МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ГЕОЛОГОРОЗВІДУВАЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра вищої математики

Особистий довідник студента з вищої математики

(шоста частина)

Дніпропетровськ
НГУ
2014

Горбатов М.І. Особистий довідник студента з вищої математики (шоста частина) / М.І. Горбатов, О.О. Сдвижкова; М-во освіти і науки України; Нац. гірн. ун-т. – Д: НГУ, 2014. – 39 с.

Автори : М.І. Горбатов, ст. викл.
О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

Затверджено редакційною радою ДВНЗ «НГУ» (протокол № 12 від 25.12.2013).

Відповідальна за випуск завідувач кафедри вищої математики О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

ВСТУП

Шоста частина «Особистого довідника студента» містить у собі складову навчального курсу вищої математики з розділу «Функції кількох змінних».

Автори намагались у стислій формі сформулювати алгоритмічні приписи до математичних дій, не передбачаючи ніякого конкурування між довідником та підручником або методичкою.

Цей довідник є **практичним доповненням** до методичних розробок, підручників, конспектів. Він може бути використаний студентами всіх спеціальностей. На перших сторінках довідника знову подається шкільна навчальна актуальна інформація (мінімальний набір), оскільки в математиці має місце особливо велика залежність наступних її розділів від попередніх, тобто поняття, правила, формули так званої елементарної математики неминуче і дуже часто доводиться застосовувати для розуміння понять, правил і формул так званої вищої математики.

Матеріал викладений так, щоб максимально допомогти студенту оволодіти різними математичними поняттями і методами, зробити їх простими і природними, навчити використовувати їх на практиці. Математичні поняття підкріплені фізичними та геометричними задачами, які дозволяють краще засвоїти викладену теорію, розібратися в її змісті, розвинути математичну культуру мислення.

Окремо у довіднику постійно наголошується на вмінні розрізняти сенс однакових чи майже однакових за виглядом формул, якщо ці формули подають деякі образи на площині або в просторі, тобто студенту рекомендується навчитися переходити, так би мовити, із площини в простір, а також із простору на площину. При такому вмінні просто запам’ятовувати доведеться значно менше.

ТАБЛИЦЯ СТЕПЕНІВ, ЩО НАЙБІЛЬШ ЧАСТО ЗУСТРІЧАЮТЬСЯ

n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729				
4	16	64	256	1024					
5	25	125	625						
6	36	216							
7	49	343							
8	64	512							
9	81	729							
10	100								
11	121								
12	144								
13	169								
14	196								
15	225								
16	256								
17	289								
18	324								
19	361								
20	400								
21	441								
22	484								
23	529								
24	576								
25	625								
26	676								
27	729								
28	784								
29	841								
30	900								
31	961								
32	1024								
33	1089								

!!! Числа, поміщені в цій таблиці, будемо називати «хорошими», тому що з них добуваються націло корені (наприклад: $\sqrt[10]{1024} = 2$; $\sqrt[4]{625} = 5$; $\sqrt[6]{729} = 3$) і вони записуються як степені цілих чисел (наприклад: $1024 = 2^{10}$, $625 = 5^4$, $729 = 3^6$).

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$
$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$$
$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$
$$(A \pm B)\left(A^2 \mp AB + B^2\right) = A^3 \pm B^3$$

!!! Ліва частина цих рівностей має вигляд степеня або добутку, а права – многочлена. Якщо ці формули застосувати справа-наліво, одержуємо правила згортання алгебраїчної суми в компактний вид степеня або добутку, наприклад:

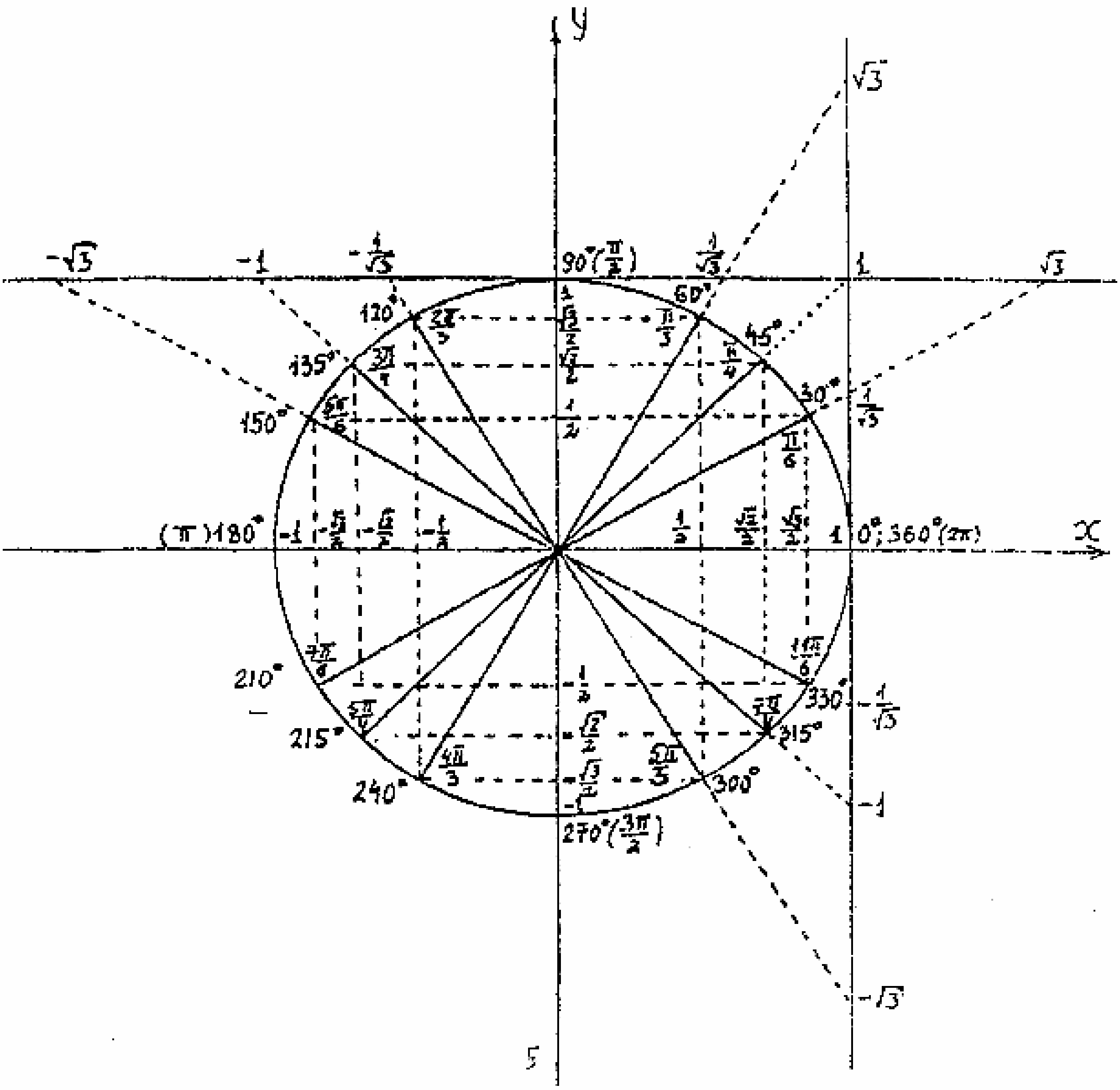
$$4a^2 - 12ax + 9x^2 = (2a - 3x)^2;$$
$$81x^2 - 25a^2 = (9x - 5a)(9x + 5a);$$
$$64 + 96b + 48b^2 + 8b^3 = (4 + 2b)^3.$$

!!! Ліва і права частини будь-якої формули фіксують математичні конструкції, які можна взаємозаміняти. Знання таких конструкцій істотно полегшує перетворення виразів, а тому необхідно збільшувати їхню кількість в мозку, у пам’яті, формуючи тим самим особистий БАНК КОНСТРУКЦІЙ ОБМІННОГО ФОНДУ.

ПРО ТРИГОНОМЕТРИЧНЕ КОЛО

!!! Тригонометричне коло ($R = 1$) дає можливість бачити значення тригонометричних функцій кутів, що часто зустрічаються, і це допомагає швидше їх запам'ятати. Коло також ілюструє властивості тригонометричних функцій: знаки, парність (непарність), зростання (спадання), нулі функцій, екстремуми.

!!! Синуси кутів дивимося на осі OY, косинуси – на осі OX; тангенси – на правій дотичній, котангенси – на верхній дотичній.



ФОРМУЛИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

I. Основні тригонометричні тотожності:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

II. Формули додавання:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}$$

III. Формули подвоєння (потроєння):

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \qquad \sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

IV. Формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

$$ctg\alpha \pm ctg\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

V. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

Ця частина «Особистого довідника студента з вищої математики» присвячена розгляду і вивченню важливого розділу вищої математики, у якому йдеться про функції кількох змінних.

Поняття функціональної залежності взагалі є основоположним поняттям у математиці. І не лише у математиці. Причинно-наслідкові зв’язки між явищами і процесами в різних сферах науки, техніки, життя взагалі вимагають вивчення і створення можливостей впливу на ці зв’язки. Наприклад, математики навіть в біології намагаються знаходити функціональні залежності й оформляти ці залежності математично.

З «простими» функціями, функціями однієї змінної, ми ознайомилися ще в середніх класах школи, в старших класах удосконалили обшир знань про функції, а згодом виявилося, що цього замало. Нас оточує багато явищ, які залежать не від одного, а від кількох факторів, тобто функція залежить не від одного, а від кількох аргументів.

Оскільки тобі, друже студенте, не дуже хочеться напружуватись у вивченні вищої математики, то ти вже й підсвідомо, буває, шукаєш якісь виправдання, щоб не потрудитись, полюбляєш, досвід показує, задавати запитання, а де, мовляв, це застосовується «у житті». Немов би вища математика зобов’язана використовуватись у тролейбусах чи в спортивних залах. Проте і «у житті» також мають місце різні математичні поняття, зокрема поняття і функції кількох змінних. Наприклад, температура повітря залежить не лише від пори року, а й від часу доби, географічної широти місця, висоти його над рівнем моря і не тільки.

Температуру повітря можна вважати функцією, а перераховані фактори – аргументами, при зміні яких змінюється і значення функції. Вивчені раніше функції однієї змінної ми об’єднували в різні класи (степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні). Цей розподіл має місце і для функцій кількох змінних. Забігаючи наперед, слід наголосити також на тому, що основні визначення, правила, критерії для функцій кількох змінних практично такі ж, як і для функцій однієї змінної. Йдеться про область визначення й область значень функції, про границю функції в точці та неперервність функції, про похідні, диференціал, екстремум тощо. В цьому довіднику, що цілком логічно з огляду на практичні потреби, наголос буде зроблено на розгляді функцій двох змінних із узагальненням одержаних результатів та їх поширенням на функції трьох змінних, а також із епізодично доречним згадуванням функцій будь-якої кількості змінних. Відомо, що в математиці різні її розділи взаємопов’язані та взаємозалежні чи не найбільше. От і при розгляді функцій кількох змінних доведеться згадувати, наприклад, аналітичну геометрію, а саме: рівняння прямих і кривих на площині (планіметрія) та рівняння площин і кривих поверхонь у просторі (стереометрія). Такими ж корисними при вивченні застосувань функцій кількох змінних будуть і елементи векторної алгебри, теж на площині й у просторі. А вже функції кількох змінних виявляться дуже корисними при вивченні так званих кратних інтегралів.

Варто ще зауважити, що при вивченні нестаціонарних процесів (які змінюються з часом) доводиться розглядати залежність тієї чи іншої фізичної величини від чотирьох змінних: координат x, y, z та часу t. Такого роду залежності теж пов'язані з функціями багатьох змінних.

У подальшому нам згодиться поняття відстані між двома точками. На площині відстань між точками $M(x_1; y_1)$ і $N(x_2; y_2)$ визначають за формулою $MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, в просторі відстань між точками $M(x_1; y_1; z_1)$ і $N(x_2; y_2; z_2)$ – за формулою $MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Ці формули можна узагальнити і на випадок n-вимірного точкового простору, в якому кожна точка має n координат. Такий простір ввів німецький математик Ріман. Ми ж у технічному вузі, як було зазначено вище, обмежимось розглядом двовимірного простору R_2 і тривимірного простору R_3. Пряму OX (простір R_1) ми розглядали раніше, при вивченні функцій однієї змінної. Простір R_2 – площина OXY, простір R_3 – простір $OXYZ$. Нехай D – деяка множина точок. Точку M називають внутрішньою точкою цієї множини, якщо існує окіл цієї точки, що цілком міститься у цій множині.

Множину D називають відкритою, якщо кожна її точка є внутрішня. Точку N називають граничною точкою множини D, якщо будь-який окіл цієї точки містить нескінченну кількість точок з множини D.

Множину D називають замкненою, якщо вона містить усі свої граничні точки. Точку P називають межовою точкою множини D, якщо будь-який її окіл містить як точки множини D, так і точки, які їй не належать.

Множину всіх межових точок множини D називають її межею. Область з її межею називають замкненою областю і позначають $\overline{D}$. Множину D називають обмеженою, якщо існує куля (взагалі кажучи n-вимірна), яка цілком містить цю множину. Замкнену обмежену область називають компактною областю.

Озброївшись цими поняттями, ми вже можемо ближче підступитися до вивчення власне функцій кількох змінних. Розглянемо функції двох змінних, далі узагальнюємо.

Визначення функції двох (кількох) змінних. Область визначення функції (ОВФ) і область значень функції (ОЗФ). Неперервність функції

Означення 1. Якщо кожній парі незалежних змінних (аргументів) x і y із області їх зміни відповідає певне значення z, то говорять, що задана функція $z = z(x, y)$.

Аналогічно визначають функцію трьох змінних $u = u(x, y, z)$ і функцію $w = w(x, y, z, ..., t)$.

Кожна пара значень аргументів (x, y) геометрично визначає точку P на площині OXY, а значення функції $z = z(x, y)$ в цій точці є апліката z

просторової точки $M(x, y, z)$. Геометричне місце всіх точок M складає деяку поверхню.

Означення 2. Областю визначення функції називають сукупність всіх точок, у яких вона має певні дійсні значення.

Для функції двох змінних $z = z(x, y)$ область визначення є сукупність точок площини, а для функції трьох змінних – сукупність точок простору.

Приклад 1. Знайдемо область визначення (ОВФ) функції

$$z = \arcsin\frac{x^2 + y^2}{9} - 5\operatorname{arcsec}\left(x^2 + y^2\right).$$

Міркуємо так само, як ми міркували, знаходячи ОВФ функції однієї змінної. Знаходимо допустимі значення аргументів, тобто такі, при підстановці яких у вираз функції не буде ніяких «неприємностей». Під «неприємностями» розуміємо нуль у знаменнику, від'ємне значення під коренем парного степеня, від'ємне значення або нуль під знаком логарифма тощо. Якщо функція є алгебраїчною сумою кількох функцій-доданків, то в її ОВФ увійдуть лише ті значення аргументів, при яких визначені всі ці функції-доданки без винятку.

У нашому випадку повинно бути одночасно.

Розв'язуємо систему нерівностей (вимог) $\begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{9} \le 1 \\ x^2 + y^2 \ge 1 \end{cases}$ або

$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ x^2 + y^2 \ge 1 \end{cases}$. Тут ОВФ – якась частина площини XOY, обмежена деякими лініями, рівняння яких $x^2 + y^2 = 9$ і $x^2 + y^2 = 1$. Це концентричні кола радіусів 3 і 1. Першу нерівність задовольняють координати точок, що знаходяться на колі та всередині кола радіуса 3, другу – координати точок, що знаходяться на колі та за межами кола радіуса 1. Для того, щоб зробити такі висновки, нам довелось із шкільного курсу математики згадувати: $|\sin a| \le 1$, $|\sec a| = \dfrac{1}{|\cos a|} \ge 1$.

Отже, наша функція існує, якщо $1 \le x^2 + y^2 \le 3$, тобто ОВФ – кругове кільце, утворене колами $x^2 + y^2 = 1$ і $x^2 + y^2 = 9$, точки самих кіл входять в ОВФ.

Приклад 2. Знайдемо ОВФ функції

$$u = \ln\left(x^2 + y^2 - 4\right) + 5\sqrt[4]{16 - x^2 - y^2 - z^2} - 2xyz.$$

Повинно бути $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 > 0 \\ 16 - x^2 - y^2 - z^2 \ge 0 \end{cases}$. Тут ОВФ – частина простору, обмежена деякими поверхнями. Функцій-доданків у нас три, а нерівностей-вимог дві. Це тому, що добуток XYZ визначений при будь-яких значеннях x, y, z.

Перепишемо наші нерівності та все побачимо.

$\begin{cases} x^2 + y^2 > 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 \le 16 \end{cases}$. Поверхні, що обмежують нашу ОВФ: $x^2 + y^2 = 4$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Перша поверхня – круговий циліндр, віссю якого є вісь OZ, а радіус дорівнює 2. Друга – сфера із центром в початку координат і радіусом 4. Обидві нерівності одночасно задовольнять координати точок простору, які знаходяться всередині цієї сфери, але за межами цього циліндра, причому точки власне сфери входять в ОВФ функції, а точки власне циліндра не входять. Отже, ОВФ тут – сукупність таких точок простору. Зауважимо, що на відміну від звичних «шкільних» циліндрів циліндрична поверхня (циліндр) $x^2 + y^2 = R^2$ конкретної скінченної висоти не має (нескінченна труба). Ще раз: тут ОВФ – частина простору між стінками циліндра і сфери «по боках». Напружуй, друже, просторову уяву та уявляй.

Означення 3. Областю значень функції називають сукупність усіх її значень, які одержують при підстановці у її вираз значень аргументів з області її визначення. Знайти ОЗФ набагато важче, ніж ОВФ, майже неможливо. Вдається таке лише в деяких випадках.

Приклад 3. Знайдемо область значень функції

$$u = \frac{5}{3 + 2x^2 + 9y^6 + z^4}.$$

Попередньо можна відзначити, що область визначення функції – всі без винятку точки простору $OXYZ$ (ніяких «неприємностей»).

Для знаходження ОЗФ тут не доведеться розв'язувати якісь нерівності, достатньо буде просто задуматись.

ОЗФ – $0 < u \le \frac{5}{3}$. Розміркуй, друже, чому так.

Поняття границі функції в точці й поняття неперервності функції в точці перекликаються із такими ж поняттями для функції однієї змінної.

Число A називають границею функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Тут загальна точка $M(x; y)$ площини XOY довільним чином прямує до точки $M(x_0; y_0)$. Якщо при різних шляхах прямування $f(x; y)$ одержує різні граничні значення, то границі ця функція не має.

Позначимо $f(x; y) = f(M)$, $f(x_0; y_0) = f(M_0)$. Функція $f(M)$ неперервна в точці M_0, якщо:

1) $f(M)$ визначена як в самій точці M_0, так і в деякому її околі;

2) існує границя $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

3) ця границя дорівнює значенню функції в граничній точці $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) =$ $= f(M_0)$.

Із визначення границі випливає, що умови 2) і 3) можна замінити такою рівносильною вимогою:

2′) нескінченно малій відстані MM_0 відповідає нескінченно малий приріст функцій $\Delta z = f(M) - f(M_0)$. Функція неперервна в області D, якщо вона неперервна у всякій точці цієї області.

Точка M_0 називається точкою розриву функції $z = f(M)$, якщо для неї не виконується хоча б одна з умов у визначенні неперервності. Точки розриву можуть бути окремими (ізольованими), а можуть заповнювати цілі лінії (лінії розриву).

Для функцій двох змінних справедливі теореми про границю суми, різниці, добутку і частки, які формулюються і доводяться абсолютно аналогічно відповідним теоремам для функцій однієї змінної.

Як і для функцій однієї змінної, сума, різниця і добуток неперервних функцій двох змінних в точці M_0 будуть неперервними в цій точці; частка неперервних функцій в точці M_0 буде також неперервною в M_0 функцією, якщо знаменник не обертається в нуль у цій точці. Справедлива також теорема про неперервність складної функції. Аналогічно визначають границю і неперервність функцій трьох і більшої кількості змінних.

Методи, прийоми знаходження границь та дослідження функцій на неперервність застосувань такі ж, як і для функцій однієї змінної.

Приклад 4. Знайдемо границю $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 5}} \dfrac{\sqrt{x^2 + (y-5)^2 + 4} - 2}{x^2 + (y-5)^2}$.

Ця границя знаходиться за умови $M(x, y) \to M_0(0;5)$. Відстань між цими точками $r = \sqrt{x^2 + (y-5)^2}$, тому

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 5}} \frac{\sqrt{x^2 + (y-5)^2 + 4} - 2}{x^2 + (y-5)^2} = \lim_{r \to 0} \frac{\sqrt{r^2 + 4} - 2}{r^2} = \lim_{r \to 0} \frac{\left(\sqrt{r^2 + 4} - 2\right)\left(\sqrt{r^2 + 4} + 2\right)}{r^2\left(\sqrt{r^2 + 4} + 2\right)} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{\left(r^2 + 4\right) - 4}{r^2\left(\sqrt{r^2 + 4} + 2\right)} = \lim_{r \to 0} \frac{r^2}{r^2\left(\sqrt{r^2 + 4} + 2\right)} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Приклад 5. Дослідимо на неперервність функцію $u = \dfrac{1}{z^2 - x^2 - y^2}$.

«Неприємність» тут підстерігає нас у точках цілої поверхні розриву функції, там де $z^2 - x^2 - y^2 = 0$. Ця поверхня є поверхня конуса $z^2 = x^2 + y^2$. Уяви, друже, два «шкільні» (але нескінченні вверх і вниз) конуси, які вершинами сходяться в точці $O(0;0;0)$, спільною віссю мають вісь OZ.

При перетині цієї конічної поверхні горизонтальними площинами $z = c$ одержуємо кола різних радіусів із центрами на осі OZ. При $c = 0$ одержимо $x^2 + y^2 = 0$, а це можливо лише у випадку, коли $x = 0$ і $y = 0$ одночасно, тобто одержуємо початок координат $O(0;0;0)$ – вершину конуса. В околі поверхні розриву в нашому випадку функція u нескінченно велика.

Не забуваймо: якщо функція є алгебраїчною сумою, наприклад, кількох функцій, то вона буде неперервною лише там, де неперервні всі без винятку функції-учасниці.

Приклад 6. Розглянемо функцію $z = \dfrac{1}{\sin p\,x} - \dfrac{3}{\sin p\,y}$.

Тут достатньо лише згадати початкові факти з тригонометрії. Відомо, що $\sin kp = 0$ при $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ Перша складова тут розривна у точках вертикальних прямих $x = m$ при $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, а друга – у точках горизонтальних прямих $y = n$ при $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ Вся функція z розривна у точках і тих, і тих прямих, власне у точках гратки, накладеної на площину XOY, а неперервною ця функція буде у строго внутрішніх точках квадратиків, з яких складається ця нескінченна гратка.

Виходить, що в цьому довіднику все-таки варто згадати канонічні рівняння деяких поверхонь у просторі. На площині XOY: 1) $x^2 + y^2 = R^2$ – коло з центром у початку координат, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ – коло із центром у точці $C(a;b)$; 2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – еліпс із центром у початку координат; 3) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – гіпербола; 4) $y^2 = 2px$ – парабола, симетрична відносно осі абсцис, з вершиною в початку координат; 5) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ – астроїда. Можна згадати циклоїди, кардіоїди, деякі інші криві. У просторі $OXYZ$ тільки що згадані рівняння є вже рівняннями відповідних (кругових, еліптичних, гіперболічних, параболічних) циліндрів з твірними, паралельними осі OZ. А ще у просторі є, зокрема, такі поверхні: 1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – еліпсоїд; 2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – однопорожнинний гіперболоїд; 3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ – двопорожнинний гіперболоїд; 4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ – конус; 5) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ –

еліптичний параболоїд; 6) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ – гіперболічний параболоїд.

У процесі розгляду функцій кількох змінних вивчене будемо застосовувати і до написання рівнянь дотичної до поверхні площини та нормалі.

Частинні похідні функції кількох змінних

Попередньо чітко визначимо поняття частинних приростів і повного приросту функції двох змінних $z=f(x,y)$. Якщо приростити аргумент x на Δx, а y не змінювати, то приріст функцій у цьому випадку називають частинним приростом z по x і позначають через $\Delta_x z$. Отже,

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y). \tag{1}$$

Якщо x не змінювати, а y приростити на Δy, то одержимо частинний приріст функцій z по y. Отже,

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y). \tag{2}$$

Якщо ж x змінити на Δx, а y – на Δy, то одержимо так званий повний приріст функції

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y). \tag{3}$$

Зауважимо, що, взагалі кажучи, повний приріст не дорівнює сумі частинних приростів, тобто

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z .$$

Аналогічно визначають частинні прирости $\Delta_x u$, $\Delta_y u$, $\Delta_z u$ і повний приріст Δu для функції трьох змінних $u=F(x,y,z)$.

Раніше вже зазначалось, що формули «із планіметрії» слід навчитися правильно розширювати в формули «із стереометрії», формули «із стереометрії» – правильно звужувати в формули «із планіметрії». Маємо це на увазі й при розгляді частинних похідних та їх геометричної інтерпретації.

Означення. Частинною похідною по x від функції $z=f(x,y)$ називається границя відношення частинного приросту $\Delta_x z$ по x до приросту Δx при прямуванні Δx до нуля.

Позначають одним із символів z'_x, $f'_x(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ або $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}. \qquad (4)$$

Аналогічно визначають і позначають частинну похідну від функції $z = f(x,y)$ по y.

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}. \qquad (5)$$

Частинні похідні функції будь-якого числа змінних визначають аналогічно. Для функції $u = u(x,y,z)$, наприклад, це u'_x, u'_y, u'_z.

Геометрично рівняння $z = f(x,y)$ є рівняння деякої поверхні. Перетинаємо її площиною $x = const$ – одержуємо криву в перетині. Рухаючись по цій кривій, при незмінному x одержуємо приріст функції $z = f(x,y)$ за рахунок зміни аргументу y, тобто одержуємо $\Delta_y z$.

Дотична до кривої перетину в деякій точці кривої лежить у площині $x = const$ і утворює з координатною площиною XOY (з додатним напрямом осі OY) кут b. Згадуємо міркування стосовно геометричного сенсу функції однієї змінної і за подібною схемою одержуємо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \operatorname{tg} b .$$

Уяви собі в площині $x = const$ прямокутний трикутник, у якого відрізок дотичної до кривої від точки дотику до точки перетину з площиною XOY є гіпотенузою, проекція цього відрізка дотичної на площину XOY – прилеглий до кута b катет, а протилежним катетом є перпендикуляр, опущений із точки дотику на площину XOY.

Аналогічно частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до перетину поверхні $z = f(x,y)$ площиною $y = const$, тобто $\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} a$. Кут нахилу a є кутом між дотичною і додатним напрямом осі OX.

Повний диференціал функції та його застосування

Згадуємо, що диференціал функції однієї змінної є головна лінійна частина приросту функції, що це добуток похідної від функції на диференціал (приріст) аргументу, тобто $dy = y'dx$.

Нехай функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, тобто вона диференційовна в точці. Її повний диференціал дорівнює сумі добутків частинних похідних на диференціали відповідних незалежних змінних.

Це формулювання записують у вигляді

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (6)$$

Повний диференціал dz є головною лінійною частиною повного приросту Δz функції $z = f(x, y)$.

Повний диференціал відрізняється від повного приросту на нескінченно малу величину вищого порядку відносно $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, тому $dz \approx \Delta z$.

Для функції $u = u(x, y, z)$ повний диференціал буде

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz. \qquad (7)$$

Такий запис можна зробити для функції будь-якого числа змінних.

Той факт, що повний диференціал функції наближено дорівнює її приросту, можна використовувати при наближених обчисленнях. Не завжди для таких обчислень під рукою є технічні засоби, то допоможе рівність $dz \approx \Delta z$.

Логіка тут досить проста і зрозуміла. Обчислити значення функції в «поганій» точці дуже важко, то обчислюємо його в сусідній «хорошій», а до результату додаємо замість приросту функції при переході від «хорошої» точки до нашої «поганої» диференціал функції. Для прикладу візьмемо трохи важчий випадок, у якому доведеться розглядати повний диференціал функції трьох змінних.

Він одночасно буде і прикладом на знаходження частинних похідних.

Приклад 7. Обчислюємо довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда з ребрами $x = 6{,}08$; $y = 2{,}96$; $z = 2{,}02$.

Це те ж саме, що знайти значення функції $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точці $M(6{,}08; 2{,}96; 2{,}02)$, бо довжина діагоналі прямокутного паралелепіпеда – корінь квадратний із суми квадратів трьох його вимірів.

Точно обчислити суму квадратів трьох вимірів тут важко, але ще можна, а от корінь добути точно не вийде, все одно остаточний результат буде, взагалі кажучи, наближеним. До речі, раніше, багато років тому, у школах навчали добувати квадратні корені «вручну», недавні й сучасні школярі цього не вміють.

Отже, ми обчислимо значення функції $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в найближчій сусідній із точкою M точці N, а до результату додамо повний диференціал функцій, який замінить наближено повний приріст її при переході від точки N до точки M. Очевидно, що в ролі «хорошої» точки тут слід узяти точку $N(6;3;2)$, бо $\sqrt{6^2+3^2+2^2}=7$.

Буде $u(6,08;2,96;2,02)\approx u(6;3;2)+du$.

Отже, $u(6;3;2)=\sqrt{6^2+3^2+2^2}=\sqrt{49}=7$;

$du=u'_x dx+u'_y dy+u'_z dz$; $u'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $u'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $u'_z=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

$dx=\Delta x=6,08-6=0,08$; $dy=\Delta y=2,96-3=-0,04$; $dz=\Delta z=2,02-2=0,02$.

Нагадуємо, що при взяті похідної по x, всі інші аргументи вважаються числами, аналогічно знаходять похідні по y і по z. У виразі du похідні обчислюють у «хорошій» точці N.

$$du(N)=\frac{6}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}\cdot 0,08+\frac{3}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}\cdot(-0,04)+\frac{2}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}\cdot 0,02=\frac{0,4}{7}.$$

Отже, $\sqrt{(6,08)^2+(2,96)^2+(202)^2}\approx 7+\dfrac{0,4}{7}=7\dfrac{2}{35}$.

Похідна складної функції
Повна похідна

Нехай в рівнянні $z=f(x,y)$ x і y, у свою чергу, є функціями незалежних змінних u і v: $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$.

У цьому випадку z є складна функція від аргументів x і y.

Звичайно, z можна виразити і безпосередньо через u і v:

$$z=f[x(u,v),y(u,v)].$$

Припустимо, що функції $f(x,y)$, $x(u,v)$, $y(u,v)$ мають неперервні частинні похідні по всіх своїх аргументах.

Обчислимо $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, не користуючись безпосередньою підстановкою виразів $x(u,v)$ та $y(u,v)$ у функцію $z=f(x,y)$.

Дамо «остаточному» аргументу u приріст Δu, зберігаючи значення v незмінним. Тоді x і y одержать прирости $\Delta_u x$ і $\Delta_u y$. Але через це і функція $z=f(x,y)$ одержить приріст Δz. Якщо $\Delta u\to 0$, то $\Delta_u x\to 0$ і $\Delta_u y\to 0$, бо функції $x(u,v)$ і $y(u,v)$ неперервні.

Враховуючи рівності $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta u}=\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta_u x}{\Delta u}=\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta_u y}{\Delta u}=\dfrac{\partial y}{\partial u}$, провівши «стандартні» вже міркування, одержуємо

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{8}$$

Для того, щоб знайти похідну від функції z по одному із «остаточних» аргументів u, ми, образно кажучи, добралися до тих u, які містить функція $x(u,v)$, а потім – до тих u, які містить функція $y(u,v)$.

Якщо «остаточному» аргументу v дамо приріст Δv, а u залишимо незмінним, то з допомогою подібних міркувань одержимо:

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{9}$$

У випадку більшого числа змінних формули природним чином узагальнюються.

Сюди прилягає і поняття так званої повної похідної. Це коли, наприклад, $u=u(x,y,z)$, але $y=y(x)$, $z=z(x)$ є, в свою чергу, функціями від x. Функція u, отже, є функцією однієї змінної x і можна ставити питання про знаходження $\dfrac{du}{dx}$. Використовуємо попередні міркування й одержуємо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}. \tag{10}$$

Чітко відрізняємо повну похідну $\dfrac{du}{dx}$ від частинної $\dfrac{\partial u}{\partial x}$: частинну $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ беремо лише по тих x, які ми бачимо у виразі функції $u(x,y,z)$, а повну $\dfrac{du}{dx}$ – додатково ще й по тих x, які містять «функційки» y і z.

Має місце і такий випадок: $u=u(x,y,z)$, а $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ – функції деякого аргументу t.

Повну похідну $\dfrac{du}{dt}$ тут знаходять за формулою:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}. \tag{11}$$

Приклад 8. Дана функція $z=x^3\sqrt{y}+2^x\operatorname{tg}y$, при $x=u^2v$, $y=u\ln v$.

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$.

За формулами (8) і (9) маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(3x^2\sqrt{y} + 2^x \ln 2 \operatorname{tg} y\right) \cdot 2uv + \left(\frac{x^3}{2\sqrt{y}} + \frac{2^x}{\cos^2 y}\right) \cdot \ln v;$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left(3x^2\sqrt{y} + 2^x \ln 2 \operatorname{tg} y\right) \cdot u^2 + \left(\frac{x^3}{2\sqrt{y}} + \frac{2^x}{\cos^2 y}\right) \cdot \frac{u}{v}.$$

Це дещо «сирий» вигляд похідних $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$. Остаточний вигляд одержимо, якщо замінимо x і y їхніми виразами через u і v.

Приклад 9. Дана функція $u = \sqrt{x^3 + 2x} + x \ln y + y^2 \sin 5z$, при цьому $y = \operatorname{arctg} x$, $z = \sqrt[3]{x}$. Знайдемо повну похідну $\frac{du}{dx}$.

Використовуємо формулу (10).

$$\frac{du}{dx} = \frac{3x^2 + 2}{2\sqrt{x^3 + 2x}} + \ln y + \left(\frac{x}{y} + 2y \sin 5z\right) \cdot \frac{1}{1 + x^2} + 5y^2 \cos 5z \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Остаточний вираз повної похідної лише через x одержимо після підстановки замість z і y їхні вирази через x.

Похідна від функції, заданої неявно

Спочатку слід згадати самі поняття явного і неявного задання функції.

Рівність $y = f(x)$ явно задає функцію y – функцію аргументу x. Рівність $j(x, y) = 0$ ту ж функцію задає вже неявно. Найпростіший приклад: $y = 2x$ і те ж саме у вигляді $y - 2x = 0$. У величезній кількості випадків перейти від неявного задання функції до явного практично неможливо, як от, наприклад, виразити y із рівності $x^3 + 2xy + \ln^2 y = \cos(x + y)$.

Щоб знайти в таких випадках похідну y'_x, раніше ми диференціювали обидві частини рівності, не забуваючи, що похідна від x по x – одиниця, а похідна від y по x – це y'_x, потім виражали y'_x із одержаної рівності. Зрозуміло, що вираз для y'_x міститиме x і y, але ж не міститиме y'_x.

Підставимо координати точки, яка лежить на кривій $j(x, y) = 0$, і вже одержимо кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в цій точці.

Після ознайомлення з поняттям частинної похідної з'являється можливість швидше одержувати таке y'_x, користуючись готовою формулою.

Теорема. Нехай неперервна функція y від x задана неявно рівнянням

$$F(x,y)=0,$$

де $F(x,y)$, $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ – неперервні функції в деякій області D, що містить точку $(x;y)$, координати якої задовольняють рівняння $F(x,y)=0$; крім того, в цій точці $F'_y(x,y)\neq 0$. Тоді функція y від x має похідну

$$y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \qquad (12)$$

Дуже спрощено, щоб просто зрозуміти формулу (12): диференціюємо рівність $F(x,y)=0$ по x і одержимо $F'_x+F'_y\cdot y'_x=0$, а звідси маємо (12).

Розглянемо рівняння $F(x,y,z)=0$, у якому x і y – аргументи, а z – функція цих аргументів, задана у такий спосіб неявно.

Наприклад, рівняння $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ (сфера) неявно визначає дві неперервні функції z від x і y, які можна виразити явно, це $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ і $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

У багатьох інших випадках виразити z із рівняння $F(x,y,z)=0$ неможливо. Коли шукаємо $\frac{\partial z}{\partial x}$, ми вважаємо y постійним. Якщо вважати x незалежною змінною, а z – функцією, то формула (12) набирає вигляду

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}. \qquad (12')$$

Аналогічно знаходимо

$$z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}. \qquad (12'')$$

Приклад 10. $\operatorname{tg}^2 x+\ln\left(x^2+y^2\right)+2^y z^3+\cos 4z=0$.

За формулами ($12'$) і ($12''$) маємо

$$z'_x=-\frac{2\operatorname{tg}x\cdot\sec^2 x+\dfrac{2x}{x^2+y^2}}{3\cdot 2^y z^2-4\sin 4z};\quad z'_y=-\frac{\dfrac{2y}{x^2+y^2}+2^y\ln 2\cdot z^3}{3\cdot 2^y z^2-4\sin 4z}.$$

Частинні похідні вищих порядків

Маємо, наприклад, функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Від розглянутих уже частинних похідних можна знову знаходити частинні похідні. Від функції двох змінних можна взяти чотири похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx}(x, y),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}(x, y),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}(x, y),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{yy}(x, y).$$

Від цих похідних знаходимо похідні частинні третього порядку. Їх уже вісім: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$.

Форма запису похідної вказує порядок, у якому цю похідну знаходять. Наприклад, $\frac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ є похідна n-го порядку, тут функцію z диференціювали k разів по x, а потім $n-k$ разів по y.

Для функції будь-якого числа змінних частинні похідні вищих порядків знаходять аналогічно.

Приклад 11. Знайдемо $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^2 \partial z}$, якщо $u = x^3 \sin^2 y \cdot z^5 + e^z$.

Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \sin^2 y \cdot z^5;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 3x^2 2 \sin y \cos y \cdot z^5 = 3x^2 \sin 2y \cdot z^5;$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 6x^2 \cos 2y \cdot z^5;\ \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^2 \partial z} = 30x^2 \cos 2y \cdot z^4.$$

Згадуємо повний диференціал функцій двох змінних: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

Повний диференціал уже від нього – другий диференціал функції $z = z(x, y)$:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{13}$$

Ми тут урахували і теорему про рівність мішаних частинних похідних z''_{xy} і z''_{yx}: якщо функція $z = z(x, y)$ має частинні похідні другого порядку $z''_{xy}(x, y)$

та $z''_{yx}(x,y)$ в деякому околі точки $(x_0;y_0)$, які в точці $(x_0;y_0)$ неперервні, то $z''_{xy}(x_0,y_0)=z''_{yx}(x_0,y_0)$.

Повний диференціал від другого диференціалу – третій диференціал функції $z=z(x,y)$:

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3. \quad (14)$$

Таким же чином знаходимо четвертий диференціал, п’ятий і т. д. Схематично записи повних диференціалів функції $z=z(x,y)$, якщо ти, друже, помітив, нагадують записи шкільних формул $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a+b)^4=a^4+4a^3b+\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}a^2b^2+4ab^3+b^4$ і т. д. Як бачиш, школа постійно з тобою, довідник з елементарної математики має бути твоєю настільною книгою.

Диференціали вищих порядків фігурують у так званій формулі Тейлора, яку використовують для наближених обчислень:

$$\Delta z(x_0,y_0)=dz(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2z(x_0,y_0)+...+\frac{1}{n!}d^nz(x_0,y_0)+R_{n+1}, \quad (15)$$

де $R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}z(x_0+q\Delta x,y_0+q\Delta y)$, $0<q<1$. R_{n+1} – залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа.

Поверхні рівня в просторі та лінії рівня на площині

Нехай кожній точці простору (або його частині) відповідає деяке число (скаляр). Будемо говорити, що задано скалярне поле. Це, наприклад, поле температур, поле тисків рідини чи газу тощо. Нехай це поле виражає функція $u=u(x,y,z)$: підставляємо сюди координати точок – одержуємо значення функції (температура, тиск і т.п.).

Поверхні з рівняннями $u(x,y,z)=C$ називають поверхнями рівня функції u (скалярного поля u).

Наприклад, рівняння $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=C$ є рівнянням еліпсоїдів різного розміру із спільним центром у початку координат. Тут поверхні рівня – поверхні таких еліпсоїдів. На цих поверхнях ті ж температури, наприклад, однакові в різних точках. Нове значення C – нова температура в точках поверхні нового величиною еліпсоїда. Якщо ми на площині, то рівняння

$z(x,y)=C$ – рівняння ліній рівня. Наприклад, рівняння $x^2+y^2=C$ – рівняння ліній рівня (концентричних кіл із спільним центром у початку координат).

Похідна за напрямом і градієнт скалярного поля

До цього ми розглядали частинні похідні від функції $u=u(x,y,z)$. Ці похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ характеризують швидкість зміни функції $u(x,y,z)$ у напрямі осей координат. А якщо вийти з точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ у напрямі деякого вектора $\bar{l}$ («навскоси»)? Як таку похідну обчислювати? І знову «перекличка» з уже вивченим: згадуй поняття похідної функції однієї змінної. Тут у ролі такої змінної виступає, умовно кажучи, сам напрям, а за приріст змінної береться приріст шляху, пройденого від точки M_0 у цьому напрямі. Візьмемо на векторі $\bar{l}$ точку $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$. Довжина $\Delta l = M_0M=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$. Вектор $\bar{l}$ утворює із додатними напрямами осей OX, OY, OZ кути a, b, g відповідно.

Приріст функції $u(x,y,z)$ при переході від точки M_0 до точки M

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+e_1\Delta x+e_2\Delta y+e_3\Delta z,$$

де e_1, e_2, e_3 прямують до нуля разом із Δx, Δy, Δz.

Якщо останню рівність поділити на Δl, а потім знайти границю $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta l}$, якщо ця границя існує, то її називають похідною функції $u(x,y,z)$ за напрямом $\bar{l}$ і позначають $\frac{\partial u}{\partial l}$. Оскільки $\frac{\Delta x}{\Delta l}=\cos a$, $\frac{\Delta y}{\Delta l}=\cos b$, $\frac{\Delta z}{\Delta l}=\cos g$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos a+\frac{\partial u}{\partial y}\cos b+\frac{\partial u}{\partial z}\cos g\ . \tag{16}$$

Це і є формула для обчислення похідної за напрямом. У вирази частинних похідних тут підставляють координати точки, з якої ми вийшли.

Похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ задає швидкість зміни поля $u(x,y,z)$ у точці за напрямом $\bar{l}$. Величина $\left|\frac{\partial u}{\partial l}\right|$ визначає величину швидкості, а знак похідної $\frac{\partial u}{\partial l}$ – характер зміни функції $u(x,y,z)$ (зростання чи спадання).

Істотне зауваження: обережно із напрямом, тобто із кутами a, b, g.

Легко бачити, що завжди $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g = 1$. Не піддайся на «провокацію», якщо тобі запропонують в умові задачі на знаходження похідної за напрямом кути, наприклад, $a = 45^{\mathbf{o}}$, $b = 60^{\mathbf{o}}$, $g = 45^{\mathbf{o}}$. Такого напряму просто не існує, бо $\cos^2 45^{\mathbf{o}} + \cos^2 60^{\mathbf{o}} + \cos^2 45^{\mathbf{o}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5}{4} > 1$. Два перші кути $45^{\mathbf{o}}$ і $60^{\mathbf{o}}$ просто не дозволять третьому куту мати $45^{\mathbf{o}}$.

Напрям $\bar{l}$ стабілізується кутами a, b, g, як, скажімо, висока жердина трьома правильно влаштованими дротяними розтяжками, навіть без її закопування в землю.

Очевидно також, що при зміні напряму на протилежний величина швидкості зміни поля за модулем не зміниться, а характер зміни поля зміниться: зростання на спадання чи спадання на зростання. Якщо скалярне поле плоске, тобто маємо функцію $u = u(x, y)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos a + \frac{\partial u}{\partial y}\cos b \text{ або } \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos a + \frac{\partial u}{\partial y}\sin a \text{, так як } b = \frac{p}{2} - a .$$

Розглянемо градієнт функції (поля). Для довільної точки простору похідна за напрямом буде:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos a + \frac{\partial u}{\partial y}\cos b + \frac{\partial u}{\partial z}\cos g . \qquad (15)$$

Розглянемо праву частину формули як скалярний добуток векторів $\overline{l^0} = \{\cos a ; \cos b ; \cos g\}$, $\overline{N} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$.

Очевидно, що вектор $\overline{l^0}$ – одиничний вектор вектора $\bar{l}$.

Вектор $\overline{N}$, координатами якого є значення частинних похідних функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x; y; z)$, називають градієнтом функції в цій точці й позначають grad*u*. Отже,

$$\text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k},$$

де $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – одиничні вектори, спрямовані вздовж осей координат.

Між градієнтом і похідною за напрямом існує тісний зв'язок, який виражається наведеною далі теоремою.

Теорема. Нехай дано скалярне поле $u = u(x, y, z)$, в якому визначено поле градієнтів

$$\text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

Похідна $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ за напрямом деякого вектора l дорівнює проекції вектора $\text{grad}\,u$ на вектор $\bar{l}$.

Дійсно, $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ є скалярний добуток $\text{grad}\,u$ і одиничного вектора $\overline{l^0}$, тобто $\dfrac{du}{dl} = \text{grad}\,u \cdot \overline{l^0}$. Отже, $\dfrac{du}{dl} = |\text{grad}\,u| \cdot 1 \cdot \cos j$, а j – кут між $\text{grad}\,u$ і $\overline{l^0}$. Тому $\dfrac{\partial u}{\partial l} = p\,p_{\overline{l^0}}\,\text{grad}\,u$. Якщо напрям $\bar{l}$ збігається з напрямом $\text{grad}\,u$, то $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ має найбільше значення: $|\text{grad}\,u|$.

Приклад 12. Знайдемо похідну функції (поля) $u = x^3y^2 + 2\sqrt{x}y + y^5z^2$ за напрямом від точки $M(4;1;-1)$ до точки $N(2;-2;5)$.

Формула $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos a + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos b + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos g$.

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}y$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x^3y + 2\sqrt{x} + 5y^4z^2$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2y^5z$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\text{т.м.}} = 3 \cdot 4^2 \cdot 1^2 + \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot 1 = \frac{97}{2};\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\text{т.м.}} = 2 \cdot 4^3 \cdot 1 + 2\sqrt{4} + 5 \cdot 1^4 \cdot (-1)^2 = 137;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2 \cdot 1^5 \cdot (-1) = -2;\ \cos a = \frac{2-4}{\sqrt{(2-4)^2 + (-2-1)^2 + (5+1)^2}} = -\frac{2}{7};$$

$$\cos b = \frac{-2-1}{\sqrt{(2-4)^2 + (-2-1)^2 + (5+1)^2}} = -\frac{3}{7};$$

$$\cos g = \frac{5+1}{\sqrt{(2-4)^2 + (-2-1)^2 + (5+1)^2}} = \frac{6}{7}.$$

Отже, у нашому випадку

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{97}{2} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) + 137 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) + (-2) \cdot \frac{6}{7} = -\frac{97}{7} - \frac{411}{7} - \frac{12}{7} = -\frac{520}{7}.$$

Результат від'ємний, а це означає, що у вказаному напрямі скалярне поле спадає.

Приклад 13. Скалярні поля $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ і $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$.

Знайти кут між їх градієнтами в точці $M(3;4)$.

Для поля $z=\sqrt{x^2+y^2}$ буде $\operatorname{grad} z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\bar{i}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\bar{j}$, а

$\operatorname{grad} z\Big|_{\text{т.м.}}=\dfrac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\bar{i}+\dfrac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\bar{j}$ або $\operatorname{grad} z\Big|_{\text{т.м.}}=\dfrac{3}{5}\bar{i}+\dfrac{4}{5}\bar{j}$.

Для поля $z=x-3y+\sqrt{3xy}$ буде $\operatorname{grad} z=\left(1+\dfrac{3y}{2\sqrt{3xy}}\right)\bar{i}+\left(-3+\dfrac{3x}{2\sqrt{3xy}}\right)\bar{j}$,

а $\operatorname{grad} z\Big|_{\text{т.м.}}=\left(1+\dfrac{3\cdot 4}{2\sqrt{3\cdot 3\cdot 4}}\right)\bar{i}+\left(-3+\dfrac{3\cdot 3}{2\sqrt{3\cdot 3\cdot 4}}\right)\bar{j}=2\bar{i}-\dfrac{9}{4}\bar{j}$. Нехай j – шуканий кут, то

$$\cos j=\frac{\frac{3}{5}\cdot 2+\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}\sqrt{2^2+\left(-\frac{9}{4}\right)^2}}=\frac{-\frac{3}{5}}{1\cdot\frac{\sqrt{145}}{4}}=-\frac{12}{5\sqrt{145}}\approx -0{,}199.$$

Із таблиці знайдемо, що $j\approx 101^{\circ}30'$.

Властивості градієнта:

1) $\operatorname{grad}(u_1+u_2)=\operatorname{grad}u_1+\operatorname{grad}u_2$;

2) $\operatorname{grad}Cu=C\operatorname{grad}u$, $C=const$;

3) $\operatorname{grad}u_1u_2=u_2\operatorname{grad}u_1+u_1\operatorname{grad}u_2$;

4) $\operatorname{grad} f(u)=f'(u)\operatorname{grad}u$.

Тут $u_1=u_1(x,y,z)$, $u_2=u_2(x,y,z)$.

Застосування частинних похідних до задач геометрії

Спочатку ми на площині. Розглянемо дотичну і нормаль до плоскої кривої.

Нехай криву на площині задано рівнянням

$$F(x,y),$$

точка $M_0(x_0;y_0)$ належить цій кривій і функція $F(x,y)$ диференційована в точці $(x_0;y_0)$. Рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці $M_0(x_0;y_0)$ запишемо у вигляді

$$y-y_0=k(x-x_0),\ y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0),\ k\neq 0,$$

де k – кутовий коефіцієнт дотичної. При $k=0$ рівнянням нормалі є $x=x_0$. Рівняння дотичної, до речі, ми записуємо саме так, бо ще в аналітичній геометрії так записували рівняння прямої, що йде через дану точку в даному напрямі.

Нормаль і дотична взаємно перпендикулярні, тому добуток їхніх кутових коефіцієнтів дорівнює -1, якщо k – кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в точці M_0, то кутовий коефіцієнт нормалі в цій же точці буде $-\frac{1}{k}$. Про зв'язок між кутовими коефіцієнтами взаємно перпендикулярних прямих ми знаємо ще зі школи. Як знайти наше k? Згадуємо просто геометричний сенс похідної. Відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 дорівнює $f'(x_0)$. Формула похідної неявної функції дає нам

$$k = f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}, \text{ де } F'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Тоді рівняння дотичної та нормалі запишуться так:

$$y - y_0 = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}(x - x_0); \; y - y_0 = \frac{F'_y(x_0, y_0)}{F'_x(x_0, y_0)}(x - x_0). \tag{18}$$

Ці рівняння записують, буває, і так:

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0;$$

$$F'_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F'_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Ці рівняння визначають дотичну та нормаль до кривої $F(x, y) = 0$ і тоді, коли $F'_y(x_0, y_0) = 0$, але $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$. Якщо ж $F'_x(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0) = 0$, то, як відомо із розглянутого вище, точка $M_0(x_0; y_0)$ є особливою точкою кривої $F(x, y) = 0$ і в такій точці рівняння дотичної і нормалі, наведені вище, втрачають сенс. Дотична та нормаль до кривої в особливій точці можуть не існувати. Буває, як бачимо, і таке.

Приклад 14. Напишемо рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2 y^2 - 3x + 6y + 11 = 0$ в точці $(1; -2)$.

Маємо

$F(x, y) = x^2 y^2 - 3x + 6y + 11 = 0$;

$F'_x(x, y) = 2xy^2 - 3$; $F'_y(x, y) = 2x^2 y + 6$;

$F'_x(1, -2) = 2 \cdot 1 \cdot (-2)^2 - 3 = 5$; $F'_y(1, -2) = 2$.

Отже, рівняння дотичної $5(x - 1) + 2(y + 2) = 0$ або $5x + 2y - 1 = 0$, а рівняння нормалі $2(x - 1) - 5(y + 2) = 0$ або $2x - 5y - 12 = 0$.

А зараз ми вже у просторі й хочемо рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні.

Нехай задано поверхню

$$F(x, y, z) = 0,$$

точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить цій поверхні, а функція $F(x, y, z)$ диференційовна в точці M_0.

Розглянемо криву L, яка проходить через точку M_0 і цілком лежить на нашій поверхні. Наведемо два означення.

Означення 1. Дотичною до поверхні в точці M_0 називають дотичну до довільної кривої, яка проходить через точку M_0 і повністю лежить на поверхні.

Виявляється, що пряма, перпендикулярна до цієї дотичної, буде перпендикулярною і до іншої такої ж дотичної, тільки б та дотична була проведена в тій же точці M_0 до іншої кривої, що повністю лежить на цій поверхні.

Отже, дотичні, проведені в точці M_0 до всіх можливих кривих, що лежать на поверхні й проходять через цю точку, перпендикулярні до однієї й тієї самої прямої і тому лежать в одній площині.

Означення 2. Площину, в якій лежать усі дотичні, проведені в точці M_0 до всіх можливих кривих, що лежать на поверхні і проходять через точку M_0, називають дотичною площиною до поверхні в цій точці.

Згадуємо рівняння площини, що проходить через дану точку, згадуємо геометричний сенс коефіцієнтів у рівнянні площини при x, y, z – це ми згадуємо ще з аналітичної геометрії в просторі.

Рівняння нашої дотичної площини має вигляд:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (19)$$

Пряму, що проходить через точку M_0 і перпендикулярна до дотичної площини поверхні в цій точці, називають нормаллю до поверхні в точці M_0.

Рівняння нормалі має вигляд:

$$\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(y - y_0)}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(z - z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (20)$$

У рівняннях дотичної площини і нормалі одна або будь-які дві частинні похідні функції $F(x, y, z)$ можуть дорівнювати нулю в точці M_0. Якщо ж $F'_x(M_0) = F'_y(M_0) = F'_z(M_0) = 0$, то точка M_0 називається особливою. Дотична площина і нормаль в особливій точці можуть не існувати.

Якщо поверхню задано явним рівнянням

$$z = f(x, y),$$

то його можна записати так:

$$f(x, y) - z = 0.$$

Тоді

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z; \; F'_x(x, y, z) = f'_x(x, y);$$

$$F'_y(x, y, z) = f'_y(x, y); \; F'_z(x, y, z) = -1.$$

Рівняння дотичної площини і нормалі набувають вигляду

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0; \qquad (19')$$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (20')$$

Приклад 15. Напишемо рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $e^{xy} + 3xz^2 - 2x^2y + 5x - y + z = 7$ в точці $M_0(0;0;6)$.

Маємо

$F(x, y, z) = e^{xy} + 3xz^2 - 2x^2y + 5x - y + z - 7$;

$F'_x(x, y, z) = ye^{xy} + 3z^2 - 4xy + 5$;

$F'_y(x, y, z) = xe^{xy} - 2x^2 - 1$;

$F'_z(x, y, z) = 6xz + 1$;

$F'_x(0,6,6) = 113$; $F'_y(0,0,6) = -1$; $F'_z(0,0,6) = 1$.

Отже, $113(x - 0) - 1(y - 0) + 1 \cdot (z - 6) = 0$ або $113x - y + z - 6 = 0$ – рівняння дотичної площини, $\dfrac{x}{113} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z - 6}{1}$ – рівняння нормалі.

Екстремум функції кількох змінних

Відразу ж зауважимо, що і тут має місце широка аналогія з попереднім матеріалом: дуже корисно буде згадувати теорію і практичні навички, засвоєні при вивченні екстремумів функції однієї змінної. Ми зосередимося на розгляді екстремумів функції двох змінних. Цього майже достатньо в математичному апараті для технічного навчального закладу, а вже розгляд екстремумів функції трьох змінних призводить до різних ускладнень. Отже, функція $z = f(x, y)$ в області D і точка $(x_0; y_0) \in D$.

Означення. Якщо існує окіл точки$(x_0; y_0)$, який належить області D, і для всіх точок $(x; y) \neq (x_0; y_0)$ виконується нерівність $f(x, y) < f(x_0, y_0)$, то точку $(x_0; y_0)$ називають точкою максимуму функції $f(x, y)$, а число $f(x_0, y_0)$ – максимумом цієї функції.

Цілком аналогічно говорять, що функція $z = f(x, y)$ має мінімум у точці $(x_0; y_0)$, якщо $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ для всіх точок $(x; y)$, досить близьких до точки $(x_0; y_0)$ і відмінних від неї.

Точки максимуму та мінімуму функції називають її точками екстремуму.

У деяких випадках екстремум функції можна побачити безпосередньо, без застосування якихось спеціальних методів, якогось особливого математичного апарату. Наприклад, на функцію $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$ досить лише поглянути і відразу ж зробити висновок: вона досягає мінімуму при $x = 1$, $y = 2$, тобто в точці $(1; 2)$. Дійсно, $f(1, 2) = (1-1)^2 + (2-2)^2 - 1 = -1$, а при будь-яких $x \neq 1$, $y \neq 2$ буде $(x-1)^2 > 0$ і $(y-2)^2 > 0$ завжди, тому $(x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 > -1$, тобто $f(x, y) > f(1, 2)$. Очевидно також, що ця функція максимуму не має, бо при $x \to \pm\infty$, $y \to \pm\infty$ $f(x, y) \to \pm\infty$, тобто при збільшенні за абсолютною величиною хоча б одного з аргументів функція просто збільшується.

До речі, геометрично тут ми маємо справу з еліптичним параболоїдом (точніше, параболоїдом обертання). Він зміщений, його вісь паралельна координатній осі OZ і пробиває параболоїд в точці $(1; 2; -1)$, ця точка є найнижчою точкою його, є дном нескінченної у висоту і ширину специфічної чашки, оскільки саме таку форму має всякий еліптичний параболоїд чи параболоїд обертання.

У загальному ж випадку функцію двох (або кількох) змінних на екстремум треба досліджувати. Як і для функції однієї змінної, встановимо необхідну та достатню умови екстремуму.

Теорема 1. (Необхідні умови екстремуму). Якщо функція $z = f(x, y)$ досягає екстремуму при $x = x_0$, $y = y_0$, то кожна частинна похідна першого порядку від z або обертається в нуль при цих значеннях аргументів, або не існує.

І справді, якщо змінній y надати деяке певне значення, а саме: $y = y_0$, то функція $f(x, y_0)$ буде функцією однієї змінної x. Для функції ж однієї змінної необхідна умова екстремуму – рівність нулю або неіснування першої похідної в «підозрілій» точці. У нас це означає, що $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ або дорівнює нулю, або не існує. Аналогічно доводять, що $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ або дорівнює нулю, або не існує.

Точки, в яких $z'_x = 0$ (або не існує) і $z'_y = 0$ (або не існує), називають критичними точками. Якщо функція досягає екстремуму в якій-небудь точці, то за цією теоремою це може статися тільки в критичній точці.

Виконання необхідних умов екстремуму для існування екстремуму замало. Потрібно ще виконання так званих достатніх умов.

Теорема 2. Нехай у деякій області, що містить точку $M_0(x_0;y_0)$ функція $z = f(x,y)$ має неперервні частинні похідні до третього порядку включно; нехай, крім того, точка $M_0(x_0;y_0)$ є критичною точкою функції $f(x,y)$, тобто

$$z'_x(x_0,y_0) = 0,\ z'_y(x_0,y_0) = 0.$$

Тоді при $x = x_0$, $y = y_0$:

1) $f(x,y)$ має максимум, якщо

$$z''_{xx}(x_0,y_0)\cdot z''_{yy}(x_0,y_0) - \left[z''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2 > 0 \text{ і } z''_{xx}(x_0,y_0) < 0;$$

2) $f(x,y)$ має мінімум, якщо

$$z''_{xx}(x_0,y_0)\cdot z''_{yy}(x_0,y_0) - \left[z''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2 > 0 \text{ і } z''_{xx}(x_0,y_0) > 0;$$

3) $f(x,y)$ не має ні максимуму, ні мінімуму, якщо

$$z''_{xx}(x_0,y_0)\cdot z''_{yy}(x_0,y_0) - \left[z''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2 < 0;$$

4) якщо $z''_{xx}(x_0,y_0)\cdot z''_{yy}(x_0,y_0) - \left[z''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2 = 0$, то екстремум може бути і може не бути, потрібне подальше дослідження.

Прийнято позначати: $z''_{xx}(x_0,y_0) = A$; $z''_{xy}(x_0,y_0) = B$; $z''_{yy}(x_0,y_0) = C$.

На основі теорем 1 і 2 маємо правило дослідження функції $z = f(x,y)$ на екстремум.

Щоб знайти екстремуми функції $z = f(x,y)$, необхідно:

1) знайти критичні точки (їх ще називають стаціонарними) функції із системи $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$;

2) у кожній критичній точці $(x_0;y_0)$ обчислити вираз $\Delta(x,y)=f''_{xx}(x,y)\cdot f''_{yy}(x,y)-\left[f''_{xy}(x,y)\right]^2$, а якщо цей вираз додатний, то визначитись із характером екстремуму;

3) обчислити значення функції $f(x,y)$ в точках максимуму та мінімуму.

Варто наголосити, що похідні цієї функції служать, так би мовити, інструментом для встановлення наявності екстремуму, а досягає цього екстремуму (якщо досягає) сама функція. Це досить серйозне зауваження, бо часто, одержавши критичні точки, студент не знає, що з ними робити, куди саме підставляти, і підставляє в якусь із похідних.

Приклад 16. Дослідимо на екстремум функцію $z=x^3+y^3-3xy$.

Знайдемо критичні точки, користуючись необхідними умовами екстремуму: $\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases}$.

У нас це $\begin{cases} 3x^2-3y=0 \\ 3y^2-3x=0 \end{cases}$. Розв’язуємо систему $\begin{cases} x^2-y=0 \\ y^2-x=0 \end{cases}$.

Із першого рівняння $y=x^2$ підставимо в друге й отримаємо: $\left(x^2\right)^2-x=0$; $x^4-x=0$; $x\left(x^3-1\right)=0$; $x(x-1)\left(x^2+x+1\right)=0$; $x_1=0$; $x-1=0$; $x_2=1$; $x^2+x+1=0$; $x_{3,4}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-1}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Ми тут знаходимося в дійсній області, тому комплексні корені x_3 і x_4 (математично нічим не гірші) просто не розглядаємо. Отже, $x_1=0$, $x_2=1$. Підставляємо ці значення у вираз $y=x^2$ – одержуємо $y_1=0$, $y_2=1$. Критичними будуть точки $O(0;0)$ і $M(1;1)$. Знайдемо похідні другого порядку:

$$z''_{xx}=6x;\ z''_{xy}=-3;\ z''_{yy}=6y.$$

Розглянемо характер першої критичної точки:

$A=z''_{xx}(0,0)=6\cdot 0=0$; $B=z''_{xy}(0,0)=-3$; $C=z''_{yy}(0,0)=6\cdot 0=0$; $AC-B^2=0\cdot 0-(-3)^2=-9<0$.

Отже, в цій критичній точці функція не має екстремуму.

Розглянемо характер другої критичної точки: $A=z''_{xx}(1,1)=6\cdot 1=6$; $B=z''_{xy}(1,1)=-3$; $C=z''_{yy}(1,1)=6\cdot 1=6$; $AC-B^2=6\cdot 6-(-3)^2=27>0$.

Екстремум є. Оскільки $A=6>0$, то буде мінімум.

Підставимо координати точки M у вираз функції:

$$\min z=z(1,1)=1^3+1^3-3\cdot 1\cdot 1=-1.$$

Приклад 17. Дослідимо на екстремум функцію $z = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$; додатково: $0 \le x \le \frac{p}{4}$, $0 \le y \le \frac{p}{4}$.

Відразу ж зауважимо: тригонометричний приклад розглядається якраз тому, що саме в тригонометрії, як показує досвід, випускники шкіл почуваються чи не найгірше. Не кращі тут справи й у випускників технікумів і коледжів. Слід пояснити, мабуть, обмеження, які в умові накладені на кути x і y. Справа в періодичності тригонометричних функцій. Наприклад, $\sin 30^{\mathbf{o}} = \frac{1}{2}$, але також (згадуємо школу) $\sin 390^{\mathbf{o}} = \frac{1}{2}$, $\sin 750^{\mathbf{o}} = \frac{1}{2}$ і т. д.

При даних нам обмеженнях між значеннями кутів та значеннями тригонометричних функцій існує взаємно однозначна відповідність.

Отже, знову починаємо із знаходження так званих критичних точок, при цьому нам буде дуже корисно потренуватись у розв'язуванні систем тригонометричних рівнянь.

Знову має бути $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$. У нас це $\begin{cases} \cos x - \sin(x+y) = 0 \\ \cos y - \sin(x+y) = 0 \end{cases}$.

Віднімаючи, наприклад, від першого рівняння друге, одержимо $\cos x - \cos y = 0$ або $\cos x = \cos y$. Взагалі кажучи, із рівності косинусів кутів не випливає рівність самих кутів (періодичність функції $y = \cos x$), але через дані нам обмеження на кути таки випливає, що $x = y$.

Використаємо це у першому рівнянні системи: $\cos x - \sin(x+x) = 0$; $\cos x - \sin 2x = 0$. Згадуємо: $\sin 2a = 2\sin a \cos a$; $\cos x - 2\sin x \cos x = 0$; $\cos x(1 - 2\sin x) = 0$; $\cos x = 0$; $x_1 = \frac{p}{2} + np$ – це сімейство розв'язків є цілком природним для просто тригонометричного рівняння, але ми його розглядати не будемо все через ті самі обмеження на кути.

Прирівнюємо до нуля наступний співмножник з лівої частини рівняння. $1 - 2\sin x = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $x_2 = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + np$ – не зашкодить нагадати загальний запис другого для нашого рівняння сімейства розв'язків.

Отже, $x_2 = (-1)^n \frac{p}{6} + np$. Але обмеження на кути!

Маємо $x = \frac{p}{6}$ та $y = \frac{p}{6}$. Критичною точкою у нас буде єдина точка $M\left(\frac{p}{6};\frac{p}{6}\right)$. Далі діємо за звичною схемою, тобто перевіряємо виконання достатньої умови екстремуму.

$z''_{xx} = -\sin x - \cos(x+y)$; $z''_{xy} = -\cos(x+y)$; $z''_{yy} = -\sin y - \cos(x+y)$;

$A = z''_{xx}\left(\frac{p}{6};\frac{p}{6}\right) = -\sin\frac{p}{6} - \cos\left(\frac{p}{6} + \frac{p}{6}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$;

$$B = z''_{xy}\left(\frac{p}{6};\frac{p}{6}\right) = -\cos\left(\frac{p}{6}+\frac{p}{6}\right) = -\frac{1}{2};$$
$$C = z''_{yy}\left(\frac{p}{6};\frac{p}{6}\right) = -\sin\frac{p}{6} - \cos\left(\frac{p}{6}+\frac{p}{6}\right) = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = -1;$$
$$AC - B^2 = (-1)\cdot(-1) - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} > 0.$$

Екстремум є! $A = -1 < 0$, то буде максимум
$$\max z = z\left(\frac{p}{6}+\frac{p}{6}\right) = \sin\frac{p}{6} + \sin\frac{p}{6} + \cos\left(\frac{p}{6}+\frac{p}{6}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Як і у випадку функції однієї змінної, поняття екстремуму функції двох змінних має також і практичне застосування. Розглянемо конкретний випадок.

Приклад 18. Дане додатне число a маємо розкласти на три додатні доданки так, щоб їх добуток мав найбільше значення.

Перший та другий доданки позначимо через x та y, тоді третій доданок буде $a - x - y$. Запишемо добуток цих доданків:

$$u(x,y) = x\cdot y\cdot(a - x - y).$$

За умовою задачі $x > 0$, $y > 0$, $a - x - y > 0$. Звідси $x + y < a$, $u > 0$. Отже, x і y можуть набувати значення в області, обмеженій прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$.

Частинні похідні від функції $u(x,y)$:

$$u'_x = y(a - x - y) + xy(-1) = y(a - 2x - y);$$
$$u'_y = x(a - x - 2y).$$

Критичні точки знаходимо із системи рівнянь $\begin{cases} y(a - 2x - y) = 0 \\ x(a - x - 2y) = 0 \end{cases}$.

Розв’язування цієї системи рівнянь зводиться до розв’язування кількох маленьких системок рівнянь.

1) $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ т. $O(0;0)$ 2) $\begin{cases} y = 0 \\ a - x - 2y = 0 \end{cases}$ т. $M_1(a;0)$

3) $\begin{cases} a - 2x - y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ т. $M_2(0;a)$ 4) $\begin{cases} a - 2x - y = 0 \\ a - x - 2y = 0 \end{cases}$ т. $M_3\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$.

Останню систему корисно розв’язати різними методами. Три перші точки лежать на межі області, де функція u дорівнює нулю. Цікавою нам буде лише точка $M_3\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$. Ми вже здогадуємось, що ця точка і є точкою максимуму функції u, але витримаємо всі «формальності» до кінця. Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$u''_{xx} = -2y; \quad u''_{xy} = a - 2x - 2y; \quad u''_{yy} = -2x.$$

Підставляємо в ці вирази координати точки $M_3\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$ і одержуємо: $A = -\frac{2}{3}a$; $B = -\frac{a}{3}$; $C = -\frac{2}{3}a$.

$$AC - B^2 = \left(-\frac{2}{3}a\right)\left(-\frac{2}{3}a\right) - \left(-\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{3} > 0, \ A < 0.$$

Це й означає, що в точці M_3 функція $u = xy(a - x - y)$ досягає максимуму. Отже, додатне число слід розкласти на три саме однакові додатні доданки, якщо ми хочемо, щоб добуток цих доданків був найбільшим.

Остаточно тут: $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{3}$, $a - x - y = \frac{a}{3}$.

Зауваження. Теорія максимумів і мінімумів функції кількох змінних є основною для так званого ***методу найменших квадратів***, який дає можливість одержати формулу функціональної залежності на базі експериментальних даних. Розглянемо цей дуже корисний у подальшому метод.

Нехай у результаті експерименту маємо n значень показника x і n відповідних значень показника y. Будемо x вважати аргументом, а y – функцією, тобто $y = f(x)$. Вид цієї функції встановлюється або з теоретичних міркувань, або на основі характеру розміщення на координатній площині так званих «експериментальних точок» $(x_1;y_1),(x_2;y_2),\ldots,(x_n;y_n)$. При проведенні експерименту мають місце похибки. Нехай «експериментальні точки» в своїй сукупності вище-нижче деякої, як нам здається, прямої. Природно допустити в такому випадку, що функціональна залежність між x і y має вигляд $y = ax + b$. Слід підібрати коефіцієнти a і b так, щоб функція описувала розглядуваний процес найкращим чином. Значенню x_i в експерименті відповідає значення y_i, а за майбутнім виразом функції – значення $ax_i + b$. От і маємо звести до мінімуму різницю між «практикою» і «теорією».

Складемо функцію $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]^2$, у якій x_i та y_i є відомі з експерименту числа, а от аргументи – a і b. Тут різниці підносяться до квадрата із просто формальних математичних причин: вони можуть мати різні знаки і взаємно «гасити» одна одну. А тепер досліджуємо на екстремум цю функцію $S(a,b)$ за вже відомою схемою.

Має бути $\begin{cases} S'_a = 0 \\ S'_b = 0 \end{cases}$.

$$S'_a = -2\sum_{i=1}^{n}[\,y_i - (\,ax_i + b\,)\,]x_i\,; S'_b = -2\sum_{i=1}^{n}[\,y_i - (\,ax_i + b\,)\,].$$

Коефіцієнти a і b знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Оскільки x_i та y_i є одержаними в експерименті числами, то маємо звичайну систему двох лінійних відносно a і b рівнянь. Очевидно, що система має певний розв'язок. Легко перевірити на основі достатніх умов екстремуму, що при знайдених значеннях a і b функція $S(\,a,b\,)$ має мінімум, тобто при саме таких a і b відмінність між «теорією» $(\,y = ax + b\,)$ і «практикою» (дані експерименту) є мінімальною. Потренуйся, друже, знайди S''_{aa}, S''_{ab}, S''_{bb} і т. д.

Знаходження найбільшого та найменшого значень функції двох змінних у замкнутій області

Раніше ми знаходили найбільше та найменше значення функції однієї змінної на замкнутому проміжку (сегменті). Для цього спочатку визначали критичні точки всередині сегмента, знаходили значення функції в цих точках і в крайніх точках сегмента, а потім серед усіх одержаних значень вибирали найбільше і найменше.

Такі ж дії виконуємо і для функції двох змінних. Тут межами області будуть деякі лінії. На цих лініях функція двох змінних просто стає функцією однієї змінної, якщо у її виразі замінити y, наприклад, виразом через x згідно із рівнянням цієї лінії. Слушне **зауваження**: досліджувати на екстремум функцію двох змінних у внутрішніх точках області за достатньою умовою, як і у внутрішніх точках ліній на межі області, не варто. Це була б зайва робота: інших «претендентів на екстремум» у «звичайних» функцій все одно не буде.

Отже, знаходимо значення функції у внутрішніх (критичних) точках області, у внутрішніх (критичних) точках на межах області та в точках перетину ліній на межі області, а з усіх одержаних значень функції виберемо найбільше і найменше.

Приклад 19. Знайдемо найбільше і найменше значення функції $z = x^2y(\,2 - x - y\,)$ в трикутнику, обмеженому лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Знайдемо критичні точки, що лежать усередині трикутника:

$$z'_x = 4xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy(4 - 3x - 2y);$$
$$z'_x = 2x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(2 - x - 2y).$$

Усередині трикутника $x > 0$ та $y > 0$, тому система рівнянь для знаходження критичних точок $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ тут набуває вигляду $\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0 \\ 2 - x - 2y = 0 \end{cases}$. Це тут, зауважимо, можна було скоротити на x і y, а в формальних, так би мовити, рівняннях скорочувати на невідомі було б грубою помилкою: втрачалися б розв'язки.

Цю систему зручно розв'язувати методом алгебраїчного додавання. Віднімаючи від першого рівняння друге, одержуємо $x = 1$, а потім $y = \frac{1}{2}$. Точка $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$ лежить усередині нашого трикутника. Значення функції в цій точці

$$z(M) = z\left(1, \frac{1}{2}\right) = 1^2 \cdot \frac{1}{2}\left(2 - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

На сторонах трикутника $x = 0$ та $y = 0$ значення функції дорівнюють нулю. Знайдемо її найбільше і найменше значення на стороні $x + y = 6$. На ній $y = 6 - x$, $0 \le x \le 6$, а функція $z = z(x) = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x)$. На кінцях проміжку $z(0) = z(6) = 0$.

Критичні точки знаходимо із рівняння $z'(x) = 0$. $-48x + 12x^2 = 0$; $12x(-4 + x) = 0$; $x = 0$ – межова точка, то беремо для розгляду $x = 4$, при цьому $y = 2$, але значення функції z знаходимо, підставляючи $x = 4$ у вираз $z = z(x)$:

$z(4) = -4 \cdot 4^2(6 - 4) = -128$.

Найбільше і найменше значення функції z у даному трикутнику шукаємо серед її таких значень:

$z = \frac{1}{4}$ – всередині трикутника в точці $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$;

$z = 0$ – на сторонах $x = 0$, $y = 0$ (в тому числі й у вершинах);

$z = -128$ – на стороні $x + y = 6$, в точці $N(4; 2)$.

Отже, $z = \frac{1}{4}$ – найбільше значення функції (в точці M), а $z = -128$ – найменше значення (в точці N на межі).

Умовні максимуми і мінімуми

Це коли функція залежить від кількох змінних, які вже не є незалежними, а зв'язані між собою деякими додатковими умовами (наприклад, задовольняють деякі рівняння). Проста і яскрава задача до теми: із куска листового металу площею $2a$ виготовляємо закритий бак у формі паралелепіпеда, що має найбільший об'єм.

Позначимо довжину, ширину і висоту бака через x, y і z. Задача полягає у знаходженні максимуму функції $u = x \cdot y \cdot z$ за умови, що $2xy + 2xz + 2yz = 2a$, тобто маємо задачу на умовний екстремум, бо змінні x, y, z зв'язані умовою $2xy + 2xz + 2yz = 2a$. Дуже практична задача.

Розглянемо теорію для функції двох змінних, які зв'язані однією умовою.

Нехай треба знайти максимуми і мінімуми функції

$$u = f(x, y). \tag{1}$$

При цьому x і y зв'язані рівнянням

$$j(x, y) = 0. \tag{2}$$

Задачу можна розв'язати і не розв'язуючи рівняння $j(x, y) = 0$ відносно y або x, щоб функцію $u = f(x, y)$ звести для функції однієї змінної (та й не завжди це можливо).

При тих значеннях x, при яких функція u може мати екстремум, похідна від u по x повинна обертатися в нуль.

Знайдемо $\frac{du}{dx}$ із (1), не забуваючи, що y є функція від x:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

У точках екстремуму

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

Із рівності (2) маємо:

$$\frac{dj}{dx} + \frac{\partial j}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{4}$$

Члени рівності (4) помножимо на невідомий поки що коефіцієнт l і складемо їх з відповідними членами рівності (3):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)+l\left(\frac{dj}{dx}+\frac{\partial j}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

або

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+l\,\frac{\partial j}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+l\,\frac{\partial j}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0. \qquad (5)$$

Підберемо l так, щоб для значень x і y, відповідних екстремуму функції u, другі дужки в рівності (5) оберталися в нуль.

$$\frac{\partial f}{\partial y}+l\,\frac{\partial j}{\partial y}=0.$$

Для визначеності будемо вважати, що в критичних точках буде $\frac{\partial j}{\partial y}\neq 0$.

Але тоді при цих значеннях x і y із рівності (5) маємо

$$\frac{\partial f}{\partial x}+l\,\frac{\partial j}{\partial x}=0.$$

Виходить, що в точках екстремуму задовольняються три рівняння:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}+l\,\dfrac{\partial j}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}+l\,\dfrac{\partial j}{\partial y}=0\\[2mm] j\,(x,y)=0\end{cases}. \qquad (6)$$

Тут три невідомі x, y, l. Визначимо звідси x, y і l, причому l відігравала лише допоміжну роль і в подальшому нам не знадобиться.

Рівняння (6) є необхідними умовами умовного екстремуму, але лише необхідними. Потрібне додаткове дослідження характеру критичної точки. В конкретних задачах провести таке дослідження інколи допомагає якраз суть задачі.

До речі, ліві частини рівнянь (6) є частинні похідні функції

$$F(x,y,l)=f(x,y)+l\,j\,(x,y)$$

по змінних x, y, l. Це допоміжна функція.

Приклад 20. Спробуємо застосувати тільки що розглянуту теорію до оголошеної перед нею чисто практичної задачі про закритий бак з листа металу площею $2a$.

Наше завдання – найоптимальніше використати матеріал, тобто так все розрахувати, щоб об'єм бака був максимальний.

Отже, x, y, z – довжина, ширина і висота бака.

Об'єм $V = xyz$, площа поверхні $2xy + 2xz + 2yz = 2a$.

Зрозуміло, що тут $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Накладену на площу умову запишемо так:

$$xy + xz + yz - a = 0. \tag{7}$$

Складемо допоміжну функцію

$$F(x, y, z, l) = xyz + l(xy + xz + yz - a).$$

Прирівняємо до нуля її частинні похідні F'_x, F'_y, F'_z:

$$\begin{cases} yz + l(y + z) = 0 \\ xz + l(x + z) = 0 \\ xy + l(x + y) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Доведеться розв'язати чотири рівняння (7) і (8) з чотирма невідомими x, y, z, l. Для цього перше із рівнянь (8) помножимо на x, друге – на y, третє – на z і додамо їх; з огляду на рівність (7) одержимо $l = -\frac{3xyz}{2a}$. Підставимо це значення l в рівняння (8), одержимо:

$$\begin{cases} yz\left[1 - \frac{3x}{2a}(y + z)\right] = 0 \\ xz\left[1 - \frac{3y}{2a}(x + z)\right] = 0 \\ xy\left[1 - \frac{3z}{2a}(x + y)\right] = 0 \end{cases}$$

Згідно із змістом задачі x, y, z відмінні від нуля, то останні рівняння запишемо так:

$$\begin{cases} \frac{3x}{2a}(y + z) = 1 \\ \frac{3y}{2a}(x + z) = 1 \\ \frac{3z}{2a}(x + y) = 1 \end{cases}$$

З першого і другого рівнянь маємо $x = y$, з другого і третього – $y = z$. Виходячи із рівняння (7), одержуємо $x = y = z = \sqrt{\frac{a}{3}}$. Це єдина система значень x, y, z, при яких може бути максимум або мінімум. Із геометричних міркувань зрозуміло, що об'єм не може в умовах задачі бути необмежено великим, при певних значеннях x, y, z він буде найбільшим.

Отже, бак матиме найбільший об'єм, якщо він буде кубом, ребро якого дорівнює $\sqrt{\frac{a}{3}}$.

Таким чином, знову ми побачили, що різні розділи математики тісно між собою пов'язані та служать надійним інструментом при вирішенні дуже практичних проблем.

Успіхів тобі, друже!

Горбатов Микола Іванович
Сдвижкова Олена Олександрівна

ОСОБИСТИЙ ДОВІДНИК СТУДЕНТА З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

(Шоста частина)

Редактор Ю.В. Рачковська

Підп. до друку 07.07.2014. Формат 30х42/4
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 2,1.
Обл.-вид. арк. 2,1. Тираж 50 пр. Зам. № .

Державний ВНЗ «Національний гірничий університет»
49027, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19