МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

СИСТЕМИ Й МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

студентами напряму підготовки

6.040303 Системний аналіз

Дніпропетровськ
2013

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра системного аналізу й управління

СИСТЕМИ Й МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

студентами напряму підготовки

6.040303 Системний аналіз

Дніпропетровськ
НГУ
2013

Системи та методи прийняття рішень. Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт студентами напряму підготовки 6.040303 Системний аналіз / С.А. Ус. – Д.: Національний гірничий університет, 2013. – 55 с.

Автор
С.А. Ус, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Затверджено методичною комісією напряму підготовки 6.040303 Системний аналіз (протокол № 7 від 28 травня 2012) за поданням кафедри системного аналізу й управління (протокол № 7 від 28 травня 2012).

Методичні рекомендації мають на меті допомогти студентам у самостійному засвоєнні нормативної дисципліни «Теорія прийняття рішень» під час виконання лабораторних робіт і підготовки до модульного контролю.

Розглянуто основні теоретичні відомості про методи прийняття рішень, необхідні для виконання лабораторних робіт. Подано рекомендації до розв'язування типових розрахункових задач.

Сформульовано вимоги до оформлення звіту про лабораторну работу, питання для самоконтролю й критерії оцінювання лабораторних робіт. Рекомендації орієнтовано на активізацію виконавчого етапу навчальної діяльності студентів.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри системного аналізу й управління, д-р техн. наук, проф. В.В. Слєсарєв.

Зміст

Вступ

У процесі своєї діяльності людина постійно приймає рішення. При цьому їй часто доводиться обробляти великий обсяг інформації, враховувати кілька критеріїв, умови, які можуть бути висловлені неповно або неточно, мати різну значущість і навіть бути протилежними за своїми вимогами. Інтуїції та досвіду в таких випадках може бути недостатньо і тому доцільним стає використання математичних методів прийняття рішень.

Теорія прийняття рішень являє собою науку, яка вивчає закономірності вибору людиною найкращих альтернатив і шляхів розв'язку різних задач, застосовуючи для цього математичні, статистичні та інші методи.

Дисципліна «Теорія прийняття рішень» викладається студентам-четвертокурсникам, які навчаються за напрямом підготовки 6.040303 Системний аналіз.

Мета цих методичних рекомендацій – забезпечити ефективність самостійної роботи студентів під час виконання лабораторних робіт і підготовки до модульного контролю.

Це видання включає необхідний теоретичний матеріал, опис послідовності й методики виконання чотирьох лабораторних робіт за програмою курсу «Теорія прийняття рішень». У ньому наведено приклади виконання завдань з кожної лабораторної роботи, контрольні питання, зміст звіту й варіанти індивідуальних завдань.

Необхідні в лабораторних роботах розрахунки виконуються засобами програми Microsoft Excel або за допомогою програм, що самостійно написані студентом у середовищі Matlab 6.1.

При оцінюванні лабораторної роботи враховується самостійність і своєчасність її виконання студентом, рівень оволодіння теоретичним та практичним матеріалом, правильність розрахунків і своєчасне оформлення звіту.

Лабораторна робота № 1

Тема роботи: Бінарні відношення

Мета роботи: вивчення властивостей бінарних відношень, операцій над відношеннями, набуття навичок прийняття рішень на основі заданих відношень.

Порядок виконання роботи

1. Вивчити необхідний теоретичний матеріал.
2. Скласти програму для визначення властивостей відношення.
3. Визначити властивості даного відношення згідно з варіантом індивідуального завдання.
4. Скласти звіт про виконання роботи, який повинен містити
   – постановку індивідуального завдання;
   – лістинг програми;
   – результати роботи програми;
   – аналіз отриманих результатів.

Теоретичні відомості

В и з н а ч е н н я 1. *Відношенням* R на множині називається підмножина декартового добутку $\Omega \times \Omega$, тобто $R \subset \Omega^2$.

Задання підмножини R у множині $\Omega \times \Omega$ визначає, які саме пари елементів перебувають у відношенні *R*.

Задати відношення можна переліком пар, які перебувають у ньому, за допомогою матриці, графа або розрізів [8].

При поданні відношення матрицею на перетині *i*-го рядка та *j*-го стовпчика ставимо 1, якщо елемент x_i перебуває у відношенні R з елементом x_j, і нуль в інших випадках, а саме:

$$a_{ij}(R) = \begin{cases} 1, & x_i \, R \, x_j, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Операції над відношеннями

В и з н а ч е н н я 2. Відношення R_1 *включено* у відношення R_2 (записується як $R_1 \le R_2$), коли множину пар, для яких виконується відношення R_1, включено в множину пар, для яких виконується R_2.

Будемо говорити, що відношення R_1 *строго включено* в R_2 $(R_1 < R_2)$, коли $R_1 \le R_2$ й $R_1 \ne R_2$. Рівність відношень реалізується так само, як і рівність множин.

Для матричного задання відношень буде діяти таке правило: якщо $R_1 \le R_2$, то $a_{ij}(R_1) \le a_{ij}(R_2)$; $i, j = \overline{1,n}$.

В и з н а ч е н н я 3. Відношення $\overline{R}$ називається *доповненням* відношення R, тоді й тільки тоді, коли воно пов'язує тільки ті пари елементів, для яких не виконується відношення R.

Очевидно, що

$$\overline{R} = \Omega^2 \setminus R, \tag{2.3}$$

тому в матричному записі $a_{ij}(\overline{R}) = 1 - a_{ij}(R)$, $i, j = \overline{1,n}$.

В и з н а ч е н н я 4. *Перетином* відношень R_1 та R_2 (записується $R_1 \cap R_2$) називається відношення, визначене перетином відповідних підмножин множини Ω^2.

У матричному записі це означає, що

$$a_{ij}(R_1 \cap R_2) = \min\{a_{ij}(R_1), a_{ij}(R_2)\}, \ i, j = \overline{1,n}.$$

В и з н а ч е н н я 5. *Об'єднанням* відношень R_1 та R_2 (позначається $R_1 \cup R_2$) називається відношення, отримане шляхом об'єднання відповідних підмножин множини Ω^2.

У матричному записі це можна подати таким чином:

$$a_{ij}(R_1 \cup R_2) = \max\{a_{ij}(R_1), a_{ij}(R_2)\}, \quad i, j = \overline{1,n}.$$

В и з н а ч е н н я 6. *Оберненим* до відношення R називається відношення R^{-1}, яке задовольняє таку умову:

$$x R^{-1} y \Leftrightarrow y R x. \tag{2.4}$$

Для матриць відношень R та R^{-1} буде мати місце така формула:

$$a_{ij}(R^{-1}) = a_{ji}(R).$$

П р и к л а д . Нехай відношення R на множині: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, задано матрицею:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудувати відповідні йому обернене відношення та доповнення.

Розв'язування

Згідно з визначенням 3 доповнення відношення R можна задати такою матрицею:

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обернене відношення будуємо за визначенням 6, отже,

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В и з н а ч е н н я 7. *Добутком* (або *композицією*) відношень R_1 та R_2 (записується як $R_1 \cdot R_2$) називається відношення, що будується за таким правилом:

$x\left(R_1 \cdot R_2\right) y$, коли існує елемент $z \in \Omega$, який задовольняє умови $x\, R_1\, z$ та $z\, R_2\, y$.

П р и к л а д 2. Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, на ній подано два відношення R_1 та R_2, а саме:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначити їх композицію.

Розв'язування

Згідно із визначенням 7 $x\left(R_1\cdot R_2\right)y$, коли існує елемент $z\in\Omega$, який задовольняє умови $x\,R_1\,z$ та $z\,R_2\,y$. У матричному записі це означає, що

$$a_{ij}\left(R_1\cdot R_2\right)=\max_{k=1,n}\ \min\left\{a_{ik}\left(R_1\right),a_{kj}\left(R_2\right)\right\},$$

де n – порядок матриці.

Інакше кажучи, композиція відношень обчислюється як максимінний добуток відповідних їм матриць.

За таких умов

$$R_1\cdot R_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

В и з н а ч е н н я 8. Відношення $\left(R_1,\Omega_1\right)$ називається *звуженням* відношення $\left(R,\Omega\right)$ на множину ${}_1$, якщо $\Omega_1\subset\Omega$ та $R_1=R\bigcap\Omega_1\times\Omega_1$. Звуження відношення $\left(R,\Omega\right)$ на множину ${}_1$ називають також відношенням R на множині ${}_1$.

Властивості відношень

В и з н а ч е н н я 9. Відношення R називається *рефлексивним*, якщо $x\,R\,x$ для будь-якого елемента $x\in\Omega$.

У матриці рефлексивного відношення на головній діагоналі розміщуються одиниці, тобто елемент матриці $a_{ij}=1$, якщо $i=j$.

Граф рефлексивного відношення обов'язково має петлі при вершинах. Стосовно верхнього й нижнього розрізів справедливі твердження: $x\in R^{+}(x)$, $x\in R^{-}(x)$ для всіх елементів $x\in\Omega$.

В и з н а ч е н н я 10. Відношення R називається *антирефлексивним*, коли твердження $x\,R\,y$ означає, що $x\neq y\ \ \forall x\in\Omega$.

У матриці антирефлексивного відношення елементи головної діагоналі дорівнюють нулю, тобто $a_{ij}=0$, якщо $i=j$.

Граф антирефлексивного відношення не має петель при вершинах, а верхні та нижні розрізи задовольняють такі умови: $x\notin R^{+}(x)$, $x\notin R^{-}(x)$ для всіх елементів $x\in\Omega$.

Антирефлексивними будуть відношення «більше», «менше», «бути старшим».

В и з н а ч е н н я 11. Відношення R називається *симетричним*, якщо $R = R^{-1}$ $(x\,R\,y \;\Rightarrow\; y\,R\,x)$.

Матриця симетричного відношення теж симетрична, тобто $a_{ij} = a_{ji}$ для всіх значень i, j. У графі такого відношення всі дуги парні, а верхні й нижні розрізи збігаються для всіх елементів $x \in \Omega$, тобто $R^{+}(x) = R^{-}(x)\ \forall x \in \Omega$.

Симетричними, наприклад, є відношення рівності.

В и з н а ч е н н я 12. Відношення R називається *асиметричним*, якщо $R \bigcap R^{-1} = \varnothing$ (тобто з двох виразів $x\ R\ y$ та $y\ R\ x$ хоча б один не відповідає дійсності).

У матриці симетричного відношення $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$ для всіх значень i, j. Інакше кажучи, з двох симетричних елементів a_{ij} і a_{ji} хоча б один обов’язково дорівнює 0.

Асиметричними, наприклад, є відношення «більше» та «менше».

Зауважимо, що антирефлексивність – це обов’язкова умова асиметричності.

В и з н а ч е н н я 13. Відношення R називається *антисиметричним*, якщо твердження $x\,R\,y$ та $y\,R\,x$ можуть бути правильними одночасно тоді й тільки тоді, коли $x = y$.

У матриці антисиметричного відношення $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$, коли $i \neq j$.

Прикладами антисиметричних будуть відношення «більше або дорівнює», «не більше», «не гірше».

В и з н а ч е н н я 14. Відношення R називається *транзитивним*, якщо $R^2 \leq R$ (тобто, коли з тверджень $x\,R\,z$ та $z\,R\,y$ випливає, що $x\,R\,y$).

Транзитивними є відношення «більше або дорівнює», «менше», «бути старшим», «вчитися в одній групі».

Зауважимо, що умова: $R^2 \leq R$, дає зручний спосіб перевірки транзитивності відношення в разі, коли відношення задано за допомогою матриці. Для цього необхідно обчислити матрицю відношення R^2 (тобто піднести до квадрату матрицю вихідного відношення) і перевірити умову. Якщо $a_{ij}\left(R^2\right) \leq a_{ij}(R)$ для всіх значень i, j, то відношення транзитивне. Коли ж цю умову порушено хоча б для однієї пари індексів i, j, то відношення не буде транзитивним.

В и з н а ч е н н я 15. Відношення R називається *ациклічним*, якщо $R^k \bigcap R^{-1} = \varnothing$, тобто з умов $x\,R\,z_1,\ z_1\,R\,z_2,\ \ldots,\ z_{k\text{-}1}\,R\,y$ випливає, що $x \neq y$.

Це означає, що граф такого відношення не містить циклів.

П р и к л а д . Визначити властивості такого відношення:

$$R=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Розв'язування

Дане відношення є рефлексивним (оскільки його матриця містить на головній діагоналі тільки одиниці), воно не буде симетричним (оскільки серед симетричних елементів є такі, що не дорівнюють один одному, наприклад елементи a_{12} та a_{21}). Оскільки елемент $a_{13}=a_{31}$, то відношення не буде також асиметричним й антисиметричним.

Для перевірки його транзитивності помножимо дане відношення на себе, тобто

$$R^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Як бачимо, $R^2\not\subset R$, отже, вихідне відношення не є транзитивним.

Прийняття рішень на основі бінарних відношень

Елемент x^* множини X будемо називати *найкращим* з огляду на відношення R, якщо $x^*\,R\,x$ справедливе для всякого елемента $x\in X$.

Елемент $x_*\in X$ будемо називати *найгіршим* з огляду на відношення R, якщо $x\,R\,x_*$ для всіх елементів $x\in X$.

Легко впевнитись, що найкращий і найгірший елементи існують не завжди. Зокрема, їх не буде, коли відношення не є повним.

Елемент $x_{\max}$ називається *максимальним* за відношенням R^S на множині X, коли для абиякого елемента $x\in X$ має місце твердження $x_{\max}\,R^S\,x$ або елемент $x_{\max}$ непорівнянний з x.

Іншими словами, не існує елемента (альтернативи) $x\in X$, який був би кращим за альтернативу $x_{\max}$.

Множина максимальних з огляду на відношення R елементів множини X позначається $\max_R X$.

Елемент $x_{\min}$ називається *мінімальним* відносно R^S на множині X, якщо для всіх $x\in X$ або $x\,R^S x_{\min}$, або x непорівняний з $x_{\min}$. Отже, не існує елемента $x\in X$ який був би гіршим за $x_{\min}$; немає жодного елемента x, над яким би домінував елемент $x_{\min}$.

Множина мінімальних з огляду на відношення R елементів множини X позначається як $\min_R X$.

Зауважимо, що коли найкращі елементи існують, то вони будуть і максимальними, а протилежна ситуація не буде справедливою.

Приклад розв'язування задачі

Визначимо максимальні, мінімальні, найбільші та найменші елементи відношення R, заданого на множині: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, якщо

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування

Із вигляду матриці робимо висновок, що відношення не має найкращих елементів (оскільки жодному елементу не відповідає рядок, який містить тільки одиниці), найгіршим елементом є x_1, оскільки він гірший від будь-якого іншого елемента (відповідний йому стовпець містить лише одиниці).

Для визначення максимальних і мінімальних елементів побудуємо строге відношення, відповідне даному, тобто

$$R^s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Із вигляду матриці робимо висновок, що максимальними будуть елементи x_2 та x_3 (відповідні стовпці містять тільки нулі), мінімальним – елемент x_1 (відповідний стовпець складається лише з нулів).

Таким чином, вихідне відношення не має найкращих елементів, має один найгірший (він же мінімальний) елемент і два максимальні елементи.

Контрольні питання

1. Дайте визначення бінарного відношення.
2. Які існують способи задання відношень?
3. Яким чином можна задати відношення за допомогою матриці?
4. Як можна задати відношення у вигляді графа?
5. Як задати відношення за допомогою розрізів?
6. Сформулюйте визначення верхнього (нижнього) розрізу відношення.

7. Які із способів задання відношень можна використовувати на нескінченній множині елементів?

8. Які математичні операції виконують над відношеннями?

9. Яке відношення називається рефлексивним (антирефлексивним)?

10. Яке відношення називається симетричним, антисиметричним, асиметричним?

11. Які відношення називають транзитивними, сильно транзитивними, від'ємно транзитивними?

12. Яким чином обчислюють транзитивне замикання відношення?

13. Які властивості характерні для відношення переваги?

14. Дайте визначення найкращого (найгіршого) елемента множини.

15. Який елемент множини називається мінімальним (максимальним) за даним відношенням переваги?

16. Яке значення в теорії прийняття рішень мають поняття найкращого, найгіршого, максимального й мінімального елементів? Де вони використовуються?

Варіанти індивідуальних завдань

Перевірити, чи буде дане відношення рефлексивним, антирефлексивним, симетричним, антисиметричним, асиметричним, транзитивним. Відшукати для нього найбільший, найменший , максимальний та мінімальний елементи, якщо такі існують, і побудувати обернене й додаткове відношення.

1. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 3. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 5. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 6. $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $R=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&0&1&1\\0&1&0&0&1\end{pmatrix}$. 8. $R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&0&0&1\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}$. 9. $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$.

10. $R=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. 11. $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. 12. $R=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&1\\1&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

13. $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&0&1&1\\1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$. 14. $R=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0\\1&0&0&1&1\\1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. 15. $R=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\\0&1&1&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$.

16. $R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$. 17. $R=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\1&0&0&1&1\\1&0&1&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$. 18. $R=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$.

19. $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 20. $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 21. $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

22. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 23. $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 24. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

25. $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 26. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 27. $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

28. $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 29. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 30. $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Лабораторна робота № 2

Тема роботи: Розв'язування задач багатокритерійної оптимізації.

Мета роботи: вивчення методів розв'язування задач багатокритерійної оптимізації.

Порядок виконання роботи

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал.
2. Побудувати математичну модель задачі згідно з варіантом індивідуального завдання.
3. Розв'язати отриману на основі цієї моделі задачу багатокритерійної оптимізації методами згортки, головного критерію, послідовної поступки.
4. Скласти звіт про виконання роботи, який повинен містити:
   – постановку індивідуального завдання;
   – математичну модель із поясненями щодо її побудуви;
   – розв'язування задачі з необхідним для її розуміння рівнем деталізації;
   – результати розв'язування задачі;
   – порівняльний аналіз результатів, отриманих різними методами.

Теоретичні відомості

У загальному випадку багатокритерійна задача оптимізації може бути записана таким чином:

$$f_i(x) \to \max, i \in I_1,$$
$$f_i(x) \to \min, i \in I_2,$$
$$x \in X.$$

В и з н а ч е н н я 1. Альтернатива x_0 називається *ефективною*, якщо на множині допустимих альтернатив X не існує жодної альтернативи x, яка задовольняє такі нерівності:

$$f_i(x) \geq f_i(x_0), \quad i \in I_1,$$
$$f_i(x) \leq f_i(x_0), \quad i \in I_2,$$

причому хоча б одна з них виконується як строга.

Іншими словами, ніяка інша альтернатива не може «поліпшити» значення жодної цільової функції, не погіршивши при цьому значення деякої іншої. Такі альтернативи ще називають *непокращуваними* за множиною цілей, або *оптимальними за Парето*.

Серед множини оптимальних за Парето альтернатив і слід шукати розв'язок задачі багатокритерійної оптимізації. Причому, яку саме альтернативу потрібно вибирати, сказати не можна, необхідне додаткове дослідження.

Для розв язування задачі багатокритерійної оптимізації можуть бути застосовані різні методи. Розглянемо деякі з них.

Метод головного критерію

Розглянемо задачу багатокритерійної оптимізації, у якій усі критерії мінімізуються, й упорядковані за важливістю:

$$f_i(x) \to \min, i \in I,$$
$$x \in X,$$
$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots \geq f_M(x).$$

Головна ідея методу полягає в тому, що вихідна багатокритерійна задача оптимізації замінюється однокритерійною задачею із додатковими обмеженнями, які дозволяють у певному сенсі врахувати вимоги, описувані іншими критеріями.

Наведемо схему методу.

1. Вибирають один головний критерій $f_1(x)$, за яким буде проводитися оптимізація.

2. Для менш важливих критеріїв $f_2(x), \ldots f_M(x)$ обчислюють (або вибирають, враховуючи певні міркування) допустимі значення $\bar{f}_2, \ldots \bar{f}_M$.

3. Критерії $f_2(x), \ldots f_M(x)$ замінюють на обмеження такого вигляду:

$$f_i(x) \leq \bar{f}_i, \text{ коли } i \in I.$$

4. Замість вихідної, розглядають таку скалярну задачу:

$$f_1(x) \to \min,$$
$$f_i(x) \leq \overline{f_i}, \quad i \in I,$$
$$x \in X.$$

Перевагою описаного методу є те, що для його реалізації не потрібна кількісна оцінка пріоритетів критеріїв. А його недолік – складність встановлення допустимих рівнів значень критеріїв. У більшості випадків вони вибираються суб'єктивно, тому, коли критерії рівнозначні, за головний може бути обраний будь-який з них, але краще вибирати той, для якого задати допустимі значення найскладніше.

Зауважимо також, що розв'язок, отриманий за допомогою цього методу, завжди буде слабко ефективним, а тоді, коли він єдиний, то й сильно ефективним.

Метод головного критерію може бути застосований також і до розв’язування задач, у яких критерії максимізуються. За цієї умови додаткові обмеження будуть мати такий вигляд: $f_i(x) \geq \bar{f}_i$.

У загальному випадку отримана скалярна задача буде набувати такого вигляду:

$$\begin{aligned} &f_1(x) \to \text{opt}, \\ &f_i(x) \geq \bar{f}_i, \quad i \in I_1, \\ &f_i(x) \leq \bar{f}_i, \quad i \in I_2, \\ &x \in X. \end{aligned}$$

де I_1 – множина індексів, для яких цільові функції максимізуються;
I_2 – множина індексів, для яких цільові функції мінімізуються.

Метод згортки

Розглянемо методи розв’язування, що полягають у зведенні початкової багатокритерійної задачі до скалярної шляхом застосування деякого узагальненого критерію. В основі кожного з цих методів лежить така схема:

1. Усі критерії нормують, тобто зводять до порівнянного безрозмірного вигляду.

Нормалізацію можна проводити різними способами [1, 6, 8], найбільш поширеними серед них є наведені нижче перетворення.

$$w_i^1(f_i(x)) = \begin{cases} \dfrac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_1^{\max} - f_i^{\min}}, \forall i \in I_1, \\ \dfrac{f_i(x) - f_i^{\min}}{f_1^{\max} - f_i^{\min}}, \forall i \in I_2; \end{cases} \tag{2.1}$$

$$w_i^2(f_i(x)) = \begin{cases} \dfrac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_1^{\max}}, \forall i \in I_1, \\ \dfrac{f_i(x) - f_i^{\min}}{f_i^{\max}}, \forall i \in I_2, \end{cases} \tag{2.2}$$

тут $f_i^{\max}$ – максимальне, а $f_i^{\min}$ – мінімальне значення критерію $f_i(x)$ на множині допустимих альтернатив X, $\forall i \in I_1 \bigcup I_2$, I_1 – множина індексів, для яких цільові функції максимізуються, I_2 – множина індексів, для яких цільові функції мінімізуються.

2. Критерії «згортають» в одну цільову функцію, формуючи так званий узагальнений критерій, у якому враховано відносну важливість кожного з критеріїв за допомогою вагових коефіцієнтів, що мають задовольняти такі співвідношення:

$$\alpha = \left(\alpha_1, \underset{j}{\alpha_2}, \dots, \alpha_n\right), \quad \alpha_i \geq 0, \quad i \in I, \quad \sum_{i \in I} \alpha_i = 1 .$$

Унаслідок цього вихідна багатокритерійна задача зводиться до звичайної задачі оптимізації з одним критерієм.

Найбільш поширеними видами згортки є такі:

1. Узагальнені критерії на основі середньозваженої функції, тобто

$$F = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i k_i^s \right)^{1/S},$$

тут k_i, $i = 1, 2, \dots m$ – нормовані локальні критерії; α_i, $i = 1, 2, \dots m$ – вагові коефіцієнти.

Серед цієї групи особливо виділяють узагальнений критерій такого вигляду:

$$F_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i ,$$

що являє собою лінійну згортку локальних критеріїв. Він зручний у використанні, бо дозволяє зберігати лінійність вихідних функцій. Іншими словами, якщо вихідні критерії лінійні, то результівний критерій також буде лінійним.

2. Мультиплікативна згортка $\Phi_\pi = \prod_{i=1}^{m} k_i^{\alpha_i}$.

3. У задачах, де мають місце одночасно критерії, що мінімізуються, і критерії, які максимізуються, дуже часто використовують критерій такого вигляду:

$$F = \frac{\sum_{i \in I_1} f_i(x)}{\sum_{i \in I_2} f_i(x)} .$$

Тут у чисельнику записано суму критеріїв, які максимізуються, а в знаменнику – суму критеріїв, що мінімізуються.

Недолік цього критерію полягає в існуванні явного припущення про те, що недостатній рівень одного показника може компенсуватися за рахунок іншого; наприклад, низька продуктивність виробництва компенсується низькою вартістю виробів.

Метод послідовної поступки

Цей метод, так само, як і метод головного критерію, застосовується в тих випадках, коли критерії впорядковані за важливістю, але невідомі кількісні оцінки їх пріоритетів. Опишемо його в застосуванні до розв'язування задачі такого вигляду:

$$f_i(x) \to \min,\ i \in I,$$
$$x \in X,$$
$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots \geq f_M(x).$$

Сутність методу послідовних поступок полягає в тому, що вихідна багатокритерійна задача замінюється послідовністю однокритерійних задач, область допустимих розв'язків яких звужується від задачі до задачі за допомогою додаткових обмежень, які враховують вимоги до критеріїв. При формулюванні кожної задачі стосовно важливішого критерію робиться поступка, величина якої залежить від вимог задачі й оптимального розв'язку за цим критерієм.

Опишемо схему методу.

1. Розв'язують скалярну задачу оптимізації за найважливішим критерієм на всій множині допустимих альтернатив *X*, тобто

$$f_1(x) \to \min,$$
$$x \in X.$$

Унаслідок цього отримуємо оптимальне значення критерію $f_1(x):\ f_1^{min}$.

2. Розв'язують задачу оптимізації керуючись наступним за важливістю критерієм та враховуючи додаткове обмеження: $f_1(x) \leq f_1^{\min} + \Delta_1$, де Δ_1 – допустима поступка за першим критерієм. Цю задачу можна записати таким чином:

$$f_2(x) \to \min,$$
$$f_1(x) \leq f_1^{\min} + \Delta_1,$$
$$x \in X.$$

У результаті її розв'язування отримуємо оптимальне значення критерію $f_2(x):\ f_2^{min}$.

Нехай після здійснення k кроків було отримано оптимальні значення критеріїв: $f_1^{\min}, f_2^{\min}, \ldots, f_k^{\min}$, тоді на $(k+1)$-му кроці розв'язують таку задачу:

$$
\begin{aligned}
&f_{k+1}(x) \to \min,\\
&f_1(x) \le f_1^{min} + \Delta_1\\
&f_2(x) \le f_2^{min} + \Delta_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f_k(x) \le f_k^{min} + \Delta_k,\\
&x \in X
\end{aligned}
$$

й одержують оптимальне значення критерію f_{k+1}^{min}.

Після розгляду всіх критеріїв розв'язок задачі буде відшуканий. Ним буде розв'язок останньої скалярної задачі.

Таким чином, початкову багатокритерійну задачу було зведено до послідовного розв'язування ряду скалярних задач, кількість яких буде дорівнювати числу критеріїв.

Цей метод дає можливість враховувати пріоритети критеріїв й уникнути підвищення їхніх значень більше, ніж на деякий допустимий рівень, а тоді, коли критерії максимізуються, уникнути зниження їхнього рівня більше ніж певний допустимий рівень. Складність його застосування зумовлено суб'єктивністю у визначенні допустимих рівнів. Зазвичай допустима поступка встановлюється експертами з огляду на оптимальне значення критерію та умови задачі .

Зауваження. Якщо критерій максимізується, то відповідне йому обмеження формулюють таким чином: $f_i(x) \ge f_i^{\max} - \Delta_i$, де Δ_i – допустима поступка за цим критерієм.

Приклад розв'язування задачі

Розглянемо задачу.

У роботі кар'єру можуть бути використані три види комбайнів I, II і III, які здатні виконувати три види робіт *A*, *B*, і *C*. У табл. 2.1 відображено ресурси робочого часу кожного комбайна, їх продуктивність при виконанні різних робіт і вартість однієї години роботи (у грн). Визначити оптимальне завантаження комбайнів, яке забезпечує максимальний сумарний обсяг виконаних робіт і мінімальну їх вартість.

Таблиця 2.1

Вид комбайна	Продуктивність, q_{ij} м^3/год			Питома вартість, c_{ij} грн/год			Ресурс часу, год
	A	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	
I	30	20	40	2	4	2	400
II	20	30	50	3	2	5	300
III	60	40	20	5	3	6	280

Розв'язування

Складемо математичну модель задачі. Для цього позначимо через x_{ij} час виконання i-м комбайном роботи j, тоді сумарний обсяг роботи першого комбайна можна записати таким чином:

$$30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13},$$

другого комбайна

$$20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23},$$

і третього

$$60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33}.$$

Сумарний обсяг роботи, виконаної всіма трьома комбайнами, буде таким:

$$f_1(x) = 30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33}.$$

Цей вираз описує першу цільову функцію.

Вартість j-ї роботи, коли її виконує i-й комбайн, буде описуватися виразом $c_{ij} x_{ij}$, де c_{ij} питома вартість j-ї роботи, коли її виконує i-й комбайн. Отже, сумарна вартість усіх робіт, виконаних трьома комбайнами, буде описуватися таким виразом:

$$f_2(x) = 2x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33}.$$

Це буде друга цільова функція.

Обмеження на час роботи комбайнів запишуться таким чином:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 400 \text{ – для першого комбайна,}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 300 \text{ – для другого комбайна,}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 280 \text{ – для третього комбайна.}$$

Враховуючи природні обмеження на змінну x_{ij}, остаточно отримуємо таку математичну модель:

$$f_1(x) = 30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33} \to \max;$$
$$f_2(x) = 2x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33} \to \min;$$

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 400,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 300,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}\le 280,$$
$$x_{11},x_{12},\ldots x_{33}\ge 0.$$

Розв'яжемо отриману задачу багатокритерійної оптимізації описаними вище методами.

Метод згортки. Оскільки критерії вихідної задачі мають різну розмірність, перш за все необхідно їх нормалізувати. Для цього скористаємось формулами (2.1), (2.2).

Знайдемо спочатку максимальні й мінімальні значення для кожного критерію на множині допустимих альтернатив.

Перший критерій.

Знайдемо максимальне значення, а саме:

$$f_1(x)=30x_{11}+20x_{12}+40x_{13}+20x_{21}+30x_{22}+50x_{23}+60x_{31}+40x_{32}+20x_{33}\to \max;$$
$$x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 400,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 300,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}\le 280,$$
$$x_{11},x_{12},\ldots x_{33}\ge 0.$$

Для розв'язування задачі скористаємось функцією «Пошук рішення» програми MS Excel.

Результати розв'язування подано нижче у вигляді табл. 2.2., де показано час x_{ij} виконання комбайнами кожної з робіт.

Таблиця 2.2

Вид комбайна	Вид роботи			Ресурс часу, год	
	A	*B*	*C*	використаний	обмеження
I	0	0	400	400	400
II	0	0	300	300	300
III	280	0	0	280	280

Максимальний обсяг роботи $f_1 = 47800$.

Для знаходження мінімального значення розглянемо таку задачу:

$$f_1(x) = 30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33} \to \min;$$

$$\begin{aligned} & x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 400, \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 300, \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 280, \\ & x_{11}, x_{12}, \ldots x_{33} \ge 0. \end{aligned}$$

Очевидно, що мінімальний обсяг роботи $f_1 = 0$.

Скориставшись формулою (2.1), нормалізуємо критерій, враховуючи, що він максимізується, а саме:

$$f_1^н(x) = \frac{47800 - (30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33})}{47800}.$$

Виконавши обчислення, отримуємо нормалізований критерій такого вигляду:

$$f_1^н(x) = 1 - 0{,}0006x_{11} - 0{,}0004x_{12} - 0{,}0008x_{13} - 0{,}0004x_{21} - 0{,}0006x_{22} -$$
$$- 0{,}001x_{23} - 0{,}0013x_{31} - 0{,}0008x_{32} - 0{,}0004x_{33}.$$

Аналогічно визначимо максимальні й мінімальні значення та нормалізуємо другий критерій, а саме:

$$f_2(x) = 2x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33} \to \min(\max)$$

$$\begin{aligned} & x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 400, \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 300, \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 280, \\ & x_{11}, x_{12}, \ldots x_{33} \ge 0. \end{aligned}$$

Використовуючи функцію «Пошук рішення» програми MS Excel, отримуємо значення часу x_{ij} виконання комбайнами кожної з робіт (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Вид комбайна	Вид роботи			Ресурс часу, год	
	A	*B*	*C*	використаний	обмеження
I	0	400	0	400	400
II	0	0	300	300	300
III	0	0	280	280	280

Максимальна вартість роботи $f_2 = 4780$, мінімальна вартість $f_2 = 0$.

Тоді, враховуючи що критерій $f_2(x)$ мінімізується, отримуємо такий вигляд нормалізованого критерію:

$$f_2^{н}(x) = \frac{2x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33} - 4780}{4780},$$

тобто

$$f_2^{н}(x) = 0{,}0063x_{11} + 0{,}0042x_{12} + 0{,}0084x_{13} + 0{,}0042x_{21} + 0{,}0063x_{22} +$$
$$0{,}0105x_{23} + 0{,}0126x_{31} + 0{,}0084x_{32} + 0{,}0042x_{33} - 1.$$

Тепер задача багатокритерійної оптимізації набуває такого вигляду:

$$f_1^{н}(x) = 1 - 0{,}0006x_{11} - 0{,}0004x_{12} - 0{,}0008x_{13} - 0{,}0004x_{21} - 0{,}0006x_{22} -$$
$$- 0{,}001x_{23} - 0{,}0013x_{31} - 0{,}0008x_{32} - 0{,}0004x_{33} \to \min;$$

$$f_2^{н}(x) = 0{,}0063x_{11} + 0{,}0042x_{12} + 0{,}0084x_{13} + 0{,}0042x_{21} + 0{,}0063x_{22} +$$
$$0{,}0105x_{23} + 0{,}0126x_{31} + 0{,}0084x_{32} + 0{,}0042x_{33} - 1 \to \min,$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 400,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 300,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 280,$$
$$x_{11}, x_{12}, \ldots x_{33} \ge 0.$$

Оскільки критерії нормалізовані, цю задачу можна розв'язувати методом згортки. Вважатимемо, що експерти оцінили значущість критеріїв таким чином: $\alpha_1 = 0{,}7$, $\alpha_2 = 0{,}3$, тобто пріоритет першого критерію дорівнює 0,7, а другого – 0,3.

Обидва критерії лінійні, тому будемо використовувати лінійну адитивну згортку. Узагальнений критерій матиме такий вигляд:

$$F(x) = \alpha_1 f_1^{н}(x) + \alpha_2 f_2^{н}(x) = 0{,}7\,(1 - 0{,}0006x_{11} - 0{,}0004x_{12} - 0{,}0008x_{13} - 0{,}0004x_{21} -$$
$$- 0{,}0006x_{22} - 0{,}001x_{23} - 0{,}0013x_{31} - 0{,}0008x_{32} - 0{,}0004x_{33}) + 0{,}3\,(0{,}0063x_{11} +$$
$$+ 0{,}0042x_{12} + 0{,}0084x_{13} + 0{,}0042x_{21} + 0{,}0063x_{22} + 0{,}0105x_{23} + 0{,}0126x_{31} +$$
$$+ 0{,}0084x_{32} + 0{,}0042x_{33} - 1) = 0{,}4 - 0{,}00421x_{11} - 0{,}0028x_{12} - 0{,}00561x_{13} -$$
$$- 0{,}0027x_{21} - 0{,}00421x_{22} - 0{,}00701x_{23} - 0{,}00841x_{31} - 0{,}00561x_{32} - 0{,}0028x_{33},$$

і відповідна скалярна задача буде такою:

$$F(x) = 0,4 - 0,00421x_{11} - 0,0028x_{12} - 0,00561x_{13} - 0,0027x_{21} - 0,00421x_{22} -$$
$$-0,00701x_{23} - 0,00841x_{31} - 0,00561x_{32} - 0,0028x_{33} \to \min;$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 400,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 300,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 280,$$
$$x_{11}, x_{12}, \ldots x_{33} \ge 0.$$

Розв'яжемо її за допомогою функції «Пошук рішення» MS Excel. Отримаємо значення x_{ij} часу виконання комбайнами кожної з робіт (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

Вид комбайна	Вид роботи			Ресурс часу, год	
	A	*B*	*C*	використаний	обмеження
I	0	0	400	400	400
II	0	0	300	300	300
III	280	0	0	280	280

Оптимальне значення узагальненого критерію за результатами обчислень дорівнює (–6,3), при цьому обсяг виконаної роботи становить 47800 м^3, а її вартість 3700 грн.

Метод головного критерію. Будемо розв'язувати задачу, враховуючи, що на думку експертів, перший критерій більш значущий, ніж другий.

Нормалізація при застосуванні цього способу розв'язування не потрібна.

Сформулюємо додаткові обмеження для другого критерію.

Припустимо, що максимально допустимий рівень витрат становить 2500 грн. Враховуючи , що другий критерій мінімізується, і встановлюючи для нього порогове значення на рівні максимально допустимих витрат, отримуємо додаткове обмеження такого вигляду:

$$f_2(x) = 2x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33} \le 2500.$$

Відповідна скалярна задача буде такою:

$$f_1(x) = 30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33} \to \max;$$

$$f_2(x) = 2x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33} \le 2500;$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 400,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 300,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 280,$$
$$x_{11}, x_{12}, \ldots x_{33} \ge 0.$$

Використовуючи функцію «Пошук рішення» MS Excel, розраховуємо значення x_{ij} часу виконання комбайнами кожної з робіт (табл. 2.5).

Таблиця 2.5

Вид комбайна	Вид роботи			Ресурс часу, год	
	A	*B*	*C*	використаний	обмеження
I	0	0	400	400	400
II	0	300	0	300	300
III	130	150	0	280	280

При цьому сумарний обсяг роботи $f_1(x) = 38800\,\text{м}^3$, а її вартість $f_2(x) = 2500$ грн.

Метод послідовної поступки. Розв'яжемо задачу, враховуючи, що перший критерій більш важливий, ніж другий.

Спочатку розв'язуємо скалярну задачу за першим (більш важливим критерієм) на вихідній множині альтернатив, а саме:

$$f_1(x) = 30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33} \to \max;$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 400,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 300,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 280,$$
$$x_{11}, x_{12}, \ldots x_{33} \ge 0.$$

Результати розв'язування задачі подано в табл. 2.6.

Таблиця 2.6

Вид комбайна	Вид роботи			Ресурс часу, год	
	A	*B*	*C*	використаний	обмеження
I	0	0	400	400	400
II	0	0	300	300	300
III	280	0	0	280	280

Максимальний обсяг роботи $f_1 = 47800$ м^3.Тепер робимо поступку за першим критерієм. Припустимо, що особа, яка приймає рішення, згодна зменшити обсяг роботи не більш ніж на 7800 м^3, тоді додаткове обмеження для нової задачі, враховуючи, що критерій максимізувався, буде мати такий вигляд:

$$f_1(x) = 30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33} \le 40000.$$

І, таким чином, задача другого кроку буде такою:

$$f_2(x) = 2x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33} \to \min;$$

$$f_1(x) = 30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33} \le 40000;$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 400,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 300,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 280,$$
$$x_{11}, x_{12}, \ldots x_{33} \ge 0.$$

У результаті розв'язування задачі отримаємо значення тривалості x_{ij} виконання комбайнами кожної з робіт (табл. 2.7).

Таблиця 2.7

Вид комбайна	Вид роботи			Ресурс часу, год	
	A	*B*	*C*	використаний	обмеження
I	0	0	400	400	400
II	0	300	0	300	300
III	190	90	0	280	280

При цьому обсяг виконаної роботи становить 40000 м^3, а її вартість 2620 грн.

Оскільки всі критерії розглянуто, то цей результат буде розв'язком вихідної багатокритерійної задачі.

Зведемо результати всіх обчислень у табл. 2.8.

Таблиця 2.8

Метод розв'язуваня	Час роботи комбайнів, год									Значення критеріїв	
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	$f_1(x)$	$f2(x)$
Згортки	0	0	400	0	0	300	280	0	0	47800	3700
Головного критерію	0	0	400	0	300	0	130	150	0	38800	2500
Послідовної поступки	0	0	400	0	300	0	190	90	0	40000	2620

Вочевидь, отримано три ефективних розв'язки задачі багатокритерійної оптимізації. Який з них використовувати, має вирішити особа, що приймає рішення, залежно від того, що саме вона вважає головнішим: зменшення вартості чи збільшення обсягу робіт.

Контрольні питання

1. Сформулюйте загальну постановку задачі багатокритерійної оптимізації.
2. Які альтернативи називають ефективними за Парето?
3. Які властивості ефективних альтернатив ви знаєте?
4. Які методи пошуку ефективних альтернатив Ви знаєте?
5. Для чого потрібна нормалізація критеріїв при розв’язуванні багатокритерійних задач?
6. Які способи нормалізації критеріїв Ви знаєте?
7. У чому полягають методи згортки в застосуванні до розв’язування багатокритерійних задач?
8. Які етапи передбачає застосування методу згортки.
9. Які види згорток ви знаєте?
10. Назвіть переваги й недоліки методів типу згортки?
11. Чи є обов’язковою нормалізація критеріїв при використанні методів згортки?
12. Чи потрібні кількісні значення переваг критеріїв у разі застосування методів згортки?
13. У чому полягає сутність методу головного критерію розв’язування багатокритерійних задач?
14. Перелічіть переваги й недоліки застосування методу головного критерію?
15. Чи є обов’язковою нормалізація критеріїв при використанні методу головного критерію до розв’язування багатокритерійних задач?
16. Чи потрібні кількісні значення переваг критеріїв при застосуванні методу головного критерію до розв’язування багатокритерійних задач?
17. Яка сутність методу послідовної поступки розв’язування багатокритерійних задач?
18. Які існують переваги і в чому полягають труднощі застосування методу послідовної поступки до розв’язування багатокритерійних задач?
19. Чи є обов’язковою нормалізація критеріїв при використанні методу послідовної поступки?
20. Чи потрібні кількісні значення переваг у разі застосування методу послідовної поступки?
21. Чи забезпечують методи згортки, послідовної поступки та головного критерію визначення єдиного оптимального розв’язку багатокритерійної задачі?

22. Чи забезпечує застосування цих методів отримання одного з ефективних розв'язків багатокритерійної задачі?

23. Яким чином можна враховувати пріоритети критеріїв?

24. Назвіть методи врахування жорсткого пріоритету критеріїв, у чому полягає їх сутність?

25. Назвіть методи врахування гнучкого пріоритету критеріїв, у чому полягає їх сутність?

Варіанти індивідуальних завдань

1. Механічний цех може виготовити за зміну 600 деталей типу 1 або 1200 деталей типу 2. Того самого дня виготовлені деталі надходять на термообробку. Виробнича потужність термічного цеху, де проводиться термообробка, становить за зміну 1200 деталей типу 1 або 800 деталей типу 2. Вартість деталей однакова. Визначити щоденну виробничу програму випуску деталей, яка максимізує товарну продукцію підприємства, враховуючи такі додаткові умови:

а) цехи працюють в одну зміну;

б) механічний цех працює три зміни, а термічний – у дві;

в) підприємство працює у дві зміни, при цьому деталей № 1 має бути виготовлено не більше 800 штук і деталей № 2 – не більше 1000 шт.

2. У роботі кар'єру можуть бути використані три види комбайнів I, II, і III, які здатні виконувати три види робіт *A*, *B*, і *C*. У табл. 2.9 відображено ресурси робочого часу кожного комбайна, їх продуктивність при виконанні різних робіт і вартість однієї години роботи (у грн). Визначити оптимальне завантаження комбайнів, яке забезпечує максимальний сумарний обсяг виконаних робіт і мінімальну їх собівартість.

Таблиця 2.9

Вид комбайна	Продуктивність, м^3/год			Питома вартість, грн/год			Ресурс часу, год
	A	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	
I	10	40	10	20	14	25	400
II	50	10	50	30	25	15	300
III	60	40	30	15	20	20	480

3. На шахті «Добропільська» функціонує три видобувних дільниці. Видобуте на кожній з них вугілля має має різний вміст сірки, різні показники вологості й зольності (табл. 2.10). Стосовно кожної з дільниць відомі значення максимально можливого й мінімально необхідного обсягу видобутку, а також витрати на видобуток однієї тонни сировини (табл. 2.10). Необхідно, з огляду на характеристики вугілля, що видобувається на кожній дільниці, скласти план робіт таким чином, щоб витрати на видобуток були мінімальними, його обсяг максимальним, і виконувалися б усі вимоги споживачів до якості сировини (вони подані в табл. 2.11).

Таблиця 2.10

Характеристики вугілля, % та показники роботи дільниці	Номер дільниці		
	1	2	3
Зольність	49	37	23
Вологість	7	8	10
Вміст сірки	1,8	2,1	3
Витрати, грн	1184,210	1381,777	1083,515
Максимальний обсяг видобутку, тис. т	1650	1090	1270
Мінімальний обсяг видобутку сировини, тис. т	1200	600	530

Таблиця 2.11

Якість вугілля	Зольність, %	Вологість, %	Вміст сірки, %
Експлуатаційна	39,5	–	–
Середня	–	8,2	2,16
Не більше	47,4	9,8	2,6

4. Авіакомпанія для організації пасажирських перевезень між центром Ц і чотирма містами М1, М2, М3, М4 має у своєму розпорядженні три групи літаків. Перша група складається з 10 чотиримоторних, друга – з 25 двомоторних літаків нового зразка і третя – з 40 двомоторних літаків старого зразка. Дані про кількість пасажирів, що може бути перевезена одним літаком даного типу по кожному маршруту протягом одного місяця, і пов'язані з цим експлуатаційні витрати на 1 літак (тис. грн) відображено в табл. 2.12. Кількість пасажирів, яких потрібно перевозити по кожному маршруту протягом місяця, становить відповідно 40, 50, 40, 30 тис. людей, а вартість одного квитка дорівнює 200, 150, 180 і 300 грн. Необхідно розподілити літаки серед маршрутів, виходячи з умови досягнення максимального прибутку авіакомпаній та максимальної кількості перевезених пасажирів.

Таблиця 2.12

Тип літака	Кількість пасажирів / експлуатаційні витрати, тис. грн			
	Ц - М1	Ц - М2	Ц - М3	Ц - М4
I	320/1,2	300/0,8	190/1,5	250/1,6
II	200/1,4	250/1,5	170/2,0	260/2,9
III	225/1,0	300/1,1	200/1,8	320/1,7

5. Збагачувальна фабрика отримує 4 види вугілля у таких кількостях: 400, 250, 350 і 100 тис. т. Унаслідок змішування цих чотирьох компонентів у різних пропорціях утворюється три сорти концентрату: *А* (1 : 1 : 1 : 1), *Б* (3 : 1 : 2 : 1) і *В* (2 : 2 : 1: 3). Вартість 1 тис. т концентрату дорівнює 120, 100 і 150 грн відповідно. Визначити оптимальний план випуску продукції, що забезпечує досягнення її максимальної сумарної вартості та максимальної кількості.

6. У роботі підприємства може бути задіяно п'ять технологічних процесів (*Т*1, *Т*2, *Т*3, *Т*4, *Т*5), причому кількість одиниць продукції, випущеної із застосуванням кожного з них за одиницю часу, відповідно дорівнює 300, 260, 320, 400 і 450 шт. У технологічному процесі враховуються такі виробничі чинники: кількість сировини, енергозатрати, витрати на заробітну платню й накладні витрати. Їх величини при роботі протягом одиниці часу в застосуванні до різних технологій зведено в табл. 2.13. Визначити виробничу програму, яка максимізує випуск продукції і потребує мінімальної кількості електроенергії.

Таблиця 2.13

Виробничі ресурси	Витрати на різні технології					Ліміт ресурсу
	*Т*1	*Т*2	*Т*3	*Т*4	*Т*5	
Сировина, т	15	20	15	14	18	2000
Електроенергія, кВт	0,2	0,3	0,15	0,25	0,3	300
Накладні витрати, грн	4	5	6	3	2	1000
Зарплатня, грн	6	3	4	6	3	1600

7. Механічний завод при виготовленні I, II та III типу деталей використовує токарні, фрезерувальні й стругальні верстати. При цьому обробку деталей кожного типу можна вести трьома різними технологічними способами *Т*1, *Т*2 і *Т*3. У табл. 2.14 подано норми часу для обробки деталі на відповідному верстаті кожним технологічним способом, а також часові ресурси (у верстато-годинах) кожної групи верстатів. Прибуток від продажу кожного виду виробу становить відповідно 22, 18 й 30 грн. Скласти оптимальний план завантаження виробничих потужностей, який забезпечує максимальний прибуток за умови мінімального використання токарних вестатів.

Таблиця 2.14

Тип верстата	Норми часу на обробку деталей, год									Ресурс часу
	I			II			III			
	*T*1	*T*2	*T*3	*T*1	*T*2	*T*3	*T*1	*T*2	*T*3	
Токарний	1	0,9	1,1	1,2	1,5	–	0,9	–	–	200
Фрезерувальний	0,8	0,8	1,3	0,9	1,1	1,3	1,1	0,8	–	400
Стругальний	–	0,7	0,7	0,7	–	1,3	1,3	0,6	–	300

8. В умовах попередньої задачі за наявності додаткових умов, коли між кількістю деталей, які випускаються, повинне виконуватися співвідношення комплектності 1 : 2 : 1, скласти оптимальний план завантаження виробничих потужностей, що забезпечує виготовлення максимального числа комплектів при максимальній вартості продукції.

9. Користуючись умовами задачі 7, скласти оптимальний план завантаження виробничих потужностей, який забезпечує максимальний прибуток при мінімальній кількості випуску деталей другого типу.

10. Для виготовлення сплаву зі свинцю, цинку та олова певного складу використовується сировина у вигляді п'яти сплавів з тих самих металів, що мають різний склад і вартість (табл. 2.15). Визначити, яку кількість сплаву кожного виду потрібно взяти, щоб виготовити при мінімальній собівартості максимальну кількість сплаву, який містить олова – від 40 до 60 % і цинку – від 20 до 30 %, враховуючи, що наявні ресурси сплавів I – V становлять 20, 25, 15, 30, 20 кг відповідно.

Таблиця. 2.15

Тип сплаву	Вміст металу, %			Питома вартість, грн/кг
	Свинець	Цинк	Олово	
I	25	30	45	8
II	10	80	10	17
III	30	30	40	10
IV	40	25	35	12
V	10	70	20	15

11. Деталі *А*, *Б*, *В* можна обробити на трьох верстатах (I, II, III). У табл. 2.16 подано норми витрат часу на обробку верстатом відповідної деталі, витрати на одну годину роботи верстата і граничний час його роботи. Вважаючи, що будь-яка деталь може оброблятися на будь-якому верстаті, визначити оптимальну виробничу програму, враховуючи такі критерії: максимум товарної продукції *T*; мінімальну собівартість продукції *B*.

Таблиця 2.16

Верстати	Норма часу обробки, год			Витрати на годину роботи, грн	Час роботи верстата, год
	А	*Б*	*В*		
I	0,3	0,1	0,2	30	50
II	0,5	0,2	0,4	20	60
III	0,4	0,5	0,3	15	40

12. Використовуючи дані табл. 2.16 і вважаючи, що кожна деталь послідовно обробляється на всіх верстатах, скласти виробничу програму, яка при мінімальних витратах забезпечує максимальну завантаженість верстатів, враховуючи заданий асортимент 3 : 2 : 1.

13. Розв’язати задачу 12 за умови, що будь-яка деталь може оброблятися на будь-якому верстаті.

14. Нафтопереробний завод отримує 4 види напівфабрикатів: 400 тис. л алкілату, 250 тис. л крекінгу-бензину, 350 тис. л бензину прямої перегонки і 100 тис. л ізопентану. Унаслідок змішування цих чотирьох компонентів у різних пропорціях утворюється три сорти авіаційного бензину: бензин *А* (5 : 2 : 1 : 1) , бензин *Б* (3 : 1 : 2 : 1) і бензин *В* (2 : 2 : 1 : 3). Вартість 1 тис. л бензину дорівнює 12000 грн, 20000 грн і 25000 грн відповідно.

Визначити план виробництва бензину, при якому буде досягнуто максимальну вартість усієї продукції та її максимальний об’єм.

15. Користуючись умовами попередньої задачі, визначити оптимальний план виробництва бензину з метою забезпечення максимального використання компонентів і максимальної собівартості продукції.

Лабораторна робота № 3

Тема роботи: Розв’язування задач нечіткого математичного програмування

Мета роботи: вивчення методів розв’язування задач нечіткого математичного програмування

Порядок виконання роботи

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал.
2. Побудувати математичну модель задачі згідно з варіантом індивідуального завдання.
3. Розв’язати задачу нечіткої оптимізації, використовуючи один з таких методів : зведення до задачі досягнення нечітко визначеної мети, розкладання на множини рівня, зведення до задачі багатокритерійної оптимізації.
4. Скласти звіт про виконання роботи, який повинен містити
   - постановку індивідуального завдання;
   - опис розв’язування задачі із необхідною деталізацією;
   - результати розв’язування задачі;
   - аналіз отриманих результатів.

Теоретичні відомості

Стандартна задача математичного програмування зазвичай полягає в максимізації (або мінімізації) заданої функції на даній множині допустимих альтернатив, яку описано системою нерівностей. Наприклад,

$$\begin{gathered} f(x) \to \max, \\ \varphi_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ x \in X, \end{gathered} \tag{3.1}$$

де X – задана множина альтернатив, $f : X \to R^1$ й $\varphi_i : X \to R^1$, $i = 1,\dots,m$ – задані функції.

Моделюючи в такій формі реальні задачі, дослідник часто може мати у своєму розпорядженні лише нечіткі описи функцій f і φ або їхніх параметрів, нечітко може бути описана й множина альтернатив *X*. Нечіткий опис ситуації прийняття рішень може, наприклад, відображати неадекватність інформації про цю ситуацію або бути формою наближеного опису, достатнього для розв’язування певної задачі.

Форми нечіткого опису інформації можуть бути різними, звідси й походить відмінність у математичних постановках відповідних задач *нечіткого математичного програмування* (НМП). Класифікацію таких задач та підходи до їх розв'язування подано у літературних джерелах [5, 8].

Розглянемо задачу математичного програмування із нечіткими обмеженнями.

На відміну від стандартної задачі (3.1), їй характерні «пом'якшені» обмеження, тобто припускається можливість деякого їх порушення.

Крім того, замість максимізації функції $f(x)$, можна ставити за мету досягнення її певного фіксованого значення, причому різним відхиленням $f(x)$ від цієї величини належить приписувати різні ступені допустимості (наприклад, чим більше відхилення, тим меншим буде ступінь його допустимості). Нечітку задачу при цьому можна записати таким чином:

$$
\begin{aligned}
&f(x) \geq z_{\circ}, \\
&\varphi(x) \tilde{\leq} 0, \\
&x \in X,
\end{aligned}
$$

тут символ $\sim$ означає нечіткість поданої нерівності.

Опишемо підходи до розв'язування цієї задачі.

1. *Зведення до задачі нечітко визначеної мети.* Припустимо, що $z_{\circ}$ – задана величина цільової функції $f(x)$, яка вважається достатньою для досягнення мети прийняття рішення, а також існують (подані ОПР) два граничних рівні a та b, причому нерівність: $f(x) < z_{\circ} - a$ означає сильне порушення умови: $f(x) \geq z_{\circ}$, а $\varphi(x) > b$ – сильне порушення умови: $\varphi(x) \leq 0$. Тоді можна записати множини мети й обмежень, використовуючи такі функції належності:

$$
\mu_G(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \leq z_0 - a, \\ \mu(x,a), & z_0 - a < f(x) < z_0, \\ 1, & f(x) \geq z_0, \end{cases}
$$

$$
\mu_C(x) = \begin{cases} 0, & \varphi(x) \geq b, \\ \nu(x,b), & 0 < \varphi(x) < b, \\ 1, & \varphi(x) \leq 0, \end{cases}
$$

тут $\mu(x, a)$ та $\nu(x, b)$ задані функції, які описують міру виконання відповідних нерівностей з погляду ОПР та з урахуванням умов конкретної задачі прийняття рішень, а саме $\mu : X \to [0,\ 1]$ та $\nu : X \to [0,\ 1]$.

Таким чином, вихідну задачу буде сформульовано у вигляді задачі досягнення нечітко визначеної мети, до якої можна застосувати підхід Белмана – Заде.

2. *Розкладання нечіткої множини допустимих альтернатив на множини рівня*. Даний підхід полягає в тому, що вихідну задачу нечіткого математичного програмування формулюють у вигляді сукупності звичайних задач максимізації функції   на всіляких множинах рівня множини допустимих альтернатив.

Якщо альтернатива $x_0 \in X$ є розв’язком задачі: $\varphi(x) \to \max$, на множині рівня λ, то природно вважати, що її ступінь належності до нечіткої множини розв’язків задачі не менший від числа λ. Отже, перебравши всілякі значення , ми одержимо функцію належності нечіткого розв’язку.

Опишемо цей підхід більш детально. Позначимо через C_λ множину рівня нечіткої множини допустимих альтернатив μ_c, тобто

$$C_\lambda = \{x \mid x \in X, \mu_C(x) \geq \lambda\},$$

і уведемо множину:

$$N(\lambda) = \left\{ x \,\middle|\, x \in X, \varphi(x) = \sup_{x' \in C_\lambda} \varphi(x') \right\}.$$

Вона відображає сукупність розв’язків звичайної задачі максимізації функції φ на множині альтернатив, ступінь належності яких до множини допустимих альтернатив вихідної задачі НМП не менший від числа λ.

Метод розв’язування задачі полягає в тому, що для всіх чисел $0 < \lambda \leq 1$, за умови: $C_\lambda \neq \varnothing$, розв’язують задачі такого вигляду:

$$\varphi(x) \to \max,$$
$$x \in C_\lambda.$$

Для побудови функції належності нечіткого розв’язку необхідно кожній альтернативі $x \in X$ приписати ступінь належності до цієї множини. Зробимо це таким чином: ступенем належності альтернативи x_0 до нечіткої множини розв’язків будемо вважати максимальне (точніше верхню границю) з чисел λ, для яких відповідна множина $N(\lambda)$ містить альтернативу x_0.

В и з н а ч е н н я 3.1. Розв’язком задачі НМП будемо називати нечітку підмножину μ_D, яка описується такою функцією належності:

$$\mu^1(x) = \sup_{\lambda : x \in N(\lambda)} \lambda.$$

Зауважимо, що коли функція належності неперервна, то застосування цього підходу вимагає розгляду нескінченної кількості задач, оскільки нескінченною буде кількість множин рівня. Однак для практичного використання буде достатньо розглянути скінченну множину задач для множин рівня, визначених експертами або ОПР.

3. *Зведення до багатокритерійної задачі*. Для цього підходу характерно те, що із самого початку явно враховується прагнення ОПР при виборі альтернативи отримати якомога більші значення як максимизованої функції, так і функції належності нечіткої множини допустимих альтернатив.

З цією метою у розв'язок задачі включають лише ті альтернативи, які в задачах багатокритерійної оптимізації називаються ефективними за Парето [8, с. 59], тобто розв'язують задачу такого вигляду:

$$\varphi(x) \to \max,$$

$$\mu_C(x) \to \max$$

$$x_0 \in X.$$

Розглянемо приклад розв'язування лінійної задачі НМП.

Приклад розв'язування задачі

Розв'язати таку задачу нечіткого математичного програмування:

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \max \\
&2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\
&x_1 + 6x_2 \leq 18, \\
&2x_1 + 3x_2 \leq\approx 12, \\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Розв'язування

Будемо вважати, що нечіткі обмеження описуються такою функцією належності:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 2x_1 + 3x_2 \geq 14, \\ 0{,}5, & \text{якщо } 13 \leq 2x_1 + 3x_2 \leq 14, \\ 0{,}7, & \text{якщо } 12 \leq 2x_1 + 3x_2 \leq 13, \\ 1, & \text{якщо } 2x_1 + 3x_2 \leq 12. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Використаємо метод розкладання на множини рівня. Враховуючи вигляд функції належності обмежень (3.2), робимо висновок, що необхідно розв'язувати задачі на таких множинах рівня: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 0{,}7$; та $\lambda_3 = 0{,}5$.

Якщо $\lambda_1 = 1$, то задача набуває такого вигляду:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \max,\\
&2x_1 + 3x_2 \ge 6,\\
&x_1 + 6x_2 \le 18,\\
&2x_1 + 3x_2 \le 12,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Коли $\lambda_2 = 0{,}7$, то маємо таку задачу:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \max,\\
&2x_1 + 3x_2 \ge 6,\\
&x_1 + 6x_2 \le 18,\\
&2x_1 + 3x_2 \le 13,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

І якщо $\lambda_3 = 0{,}5$, то задачу буде записано в такому вигляді:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \max,\\
&2x_1 + 3x_2 \ge 6,\\
&x_1 + 6x_2 \le 18,\\
&2x_1 + 3x_2 \le 14,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Оскільки вихідна задача була лінійною, у результаті розкладання ми також отримали задачі лінійного програмування і для їх розв’язування можна застосовувати, наприклад, симплекс-метод, або, оскільки кожна з них має лише дві змінні, розв’язати їх графічно.

З цією метою зобразимо на координатній площині множини рівня нечіткої множини допустимих альтернатив (див. рис. 3.1).

Тут багатокутник *ABCDE* відповідає множині рівня: $\lambda_1 = 1$; багатокутник $A_1\,DCDE_1$ – множині рівня: $\lambda_2 = 0{,}7$; а $A_2\,BCDE_2$ – множині рівня: $\lambda_3 = 0{,}5$.

Розв’язком задачі на множині рівня 1 буде точка *A*. Знайдемо її координати з такої системи рівнянь:

$$
\begin{cases}
x_1 + 6x_2 = 18,\\
2x_1 + 3x_2 = 12.
\end{cases}
$$

Отримуємо такий результат: $x_1 = 2, x_2 = 2\dfrac{2}{3}$.

Значення цільової функції в цій точці $f(A) = 17\dfrac{1}{3}$.

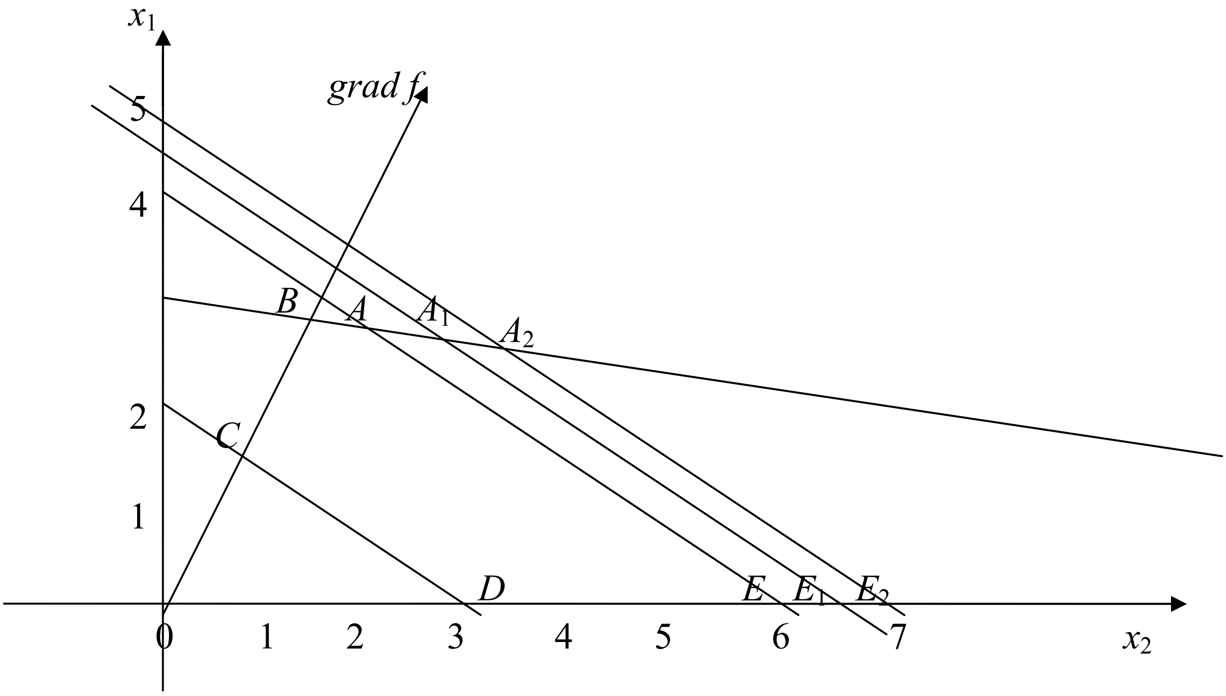

Рис. 3.1. Графічна інтерпретація розв'язування задачі нечіткого математичного програмування

Аналогічно знаходимо розв'язки задач на множинах рівня 0,7 та 0,5. Це точки A_1 (вона має координати: $x_1 = 2\frac{2}{3}, x_2 = 2\frac{5}{9}$) та A_2 (її координати: $x_1 = 3\frac{1}{3},\ x_2 = 2\frac{4}{9}$).

Цим розв'язкам відповідають такі цільової функції: $f(A_1) = 18\frac{1}{9}$, $f(A_2) = 18\frac{2}{3}$.

Звівши одержані результати в таблицю, маємо нечіткий розв'язок задачі.

Таблиця 3.1

x_1	x_2	f	
2	$2\frac{2}{3}$	$17\frac{1}{3}$	1
$2\frac{2}{3}$	$2\frac{5}{9}$	$18\frac{1}{9}$	0,7
$3\frac{1}{3}$	$2\frac{4}{9}$	$18\frac{2}{3}$	0,5

Контрольні питання

1. Сформулюйте загальну постановку задачі нечіткого математичного програмування.

2. Яким чином класифікують задачі нечіткого математичного програмування?

3. Які підходи застосовують до розв’язування задач НМП?

4. У чому полягає сутність методу зведення до задачі досягнення нечітко визначеної мети при розв’язувані задач НМП?

5. У чому полягає сутність методу розкладання на множини рівня при розв’язувані задач НМП?

6. Розкрийте суть методу модальних значень у застосуванні до задач НМП?

7. Опишіть застосування методу зведення до багатокритерійної задачі при розв’язуванні задач НМП?

Варіанти індивідуальних завдань

1. $f\left(x_1, x_2\right) = 2x_1 + 5x_2 \to \max;$
$x_1 + x_2 \geq\approx 4,$
$4x_1 + 6x_2 \leq\approx 24,$
$3x_1 + 8x_2 \leq\approx 24,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

2. $f\left(x_1, x_2\right) = x_1 - 5x_2 \to \min;$
$x_1 + x_2 \geq\approx 4,$
$4x_1 + 6x_2 \leq\approx 24,$
$3x_1 + 8x_2 \leq\approx 24,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

3. $f\left(x_1, x_2\right) = x_1 - x_2 \to \max;$
$x_1 + 2x_2 \geq\approx 2,$
$2x_1 + 5x_2 \leq\approx 10,$
$12x_1 + 8x_2 \leq\approx 24,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

4. $f\left(x_1, x_2\right) = 2x_1 + 3x_2 \to \min;$
$x_1 + 2x_2 \geq\approx 2,$
$2x_1 + 5x_2 \leq\approx 10,$
$12x_1 + 8x_2 \leq\approx 24,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

5. $f\left(x_1, x_2\right) = 2x_1 + 5x_2 \to \max;$
$2x_1 + 3x_2 \geq\approx 6,$
$x_1 + 6x_2 \leq\approx 18,$
$2x_1 + 3x_2 \leq\approx 12,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

6. $f\left(x_1, x_2\right) = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$
$x_1 + 2x_2 \geq\approx 2,$
$2x_1 + 5x_2 \leq\approx 10,$
$12x_1 + 8x_2 \leq\approx 24,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

7. $f(x_1,x_2)=2x_1+5x_2\to\min;$
$x_1+x_2\ \geq\approx 4,$
$4x_1+6x_2\ \leq\approx 24,$
$3x_1+8x_2\ \leq\approx 24,$
$x_1,x_2\geq 0.$

8. $f(x_1,x_2)=10x_1-x_2\to\max;$
$x_1+2x_2\ \geq\approx 2,$
$2x_1+5x_2\ \leq\approx 10,$
$12x_1+8x_2\ \leq\approx 24,$
$x_1,x_2\geq 0.$

9. $f(x_1,x_2)=2x_1+x_2\to\min;$
$3x_1+x_2\ \geq\approx 4,$
$x_1-6x_2\ \leq\approx 24,$
$3x_1+8x_2\ \leq\approx 24,$
$x_1,x_2\geq 0.$

10. $f(x_1,x_2)=12x_1-3x_2\to\max;$
$2x_1+3x_2\ \geq\approx 6,$
$2x_1+6x_2\ \leq\approx 18,$
$2x_1+x_2\ \leq\approx 12,$
$x_1,x_2\geq 0.$

11. $f(x_1,x_2)=2x_1-5x_2\to\min;$
$x_1+x_2\ \geq\approx 4,$
$4x_1+6x_2\ \leq\approx 24,$
$3x_1+8x_2\ \leq\approx 24,$
$x_1,x_2\geq 0.$

12. $f(x_1,x_2)=2x_1+3x_2\to\max;$
$7x_1+2x_2\ \geq\approx 2,$
$x_1+15x_2\ \leq\approx 10,$
$12x_1+8x_2\ \leq\approx 24,$
$x_1,x_2\geq 0.$

13. $f(x_1,x_2)=x_1-x_2\to\max;$
$x_1+2x_2\ \geq\approx 2,$
$2x_1+5x_2\ \leq\approx 10,$
$12x_1+8x_2\ \leq\approx 24,$
$x_1,x_2\geq 0.$

14. $f(x_1,x_2)=2x_1+3x_2\to\max;$
$-3x_1+2x_2\ \geq\approx 2,$
$2x_1+5x_2\ \leq\approx 10,$
$2x_1+8x_2\ \leq\approx 24,$
$x_1,x_2\geq 0.$

15. $f(x_1,x_2)=2x_1+3x_2\to\max;$
$5x_1+2x_2\ \geq\approx 2,$
$2x_1+5x_2\ \leq\approx 10,$
$3x_1+8x_2\ \leq\approx 24,$
$x_1,x_2\geq 0.$

16. $f(x_1,x_2)=7x_1-5x_2\to\max;$
$2x_1+x_2\ \geq\approx 4,$
$4x_1+6x_2\ \leq\approx 24,$
$3x_1+8x_2\ \leq\approx 24,$
$x_1,x_2\geq 0.$

17. $f(x_1,x_2)=2-3x_1+5x_2\to\max;$
$x_1+x_2\ \geq\approx 4,$
$4x_1+6x_2\ \leq\approx 24,$
$3x_1+8x_2\ \leq\approx 24,$
$x_1,x_2\geq 0.$

18. $f(x_1,x_2)=4x_1-5x_2\to\min;$
$x_1+x_2\ \geq\approx 4,$
$4x_1+6x_2\ \leq\approx 24,$
$3x_1+8x_2\ \leq\approx 24,$
$x_1,x_2\geq 0.$

19. $f\left(x_1,x_2\right)=5x_1-2x_2\to\max;$
$x_1+2x_2\ge\approx 2,$
$2x_1+5x_2\le\approx 10,$
$12x_1+8x_2\le\approx 24,$
$x_1,x_2\ge 0.$

20. $f\left(x_1,x_2\right)=12x_1$ - $5x_2$ – min;
$x_1+2x_2\ge\approx 2,$
$2x_1+5x_2\le\approx 10,$
$12x_1+8x_2\le\approx 24,$
$x_1,x_2\ge 0.$

21. $f\left(x_1,x_2\right)=2x_1+5x_2\to\max;$
$2x_1+3x_2\ge\approx 6,$
$x_1+6x_2\le\approx 18,$
$2x_1+3x_2\le\approx 12,$
$x_1,x_2\ge 0.$

22. $f\left(x_1,x_2\right)=2x_1+3x_2\to\max;$
$x_1+2x_2\ge\approx 2,$
$2x_1+5x_2\le\approx 10,$
$12x_1+8x_2\le\approx 24,$
$x_1,x_2\ge 0.$

23. $f\left(x_1,x_2\right)=12x_1+5x_2\to\min;$
$2x_1+x_2\ge\approx 14,$
$4x_1+6x_2\le\approx 32,$
$3x_1+8x_2\le\approx 32,$
$x_1,x_2\ge 0.$

24. $f\left(x_1,x_2\right)=5x_1-2x_2\to\max;$
$x_1+2x_2\ge\approx 2,$
$2x_1+5x_2\le\approx 10,$
$12x_1+8x_2\le\approx 24,$
$x_1,x_2\ge 0.$

25. $f\left(x_1,x_2\right)=8x_1+5x_2\to\min;$
$7x_1+3x_2\ge\approx 21,$
$4x_1+6x_2\le\approx 48,$
$3x_1+8x_2\le\approx 48,$
$x_1,x_2\ge 0.$

26. $f\left(x_1,x_2\right)=2x_1-5x_2\to\max;$
$2x_1+3x_2\ge\approx 6,$
$x_1+6x_2\le\approx 18,$
$2x_1+3x_2\le\approx 12,$
$x_1,x_2\ge 0.$

27. $f\left(x_1,x_2\right)=2x_1+5x_2\to\min;$
$x_1+x_2\ge 4,$
$4x_1+6x_2\le 24,$
$3x_1+8x_2\le 24,$
$x_1,x_2\ge 0.$

28. $f\left(x_1,x_2\right)=2x_1+3x_2\to\max;$
$x_1+2x_2\ge 2,$
$2x_1+5x_2\le 10,$
$12x_1+8x_2\le 24,$
$x_1,x_2\ge 0.$

29. $f\left(x_1,x_2\right)=2x_1+3x_2\to\max;$
$7x_1+2x_2\ge\approx 4,$
$2x_1+5x_2\le\approx 10,$
$12x_1+8x_2\le\approx 32,$
$x_1,x_2\ge 0.$

30. $f\left(x_1,x_2\right)=2x_1-x_2\to\max;$
$x_1+2x_2\ge\approx 2,$
$2x_1+5x_2\le\approx 10,$
$12x_1+8x_2\le\approx 24,$
$x_1,x_2\ge 0.$

Лабораторна робота № 4

Тема роботи: Прийняття рішень на основі нечітких відношень переваги.

Мета роботи: вивчення властивостей нечітких відношень переваги та методів прийняття рішень за нечіткими відношеннями переваги.

Порядок виконання роботи:

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал.
2. Скласти програму, яка реалізує раціональний вибір альтернативи з даної множини на основі поданих відношень переваги.
3. Розв'язати задачу вибору згідно з варіантом індивідуального завдання.
4. Скласти звіт про виконання роботи, який повинен містити
   - постановку індивідуального завдання;
   - лістинг програми;
   - результати розрахунків;
   - аналіз отриманих результатів.

Теоретичні відомості

В и з н а ч е н н я 4.1. Нечітким відношенням R на множині X називається нечітка підмножина декартового добутку $X \times X$. Вона характеризується такою функцією належності: $\mu_R : X \times X \to [0;\ 1]$.

Значення $\mu_R(x, y)$ цієї функції показує міру або ступінь, з якою виконується відношення R між елементами x та y. Зрозуміло, що звичайні відношення ми можемо вважати окремим випадком нечітких відношень, функції належності яких можуть мати тільки два значення: 0 або 1.

В и з н а ч е н н я 4.2. Нехай на множині X подано два нечітких відношення A та B, тобто в декартовому добутку X^2 подано дві нечіткі підмножини A та B. Тоді нечіткі множини: $C = A \bigcap B$ та $D = A \bigcup B$, назвемо відповідно *перетином* та *об'єднанням* нечітких відношень A й B на множині X.

В и з н а ч е н н я 4.3. Нечітке відношення B *містить* нечітке відношення A, якщо для нечітких множин B та A має місце включення: $A \subset B$, тобто їх функції належності задовольняють таку нерівність:

$$\mu_A(x, y) \le \mu_B(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

В и з н а ч е н н я 4.4. Якщо R – нечітке відношення на множині X, то нечітке відношення $\overline{R}$, функція належності якого $\mu_{\overline{R}}(x,y)=1-\mu_R(x,y)$, назвемо *доповненням* відношення R у множині X.

Наприклад, доповненням нечіткого відношення «краще» буде відношення «не краще».

Обернене до R нечітке відношення R^{-1} на множині X визначається таким чином:

$$x\,R^{-1}\,y \iff y\,R\,x, \quad \forall x,y\in X,$$

або з використанням термінології функцій належності

$$\mu_{R^{-1}}(x,y)=\mu_R(y,x), \ \ \forall x,y\in X.$$

Прийняття рішень за даними відношеннями переваги

Розглянемо таку задачу: нехай задано множину альтернатив X і кожна альтернатива цієї множини характеризується кількома ознаками, номери яких $j=1,..,m.$ Інформацію про попарне порівняння альтернатив подано у вигляді відношень переваги R_j, $j=1,..,m.$ Таким чином, маємо m відношень переваги на множині X. Припустимо також, що відношення R_j відрізняються за важливістю відповідних ознак, на основі яких порівнюють альтернативи, а важливість кожної з ознак описується величиною коефіцієнта λ_j, $j=1,..,m.$ Необхідно на основі даної інформації зробити раціональний вибір альтернативи з множини $(X,R_1,...,R_m)$.

Сформулюємо алгоритм, який дозволяє розв’язати сформульовану задачу.

1. Будуємо нечітке відношення Q_1 (перетин вихідних відношень), а саме:

$$\mu_{Q_1}(x,y)=\min\{\mu_1(x,y),...,\mu_m(x,y)\}.$$

Далі визначаємо нечітку підмножину недомінованих альтернатив у множині (X,μ_{Q_1}) за такою формулою:

$$\mu_{Q_1}^{н.д.}(x)=1-\sup_{y\in X}\left[\mu_{Q_1}(x,y)-\mu_{Q_1}(y,x)\right].$$

2. Створюємо нечітке відношення Q_2 (адитивну згортку відношень), а саме:

$$\mu_{Q_2}(x,y)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\mu_j(x,y),$$

і визначаємо нечітку підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_2}), тобто

$$\mu_{Q_2}^{н.д.}(x) = 1 - \sup_{y \in X}\left[\mu_{Q_2}(x, y) - \mu_{Q_2}(y, x)\right].$$

3. Знаходимо перетин множин $\mu_{Q_1}^{н.д.}$ та $\mu_{Q_2}^{н.д.}$ за таким правилом:

$$\mu^{н.д.}(x) = \min\left\{\mu_{Q_1}^{н.д.}(x), \mu_{Q_2}^{н.д.}(x)\right\}.$$

4. Раціональним вважаємо вибір альтернатив із такої множини:

$$X^{Н.Д.} = \left\{x \in X \middle| \mu^{н.д.}(x) = \sup_{x' \in X} \mu^{н.д.}(x')\right\}.$$

Тут слід зауважити, що залежно від типу задачі раціональними можна вважати не тільки альтернативи з множини $X^{\text{Н.Д.}}$, але в тому чи іншому сенсі й слабко (або не дуже сильно) доміновані альтернативи, тобто ті, ступінь належності яких до множини $\mu^{\text{н.д.}}$ нижчий від певного заданого.

Приклад розв'язування задачі

Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. На ній подано два нечіткі відношення переваги R_1 та R_2, причому друге з них має значущість, вдвічі більшу ніж перше, зокрема

$$R_1 = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ x_2 & 0 & 1 & 0{,}8 \\ x_3 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array}, \qquad R_2 = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ x_2 & 0{,}3 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array}.$$

Необхідно здійснити раціональний вибір альтернативи з множини X на основі заданих відношень переваги.

Розв'язування

1. Будуємо відношення: $Q_1 = \lambda_1 R_1 \cap \lambda_2 R_2$, враховуючи, що $\lambda_1 = 0{,}33$ і $\lambda_2 = 0{,}67$, воно набуває такого вигляду:

$$\mu_{Q_1}(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}033 & 0 \\ 0 & 0{,}33 & 0{,}33 \\ 0{,}33 & 0{,}167 & 0{,}33 \end{pmatrix},$$

а відповідне йому відношення строгої переваги

$$\mu_{Q_1}^s(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}033 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}167 \\ 0{,}33 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_1}) за формулою: $\mu_{Q_1}^{н.д.}(x) = 1 - \sup\limits_{y \in X} \mu_{Q_1}^s(x, y)$.

Її функція належності

$$\mu_{Q_1}^{н.д.}(x_i) = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3}{0{,}67 \mid 0{,}967 \mid 0{,}833}.$$

2. Будуємо відношення: $Q_2 = \lambda_1 \mu_1(x_i, x_j) + \lambda_2 \mu_2(x_i, x_j)$. Його функція належності

$$\mu_{Q_2}(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}367 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}867 \\ 1 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix},$$

а відповідне відношення строгої переваги має такий вигляд:

$$\mu_{Q_2}^S(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}167 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}367 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись формулою: $\mu_{Q_2}^{н.д.}(x) = 1 - \sup\limits_{y \in X} \mu_{Q_2}^s(x, y)$, знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_2}), а саме:

$$\mu_{Q_2}^{н.д..} = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3}{0{,}2 \mid 0{,}833 \mid 0{,}633}.$$

Вихідна множина недомінованих альтернатив має таку функцію належності:

$$\mu^{н.д.} = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3}{0{,}2 \mid 0{,}833 \mid 0{,}633}.$$

Максимальним ступенем недомінованості характеризується альтернатива x_2, тому її вибір можна вважати раціональним.

Контрольні питання

1. Що називають нечітким відношенням?
2. Як можна задавати нечіткі відношення?
3. Які математичні операції можна застосовувати до нечітких відношень?
4. Яке нечітке відношення називають рефлексивним (антирефлексивним)?
5. Яке нечітке відношення називають симетричним, антисиметричним, асиметричним?
6. Що являє собою нечітке відношення переваги?
7. Які властивості має нечітке відношення переваги, що воно характеризує?
8. Яким чином здійснюють раціональний вибір альтернатив, коли відоме відношення переваги на даній множині альтернатив?
9. Як відбувається раціональний вибір альтернатив, коли задано кілька відношень переваги на множині альтернатив?
10. Яким чином виконують раціональний вибір альтернатив, коли задано відношення переваги на множині альтернатив й нечітку перевагу на множині ознак?

Варіанти індивідуальних завдань

Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. На ній подано два нечіткі відношення переваги: R_1 та R_2, значущість яких, на думку ОПР, дорівнює відповідно λ_1 і λ_2. Необхідно здійснити раціональний вибір альтернативи з множини X на основі заданих відношень переваги.

1. $$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 0,3$ і $\lambda_2 = 0,7$.

2. $R_1=\begin{pmatrix}1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1\\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7\\ 0,6 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1\\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4\\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1\end{pmatrix}$, $R_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0,9 & 0 & 0,6\\ 0,1 & 1 & 0,3 & 0,4 & 0,1\\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7\\ 0,5 & 0,6 & 0 & 1 & 0,7\\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,4 & 1\end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,4$ i $\lambda_2 = 0,6$.

3. $R_1=\begin{pmatrix}1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1\\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7\\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7\\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4\\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1\end{pmatrix}$, $R_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0,6\\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1\\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7\\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7\\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1\end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,6$ i $\lambda_2 = 0,4$.

4. $R_1=\begin{pmatrix}1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1\\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7\\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7\\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4\\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1\end{pmatrix}$, $R_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0,6\\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1\\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7\\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7\\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1\end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,5$ i $\lambda_2 = 0,5$.

5. $R_1=\begin{pmatrix}1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 1\\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7\\ 0,3 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0,1\\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 1 & 0,4\\ 0,3 & 0,6 & 0,5 & 0,7 & 1\end{pmatrix}$, $R_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0,6\\ 0,1 & 1 & 0,5 & 0,4 & 0,3\\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7\\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7\\ 0,7 & 0,9 & 0,8 & 0,5 & 1\end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,2$ i $\lambda_2 = 0,8$.

6. $R_1=\begin{pmatrix}1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1\\ 0,6 & 1 & 0,3 & 0,8 & 0,7\\ 0,8 & 0,5 & 1 & 0,9 & 0,6\\ 0,7 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4\\ 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,4 & 1\end{pmatrix}$, $R_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0,6\\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1\\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7\\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7\\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1\end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,4$ i $\lambda_2 = 0,6$.

$$7.\ R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 1 & 0,5 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,7 & 0,9 & 0,8 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 0,7$ i $\lambda_2 = 0,3$.

$$8.\ R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 & 0,5 & 0,7 & 1 \end{pmatrix},$$

$\lambda_1 = 0,8$ i $\lambda_2 = 0,2$.

$$9.\ R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 & 0,5 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 1 & 0,5 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,7 & 0,9 & 0,8 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 0,7$ i $\lambda_2 = 0,3$.

$$10.\ R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,4 \\ 0,9 & 1 & 0,7 & 0,8 & 0,7 \\ 0,6 & 0,6 & 1 & 0,7 & 0,5 \\ 0,3 & 0,8 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,7 & 0,5 & 0,1 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 & 0,5 & 0,7 & 1 \end{pmatrix},$$

$\lambda_1 = 0,6$ i $\lambda_2 = 0,4$.

$$11.\ R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0,4 & 0,9 \\ 0,9 & 1 & 0,6 & 1 & 0,8 \\ 0,5 & 0,4 & 0,7 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & 1 & 0,7 & 0,6 \\ 0,1 & 1 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 0,3$ i $\lambda_2 = 0,7$.

$$12.\ R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}9 & 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix},$$

$\lambda_1 = 0{,}5$ i $\lambda_2 = 0{,}5$.

$$13.\ R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}7 & 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0 & 0{,}7 & 1 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}6 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 0{,}5$ i $\lambda_2 = 0{,}5$.

$$14.\ R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0 & 0{,}7 & 1 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}5 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 0{,}7$ i $\lambda_2 = 0{,}3$.

$$15.\ R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0 & 0{,}7 & 1 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}6 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 0{,}3$ i $\lambda_2 = 0{,}7$.

$$16.\ R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}7 & 1 & 0{,}7 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 0{,}2$ i $\lambda_2 = 0{,}8$.

17. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0 & 0{,}7 & 1 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}6 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 \end{pmatrix},$

$\lambda_1 = 0{,}4$ i $\lambda_2 = 0{,}6$.

18. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}.$

$\lambda_1 = 0{,}7$ i $\lambda_2 = 0{,}3$.

19. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 1 & 0{,}4 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}9 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}.$

$\lambda_1 = 0{,}7$ i $\lambda_2 = 0{,}3$.

20. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}.$

$\lambda_1 = 0{,}7$ i $\lambda_2 = 0{,}3$.

21. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0 & 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 1 \\ 0 & 0{,}7 & 1 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}.$

$\lambda_1 = 0{,}5$ i $\lambda_2 = 0{,}5$

22. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,1$ i $\lambda_2 = 0,9$.

23. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,9$ i $\lambda_2 = 0,1$.

24. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,7 & 0,2 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,7 & 0,8 & 0,4 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,3$ i $\lambda_2 = 0,7$.

25. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,2 & 1 & 0,1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,8 & 0,9 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,6 & 1 & 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 1 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0,8 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,1$ i $\lambda_2 = 0,9$.

26. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,2 & 1 & 0,1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,8 & 0,9 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,8$ i $\lambda_2 = 0,2$.

27. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,2 & 1 & 0,1 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,8 & 0,9 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,7 & 0,6 & 0,4 & 1 & 0,7 \\ 0,3 & 0,4 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,8$ i $\lambda_2 = 0,2$.

28. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,8 & 1 & 0,7 & 0,8 & 0,7 \\ 0,6 & 0,8 & 1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,7 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,7 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,4 & 0,7 \\ 0,7 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,7 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,3$ i $\lambda_2 = 0,7$.

29. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,5 & 1 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 1 & 1 & 0,9 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 1 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,8$ i $\lambda_2 = 0,2$.

30. $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 1 & 0,7 & 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0 & 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,7 & 0,4 & 1 \\ 0,5 & 0,7 & 1 & 0,4 & 0,7 \\ 0,7 & 0,3 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,7 & 0,9 & 0,8 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0,6$ i $\lambda_2 = 0,4$.

Список літератури

1. Зайченко, Ю. П. Исследование операций [Текст] / Ю. П. Зайченко. – К. : Вища шк., 1988. – 552 с.

2. Зайченко, Ю. П. Исследование операций [Текст]: сб. задач / Ю. П. Зайченко, С. А. Шумилова. – К. : Вища шк., 1984. – 220 с.

3. Кофман, А. Введение в теорию нечетких множеств [Текст] / А. Кофман. – М. : Радио и связь, 1982. – 432 с.

4. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта [Текст] / под ред. Д. А. Поспелова. – М. : Наука, 1986. – 312 с.

5. Орловский, С. А., Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации [Текст] / С. А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 206 с.

6. Трухаев, Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности [Текст] / Р. И. Трухаев. – М. : Наука, 1981. – 168 с.

7. Ус, С. А. Теорія нечітких множин у системах прийняття рішень [Текст]: навч. посібник / С. А. Ус. – Д. : НГА України, 2001, – 86 с.

8. Ус, С. А. Методи прийняття рішень [Текст]: навч. посібник / С.А. Ус. – Д. : Національний гірничий університет, 2012. – 212 с.

Світлана Альбертівна **Ус**

СИСТЕМИ Й МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

студентами напряму підготовки
6.040303 Системний аналіз

Редактор О.Н. Ільченко

Підп. до друку 04.02.2013. Формат 30×42/4 .
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 3,2.
Обл.-вид. арк. 3,5. Тираж 50 пр. Зам. №   .

Державний ВНЗ «Національний гірничий університет»
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.