УДК 531(075.8):620.10

Ропай В.А., д.т.н., проф, Аль Маданат Васим студент гр. БДБ -11-1 (Иордания)
(Державний ВНЗ «Національний гірничий університет» м. Дніпропетровськ, Україна)

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ВАРИНЬОНА ПРИ РАСЧЕТЕ КРИВЫХ СТЕРЖНЕЙ НА РАДИАЛЬНУЮ НАГРУЗКУ

Вариноьон П (1654-1722) выдающийся французский ученый математик и механик в 1687 г в своей книге «Проект новой механики» изложил основы статики и привел теорему, носящую теперь его имя: «Момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно того же центра» [1]. Теорема очень широко применяется в разных разделах механики: для определения положения центров тяжести линий, плоских и объемных тел, определения момнта равнодействующей относительно любого центра через сумму моментов составляющих, если для составляющих легко находить плечи, определения моментов распределенных параллельных нагрузок относительно любого центра и т.д. Во многих учебниках приводятся многочисленные примеры [2,3]. При этом от внимания обучающихся, а, следовательно, и инженеров ускользают некоторые особенности (тонкости), которые могут привести к ошибкам в расчетах. Продемонстрируем, а ниже поясним, пример такой возможной ошибки.

На рис. 1 представлен криволинейный стержень в виде ¼ круга радиуса r, на который действует радиальная распределенная нагрузка интенсивности q. Вычислим равнодействующую этой распределенной нагрузки и момент этой равнодействующей относительно удобной точки A.

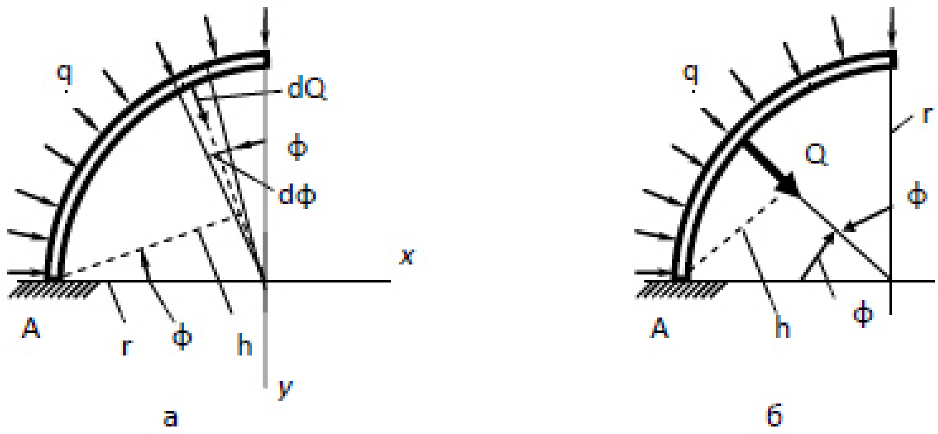

Рисунок 1- Схемы нагружения криволинейного стержня

На элементарной дуге dS (рис 1, а) с центральным углом $d\varphi$ действует равнодействующая $dQ = q \cdot dS = q \cdot rd\varphi$, равнодействующая всей распределенной нагрузки

$$Q = \int dQ = \int_0^{\pi/2} qrd\varphi = qr\frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

В силу симметрии конструкции и постоянства модуля q равнодействующая $\vec{Q}$ должна разделить центральный угол $\pi/2$ на две одинаковые части φ=45^0 (рис. 1, б). Момент этой равнодействующей относительно точки A

$$M_A(Q) = Q \cdot h = qr\frac{\pi}{2}r\sin 45^0 = qr^2\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = qr^2\frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 1{,}107qr^2. \qquad (2)$$

Вычислим теперь момент распределенной нагрузки относительно той же точки A (рис. 1, а)

$$M_A(q) = \int dQ \cdot h = \int_0^{\pi/2} qrd\varphi \cdot r\cos\varphi = qr^2 \int_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi = qr^2 \sin\varphi \Big|_0^{\pi/2} = qr^2 . \qquad (3)$$

Как видим, результаты, полученные по формулам (2) и (3), разные! Отличие превышает 10%.

Поясним сделанную ошибку в приведенных выше рассуждениях. В формуле (1) мы складывали модули сил $d\overline{Q}$, но при этом не учитывали изменения их направления. Чтобы найти правильное значение равнодействующей, меняющейся по направлению нагрузки, воспользуемся теоремой векторной алгебры о равенстве проекции вектора-суммы сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось. Обозначим правильное значение равнодействующей Q_1, найдем проекции ее на оси x (Q_{1x}) и y(Q_{1y}) и получим по теореме Пифагора $Q_1 = \sqrt{Q_{1x}^2 + Q_{1y}^2}$.

Как следует из обозначений (рис. 1, а)

$$Q_{1x} = \int_0^{\pi/2} dQ\sin\varphi = \int_0^{\pi/2} qrd\varphi\sin\varphi = qr\int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi = qr(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = qr , \qquad (4)$$

$$Q_{1y} = \int_0^{\pi/2} dQ\cos\varphi = \int_0^{\pi/2} qrd\varphi\cos\varphi = qr\int_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi = qr\sin\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = qr . \qquad (5)$$

Проекции равны, следовательно $\overline{Q}_1$ будет направлен под углом φ=45^0 к вертикали и к горизонту, как показано на рис 1, б .

$$Q_1 = \sqrt{(qr)^2 + (qr)^2} = qr\sqrt{2} . \qquad (6)$$

Как видим $Q_1 \neq Q$, что соответствует такой теореме векторной алгебры: «геометрическая сумма непараллельных векторов не равна сумме их модулей»

Вычислим момент этой силы относительно точки A.

$$M_F(Q_1) = Q_1 \cdot h = qr\sqrt{2} \cdot r\sin 45^0 = qr^2 , \qquad (7)$$

что совпадает с (3) и является правильным результатом.

Таким образом, при расчете элементов строительных конструкций при вычислении моментов и проекций распределенных сил, меняющихся по напрвалению, необходимо учитывать изложенную особенность применения теоремы Вариньона и пользоваться формулами типа (3), (4), (5).

Перечень ссылок

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1972. -478 с.
2. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Є.С. Опір матеріалів. –К.: «Вища школа», 2004. - 654 с.
3. Дарков А.В., Кузнецов В.И. Строительная механика (статика сооружений).- М.: «Высшая школа», 1962. -743 с.