы N . Материалы этих исследований и их анализ представлены в разделе 3.3.

3.3. Результаты решения контактной задачи

Вначале найдем решение задачи при $h \rightarrow 0$. В этом случае перемещения штампа следует определять с использованием формулы (59), а контактные напряжения – по формуле (63). Вначале рассмотрим точное решение задачи (оно представлено в работах (7, 13, 14)). Введем в рассмотрение интеграл вида

$$-W_0 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha \cdot R)}{\alpha} \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot d\alpha = \begin{cases} -W_0 \text{ при } r < R; \\ -\frac{2}{\pi} \cdot \arcsin\left(\frac{R}{r}\right). \end{cases} \quad (70)$$

В формуле (70) учтено направление действующей на штамп выдергивающей силы (рис. 27). Далее из сопоставления (59) и (72) найдем:

$$A(\alpha) = -W_0 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{G}{(1-\nu)} \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot R)}{\alpha} \cdot J_0(\alpha \cdot r). \quad (71)$$

Далее подставим (73) в (63) и вычислим полученный таким образом несобственный интеграл. Имеем:

$$\begin{aligned} q(r) &= -W_0 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{G}{(1-\nu)} \cdot \int_0^{\infty} \sin(\alpha \cdot R) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot d\alpha = \\ &= -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{W_0 \cdot G}{(1-\nu)} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{W_0 \cdot G}{(1-\nu) \cdot R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}}. \end{aligned} \quad (72)$$

Выполнив нормировку (72), найдем:

$$q^* = -\frac{1}{\sqrt{1 - (r^*)^2}}, \quad (73)$$

где $r^* = \frac{r}{R}$ и $q^* = \frac{q(r) \cdot \pi \cdot (1-\nu)}{2 \cdot W_0 \cdot G}$.

Для решения задачи методом граничных элементов в формуле (68) следует положить $W_0 = -1$.

Значения рассчитанных по формулам (68) и (73) значения контактных напряжений в основании расположенного на дневной поверхности грунтового основания жесткого штампа (т.е. при $h = 0$) представлены на рисунке 31.

Их сопоставление позволило нам сделать вывод о том, что они практически полностью совпадают. Это, в свою очередь, дает основание считать, что близкими к точным будут эпюры контактных напряжений, установленные с использованием метода граничных элементов для глубин $h > 0$.

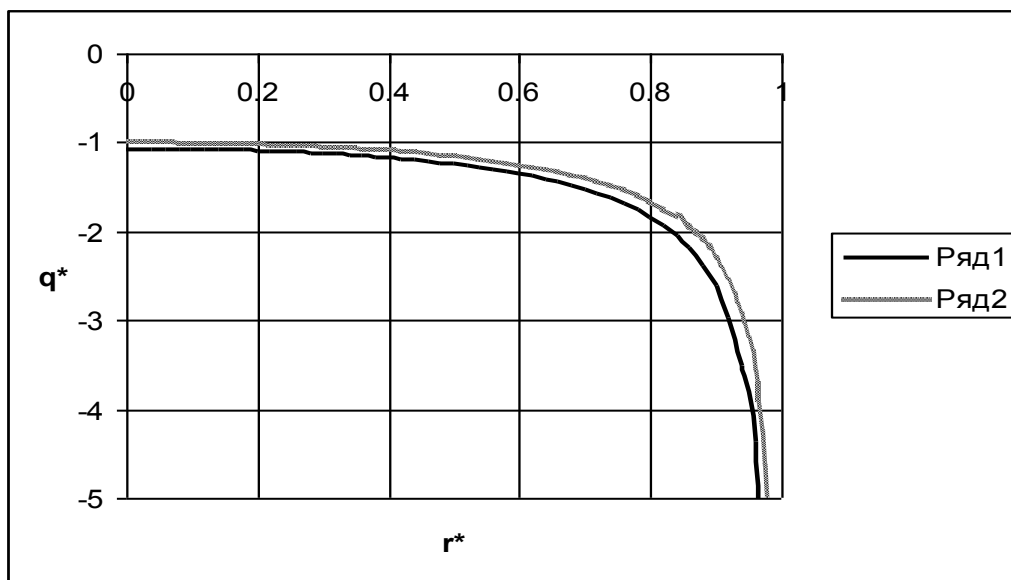


Рис. 31. Точное (ряд 2) и приближенное (ряд 1) решения задачи

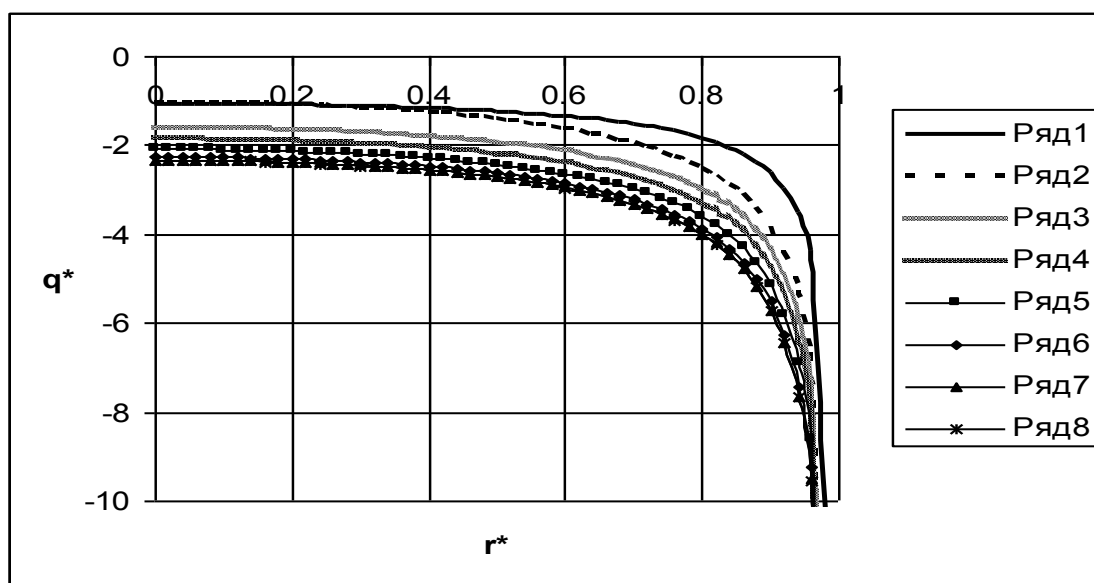


Рис. 32. Эпюры контактных напряжений в основании жесткого штампа

на различных глубинах при коэффициенте Пуассона $\nu = 0,3$.

Ряд 1– глубина $h^* = 0$; ряд 2– то же, $h^* = 1,0$; ряд 3– то же, $h^* = 2,0$; ряд 4– то же, $h^* = 3,0$; ряд 5– то же, $h^* = 5,0$; ряд 6– то же, $h^* = 10,0$; ряд 7– то же, $h^* = 30,0$; ряд 8– то же, $h^* = 100,0$

При выполнении расчетов на глубинах $h > 0$ помимо принятых в (73) безразмерных комплексов следует положить

$$h^* = \frac{h}{R}, \quad (74)$$

где h – глубина, на которой определяется контактная эпюра, а R – радиус штампа.

Результаты определения контактных эпюр на различных глубинах представлены на рисунке 32.

Представленные на рисунке кривые позволили нам сделать такие выводы.

1. При прочих равных условиях, чем больше глубина расположения штампа, тем большие напряжения возникают на его контакте с основанием.

2. Начиная с некоторой глубины, эпюры контактных напряжений практически совпадают.

3. Очертания контактных эпюр напряжений зависят от глубины, на которой они определяются – чем больше глубина, тем более пологими являются очертания эпюры.

Далее с использованием формулы 69 была установлена зависимость

действующей на штамп выдергивающей силы $N^* = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^1 q(r^*) \cdot r^* \cdot dr^*$ от

глубины расположения штампа h^* (рис. 33). Из рисунка вытекает, что чем больше глубина, на которой расположен штамп, тем большее усилие следует приложить для получения равных перемещений штампа.

После этого нами было исследовано влияние на распределение контактных напряжений коэффициента Пуассона основания (рис. 34). Из рисунка вытекает, что чем больше значение коэффициента Пуассона

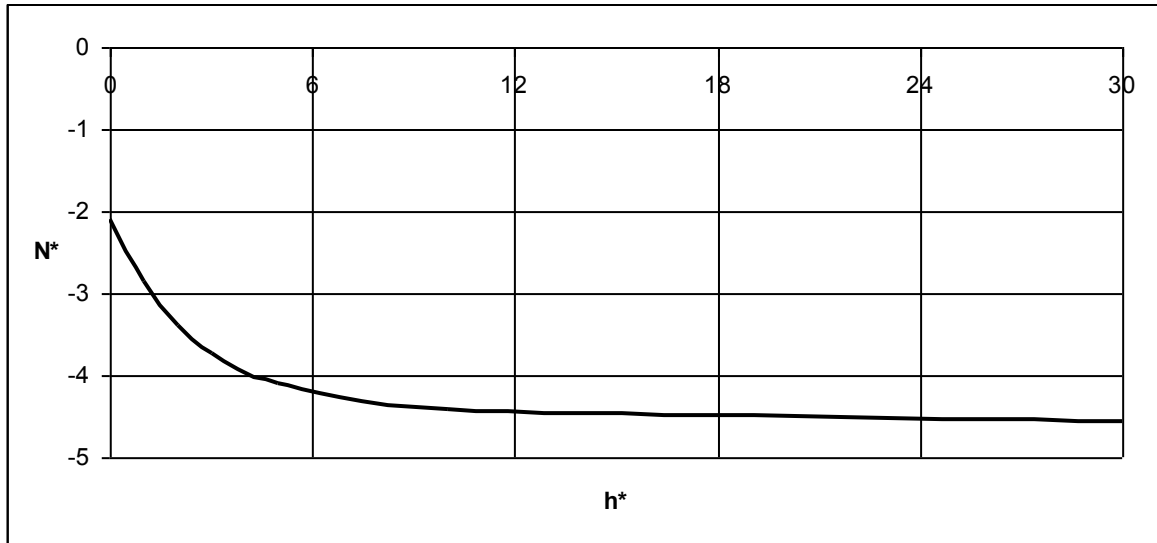


Рис. 33. Зависимость выдергивающей штамп силы N^* от глубины расположения штампа h^*

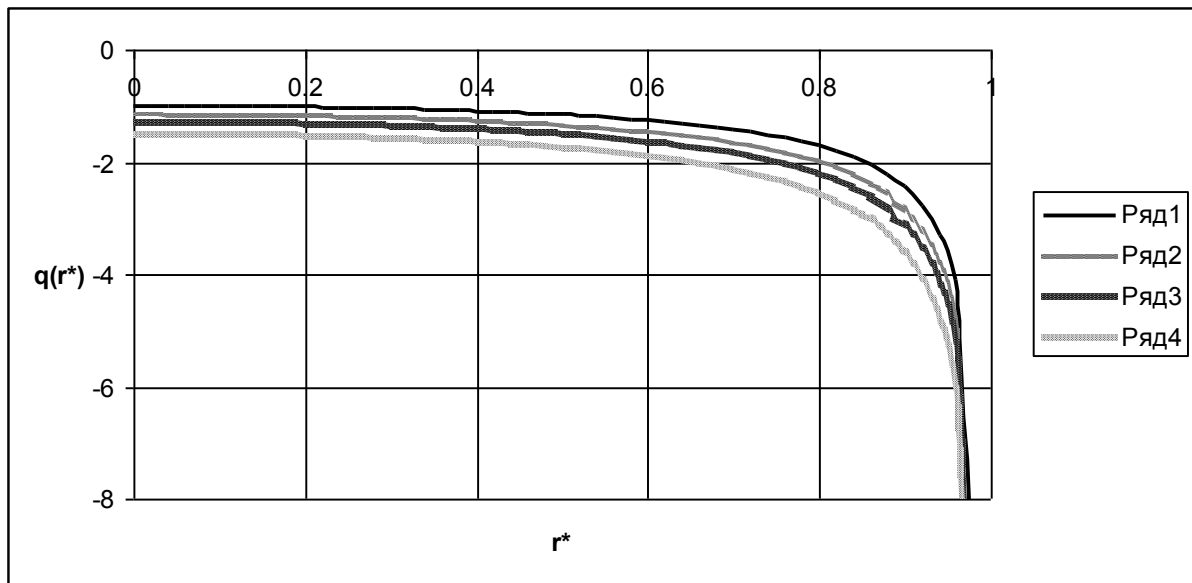


Рис. 34. Эпюры контактных напряжений на глубине $h^* = 10$ при различных значениях коэффициента Пуассона ν .

Ряд 1– при $\nu = 0,0$; 2– то же, при $\nu = 0,3$; 3– то же, при $\nu = 0,4$; 4– то же, при $\nu = 0,5$

основания, тем при прочих равных условиях больше контактные напряжения. На наш взгляд, этот факт весьма важен для практики проектирования.

3.4. Выводы по разделу

В целом, изложенные в настоящем разделе материалы исследований позволили нам сделать вывод о том, что полученные нами в разделах 1 и 2 решения позволили значительно расширить возможности решения различных задач механики грунтов и фундаментостроения и получить абсолютно новые результаты. В частности, была выявлена четкая зависимость контактных напряжений по подошве жесткого круглого штампа от глубины, на которой он находится. Кроме того, представленные в третьем разделе данные позволили обозначить абсолютно новое направление в расчете оснований грунтовых анкеров, а именно— расчет их деформаций.