УДК 624.15.001

Шаповал В. Г., д.т.н., проф., Прошин С. Л., асп., Фартушный А.С., асп.
Государственное ВУЗ "Национальный горный университет"
г. Днепропетровск, Украина
Андреев В.С., к.т.н.
Днепропетровский национальный университет инженеров железнодорожного транспорта, г. Днепропетровск, Украина

АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ, С РАСПОЛОЖЕННОЙ НА НЕЙ ТОЧЕЧНОЙ МАССОЙ, НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными практическими задачами. При решении практических задач проектирования зданий и сооружений, возведенных на сплошном плитном фундаменте, часто возникает необходимость учета динамического воздействия расположенного на нем оборудования и определения амплитуд колебаний такого фундамента [1, 2, 3]. При этом также существует проблема учета взаимного влияния расположенных в различных местах на плитном фундаменте машин и оборудования с динамическими нагрузками (в данном случае имеют место технологические и экологические проблемы) [3].

В данном контексте, проблема определения амплитуд и форм вынужденных колебаний является актуальной при проектировании плитных фундаментов под динамические нагрузки.

Постановка задачи исследований. Авторами была поставлена цель исследования амплитуд вынужденных колебаний бесконечной плиты в условиях задачи сформулированной следующим образом. Плита неограниченных размеров имеет толщину h, а плотность ее материала равна ρ, в центре плиты приложена вертикальная сосредоточенная сила P, которая совершает гармонические колебания с частотой ω , и масса M. Упругие свойства грунтового основания описываются с использованием коэффициента постели C. Попытка решения близкой по смыслу задачи предпринималась автором работ [4, 5], однако, при этом в полученные им результаты закрались некоторые неточности, принятые во внимание в данном исследовании.

Цель работы – анализ амплитуд вынужденных колебаний гладкой бесконечной в плане плиты, с расположенной в её центре точечной массой, на основании Винклера.

Изложение основного материала исследования.

Изначально, была принята зависимость перемещения гладкой плиты, с расположенной в ее центре массой M, от времени t в точке с координатой r в полярной системе координат, имеющая вид [6, 7, 8]:

$$D\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 W+CW+\rho h\frac{d^2W}{dt^2}=P\frac{\delta(r)}{2\pi r}\cdot e^{i\omega t}-M\frac{\delta(r)}{2\pi r}\cdot\frac{d^2}{dt^2}W_0 \qquad (1)$$

где, D – цилиндрическая жесткость плиты;
$\delta\ r$ - дельта-функция Дирака [9].

Решение дифференциального уравнения (1), для нахождения прогиба плиты W, искали в виде:

$$W=e^{i\omega t}\int_0^\infty A(\alpha)\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot\alpha\cdot d\alpha, \qquad (2)$$

где $A\ \alpha$ - подлежащая определению функция параметра α, а $J_0\ \alpha\cdot r$ - функция Бесселя первого рода с нулевым индексом [3].

В ходе решения уравнения (1) использовалась методика интегральных преобразований Бесселя. В результате было определено, что значение прогиба бесконечной плиты W в точке с координатой r имеет вид:

$$W(r)=\frac{P}{2\pi D}\left(1-\frac{8Da^2}{8Da^2+M\omega^2}\right)\int_0^\infty\frac{\alpha J_0(\alpha\cdot r)d\alpha}{\alpha^4+a^4}, \qquad (3)$$

при $a=\sqrt[4]{\dfrac{C-h\rho\omega^2}{D}}$.

Дальнейшая работа была сосредоточена на анализе амплитуд колебаний плиты в точке с координатой r=0. Для этого было получено соответствующее выражение прогиба, имеющее вид:

$$W_0=\frac{P}{8}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2}+b}\right] \qquad (4)$$

$$\text{при}\quad \begin{cases} D(C-h\rho\omega^2)=a^2 \\ M\omega^2=b \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь, установлено, что выражение (4) может принимать различный вид в зависимости от параметра a:

1. $a>0 \quad\Rightarrow\quad W_0=\dfrac{P}{8}\left[\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+b}\right]$, в данном случае из выражений (4), (5) видно, что при увеличении частоты, a стремится к 0, при этом W_0 стремится к бесконечности, что приводит нас ко второму случаю;

2. $a=0 \quad\Rightarrow\quad W_0=\dfrac{P}{8}\left[\infty-\dfrac{1}{b}\right]$, при этом частоту, при которой W_0 стремится к бесконечности и наступает резонанс, можно выразить так:

$$D(C-h\rho\omega^2)=0 \quad\Rightarrow\quad \omega^2=\frac{C}{h\rho} \quad\Rightarrow\quad \omega=\pm\sqrt{\frac{C}{h\rho}}$$

3. при $a<0$ выражение (4) будет иметь вид:

$$W_0 = \frac{P}{8}\left[\frac{1}{|a|\sqrt{-1}} - \frac{1}{|a|\sqrt{-1}+b}\right] = \frac{P}{8}\left[\frac{1}{|a|I} - \frac{1}{|a|I+b}\right] \qquad (6)$$

В данном случае, выражение (6) можно разделить на реальную и мнимую части, тогда:

$$W_0 = \frac{P}{8}\left[-\frac{b}{b^2+a^2} + I\left(-\frac{b^2}{|a|(b^2+a^2)}\right)\right] \qquad (7)$$

Тогда, относительную амплитуду колебаний можно представить в виде суммы реальной и мнимой составляющих и записать следующим образом:

$$\overline{W}_0 = \frac{8W_0}{P} = \overline{W}_{0,\mathrm{Re}} + I\overline{W}_{0,\mathrm{Im}}, \qquad (8)$$

где $\overline{W}_{0,\mathrm{Re}}$, $I\overline{W}_{0,\mathrm{Im}}$ - соответственно реальная и мнимая составляющие амплитуды колебаний.

Таким образом, был сделан вывод, что существует состояние, при $a<0$, при котором имеют место реальная и мнимая части выражения (4), что в свою очередь обуславливает наличие реальной и мнимой составляющих амплитуд колебаний.

В ходе дальнейшего исследования в выражение (3) было положено следующее:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\zeta}{r}; \quad \zeta = \alpha r \\ d\alpha &= \frac{d\zeta}{dr} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Тогда (3) примет вид

$$W(r) = \frac{P\cdot r^4}{2\pi D}\left(1 - \frac{8Da^2}{8Da^2 + M\omega^2}\right)\int_0^\infty \frac{\zeta J_0(\zeta)}{\zeta^4 + a^4 r^4} \qquad (10)$$

Обозначим

$$a_1 = a\cdot r^4 \qquad (11)$$

тогда

$$W^* = \frac{2\pi DW}{\left(1 - \dfrac{8Da^2}{8Da^2 + M\omega^2}\right)} = \int_0^\infty \frac{\zeta J_0(\zeta)}{\zeta^4 + a_1^4} \qquad (12)$$

Выражение (10) представляет собой зависимость прогиба плиты от координаты и времени, тогда как выражение (12) есть зависимость относительного прогиба от параметра *a*, где $a = \sqrt[4]{\dfrac{C - h\rho\omega^2}{D}}$.

Выводы.

В целом, в ходе проведенных исследований получено аналитическое решение задачи о вынужденных колебаниях бесконечной плиты, с расположенной в её центре точечной массой, на основании Винклера. Также, установлено, что величина амплитуды зависит от свойств основания и плиты, ее геометрии, частоты изменения и величины внешней нагрузки. Определено, что выражение прогиба плиты в точке r=0 зависит от значения параметра *a*, где $a^2 = D(C - h\rho\omega^2)$, при этом, при $a < 0$ существует две составляющих амплитуды колебаний – реальная и мнимая.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Баркан Д. Д. Динамика оснований и фундаментов. - М.: Стройвоенмориздат, 1948. - 410 с.
2. Строительные нормы и правила: СНиП 2.02.05-87. Фундаменты машин с динамическими нагрузками. – Москва:[б.и.], 1988. – 79 с.
3. Шаповал В. Г., Швец В. Б., Конопляник А. Ю. Сравнительный анализ поведения плитного и свайного фундаментов при воздействии на них динамической нагрузки от линий метрополитена //Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. - Одеса, 2001. - С. 190-196.
4. Киричек Ю. А. Комбинированные массивно – плитные фундаменты. - ПГАСА, Днепропетровск, 2001. – 207 с.
5. Кірічек Ю. О. Взаємодія комбінованих масивно – плитних фундаментів із ґрунтовою основою при різних видах навантажень: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора техн. наук: ПГАСА, Дніпропетровськ, 2001. – 311 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1974. - 840 с.
7. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. - М.: Наука, 1979. - 320 с.
8. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. - М.: Физматгиз, 1960. - 491 с.
9. Тимошенко С. П., Войновский – Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1966. - 636 с.