МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

С.А. Ус, Л.С. Коряшкіна

Моделі й методи прийняття рішень

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Дніпропетровськ
НГУ
2014

УДК 519.81(075.8)
ББК 22.18я73
У74

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України для студентів вищих навчальних закладів напряму підготовки «Системний аналіз» (лист №1/11-7220 від 14.05.2014).

Рецензенти:

В.О. Капустян, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», завідувач кафедри математичного моделювання економічних систем);

Г.В. Корніч, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Запорізький національний технічний університет, завідувач кафедри системного аналізу та обчислювальної математики).

Ус С.А.

У74 Моделі й методи прийняття рішень: навч. посіб. / С.А. Ус, Л.С. Коряшкіна; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Д. : НГУ, 2014. – 300 с.

ISBN 978–966–350–515–2

Навчальний посібник охоплює матеріал, передбачений програмою курсу “Системи й методи прийняття рішень” для студентів напряму підготовки 6.040303 Системний аналіз.

Викладено математичні основи теорії прийняття рішень. Розглянуто типові методи вирішення проблемних ситуацій – вибір кращої альтернативи із заданої множини, групове впорядкування альтернатив, методи прийняття рішень за наявністю багатьох критеріїв та в умовах невизначеності. Основну увагу приділено прикладним аспектам теорії прийняття рішень.

Книгу розраховано на осіб, які опанували математику в межах вузівського курсу, зокрема на студентів спеціальності «Системний аналіз». Вона може бути корисна всім, хто застосовує методи прийняття рішень до розв’язування практичних задач.

УДК 519.216/217(075.8)
ББК 22.171я73

ISBN 978–966–350–515–2

Зміст

ВСТУП

Не варто лише сподіватися на те, що можна прийняти безпомилкове рішення, навпаки, слід заздалегідь примиритися з тим, що всяке рішення сумнівне, бо це звичайна річ, коли, уникнувши однієї халепи, потрапляєш в іншу. Однак у тому й полягає мудрість, щоб, зваживши на всі можливі неприємності, найменше зло визнати за благо.

Н. Макіавеллі

Об’єкти сучасного гірничого виробництва, зокрема шахти, рудні, кар'єри, збагачувальні фабрики, що обладнані потужною гірничою технікою, є складними комплексними підприємствами. Управління такими об’єктами та планування їхньої роботи вимагають від керівника будь-якого рангу вміння швидко й правильно приймати рішення. В умовах необхідності врахування багатьох зовнішніх факторів, внутрішніх потужностей і зв’язків між складовими досліджуваних об’єктів, рішення, прийняті на основі особистого досвіду та інженерної інтуїції, можуть виявитися малоефективними, оскільки в них не враховано цілий ряд суперечливих умов. Крім того, сучасне виробництво відзначається високою витратністю, що різко підвищує збитки від помилок у прогнозуванні й управлінні. Така ситуація вимагає застосування технології прийняття рішень, що базується на кількісних оцінках варіантів, виключає або зменшує значення суб'єктивних факторів, і при цьому враховує вплив різних неточно або невизначено описаних параметрів. Саме застосування системного підходу дозволяє вивчати проблеми прийняття рішень в умовах, коли вибір альтернативи потребує аналізу складної інформації, що характеризує реальний стан речей.

Теорія прийняття рішень є одним з найважливіших розділів *системного аналізу*, який зосереджує в собі сукупність методів, основаних на використанні комп’ютерних інформаційних технологій, та орієнтований на дослідження складних систем – технічних, економічних, соціальних, екологічних, програмних і под. Результатом таких досліджень, як правило, є вибір певної альтернативи: плану розвитку фірми або корпорації, параметрів конструкції, стратегії управління проектом тощо.

Під *сутністю прийняття рішень* як процесу розуміють внутрішню, відносно стійку логічну основу, що визначатиме сенс, роль і місце певного управлінського рішення у функціонуванні та розвитку організації. Сутність прийняття рішень зазвичай проявляється через реалізацію різноманітних зовнішніх зв'язків і дій, що супроводжують процесс. Виходячи з цього, можна визначити предмет дослідження теорії прийняття рішень.

Основна мета будь-якого управлінського рішення – забезпечити координувальний (регулювальний) вплив на всю систему управління, під час виконання нею завдань і досягнення цілей організації. Основними завданнями, що становлять зміст і послідовність дій осіб, що приймають рішення при виконанні безпосередніх обов'язків, є створення відповідної інформаційної бази; визначення обмежень і критеріїв прийняття рішення; організація діяльності системи управління. *Прийняття рішень – творчий, відповідальний процес*. Він має на меті відповідно до обставин визначити тактику подальших дій у конкретній сфері виробництва товару або надання послуг, окреслити коло функцій структурних підрозділів у системі діяльності організації, порядок їх взаємодії, забезпечення та управління ними.

Для своєчасного прийняття рішень необхідно мати систему управління, яка забезпечує реалізацію складної системної діяльності осіб, що приймають рішення; на науковій основі організувати роботу фірми (корпорації), використовуючи ефективні методи та автоматизовані системи керування. При цьому якість прийнятих рішень багато в чому залежить від злагодженості колективу, притаманної йому організаційної культури, відносин між керівниками та виконавцями, від вдалого використання систем підтримки прийняття рішень. Саме в цих питаннях можуть бути корисними науково обґрунтовані практичні рекомендації, зроблені на базі теорії прийняття рішень де враховано об'єктивні закони й досягнення суміжних наук.

Предметом дослідження теорії прийняття рішень є закони (закономірності) діяльності осіб, що приймають рішення, організаційні форми, технології й методи цієї діяльності, принципи управління та організації праці, сутність і зміст рішень.

Об'єкт теорії прийняття рішень – системна діяльність керівника і його команди в процесі вироблення, прийняття та реалізації рішень.

Отже, *теорія прийняття рішень* – це сума знань про підготовку, прийняття й реалізацію управлінського рішення, про закономірності й принципи, організаційні форми, методи й технології забезпечення цього процесу в межах суб’єкта господарювання.

Теорія прийняття рішень, як і будь-яка наукова теорія, виконує пізнавальну та прогнозну функції. Пізнавальна функція полягає в розкритті сутності процесів прийняття рішень, закономірностей і принципів, яким вони підпорядковуються, у поясненні їх теоретичних засад на різних історичних етапах, у висвітленні основних властивостей і взаємозв'язків предмета дослідження, обґрунтуванні технології та системи прийняття рішення. Прогнозна функція включає визначення тенденцій подальшого розвитку процесів та систем прийняття рішень, шляхи вибору організаційних форм і методів діяльності об’єкта управління.

Основні завдання теорії прийняття рішень:

– вивчення та узагальнення досвіду пошуку рішень у певних ситуаціях, зокрема в умовах невизначеності та ризику;

– виявлення й дослідження об'єктивних закономірностей у процесах прийняття рішень; формування на їх основі принципів організації діяльності осіб, що приймають рішення, задіяних при цьому організаційних форм, методів і технологій розробки;

– вироблення практичних рекомендацій до прийняття рішень лінійними менеджерами та до роботи апарату, який ними керує у реальній обстановці, а також до використання технічних засобів і автоматизованих систем керування;

– розробка методів дослідження проблем розвитку системи прийняття рішень, принципів і методів оцінювання їх ефективності, а також заходів щодо вдосконалення діяльності осіб, що приймають рішення.

У даний час на розвиток теорії прийняття рішень істотно впливають інші науки, серед яких методологія, зокрема методологія мислення, теорія управління, кібернетика, психологія, соціологія та політологія. У цьому аспекті істотного значення також набувають природничі науки – біологія, психофізіологія. Але, певна річ, вирішальну роль тут відіграє математика, зокрема методи кількісного оцінювання варіантів у прийнятті рішень та прогнозуванні розвитку ситуацій під час вироблення найбільш раціонального рішення.

Цей посібник містить детальну характеристику математичних моделей і методів, які застосовуються для формалізації та змістовного обґрунтування рішення.

Існують різні підходи до прийняття рішень, залежно від того, які поняття вважають за основні при формалізації проблеми.

Наприклад, коли вважати, що прийняття рішень – це вибір найбільш вдалої альтернативи з множини наявних, то задача описується парою (Ω, C), у якій Ω – множина можливих альтернатив, C – принцип оптимальності. Такий підхід відповідає ситуації, коли зовнішнє середовище не впливає на результат прийняття рішень.

При статистичному підході ситуація прийняття рішень описується трійкою: (Φ, Θ, F), де Φ – множина можливих рішень органу управління, Θ – множина станів середовища, F – оцінний функціонал.

У цьому виданні прийняття рішень розглядається переважно в межах першого підходу.

В основу посібника покладено матеріал курсу лекцій теорії прийняття рішень, читаний студентам спеціальності «Системний аналіз та управління». Автори мають на меті навчити студентів формалізувати задачі планування, організації та управління у сфері гірництва, будувати економіко-математичні моделі виробничих ситуацій та приймати рішення на основі розрахунку оптимальних величин змінних в умовах визначеності й невизначеності.

Для успішного засвоєння матеріалу посібника потрібні знання математичного аналізу, лінійної алгебри, теорії матриць, методів математичного програмування й оптимізації. Студенти, які вже оволоділи стандартними методами скінченновимірної оптимізації, можуть застосувати деякі властиві їм оцінки та можливі альтернативні підходи до розв’язування практичних задач.

Матеріал посібника поділено на шість розділів.

У першому розділі розглянуто загальні підходи до формулювання та розв’язуваня задач прийняття рішень (ЗПР), подано класифікацію цих задач, з’ясовано види невизначеності, що можуть виникати в процесі прийняття рішень, та способи їх формалізації.

У другому розділі викладено основи теорії вибору варіантів із заданої множини альтернатив. Тут визначено основні поняття теорії бінарних відношень і розглянуто їхнє використання в задачах прийняття рішень. Крім того, описано функції вибору та деякі елементи теорії корисності.

Третій розділ зосереджує в собі характеристику задач прийняття рішень в умовах наявності багатьох критеріїв, зокрема задач багатокритерійної оптимізації. Тут описано методи розв’язування цих задач, а також методи врахування пріоритетів критеріїв і нормалізації.

У четвертому й п’ятому розділах з’ясовано зміст задач прийняття рішень у нечітких умовах, у тому числі задач нечіткого математичного програмування. Подано їх класифікацію та висвітлено методи розв’язування (розділ 4), а також розглянуто задачі вибору на основі нечітких відношень переваги (розділ 5).

Шостий розділ включає виклад основ теорії вибору варіантів із заданої множини альтернатив за наявності різних типів невизначеності. Зокрема розглянуто задачі вибору в умовах невизначеності "середовища" (прийняття рішень в умовах ризику, повної невизначеності, в ігрових ситуаціях вибору).

Додатки являють собою рекомендації студентам до виконання курсової роботи, передбаченої навчальним планом, а також містять перелік задач, що можуть бути розв’язані в межах курсової роботи. Тут, зокрема, описано практичні ситуації, коли вибір рішення може і має ґрунтуватися на застосуванні методів, викладених у посібнику. Крім того, теорії вибору та прийняття рішень, у тому числі й теорія багатокритерійної оптимізації, можуть стати в пригоді в таких ситуаціях:

– вибір оптимальної номенклатури товару в торгових та інших організаціях;

– підбір персоналу фірми (наприклад, під час прийому на роботу);

– раціональна організація розробки програмного забезпечення для комп'ютерних систем;

– реалізація завдань у ріелтерських фірмах, що надають послуги населенню на ринку нерухомості (наприклад, підбір квартир);

– оптимальний вибір параметрів (числових характеристик) проектованої чи діючої системи (або організації);

– формування оптимальних стратегій діяльності на ринку цінних паперів;

– прийняття рішень на фінансовому ринку в умовах ризику й невизначеності;

– максимізація доходів від аукціонних торгів і т. д.

Хоча посилання на літературні джерела в тексті обмежені, у кінці посібника наведено повний перелік використаної літератури і джерела, які можуть бути корисними при розв’язуванні практичних задач прийняття рішень.

РОЗДІЛ 1

ЗАДАЧІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ТА ЇХНЯ КЛАСИФІКАЦІЯ

Мета розділу: ознайомлення з проблемою прийняття рішень, типовими її задачами та існуючими підходами до їх розв’язування; вивчення основних понять теорії прийняття рішень.

1.1. Приклади задач прийняття рішень та їхній поділ на класи

Розглянемо деякі задачі, метою яких є прийняття рішень.

- На підприємстві звільнилася посада головного інженера. Директор має призначити нового керівника, здійснивши вибір одного з можливих претендентів на цю посаду і враховуючи при цьому дані про їхню освіту, професіоналізм, досвід роботи, авторитет у колективі, вік, комунікабельність, стан здоров’я та інші чинники, кожен з яких до того ж має різну значимість при виборі.
- Деякі шахти і кар’єри повинні відвантажувати видобуте вугілля споживачам за кількома адресами. Відомо, скільки вугілля видобувають на кожному підприємстві й потреби кожного пункту споживання. Необхідно так організувати доставку даної сировини, щоб мінімізувати витрати на пробіг транспорту й перевезення вантажу.
- Припустимо, що на кар’єрі існує можливість задіяти для перевезення вантажів кілька видів транспорту. Необхідно здійснити розподіл кількості вугілля, видобутого в кожній лаві, за відвалами, видами транспорту та перевантажувальними пунктами, тобто визначити, скільки вугілля і яким видом транспорту необхідно перевозити з кожної лави на кожний пункт прийому (відвал, перевантажувальний пункт).
- Проектуючи кар’єр, необхідно вибрати вид кар’єрного транспорту, який забезпечить мінімальні витрати на виконання робіт, за умови, що можливе використання автомобільного й залізничного транспорту та їх комбінацій. До того ж необхідно враховувати об’єм гірничої маси, яку необхідно перевозити, вартість й обсяги перевезення кожним видом транспорту, а в разі їх комбінації – розташування перевантажувального пункту.
- Шахті необхідно відвантажити певний об’єм руди протягом даного терміну, забезпечивши мінімальну кількість у ній домішок, виконання вимог до кондицій сировини, рівномірну завантаженість устаткування та мінімальні транспортні витрати.

Ця задача включає в себе такі підзадачі: планування видобутку корисної копалини з метою забезпечення необхідних вимог до її кондицій та об’єму; планування завантаженості устаткування; оптимізація перевезень.

- Розробка плану будівництва кар’єру з метою якнайшвидшого введення його в експлуатацію.
- Вибір місця розташування збагачувальної фабрики, що обслуговує групу шахт і кар’єрів, з огляду на мінімізацію транспортних витрат і з урахуванням соціальних та екологічних вимог.
- Визначення оптимального плану використання різноманітних ресурсів.
- Планування видобувних робіт й управління ними в режимі усереднення. Задачу даного типу можна сформулювати у такий спосіб:

Корисні копалини, які видобуваються на окремих дільницях гірничого підприємства, мають різний вміст корисних і шкідливих компонентів, у той час як переробні підприємства (збагачувальні фабрики, металургійні заводи, електростанції) висувають до якості сировини досить жорсткі вимоги. Отже, необхідно спланувати видобуток корисної копалини на кожній дільниці таким чином, щоб загальний показник якості продукції відповідав вимогам споживачів, а виробничий процес був найбільш ефективним.

- Розподілити завдання серед вибоїв з урахуванням плану видобутку, пропускної спроможності транспортних колій, потужності лави, необхідності проведення ремонтних і підготовчих робіт.
- Визначити план постачання на центральну збагачувальну фабрику вугілля з різних шахт, виконання якого забезпечить мінімальну вартість перевезень, безперебійну роботу фабрики й належну якість сировини.
- Розробити оптимальний план збагачення руди, яка надійшла з кількох рудників, на одній збагачувальній фабриці.
- Нехай існує обладнання кількох типів, яке можна використовувати на різних виробничих дільницях. Кількість обладнання кожного типу і його продуктивність (на кожній ділянці своя) відомі. Необхідно так розподілити устаткування, щоб загальний час його роботи, витрачений на виконання завдання, був мінімальним.
- Заводи гірничого машинобудування випускають різноманітне обладнання, що використовується в об’єднаннях вугільної промисловості для видобутку вугілля різних марок. Випуск кожного виду виробів потребує певної кількості ресурсів (фінансових, трудових, сировинних, матеріальних) і, відповідно, кожен вид такої продукції має свою собівартість і ціну. В умовах, коли відома максимально можлива та мінімально необхідна кількість обладнання кожного виду, необхідно скласти найкращий план його випуску.
- Транспортування вантажів на підприємствах гірничої промисловості посідає значне місце у вантажообігу країни. Необхідно так спланувати перевезення та (або) будівництво нових гірничих підприємств, щоб транспортні витрати були мінімальними.
- На кар’єрі працює кілька вибоїв. Обсяги робіт на кожному з них відомі. Є також кілька відвалів, приймальна спроможність яких також відома. Потрібно так спланувати перевезення гірничої маси із вибоїв у відвали, щоб транспортні витрати були мінімальними.

- Необхідно вибрати маршрути транспортування вугілля (кожен маршрут характеризується такими параметрами: протяжність, завантаженість, рівень безпеки, наявність технічного обслуговування, заправних станцій та ін.) і розподілити транспортні одиниці між маршрутами, враховуючи наявний парк техніки, можливість залучення додаткових засобів, необхідність виконати замовлення у визначений термін та ін. (*задачі оптимальної організації перевезень*).
- Вибрати обладнання для проведення робіт з урахуванням його вартості, продуктивності, екологічних вимог, кваліфікації персоналу та ін. (*задачі вибору*)
- Розробити проект гірничого підприємства.
- Визначити оптимальні умови технологічних процесів на гірничому підприємстві.
- Розробити оптимальний план гірничих робіт на підприємстві.
- Задачі *розподілу*, наприклад:
  - розподілити екскаватори серед робочих місць (вибоїв, категорій порід) так, щоб мінімізувати витрати на вантажні операції;
  - розподілити машини між маршрутами;
  - розподілити службовців за видами робіт;
  - розподілити верстати серед робітників;
  - розподілити автомашини за екскаваторами.

Усі перелічені задачі, як і багато інших, характеризуються тим, що прийняття рішень у них являє собою свідомий вибір однієї з можливих альтернатив (залежно від конкретного змісту їх називають стратегіями, планами, варіантами) на основі певного принципу (критерію) оптимальності.

Цей вибір робить *особа, яка приймає рішення* (ОПР). У ролі такої особи виступають окремі люди або групи людей, що мають право вибору і несуть відповідальність за його наслідки. Це може бути майстер, диспетчер, начальник зміни (цеху, відділу), керівник підприємства або рада директорів. Беручи за основу наявні дані (у тому числі й математичні розрахунки та дослідження), ОПР вибирає остаточний варіант рішення в межах своєї компетенції.

Отже, будь-який процес прийняття рішень можна охарактеризувати такими елементами:

1. Особа, що приймає рішення.
2. Множина змінних, значення яких вибирає ОПР (варіанти, стратегії, плани, керівні дії).
3. Множина змінних, значення яких залежать від прийнятого рішення (результати, вихідні змінні ситуації прийняття рішень).
4. Множина змінних, значення яких ОПР не регулює (параметри й зовнішнє середовище).
5. Інтервал часу, протягом якого приймаються рішення.

6. Математична модель задачі прийняття рішення, що являє собою множину співвідношень між параметрами, керівними діями й вихідними змінними.

7. Обмеження, що описують вимоги, викликані ситуацією прийняття рішення по відношенню до вихідних змінних задачі та керівних дій.

8. Цільова функція або критерій оптимальності, за допомогою якого оцінюють якість вибраного рішення.

Кожен з цих елементів може характеризуватися різним ступенем невизначеності й залежно від цього можуть формуватись різні класи задач прийняття рішень.

Якщо параметри й зовнішні збурення (тобто вплив середовища) залишаються незмінними в часі, то математична модель буде *статичною*. В іншому випадку модель ситуації прийняття рішень буде динамічною. Опис статичної моделі можна подати у вигляді графіка, таблиці, функціональної залежності або алгоритму обчислення вихідних змінних. Динамічні моделі описують за допомогою різних класів диференціальних або різницевих рівнянь.

Коли зовнішні збурення носять невипадковий характер, то маємо *детерміновану* модель прийняття рішеннь, якщо ж вони є випадковими, то отримуємо *стохастичну* модель. За такої умови вихідні змінні також будуть випадковими, а їхній розподіл буде залежати від розподілу зовнішніх збурень.

У тому разі, коли множина можливих альтернатив і критерій оптимальності цілком визначені, проблема прийняття рішень зводиться до задачі *оптимізації*.

Коли ситуація потребує врахування кількох критеріїв – її описують за допомогою задачі багатокритеріальної оптимізації.

Якщо множину альтернатив визначено, критерій оптимальності невідомий, але відомі відношення переваги, визначені на множині альтернатив, то маємо справу із *задачею вибору*. Це досить поширена ситуація, оскільки кількісно оцінити кожну альтернативу не завжди можливо, але часто можна назвати, яка з двох альтернатив має переваги над іншою стосовно всіх чи кількох їх пар. Тоді ж, коли деякі або всі елементи задачі мають невизначеність типу «*нечіткість»*, то маємо задачі *прийняття рішень у нечітких умовах* (це зокрема задачі нечіткого математичного програмування, задачі вибору в нечітких умовах тощо).

Залежно від класу задачі вибирають і підхід до її розв’язування. Це можуть бути методи оптимізації, лінійного або нелінійного програмування, статистичні методи, аналітичні або числові методи розв’язування рівнянь різних класів.

Отже, у процесі прийняття рішень виникають ситуації, які мають той чи інший ступінь невизначеності, а тому якість рішення залежить від повноти врахування всіх чинників, що впливають на його наслідки. Нерідко ці чинники носять суб’єктивний характер, і це стосується як ОПР, так і самого процесу прийняття рішень. Крім того, орган управління не завжди має у своєму розпорядженні всю інформацію, яка необхідна для його обґрунтованих дій.

Таким чином, можна виділити основні труднощі, що виникають у процесі прийняття рішень, а саме:

1. Наявність великого числа критеріїв, які не завжди погоджені між собою. Наприклад, під час проектування нового пристрою для літального апарата висуваються вимоги мінімальної маси, максимальної надійності й мінімальної вартості. Ці критерії суперечать один одному, тому виникає задача пошуку компромісного рішення, яке б ураховувало всі вимоги.

2. Висока міра невизначеності, зумовлена недостатньою інформацією для обґрунтованого прийняття рішення.

Такі ситуації потребують для свого опису спеціального математичного апарату, який забезпечував би можливість урахування такої невизначеності.

Це можуть бути методи теорії ймовірностей, теорії ігор, статистичних рішень, нечітких множин або якісні методи системного аналізу. Схематично класифікацію задач прийняття рішень за кількістю критеріїв, залежністю від часу, випадкових факторів, а також дані про відповідний їм математичний апарат відображено на рис. 1.1. Схему подано за посібником [4].

1.2. Невизначеність у задачах прийняття рішень

Невизначеність у прийнятті рішень зумовлено недостатньою надійністю й кількістю інформації, на основі якої ОПР здійснює свій вибір.

Наведемо класифікацію невизначеності за типами та причини її виникнення.

1. Принципова невизначеність, зумовлена неможливістю отримати інформацію в принципі, наприклад, на даному рівні розвитку наукових знань.

2. Невизначеність, спричинена загальним числом об'єктів або елементів системи, приміром, коли їх кількість перевищує 10^9.

3. Невизначеність, спричинена браком інформації або її невірогідністю з огляду на технічні, соціальні або інші причини.

4. Невизначеність, породжена занадто високою або недоступною ціною на встановлення визначеності.

5. Невизначеність, яку створює особа, що приймає рішення, унаслідок її некомпетентності, недостатнього досвіду й знань про фактори, які впливають на процес.

6. Невизначеність як наслідок обмежень у системі прийняття рішень (обмеження за часом й елементами простору параметрів, що характеризують фактори прийняття рішень);

7. Невизначеність, спричинена неантагоністичною поведінкою супротивника, який має вплив на процес прийняття рішень.

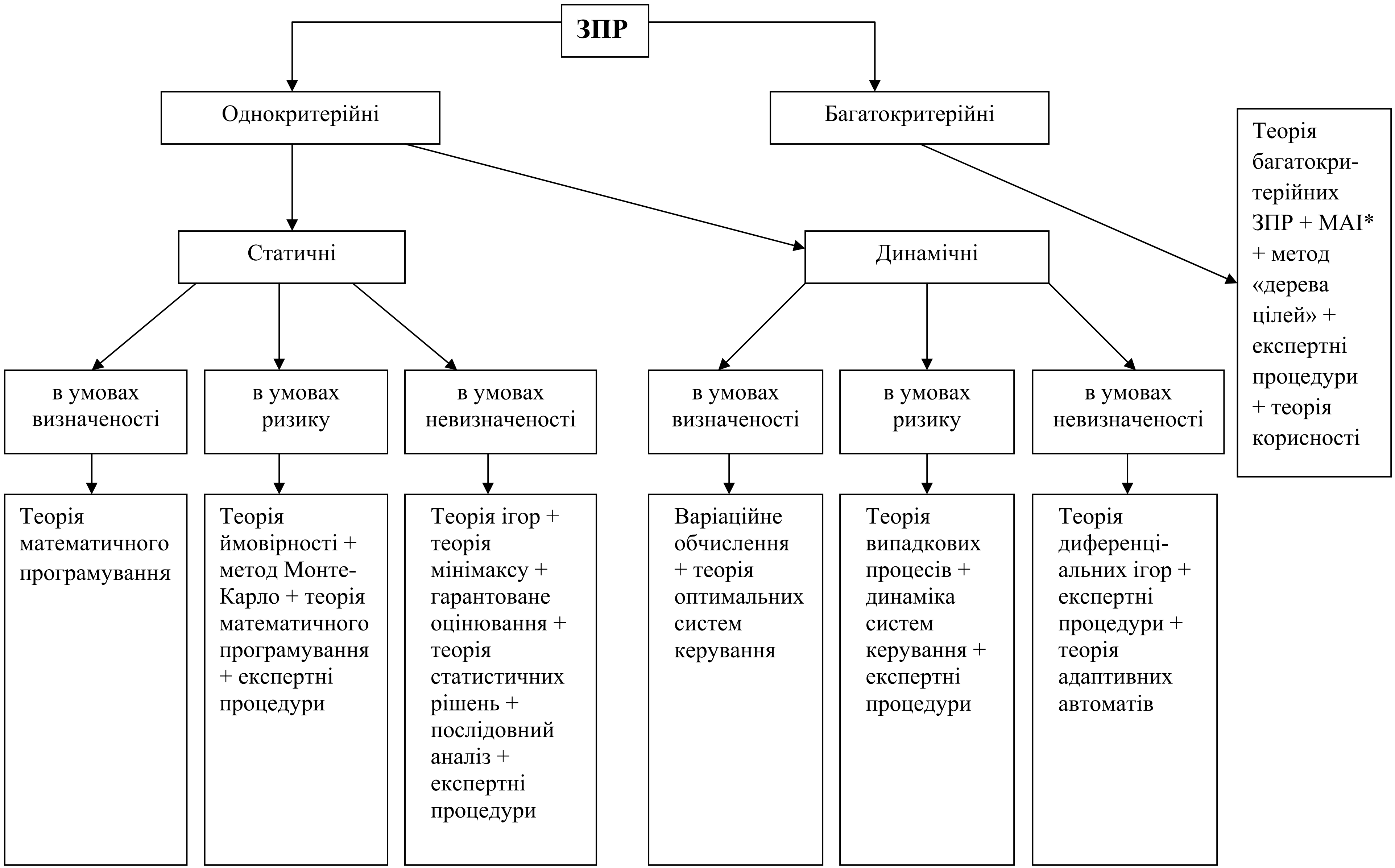


Рис. 1.1. Класифікація задач прийняття рішень і математичний апарат, що застосовується для їх розв’язування

* МАІ – метод аналізу ієрархій.

Інша класифікація типів невизначеності передбачає:

– невідомість,
– неповноту,
– недостатність,
– неадекватність,
– недовизначеність.

Схематично співвідношення між цими типами зображено на рис.1.2.

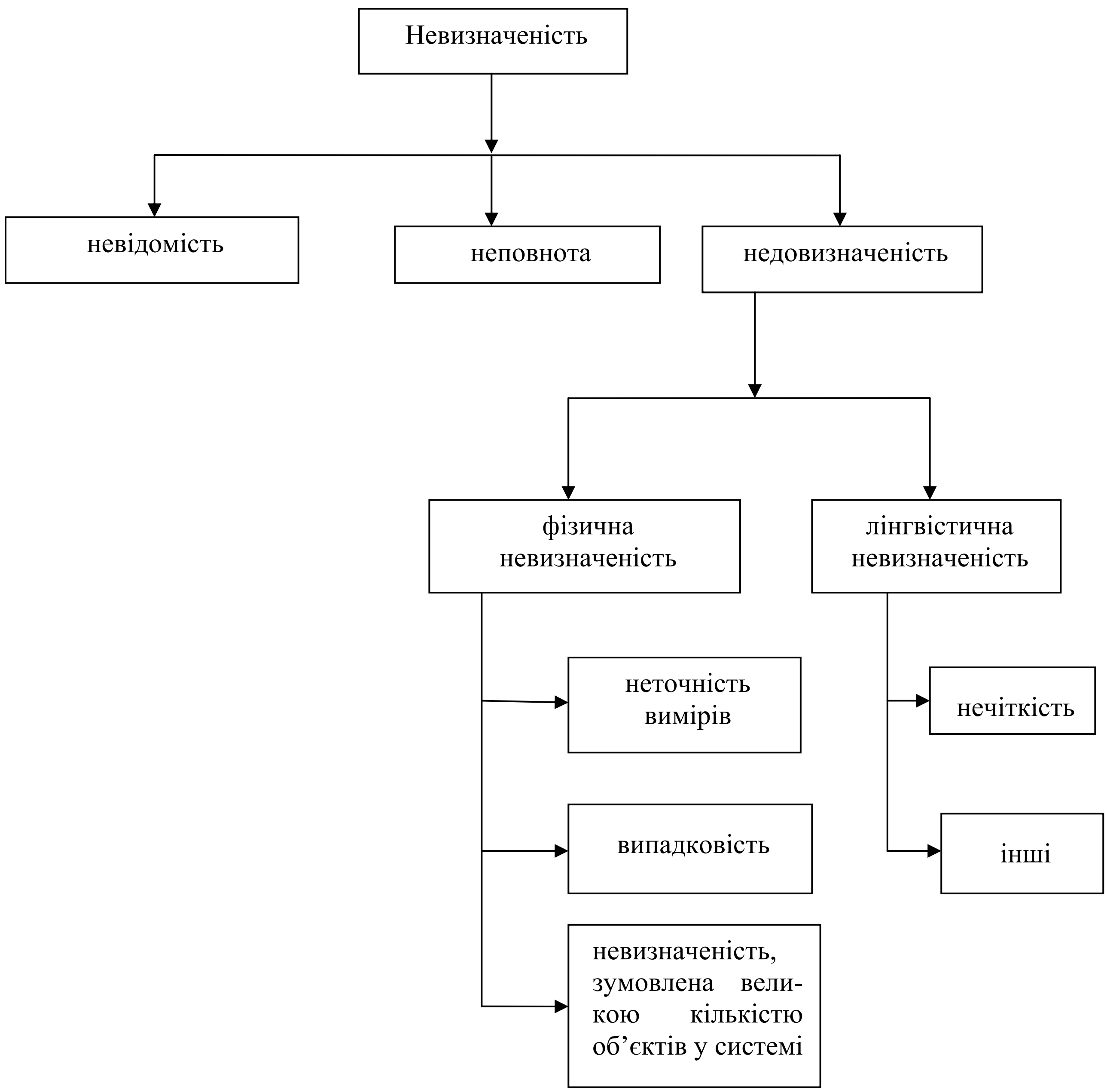


Рис. 1.2. Співвідношення між різними типами невизначеності

1.3. Теоретико-ігровий підхід до прийняття рішень

У теорії прийняття рішень розрізняють кілька підходів, залежно від того, які елементи вважають головними при аналізі процесу прийняття рішень.

Згідно з теоретико-ігровою концепцією, прийняття рішень являє собою вибір кращої альтернативи з множини доступних.

Отже, невід'ємними компонентами такої моделі буде множина альтернатив та опис міркувань особи, яка приймає рішення. Зауважимо, що в реальних задачах альтернативи мають багато властивостей, які впливають на рішення.

Нехай деяка властивість альтернатив з множини Ω описується числом, тобто існує відображення $\varphi:\Omega\to R_1$. Тоді така властивість називається *критерієм*, а число $\varphi(x)$ – оцінкою альтернативи x за критерієм φ.

У задачах прийняття рішень критерії слугують для вираження «інтенсивності» істотних властивостей (ознак) рішень.

За своїм характером вони поділяються на кількісні та якісні. З кожним критерієм пов'язують множину допустимих перетворень Φ і говорять, що цей критерій має шкалу типу Φ.

Критерії, які мають шкалу, не менш досконалу, ніж інтервальна (тобто допустимими їх перетвореннями є множення на додатне число і додавання довільного числа r), називаються *кількісними*.

Критерії, що мають порядкову шкалу (до них віднесено всі монотонно зростаючі функції), називаються *якісними*. Значення якісного критерію має сенс порівнювати з іншими лише за відношеннями «більше», «менше», «дорівнює».

Одночасне врахування окремих властивостей альтернатив може являти собою складний процес. Тоді виділяють групи властивостей, які агрегують у вигляді аспектів.

Аспект – це складена властивість альтернатив, яка одночасно враховує всі властивості, що входять до певної групи. В окремому випадку аспект може бути критерієм.

П р и к л а д 1.1. Транспортній агенції необхідно перевезти заданий обсяг вантажів. Диспетчер має визначити маршрут перевезень.

У цій задачі альтернативами виступають різні маршрути. Диспетчеру необхідно врахувати такі їхні властивості: протяжність (довжина), завантаженість, рівень безпеки, усі витрати, пов’язані з перевезенням, особливості технічного обслуговування та ін.

Поняття «технічне обслуговування» включає в себе кількість і розташування станцій обслуговування, їх потужність, завантаженість і термін виконання ремонтних робіт. Таким чином, ця характеристика являє собою аспект, що агрегує всі перелічені властивості.

Протяжність маршруту вимірюється в кілометрах, тобто виражається числом і тому його можна вважати критерієм.

У загальному випадку величина критерію залежить від двох груп факторів:

– контрольовані (керовані) фактори залежать від ОПР і являють собою її стратегію (вибір);

– неконтрольовані фактори, тобто ті, на які ОПР впливати не може, – це параметри задачі прийняття рішень, вони можуть бути, як зазначено вище, детермінованими, стохастичними або невизначеними.

Значення керованих факторів, зазвичай, лімітується низкою природних умов, наприклад обмеженістю ресурсів. Ці умови є основою формування *обмежень* для задачі прийняття рішень.

Якщо ж у процесі прийняття рішень необхідно враховувати кілька властивостей альтернатив, то виникає проблема багатокритерійного вибору.

Нехай усі властивості k_1, k_2 … , k_m альтернатив, що враховуються при розв'язуванні задачі, є критеріями. Поставимо у відповідність k_j-му критерію j-ту вісь простору R_m ($j = 1, \dots, m$) і відображатимемо множину Ω в цьому просторі, поставивши у відповідність кожній альтернативі $x \in \Omega$ точку: $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$, простору R_m, де φ_j – оцінка за критерієм k_j ($j = 1, \dots, m$).

Критерійним простором називається простір R_m, координати точок якого являють собою оцінки за відповідними критеріями.

Таким чином, у багатокритерійній задачі порівняння альтернатив за перевагами здійснюється шляхом використання заданих на множині Ω числових функцій $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$.

Для кожного критерію φ_j на числовій прямій (осі R_j) описують підмножину Y_j, з якої він набуває значень. Практично множину Y_j визначають відповідно до сенсу цього критерію.

Критерії φ_j (.) називаються частковими, або локальними. Вони утворюють векторний критерій: $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$.

Будемо вважати, що кожна альтернатива x повністю описується відповідною векторною оцінкою, тобто вектором $\varphi(x)$, тому вибір оптимального розв'язку зводиться до визначення оптимальної оцінки з множини досяжних: $Y = Y(x) = \{ y \in R_m \mid y = \varphi(x), x \in X \}$.

У реальних задачах множину Y часто побудувати неможливо, тому розглядається деяка ширша множина $Y' \in R_m$, векторам з якої можна надати певного змісту.

У ситуації, коли наявної інформації недостатньо для кількісної оцінки кожної альтернативи, але стосовно деяких (або всіх) пар альтернатив існує можливість встановити, яка в кожній з них краща, для їх порівняння використовують апарат бінарних відношень.

Висновки

Проблема прийняття рішень – одна з ключових у людській діяльності. Основні труднощі, які виникають у процесі прийняття рішень, – це наявність великого числа неузгоджених між собою критеріїв і висока міра невизначеності, зумовлена браком інформації для обґрунтованого прийняття рішення.

Існують різні підходи до прийняття рішень: теоретико-ігровий, оптимізаційний, статистичний та інші відповілно до того, які елементи вважають головними при аналізі даного процесу.

Методи, які використовують у прийнятті рішень, залежать від природи задачі, наявної інформації та обраного підходу до її розв’язування.

Контрольні питання

1. Наведіть приклади задач прийняття рішень.
2. Дайте визначення критерію, аспекту, принципу оптимальності, обмеження в теорії прийняття рішень.
3. Які проблеми виникають у процесі прийняття рішень?
4. Від яких факторів залежить якість процесу прийняття рішень?
5. За якими ознаками класифікують задачі прийняття рішень?
6. Який математичний апарат застосовується до розв’язування задач прийняття рішень?
7. Які існують типи невизначеності ?
8. Які підходи застосовуються у розв’язуванні некласичних задач прийняття рішень?
9. Які положення включає теоретико-ігровий підхід до прийняття рішень?

Завдання до розділу 1

Завдання А

Опишіть множину допустимих альтернатив, параметри, обмеження та критерії у наведених нижче задачах.

1. Керівникові фірми потрібно вирішити, яку програму для бухгалтерського обліку з тих, що є на ринку (наприклад, 1С, «Парус», С2, «Бухгалтер – 3»; програма, виготовлена на замовлення), необхідно придбати, враховуючи такі чинники: вартість, захищеність інформації, можливість і гнучкість налаштування, вимоги до ресурсів та ін.

2. Серед клієнтів фірми необхідно визначити найперспективнішого для підписання довгострокових договорів.

3. Керівництво заводу вивчає перспективні проекти розвитку підприємства, здійснення кожного з яких вимагає певних ресурсів та врахування певних факторів (кошти, сировина, термін реалізації, кадровий потенціал і т. ін.). Потрібно вибрати для втілення один або кілька проектів.

4. Враховуючи інформацію про наявні на підприємстві основні фонди, кадровий потенціал, сировину, інфраструктуру, а також про партнерів, конкурентів, ринкову кон’юнктуру, вплив державного регулювання, фінансову підтримку, необхідно здійснити вибір напряму його діяльності (розвиток основного виробництва, перепрофілювання, збільшення експорту, можливість виходу на ринки або відмови від них і т. ін.).

5. Визначити, які з корисних копалин доцільно видобувати в даному регіоні (рекомендовані варіанти: вугілля, залізна руда, фосфорити, вапно), враховуючи ефективність і вартість їхнього видобутку.

6. З пункту *А* в пункт *В* щодня вирушають пасажирські й швидкі поїзди. У табл. 1.1 подано відомості про наявний парк вагонів різних типів, з яких можна комплектувати поїзди, і кількість пасажирів, яку можуть перевозити вагони кожного типу. Визначити оптимальне число швидких і пасажирських поїздів, що забезпечує максимальну кількість перевезених пасажирів.

Таблиця 1.1

<table>
<tr><th rowspan="2">Тип вагона</th><th rowspan="2">Парк вагонів</th><th colspan="2">Поїзд</th><th rowspan="2">Кількість пасажирів</th></tr>
<tr><th>швидкий</th><th>пасажирський</th></tr>
<tr><td>Багажний</td><td>12</td><td>1</td><td>1</td><td>–</td></tr>
<tr><td>Поштовий</td><td>18</td><td>1</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>Твердий</td><td>89</td><td>5</td><td>8</td><td>58</td></tr>
<tr><td>Купейний</td><td>79</td><td>6</td><td>4</td><td>40</td></tr>
<tr><td>М'який</td><td>35</td><td>4</td><td>2</td><td>32</td></tr>
</table>

7. У роботі кар’єру можуть бути використані три види комбайнів I, II, і III, які здатні виконувати три види робіт *А*, *В*, і *С*. У табл. 1.2 відображено ресурси робочого часу кожного комбайна, їх продуктивність при виконанні різних робіт і вартість однієї години роботи (у грн). Визначити оптимальне завантаження комбайнів, яке забезпечує максимальний сумарний обсяг виконаних робіт і мінімальну їх собівартість.

Таблиця 1.2

<table>
<tr><th rowspan="2">Вид комбайна</th><th colspan="3">Продуктивність, $м^3$/год</th><th colspan="3">Питома вартість, грн/год</th><th rowspan="2">Ресурс часу</th></tr>
<tr><th>*A*</th><th>*B*</th><th>*C*</th><th>*A*</th><th>*B*</th><th>*C*</th></tr>
<tr><td>I</td><td>30</td><td>20</td><td>40</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>400</td></tr>
<tr><td>II</td><td>20</td><td>30</td><td>50</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>300</td></tr>
<tr><td>III</td><td>60</td><td>40</td><td>20</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>280</td></tr>
</table>

8. На шахті «Добропільська» функціонує три видобувних дільниці. Видобуте на кожній з них вугілля має має різний вміст сірки, різні показники вологості й зольності (табл. 1.3). Стосовно кожної з дільниць відомі значення максимально можливого й мінімально необхідного обсягу видобутку, а також витрати на видобуток однієї тонни сировини (табл. 1.3). Необхідно, з огляду на характеристики вугілля, що видобувається на кожній дільниці, скласти план робіт таким чином, щоб витрати на видобуток були мінімальними, його обсяг максимальним, і виконувалися б усі вимоги споживачів до якості сировини (подано в табл. 1.4).

Таблиця 1.3

Характеристики вугілля, % та показники роботи дільниці	Номер дільниці		
	1	2	3
Зольність	49	37	23
Вологість	7	8	10
Вміст сірки	1,8	2,1	3
Витрати, грн	1184,210	1381,777	1083,515
Максимальний обсяг видобутку, тис. т	1650	1090	1270
Мінімальний обсяг видобутку сировини, тис. т	1200	600	530

Таблиця 1.4

Якість вугілля	Зольність %	Вологість %	Вміст сірки %
Експлуатаційна	39,5	–	–
Середня	–	8,2	2,16
Не більше	47,4	9,8	2,6

9. Авіакомпанія для організації пасажирських перевезень між центром Ц і чотирма містами М1, М2, М3, М4 має у своєму розпорядженні три групи літаків. Перша група складається з 10 чотиримоторних, друга – з 25 двомоторних літаків нового зразка і третя – з 40 двомоторних літаків старого зразка. Дані про кількість пасажирів, що може бути перевезена одним літаком даного типу по кожному маршруту протягом одного місяця, і пов'язані з цим експлуатаційні витрати на 1 літак (тис. грн) відображено в табл. 1.5. Кількість пасажирів, яких потрібно перевозити по кожному маршруту протягом місяця, становить відповідно 40, 50, 40, 30 тис. людей, а вартість одного квитка дорівнює 200, 150, 180 і 300 грн. Необхідно розподілити літаки серед

маршрутів, виходячи з умови досягнення максимального прибутку авіакомпаній та максимальної кількості перевезених пасажирів.

Таблиця 1.5

Тип літака	Кількість пасажирів / експлуатаційні витрати, тис. грн			
	Ц - М1	Ц - М2	Ц - М3	Ц - М4
I	320/1,2	300/0,8	190/1,5	250/1,6
II	200/1,4	250/1,5	170/2,0	260/2,9
III	225/1,0	300/1,1	200/1,8	320/1,7

10. Збагачувальна фабрика отримує 4 види вугілля в таких кількостях: 400, 250, 350 і 100 тис. т. Унаслідок змішування цих чотирьох компонентів у різних пропорціях утворюється три сорти концентрату: A (1 : 1 : 1 : 1), B (3 : 1 : 2 : 1) і C (2 : 2 : 1: 3). Вартість 1 тис. т концентрату дорівнює 120, 100 і 150 грн відповідно. Визначити оптимальний план випуску продукції, що забезпечує досягнення її максимальної сумарної вартості та максимальної кількості.

11. На підприємство надійшло дві партії фанери, причому обсяг першої партії – 400, а другої – 250 листів. З них виготовляються комплекти, що складаються з 4 деталей 1-го типу, 3 деталей 2-го типу й 2 деталей 3-го типу. Один лист фанери з першої партії може розкроюватися трьома способами: $R1$, $R2$, $R3$; фанеру з другої партії можна розкроювати чотирма способами: $R1$, $R2$, $R3$, $R4$. Дані про кількість деталей кожного типу, які можна вирізати з одного листа тим або іншим способом, наведено в табл. 1.6. Необхідно розкроїти наявний матеріал таким чином, щоб забезпечити виготовлення максимального числа комплектів.

Таблиця 1.6

Тип деталей	Кількість деталей, шт.						
	Перша партія			Друга партія			
	$R1$	$R2$	$R3$	$R1$	$R2$	$R3$	$R4$
1-й	0	6	9	6	5	4	0
2-й	5	3	4	5	3	2	6
3-й	12	14	0	7	4	5	7

12. У роботі підприємства може бути задіяно п'ять технологічних процесів ($T1$, $T2$, $T3$, $T4$, $T5$), причому кількість одиниць продукції, випущених із застосуванням кожного з них за одиницю часу, відповідно дорівнює 300, 260, 320, 400 і 450 шт. У технологічному процесі враховуються такі виробничі

чинники: кількість сировини, енергозатрати, витрати на заробітну платню й накладні витрати. Їх величини при роботі протягом одиниці часу в застосуванні до різних технологій зведено в табл. 1.7. Визначити виробничу програму, яка максимізує випуск продукції.

Таблиця 1.7

Виробничі ресурси	Витрати на різні технології					Ліміт ресурсу
	*T*1	*T*2	*T*3	*T*4	*T*5	
Сировина, т	15	20	15	14	18	2000
Електроенергія, квт	0,2	0,3	0,15	0,25	0,3	300
Накладні витрати, грн	4	5	6	3	2	1000
Зарплатня, грн	6	3	4	6	3	1600

13. Механічний завод при виготовленні I, II та III типу деталей використовує токарні, фрезерувальні й стругальні верстати. При цьому обробку деталей кожного типу можна вести трьома різними технологічними способами *T*1, *T*2 і *T*3. У табл. 1.8 подано норми часу для обробки деталі на відповідному верстаті кожним технологічним способом, а також часові ресурси (у верстато-годинах) кожної групи верстатів. Прибуток від продажу кожного виду виробу становить відповідно 22, 18 й 30 грн. Скласти оптимальний план завантаження виробничих потужностей, який забезпечує максимальний прибуток за умови мінімального використання токарних вестатів.

Таблиця 1.8

Тип верстата	Норми часу на обробку деталей, год									Ресурс часу
	I			II			III			
	*T*1	*T*2	*T*3	*T*1	*T*2	*T*3	*T*1	*T*2	*T*3	
Токарний	1	0,9	1,1	1,2	1,5	–	0,9	–	–	200
Фрезерувальний	0,8	0,8	1,3	0,9	1,1	1,3	1,1	0,8	–	400
Стругальний	–	0,7	0,7	0,7	–	1,3	1,3	0,6	–	300

14. Для виготовлення сплаву зі свинцю, цинку та олова певного процентного складу використовується сировина у вигляді п'яти сплавів з тих самих металів, що мають різний склад і вартість (табл. 1.9). Визначити, яку кількість сплаву кожного виду потрібно взяти, щоб виготовити при мінімальній собівартості сплав, який містить олова – від 40 до 60 % і цинку – від 20 до 30 %.

Таблиця. 1.9

Тип сплаву	Вміст металу, %			Питома вартість, грн/кг
	Свинець	Цинк	Олово	
I	25	30	45	8
II	10	80	10	17
III	30	30	40	10
IV	40	25	35	12
V	10	70	20	15

15. Розв'язати задачу 14 з урахуванням додаткових умов, за якими необхідно виготовити максимальну кількість сплаву, а наявні запаси сплавів I – V становлять 20, 25, 15, 30, 20 кг відповідно.

16. Деталі *A*, *B*, *C* можна обробити на трьох верстатах (I, II, III). У табл. 1.10 подано норми витрат часу на обробку верстатом відповідної деталі, витрати на одну годину роботи верстата і граничний час його роботи. Вважаючи, що будь-яка деталь може оброблятися на будь-якому верстаті, визначити оптимальну виробничу програму за одним із таких критеріїв: максимум товарної продукції *T*; мінімальна собівартість продукції *B*.

Таблиця 1.10

Верстати	Норма часу обробки			Витрати на годину роботи, грн	Час роботи верстата, год
	A	*B*	*C*		
I	0,3	0,1	0,2	30	50
II	0,5	0,2	0,4	20	60
III	0,4	0,5	0,3	15	40

17. Використовуючи дані табл. 1.10 і вважаючи, що кожна деталь послідовно обробляється на всіх верстатах, скласти виробничу програму, яка забезпечує максимальний випуск товарної продукції при мінімальних витратах.

Завдання В

Для задач 6 – 17 скласти математичні моделі лінійного програмування (моделі можуть мати як один, так і кілька критеріїв).

РОЗДІЛ 2

ЗАДАЧІ ВИБОРУ

Мета розділу : ознайомлення з апаратом бінарних відношень та його використанням у системах прийняття рішень; вивчення методів прийняття рішень на основі заданих відношень переваги, функцій вибору та функцій корисності; набуття навичок застосування цих методів у практиці.

2.1. Поняття про бінарні відношення

Найпростіша ситуація, у якій можна зробити обґрунтований вибір з кількох об’єктів, виникає, коли подано один “критерій якості”, що дозволяє порівнювати будь-які два об'єкти, точно вказати, який з них кращий, і вибрати той (або ті), для якого цей критерій досягає максимального значення. Однак у більшості реальних ситуацій визначити один такий критерій доволі складно, а інколи взагалі неможливо. Але, розглядаючи деякі пари об’єктів, можна назвати кращий із них. У таких випадках кажуть, що ці два об'єкти перебувають у *бінарному відношенні.* Це поняття дозволяє формалізувати операції попарного порівняння альтернатив, і тому воно широко використовується в теорії прийняття рішень.

Розглянемо деякі вислови, які виражають взаємозв’язки між об’єктами.

1. Тетяна старша за Ігоря.
2. Фірми *A* та *B* збиткові.
3. Київ розташований південніше від Москви.
4. Іван – брат Петра.
5. Залізо важче за воду.

Як бачимо, ці вислови описують відношення різного типу:

Наприклад, другий й четвертий означають, що два об’єкти віднесені до одного й того самого класу; перший, третій й п’ятий – відображають порядок об’єктів у системі. Крім того, у всіх п’яти прикладах чітко виділено назви об’єктів і назви відношень. Легко помітити, що коли замість однієї назви об’єкта поставити іншу, можливі такі ситуації:

1) відношення знову буде виконано (Київ розташований південніше від Мурманська);

2) відношення не буде виконуватися (Київ розташований південніше від Одеси);

3) відношення не буде мати сенсу (залізо розташоване південніше від води).

Отже, говорити про відношення ми можемо тільки тоді, коли вміємо виділяти множину об’єктів, на якій воно визначене.

Математично визначення відношення можна сформулювати таким чином:

В и з н а ч е н н я 2.1. *Відношенням* R на множині Ω називається підмножина декартового добутку $\Omega \times \Omega$, тобто $R \subset \Omega^2$.

Задання підмножини R у множині $\Omega \times \Omega$ визначає, які саме пари елементів перебувають у відношенні R.

Відношення R, задане на множині Ω, позначимо як (R, Ω). Тут і далі записи: $x\,R\,y$ або $(x, y) \in R$, означають, що елементи x та y множини Ω перебувають у відношенні R .

2.2. Способи задання відношень

Для того, щоб задати відношення (R, Ω), необхідно задати всі пари елементів $(x, y) \in \Omega \times \Omega$, які включено в множину R. Крім повного переліку всіх пар, існують три способи задання відношень: за допомогою матриці, графа й розрізів. Перші два способи застосовують, щоб задати відношення на скінченних множинах, задання відношення розрізами може бути застосовано й до нескінченних множин.

Опишемо названі способи задання відношень.

2.2.1. Задання відношення за допомогою матриці. Нехай множина Ω складається з n елементів, R – подане на цій множині бінарне відношення. Пронумеруємо елементи множини Ω цілими числами від 1 до n. Для того, щоб задати відношення, побудуємо квадратну таблицю розміром $n \times n$. Її i-й рядок відповідає елементу x_i множини Ω, j-й стовпець – елементу x_j з множини Ω. На перетині i-го рядка та j-го стовпця ставимо 1, якщо елемент x_i перебуває у відношенні R з елементом x_j, і нуль в інших випадках, а саме:

$$a_{ij}(R) = \begin{cases} 1, & x_i\,R\,x_j, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

П р и к л а д 2.1. Нехай $X = \{1, 2, \ldots, 5\}$, R – відношення “більше” на множині X. Тоді його можна описати у вигляді матриці таким чином:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.2. Задання відношення за допомогою графа. Для того, щоб задати відношення за допомогою графа, поставимо у взаємно однозначну відповідність елементам скінченної множини Ω, на якій визначено відношення, вершини графа $x_1,...,x_n$ (за будь-якою нумерацією).

Провести дугу від вершини x_i до x_j, можна тоді й тільки тоді, коли елемент x_i перебуває у відношенні R з елементом x_j, коли ж $i = j$, то дуга (x_i, x_j) перетворюється на петлю при вершині x_i.

П р и к л а д 2.2. Задамо відношення з прикладу 2.1 за допомогою графа.

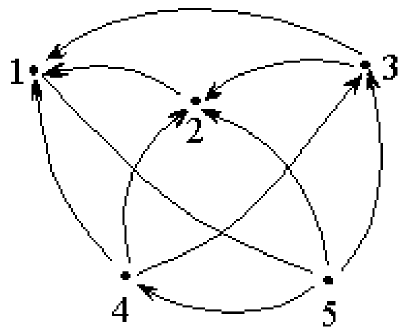


Рис. 2.1. Задання відношення “більше” на множині: $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, за допомогою графа

Отже, коли задано будь-який орієнтований граф G, що має n вершин, і вибрано нумерацію на множині Ω, яка складається з n елементів, то тим самим на цій множині задано деяке відношення: $R = R(G)$, а саме, твердження $x_i\ R\ x_j$ буде справедливим тоді і тільки тоді, коли в графі G наявна дуга (x_i, x_j). Отже, граф виступає як геометричне зображення відношення.

2.2.3. Задання відношень за допомогою розрізів. Розглянемо відношення R на множині Ω.

В и з н а ч е н н я 2.2. *Верхнім розрізом* відношення (R, Ω) в елементі x, позначається через $R^+(x)$, називається множина елементів $y \in \Omega$, для яких виконано умову: $(y, x) \in R$, тобто

$$R^+(x) = \{y \in \Omega | (y, x) \in R\}. \tag{2.1}$$

В и з н а ч е н н я 2.3. *Нижнім розрізом* $R^-(x)$ відношення (R, Ω) в елементі x називається множина елементів $y \in \Omega$, для яких $(x, y) \in R$, а саме:

$$R^-(x) = \{y \in \Omega | (x, y) \in R\}. \tag{2.2}$$

Отже, верхній розріз (множина R^+) являє собою множину всіх таких елементів y, що перебувають у відношенні R з фіксованим елементом x $(y\ R\ x)$.

Нижній розріз (множина R^-) – це множина всіх таких елементів y, з якими фіксований елемент x перебуває у відношенні R $(x\,R\,y)$.

Таким чином, для того, щоб задати відношення за допомогою розрізів, необхідно описати всі верхні або всі нижні його розрізи. Інакше кажучи, відношення R буде задано, якщо для кожного елемента $x \in \Omega$ задано множину $R^+(x)$ або для кожного елемента $x \in \Omega$ задано множину $R^-(x)$.

П р и к л а д 2.3. Нехай задано множину: $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 10\}$. Відношення R означає «бути дільником», тобто $x\,R\,y$, якщо x – дільник y. Задати це відношення можна в такий спосіб:

за допомогою верхніх розрізів:

$R^+(1) = \{1\}$,
$R^+(2) = \{1; 2\}$,
$R^+(3) = \{1; 3\}$,
$R^+(4) = \{1; 2; 4\}$,
$R^+(5) = \{1; 5\}$,
$R^+(6) = \{1; 2; 3; 6\}$
$R^+(7) = \{1; 7\}$,
$R^+(8) = \{1; 2; 4; 8\}$,
$R^+(9) = \{1; 3; 9\}$,
$R^+(10) = \{1; 2; 5; 10\}$;

або за допомогою нижніх розрізів:

$R^-(1) = \{1; 2, ..., 10\}$,
$R^-(2) = \{2; 4, ..., 10\}$,
$R^-(3) = \{3; 6; 9\}$,
$R^-(4) = \{4; 8\}$,
$R^-(5) = \{5; 10\}$,
$R^-(6) = \{6\}$,
$R^-(7) = \{7\}$,
$R^-(8) = \{8\}$,
$R^-(9) = \{9\}$,
$R^-(10) = \{10\}$.

Розглянемо відношення спеціального вигляду та описані вище способи їх задання.

Відношення називається *порожнім* (позначається $\varnothing$), якщо воно не виконується для жодної пари $(x, y) \subset \Omega\times\Omega$.

Для порожнього відношення справедливі такі твердження:

1. У матриці $A(\varnothing)$ величини $a_{i,j}(\varnothing) = 0$ для всіх значень i, j.
2. Граф $G(\varnothing)$ не має дуг.
3. $R^+(x) = R^-(x) = \varnothing$ для всякого елемента $x \in \Omega$.

Відношення називається *повним* (позначається U), якщо воно виконується для всіх пар $(x, y) \subset \Omega\times\Omega$. Для повного відношення правильні такі ознаки:

1. У матриці $A(U)$ величини $a_{i,j}(U) = 1$ для всіх значень i, j.
2. У графі $G(U)$ дуги з'єднують будь-яку пару вершин.
3. Розрізи $R^+(x) = R^-(x) = \Omega$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

Відношення називається *діагональним* або відношенням рівності (позначається E), коли воно виконується для всіх пар $(x, y) \subset \Omega\times\Omega$, які складаються із збіжних елементів. Тобто $x\,E\,y$, якщо x та y – це один і той самий елемент множини Ω. Для діагонального відношення E мають місце такі твердження:

1. У матриці $A(E)$

$$a_{i,j}(E)=\begin{cases}1, \textit{якщо} & i=j,\\ 0\ \textit{в інших випадках.}\end{cases}$$

2. У графі $G(E)$ наявні тільки петлі при вершинах, інші дуги відсутні.
3. Розрізи $R^{+}(x) = R^{-}(x) = x$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

Відношення називається *антидіагональним* (позначається $\overline{E}$), коли воно виконується для всіх пар $(x, y) \subset \Omega\times\Omega$, які складаються із незбіжних елементів. Для відношення $\overline{E}$ справедливі такі ознаки:

1. У матриці $A(E)$

$$a_{i,j}(\overline{E})=\begin{cases}1, \textit{якщо} & i\neq j,\\ 0\ \textit{в інших випадках.}\end{cases}$$

2. У графі $G(\overline{E})$ наявні всі дуги (x_i, x_j), якщо $i \neq j$ (відсутні тільки петлі при вершинах).

3. Розрізи $R^{+}(x) = R^{-}(x) = \Omega \setminus \{x\}$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

2.3. Операції над відношеннями

В и з н а ч е н н я 2.4. Відношення R_1 *включено* у відношення R_2 (записується як $R_1 \le R_2$), коли множину пар, для яких виконується відношення R_1, включено в множину пар, для яких виконується R_2.

Будемо говорити, що відношення R_1 *строго включено* в R_2 $(R_1 < R_2)$, якщо $R_1 \le R_2$ й $R_1 \ne R_2$. Рівність відношень реалізується так само, як і рівність множин.

Для матричного задання відношень буде діяти таке правило: якщо $R_1 \le R_2$, то $a_{ij}(R_1) \le a_{ij}(R_2)$, $i, j = \overline{1,n}$.

П р и к л а д 2.3. R_1 – відношення « $\le$ » на множині дійсних чисел, R_2 – відношення « $<$ » на тій самій множині, тоді $R_2 \le R_1$.

В и з н а ч е н н я 2.5. Відношення $\overline{R}$ називається *доповненням* відношення R, тоді і тільки тоді, коли воно пов’язує тільки ті пари елементів, для яких не виконується відношення R.

Очевидно, що

$$\overline{R} = \Omega^2 \setminus R. \qquad (2.3)$$

З огляду на це в матричному записі $a_{ij}(\overline{R}) = 1 - a_{ij}(R),\ i, j = \overline{1,n}$.

У графі $G(\overline{R})$ наявні ті і тільки ті дуги, що відсутні у графі $G(R)$.

Для розрізів відношення $\overline{R}$ справедливі такі твердження:

$$\overline{R}^+(x) = \Omega \setminus R^+(x),$$

$$\overline{R}^-(x) = \Omega \setminus R^-(x).$$

П р и к л а д 2.4. Нехай R – відношення «$\geq$», задане на множині дійсних чисел, тоді $\overline{R}$ – відношення «$<$», задане на тій самій множині.

В и з н а ч е н н я 2.6. *Перетином* відношень R_1 та R_2 (записується $R_1 \cap R_2$) називається відношення, визначене перетином відповідних підмножин множини Ω^2.

У матричному записі це означає, що

$$a_{ij}(R_1 \cap R_2) = \min\{a_{ij}(R_1), a_{ij}(R_2)\},\ i, j = \overline{1,n}.$$

В и з н а ч е н н я 2.7. *Об'єднанням* відношень R_1 та R_2 (позначається $R_1 \cup R_2$) називається відношення, отримане шляхом об'єднання відповідних підмножин множини Ω^2.

У матричному записі це можна подати таким чином:

$$a_{ij}(R_1 \cup R_2) = \max\{a_{ij}(R_1), a_{ij}(R_2)\},\quad i, j = \overline{1,n}.$$

В и з н а ч е н н я 2.8. *Оберненим* до відношення R називається відношення R^{-1}, яке задовольняє таку умову:

$$x R^{-1} y \Leftrightarrow y R x. \qquad (2.4)$$

Для матриць відношень R та R^{-1} буде мати місце така формула:

$$a_{ij}(R^{-1}) = a_{ji}(R).$$

П р и к л а д 2.5. Нехай R – відношення «$\geq$» на множині дійсних чисел. Тоді оберненим до нього відношенням R^{-1} буде відношення «$\leq$» на множині дійсних чисел.

П р и к л а д 2.6. Нехай відношення R задано на множині: $X = \{x_1,\ x_2,\ x_3, x_4, x_5\}$ такою матрицею:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудувати відповідні йому обернене відношення та доповнення.

Розв'язування

Згідно з визначенням 2.5 доповнення відношення *R* можна задати такою матрицею:

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обернене відношення будуємо за визначенням 2.8, отже,

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В и з н а ч е н н я 2.9. *Добутком* (або *композицією*) відношень R_1 та R_2 (позначається як $R_1 \cdot R_2$) називається відношення, яке будується за таким правилом:

$x\left(R_1 \cdot R_2\right)y$, коли існує елемент $z \in \Omega$, який задовольняє умови $x\,R_1\,z$ та $z\,R_2\,y$.

П р и к л а д 2.7. Розглянемо відношення R_1 та R_2, подані на множині дійсних чисел. Причому, R_1 – відношення «менше», R_2 – відношення «більше». Пара чисел $\left(x, y\right) \subset R_1 \cdot R_2$, коли існує число *z*, для якого виконано такі вимоги: $x < z$ та $z > y$. Вочевидь, ця умова виконується для всіх чисел *x*, *y*, а тому $R_1 \cdot R_2$ – це повне відношення (тобто таке, яким пов'язані всі елементи даної множини).

П р и к л а д 2.8. Нехай множина $X = \{x_1,\ x_2,\ x_3, x_4, x_5\}$, на ній подано два відношення R_1 та R_2, а саме:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначити їх композицію.

Розв'язування

Згідно із визначенням 2.9 $x(R_1 \cdot R_2)y$, коли існує елемент $z \in \Omega$, який задовольняє умови $x\, R_1\, z$ та $z\, R_2\, y$. У матричному записі це означає, що

$$a_{ij}(R_1 \cdot R_2) = \max_{k=\overline{1,n}} \min\{a_{ik}(R_1), a_{kj}(R_2)\},$$

де n – порядок матриці.

Інакше кажучи, композиція відношень обчислюється як максимінний добуток відповідних їм матриць.

Тоді отримуємо такий результат:

$$R_1 \cdot R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В и з н а ч е н н я 2.10. Відношення (R_1, Ω_1) називається *звуженням* відношення (R, Ω) на множину Ω_1, якщо $\Omega_1 \subset \Omega$ та $R_1 = R \cap \Omega_1 \times \Omega_1$. Звуження відношення (R, Ω) на множину Ω_1 називають також відношенням R на множині Ω_1.

П р и к л а д 2.9. Відношення « >» на множині натуральних чисел є звуженням відношення « >» на множині дійсних чисел.

2.4. Властивості відношень

В и з н а ч е н н я 2.11. Відношення R називається *рефлексивним*, якщо $x\, R\, x$ для будь-якого елемента $x \in \Omega$.

Наприклад, відношення «бути схожими», «бути не старшим», «менше або дорівнює» – рефлексивні; «бути братом», «бути старшим», «більше» – не рефлексивні.

У матриці рефлексивного відношення на головній діагоналі розміщуються одиниці, тобто елемент матриці $a_{ij} = 1$, якщо $i = j$.

Граф рефлексивного відношення обов'язково має петлі при вершинах. Стосовно верхнього й нижнього розрізів справедливі твердження: $x \in R^{+}(x)$, $x \in R^{-}(x)$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

Визначення 2.12. Відношення R називається *антирефлексивним*, коли твердження $x\,R\,y$ означає, що $x \neq y$ для $\forall x \in \Omega$.

У матриці антирефлексивного відношення елементи головної діагоналі дорівнюють нулю, тобто $a_{ij} = 0$, якщо $i = j$.

Граф антирефлексивного відношення не має петель при вершинах, а верхні та нижні розрізи задовольняють такі умови: $x \notin R^{+}(x)$, $x \notin R^{-}(x)$ для всіх елементів $x \in \Omega$.

Антирефлексивними будуть відношення «більше», «менше», «бути старшим».

Визначення 2.13. Відношення R називається *симетричним*, якщо $R = R^{-1}$ $(x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x)$.

Матриця симетричного відношення симетрична, тобто $a_{ij} = a_{ji}$ для всіх значень i, j. У графі такого відношення всі дуги парні, а верхні й нижні розрізи збігаються для всіх елементів $x \in \Omega$, тобто $R^{+}(x) = R^{-}(x)$ $\forall x \in \Omega$.

Симетричними є відношення рівності, «бути схожим», «вчитися в одній групі».

Визначення 2.14. Відношення R називається *асиметричним*, якщо $R \cap R^{-1} = \varnothing$ (тобто з двох виразів $x\,R\,y$ та $y\,R\,x$ хоча б один не відповідає дійсності).

У матриці асиметричного відношення $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$ для всіх значень i, j, тобто з двох симетричних елементів a_{ij} і a_{ji} хоча б один обов'язково дорівнює 0.

Асиметричними, наприклад, є відношення «більше» та «менше».

Зауважимо, що антирефлексивність – це обов'язкова умова асиметричності.

Визначення 2.15. Відношення R називається *антисиметричним*, якщо твердження $x\,R\,y$ та $y\,R\,x$ можуть бути правильними одночасно тоді і тільки тоді, коли $x = y$.

У матриці антисиметричного відношення $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$, коли $i \neq j$.

Прикладами антисиметричних будуть відношення «більше або дорівнює», «не більше», «не гірше».

Визначення 2.16. Відношення R називається *транзитивним*, якщо $R^2 \leq R$ (тобто, коли з тверджень $x\,R\,z$ та $z\,R\,y$ випливає, що $x\,R\,y$).

Транзитивними є відношення «більше або дорівнює», «менше», «бути старшим», «вчитися в одній групі».

Умова: $R^2 \leq R$, дає зручний спосіб перевірки транзитивності відношення в разі, коли відношення задано за допомогою матриці. Для цього необхідно обчислити матрицю відношення R^2 (тобто піднести в квадрат матрицю вихідного відношення) і перевірити умову. Якщо $a_{ij}\left(R^2\right) \le a_{ij}(R)$ для всіх значень i, j, то відношення транзитивне. Коли ж цю умову порушено хоча б для однієї пари індексів i, j, то відношення не буде транзитивним.

В и з н а ч е н н я 2.17. Відношення R називається *ациклічним*, якщо $R^k \cap R^{-1} = \varnothing$, тобто з умов $x\,R\,z_1$, $z_1\,R\,z_2$, ... , $z_{k-1}\,R\,y$ випливає, що $x \neq y$.

Це означає, що граф такого відношення не містить циклів.

В и з н а ч е н н я 2.18. Відношення R називається *від'ємно транзитивним*, якщо його доповнення $\overline{R}$ транзитивне.

В и з н а ч е н н я 2.19. Відношення R називається *сильно транзитивним*, якщо воно одночасно транзитивне і від'ємно транзитивне.

Властивості ациклічності й транзитивності відіграють особливу роль у теорії прийняття рішень, оскільки вони виражають природні взаємозв'язки між об'єктами. Дійсно, якщо об'єкт x у деякому сенсі не гірший за об'єкт y, а об'єкт y в тому самому сенсі не гірший за об'єкт z, то природно чекати, що об'єкт x буде не гіршим від об'єкта z (транзитивність), і в будь-якому разі об'єкт z не кращий за об'єкт x (ациклічність).

П р и к л а д 2.10. Визначити властивості такого відношення:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування

Дане відношення є рефлексивним (оскільки його матриця містить на головній діагоналі тільки одиниці), воно не буде симетричним (оскільки серед симетричних елементів є такі, що не дорівнюють один одному, наприклад елементи a_{12} та a_{21}). Оскільки елемент $a_{13} = a_{31}$, то відношення не буде також асиметричним й антисиметричним.

Для перевірки його транзитивності помножимо дане відношення на себе, тобто

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $R^2 \not\subset R$, отже вихідне відношення не є транзитивним.

2.5. Відношення еквівалентності, порядку, домінування й переваги

В и з н а ч е н н я 2.20. Відношення R є відношенням *еквівалентності* (*еквівалентністю*), якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне. Позначимо його R_e , або символом $\sim$.

Прикладами відношеннями еквівалентності будуть такі:

– «учитися на одному курсі», «учитися в одній групі», задані на множині студентів факультету;

– «мати однакову остачу при діленні на 3» на множині натуральних чисел;

– відношення подібності на множині трикутників та інші.

Характерним для еквівалентності є те, що вона розподіляє елементи на класи. У першому прикладі – це курси або групи студентів факультету, у другому – множини чисел, що мають однакову остачу при діленні на 3, у третьому – множини подібних трикутників. Отже, задання еквівалентності на множині тісно пов'язане з її розбиттям на неперетинні підмножини. Розглянемо цю властивість еквівалентності докладніше.

Нехай задано деяке розбиття множини Ω, тобто відомо її підмножини Ω_1, Ω_2, … Ω_N, які задовольняють умову: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i$, причому $\Omega_i \bigcap \Omega_j = \varnothing$, коли $i \neq j, \quad i, j, = 1, 2, \ldots N$. Уведемо на множині Ω відношення R таким чином: $x\ R\ y$ тоді і тільки тоді, коли існує множина Ω_i, що відповідає таким умовам: $x \in \Omega_i$ і $y \in \Omega_i$.

З а в д а н н я. Доведіть, що уведене таким чином відношення являє собою еквівалентність.

Як бачимо, задання еквівалентності на деякій множині Ω рівносильне розбиттю цієї множини на класи еквівалентних між собою елементів. І навпаки, будь-яке розбиття множини Ω визначає на ній відповідну йому еквівалентність.

В и з н а ч е н н я 2.21. Відношенням *нестрогого порядку* «$\leq$» (*нестрогим порядком*) називається відношення, що має властивості рефлексивності, антисиметричності й транзитивності.

В и з н а ч е н н я 2.22. Відношенням *строгого порядку* «<» (*строгим порядком*) називається відношення, яке має властивості антирефлексивності, асиметричності й транзитивності.

Якщо на множині Ω задано відношення «$\leq$», тобто деякий нестрогий порядок, то йому можна поставити у відповідність строгий порядок «<» , що визначається за таким правилом: $x < y$ тоді і тільки тоді, коли $x \leq y$ та $x \neq y$. І навпаки, якщо «<» – відношення строгого порядку, задане на множині Ω, то йому можна поставити у відповідність відношення «$\leq$» таким чином: $x \leq y$ тоді і тільки тоді, коли $x < y$ або $x = y$. Отже, за нестрогим порядком ми можемо визначити відповідний йому строгий порядок і навпаки.

Припустимо, що на деякій множині задано відношення порядку (для всіх, або деяких пар її елементів), тоді кажуть, що на цій множині задано *частковий порядок.*

Частковий порядок на множині Ω називається *лінійним порядком*, якщо для будь яких елементів $x, y \in \Omega$ справедливе одне з трьох тверджень: $x < y$, $x = y$ або $x > y$ (тобто ми можемо порівняти будь-які два елементи множини Ω).

В и з н а ч е н н я 2.23. Відношенням *домінування* називається відношення, що має властивості антирефлексивності й асиметричності.

Будемо говорити, що елемент x *домінує* над елементом y, якщо x в якому-небудь сенсі кращий за y.

Таким чином, відношення строгого порядку являє собою окремий випадок відношення домінування, для якого характерна ще й транзитивність. У загальному ж сенсі при домінуванні як транзитивність, так і ациклічність можуть не мати місця.

В и з н а ч е н н я 2.24. Два елементи можна порівняти за відношенням R, коли $x\,R\,y$ або $y\,R\,x$. В інших випадках елементи *непорівнянні*.

Якщо R – повне відношення на множині Ω, то будь-які два елементи цієї множини можна порівняти.

Розглянемо які порядки можна задати на m-вимірному просторі E_m:

1. $a \geq b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i \geq b_i$, $i = 1,2,\dots m$;
2. $a \geq b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i \geq b_i$, $i = 1,2,\dots m$, та $a \neq b$;
3. $a > b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i > b_i$, $i = 1,2,\dots m$;
4. $a \mathrel{\overline{>}} b$ тоді і тільки тоді, коли $a = b$ або $a_i > b_i$ хоча б для одного значення $i \in \{1,2,\dots m\}$;
5. $a = b$ тоді і тільки тоді, коли $a_i = b_i$, $i = 1,2,\dots m$.

Відношення 1 являє собою частковий порядок, воно рефлексивне, антисиметричне й транзитивне).

Відношення 2 і 3 – це строгі часткові порядки. Вони антирефлексивні, асиметричні й транзитивні.

Відношення 4 є рефлексивним, але воно не буде ні симетричним ні транзитивним.

Зв'язок між цими відношеннями схематично зображено на рис. 2.2.

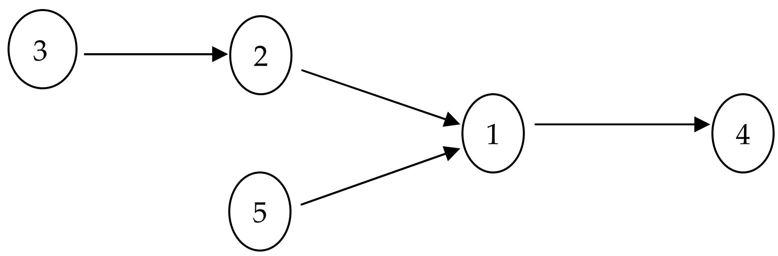


Рис. 2.2. Схема взаємозв’язку між відношеннями в просторі E_m

Для опису переваги зазвичай використовують такі бінарні відношення, задані на множині альтернатив Ω: строгої переваги, байдужості та нестрогої переваги.

Відношення строгої переваги R^S означає, що один об'єкт (строго) переважає над іншим (тобто один об'єкт кращий від іншого).

Відношення байдужості R^I означає, що об'єкти однакові за перевагами, і коли обмежити вибір цими двома об'єктами, не важливо, який з них буде вибрано.

Відношення нестрогої переваги означає, що один об'єкт не менш переважний, ніж інший (тобто один об'єкт не гірший від іншого).

Припустимо, що за допомогою ОПР або експертів було визначено відношення нестрогої переваги *R* на множині допустимих альтернатив *X*.

Це означає, що відносно будь-якої пари альтернатив $(x, y) \subset X \times X$ можлива одна із таких ситуацій:

1) об'єкт *x* не гірший від об'єкта *y*, тобто $x > y$, інакше кажучи $(x, y) \in R$;

2) об'єкт y не гірший за об'єкт x, тобто $y \geq x$, або $(y, x) \in R$;

3) об'єкти *x* та *y* не порівнянні між собою, тобто $(x, y) \notin R$ та $(y, x) \notin R$.

Ця інформація дозволяє звузити клас варіантів раціонального вибору, включивши в нього лише ті альтернативи, над якими не домінує жодна інша альтернатива множини *X*.

Щоб пояснити це поняття, визначимо відповідні відношенню переваги *R* відношення строгої переваги R^S і відношення однаковості (байдужості) *I*.

Будемо говорити, що альтернатива x строго краща від альтернативи *y* (має строгу перевагу над альтернативою *y*), якщо одночасно $x \geq y$ та $y \neq x$, тобто

$$(x, y) \in R \quad \text{і} \quad (y, x) \notin R .$$

Сукупність усіх таких пар назвемо *відношенням строгої переваги* R^S на множині *X*.

Легко переконатись, що це відношення має задовольняти такі властивості:

1) антирефлексивність,

2) асиметричність.

Для більш компактного запису відношення R^S використаємо визначення відношення R^{-1}, оберненого до *R*, а саме, врахуємо, що $(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$.

Тоді відношення строгої переваги може бути записано в такому вигляді:

$$R^S = R \setminus R^{-1}.$$

Відношення однаковості, що відповідає відношенню переваги *R*, можна визначити таким чином: $(x, y) \in R^I$ тоді і тільки тоді, коли або не виконується жодна з умов: $x \geq y$ і $y \geq x$, або одночасно мають місце обидві: $x \geq y$ та $y \geq x$. Інакше кажучи, $(x, y) \in R^I$, коли інформація, яку ми маємо, недостатня для обґрунтованого вибору між альтернативами x та y.

Математично відношення R^I можна записати такою формулою:

$$R^I = \left[(X \times X) \setminus \left(R \bigcup R^{-1}\right)\right] \cup \left(R \bigcap R^{-1}\right).$$

Легко упевнитись, що чим більше інформації про реальну ситуацію або процес, тим вужчим виявляється відношення однаковості.

Уведені відношення розмістимо у табл. 2.1.

Таблиця 2.1

№	Назва відношення	Властивість					
		Рефлексивність	Антирефлексивність	Симетричність	Асиметричність	Антисиметричність	Транзитивність
1	Перевага	+					
2	Строга перевага	+			+		
3	Подібність	+		+			
4	Еквівалентність	+		+			+
5	Строгий порядок		+		+		+
6	Нестрогий порядок	+				+	+
7	Домінування		+		+		

П р и к л а д 2.11. Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, на ній подано відношення нестрогої переваги, тобто

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Побудувати відповідні йому відношення еквівалентності, строгої переваги, однаковості.

Розв'язування

Згідно з визначенням, $R^e = R \bigcap R^{-1}$. Побудуємо спочатку обернене відношення R^{-1}, а саме

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо відношення еквівалентності, тобто

$$R^e = R \bigcap R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Як видно з цієї матриці, елементи x_1, x_4 еквівалентні.

Тепер відповідно до визначення знайдемо відношення R^S таким чином:

$$R^S = R \setminus R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Це означає, що елемент x_1 строго переважає елемент x_2, елемент x_2 в свою чергу переважніший за x_4, елемент x_3 переважає x_2, а x_4 кращий від x_3 відповідно.

Відношення байдужості знаходимо за такою формулою:

$$R^I = \left[(X \times X) \setminus \left(R \bigcup R^{-1}\right)\right] \cup \left(R \bigcap R^{-1}\right).$$

Матриця цього відношення набуває такого вигляду:

$$R^I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Це відношення означає, що серед елементів $\{x_1, x_3\}$, $\{x_1, x_4\}$, $\{x_3, x_4\}$ можна вибирати будь-який, тобто інформації для того, щоб здійснити обґрунтований вибір між елементами кожної пари, недостатньо.

Коли $(x,y) \in R^S$, то будемо говорити, що альтернатива x *домінує* над альтернативою y $(x > y)$.

В и з н а ч е н н я 2.25. Альтернативу $x \in X$ назвемо *недомінованою* на множині X за відношенням *R*, якщо $(y,x) \notin R^S$, $\forall y \in X$. Тобто якщо альтернатива *x* – недомінована, то в множині *X* не має жодної альтернативи, яка домінувала б над альтернативою *x*.

У наведеному вище прикладі недомінованою виявилась альтернатива x_1.

Якщо деякі альтернативи у певному сенсі недоміновані, то їх вибір у задачах прийняття рішень доречно вважати раціональним у межах наявної інформації.

Таким чином, інформація у формі відношення переваги дозволяє звузити клас раціональних рішень на множині X до множини недомінованих альтернатив, яка має такий вигляд:

$$X^{н.д.} = \left\{ x \;\middle|\; x \in X,\ (y,x) \in R \setminus R^{-1}, \forall x \in X \right\}.$$

2.6. Поняття *R*-оптимальності, найкращого, найгіршого, максимального й мінімального елементів

Розглянутий вище матеріал мав на меті дати формальний опис попарного порівняння альтернатив, що є необхідною умовою для виділення найкращого елемента (або кількох кращих) з усієї множини альтернатив *X.* Тепер формалізуємо саме поняття «кращий», використавши для цього апарат бінарних відношень.

Елемент x^* множини *X* будемо називати *найкращим* за відношенням *R*, якщо $x^* \; R \; x$ справедливе для всякого елемента $x \in X$.

Елемент $x_* \in X$ будемо називати *найгіршим* за відношенням *R*, якщо $x \; R \; x_*$ для всіх $x \in X$.

Легко впевнитись, що найкращий і найгірший елементи існують не завжди. Зокрема, їх не буде, коли відношення не є повним, як у наведеному нижче прикладі.

П р и к л а д 2.12. Розглянемо множину: $B = \{a,b,c\}$, і відношення *R* на ній, яке подано таким чином: $R = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c)\}$. Визначити найкращі та найгірші за даним відношенням елементи множини *B*, якщо такі існують.

Зобразимо описане відношення за допомогою графа (див. рис. 2.3)

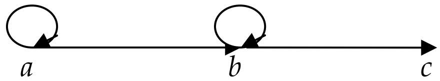


Рис. 2.3. Граф відношення *R* (до прикладу 2.12)

Як бачимо, це відношення не має найкращих і найгірших елементів, бо елементи *a* та *c* непорівнянні.

Уведемо поняття максимального елемента.

Елемент $x_{\max}$ називається *максимальним* за відношенням R^S на множині *X*, якщо для аби якого елемента $x \in X$ має місце твердження $x_{\max} R^S x$ або $x_{\max}$ непорівнянний з *x*.

Іншими словами, не існує елемента (альтернативи) $x \in X$, який був би кращим за альтернативу $x_{\max}$.

Множина максимальних за відношенням *R* елементів множини *X* позначається як $\max_R X$.

Елемент $x_{\min}$ називається *мінімальним* відносно R^S на множині *X*, якщо для всіх $x \in X$ або $x R^S x_{\min}$, або *x* буде з ним непорівнянним. Отже не існує елемента $x \in X$ який був би гіршим за $x_{\min}$; немає жодного елемента *x*, над яким би домінував елемент $x_{\min}$.

У наведеному вище прикладі максимальним буде елемент *a*, мінімальним – елемент *c*.

Множина мінімальних за відношенням *R* елементів множини *X* позначається як $\min_R X$.

Зауважимо, що коли найкращі елементи існують, то вони будуть і максимальними, а протилежна ситуація не буде справедливою.

Отже, якщо треба обрати найкращу в деякому сенсі альтернативу, то природним буде її вибір із множини максимальних (недомінованих) альтернатив.

П р и к л а д 2.13. Нехай відношення *R* подано у вигляді графа *G* (рис. 2.4). Знайти найкращі, найгірші, максимальні та мінімальні за відношенням R^S елементи.

Розв'язування

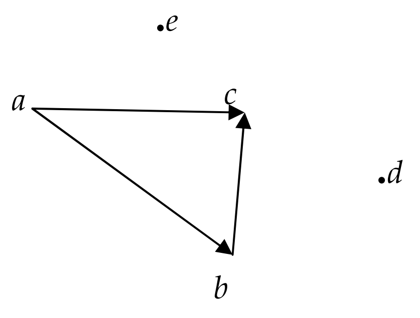


Рис. 2.4. Граф відношення *R* (до прикладу 2.13)

Найкращих елементів не існує, оскільки елемент *e* не порівнянний з іншими; найгірших елементів також немає. Максимальними за відношенням R^S є елементи *a*, *d*, *e*. Мінімальними – *c*, *d*, *e*.

Зверніть увагу, що елементи *d*, *e* – максимальні й мінімальні одночасно. Це пояснюється тим, що вони непорівнянні з іншими, тобто в нас немає інформації про переваги цих елементів.

Множина $\max_R X$ максимальних за відношенням R об'єктів множини X є *внутрішньо стійкою* в тому сенсі, що коли $a,b \in \max_R X$, то не може виконуватись жодне з тверджень: $a\,R\,b$ та $b\,R\,a$.

Множина називається *зовнішньо стійкою*, якщо для кожного немаксимального елемента $a \in X$ знайдеться більш переважний від нього елемент серед максимальних, тобто буде справедливим твердження: $a^0 R\, a$ для деякого елемента $a^0 \in \max_R X$.

Внутрішньо та зовнішньо стійка множина $\max_R X$ називається *ядром* відношення R у множині X.

Поняття стійкості має велике значення, бо якщо множина $\max_R X$ зовнішньо стійка, то оптимальний елемент має бути вибраний саме з цієї множини. Якщо ж вона не є зовнішньо стійкою, то для обмеження нею вибору немає підстав.

Коли виникає потреба вибрати не один, а кілька кращих елементів або впорядкувати всі об'єкти за перевагами, то поняття максимального елемента і ядра відношення втрачають своє значення.

П р и к л а д 2.14. Припустимо, що множина $B = \{a,b,c\}$, і на ній задано відношення: $R = \{(a,c)\}$. Тут множина максимальних елементів $\max_R B = \{a,b\}$. Однак при виборі двох кращих елементів не можна не брати до уваги наявність елемента *c,* оскільки якщо з'явиться інформація, що він переважніший, ніж *b*, то шуканими будуть елементи *a* та *c*.

Числова функція φ, визначена на множині X називається *зростаючою* (*неспадною*) за відношенням *R*, коли з умови $a\ R\ b$ випливає, що $\varphi(a) > \varphi(b)$ [відповідно $\varphi(a) \geq \varphi(b)$] для всіх елементів $a,b \in X$.

Має місце таке твердження:

Лема 2.1. Нехай множина $B \subseteq A$ та елемент $a^0 \in B$ надає неспадній за відношенням R на множині B функції Ψ найбільшого на ній значення. Тоді, для того, щоб об'єкт a^0 був максимальним за відношенням R на множині *B*, достатньо виконання однієї з таких умов:

1. Ψ зростає за відношенням *R* на множині *B*.
2. $a^0 \in B$ – єдина точка максимуму функції Ψ на множині *B*.

Доведення

Припустимо, що елемент a^0 не є максимальним за відношенням *R*, тоді в множині *B* знайдеться елемент *a*, який переважає a^0 за відношенням *R*, тобто $a\,R\,a^0$. Але в цьому разі має виконуватись строга нерівність: $\Psi(a) > \Psi(a^0)$, оскільки функція Ψ зростає за відношенням *R* на множині *B*. Але строга нерівність суперечить тому, що елемент a^0 – точка максимуму функції Ψ, а нестрога нерівність: $\Psi(a) \geq \Psi(a^0)$ – тому що a^0 являє собою єдину точку максимуму Ψ на множині *B*. Доведення закінчено.

При моделюванні реальних систем можуть мати місце такі ситуації, коли в ОПР або в експертів немає чіткого уявлення про переваги між альтернативами, але їм конче необхідно подати конкретні висновки про те, які з альтернатив є кращими. У цьому випадку експерти змушені певним чином "огрубляти" свої знання та уявлення, і відповідна математична модель буде менш адекватною реальній ситуації.

Більш гнучким способом формалізації таких уявлень є можливість для експертів визначити міру свого переконання в перевазі альтернативи використовуючи числа з інтервалу [0;1], тобто описати свої міркування за допомогою *нечіткого відношення переваги*, коли кожній парі альтернатив (x, y) відповідає число з інтервалу [0,1], яке відображає міру правильності переваги: $x \geq y$. Методи прийняття рішень на основі нечітких відношень переваги буде розглянуто далі в розділі 5.

Зауважимо, що характерна особливість «мови» бінарних відношень – це припущення про те, що результат порівняння за перевагами двох елементів не залежить від складу всієї множини. Однак у деяких випадках така залежність має місце, і для її врахування необхідна більш багата «мова» опису переваг, основана на використанні функцій вибору.

2.7. Поняття функції вибору. Класи функцій вибору

У реальних ситуаціях вибору на множині альтернатив Ω особа, що приймає рішення, вибирає деяку альтернативу, керуючись своєю особистою думкою про кращі альтернативи. У різних людей уявлення про одну й ту саму ситуацію можуть істотно відрізнятися, але логічно припустити, що в схожих умовах одна й та сама людина буде діяти однаково, і тому є можливість сформулювати правило, за яким буде здійснено вибір.

Розглянемо таку ситуацію: нехай Ω – множина альтернатив, серед яких проводиться вибір, а множини альтернатив *X* являють собою її підмножини.

Позначимо через $C(X)$ множину альтернатив, яку виділяє ОПР, з множини *X*.

Наприклад, Ω – множина всіх груп у вищому навчальному закладі, *X* – довільна підмножина Ω (це може бути множина груп III курсу, множина груп факультету і под.). Вважатимемо, що $C(X)$ – найкраща група з множини груп *X*. Незалежно від того, хто приймає рішення (вибирає найкращу групу) природно вважати, що найкраща група закладу буде найкращою групою свого курсу, свого факультету тощо.

Математично це можна записати так: якщо $X' \subset X$ і $x \in C(X) \cap X'$, то $x \in C(X')$.

Отже, всілякий вибір у конкретній ситуації можна вважати логічно обґрунтованим, якщо відомі рішення в інших ситуаціях, пов’язаних із даною. Це означає, що множини $C(X)$ виявляються залежними при різних множинах

X, якщо вибір здійснює одна й та сама ОПР. Для формалізації цієї залежності використовують поняття функції вибору.

Функцією вибору $C(X)$ називається відображення, яке ставить у відповідність кожній множині $X \subset \Omega$ її підмножину $C(X) \subset X$.

Множину $C(X)$ будемо інтерпретувати як найбільш переважні альтернативи з множини X.

Зауважимо, що в цьому визначенні немає ніяких апріорних обмежень на функції вибору, зокрема не виключена можливість пустого вибору, тобто ситуації, коли $C(X) = \varnothing$. Ця ситуація називається *відмовою від вибору*. Її прикладом може бути випадок, коли покупець йде з магазину, нічого не купивши.

В окремому випадку, зокрема, коли відоме відношення строгої переваги R на множині альтернатив, функцію вибору можна визначити такою рівністю:

$$C(X) = \max_R X.$$

П р и к л а д 2.15. Нехай на множині: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ матрицею задано відношення переваги R, а саме:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Побудувати відповідну цьому відношенню функцію вибору.

Розв'язування

Побудуємо відношення строгої переваги: $R^S = R \setminus R^{-1}$, яке відповідає даному відношенню:

$$R^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер задамо функцію вибору за таким правилом: $C(X) = \max_R X$. Для цього розглянемо всі можливі підмножини даної множини $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ і визначимо максимальні елементи за звуженням відношення R на відповідні підмножини.

Розглянемо спочатку одноелементні підмножини. Вибір із одного елемента буде тим самим елементом, тому

$$C(\{x_1\}) = \max_R \{x_1\} = x_1,$$

$$C(\{x_2\}) = \max{}_R \{x_2\} = x_2,$$

$$C(\{x_3\}) = \max{}_R \{x_3\} = x_3,$$

$$C(\{x_4\}) = \max{}_R \{x_4\} = x_4$$

Далі розглянемо двоелементні підмножини. Звуження даного відношення на множину $\{x_1, x_2\}$ дає можливість зробити висновок, що елемент x_1 більш переважний, ніж x_2, тому максимальним елементом для цієї множини буде x_1, і тоді

$$C(\{x_1, x_2\}) = \max{}_R \{x_1, x_2\} = x_1.$$

Аналогічно для інших двоелементних множин

$$C(\{x_1, x_3\}) = \max{}_R \{x_1, x_3\} = \{x_1, x_3\}, \quad C(\{x_1, x_4\}) = \max{}_R \{x_1, x_4\} = \{x_1, x_4\},$$

$$C(\{x_2, x_3\}) = \max{}_R \{x_2, x_3\} = \{x_3\}, \qquad C(\{x_2, x_4\}) = \max{}_R \{x_2, x_4\} = \{x_2, x_4\},$$

$$C(\{x_3, x_4\}) = \max{}_R \{x_3, x_4\} = \{x_4\}$$

і так само

$$C(\{x_1, x_2, x_3\}) = \max{}_R \{x_1, x_2, x_3\} = \{x_1, x_3\},$$

$$C(\{x_1, x_2, x_4\}) = \max{}_R \{x_1, x_2, x_4\} = \{x_1, x_4\},$$

$$C(\{x_1, x_3, x_4\}) = \max{}_R \{x_1, x_3, x_4\} = \{x_1, x_4\},$$

$$C(\{x_2, x_3, x_4\}) = \max{}_R \{x_2, x_3, x_4\} = \{x_4\},$$

$$C(X) = C(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = \max{}_R \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x_1, x_4\}.$$

Отже, функцію вибору задано.

Зауважимо, що існують також інші способи задання функцій вибору.

Таким чином, за відношенням переваги ми можемо побудувати функцію вибору, але не для всякої функції вибору існує відповідне їй відношення переваги.

П р и к л а д 2.16. Функцію вибору задано таким чином:

$$C(\{x_1\}) = x_1, \qquad C(\{x_2\}) = x_2, \qquad C(\{x_3\}) = x_3,$$

$$C(\{x_1, x_2\}) = x_1, \qquad C(\{x_1, x_3\}) = \{x_1, x_3\},$$

$$C(\{x_2, x_3\}) = \{x_2\}, \qquad C(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{x_1, x_3\}.$$

Як бачимо, дві останні умови суперечать одна одній, тому відношення побудувати неможливо.

П р и к л а д 2.17. Функцію вибору задано таким чином:

$C(\{x_1\}) = x_1$, $\quad C(\{x_2\}) = x_2$, $\quad C(\{x_3\}) = x_3$,

$C(\{x_1, x_2\}) = x_1$, $\quad C(\{x_1, x_3\}) == \{x_1, x_3\}$, $\quad C(\{x_2, x_3\}) = \{x_3\}$,

$C(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{x_1, x_3\}$.

Відповідним даній функції буде таке відношення строгої переваги:

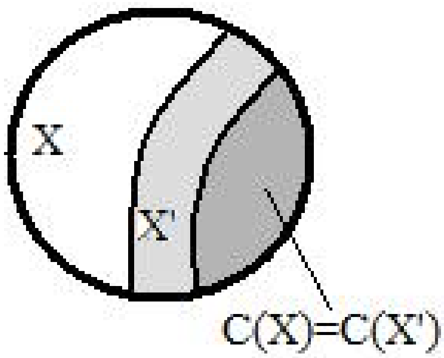
$$R^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

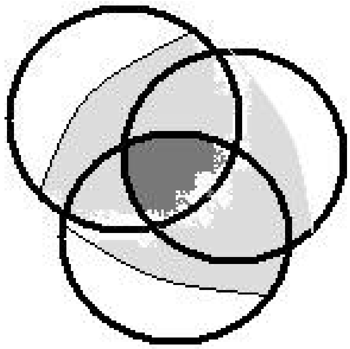
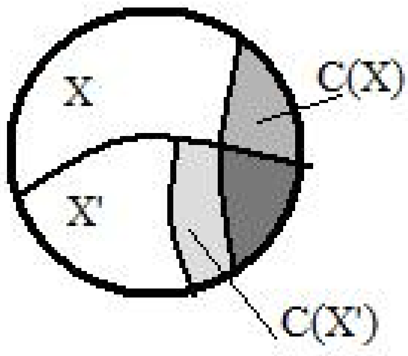
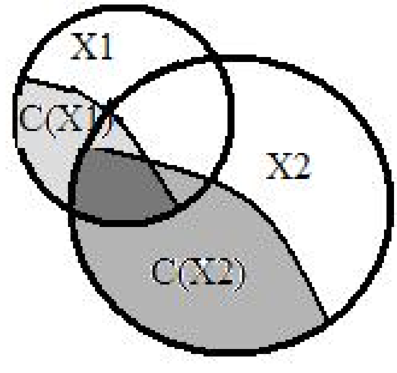
Функції вибору зручно класифікувати відповідно до тих умов, які зазвичай використовують при їх вивченні.

Приклади таких умов наведено в таблиці 2.2.

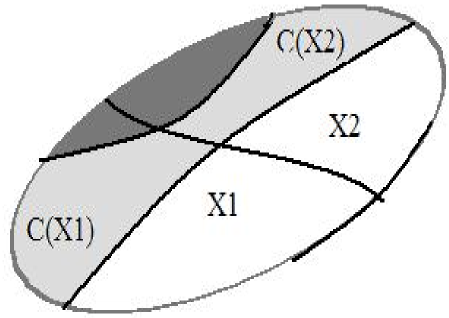
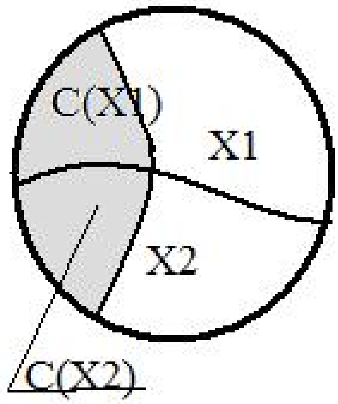
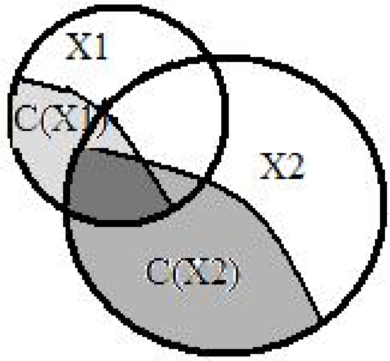
Таблиця 2.2

Класифікація функцій вибору

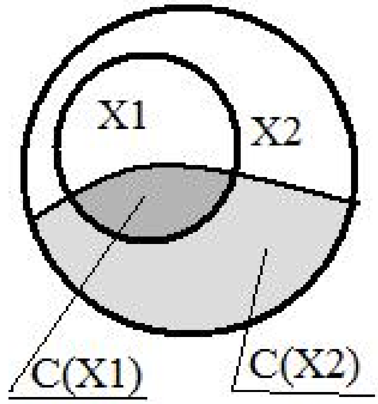
1. Умова незалежності від нехтуваних альтернатив	
Якщо $C(X) \subset X' \subset X$, то $C(X) = C(X')$. Зміст цієї умови такий: коли розглянути довільну множину X', яка містить усі альтернативи, вибрані з множини *X*, то вибір з X' буде такий самий, як і вибір з множини *X* Наприклад, коли під час конкурсу проект *x* не був включений до кращих, то в іншому конкурсі, де беруть участь усі ті проекти, що й у попередньому, за винятком *x*, склад переможців не зміниться	

<table>
<tr><td colspan="2">2. Умова згоди</td></tr>
<tr><td>$\bigcap\limits_{i} C(X_i) \subset C\left(\bigcup\limits_{i} X_i\right)$
Ця умова означає, що альтернативи, які були вибрані з кожної множини X_i, будуть вибрані також і з їх об’єднання</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Умова наслідування</td></tr>
<tr><td>Якщо $X' \subset X$, то $C(X') \supset C(X) \bigcap X'$
Сенс цієї умови такий: якщо розглянути вибір з довільної множини і вибір з деякої її підмножини, то всі альтернативи, які були вибрані з вихідної множини і ввійшли до підмножини, що розглядається, будуть також вибрані з цієї підмножини. Наприклад, якщо проводився міжнародний конкурс і переможцем став проект з Болгарії, то він повинен бути і серед переможців болгарського конкурсу</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Умова мультиплікаторності</td></tr>
<tr><td>$C(X_1 \cap X_2) = C(X_1) \cap C(X_2)$
За цієї умови вибір із перетину двох множин буде дорівнювати перетину виборів</td><td>
</td></tr>
</table>

Продовження табл. 2.2

5. Умова Плотта (незалежність від вибору шляху)	
$C(X_1 \cup X_2) = C(C(X_1) \cup C(X_2))$ Умова Плотта передбачає, що вибір альтернатив із об'єднання виборів, які в свою чергу зроблені з кожної множини, точно відповідає вибору із об'єднання виборів, які зроблені з кожної множини окремо Наприклад, для проведення міжнародного конкурсу можна спочатку відібрати переможців національних конкурсів, а потім вже влаштовувати змагання серед них	
5. Умова суматорності	
$C(X_1 \cup X_2) = C(X_1) \cup C(X_2)$ Ця умова означає, що вибір з об'єднання множин дорівнює об'єднанню виборів з кожної множини окремо Наприклад, на районній дошці пошани відзначено людей, обраних у різних організаціях	
6. Умова мультиплікаторності	
$C(X_1 \cap X_2) = C(X_1) \cap C(X_2)$ За цієї умови вибір із перетину двох множин буде дорівнювати перетину виборів	

Закінчення табл. 2.2

7. Умови монотонності	
Якщо $X_1 \subset X_2$, то $C(X_1) \subset C(X_2)$, тобто вибір з більш широкої множини буде ширшим	

2.8. Функції корисності

Для порівняння різних альтернатив і вибору найкращої з них також можна використовувати деяку кількісну міру їхніх властивостей, за значеннями якої можна порівняти альтернативи між собою та вибрати найкращу. Правила (процедури) прийняття рішень на основі цієї міри використовують теорію корисності, розроблену Дж. фон Нейманом і О. Моргенштерном [26]. Математичною основою даної теорії виступає система аксіом, у яких стверджується існування деякої міри цінності, що дозволяє впорядкувати альтернативи (результати рішень). Така міра називається *функцією корисності*, або *корисністю* результатів.

Практичне застосування теорії корисності ґрунтується на таких аксіомах:

1. Результат (альтернатива) x_i є кращою за альтернативу x_j (записується $x_i > x_j$), тоді і тільки тоді, коли $u(x_i) = f(x_i) > u(x_j)$, де $u(x_i)$ і $u(x_j)$ – значення корисності альтернатив x_i і x_j відповідно.

2. Якщо $x_i > x_j$, а $x_j > x_k$, то $x_i > x_k$, і $u(x_i) > u(x_k)$ (транзитивність).

3. Якщо x_1, x_2 – деякі альтернативи, то $u(x_1, x_2) = u(x_1) + u(x_2)$ (адитивність).

Аналогічно, коли є n результатів $x_1, x_2, \ldots x_n$, які досягаються одночасно, то

$$U(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} u_s(x).$$

Іншими словами, корисність кількох результатів, які досягаються одночасно, дорівнює сумі значень їхньої корисності.

Визначимо із застосуванням понять функції корисності (цільової функції) $f(x)$ такі відношення на множині альтернатив X:

– відношення слабкої (нестрогої) переваги «не гірше», яке позначається символом $\geq$,

– відношення рівноцінності, що позначається символом $\sim$,

– відношення строгої переваги, що позначається символом $>$.

В и з н а ч е н н я. Для двох альтернатив x_1, x_2 можна стверджувати, що

$x_1 \geq x_2$, тоді і тільки тоді, якщо $f(x_1) \geq f(x_2)$;

$x_1 \sim x_2$, тоді і тільки тоді, коли $f(x_1) = f(x_2)$;

$x_1 > x_2$, тоді і тільки тоді, якщо $f(x_1) > f(x_2)$.

Символи $\geq$ і $<$ при порівнянні значень цільових функцій для різних альтернатив беруться залежно від того, чи вважається кращою альтернатива при більшому або меншому значенні цільової функції.

Методика визначення корисності можливих результатів розроблена в посібнику [1].

Розглянемо кілька варіантів застосування цієї методики в різних ситуаціях.

I. Н а я в н і т і л ь к и д в а р е з у л ь т а т и.

У цьому разі методика обчислення корисності така:

1. Встановлюємо, який результат є кращим для особи, що приймає рішення. Припустимо, що $x_1 > x_2$, тобто альтернатива x_1 краща, ніж альтернатива x_2.

2. Потім визначаємо таку ймовірність α, при якій досягнення результату x_1 буде еквівалентне результату x_2, отриманому з імовірністю 1.

3. Оцінюємо співвідношення між значеннями корисності результатів x_1 і x_2.

Для цього приймемо, що корисність $u(x_2) = 1$,

тоді $\alpha u(x_1) = u(x_2)$; $u(x_1) = 1/\alpha$.

II. І с н у є n м о ж л и в и х а л ь т е р н а т и в $x_1, x_2, \ldots x_n$, між якими встановлено переваги: $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$.

У цьому випадку методика визначення корисності така:

1. Визначаємо величину α_1 із умови, що $\alpha_1 u(x_1) = u(x_2)$.

2. Аналогічно обчислюємо, що

$$\alpha_2 u(x_2) = u(x_3);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{n-1} u(x_{n-1}) = u(x_n).$$

3. Вважаючи, що корисність найменш переважного результату дорівнює 1, знаходимо значення корисності для інших результатів, а саме:

$$u(x_n) = 1;$$

$$u(x_{n-1}) = 1/\alpha_{n-1};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u(x_1) = \frac{1}{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1}.$$

III. Н а я в н і я к і с н і к р и т е р і ї. За таких умов маємо інформацію про переваги між окремими альтернативами та їхніми групами. Тоді може застосовуватися методика, побудована на алгоритмі, який запропонували Р. Акоф і Р. Черчмен [1].

Припустимо, що існує n альтернатив: x_1, x_2, … x_n. Методика визначення корисності передбачає такі етапи:

1. Упорядковують усі альтернативи за зменшенням переваги. Нехай x_1 – альтернатива, що має найбільшу перевагу, а x_n – альтернатива, перевага якої найменша.

2. Складають таблицю можливих комбінацій результатів, що досягаються одночасно, і тоді встановлюють їхню перевагу над окремими результатами $x_1, x_2, \ldots x_n$ (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

1	x_1 або $x_2 + x_3 + \ldots + x_n$	$n + 1$	x_2 або $x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1}$
2	x_1 або $x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1}$	$n + 2$	x_2 або $x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-2}$
3	x_1 або $x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-2}$	$n + 3$	x_2 або $x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-3}$
…	…	…	…
n	x_2 або $x_3 + x_4 + \ldots + x_n$	N	x_{n-2} або $x_{n-1} + x_n$

Інформацію про переваги результатів зазвичай отримують від експертів.

3. Приписують початкові оцінки корисності окремим результам $u_0(x_1)$, $u_0(x_2)$, ... , $u_0(x_n)$. Потім початкові оцінки підставляють в останнє співвідношення табл. 2.2. Якщо воно задовольняється, то оцінки не змінюють.

У протилежному випадку проводять корекцію корисності так, щоб дане співвідношення задовольнялось.

Після цього переходять до наступного співвідношення. Процес корекції триває до тих пір, поки не утвориться система оцінок $u^*(x_1)$, $u^*(x_2)$, … $u^*(x_n)$, яка задовольнятиме всі перелічені в таблиці співвідношення. Корекцію належить проводити таким чином, щоб було необхідно змінювати мінімальну кількість оцінок результатів.

П р и к л а д 2.18. Нехай експерт упорядковує п'ять результатів $x_1, x_2, \dots x_5$, приписавши їм такі оцінки: $u_0(x_1) = 7$; $u_0(x_2) = 4$; $u_0(x_3) = 2$; $u_0(x_4) = 1{,}5$; $u_0(x_5) = 1$.

Розглянувши можливі варіанти вибору, він висловив такі думки про цінність тих чи інших комбінацій варіантів:

1) $x_1 < x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
2) $x_1 < x_2 + x_3 + x_4$;
3) $x_1 > x_2 + x_3 + x_5$;
4) $x_1 > x_2 + x_3$;
5) $x_2 < x_3 + x_4 + x_5$;
6) $x_2 > x_3 + x_4$;
7) $x_3 > x_4 + x_5$.

Потрібно оцінити корисність результатів так, щоб задовольнити всі нерівності.

Для розв'язування цієї задачі підставляємо початкові оцінки в нерівність 7, тобто

$$u_0(x_3) = 2 < u_0(x_4) + u_0(x_5) = 2{,}5.$$

Отже, нерівність 7 не задовольняється.

Змінимо корисність результату x_3: $u_1(x_3) = 3$, і перевіримо нерівність 6. Отже,

$$u_0(x_2) = 4 < u_1(x_3) + u_0(x_4) = 4{,}5.$$

Ця нерівність також не задовольняється.

Задамо, що $u_1(x_2) = 5$, тоді нерівність 5 задовольняється.

Звертаємося до нерівності 4:

$$u_0(x_1) = 7 < u_1(x_2) + u_1(x_3) = 8.$$

Вона не виконується, тому приймемо, що $u_1(x_1) = 8{,}5$. Тепер нерівності 3, 2, 1 задовольняються.

Перевіряємо ще раз нерівності 6 і 7 при змінених значеннях корисності альтернатив:

$$5 > 3 + 1{,}5,$$
$$3 > 1{,}5 + 1.$$

Таким чином, обидві нерівності виконуються.

Отже, випишемо остаточні оцінки корисності результатів:

$$u_1(x_1) = 8{,}5;\ u_1(x_2) = 5;\ u_1(x_3) = 3;\ u_1(x_4) = 1{,}5;\ u_1(x_5) = 1.$$

Зауважимо, що описану методику визначення корисності можна застосовувати, коли кількість результатів обмежена, а саме, $n < 6$ або 7.

У випадках, коли $n > 7$, запропоновано модифікований спосіб корекції оцінок [1].

Множину альтернатив розбивають на підмножини, що складаються з 5 – 7 альтернатив і мають один спільний результат, наприклад x_1. Потім приписують початкові значення корисності всім альтернативам, причому корисність спільного результату x_1 має бути однаковою у всіх підмножинах. Далі застосовують спосіб корекції оцінок корисності окремо до кожної з підмножин, враховуючи обмеження: $u(x_1) = \text{const}$. Унаслідок цього отримують систему корисності з єдиною мірою для всіх підмножин $u(x_1)$.

Після того, як відповідно до описаної методики функцію корисності всіх альтернатив визначено, вирішальне правило вибору найкращої з них в умовах визначеності записується таким чином: знайти таку альтернативу x_0, щоб $f(x_0) = \max f(x)$

Очевидно, що цільова функція, на підставі якої проводиться вибір шуканої альтернативи, може бути побудована різними способами.

В и з н а ч е н н я. Цільові функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$, що характеризують одну й ту саму властивість рішення, яке вибирається, і визначені на одній множині допустимих альтернатив, називатимемо *еквівалентними*, якщо вони задають на ній одне й те саме відношення слабкої переваги, тобто, коли для будь-яких двох альтернатив x_1 і x_2 з твердження: $x_1 \overset{f_1}{\geq} x_2$, випливає, що $x_1 \overset{f_2}{\geq} x_2$ і, навпаки, коли з твердження: $x_1 \overset{f_2}{\geq} x_2$ виходить, що $x_1 \overset{f_1}{\geq} x_2$. Тут індекс f_i над знаком слабкої переваги вказує на функцію, за допомогою якої це відношення задано.

Із цього визначення виходить, що еквівалентні цільові функції задають на множині X одні й ті самі відношення строгої переваги й еквівалентності. Доведена нижче проста теорема встановлює, які властивості мають задовольняти еквівалентні цільові функції [22].

Т е о р е м а 2.1. Для того, щоб цільові функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ були еквівалентними, достатнє існування монотонного перетворення $w(z)$, здатного переводити область значення функції $f_2(x)$ в область значень функції $f_1(x)$, тобто $f_1(x) = w(f_2(x))$ для всієї множини допустимих альтернатив. При цьому, якщо обидві цільові функції максимізувалися, то перетворення $w(z)$ повинне являти собою монотонно зростаючу функцію, а якщо ні, то $w(z)$ має бути монотонно спадною функцією.

Доведення

Розглянемо випадок, коли критерії максимізуються і перетворення $w(z)$ – монотонно зростаюче, оскільки інші випадки доводяться аналогічно. Тоді, якщо $x_1 \overset{f_2}{\geq} x_2$, тобто $f_2(x_1) \geq f_2(x_2)$, то $w(f_2(x_1)) \geq w(f_2(x_2))$. Отже, $x_1 \overset{f_1}{\geq} x_2$.

Твердження: $x_1 \overset{f_2}{\geq} x_2$, випливає з того, що $x_1 \overset{f_1}{\geq} x_2$ через монотонність оберненого перетворення.

Теорему доведено.

Наведемо приклади еквівалентних максимізованих цільових функцій:

$$f_1(x) = af_2(x) + b, \quad \text{де } a > 0,$$

$$f_1(x) = ln\, f_2(x) + b, \ \text{якщо } f_2(x) > 0.$$

Висновки

Поняття бінарного відношення дозволяє формалізувати операції попарного порівняння об’єктів і математично обґрунтувати вибір одного або кількох об’єктів у тому разі, коли неможливо задати критерій на множині альтернатив, але можна оцінити переваги однієї альтернативи над іншою.

Бінарні відношення можна задавати за допомогою матриці, графа, або розрізів. До них застосовують операції перетину, об’єднання, доповнення та інші.

У теорії прийняття рішень важливе значення мають такі властивості відношень як рефлексивність, симетричність (асиметричність), транзитивність.

Функції вибору використовуються для задання правил вибору альтернатив. Залежно від природи задачі такі функції можуть мати різні властивості. Користуючись даним відношенням переваги, можна побудувати відповідну йому функцію вибору, але не навпаки.

Функції корисності являють собою кількісну міру, за допомогою якої можна порівняти альтернативи між собою.

Контрольні питання

1. Дайте визначення бінарного відношення.
2. Які існують способи задання відношень?
3. Яким чином можна задати відношення за допомогою матриці?
4. Як можна задати відношення у вигляді графа?
5. Яким чином задають відношення за допомогою розрізів?
6. Сформулюйте визначення верхнього (нижнього) розрізу відношення.
7. Які із способів задання відношень можна використовувати на нескінченній множині елементів?
8. Які математичні операції виконують над відношеннями?
9. Яке відношення називається рефлексивним (антирефлексивним)?
10. Яке відношення називається симетричним, антисиметричним, асиметричним?
11. Які відношення називають транзитивними, сильно транзитивними, від’ємно транзитивними?
12. Яким чином обчислюють транзитивне замикання відношення?
13. Які властивості характерні для відношення переваги?

14. Дайте визначення найкращого (найгіршого) елемента множини.

15. Який елемент множини називається мінімальним (максимальним) за даним відношенням переваги?

16. Яке значення в теорії прийняття рішень мають поняття найкращого, найгіршого, максимального й мінімального елементів? Де вони використовуються?

17. Дайте визначення відношень еквівалентності, байдужості, переваги, домінування.

18. Як за даним відношенням нестрогої переваги побудувати відповідні йому відношення строгої переваги, байдужості, еквівалентності?

19. Що означає властивість зовнішньої та внутрішньої стійкості множини?

20. Дайте визначення функції вибору.

21. Як можна побудувати функцію вибору за даним відношенням переваги?

22. Чи завжди за даною функцією вибору можна побудувати відповідне їй відношення переваги?

23. За якими властивостями класифікують функції вибору?

24. Наведіть приклади умов, за якими класифікують функції вибору.

25. Що означає умова наслідування? Суматорності? Плотта?

26. Що являє собою функція корисності?

27. Яким чином визначають корисність альтернатив за даними перевагами?

28. Сформулюйте алгоритм побудови функції корисності на множині альтернатив, коли присутні якісні критерії.

29. Які цільові функції називають еквівалентними?

30. Які властивості мають задовольняти еквівалентні цільові функції ?

31. Наведіть приклади еквівалентних перетворень цільових функцій.

Завдання до розділу 2

Завдання А

1. Відношення задано у вигляді матриці. Задати його за допомогою: *а*) графа; *б*) верхніх розрізів; *в*) нижніх розрізів.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Відношення задано у вигляді матриці. Задати його за допомогою: *а*) графа; *б*) верхніх розрізів; *в*) нижніх розрізів.

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Задати відношення «менше або дорівнює» на множині цілих чисел від одного до десяти за допомогою матриці.

4. На множині: $X = \{a, b, c, d\}$, відношення R задано за допомогою графа (рис. 2.5). Задати його: *а*) матрицею; *б*) верхніми розрізами; *в*) нижніми розрізами.

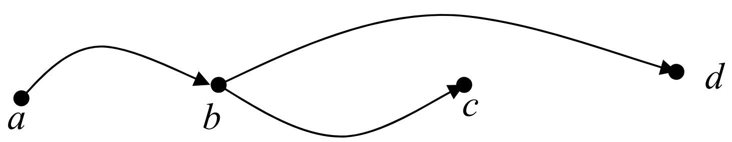


Рис. 2.5. Граф відношення R

5. На множині: $X = \{a, b, c, d\}$, відношення R задано за допомогою графа (рис. 2.6). Задати його: *а*) матрицею; *б*) верхніми розрізами; *в*) нижніми розрізами.

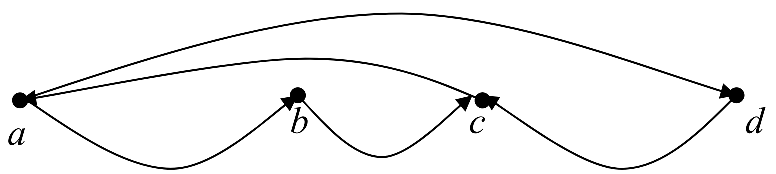


Рис. 2.6. Граф відношення R

6. Перевірити властивості записаних нижче відношень.

а) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; *б*) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$$в)\ R=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix};\qquad г)\ R=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}.$$

7. Користуючись умовами завдання 6, *а – г*, визначити додаткові та обернені відношення.

8. Визначити перетин та об'єднання поданих нижче відношень.

$$R_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix};\qquad R_2=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}.$$

9. Користуючись умовами завдання 6, *а – г*, побудувати відношення строгої переваги, еквівалентності, байдужості.

10. Знайти найбільший, найменший, максимальний і мінімальний елементи за відношеннями із завдання 6, *а – г* (якщо такі існують).

11. Побудувати функцію вибору за даним відношенням переваги.

$$а)\ R=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix};\qquad б)\ R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

12. Оцінити корисність результатів за даними перевагами, якщо $x_1 > x_2 > \ldots > x_5$ і задано переваги результатів: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 1{,}5$.

13. Побудувати відношення переваги, відповідне записаній нижче функції вибору (якщо це можливо).

$а)\ C(\{a\})=\{a\}, C(b)=\{b\}, C(\{c\})=\{c\}, C(\{a,b\})=\{b\}, C(\{a,c\})=\{a\},$
$C(\{b,c\})=\{b\}, C(\{a,b,c\})=\{c,b\};$

$б)\ C(\{a\})=\{a\}, C(b)=\{b\}, C(\{c\})=\{c\}, C(\{a,b\})=\{a\}, C(\{a,c\})=\{a\},$
$C(\{b,c\})=\{b\}, C(\{a,b,c\})=\{a\}.$

14. Нехай експерт упорядковує п'ять результатів $x_1, x_2, \dots x_5$, приписавши їм такі оцінки: $u_0(x_1) = 10$; $u_0(x_2) = 5$; $u_0(x_3) = 3$; $u_0(x_4) = 2$; $u_0(x_5) = 1$.

Розглянувши можливі варіанти вибору, він висловив такі думки про цінність тих чи інших комбінацій варіантів:

$x_1 \le x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;

$x_1 \ge x_2 + x_3 + x_4$;

$x_1 \ge x_2 + x_3 + x_5$;

$x_1 \ge x_2 + x_3$;

$x_2 \ge x_3 + x_4 + x_5$;

$x_2 \ge x_3 + x_4$;

$x_3 \le x_4 + x_5$.

Оцініть корисність результатів.

15. Нехай експерт упорядковує п'ять результатів $x_1, x_2, \dots x_5$, приписавши їм такі оцінки: $u_0(x_1) = 8$; $u_0(x_2) = 6$; $u_0(x_3) = 2$; $u_0(x_4) = 1{,}5$; $u_0(x_5) = 1$.

Розглянувши можливі варіанти вибору, він висловив такі думки про цінність тих чи інших комбінацій варіантів:

$x_1 \le x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
$x_1 \le x_2 + x_3 + x_4$;
$x_1 \le x_2 + x_3 + x_5$;
$x_1 \ge x_2 + x_3$;
$x_2 \ge x_3 + x_4 + x_5$;
$x_2 \ge x_3 + x_4$;
$x_3 \le x_4 + x_5$.

Оцініть корисність результатів вибору.

Завдання В

1. Опишіть за допомогою матриці відношення «об'єкт x вживає в їжу об'єкт y» на множині: A = {людина, тигр, шуліка, щука, баран, газель, пшениця, кабан, конюшина, польова миша, змія, жолудь, карась}. Які властивості характерні для даного відношення? Чи можна його назвати відношенням переваги? Еквівалентністю? Відношенням порядку?

2. Задайте за допомогою матриці або графа відношення «операція x має виконуватись після операції y» на множині ремонтних робіт. Які властивості характерні для даного відношення? Чи можна його назвати відношенням переваги? Еквівалентністю? Відношенням порядку?

РОЗДІЛ 3

БАГАТОКРИТЕРІЙНІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ

Мета розділу: вивчення особливостей задач прийняття рішень при наявності багатьох критеріїв; оволодіння методами багатокритерійної оптимізації.

3.1. Загальна постановка багатокритерійної задачі оптимізації

Як вже було сказано вище, однією із проблем у прийнятті рішень є наявність великого числа критеріїв, котрі не завжди погоджені між собою, що зумовлює побудову відповідних математичних моделей і застосування певних математичних методів. Одним із способів формалізації таких проблем є використання багатокритерійних оптимізаційних моделей.

У даному розділі будуть розглянуті скінченновимірні багатокритерійні задачі, тобто ті, у яких множина допустимих альтернатив X належить скінченновимірному простору E_m і задано векторний критерій, тобто

$$f(x) = (f_1(x), \dots f_M(x)).$$

Множина X зазвичай виділяється з деякої ширшої множини D за допомогою спеціальних обмежень, які найчастіше подають у вигляді нерівностей, а саме:

$$X = \{x \in D | g_1(x) \geq 0, \dots, g_k(x) \geq 0\},$$

де g_i $(i = 1, 2, \dots k)$ – числові функції, визначені на множині D, що утворюють вектор-функцію обмежень.

Залежно від структури множини X (або D) і властивостей цільових функцій $f_j(x)$ (а також g_i) для зручності дослідження виділяють різні класи багатокритерійних задач. Якщо множина X скінченна, то задача називається скінченною, коли ж ця множина скінченна або ж лічена, то задачі відносять до дискретних, якщо ж усі компоненти x_i альтернатив $x \in X$ є цілими числами – то задачу називають цілочисловою. Відповідно визначаються булеві, а також лінійні, увігнуті та інші задачі багатокритерійної оптимізації.

Приміром, розглянемо таку задачу:

Нехай задано множину допустимих альтернатив X, властивості яких описуються сукупністю цільових функцій: $f = \{f_i(x)\}$, $i \in I$, $x \in X$, де I – множина індексів, $I = \{1, 2, \dots, M\}$. Вважатимемо, що m перших цільових функцій максимізуються, а інші $(M - m)$ мінімізуються. Позначимо через I_1 множину індексів, для яких цільові функції максимізуються, тобто $I_1 = \{1, 2, \dots, m\}$; через I_2 – множину індексів, для яких цільові функції мінімізуються:

$I_2 = \{m+1, m+2, \ldots M\}$. Тоді багатокритерійна задача може бути записана таким чином:

$$\begin{aligned} &f_i(x) \to \max,\ i \in I_1, \\ &f_i(x) \to \min,\ i \in I_2, \\ &\quad x \in X. \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2. Поняття ефективної альтернативи

Розглянемо задачу багатокритерійної оптимізації (3.1).

З огляду на цільові функції, альтернативи x_1 і x_2 можна порівнювати таким чином:

– альтернатива x_1 не гірша за альтернативу x_2 ($x_1 \geq x_2$), коли

$$\begin{cases} f_i(x_1) \geq f_i(x_2),\ i \in I_1, \\ f_i(x_1) \leq f_i(x_2),\ i \in I_2; \end{cases}$$

– альтернатива x_1 еквівалентна альтернативі x_2 ($x_1 \sim x_2$), якщо

$$f_i(x_1) = f_i(x_2), \forall i \in I;$$

– альтернатива x_1 строго переважає альтернативу x_2 ($x_1 > x_2$), коли

$$\begin{cases} f_i(x_1) \geq f_i(x_2), i \in I_1, \\ f_i(x_1) \leq f_i(x_2), i \in I_2, \end{cases}$$

і хоча б одна нерівність виконується як строга.

Вочевидь, не всяку пару альтернатив можна порівняти між собою.

П р и к л а д 3.1. Нехай $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, причому функція $f_1(x)$ максимізується, а функція $f_2(x)$ мінімізується на дискретній множині: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. У табл. 3.1 подано значення цільових функцій на множині X.

Таблиця 3.1

Значення функції: $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$

	$f_1(x)$	$f_2(x)$
x_1	7	5
x_2	6	2
x_3	5	4
x_4	6	6
x_5	4	1

У цій задачі $x_1 > x_4$, $x_2 > x_4$, $x_2 > x_3$, а про інші альтернативи взагалі нічого не можна сказати.

В и з н а ч е н н я 3.1. Альтернатива x_0 називається *ефективною*, якщо на множині допустимих альтернатив X не існує жодної альтернативи x, яка задовольняє такі нерівності:

$$f_i(x) \geq f_i(x_0), \quad i \in I_1,$$
$$f_i(x) \leq f_i(x_0), \quad i \in I_2,$$

причому хоча б одна з них виконується як строга.

Іншими словами, ніяка інша альтернатива не може «поліпшити» значення жодної цільової функції, не погіршивши при цьому значення деякої іншої. Ось чому іноді ефективні альтернативи називають *непокращуваними* за множиною цілей, або *оптимальними за Парето*.

Серед множини оптимальних за Парето альтернатив і слід шукати розв'язок задачі багатокритерійної оптимізації. Проте, яку саме альтернативу потрібно вибирати, сказати не можна, необхідне додаткове дослідження.

Із визначення ефективних альтернатив випливає, що вони можуть бути непорівнянними між собою. У зв'язку з цим справедливе таке твердження:

Л е м а 3.1. Дві ефективні альтернативи або еквівалентні, або непорівнянні між собою.

Доведення

Якщо x_0 – ефективна альтернатива, то для будь-якої альтернативи x', порівнянної із x_0 за множиною цільових функцій або справедливими будуть n рівностей: $f_i(x') = f_i(x_0), \forall i \in I$, і тоді альтернатива x' еквівалентна x_0, або знайдеться такий індекс $s \in I$, для якого $f_S(x_0) \geq f_S(x')$, коли $s \in I_1$, або ж $f_S(x_0) \leq f_S(x')$, якщо $s \in I_2$, тоді альтернатива x', не може бути ефективною.

Лему доведено.

Із цієї леми виходить, що коли існує лише одна ефективна альтернатива, то вона дає оптимум кожному з критеріїв.

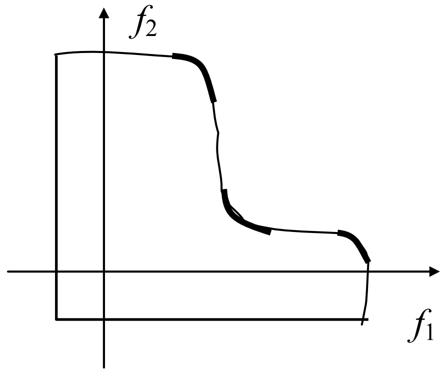


Рис. 3.1. Графічне подання множини допустимих рішень і множини Парето

За наявності двох або трьох критеріїв множину ефективних альтернатив можна зобразити графічно.

Наприклад, розглянемо задачу, що включає два критерії, кожен з яких максимізується, а множина допустимих альтернатив у критерійному просторі має вигляд, зображений на рис. 3.1.

Множина Парето в цьому випадку (якщо $m = 2$) є, образно кажучи, північно-східною межею множини допустимих рішень, без тих її частин, що паралельні осям координат або лежать у досить глибоких і крутих провалах (на рисунку цю множину показано товстою лінією).

В и з н а ч е н н я 3.2. Альтернатива (рішення) називається *слабко ефективною*, а також *слабко оптимальною за Парето*, або *оптимальною за Слейтером*, коли не існує іншої альтернативи (рішення), для якої

$$f_i(x) > f_i(x_0), \quad i \in I_1,$$
$$f_i(x) < f_i(x_0), \quad i \in I_2.$$

Слабко ефективна альтернатива являє собою оцінку, максимальну за відношенням « > », на відміну від ефективних альтернатив, які максимальні за відношенням « ≥ ».

Зауважимо, що всяка ефективна альтернатива є і слабко ефективною, і, відповідно, множина ефективних альтернатив $P(Y)$ міститься в множині слабко ефективних альтернатив $S(Y)$.

Множина ефективних альтернатив $P(Y)$ [слабко ефективних альтернатив $S(Y)$] називається *зовнішньо стійкою*, якщо для будь-якого елемента $y \in Y \backslash (P(Y)$ [$y \in Y \backslash S(Y)$], знайдеться така оцінка $y^0 \in P(Y)$ [відповідно $y^0 \in S(Y)$], для якої $y^0 \geq y$ ($y^0 > y$).

Якщо множина Y складається із скінченного числа оцінок, то множини $P(Y)$ і $S(Y)$ будуть зовнішньо стійкими. Коли ж множина Y нескінченна, то множини ефективних альтернатив $P(Y)$ і $S(Y)$ можуть і не бути зовнішньо стійкими. Проте при звичайних для оптимізаційних задач припущеннях (X – компакт, функція f – напівнеперервна зверху) ці множини будуть зовнішньо стійкими.

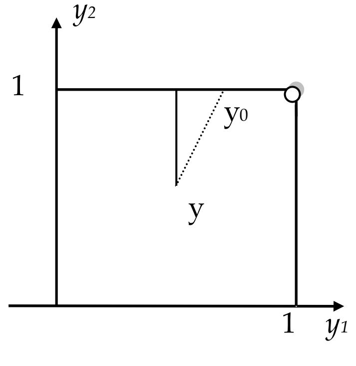


Рис. 3. 2. Графічне подання множини альтернатив, оптимальних за Слейтером

П р и к л а д 3.2. Нехай Y – одиничний квадрат, з якого «вилучено» праву верхню вершину (рис. 3.2).

Для такої множини Y множина $P(Y)$ вочевидь пуста, а множина $S(Y)$ утворюється правою і верхньою сторонами квадрата [без точки (1; 1)]. Множина $S(Y)$ очевидно зовнішньо стійка, оскільки кожній точці $y \in Y$, у якій $y_1, y_2 < 1$, можна поставити у відповідність, наприклад точку: $y_0 = ((y_1 + 1)/2, 1)$, причому $y_0 > y$.

Визначення ефективного (слабко ефективного) розв'язку є статичним у тому сенсі, що воно ґрунтується на попарному порівнянні допустимих розв'язків і не виявляє спільності з питанням про те, чи можливо «плавно» перейти від одного розв'язку до іншого, кращого, з додатною швидкістю, збільшуючи кожен критерій. За таких умов саме можливість подібного переходу в деяких моделях виявляється дуже цікавою.

Прикладом може слугувати економічна модель чистого обміну, коли кожен споживач бере участь в обміні, прагнучи придбати сукупність товарів найбільшої корисності, тобто максимізувати свою функцію цінності. Такого роду моделі досліджували у XIX столітті Ф. Ешварт і В. Парето. Ефективним у цій моделі є стан (розподіл товарів між споживачами), який не може бути покращений шляхом перерозподілу товарів між учасниками обміну без «ураження інтересів» декого з них.

Таким чином, оптимальність за Парето відображає ідею економічної рівноваги: коли стан економіки не є ефективним, то буде відбуватися обмін, який зумовить перехід до ефективного стану.

3.3. Теоретичне й практичне значення ефективного розв'язку

Поняття ефективного розв'язку являє собою пряме узагальнення поняття точки максимуму числової функції на випадок, коли розглядається кілька функцій.

Як правило, у прикладних задачах множина таких альтернатив виявляється не порожньою і, більш того, зовнішньо стійкою, а тому оптимальні розв'язки мають бути вибрані саме серед ефективних альтернатив.

Проте, якщо в однокритерійній задачі за оптимальний можна брати будь-який розв'язок, унаслідок якого критерій досягає максимуму (оскільки оптимальні розв'язки еквівалентні), то в багатокритерійній задачі, як правило, множина ефективних альтернатив виявляється дуже багатою на нееквівалентні (і за змістом суттєво різні) розв'язки, а тому осмислений вибір оптимального розв'язку неможливий без залучення більш повної інформації про переваги альтернатив.

Тим не менше, поняття ефективного розв'язку відіграє найважливішу роль у теорії багатокритерійної оптимізації.

Хоча ефективний розв'язок зазвичай буває далеко не єдиним, але все ж таки множина ефективних альтернатив значно вужча, ніж вихідна множина всіх розв'язків. З огляду на це, побудова множини ефективних розв'язків (або їх оцінок) є першим етапом здійснення великої кількості процедур і методів багатокритерійної оптимізації.

Оскільки в разі наявності лише двох або трьох критеріїв множину ефективних оцінок можна зобразити графічно, то при аналізі дво-, а інколи й трикритерійних задач нерідко найзручніше вибирати оптимальний розв'язок безпосередньо на основі розгляду графіка ефективних оцінок.

На такому підході базується, наприклад, метод «вартість – ефективність».

Один з варіантів цього методу полягає в тому, що:

– кожен зразок оцінюється за двома критеріями: вартості виробництва B і ефективності реалізації поставлених завдань E, значення цих критеріїв обчислюються за спеціально розрахованими методиками;

– будується графік оцінок, відповідних усім даним зразкам, і в ньому виділяються зразки, серед яких вибирається оптимальний;

– остаточний вибір здійснює ОПР на підставі аналізу графіка, оскільки він показує, якою ціною досягається підвищення ефективності.

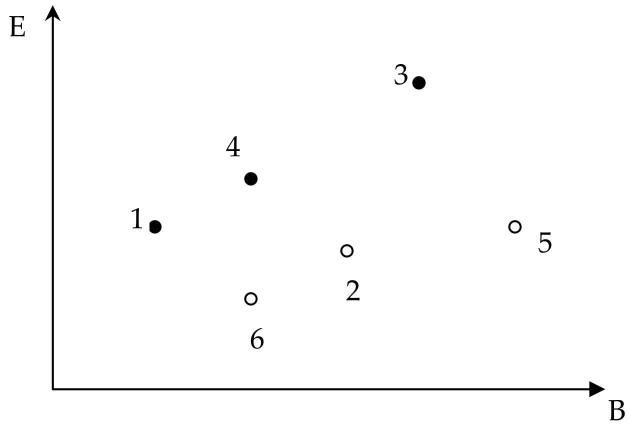


Рис. 3.3. Графік оцінок проектів у методі «вартість – ефективність»

П р и к л а д 3.3. Нехай необхідно порівняти 6 проектів за критеріями вартості та ефективності. Графічне зображення оцінок проектів наведено на рис. 3.3.

Оскільки критерій B (вартість) бажано мінімізувати, а критерій E (ефективність) – максимізувати, то, як видно з графіка, перевагу мають проекти 1, 4, 3.

Звуження множини вибору до множини ефективних розв’язків (або деякої її підмножини) важливе не лише саме по собі, але ще й тому, що на вужчій підмножині можуть виконуватися різного роду припущення, які спрощують подальший аналіз. Крім того, ефективні розв’язки можуть мати цікаві й практично важливі властивості, яких немає в інших.

П р и к л а д 3.4. Нехай існує n галузей, зайнятих виробництвом n предметів (продуктів) споживання. Кожна галузь може виробляти один продукт, але за допомогою кількох виробничих процесів.

Позначимо через Λ_i множину виробничих процесів, доступних i-й галузі, множину Λ_i будемо вважати скінченною.

Якщо прийняти загальну кількість трудових ресурсів за одиницю, то інтенсивність роботи i-ї галузі можна охарактеризувати величиною: $u_i \geq 0$, яка показує частку наявних трудових ресурсів, що використовуються в цій галузі. Таким чином, вектор: $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, описує ефективність роботи всіх галузей. Ясно, що при повному використанні трудових ресурсів $\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$. Якщо складові вектора u невід’мні та в сумі дорівнюють одиниці, то його називають здійсненним.

Нехай $a_{ij}^{\lambda_k}$ – кількість j-го продукту, який виробляє i-та галузь, коли вона функціонує з одиничним рівнем інтенсивності ($u_i = 1$) і при цьому застосовується процес $\lambda_k \in \Lambda_i$.

Припускаємо, що $a_{ij}^{\lambda_k} \le 0$, коли $i \ne j$, але $a_{ii}^{\lambda_k} > 0$. Від'ємні значення $a_{ij}^{\lambda_k}$ інтерпретуються як кількість матеріалів (продуктів), що витрачаються у виробництві.

Висловлене припущення про знаки вказує на те, що кожна галузь може використовувати всі види матеріалів, у той час як виробляє лише один продукт.

Вектор: $a_{ij}^{\lambda_k} = (a_{i_1}^{\lambda_k}, a_{i_2}^{\lambda_k}, \ldots a_{i_n}^{\lambda_k})$, назвемо вектором-процесом i-ї галузі.

Кожному виробничому процесу x_k відповідає свій вектор-процес.

Коли для діяльності кожної галузі вибрано виробничий процес, а точніше, якщо зафіксовано певний набір виробничих процесів: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, то випуск чистого продукту j усією системою $c_j = \sum_{i=1}^{n} u_i a_{ij}^{\lambda_i}$.

Квадратну матрицю, рядками якої є вектор-процеси, $a_i^{\lambda_k}$, $i = 1, 2, \ldots n$, позначатимемо через A^{λ}. Тоді j-та компонента вектора: $c = uA^{\lambda}$, являє собою випуск чистого продукту j як результат фіксованого набору процесів λ і здійсненного вектора u.

Нехай A – множина матриць A^{λ}, кожна з яких відповідає певному набору процесів: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, де $\lambda_i \in \Lambda_i$. Вектор (векторна оцінка): $c = (c_1, c_2 \ldots, c_n)$ називається реалізованим (або досяжним), якщо $c = uA^{\lambda}$ для деякої матриці A^{λ} і здійсненного вектора u.

Особливої уваги варті реалізовані вектори: $c = (c_1, c_2 \ldots, c_n)$, які мають додатні компоненти. Дійсно, має місце реалізований вектор c, причому $c_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots n$, то це свідчить про можливість так організувати виробництво всіх продуктів, що кожна галузь випускатиме продукту більше, ніж його потрібно для споживання всіма іншими галузями.

Розглянемо геометричну інтерпретацію цієї моделі.

Кожен вектор-процес $a_{ij}^{\lambda_k}$ можна подати у вигляді точки простору E^n. Матриці A^{λ} відповідає n таких точок (по одній для кожної галузі).

Вектор $c = uA^{\lambda} = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i a_{i_1}^{\lambda_1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} u_i a_{i_n}^{\lambda_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} u_i a_i^{\lambda_i}$, тобто він являє собою точку опуклої оболонки n векторів-процесів.

Таким чином, множина реалізованих векторів c є об'єднанням опуклих оболонок векторів $a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_n^{\lambda_n}$, які створюють матриці $A^{\lambda} \in A$.

Для ілюстрації розглянемо простий приклад з числовими даними.

П р и к л а д 3.5. Нехай у наведеній вище задачі $n = 2$;

$$\Lambda_1 = \{1; 2\}; \ \Lambda_2 = \{1; 2; 3\};$$

$$a_1^{1} = (2; -1); \ a_1^{2} = (3/2; -2);$$

$$a_2^{1} = (-1; 1/2); \ a_2^{2} = (-2; 3); \ a_2^{3} = (-4; 4).$$

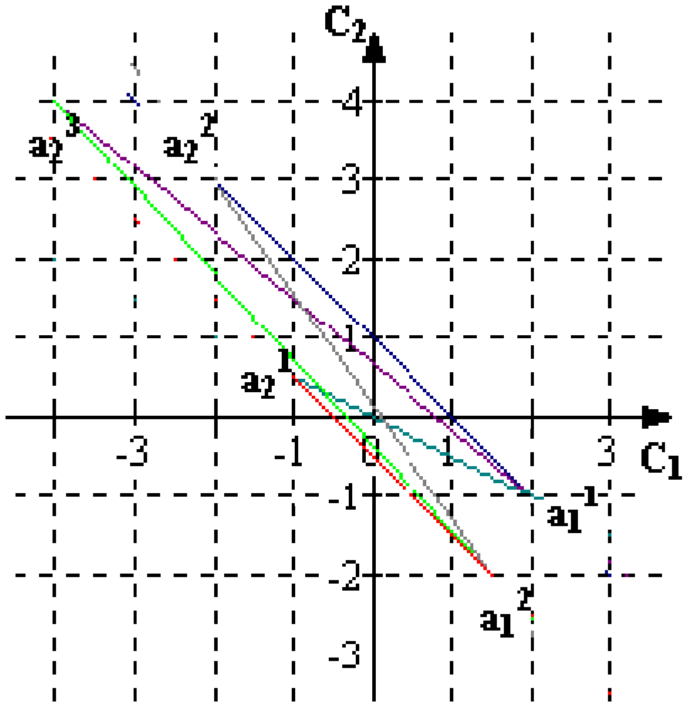


Рис. 3.4. Графічна інтерпретація прикладу 3.5

Задача визначення найкращого варіанта використання виробничих і трудових ресурсів полягає в тому, щоб забезпечити якомога більший випуск усіх продуктів, що виробляються галузями.

Розв'язування

Зобразимо на графіку (рис. 3.4) точки, які відповідають векторам-процесам $a_i^{\lambda_i}$. У нашому прикладі вони такі: $a_1^1 = (2; -1)$; $a_1^2 = (3/2; -2)$; $a_2^1 = (-1; 1/2)$; $a_2^2 = (-2; 3)$; $a_2^3 = (-4; 4)$.

Опуклим оболонкам цих векторів (тобто векторам c) відповідають відрізки, які з'єднують ці точки.

Реалізованим векторам c відповідають ті відрізки, що розташовані в першій чверті координатної площини.

Очевидно, що максимум випуску продукції буде досягнуто, якщо $\lambda' = (1; 2)$, тобто перша галузь використовує перший процес, а друга галузь – другий. Тоді будь-який ефективний план виробництва можна визначити парою (λ', u), тут $u = (u_1, u_2)$, $0{,}5 < u_1 < 0{,}75$, $u_2 = 1 - u_1$ (ці умови забезпечують реалізованість вектора c).

Таким чином, план: $x = \{\lambda, u\}$ (тут λ – виробничі процеси, u – здійснений вектор) характеризується векторним критерієм: $c(x) = (c_1(x), \ldots, c_n(x))$, де c_j – випуск чистого j-го продукту.

План x^* називається *ефективним*, якщо не існує здійсненного вектора u і матриці A^*, для яких $c_j(x) \geq c_j(x^*)$, причому принаймні одна з цих нерівностей строга. Вектор $c(x^*)$, що відповідає ефективному плану x^*, також називається *ефективним.*

Структура ефективних векторів із додатними компонентами характеризується таким твердженням: *якщо існує реалізований вектор із додатними компонентами, то всі ефективні вектори з додатними компонентами лежать в опуклій оболонці векторів-процесів* $a_{ij}^{\lambda_k}$, *які утворюють матрицю* $A' \in A$, *і кожна точка цієї опуклої оболонки, що розташована в додатному октанті*, *є ефективним вектором.*

Інакше кажучи, коли є допустимий план, що забезпечує надлишковий випуск кожного продукту, то для кожної галузі існує певний виробничий процес (він входить у набір λ'), який дозволяє визначити всі ефективні вектори з додатними компонентами лише за рахунок перерозподілу трудових ресурсів.

Отже, будь-який ефективний план, що забезпечує надлишковий випуск кожного продукту, або має вигляд (λ', u), де u – деякий здійсненний вектор, або еквівалентний плану названого виду.

3.4. Властивості ефективних альтернатив і способи їх пошуку

Візьмемо для розгляду задачу багатокритерійної оптимізації:

$$f_i(x) \to \max,\ i \in I_1,$$
$$f_i(x) \to \min,\ i \in I_2,$$
$$x \in X,$$

і дослідимо властивості множини ефективних альтернатив, але формулюватимемо їх не стосовно первинного векторного критерію, а будемо мати на увазі деякий безрозмірний векторний критерій, що складається з монотонних перетворень окремих функцій, які зводять їх до безрозмірного вигляду та до задачі мінімізації (способи такого перетворення буде розглянуто нижче в цьому пункті та в п. 3.6). Отже, маємо таку вихідну задачу:

$$W_i(x) \to \min,\ i \in I,$$
$$x \in X,$$

при цьому всі функції $W_i(x) \ge 0$ і зведені до безрозмірного вигляду.

Т е о р е м а 3.1. Якщо множина допустимих альтернатив X випукла, а цільові функції $W_i(f(x)), i \in I$, увігнуті на допустимій множині X, то для будь-якої ефективної альтернативи x^* існує такий числовий вектор:

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_M),\quad c_i \ge 0,\quad \sum_{i \in I} c_i = 1,$$

при якому лінійний критерій, маючи такий вигляд:

$$F(x) = \sum_{i \in I} c_i W_i(x)\,, \tag{3.2}$$

досягає мінімуму на множині X, коли $x = x^*$.

Т е о р е м а 3.2. Нехай x^* – ефективна альтернатива множини цільових функцій: $W = \{W_i(x)\}$, $W_i(x) \ge 0$, $i \in I$. Тоді існує такий числовий вектор: $c = (c_1, c_2, \dots, c_M)$, $c_i \ge 0$, $\sum_{i \in I} c_i = 1$, для якого критерій такого вигляду:

$$F(x) = \max_{i \in I} c_i W_i(x)\,, \tag{3.3}$$

досягає мінімуму на множині допустимих альтернатив X, якщо $x = x^*$.

За компонент c_i можна, наприклад, узяти числа $\frac{\lambda_i}{\lambda}$, тут $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i$, $\lambda_i = \frac{1}{w_i(x^*)}$.

Т е о р е м а 3.3. Якщо x^* – ефективна альтернатива множини цільових функцій f, то для будь-якого індекса $l \in I_1$

$$f_l\left(x^*\right) = \max_x f_l(x),$$
$$f_i\left(x^*\right) \geq f_i(x),\ \forall i \in I_1,\ i \neq l,$$
$$f_i\left(x^*\right) \leq f_i(x),\ \forall i \in I_2,$$

або для будь-якого індекса $l \in I_2$

$$f_l\left(x^*\right) = \min_x f_l(x),$$
$$f_i\left(x^*\right) \geq f_i(x),\ \forall i \in I_1,$$
$$f_i\left(x^*\right) \leq f_i(x),\ \forall i \in I_2, i \neq l.$$

Згідно з описаними властивостями можна побудувати три способи визначення ефективних альтернатив.

Розглянемо ці способи.

Перший спосіб (*базується на теоремі 3.1*)

Пошук усієї множини ефективних альтернатив X^* зводиться до розв'язування такої задачі параметричного програмування:

$$\min_{x \in X} \sum_{i \in I} c_i W_i(x), \tag{3.4}$$

$$\gamma_i \in \Gamma^+ = \left\{ \gamma_i : \gamma_i \geq 0, \forall i \in I, \sum_{i \in I} \gamma_i = 1 \right\}, \tag{3.5}$$

де для всіх індексів $i \in I$ функції $W_i(x)$ є увігнутими та неперервними, а область допустимих альтернатив X являє собою випуклу замкнену множину.

У тому випадку, коли функції не увігнуті або множина допустимих альтернатив не випукла, задача (3.4), (3.5) не дозволяє відшукати всієї множини альтернатив.

П р и к л а д 3.6. Нехай область допустимих альтернатив задано обмеженнями такого вигляду:

$$X = \left\{ x_i \geq 0, i = 1{,}2;\, 0{,}5 \leq x_1 \leq 3;\, 0{,}5 \leq x_2 \leq 5;\, x_2 \geq 4 - x_1^2 \right\},$$

а цільові функції

$$x_1 \to \min,$$
$$x_2 \to \min.$$

У даній задачі множиною ефективних альтернатив є дуга *AB* (див. рис. 3.5). Проте, оскільки область не випукла, то внаслідок мінімізації критерію: $F(x) = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$, на множині X, $\forall\ \gamma_1, \gamma_2 \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, буде знайдено не більше двох ефективних альтернатив.

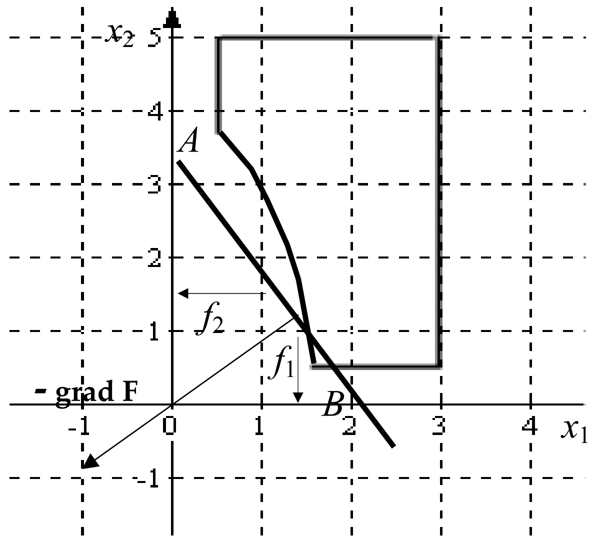


Рис. 3.5. Графічна ілюстрація до прикладу 3.6

Другий спосіб (*базується на теоремі 3.2*)

Пошук усієї множини альтернатив X^* зводиться до розв'язування такої задачі параметричного програмування:

$$\min_{x \in X} \max_{i \in I} \gamma_i W_i(x), \tag{3.6}$$

$$\gamma_i \in \Gamma^+ = \left\{ \gamma_i : \gamma_i \geq 0, \forall i \in I, \sum_{i \in I} \gamma_i = 1 \right\}, \tag{3.7}$$

де $W_i(x)$ – монотонні перетворення цільової функції $f_i(x)$.

У даному випадку вимоги увігнутості й неперервності цільових функцій, а також опуклості множини допустимих альтернатив не висуваються, але слід враховувати, що в разі існування дійсного розв'язку задачі (3.6), (3.7) не всі знайдені альтернативи можуть бути ефективними.

П р и к л а д 3.7. Нехай задано дискретну множину допустимих альтернатив: $X = \{ x_j,\ j = 1, \ldots, 5 \}$. Значення цільових функцій $w_1(x)$, $w_2(x)$ наведено в табл. 3.2. Обидві функції мінімізуються.

Таблиця 3.2

x_j \ w_i	$w_1(x)$	$w_2(x)$
x_1	2	5
x_2	4	3
x_3	4	2
x_4	5	2
x_5	6	1

Тоді, коли $\gamma_1 = \gamma_2 = 0{,}5$, мінімум критерію (3.6) досягається на альтернативах x_2, x_3, тобто розв'язок не буде єдиним. Проте очевидно, що $x_3 > x_2$, оскільки x_3 має краще значення другої функції, тобто ефективним є лише варіант x_3.

На відміну від першого способу цей метод є більш загальним (до цільових функцій та множини альтернатив висуваються менші вимоги), але тоді, коли задача (3.6), (3.7) має кілька розв'язків, може бути потрібний додатковий аналіз.

Зауважимо, що для різних монотонних перетворень W_i при одних і тих самих значеннях параметрів будуть знайдені різні ефективні альтернативи. Але, якщо перебрати всі значення параметрів $\gamma_i \in \Gamma^+$, отримані множини ефективних альтернатив будуть однаковими.

П р и к л а д 3.8. Нехай задано множину допустимих альтернатив: $X = \{x_i \geq 0, i = 1,2;\ x_1 + x_2 \leq 1000,\ 5x_1 + 3x_2 \geq 3500\}$ (її зображено на рис. 3.6) і такі цільові функції:

$$f_1(x) = 37{,}5x_1 + 30x_2 \to \max,$$

$$f_2(x) = 50x_1 + 25x_2 \to \min.$$

Визначимо множину ефективних альтернатив, використовуючи різні перетворення цільових функцій.

Розглянемо два перетворення:

$$w^1 = \left\{ \frac{f_1^{\max} - f_1(x)}{f_1^{\max} - f_1^{\min}};\ \frac{f_2(x) - f_2^{\min}(x)}{f_2^{\max} - f_2^{\min}} \right\} \quad \text{та} \quad w^2 = \left\{ \frac{f_1^{\max} - f_1(x)}{f_1^{\max}};\ \frac{f_2(x) - f_2^{\min}(x)}{f_2^{\min}} \right\},$$

де $f_i^{\max}, f_i^{\min}$ – максимальні й мінімальні значення функцій f_i відповідно.

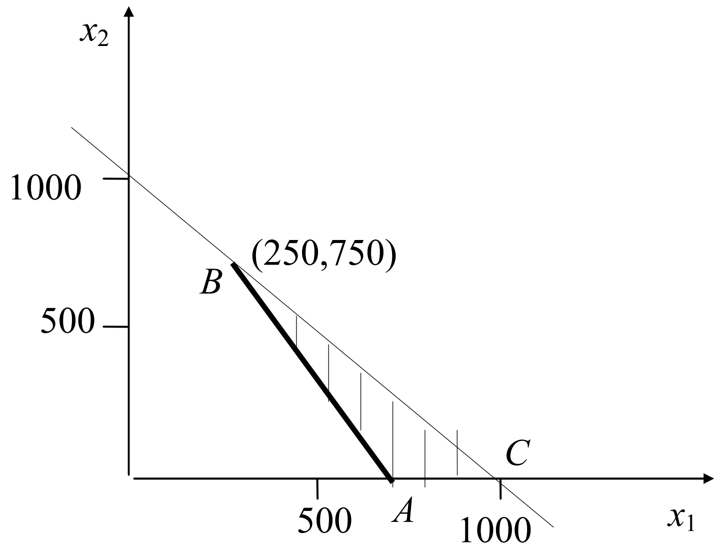


Рис. 3.6. Графічна інтерпретація прикладу 3.8

Знайдемо максимальні й мінімальні значення функцій f_1 і f_2 на множині обмежень, а саме:

$f_1^{\max}$ досягається в точці (1000,0), $f_1^{\max} = 37500$,

$f_1^{\min}$ досягається в точці (700,0), $f_1^{\min} = 26250$,

$f_2^{\max}$ у точці (1000,0), $f_2^{\max} = 50000$,

$f_2^{\min}$ у точці (250, 750), $f_2^{\min} = 31250$.

Побудуємо цільові функції відповідно до перетворень w^1 і w^2, тобто

$$w^1 = \left\{ \frac{37500 - 37,5x1 - 30x2}{11250};\ \frac{50x1 + 25x2 - 31250}{18750} \right\},$$

$$w^2 = \left\{ \frac{37500 - 37,5x1 - 30x2}{37500};\ \frac{50x1 + 25x2 - 31250}{31,250} \right\},$$

і розглянемо задачі параметричного програмування:

$$\min_{\substack{x \in X \\ \gamma \in \Gamma^+}} \sum_{i=1,2} \gamma_i w_i^1(x) \tag{3.8}$$

та

$$\min_{\substack{x \in X \\ \gamma \in \Gamma^+}} \sum_{i=1,2} \gamma_i w_i^2(x)\,. \tag{3.9}$$

При цьому, якщо $\gamma_1 = 0{,}8$, $\gamma_2 = 0{,}2$, то мінімум критерію w^1 (задача 3.8) досягається в точці *C*, а мінімум критерію w^2 (задача 3.9) – в усіх точках ребра *BC* (рис. 3.6).

Коли ж $\gamma_1 = 2/3$, $\gamma_2 = 1/3$, то мінімум критерію w^1 (задача 3.9) досягається в усіх точках ребра *BC*, а мінімум критерію w^2 (задача 3.6) – у точці *B* (рис. 3.6).

Третій спосіб (*базується на теоремі 3.3*)

Множина ефективних альтернатив для цільових функцій f може бути знайдена шляхом розв'язування такої задачі параметричного програмування відносно параметрів $z \in Z^{M-1}$:

$$\begin{aligned}
&\max_x f_l(x),\\
&f_i(x) \ge z_i,\ \forall i \in I_1,\ i \ne l,\\
&f_i(x) \le z_i,\ \forall i \in I_2,\\
&x \in X,
\end{aligned}$$

де Z^{M-1} – $(M-1)$-вимірний паралелепіпед;

$$Z^{M-1} = \prod_{\substack{i \in I_1\\ i \ne l}} [f_{i(\min)}, f_i^{opt}] \times \prod_{i \in I_2} [f_i^{opt}, f_{i(\max)}],$$

тут f_i^{opt} – оптимальне значення відповідної цільової функції, $f_{i(\min)}$ – найменше значення цільової функції, якщо вона максимізується, і $f_{i(\max)}$ – найбільше значення цільової функцій, якщо вона мінімізується.

Зауважимо, що за основну оптимізовану функцію необхідно вибирати таку цільову функцію, оптимум якої досягається тільки в ефективних точках.

Як і в другому випадку, не всі альтернативи, отримані цим способом, можуть бути ефективними, а тому виникає потреба в додатковому аналізі.

3.5. Загальна проблема пошуку компромісних рішень

Після побудови множини ефективних альтернатив X^* групі експертів надається право вибору найкращого в деякому розумінні рішення. Вони видають свої рекомендації ОПР і вона або робить вибір одного із запропонованих ними рішень, або бере їхній усереднений результат.

Вибір з множини ефективних рішень єдиного – це досить складне завдання, оскільки не виключена можливість, що альтернатива, не оптимальна за жодним з критеріїв, буде найкращою в конкретній ситуації прийняття рішення.

Розглянемо можливі принципи компромісу, які застосовуються при виборі рішення з множини ефективних альтернатив. При цьому вважатимемо, що розглядається нормальна задача без пріоритетів, тобто критерії рівноцінні й нормалізовані. Будемо також припускати, що всі критерії максимізуються на множині допустимих альтернатив і набувають тільки додатних значень.

3.5.1. Принципи рівномірності

У тому разі, коли критерії нормалізовані й однакові за важливістю, цілком природним є прагнення рівномірно та гармонійно підвищувати якість усіх часткових (локальних) критеріїв. Саме в цьому й полягає сенс принципу рівномірності, але в той же час сам принцип може бути реалізований різними способами. Розглянемо деякі із них, вважаючи, що альтернативи оцінюються за n критеріями: $y_1, y_2, \dots y_n$ і всі критерії максимізуються.

Принцип рівності. Згідно з цим принципом максимізація здійснюється за умови, що рівні всіх критеріїв однакові. Інакше кажучи, вибирається ефективна альтернатива, для якої значення всіх критеріїв рівні, тобто $y_1 = y_2 = \dots = y_n$. Проте цей принцип є надмірно жорстким. Він може зумовлювати вибір альтернатив, які лежать за межами області компромісу і навіть зовсім не давати розв'язків, особливо коли йдеться про дискретні задачі. Приклади таких ситуацій за умови максимізації двох критеріїв y_1, y_2 подано на рис. 3.7.

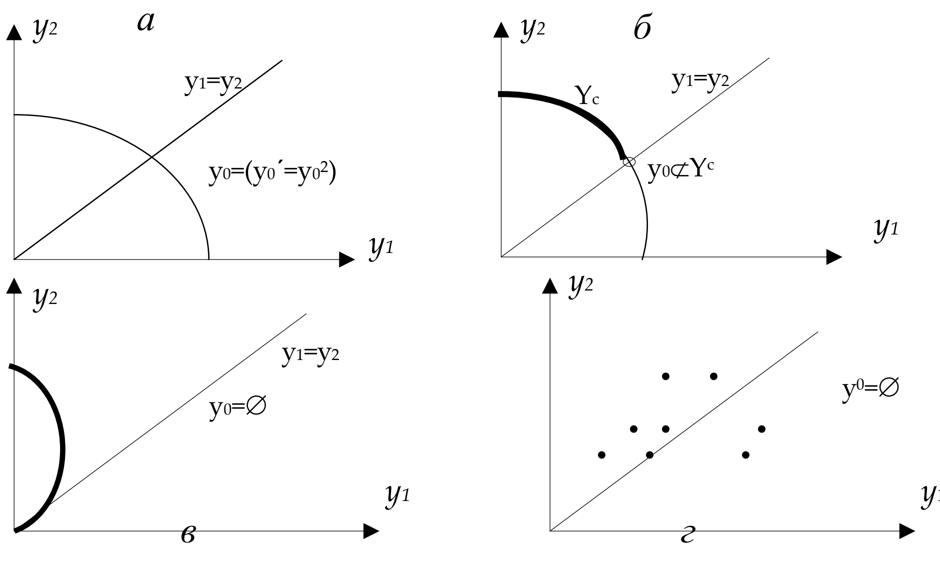


Рис. 3.7. Графічна інтерпретація ситуацій прийняття рішень на основі принципу рівності: *а* – наявне ефективне рішення; *б* – рішення перебуває за межами області компромісу; *в* – немає рішень (неперервний випадок); *г* – немає рішень (дискретний випадок)

Принцип рівномірності (*максиміну*). Даний принцип передбачає рівномірне підвищення рівня всіх критеріїв шляхом «підтягування» «найгіршого» з них, тобто критерію з найменшим рівнем. Окрім рівномірності, цей принцип має також інший важливий сенс – забезпечення гарантованого рівня мінімального критерію $\min y_j$. Часто його називають принципом максиміну (або мінімаксу в задачах мінімізації).

Цей принцип в умовах наявності двох критеріїв проілюстровано на рис. 3.8. Тут обидва критерії максимізуються. Ефективними будуть альтернативи, розташовані на так званій північно-східній межі множини допустимих рішень. Згідно з принципом рівномірності необхідно вибрати таке рішення, що надає максимального значення критерію з найменшим рівнем. У даному випадку це критерій y_1. Отже раціональним буде вибір такого рішення: $y_0 = \max\min y_1$.

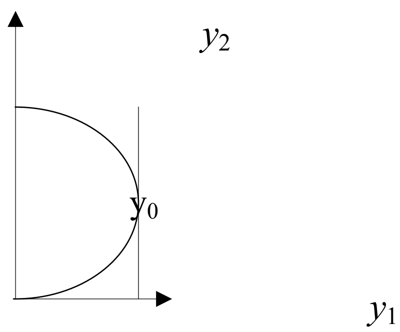


Рис. 3.8. Ілюстрація до використання принципу рівномірності (максиміну)

Принцип найкращої рівномірності. У цьому випадку відбувається деяке посилення ідеї рівномірності порівняно із попередньою моделлю, а саме: якщо в результаті застосування критерію максиміну отримано кілька рішень, то визначають другий мінімум і проводять його максимізацію (рис. 3.9).

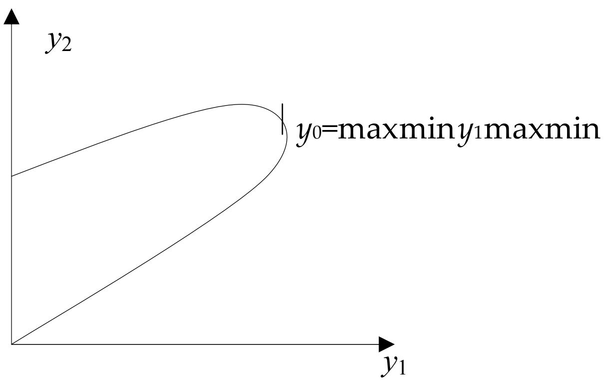


Рис. 3.9. Графічна інтерпретація використання принципу найкращої рівномірності

Принцип квазірівності. Тут здійснюється максимізація всіх локальних критеріїв за умови, що їхній рівень не відрізнятиметься один від одного більш ніж на задану величину δ, тобто відбувається деяке послаблення занадто жорсткого принципу рівності (див. рис. 3.10)

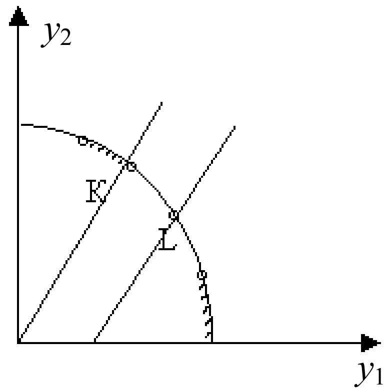


Рис. 3.10. Графічна інтерпретація використання принципу квазірівності, тобто $KL = Y^0 = \{y: |y_1 - y_2| \le \delta\}$

Ідея застосування принципів рівномірності дуже приваблива. Гармонійне підвищення якості всіх критеріїв – це ідеал оптимізації. Проте часто навіть незначний відхід від цих принципів дозволяє істотно підвищити рівень одного або кількох критеріїв і тим покращити розв'язок задачі.

Принцип вирівнювання якості. В основі цього принципу лежать теореми про середні величини вищих ступенів. Математично ця модель записується в такому вигляді:

$$\min_{y \in Y^c} \sum_{j=1}^{m} y_j^{-S},$$

тут $S \in (1; S^*)$, $S^* = (\log m)/\log(1+\varepsilon)$

Із збільшенням значення параметра S, починаючи від одиниці, здійснюється вирівнювання значень критеріїв, а коли $S > S^*$ досягаємо ідеального вирівнювання, що еквівалентне моделі послідовного максиміну.

3.5.2. Принципи справедливої поступки

Принцип абсолютної поступки. Передбачає, що справедливим вважається компроміс, при якому сумарний абсолютний рівень зниження одного або кількох критеріїв не перевищує сумарного абсолютного рівня підвищення інших критеріїв, тобто

$$\operatorname*{opt}_{y \in Y^c} y \equiv \left\{ y : \sum_{j \in I^+} \left|\Delta y_j\right| \ge \sum_{j \in I^-} \left|\Delta y_j\right| \right\} \cap Y^c,$$

де I^+ – підмножина локальних критеріїв, рівень яких покращено ($\Delta y_j > 0$); I^- – підмножина локальних критеріїв, рівень яких погіршено ($\Delta y_j < 0$), а Δy_j – величина приросту (або зменшення) критерію y_j під час переходу від розв'язку y' до y, $\Delta y_j = \Delta y_j(y', y)$.

П р и к л а д 3.9. Розглянемо випадок коли мають місце два критерії y_1, y_2. Припустимо, що вони обидва максимізуються. Порівняємо розв'язки y (2; 4) та y' (3; 1) (див. рис. 3.11).

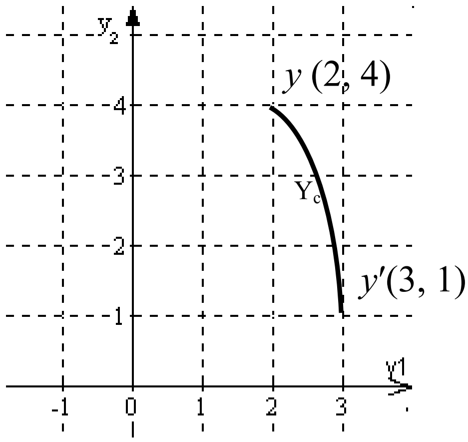


Рис. 3.11. Графічна інтерпретація принципу абсолютної поступки (приклад 3.9)

При переході від розв'язку y' до y критерій y_1 зменшується на таку величину:

$$|\Delta y_1| = | y_1 - y'_1 | = 3 - 2 = 1,$$

а критерій y_2 збільшується на таку:

$$|\Delta y_2| = |y_2 - y'_2| = |4 - 1| = 3.$$

Інакше кажучи, при переході від розв'язку y' до розв'язку y ми за першим критерієм робимо поступку: $\Delta y_1 = 1$, проте з позицій другого критерію виграємо більшу величину, тобто $\Delta y_2 = 3$. (рис. 3.11).

Отже, оскільки абсолютне збільшення критеріїв Δy_2 перевищує їх абсолютне зменшення Δy_1, то розв'язок y' вважитиметься кращим від y ($y' > y$).

Цьому принципу відповідає модель максимізації суми критеріїв (модель інтегральної ефективності), а саме:

$$\text{opt } y \equiv \max_{y \in Y^c} \sum_{j \in I} y_j \ .$$

Серйозним недоліком принципу абсолютної поступки є те, що він не виключає різкої диференціації рівнів окремих критеріїв, тобто високе значення узагальненого критерію може досягатися за рахунок одного або групи критеріїв при дуже низькому рівні інших. Проте цей принцип має важливу перевагу – він зручний для реалізації.

Принцип відносної поступки. Припустимо, що всі локальні критерії, які створюють вектор ефективності, мають однакову важливість. Тоді справедливим вважатимемо такий компроміс, при якому сумарний відносний рівень зниження якості розв’язку за одним або за кількома критеріями не перевищує (тобто він менший або дорівнює) сумарного відносного рівня підвищення його якості за рештою критеріїв. Відповідну даному принципу модель називають моделлю справедливої *відносної поступки*. Вона записується в такому вигляді:

$$\operatorname*{opt}_{y \in Y^c} y \equiv \left\{ y : \left| \sum_{j \in I^+} \eta_j \right| \geq \left| \sum_{j \in I^-} \eta_j \right| \right\} \bigcap Y^C,$$

де η_j – відносна зміна критерію, «ціна поступки», яка обчислюється за такою формулою:

$$\eta_j = \frac{\Delta y_j(y', y)}{\max\{y', y\}}.$$

Розглянемо математичну інтерпретацію описаного принципу.

Приклад 3.10. Нехай у зоні компромісів Y^c дано дві альтернативи: $y\,(2;\,7)$ та $y'\,(3;\,5)$ (рис. 3.12), якість яких оцінюється критеріями y_1 і y_2 (обидва вони максимізуються). Альтернатива y краща від альтернативи y' за критерієм y_1, але поступається їй за критерієм y_2. Необхідно порівняти ці дві альтернативи й вибрати найкращу в сенсі принципу справедливого компромісу.

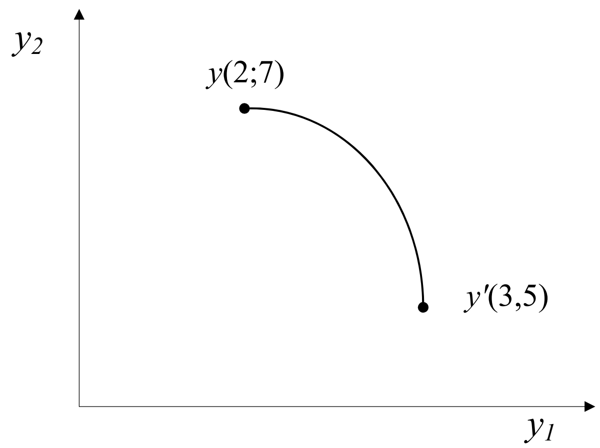


Рис. 3.12. Графічне подання принципу відносної поступки (приклад 3.10)

Для порівняння цих альтернатив уведемо міру відносного зниження якості останніх за кожним з критеріїв при переході від альтернативи y до y' і навпаки, тобто ціну поступки $\eta_j(y, y')$, а саме:

$$\eta_1 = \frac{\Delta y_1(y', y)}{\max\{y_1', y_1\}}, \qquad \eta_2 = \frac{\Delta y_2(y, y')}{\max\{y_2', y_2\}}.$$

Тут Δy_1 і Δy_2 – абсолютна величина зниження рівня критеріїв при переході від розв'язку y' до розв'язку y (для критерію y_1) і при зворотному переході (для критерію y_2). Якщо відносна величина зниження рівня критерію y_1 більша від зниження критерію y_2, то слід віддати перевагу розв'язку y. Це випливає з порівняння величин ціни поступки за кожним із критеріїв.

У розглянутому прикладі $\Delta y_1 = 1$, $\Delta y_2 = 2$. Згідно з принципом абсолютної поступки, розв'язок y кращий за розв'язок y', але за принципом відносної поступки, навпаки, кращим виявляється альтернатива y', оскільки $\eta_1 = 1/3$, $\eta_2 = 2/7$, тобто $\eta_1 > \eta_2$.

Розглянемо випадок неперервної зміни розв'язків. Тоді ціна поступки має вигляд логарифмічної похідної, тобто

$$\eta_j(x) = \frac{1}{y}\left|\frac{dy_j(x)}{dx}\right|.$$

Припустимо, що збільшення значення параметра x зумовлює збільшення критерію y_1 і зменшення критерію y_2. Відносна інтенсивність їх зміни залежно від x характеризується ціною поступки $\eta_1(x)$ і $\eta_2(x)$ (рис. 3.13). Як видно з графіків, коли x змінюється від 0 до x_0, то відносне збільшення критерію y_1 буде більшим, ніж зменшення критерію y_2.

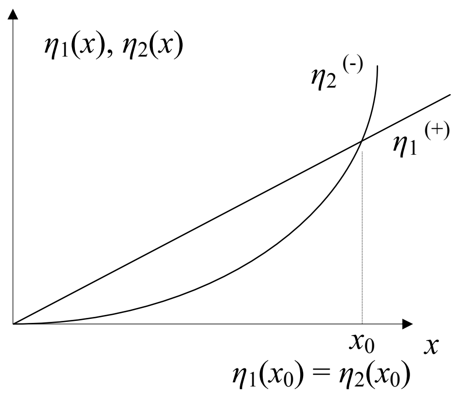


Рис. 3.13. Графічна інтерпретація принципу відносної поступки (неперервний випадок)

Принципу відносної поступки відповідає скалярна модель оптимізації з критерієм у вигляді добутку локальних критеріїв, а саме:

$$\operatorname{opt} y \equiv \max_{y \in Y^c} \prod_{j \in I} y_j .$$

Для зручності обчислень замість цієї моделі можна скористатися також еквівалентною моделлю такого вигляду:

$$\text{opt}\ y \equiv \max_{y \in Y^C} \sum_{j \in I} \log y_j\ , \quad y_j > 0,\ j \in I.$$

Зауважимо, що цей принцип можна застосовувати за умови, що всі локальні критерії мають однакову важливість. Якщо ж це припущення не виявляється чинним, то в модель слід внести корективи за допомогою вагового вектора: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, і знайти оптимальні розв’язки на основі такої моделі:

$$\max_{y \in Y^c} \prod_{j \in I} y_j^{\alpha_j}\ .$$

Тут принцип справедливого компромісу дещо порушується, проте це відбувається відповідно до міри важливості критеріїв і практично виливається в штучну диференціацію величини поступки.

Порівнюючи два розглянуті вище принципи справедливої поступки, можна зробити такі висновки:

Принцип справедливого компромісу на основі поступки має вельми чітку ідею справедливості, на основі якої здійснюється вибір компромісного оптимального розв’язку.

Принцип абсолютної поступки не залежить від дійсної величини критеріїв і тому може допускати велику розбіжність в їхніх рівнях, а значить, його належить використовувати лише разом з одним із принципів рівномірності.

Принцип відносної поступки дуже чутливий до величини критеріїв, причому за рахунок відносності поступки відбувається автоматичне зниження її ціни у застосуванні до критеріїв з більшою величиною і навпаки. Унаслідок цього відбувається значне згладжування рівнів критеріїв. Важливою перевагою принципу відносної поступки також можна вважати його інваріантність до масштабу виміру критеріїв.

Якщо має місце неоднакова важливість критеріїв, то ідея справедливого компромісу на основі оцінки поступок втрачає свою ясність, оскільки аргументація вибору вагового вектора α виявляється досить сумнівною, особливо тоді, коли критеріїв багато.

3.5.3. Інші принципи оптимальності

Принцип головного критерію. За цим принципом один із локальних критеріїв вибирається як головний і проводиться його скалярна оптимізація за умови, що рівень інших критеріїв не гірший допустимого, тобто

$$\text{opt}\ y \equiv \max_{y \in Y'} y_1\ ,$$

тут $Y' = \{y \,|\, y_j \ge y_j^{\gamma}, j \in \{2, 3, \dots m\}\} \cap Y^c$, y_j^{γ} – заданий допустимий рівень критерію y_j, $j = 2, 3, \dots m$.

При цьому головним може бути вибрано будь-який критерій, проте краще брати той, для якого складно визначити допустимий рівень.

Взагалі, за допомогою такої моделі можна реалізувати будь-яку схему компромісу й отримати будь-який оптимальний розв'язок у зоні компромісів. У той же час аргументація вибору допустимого рівня критеріїв y_j^γ найчастіше неможлива.

Принцип максимізації зваженої суми критеріїв. Він являє собою модифікацію моделі абсолютної поступки для випадку, коли задано пріоритети критеріїв α_j , $j = 1, 2, \ldots, m$, і записується в такому вигляді:

$$\text{opt } y = \max_{y \in Y^c} \sum_{j \in I} \alpha_j y_j ,$$

тут $\alpha_j \in [0,1]$, $j \in I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $\sum_{j \in I} \alpha_j = 1$.

Певною мірою цей принцип має універсальне значення. Наприклад, при розв'язуванні багатокритерійних задач опуклого програмування за допомогою даної моделі можна визначити множину компромісних розв'язків (теорема 3.1).

Зауважимо, що так само, як і в попередніх випадках, аргументувати вибір вагових коефіцієнтів α_j для реалізації якого-небудь принципу компромісу практично неможливо.

Принцип максимізації ймовірності досягнення ідеальної якості. Часто в стохастичних векторних задачах можуть бути відомі ідеальні, бажані значення всіх локальних критеріїв y_j^u, а отже, ідеальна якість y^u. Тоді задача оптимізації може бути сформульована в скалярній формі з критерієм, який означає ймовірність досягнення складної події $P(y \geq y^u)$, а саме:

$$\text{opt } y \equiv \max_{y \in Y^c} P(y \geq y^u) .$$

Практично ж методи обчислення ймовірності подій, навіть якщо їх дві або три, дуже складні. Ось чому даний метод може бути використаний лише в деяких конкретних випадках, коли кількість подій $m \leq 3$, а обчислення ймовірності $P(y \geq y^u)$ здійснюється досить просто.

3.6. Методи нормалізації критеріїв

В реальних задачах масштаби виміру критеріїв часто неоднакові, а більшість використовуваних моделей чутливі до цього факту (інваріантною є модель відносної поступки) і мають сенс лише в нормалізованому критерійному просторі, а тому виникає необхідність виконувати *нормалізацію* критеріїв, тобто штучно зводити їх до єдиної міри.

Основою для багатьох методів нормалізації є введення поняття «ідеальної якості», тобто вектора, який має ідеальне значення ефективності:

$y^u = (y_1^u, \ldots, y_m^u)$. Тоді вибір оптимального рішення стає рівнозначним найкращому наближенню до цього ідеального вектора. Різні методи нормалізації отримують залежно від того, що вважають ідеальним вектором і в якому сенсі розуміють «найкраще наближення».

Часто замість дійсної величини критеріїв розглядаються або їх відхилення від ідеального значення: $\Delta y_j = y_j^u - y_j,\ j = 1, 2, \ldots m$, або безрозмірна величина критерію: $\bar{y}_j = \dfrac{y_j}{y_j^u}$, вочевидь $\bar{y}_j \in [0;1],\ j = 1, 2, \ldots m$.

При розв'язуванні багатокритерійних задач оптимізації використовуються обидва способи перетворення масштабу. Проте для нормалізації може бути використаний лише другий, оскільки він не залежить від масштабу вимірювання критеріїв, не применшує значущості жодного з них і зводить усі критерії до єдиного масштабу $[0;1]$.

З огляду на спосіб вибору ідеального вектора y^u, розглянемо основні способи нормалізації.

Спосіб 1. За ідеальний вектор якості беруть задані величини критеріїв: $y^u = y^з = \left(y_1^з, y_2^з, \ldots y_m^з\right)$.

Цей випадок досить рідкісний, бо визначення заданої величини критеріїв, як правило, пов'язане із серйозними труднощами, а його аргументація дуже упереджена, що зумовлює суб'єктивність оптимального розв'язку.

Спосіб 2. Як ідеальний вектор ефективності береться той, компонентами якого виступають оптимальні значення локальних критеріїв. Наприклад, у задачі, де всі критерії максимізуються, ідеальний вектор потрібно вибирати в такому вигляді:

$$y^u = (\max_{y \in Y} y_1, \max_{y \in Y} y_2, \ldots, \max_{y \in Y} y_m).$$

І потім, замість абсолютної величини критеріїв, вводиться їх відносна безрозмірна величина, тобто

$$\bar{y}_j = \frac{y_j}{\max\limits_{y \in Y} y_j},\ j = 1, 2, \ldots m.$$

Недоліком цього способу нормалізації є те, що він суттєво залежить від максимального можливого рівня критеріїв, який визначено умовами задачі. За таких обставин перевага автоматично віддається критерію з найбільшою величиною локального оптимуму, а рівноправність критеріїв порушується.

Той самий недолік має також спосіб Севіджа (*принцип найменшої шкоди*). Тут ідеальний вектор має той самий вигляд, але простір критеріїв трансформується в простір відхилень, а саме:

$$\Delta y_j = \max_{y \in Y} y_j - y_j,\ j = 1, 2, \ldots m,$$

і подальший вибір здійснюється на основі принципу мінімаксу. Цей спосіб також суттєво залежить від масштабу вимірювання критеріїв.

Спосіб 3. При його використанні компонентами ідеального вектора слугують точні верхні межі (sup) [або для задач мінімізації – точні нижні межі (inf)] локальних критеріїв, що визначені на просторі рішень *Y*, тобто

$$y^u = (\sup_{y\in Y} y_1, \sup_{y\in Y} y_2, \dots, \sup_{y\in Y} y_m).$$

Відносні критерії тут визначають за такими формулами:

$$\bar{y}_j = \frac{y_j}{\sup\limits_{y\in Y} y_j},\ j = 1, 2, \dots m.$$

Цей спосіб нормалізації – найбільш справедливий бо не порушує рівноправності жодного з критеріїв, до того ж він об'єктивний і не залежить від масштабу їх вимірювання. Незважаючи на це, його застосування часто буває неможливим, оскільки межею критеріїв виступає нескінченність. Правда, за таких умов можлива наближена реалізація цього способу шляхом задання деякого, достатньо високого рівня критеріїв.

Спосіб 4. Тут компонентами y^u виступають максимально можливі відхилення критеріїв з урахуванням умов вихідної задачі, а саме:

$$\bar{y}_j = \frac{y_j}{\max\limits_{y\in Y} y_j - \min\limits_{y\in Y} y_j},\ j = 1, 2, \dots m,$$

або, коли розглядається задача без обмежень, то

$$\bar{y}_j = \frac{y_j}{\sup\limits_{y\in Y} y_j - \inf\limits_{y\in Y} y_j},\ j = 1, 2, \dots m.$$

Зауважимо, що цей спосіб нормалізації вимагає спеціальної перевірки умов інваріантності відносно початку координат і масштабів вимірювання критеріїв, принаймні стосовно використання деяких принципів компромісу.

Спосіб 5. У його межах нормалізація проводиться на одиничному гіперкубі таким чином:

вважають, що $\min\limits_{y\in Y} y_j = 0,\ \max\limits_{y\in Y} y_j = 1,\ j\in I,$

або $\inf\limits_{y\in Y} y_j = 0,\ \sup\limits_{y\in Y} y_j = 1,\ j\in I.$

При цьому також можливі порушення умов інваріантності стосовно початку координат і масштабу вимірювання критеріїв для цілого ряду моделей.

Як бачимо, успішне вирішення проблеми нормалізації багато в чому залежить від того, наскільки точно та об'єктивно вдається визначити ідеальну якість розв’язку, а нормалізація, по суті справи, зводиться до певної трансформації простору критеріїв, тобто до вибору зручної та «справедливої» топології, у якій задача вибору альтернативи за кількома критеріями набуває строгого й зрозумілого сенсу.

Таким чином, перетворення, мають задовольняти такі вимоги:

– враховувати необхідність мінімізації відхилень від оптимальних значень за кожною цільовою функцією;

– мати спільний початок відліку та один і той самий порядок зміни значень на всій множині допустимих альтернатив;

– зберігати відношення переваги на всій множині альтернатив, порівнянних за вихідними цільовими функціями.

Найбільш поширеними, виходячи з вищевикладених способів, є наведені нижче перетворення:

$$w_i^1(f_i(x)) = \begin{cases} \dfrac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_1^{\max} - f_i^{\min}}, \forall i \in I_1, \\ \dfrac{f_i(x) - f_i^{\min}}{f_1^{\max} - f_i^{\min}}, \forall i \in I_2; \end{cases} \tag{3.10}$$

$$w_i^2(f_i(x)) = \begin{cases} \dfrac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_1^{\max}}, \forall i \in I_1, \\ \dfrac{f_i(x) - f_i^{\min}}{f_i^{\max}}, \forall i \in I_2, \end{cases} \tag{3.11}$$

тут $f_i^{\max}$ – максимальне, а $f_i^{\min}$ – мінімальне значення критерія $f_i(x)$ на множині допустимих альтернатив X, $\forall i \in I_1 \bigcup I_2$.

Зауважимо, що розглянуті способи нормалізації описано за умов, що критерії мають однакову важливість, але в більшості випадків вони нерівнозначні, і тому необхідно враховувати їхні пріоритети.

3.7. Способи врахування пріоритету критеріїв

Усі методи врахування пріоритетів критеріїв можна умовно поділити на дві групи. Розглянемо більш детально кожну з них.

3.7.1. Методи врахування жорсткого пріоритету

Методи жорсткого пріоритету базуються на тому, що критерії впорядковані за важливістю: $y_1 > y_2 \dots > y_m$, на основі чого й виконують їх послідовну оптимізацію.

Принцип послідовної оптимізації на основі жорсткого пріоритету полягає в тому, що не допускається підвищення рівня менш важливих критеріїв, якщо це викликає хоча б незначне зниження рівня важливішого критерію.

На практиці це означає, що спочатку відшукують локальний оптимум для найбільш важливого критерію на всій множині допустимих альтернатив X, який фіксується у вигляді додаткового обмеження. Потім шукають локальний оптимум другого за важливістю критерію, але вже для нової допустимої множини X^{01} і так далі. Таким чином, відбувається поступове звуження допустимої множини до єдиного оптимального розв'язку або оптимальної підмножини, тобто

$$X \supset X^{01} \supset X^{02} \supset \dots \supset X^{0m} = X^0,$$

$$X^{0j} = \left\{ x \mid y_j(x) \geq \max_{x \in X^{0(j-1)}} y_j(x) \right\} \bigcap X^{0(j-1)}.$$

Такий принцип упорядковування векторної множини називається *лексикографічним*.

Існують такі труднощі застосування цього методу:

1) у разі наявності груп рівнозначних критеріїв, виникає потреба їх локального впорядкування в межах цих груп на основі одного з принципів рівномірності;

2) для розв'язування багатьох практичних задач цей метод непридатний, оскільки максимізація за першим критерієм дає єдиний розв'язок і задача фактично зводиться до скалярної, бо неголовні критерії зовсім не враховуються.

Разом с тим, цей принцип дає добрі результати при використанні *квазіоптимального* підходу, за яким на кожному етапі проводиться квазіоптимізація, тобто відшукують не єдиний оптимум, а деяку область, близьку до нього, а саме:

$$X^{0j} = \left\{ x \middle| y_j(x) \geq \max_{x \in X^{0(j-1)}} y_j(x) - \Delta y_j \right\} \bigcap X^{0(j-1)},$$

де Δy_j – допустимі відхилення j-го критерію від точного оптимуму.

При цьому рівень допустимого відхилення від оптимуму визначають з урахуванням важливості критеріїв, точності постановки задачі та деяких практичних міркувань.

Зауважимо, що такий підхід на останньому етапі дає не один оптимальний розв'язок, а деяку досить вузьку квазіоптимальну підмножину, тому єдиний розвязок обирає ОПР.

Переваги методу жорсткого пріоритету полягають у тому, що при його використанні не існує потреби в кількісних характеристиках важливості критеріїв, достатньо лише їхнього впорядкування з погляду значущості.

3.7.2. Методи врахування гнучкого пріоритету

Такі методи потребують задання кількісних характеристик пріоритету, що дозволяє при виборі рішення лише певною мірою надавати перевагу важливішим критеріям. Кількісні оцінки пріоритетів задаються, як правило, у вигляді такого вектора:

$$\alpha = (\alpha_1, \underset{j}{\alpha_2}, \ \ldots \ , \alpha_n), \ \ \alpha_i \geq 0, \ \ i \in I, \ \sum_{i \in I} \alpha_i = 1.$$

Залежно від того, який спосіб компромісу буде застосовано, отримують різні варіації методів урахування пріоритетів. Наприклад:

Принцип рівномірності з пріоритетом. Оптимізація проводиться відповідно до однієї з таких вимог:

opt $y = (\alpha_1 y_1 = \alpha_2 y_2 = \ldots = \alpha_n y_n)$ – являє собою принцип рівності з урахуванням пріоритету;

$\text{opt}\, y = \max\limits_{y \in Y^e} \min\limits_{j} \left(\alpha_j y_j \right)$ (принцип рівномірності з пріоритетом);

$\text{opt}\, y = \max\limits_{y \in Y^e} \min\limits_{j}{}_1 \left(\alpha_j y_j \right) \max\limits_{y \in Y^e} \min\limits_{j}{}_2 \left(\alpha_j y_j \right) \ldots$ (принцип найкращої рівно-мірності з пріоритетом).

Принцип справедливої поступки з пріоритетом. Оптимізацію виконують відповідно до такої вимоги:

$$\text{opt}\, y = \max_{y \in Y^e} \sum_{j \in I} \left(\alpha_j y_j \right) \quad \text{або} \quad \text{opt}\, y = \max_{y \in Y^e} \sum_{j \in I} \left(\alpha_j \log y_j \right).$$

Інші принципи оптимальності з пріоритетом. Оптимізацію здійснюють за таким правилом:

$$\text{opt}\, y = \max_{y \in Y^e} \sum_{j \in I} \left(\alpha_j y_j \right)^{-S}.$$

Перевагою методів гнучкого врахування пріоритетів є те, що вони дозволяють у розумних межах надавати перевагу більш значущим критеріям, враховуючи міру їхньої важливості.

Недолік цих методів – складність знаходження числових значень пріоритетів. Як правило, такі оцінки суб'єктивні.

Зауваження 1. Проводячи перетворення простору за допомогою вектора α, необхідно враховувати, який саме принцип оптимальності буде застосований для вибору одного з ефективних розв'язків задачі.

Зауваження 2. Різну важливість критеріїв можна враховувати і при нормалізації. У цьому випадку нормалізація проводиться з урахуванням характеристик пріоритету, наприклад, вагового вектора, а саме:

$$\bar{y}_j = \frac{\alpha_j y_j}{y_j^{u}}, \; j \in I,$$

де y_j^u, $j \in I$ – ідеальний вектор (див. п. 3.6).

У той же час з міркувань чіткості аргументації врахування пріоритету краще проводити після нормалізації критеріїв.

3.8. Методи розв'язування багатокритерійних задач оптимізації

3.8.1. Методи зведення до узагальненого критерію (згортки)

Розглянемо методи розв'язування, що полягають у зведенні початкової багатокритерійної задачі до скалярної шляхом формування деякого узагальненого критерію. В основі кожного з цих методів лежить така схема:

1. Усі критерії нормують, тобто зводять до порівнянного безрозмірного вигляду.

2. Їх «згортають» в одну цільову функцію, формуючи так званий узагальнений критерій, у якому враховано відносну важливість кожного з критеріїв за допомогою таких вагових коефіцієнтів: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$, $i \in I$, $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$.

Унаслідок цього вихідна багатокритерійна задача зводиться до звичайної задачі оптимізації з одним критерієм.

Найбільш поширеними видами згортки є такі:

1. Узагальнені критерії на основі середньозваженої функції, тобто

$$F = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i k_i^s \right)^{1/S},$$

тут k_i, $i = 1, 2, \ldots m$ – нормовані локальні критерії; α_i, $i = 1, 2, \ldots m$ – вагові коефіцієнти.

Серед цієї групи особливо виділяють узагальнений критерій такого вигляду:

$$F_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i ,$$

що являє собою лінійну згортку локальних критеріїв. Він зручний у використанні, бо дозволяє зберігати лінійність вихідних функцій. Іншими словами, якщо вихідні критерії лінійні, то вислідний критерій також буде лінійним.

2. Мультиплікативна згортка $\Phi_\pi = \prod_{i=1}^{m} k_i^{\alpha_i}$.

3. У задачах, де мають місце одночасно критерії, що мінімізуються, і критерії, які максимізуються, дуже часто використовують критерій такого вигляду:

$$F = \frac{\sum_{i \in I_1} f_i(x)}{\sum_{i \in I_2} f_i(x)} .$$

Тут у чисельнику записано суму критеріїв, які максимізуються, а в знаменнику – суму критеріїв, що мінімізуються.

Недолік цього критерію полягає в тому, що він базується на явному припущенні, за яким недостатній рівень одного показника може компенсуватися за рахунок іншого; наприклад, низька продуктивність виробництва нібито компенсується низькою вартістю виробів.

Пригадаємо популярний «критерій оцінки людини». Він має вигляд дробу, де в чисельнику оцінка гідності особи іншими, а в знаменнику її думка про себе.

4. Часто використовують і такий критерій:

$$F(x) = \min_{y \in Y^c} \left(\frac{f_i(x)}{\alpha_i} \right),$$

Згідно з ним замість багатокритерійної задачі розглядається максимінна задача із скалярним критерієм.

На практиці значного поширення також набув метод *цільового програмування*.

У його основі – теж зведення всіх критеріїв в один узагальнений, який означає відстань від даної векторної оцінки до недосяжної ідеальної точки: $b^* = (b_1^*, \ldots\ b_m^*)$.

Найчастіше застосовують узагальнений критерій такого вигляду:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i (f_i(x) - b_i^*).$$

Він дозволяє відшукати оптимальні розв'язки лінійних детермінованих задач за допомогою симплекс-методу.

П р и к л а д 3.11. Розв'язати подану нижче задачу багатокритерійної оптимізації методом згортки, якщо пріоритети критеріїв: $\alpha_1 = 0{,}7$ та $\alpha_2 = 0{,}3$. Критерії вважати нормалізованими.

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,\\
&f_2(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \to \max,\\
&2x_1 - x_2 \geq -4,\\
&2x_1 + 3x_2 \leq 24,\\
&20x_1 - 5x_2 \leq 100,\\
&5x_1 + 20x_2 \geq 100,\\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Розв'язування

Оскільки за умовами задачі критерії нормовані, то проводити їх нормалізацію непотрібно. Виконаємо згортку критеріїв, враховуючи їх задані пріоритети й напрям оптимізації. Оскільки вихідні критерії лінійні, то будемо застосовувати лінійну згортку, а саме:

$$F(x_1, x_2) = \alpha_1 f_1(x_1, x_2) + \alpha_2 f_2(x_1, x_2).$$

Тоді вислідний критерій за нашими даними набуде такого вигляду:

$$F(x_1, x_2) = 0{,}7(3x_1 + 2x_2) + 0{,}3(-x_1 + 2x_2) = 2{,}1x_1 + 1{,}4x_2 - 0{,}3x_1 + 0{,}6x_2 =$$

$$= 1{,}8x_1 + 2x_2.$$

І на його снові формулюємо таку скалярну задачу:

$$
\begin{aligned}
&F(x_1, x_2) = 1{,}8x_1 + 2x_2 \to \max,\\
&2x_1 - x_2 \ge -4,\\
&2x_1 + 3x_2 \le 24,\\
&20x_1 - 5x_2 \le 100,\\
&5x_1 + 20x_2 \ge 100,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Для розв'язування цієї задачі можна використовувати симплекс-метод, або розв'язати її графічно.

У результаті розв'язування $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, а значення інтегрального критерію $F(x_1, x_2) = 26$, вихідні критерії $f_1(x_1, x_2) = 26$, $f_2(x_1, x_2) = 2$.

3.8.2. Метод головного критерію

Розглянемо задачу багатокритерійної оптимізації, у якій усі критерії мінімізуються й упорядковані за важливістю, а саме:

$$f_i(x) \to \min,\ i \in I,$$

$$x \in X,$$

$$f_1(x) \ge f_2(x) \ge \ldots \ge f_M(x).$$

Головна ідея методу полягає в тому, що вихідна багатокритерійна задача оптимізації замінюється однокритерійною із додатковими обмеженнями, які дозволяють у певному сенсі врахувати вимоги, описувані іншими критеріями.

Наведемо схему методу.

1. Вибирають один головний критерій $f_1(x)$, за яким буде проводитися оптимізація.

2. Для менш важливих критеріїв $f_2(x), \ldots f_M(x)$ обчислюють допустимі значення $\bar{f}_2, \ldots \bar{f}_M$.

3. Критерії $f_2(x), \ldots f_M(x)$ замінюють на обмеження такого вигляду:

$$f_i(x) \le \bar{f}_i,\ \text{коли}\ i \in I.$$

4. Замість вихідної, розглядають таку скалярну задачу:

$$
\begin{aligned}
&f_1(x) \to \min,\\
&f_i(x) \le \bar{f}_i, \quad i \in I,\\
&x \in X.
\end{aligned}
$$

Перевагою описаного методу є те, що для його реалізації не потрібна кількісна оцінка пріоритетів критеріїв. А недоліком – складність встановлення допустимих рівнів значень критеріїв. У більшості випадків вони вибираються суб'єктивно. У зв'язку з цим, якщо критерії рівнозначні, за головний може бути обраний будь-який з них, але краще надати перевагу тому, для якого задати допустимі значення найскладніше.

Зауважимо також, що розв'язок, отриманий за допомогою цього методу, завжди буде слабко ефективним, а тоді, коли він єдиний, то й сильно ефективним.

Метод головного критерію може бути застосований також і до розв'язування задач, у яких критерії максимізуються, тоді додаткові обмеження набувають такого вигляду: $f_i(x) \ge \bar{f}_i$, $i \in I$.

У загальному випадку отриману скалярну задачу можна записати в такий спосіб:

$$\begin{aligned} & f_1(x) \to \text{opt}, \\ & f_i(x) \ge \overline{f_i}, \quad i \in I_1, \\ & f_i(x) \le \overline{f_i}, \quad i \in I_2, \\ & x \in X. \end{aligned}$$

де I_1 – множина індексів для яких цільові функції максимізуються; I_2 – множина індексів для яких цільові функції мінімізуються.

Приклад 3.12. Методом головного критерію розв'язати таку задачу багатокритерійної оптимізації:

$$\begin{aligned} & f_1\left(x_1, x_2\right) = 2x_1 + 3x_2 \to \max, \\ & f_2\left(x_1, x_2\right) = x_1 - 3x_2 \to \min, \\ & f_3\left(x_1, x_2\right) = -x_1 + x_2 \to \min, \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ x_2 \le 6, \end{cases} \\ & x_1, x_2 \ge 0, \end{aligned}$$

якщо пріоритети критеріїв задано таким чином: $f_3 > f_1 > f_2$, і відомо граничні значення критеріїв: $f_1^* = 14$, $f_2^* = 3$.

Розв'язування

Виберемо за головний той критерій, що має найбільшу важливість. У даному випадку це критерій f_3. Для інших двох критеріїв задамо обмеження, використовуючи відомі граничні значення. Оскільки критерій f_1 потрібно максимізувати, то відповідне йому обмеження буде мати такий вигляд: $f_1\left(x_1, x_2\right) \ge 14$, тобто $2x_1 + 3x_2 \ge 14$. Для критерію f_2 (який мінімізується) сформулюємо таке обмеженням: $f_2\left(x_1, x_2\right) \le 3$, або в конкретизованому вигляді:

$x_1 - 3x_2 \le 3$, з огляду на це, вихідну багатокритерійну задачу зведено до такої скалярної задачі:

$$f_1\left(x_1, x_2\right) = -x_1 + x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 14, \\ x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю задачу, отримуємо такий результат: $x_1 = 8,25$, $x_2 = 1,75$, а також значення критеріїв: $f_3 = -6,5$, $f_2 = 3$, $f_1 = 21,75$.

Розглянемо геометричну інтерпретацію описаного розв'язування задачі.

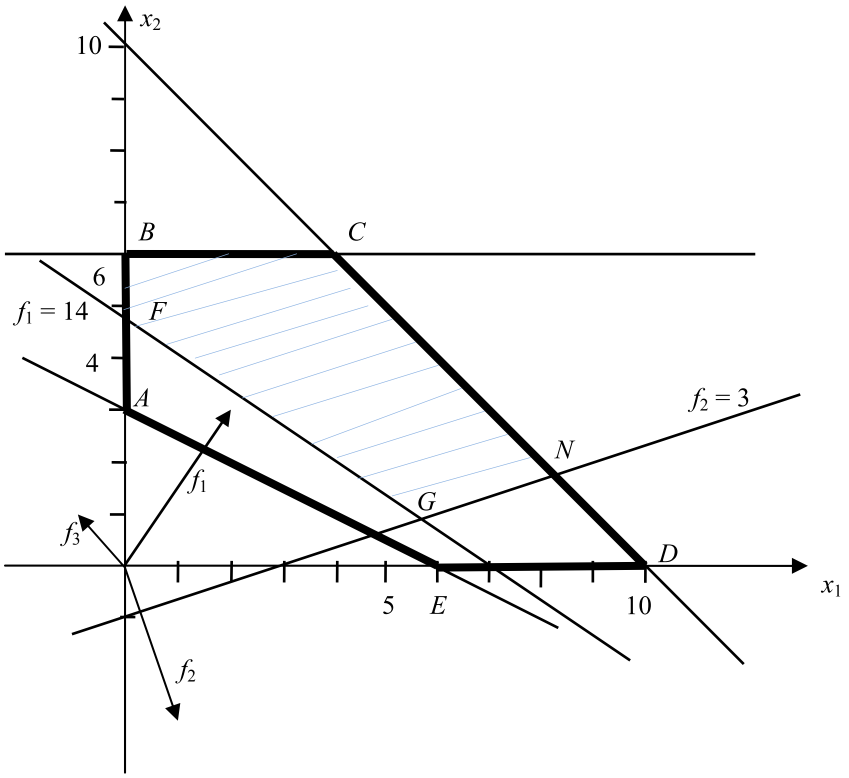
Для цього спочатку побудуємо на координатній площині область допустимих розв'язків вихідної задачі (див. рис. 3.14, *а*) – вона являє собою багатокутник *ABCDE* (на рисунку він позначений товстою лінією) і зобразимо цільові функції вихідної задачі.

Додаткові обмеження змінюють цю область до множини *FBCNG* (на рисунку її заштриховано), при цьому відкидаються всі розв'язки, неприйнятні за критеріями f_1, f_2, а розв'язком задачі є точка *N* з координатами (8,25; 1,75). Легко помітити, що в даному випадку, обмеження, яке відповідає першому критерію, не впливає на розв'язок скалярної задачі, тоді як активним є обмеження, котре стосується другого критерію.

Вочевидь, зміна граничних значень критеріїв приводить до зміни області допустимих розв'язків скалярної задачі. Наприклад ситуація, коли задано такі порогові значення: $f_1^* = 10$, $f_2^* = 0$, показана на рис. 3.14, *б*. Тут область допустимих розв'язків являє собою багатокутник *MLBCNG*. Розв'язком задачі тепер є точка *N* з координатами (7,5; 2,5).

Отже, кожному пороговому значенню відповідає свій оптимальний розв'язок, причому він буде слабко ефективним. Таким чином, змінюючи порогові значення критеріїв, можна знайти всі слабко ефективні розв'язки вихідної багатокритерійної задачі оптимізації.

а



б

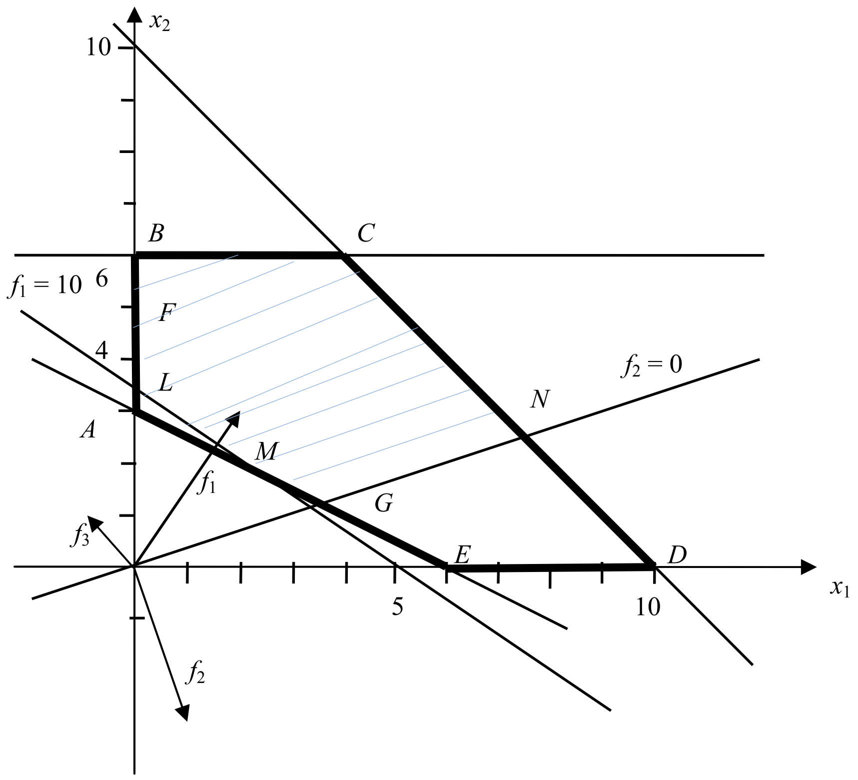


Рис. 3.14. Геометрична інтерпретація розв'язку багатокритерійної задачі до прикладу 3.12, *а* – порогові значення критеріїв: $f_1^* = 14$, $f_2^* = 3$; *б* – порогові значення критеріїв: $f_1^* = 10$, $f_2^* = 0$

3.8.3. Метод послідовних поступок

Цей метод, так само, як і описаний вище метод головного критерію, застосовується в тих випадках, коли критерії впорядковані за важливістю, але невідомі кількісні оцінки їх пріоритетів. Опишемо його в застосуванні до розв'язування задачі такого вигляду:

$$f_i(x) \to \min, i \in I,$$
$$x \in X,$$
$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots \geq f_M(x).$$

Сутність методу послідовних поступок полягає в тому, що вихідна багатокритерійна задача замінюється послідовністю однокритерійних, причому область допустимих розв'язків звужується від задачі до задачі за допомогою додаткових обмежень, де враховано вимоги критеріїв. При формулюванні кожної задачі стосовно важливішого критерію робиться поступка, величина якої залежить від вимог задачі й оптимального розв'язку за цим критерієм.

Опишемо схему методу.

1. Розв'язують скалярну задачу оптимізації за найважливішим критерієм на всій множині допустимих альтернатив *X*, тобто

$$f_1(x) \to \min,$$
$$x \in X.$$

У результаті цього отримуємо оптимальне значення критерію $f_1(x)$: $f_1^{\min}$.

2. Розв'язують задачу оптимізації, керуючись наступним за важливістю критерієм та враховуючи додаткове обмеження: $f_1(x) \leq f_1^{\min} + \Delta_1$, де Δ_1 – допустима поступка за першим критерієм. Цю задачу можна записати таким чином:

$$f_2(x) \to \min,$$
$$f_1(x) \leq f_1^{\min} + \Delta_1,$$
$$x \in X.$$

Унаслідок її розв'язування отримуємо оптимальне значення критерію $f_2(x)$: $f_2^{\min}$.

Нехай після здійснення *k* кроків було отримано оптимальні значення критеріїв: $f_1^{\min}, f_2^{\min}, \ldots, f_k^{\min}$, тоді на (*k* + 1)-му кроці розв'язують таку задачу:

$$\begin{aligned}
& f_{k+1}(x) \to \min, \\
& f_1(x) \le f_1^{\min} + \Delta_1 \\
& f_2(x) \le f_2^{\min} + \Delta_2, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& f_k(x) \le f_k^{\min} + \Delta_k, \\
& x \in X,
\end{aligned}$$

й обчислюють оптимальне значення критерію $f_{k+1}^{\min}$.

Після розгляду всіх критеріїв задачу буде розв'язано. Оптимальним розв'язком багатокритерійної задачі буде розв'язок останньої скалярної задачі.

Таким чином, початкову багатокритерійну задачу було зведено до послідовного розв'язування ряду скалярних задач, кількість яких буде дорівнювати числу критеріїв.

Цей метод дає можливість враховувати пріоритети критеріїв й уникнути підвищення їхніх значень більше деякого допустимого рівня (у разі, коли критерії мінімізуються) або уникнути їх зниження менше певного встановленого рівня (коли критерії максимізуються). Складність застосування методу зумовлена суб'єктивністю у визначенні допустимих рівнів. Зазвичай допустима поступка встановлюється експертами з огляду на оптимальне значення критерію та умови задачі.

Зауваження. Якщо критерій максимізується, то відповідне йому обмеження формулюють таким чином: $f_i(x) \ge f_i^{\max} - \Delta_i$, де Δ_i – допустима поступка за цим критерієм.

Проілюструємо застосування методу послідовних поступок на прикладі.

П р и к л а д 3.13. Розв'язати методом послідовної поступки таку задачу багатокритерійної оптимізації:

$$\begin{aligned}
& f_1(x_1, x_2) = x_1 + 7x_2 \to \max, \\
& f_2(x_1, x_2) = -2x_1 + 3x_2 \to \min x, \\
& f_3(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \min, \\
& \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 - x_2 \le 1, \end{cases} \\
& x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

Вважати, що критерії впорядковано за важливістю.

Розв'язування

Застосовуючи описаний метод, спочатку розв'язуємо задачу оптимізації за критерієм, який має найвищий пріоритет (у даному випадку він перший) на вихідній множині допустимих альтернатив. Вона має такий вигляд:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + 7x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 - x_2 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Оптимальним розв'язком цієї задачі будуть такі значення: $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{9}{4}$, при цьому оптимальне значення першого критерію $f_1^* = 17$.

Припустимо, експерти визначили, що поступка за першим критерієм $\Delta_1 = 2$. Тоді друга задача формулюється за таким правилом: оптимізацію здійснюють за наступним за важливістю критерієм, а до існуючих обмежень додається ще одне, у якому враховано попередній критерій. Оскільки за першим критерієм проводилася максимізація, то обмеження буде мати такий вигляд:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + 7x \ge f_1^* - \Delta_1,$$

тобто

$$x_1 + 7x_2 \ge 17 - 2 = 15.$$

Тоді задача другого етапу формулюється таким чином:

$$f_2(x_1, x_2) = -2x_1 + 3x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + 7x_2 \ge 15, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Розв'язком цієї задачі буде пара (x_1, x_2): $x_1 = \frac{15}{8}$, $x_2 = \frac{15}{8}$, а оптимальне значення критерію при цьому $f_2^* = \frac{15}{8}$.

Тепер робимо поступку за другим критерієм, припустивши, що відповідно рішення експертів $\Delta_2 = \frac{1}{8}$. Враховуючи, що другий критерій мінімізується, відповідне йому додаткове обмеження формулюється таким чином: $f_2(x_1, x_2) = -2x_1 + 3x_2 \le f_2^* + \Delta_2$, а саме:

$$-2x_1 + 3x_2 \le \frac{15}{8} + \frac{1}{8} = 2\,.$$

Отже, третя задача набуває такого вигляду:

$$f_3(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + 7x_2 \ge 15, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв’язком цієї задачі (а значить, і вихідної) буде пара (x_1, x_2): $x_1 = \frac{31}{17}$, $x_2 = \frac{32}{17}$, при цьому значення критеріїв $f_1^* = 15$, $f_2^* = 2$, $f_3^* = \frac{63}{17}$.

Таким чином, розв’язавши три скалярні задачі, отримуємо розв’язок вихідної багатокритерійної задачі оптимізації. Вочевидь, варіюючи щоразу величину поступки, маємо можливість визначити також інші розв’язки цієї задачі.

Зауважимо, що більшість методів багатокритерійної оптимізації передбачають безпосередній вибір оптимального розв’язку із множини всіх наявних. З огляду на це корисно проаналізувати отримані результати, щоб з'ясувати, чи завжди вони забезпечують отримання ефективного розв’язку, а якщо ні, то спеціально передбачити можливість його поліпшення до ефективного.

Для ілюстрації цього факту розглянемо такий приклад:

Існує оригінальний метод багатокритерійної оптимізації, застосовуваний до розв’язування лінійних задач, котрий можна описати таким чином: спочатку знаходять точки оптимуму кожного критерію окремо, а потім оптимальний розв’язок y_0 отримують у вигляді опуклої комбінації точок y^i ($y^\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y^i$, де $\lambda_i \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$), яка забезпечує мінімальне значення максимального із нормованих відхилень критеріїв f_i від властивих їм оптимумів, тобто

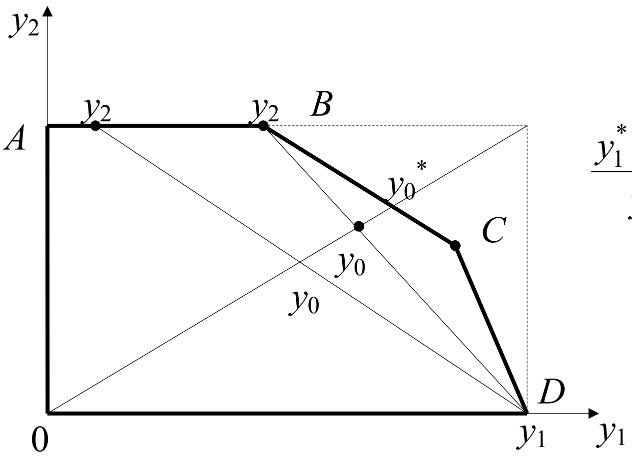
$$\max_{i\in M}\frac{y_i^* - f_i(y^0)}{\left|y_i^*\right|} = \min_{\lambda}\max_{i\in M}\frac{y_i - f_i(y^{\lambda})}{\left|y_i^*\right|},$$

тут $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, y_i^* – оптимальне значення i-го критерію.

Таке визначення оптимального розв’язку має суттєві недоліки.

По-перше, якщо деякий критерій має кілька точок оптимуму на множині X, то не зрозуміло, яку з них слід використовувати, оскільки кожній точці y^i відповідатиме свій розв’язок y_0.

По-друге, отриманий таким шляхом оптимальний розв’язок, як правило, не буде навіть слабко ефективним.



$$\frac{y_1^* - y_1}{y_1^*} = \frac{y_2^* - y_2}{y_2^*}$$

Рис. 3.15. Графічна інтерпретація визначення розв’язку багатокритерійної задачі

Цю ситуацію проілюстровано на рис. 3.15. Тут обидва критерії y_1 та y_2 максимізуються, область допустимих рішень (багатокутник $OABCD$) показано товстою лінією. Очевидно, що оптимальним розв’язком задачі за критерієм y_1 буде точка: $D = (y_1, 0)$, за критерієм y_2 оптимальними будуть усі точки на відрізку AB. Якщо відповідно до цього критерію вибрати за оптимальний розв’язок точку y_2'', то описаний метод дає розв’язок багатокритерійної задачі y_0'', а якщо обрати за оптимум точку y_2' – отримаємо розв’язок y_0'. Проте жоден з них не буде ефективним, оскільки розв’язок y_0^* кращий від будь-якого з них, причому відразу за обома критеріями.

Пізніше це визначення було вдосконалене, а саме: оптимальним запропоновано вважати розв’язок y^*, який описано такою умовою:

$$\max_{i\in M}\frac{y_i^* - f_i(x^{0*})}{\left|y_i^*\right|} = \min_{x\in X}\max_{i\in M}\frac{y_i^* - f_i(x)}{\left|y_i^*\right|}.$$

3.9. Поняття про розв’язок задачі багатокритерійної оптимізації при заданих перевагах на множині критеріїв

Розглянемо таку задачу багатокритерійної оптимізації:

$$w_i(x) \to \min, \quad i \in I,$$
$$x \in X,$$

тут $0 < w_i(x) < 1$, $i \in I$ і задано переваги на множині цільових функцій W.

Л е м а 3.2. Для кожної допустимої альтернативи $x \in X$, характерної ознаками: $0 < w_i(x) < 1$, $\forall i \in I$, у просторі $W \subset E^M$ існують вектор p і число $k_0 > 0$, причому вектор p відповідає таким співвідношенням:

$$p = (p_1, p_2, \ldots p_M) = \{\, p\colon p_i > 0, \forall\ i \in I, \sum_{i\in I} p_i = 1\}, \tag{3.12}$$

і альтернатива $x \in X$ задовольняє одночасно такі рівності:

$$p_i\, w_i\,(x) = k_0, \quad i \in I. \tag{3.13}$$

Доведення

Оскільки $w_i\,(x) > 0$, коли $i \in I$, то, поділивши обидві частини виразу (3.13) на $w_i\,(x)$, робимо висновок, що

$$p_i = k_0 \,/\, w_i(x)\ . \tag{3.14}$$

Але оскільки величини p_i повинні задовольняти умову (3.12), то після підстановки у співвідношення: $\sum_{i\in I} p_i = 1$, виразу (3.14), отримаємо такий результат:

$$k_0 = \frac{1}{\sum_{i\in I} 1/w_i(x)} = \frac{\prod_{i\in I} w_i(x)}{\sum_{q\in I}\prod_{\substack{i\in I\\ i\neq q}} w_i(x)}\ , \tag{3.15}$$

тоді, відповідно,

$$p_i = \frac{\prod_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} w_j(x)}{\sum_{q\in I}\prod_{\substack{j\in I\\ j\neq q}} w_j(x)}\ . \tag{3.16}$$

Це і доводить лему.

З а у в а ж е н н я. Вираз (3.15), що визначає параметр k_0, є монотонно зростаючою функцією за кожною із змінних $w_i(x)$ на інтервалі (0,1), при цьому $k_0 \in (0; 1/M)$.

Л е м а 3.3. Якщо для двох нееквівалентних альтернатив x^* та x^{**} із множини X вектори p^* і p^{**} збігаються ($p_i^* = p_i^{**}$, $\forall i \in I$), то $w_i(x^*) = \gamma w_i(x^{**})$, $\forall i \in I$ і $k_0(x^*) = \gamma k_0(x^{**})$, де γ – коефіцієнт пропорційності, $\gamma \neq 1$.

Доведення

Альтернативі x^* відповідає вектор p^*, тобто $p_i^* w_i(x^*) = k_0(x^*)$, для всіх значень $i \in I$, а альтернативі x^{**} відповідає вектор p^{**}, тобто $p_i^{**} w_i(x^{**}) = k_0(x^{**})$, $\forall i \in I$, звідси

$$p_i^* = \frac{k_0\left(x^*\right)}{w_i\left(x^*\right)} \quad \text{і} \quad p_i^{**} = \frac{k_0\left(x^{**}\right)}{w_i\left(x^{**}\right)}.$$

Тепер, враховуючи, що $p_i^* = p_i^{**}$, $\forall i \in I$, отримуємо такий результат:

$$\frac{w_i(x^*)}{w_i(x^{**})} = \frac{k_0(x^*)}{k_0(x^{**})} = \gamma, \qquad \forall i \in I,$$

це і доводить лему.

Зауважимо, що напрямок, визначуваний вектором $p \in P^+$, задається для альтернатив, що перебувають у додатному октанті просторуу W значень функції w.

Довільний вектор вагових коефіцієнтів $p \in P^+$, що задовольняє умови (3.12), інтерпретуватимемо як надання переваги одній цільовій функції над іншою, виражене кількісно.

Визначимо напрямок, породжений вектором p в просторі W. Задамо цей напрямок кутами β_i $(i \in I)$ між осями координат і радіусом-вектором p, а саме:

$$\cos\beta_i = \frac{(w^*, e_i)}{\left\|w^*\right\| \cdot \left\|e_i\right\|} = \frac{w_i^*}{\sqrt{\sum_{i \in I} w_i^{*2}}}, \qquad \forall i \in I,$$

тут $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ – це орт на осі w_i, а $w^* = \{w_i^*\}$, являючи собою точку, розташовану в просторі W на промені p.

Беручи до уваги це співвідношення й умову нормування, запишемо систему лінійно незалежних рівнянь, з яких легко можуть бути знайдені невідомі напрямні косинуси, а саме:

$$\frac{\cos\beta_i}{\cos\beta_j} = \frac{w_i^*}{w_j^*}, \quad \forall i, j \in I, \quad i \neq j,$$

$$\sum_{i \in I} \cos^2 \beta_i = 1 .$$

З іншого боку, через лему 3.2 для будь-якої точки w^* виконується система рівностей (3.13), звідси

$$\frac{w_i^*}{w_j^*} = \frac{p_j}{p_i}, \qquad \forall i, j \in I,\ i \neq j,$$

а значить,

$$\begin{cases} \dfrac{\cos \beta_i}{\cos \beta_j} = \dfrac{p_j}{p_i}, & i, j \in I, \quad i \neq j, \\ \displaystyle\sum_{i \in I} \cos^2 \beta_i = 1. \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему, отримаємо таку формулу для визначення напрямних косинусів вектора p:

$$\cos \beta_i = \frac{\prod\limits_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} p_j}{\sqrt{\sum\limits_{q \in I} \prod\limits_{j \in I} p_j^{\,2}}}, \qquad \forall i \in I . \tag{3.17}$$

Вважатимемо цільові функції рівноцінними, якщо $p_i = 1/M, \quad \forall i \in I$, тоді напрямні косинуси вектора p у просторі W визначатимуться за такими формулами:

$$\cos \beta_i = \frac{1}{\sqrt{M}}, \qquad \forall i \in I .$$

Отже, задання кількісних переваг на множині цільових функцій за допомогою співвідношення (3.12) показує напрям пошуку розв’язків у просторі W вибраних перетворень.

Ось чому розв’язком задачі векторної оптимізації будемо вважати компромісну альтернативу, що належить множині ефективних альтернатив і перебуває на заданому напрямку, встановленому вектором $p \in P^+$ у просторі W.

Коли для деякої альтернативи x і заданого вектора $p \in P^+$ виконується співвідношення: $p_i w_i(x) = k_0, \quad \forall\, i \in I$, то будемо говорити, що альтернатива x лежить на напрямку, визначеному вектором $p \in P$.

Знайдемо, яке значення параметра k_0 відповідає ефективній альтернативі, що лежить у заданому напрямку, встановленому вектором p.

Т е о р е м а 3.4. Якщо x_0 – ефективна альтернатива для заданого вектора $p \in P^+$, то їй відповідає найменше значення параметра k_0, при якому система рівностей (3.13) виконується одночасно для всіх значень $i \in I$.

Якщо за перетворення $w_i(f_i(x))$, $\forall i \in I$ вибрати те, що має вигляд (3.10), то з урахуванням цієї теореми можна дати таке визначення: *розв'язком задачі векторної оптимізації для заданого вектора переваг* $p \in P^+$ *будемо вважати компромісну альтернативу* $x \in X$, *яка забезпечує однакові мінімальні зважені відносні втрати:* $\widetilde{w}_i(x) = p_i w_i(x)$, *за всіма критеріями одночасно.*

3.10. Метод обмежень при пошуку компромісних розв'язків у задачах векторної оптимізації

З метою обґрунтування обчислювальної процедури пошуку визначеного вище компромісного розв'язку доведемо теорему.

Т е о р е м а 3.5. Для того, щоб альтернатива $x^* \in X$, характерна такими ознаками: $w_i(x^*) > 0$, $\forall i \in I$, була ефективною відповідно до заданого вектора переваг $p \in P^+$, достатньо, аби вона являла собою єдиний розв'язок системи нерівностей:

$$p_i w_i(x^*) \le k_0, \quad \forall i \in I, \tag{3.18}$$

стосовно мінімального значення параметра k_0^*, з яким ця система сумісна.

Доведення

Припустимо протилежне, тобто, альтернатива x^*, будучи єдиним розв'язком системи (3.18), коли параметр $k_0 = k_0^*$, не є ефективною. Тоді існує альтернатива $x' \in X$, відповідна таким умовам: $w_i(x') \le w_i(x^*)$, $\forall i \in I$, і хоча б одна нерівність виконується як строга. Помноживши ці нерівності на $p_i > 0$, $\forall i \in I$, робимо такий висновок:

$$p_i w_i(x') \le p_i w_i(x^*) \le k_0^*, \ \forall i \in I,$$

і хоча б одна нерівність виконується строго. Отже, маємо протиріччя. Альтернатива x' задовольняє систему (3.18) із значенням параметра k_0, не більшим від k_0^*. Тим самим теорему доведено.

Із цієї теореми виходить, що визначений раніше компромісний розв'язок задачі багатокритерійної оптимізації може бути знайдений як єдиний розв'язок системи нерівностей (3.18) при мінімальному значенні параметра k_0, з яким ця система сумісна.

У просторі рішень компромісній альтернативі відповідає точка перетину променя, напрямні косинуси якого визначаються заданим вектором переваг $p \in P^+$ за формулами (3.17), з областю ефективних альтернатив.

Із існування точок перетину випливає наявність компромісного розв'язку, для якого мінімально можливі зважені втрати за всіма критеріями однакові

$[p_i w_i(x) = k_{0(\min)}, \forall i \in I\,]$. Якщо такої точки не існує, то для компромісної альтернативи виконуватиметься система нерівностей, і цій альтернативі відповідатиме точка, найближча до заданого променя.

Для знаходження компромісного розв’язку побудуємо ітераційний процес з параметром $k_0 \in (\,0;\,1/M)$, на кожному кроці якого перевіряється сумісність системи нерівностей (3.15) для $x \in X$ і заданого вектора p.

Параметр $k_0 \in (0;\,1/M)$ обмежує відносні втрати: $w_i(x) = w_i\,(f_i\,(x))$, $\forall i \in I$. Якщо $k_0 \to 0$, то відносні втрати прямують до 0, тобто цільові функції $f_i(x)$ прямують до своїх оптимальних значень, а коли $k_0 \to 1/M$, то нерівності (3.18) задовольняються на всій множині допустимих альтернатив X.

Зменшуючи параметр k_0 і тим самим знижуючи зважені втрати за всіма цільовими функціями, ми наближаємося до компромісної альтернативи, що забезпечує мінімальні втрати за всіма критеріями $f_i(x)$.

Ітераційний процес припиняється, коли найменше значення $k_0(l)$ (l – номер кроку), при якому система нерівностей (3.18) на множині допустимих альтернатив ще сумісна, відрізняється від найближчого значення $k_0(l + 1)$, для якого система вже не сумісна, не більше, ніж на величину: $\varepsilon \geq 0$. Величина ε задається наперед із міркувань прийнятного часу розв’язування задачі. При цьому, якщо розв’язок системи нерівностей єдиний, то це і є шукана компромісна альтернатива. Якщо ж він не єдиний, то для отриманих альтернатив відносні втрати еквівалентні з точністю ε. Єдину компромісну альтернативу можна визначити, оптимізуючи який-небудь узагальнений критерій на множині еквівалентних із точністю до ε альтернатив. Наприклад, можна лінійну згортку критеріїв:

$$F(x) = \sum_{i \in I} p_i w_i(x)\ , \tag{3.19}$$

мінімізувати на такій множині:

$$X' = \left\{x : p_i w_i(x) \leq k_{0(min)},\ \forall\, i \in I,\ x \in X\right\}. \tag{3.20}$$

Такий узагальнений критерій завжди дає змогу відшукати ефективні розв’язки.

Розглянемо геометричну інтерпретацію цього методу.

П р и к л а д 3.14. Нехай задано рівноцінні критерії, і множина допустимих альтернатив лінійна (див. рис. 3.16). Тут G – область значень перетворених критеріїв w_1 і w_2 на множині обмежень, Γ – межа цієї множини, Ω_j – частина області значень критеріїв w_1 і w_2, у якій вони не перевищують величину параметра k_0^j.

Критерії w_1 і w_2 визначено співвідношеннями (3.10), тобто вони зведені до безрозмірного вигляду й мінімізуються.

Оскільки критерії рівноцінні, то $p_1 = p_2 = 1/2$, і $\cos(\beta_1) = \cos(\beta_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,
тобто напрямок R – це бісектриса координатного кута $w_1 0 w_2$. Розв'язки, що забезпечують мінімальні відносні відхилення від оптимальних значень, розташовані в області G на промені, який виходить із початку координат у напрямку R.

Компромісним розв'язком, що забезпечує мінімальні відхилення, буде точка C^* (перетин променя із областю ефективних альтернатив). Щоб її знайти, обчислимо послідовно таке найменше значення k_0^l, при якому перетин множин Ω_l та G не пустий.

Якщо вектор, знайдений відповідно до формули (3.16), не перетинається із областю ефективних точок, то в область Ω_l, відповідну мінімальному значенню k_0, при якому система (3.18) ще сумісна, обов'язково потрапить деяка множина точок і серед них обов'язково буде ефективна, якнайкраще відповідна перевазі, заданій ваговим вектором, тобто найближча до променя R.

Проаналізуємо з цих позицій деякі узагальнені критерії.

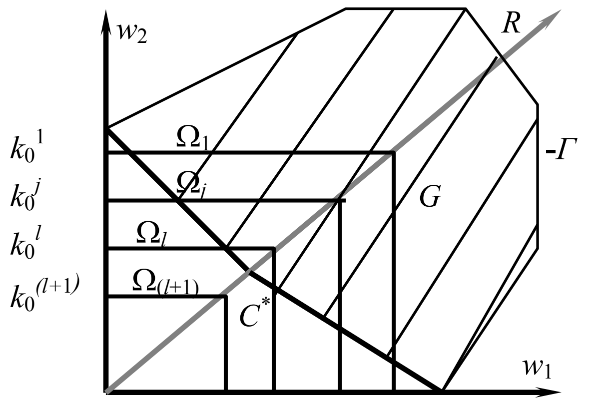


Рис. 3.16. Графічне подання ітераційного процесу пошуку компромісної альтернативи

Розглянемо критерій такого вигляду:

$$\min_{x \in X} F(x) = \min_{x \in X} \max_{i \in I} p_i w_i(x), \qquad (3.21)$$

тут $w_i(x)$, $i \in I$ описуються співвідношеннями (3.10).

Цей метод дозволяє знайти таку альтернативу, для якої або виконується система рівностей: $p_i w_i(x^*) = k_0$, $\forall\, i \in I$ і мінімального значення параметра k_0, або для деяких значень параметра рівності не виконуються і $p_i\, w_i(x^*) < k_{0(\min)}$.

Якщо така альтернатива єдина, то це й буде шуканий компромісний розв'язок, в іншому разі необхідно застосовувати додатковий критерій (3.19).

Таким чином, запропонований метод, базований на пошуку додаткових альтернатив системи нерівностей (3.18) при мінімальному значенні k_0, можна розглядати як спосіб розв'язування задачі (3.21).

Метод мінімізації критеріїв, що мають вигляд згортки (3.19) на множині X, не дозволяє домогтися описаного вище розв'язку з таких причин:

– він істотно залежить від вибору виду перетворення $w_i(x)$, оскільки різний порядок величин $w_i(x)$ приводить до зміни переваг, і доданки можуть ставати порівнянними за величиною при малих значеннях p_i;

– коли порядок критеріїв $w_i(x)$, $i \in I$ однаковий, то переваги можуть змінюватися за рахунок несиметричної поведінки функцій $f_i(x)$;

– якщо функції $f_i(x)$ лінійні, а допустима множина являє собою багатогранник, то розв'язок за критерієм (3.19) лежатиме у вершині багатогранника, у той час, коли компромісний розв'язок буде розміщуватись на ребрі.

Якщо в ролі можливого перетворення взяти формули (3.10), то задачу знаходження єдиної альтернативи (3.19), (3.20), можна сформулювати у такий спосіб:

Знайти розв'язок такої задачі параметричного програмування відносно параметра k_0 при заданому векторі переваг p:

$$\min_x \left[F(x) = \sum_{i\in I_1} p_i \frac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_i^{\max} - f_i^{\min}} + \sum_{i\in I_2} p_i \frac{f_i(x) - f_i^{\max}}{f_i^{\max} - f_i^{\min}} \right], \tag{3.22}$$

враховуючи такі обмеження:

$$x \in X,$$
$$f_i(x) \geq f_i^* = \frac{k_0}{p_i}\left(f_i^{\max} - f_i^{\min}\right), \quad \forall i \in I_1, \tag{3.23}$$
$$f_i(x) \leq f_i^* = \frac{k_0}{p_i}\left(f_i^{\max} - f_i^{\min}\right), \quad \forall i \in I_2.$$

Результатом розв'язування задачі (3.22), (3.23) при мінімально можливому значенні параметра $k_0 \in (0;\, 1/M)$ і буде шукана компромісна альтернатива.

Цей метод називається *методом обмежень*.

Опишемо його алгоритм.

1. Відшукується мінімально можливе значення параметра k_0, при якому система обмежень (3.23) буде сумісною.
2. Якщо розв'язок системи єдиний, то він і буде шуканим розв'язком задачі багатокритерійної оптимізації.
3. Якщо розв'язок цієї системи нерівностей не єдиний, то подальший вибір здійснюється за допомогою критерію (3.22).

Зауважимо, що цей метод не залежить від виду функцій $f_i(x)$ і множини допустимих альтернатив X. Необхідно лише мати ефективні способи перевірки на сумісність системи нерівностей (3.23).

3.11. Метод обмежень у багатокритерійній задачі лінійного програмування

Нехай задано деяку множину лінійних цільових функцій:

$$F = \{f_i(x)\}, \quad i \in I,$$

тут $f_i(x) = c^i x = c_1^i x_1 + c_2^i x_2 + \ldots + c_n^i x_n$, $i \in I$, причому m перших функцій максимізуються, а решта $(M - m)$ – мінімізуються.

Для змінних: $x = \{x_j\}$, $j = 1, \ldots, n$, визначено лінійні обмеження, що мають такий вигляд:

$$Ax \le b,$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Застосуємо для розв'язування цієї задачі метод обмежень. Згідно з ним необхідно спочатку виконати перетворення цільових функцій, таким чином:

$$w_i(f_i(x)) = \frac{c^i x_i^0 - c^i x}{c^i x_i^0 - c^i x_{i\min}}, \quad \forall i \in I_1,$$

$$w_i(f_i(x)) = \frac{c^i x \ - c^i x_i^0}{c^i x_{i\max} - c^i x_i^0}, \quad \forall i \in I_2,$$

тут $x_i^o = \left(x_{i1}^o, x_{i2}^o, \ldots x_{ij}^o, \ldots x_{in}^o\right)$ – розв'язок, який належить множині обмежень та оптимізує i-ту цільову функцію; $x_{i\max} = \left(x_{i1\max}, x_{i2\max}, \ldots x_{ij\max}, \ldots x_{in\max}\right)$, $x_{i\min} = \left(x_{i1\min}, x_{i2\min}, \ldots x_{ij\min}, \ldots x_{in\min}\right)$ – розв'язки, що забезпечують мінімальне та максимальне значення i-го критерію відповідно.

Компромісним розв'язком буде такий, для якого зважені відносні втрати будуть однаковими й мінімальними, тобто $p_1 w_1(x) = \ldots = p_m w_m(x) = k_{0\min}$.

Згідно з методом обмежень цей розв'язок можливо знайти із системи нерівностей (3.23), яка в даному випадку може бути записана таким чином:

$$\begin{aligned} & c^i x \ge c^i x_i^o - \frac{k_0}{p_i}\left(c^i x_i^o - c^i x_{i\min}\right), \quad \forall i \in I_1, \\ & c^i x \le c^i x_i^o + \frac{k_0}{p_i}\left(c^i x_{i\max} - c^i x_i^o\right), \quad \forall i \in I_2, \\ & Ax \le b, \quad x_i \ge 0, \quad \forall i \in I. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Розв'язування системи (3.24) буде еквівалентним розв'язуванню сформульованої нижче задачі лінійного програмування:

$$\min_x \{k_0 = x_{n+1}\}$$

за таких обмежень:

$$
\begin{aligned}
&d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n + d_{1n+1}x_{n+1} + d_1 \geq 0,\\
&d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \ldots + d_{2n}x_n + d_{2n+1}x_{n+1} + d_2 \geq 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&d_{M1}x_1 + d_{M2}x_2 + \ldots + d_{Mn}x_n + d_{Mn+1}x_{n+1} + d_M \geq 0,\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1 \leq 0,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - b_2 \leq 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n - b_p \leq 0,\\
&x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots n,
\end{aligned}
$$

тут

$$
d_{ij} = \begin{cases} p_i c_j^i, & \forall j = \overline{1,n}, \forall i \in I_1,\\ -p_i c_j^i, & \forall j = \overline{1,n}, \forall i \in I_2, \end{cases}
\qquad
d_{i,n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j^i (x_{ij}^0 - x_{ij\min}), \forall i \in I_1,\\ \sum_{j} c_j^i (x_{ij\max} - x_{ij}^0), \forall i \in I_2, \end{cases}
$$

$$
d_i = \begin{cases} -p_i \sum_{j=1}^{n} c_j^i x_{ij}^0, & \forall i \in I_1,\\ p_i \sum_{j=1}^{n} c_j^i x_{ij}^0, & \forall i \in I_2. \end{cases}
$$

Висновки

Однією із проблем у прийнятті рішень є наявність великого числа критеріїв, які не завжди погоджені між собою. Така ситуація може бути описана математичними моделями задач багатокритерійної оптимізації.

Розв'язок задачі багатокритерійної оптимізації необхідно шукати серед множини ефективних, тобто непокращуваних, альтернатив. Оскільки ефективні альтернативи або еквівалентні, або непорівнянні між собою, то для вибору однієї з них належить використовувати певні принципи компромісу.

Критерії можуть мати різну важливість, а їх пріоритети можна задати кількісно – у вигляді вектора пріоритетів: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ $\alpha_i \geq 0$, $i \in I$, $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$, або якісно – відношенням переваги на множині цільових функцій: $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots \geq f_M(x)$. Залежно від того, як задано пріоритети критеріїв, який саме принцип компромісу обрано і який вигляд має область допустимих альтернатив та цільові функції, використовують різні методи для відшукування множини ефективних альтернатив і відповідні їм методи розв'язування задач багатокритерійної оптимізації. Охарактеризуємо коротко найбільш поширені з них.

Метод головного критерію полягає в заміні багатокритерійної задачі однокритерійною із додатковими обмеженнями. Цей метод не вимагає нормалізації критеріїв і кількісного задання їх пріоритетів, але необхідно мати інформацію про порогові значення неголовних критеріїв.

Методи згортки базуються на введенні інтегрального критерію і подальшому зведенні вихідної багатокритерійної задачі до скалярної, вони зручні у використанні, але мають кілька обмежень. Зокрема, ці методи передбачають нормалізацію критеріїв і кількісне задання їх пріоритетів, крім того вони можуть бути застосовані тільки до увігнутих функцій та опуклої множини допустимих альтернатив.

Метод послідовної поступки не потребує нормалізації критеріїв і кількісного задання їх пріоритетів. Вихідна багатокритерійна задача замінюється послідовністю скалярних задач. Величину поступки за кожним критерієм визначає ОПР, залежно від величини оптимуму й сенсу задачі.

Оскільки не завжди альтернативи, знайдені внаслідок розв’язування задачі багатокритерійної оптимізації, будуть ефективними, корисно проаналізувати отримані результати, щоб з'ясувати, чи вдалося вибрати ефективний розв’язок, і якщо ні, то спеціально передбачити можливість його поліпшення до ефективного.

Контрольні питання

1. Сформулюйте загальну постановку задачі багатокритерійної оптимізації.
2. Які альтернативи називають ефективними за Парето? Ефективними за Слейтером?
3. Які властивості ефективних альтернатив ви знаєте?
4. Сформулюйте й доведіть лему про еквівалентність ефективних альтернатив.
5. Сформулюйте теореми про властивості ефективних альтернатив.
6. Які методи знаходження ефективних альтернатив Ви знаєте?
7. Для чого потрібна нормалізація критеріїв при розв’язуванні багатокритерійних задач?
8. Які способи нормалізації критеріїв Ви знаєте?
9. У чому полягає задача пошуку компромісних рішень?
10. Яка сутність принципів рівномірності при пошуку компромісних рішень.
11. Які принципи рівномірності при пошуку компромісних рішень ви знаєте?

12. У чому полягає сутність принципів поступки при пошуку компромісних рішень?

13. Які принципи поступки при пошуку компромісних рішень ви знаєте?

14. Поясніть сутність інших принципів оптимальності при пошуку компромісних рішень.

15. Які з інших принципів оптимальності при пошуку компромісних рішень Ви знаєте?

16. У чому полягають методи згортки в застосуванні до розв'язування багатокритерійних задач?

17. Назвіть етапи методів згортки.

18. Які види згорток ви знаєте?

19. Назвіть переваги й недоліки методів типу згортки?

20. Чи є обов'язковою нормалізація критеріїв при використанні методів згортки?

21. Чи потрібні кількісні значення переваг критеріїв при використанні методів згортки?

22. У чому полягає сутність методу головного критерію розв'язування багатокритерійних задач?

23. Перелічіть переваги й недоліки застосування методу головного критерію?

24. Чи обов'язкова нормалізація критеріїв при використанні методу головного критерію до розв'язування багатокритерійних задач?

25. Чи потрібні кількісні значення переваг критеріїв при використанні методу головного критерію в розв'язуванні багатокритерійних задач?

26. Яка сутність методу послідовної поступки розв'язування багатокритерійних задач?

27. Які існують переваги і в чому полягають труднощі застосування методу послідовної поступки до розв'язування багатокритерійних задач?

28. Чи передбачено нормалізацію критеріїв у разі застосування методу послідовної поступки?

29. Чи потрібні кількісні значення переваг критеріїв при використанні методу послідовної поступки?

30. Чи визначають методи згортки, послідовної поступки та головного критерію єдиний оптимальний розв'язок багатокритерійної задачі ?

31. Чи можна знайти за допомогою цих методів один з ефективних розв'язків багатокритерійної задачі?

32. Які методи врахування пріоритету критеріїв ви знаєте?

33. Назвіть методи врахування жорсткого пріоритету критеріїв, у чому полягає їх сутність?

34. Перелічіть методи врахування гнучкого пріоритету критеріїв, у чому полягає їх сутність?

35. Який сенс має розв’язок задачі багатокритерійної оптимізації при заданому відношенні переваги?

36. У чому полягає сутність методу обмежень при пошуку компромісних розв’язків задачі векторної оптимізації?

Завдання до розділу 3

Завдання А

1. Побудувати множину ефективних альтернатив такої задачі багатокритерійної оптимізації:

$$f_1\left(x_1, x_2\right) = x_1 + 7x_2 \to \max,$$
$$f_2\left(x_1, x_2\right) = 2x_1 - 3x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 - x_2 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

2. Розв’язати сформульвану нижче задачу багатокритерійної оптимізації методом головного критерію, якщо переваги критеріїв задано таким чином: $f_3 > f_1 > f_2$.

3.

$$f_1\left(x_1, x_2\right) = x_1 + 7x_2 \to \max,$$
$$f_2\left(x_1, x_2\right) = 2x_1 - 3x_2 \to \max,$$
$$f_3\left(x_1, x_2\right) = x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 - x_2 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

4. Розв’язати подану нижче задачу багатокритерійної оптимізації методом згортки, якщо переваги критеріїв дорівнюють 0,3; 0,2; 0,5 відповідно.

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \min,$$
$$f_2(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 \to \max,$$
$$f_3(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_2 \le 6, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

5. На множині критеріїв задано жорсткі пріоритети: $f_3 > f_1 > f_2$. Які методи багатокритерійної оптимізації можуть бути застосовані? Розв'язати за цих умов таку задачу багатокритерійної оптимізації:

$$f_1(x_1, x_2) = -x_1 + 3x_2 \to \min,$$
$$f_2(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2 \to \max,$$
$$f_3(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_2 \le 8, \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 15, \\ x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

6. Нехай на множині альтернатив: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{10}\}$, задано п'ять критеріїв, причому критерії f_1, f_4 , f_5 максимізуються, а f_2, f_3 – мінізуються. Значення критеріїв на множині X задано в табл. 3.3. Визначити множину ефективних альтернатив.

Таблиця 3.3

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
x_1	1	3	3	6	2
x_2	2	5	2	7	3
x_3	6	3	5	5	4
x_4	3	2	3	6	5
x_5	9	7	8	5	4
x_6	3	4	5	2	4
x_7	6	4	5	7	5
x_8	3	2	1	4	2
x_9	5	7	4	3	4
x_{10}	7	4	2	5	6

Завдання В

Сформулювати математичні моделі поданих нижче задач багатокритерійної оптимізації.

1. Підприємство «Ранок» має 7 пунктів, серед яких магазини й склад продукції. Щоденно здійснюється доставка товару зі складу до магазинів. Відомо, як розташовані магазини і які існують можливі шляхи сполучення між ними. Необхідно скласти оптимальний маршрут для транспортування продуктів зі складу до магазинів, враховуючи вартість перевезення, час доставки, довжину маршруту, його завантаженість, якість доріг, за умови, що перевезення виконуються одним автомобілем і в кожний з магазинів товар завозять один раз на добу.

2. На Запорізькому залізорудному комбінаті в процесі добування залізної руди застосовують закладку, що твердіє, вона складається з в'язких та інертних матеріалів. Інертним заповнювачем для приготування закладної суміші слугують відходи енергетичного, металургійного й гірничого виробництва, зокрема доменні шлаки (x_1), хвости ЦГЗК (x_2), вапняно-доломітний матеріал (x_3), пісок (x_4) та суглинок (x_5). Завдання полягає у визначенні такого складу суміші, щоб її вартість була мінімальною, а міцність максимальною. При цьому повинні виконуватись такі технологічні умови: вміст води в суміші дорівнює 20 % від в'яжучих складових; вміст цементу, вапняно-доломітного матеріалу й піску має становити відповідно 65, 9, 35, і 18 % від інертних компонентів суміші.

Залежність міцності суміші від її складових описується функцією: $\varphi(x) = 467x_1 + 380x_2 - 54x_3 + 87x_4 - 120x_5 - 23{,}25$.

3. На шахті «Добропільська» функціонує три видобувних дільниці. Видобуте на кожній з них вугілля має має різний вміст сірки, вологість і зольність (табл. 3.4). Стосовно кожної з дільниць відомі значення максимально можливого й мінімально необхідного обсягу видобутку, а також витрати на видобуток однієї тонни сировини (табл. 3.4). Плановий обсяг видобутку продукції на шахті становить 3000 тис. т. Необхідно, з огляду на можливості кожної дільниці, так скласти план видобувних робіт, щоб витрати були мінімальними, обсяг видобутку був максимальним і зольність отриманої сировини не перевищувала 39,5 % .

Таблиця 3.4

Характеристики вугілля, % та показники роботи дільниці	№ дільниці		
	1	2	3
Зольність	49	37	23
Вологість	7	8	10

Продовження табл. 3.4

Вміст сірки	1,8	2,1	3
Витрати, гр.	1184210	1381777	1083515
Максимальний обсяг видобутку, тис. т	1650	1090	1270
Мінімальний обсяг видобутку сировини, тис. т	1200	600	530

4. Механічний завод, виготовляючи деталі трьох типів, використовує токарні, фрезерувальні й стругальні верстати. При цьому обробку кожної деталі можна вести трьома різними технологічними способами *Т*1, *Т*2 і *Т*3. У табл. 3.5 подано норми часу при обробці деталі на відповідному верстаті кожним технологічним способом, а також ресурси (верст.-год) кожної групи верстатів. Прибуток від продажу кожного виду виробу становить відповідно 22, 18 і 30 грн. Скласти оптимальний план завантаження виробничих потужностей, який забезпечує максимальний прибуток за умови мінімального часу використання токарних верстатів.

Таблиця 3.5

Тип верстата	Норми часу на обробку деталей, год									Ресурс часу
	I			II			III			
	Т1	Т2	Т3	Т1	Т2	Т3	Т1	Т2	Т3	
Токарний	1	0,9	1,1	1,2	1,5	–	0,9	–	–	200
Фрезерувальний	0,8	0,8	1,3	0,9	1,1	1,3	1,1	0,8	–	400
Стругальний	–	0,7	0,7	0,7	–	1,3	1,3	0,6	–	300

Завдання С

Розв’язати подані в завданні В задачі багатокритерійної оптимізації методами згортки, головного критерію, послідовної поступки.

РОЗДІЛ 4

НЕЧІТКІ МНОЖИНИ Й НЕЧІТКІ ВІДНОШЕННЯ

Мета розділу: ознайомлення з поняттями нечіткої множини й нечіткого відношення, їх властивостями та використанням у теорії прийняття рішень.

4.1. Поняття належності

Нехай E – деяка множина, A – її підмножина, тобто $A \subset E$, x – деякий елемент множини E, причому $x \in A$. Для опису цієї належності можна використовувати *характеристичну функцію* $\mu_A(x)$, значення якої свідчать про те, належить елемент x множині A чи ні, а саме:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases} \tag{4.1}$$

П р и к л а д 4.1. $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ і нехай $A = \{x_2, x_3, x_5\}$. Випишемо для кожного елемента множини E його ступінь належності множині A:

$$\mu_A(x_1) = 0, \quad \mu_A(x_2) = 1, \quad \mu_A(x_3) = 1, \quad \mu_A(x_4) = 0, \quad \mu_A(x_5) = 1.$$

Таким чином, усі елементи множини A можна подати через елементи множини E, супроводжуючи кожен з них значенням його ступеня належності, а саме:

$$A = \{ (x_1|0), \ (x_2|1), \ (x_3|1), \ (x_4|0), \ (x_5|1) \}.$$

П р и к л а д 4.2. Нехай множина $E = [0; 5]$, $A = [1; 2]$, тоді

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \in [0; 1) \cup (2; 5], \end{cases}$$

і множину A можна записати таким чином: $A = \{x \in E : \mu_A(x) = 1\}$.

Нехай $\overline{A}$ – доповнення множини A відносно E, тобто $\overline{A} \subset E$, $A \cup \overline{A} = E$, і $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Якщо $x \in A$, то $x \notin \overline{A}$, і ми можемо записати, що коли $\mu_A(x) = 1$, то $\mu_{\overline{A}}(x) = 0$.

За цих умов для даних прикладу 4.1 одержимо такі значення ступеня належності елементів множини $\overline{A}$:

$\mu_{\overline{A}}(x_1) = 1$, $\mu_{\overline{A}}(x_2) = 0$, $\mu_{\overline{A}}(x_3) = 0$, $\mu_{\overline{A}}(x_4) = 1$, $\mu_{\overline{A}}(x_5) = 0$,
й $\overline{A} = \{(x_1|1), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0)\}$.

Для умов прикладу 4.2

$$\mu_{\overline{A}} = \begin{cases} 1, x \in [0;1) \cup (2;5], \\ 0, x \in [1;2], \end{cases}$$

і $\overline{A} = \{x \in E, \mu_{\overline{A}}(x) = 1\}$.

Тепер розглянемо операції об'єднання й перетину множин, користуючись термінологією характеристичних функцій.

Візьмемо дві множини A та B, характеристичні функції яких

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases} \qquad \mu_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

відповідно.

Характеристичною функцією їх перетину буде функція $\mu_{A \cap B}(x)$, яку визначено за такими правилами:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 1, \ x \in A \cap B, \\ 0, \ x \notin A \cap B. \end{cases}$$

Її можна записати у вигляді такої формули:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x),$$

або

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Аналогічно для об’єднання множин $A \cup B$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 1, \ x \in A \cap B, \\ 0, x \notin A \cap B, \end{cases}$$

тобто $\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \oplus \mu_B(x)$, де $\oplus$ – булеве додавання,

або $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

П р и к л а д 4.3. Розглянемо таку множину: $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, та дві її підмножини:

$$A = \{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\} \text{ і } B = \{(x_1|1), (x_2|0), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\}.$$

Знайдемо їх об'єднання й перетин:

$$A \cap B = \{(x_1|0), (x_2|0), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\},$$

$$A \cup B = \{(x_1|1), (x_2|1), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\},$$

а також доповнення отриманих підмножин:

$$\overline{A \cap B} = \{(x_1|1), (x_2|1), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0)\},$$

$$\overline{A \cup B} = \{(x_1|0), (x_2|0), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\}.$$

4.2. Визначення нечіткої множини та пов'язана з нею термінологія

У всіх прикладах з попереднього підрозділу елементи множини E або належать або не належать підмножині A і характеристична функція цієї підмножини набуває значення 0 або 1. Тепер припустимо, що вона може набувати будь-яких значень із інтервалу [0;1]. Згідно з цим припущенням, елемент x множини E може не належати множині A, тоді $\mu_A(x) = 0$; може бути елементом A незначною мірою [коли величина $\mu_A(x)$ близька до 0]; може належати множині A більшою чи меншою мірою [коли величина $\mu_A(x)$ не дуже близька до 0 та до 1], являти собою елемент множини A значною мірою, при цьому $\mu_A(x)$ близьке до 1 або, нарешті, x може бути елементом множини A – і тоді $\mu_A(x) = 1$. Таким чином, ми отримуємо узагальнення поняття належності, яке дозволяє нам ввести поняття нечіткої множини.

В и з н а ч е н н я 4.1. Нехай E – деяка множина (у звичайному уявленні). *Нечіткою підмножиною* A в E назвемо сукупність пар такого вигляду: $(x, \mu_A(x))$, де $x \in E$, функція $\mu_A(x) : E \to [0;1]$. При цьому $\mu_A(x)$ називається *функцією належності* нечіткої підмножини A.

Значення $\mu_A(x)$ цієї функції для конкретного елемента x називається *ступенем належності* цього елемента до нечіткої підмножини A.

Позначаємо нечітку підмножину $\widetilde{A}$, або $\widetilde{A} \subset E$, коли ж ясно, що мова йде саме про нечіткі підмножини, то пишемо просто: $A \subset E$.

Належність елемента до нечіткої підмножини позначається таким чином:

$$x \underset{0,2}{\in} \widetilde{A},\ y \underset{1}{\in} \widetilde{A},\ z \underset{0}{\in} \widetilde{A},$$

де $\underset{0}{\in}$ позначає $\notin$, $\underset{1}{\in}$ еквівалентне $\in$.

П р и к л а д 4.4. Нехай $\widetilde{A}=\{(x_1|0{,}2),(x_2|0),(x_3|0{,}3),(x_4|1),(x_5|0{,}5)\}$ – нечітка підмножина універсальної множини: $E=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

Це означає, що нечітка підмножина $\widetilde{A}$ містить елементи x_1, x_3 незначною мірою, x_2 не містить, повною мірою включає елемент x_4, а x_5 належить їй значною мірою.

Таким чином, у нас є можливість створити математичну структуру, деякий об’єкт, що дозволяє оперувати відносно неповно визначеними елементами, належність яких даній підмножині тільки деякою мірою ієрархічно впорядкована.

Наведемо приклади подібних структур:

– множина *дуже високих* осіб у деякій множині людей;

– підмножина *темно-зелених* кольорів у множині всіх кольорів;

– підмножина чисел , які *приблизно дорівнюють* даному дійсному числу;

– підмножина цілих чисел, *дуже близьких* до 0;

– якщо a – матеріальне число, а x – *невелике* додатне число, то числа $a+x$ утворюють нечітку підмножину в множині матеріальних чисел.

Зауважимо, що потрібно розрізняти ймовірність і нечіткість. Коли мова йде про імовірність, то мають на увазі належність або неналежність елемента до чіткої, цілком визначеної множини під впливом випадкових умов. Наприклад, із ймовірністю p певний студент складе сесію на відмінно, тобто буде належати до множини відмінників. Множина відмінників являє собою цілком визначену, чітку множину. Нечіткість же припускає, що саму множину не визначено повною мірою, тобто немає можливості встановити точно її межі. Прикладом такої множини є «множина людей, які гарно співають». Невизначеним тут виступає саме поняття «гарного співу». У наведених вище прикладах нечітких множин курсивом виділено елементи, що зумовлюють їхню нечіткість. Насправді, одна та й сама людина може вважатися «дуже високою» і в той же час ні, оскільки немає можливості чітко визначити межу цієї множини, а формулювання «приблизно дорівнює» в кожній ситуації може розумітися по-різному.

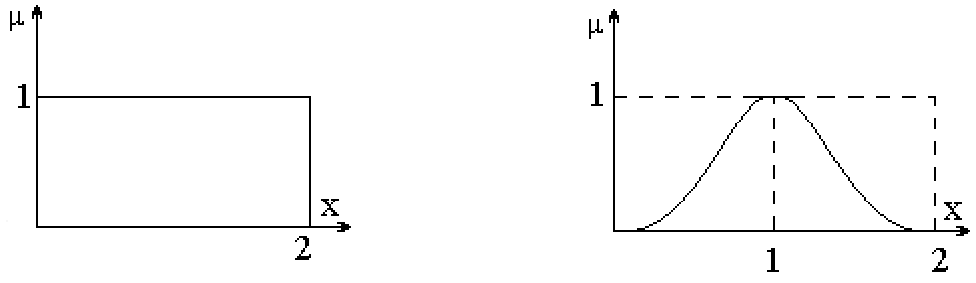
Людина легко використовує поняття, які не можна чітко описати, і апарат нечітких множин призначено саме для того, щоб надати математичної форми якісним поняттям, формалізувати операції з такими поняттями.

Як випливає з визначення 4.1, нечітка підмножина цілком описується своєю функцією належності, тому нижче ми будемо інколи використовувати функцію належності для позначення нечіткої множини.

Звичайні множини утворюють підклас класу нечітких множин. Це ті множини, функції належності яких набувають значень тільки 0 або 1.

П р и к л а д 4.5. Розглянемо звичайну підмножину чисел: $B=\{x \mid 0 \le x \le 2\}$, та нечітку підмножину чисел: $\widetilde{C}=\{x \mid \text{"}x \text{ близьке до } 1\text{"}\}$.

Графіки функцій належності цих множин зображено на рис. 4.1. Зауважимо, що вигляд функції належності μ_C нечіткої підмножини $\widetilde{C}$ залежить від сенсу, якого в даній конкретній ситуації, набуває поняття «близький».



а *б*

Рис. 4.1. Графіки функцій належності: *а* – звичайної множини *B*; *б* – нечіткої підмножини $\widetilde{C}$

Нечітка підмножина називається *пустою*, якщо її функція належності дорівнює нулю на всій множині *E*, тобто

$$\mu_{\varnothing}(x) = 0, \quad \forall x \in E. \tag{4.1}$$

Універсальну множину *E* можна описати функцією належності такого вигляду:

$$\mu_E(x) = 1, \quad \forall x \in E \ . \tag{4.2}$$

В и з н а ч е н н я 4.2. *Носієм* нечіткої підмножини *A* (позначається як supp *A*) з функцією належності $\mu_A(x)$ називається множина (у звичайному сенсі), що має такий вигляд:

$$\text{supp}\, A = \{x | x \in E,\ \mu_A(x) \geq 0\}. \tag{4.3}$$

П р и к л а д 4.6. Нехай універсальна множина $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, її підмножина $A = \{(x_1|0{,}1), (x_2|0{,}3), (x_3|0{,}5), (x_4|0), (x_5|1)\}$.

Тоді supp $A = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$.

В и з н а ч е н н я 4.3. Нечітка підмножина *A* називається *нормальною*, якщо виконується така рівність: $\sup\limits_{x \in E} \mu_A(x) = 1$. В іншому випадку нечітка підмножина називається *субнормальною*.

Наприклад, нечітка підмножина $\widetilde{C}$ з прикладу 4.2 – нормальна. Субнормальним часто буває перетин нечітких підмножин. Субнормальну нечітку множину *A* можна перетворити в нормальну (нормалізувати). Для цього потрібно поділити функцію належності цієї множини на величину $\sup\limits_{x \in A} \mu(x)$. Однак слід пам'ятати, що застосовуючи таке перетворення в будь-якій задачі, необхідно чітко уявити собі його «фізичний сенс».

В и з н а ч е н н я 4.4. Нехай $\widetilde{A}$ та $\widetilde{B}$ нечіткі підмножини в множині *E*, а $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$ їхні функції належності відповідно. Будемо говорити, що $\widetilde{A}$

містить у собі $\widetilde{B}$ (тобто $\widetilde{B} \subset \widetilde{A}$), якщо для будь-якого елемента $x \in E$ буде справедливою така нерівність:

$$\mu_B(x) \le \mu_A(x). \tag{4.4}$$

Зауважимо, що коли $\widetilde{B} \subset \widetilde{A}$, то $\operatorname{supp} B \subset \operatorname{supp} A$.

В и з н а ч е н н я 4.5. Множини *A* та *B* збігаються (еквівалентні), якщо

$$\mu_B(x) = \mu_A(x), \quad \forall x \in E.$$

П р и к л а д 4.7. Нехай задано універсальну множину: $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Розглянемо дві її підмножини:

$$A = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0{,}5)\},$$

$$B = \{(x_1|0), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}5), (x_5|0{,}2)\}.$$

Оскільки $\max\limits_{x \in A} \mu_A(x) = 1$, нечітка підмножина *A* – нормальна; для множини *B* – $\max\limits_{x \in B} \mu_B(x) = 0{,}5 < 1$, тому множина *B* – субнормальна. Крім того $B \subset A$, оскільки $\mu_B(x_i) \le \mu_A(x_i), \ \forall x_i \in E$.

П р и к л а д 4.8. Розглянемо нечіткі підмножини:
$A = \{x|$ “величина *x* близька до 1”$\}$, $B = \{x|$ “величина *x* дуже близька до 1”$\}$.

Ясно, що $B \subset A$, тоді функції належності цих підмножин повинні задовольняти таку нерівність: $\mu_B(x) \le \mu_A(x), \ \forall x \in E$. Графічно ці функції можуть виглядати так, як це зображено на рис. 4.2.

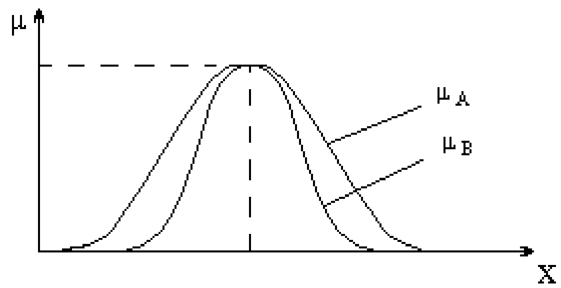


Рис. 4.2. Графіки функцій належності множин *A* та *B*, де $B \subset A$

4.3. Операції над нечіткими множинами

Оскільки нечіткі множини являють собою розширення класу звичайних, то до них можна застосовувати всі ті операції, що визначено над звичайними множинами, у той же час існують і спеціальні, тільки їм властиві операції.

Розглянемо спочатку звичайні операції над нечіткими множинами та їх властивості.

У застосуванні до нечітких множин звичайні операції, наприклад об'єднання й перетин, можна визначити багатьма способами. Нижче ми розглянемо кілька з них. Вибір конкретного способу залежить від сенсу, якого операція набуває в рамках поданої задачі. Але, оскільки звичайні множини являють собою підклас нечітких, природною вимогою до визначення цих операцій буде правильне їх виконання стосовно чітких множин.

В и з н а ч е н н я 4.6. Об'єднанням нечітких підмножин A та B називається нечітка підмножина $A \bigcup B$, функція належності якої має такий вигляд:

$$\mu_{A \bigcup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad x \in E. \tag{4.5}$$

Якщо $\{A_y\}$ являє собою скінченну або нескінченну сім'ю нечітких підмножин з функціями належності $\mu_{A_y}(x, y)$, де $y \in Y$ – параметр сім'ї, то об′єднання: $C = \bigcap\limits_y A_y$, множин цієї сім'ї являє собою нечітку множину з такою функцією належності:

$$\mu_C(x) = \sup_{y \in Y} \mu_{A_y}(x, y), \ x \in X. \tag{4.6}$$

Графічну інтерпретацію цього визначення подано на рис. 4.3. Тут нечіткі підмножини $\widetilde{A}$ та $\widetilde{B}$ зображено графіками їх функцій належності, товста лінія відображає функцію належності об′єднання цих множин за визначенням 4.6.

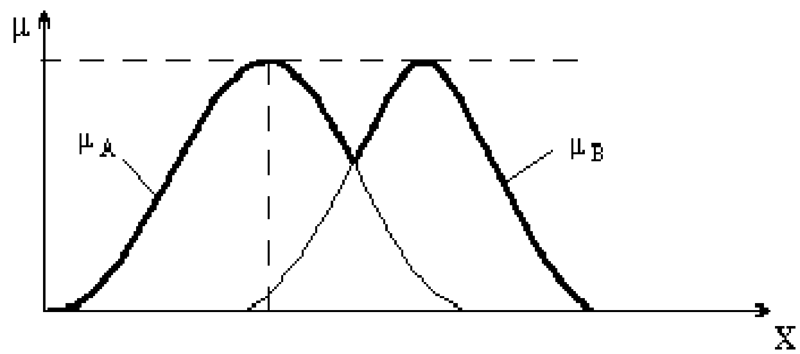


Рис. 4.3. Графік функції належності об'єднання нечітких множин A та B, коли $\mu_{A \bigcup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(\mathrm{x})\}, \quad x \in E$

П р и к л а д 4.9. Нехай на універсальній множині: $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, подано нечіткі множини: $A = \{(x_1|1), (x_2|0{,}2), (x_3|0), (x_4|0{,}5), (x_5|0{,}8)\}$ та $B = \{(x_1|0), (x_2|0{,}5), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}2), (x_5|0)\}$. Знайти їх об'єднання.

Розв'язування

Згідно з визначенням 4.6.

$A \bigcup B = \{(x_1|1), (x_2|0{,}5), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}5), (x_5|0{,}8)\}$.

В и з н а ч е н н я 4.6, *а*. Об′єднання нечітких підмножин A та B можна визначати також, використовуючи обмежену суму їх функцій належності, а саме:

$$\mu_{A\bigcup B}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu_A(x) + \mu_B(x) \geq 1, \\ \mu_A(x) + \mu_B(x) & \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{4.7}$$

Цю формулу інакше можна записати таким чином:

$$\mu_{A\bigcup B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}. \tag{4.8}$$

Графічну інтерпретацію об′єднання, за визначенням 4.6, *а*, нечітких підмножин A та B з функціями належності μ_A й μ_B відповідно зображено на рис. 4.4.

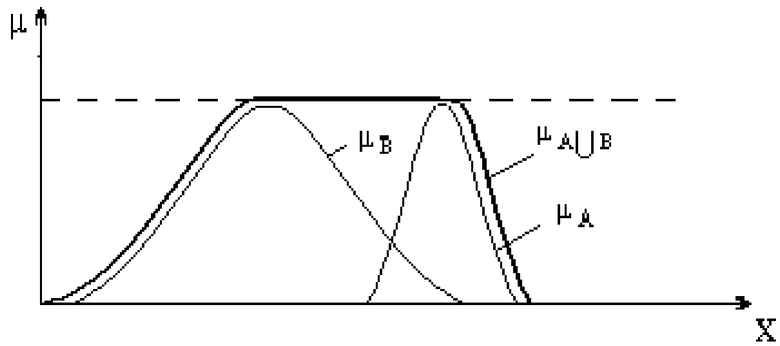


Рис. 4.4. Графік функції належності об'єднання нечітких множин *A* та *B* за визначенням 4.6, *а*

П р и к л а д 4.10. Узявши підмножини з прикладу 4.9, знайдемо їх об′єднання за визначенням 4.6, *а*. Отже,

$$A \bigcup B = \{(x_1|1), (x_2|0{,}7), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}7), (x_5|0{,}8)\}.$$

В и з н а ч е н н я 4.6, *б*. Об′єднання нечітких множин можна знайти також через їх алгебраїчну суму, тобто об′єднання нечітких множин A та B являє собою нечітку множину з такою функцією належності:

$$\mu_{A\bigcup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x). \tag{4.9}$$

Графічне зображення функції належності об′єднання нечітких підмножин *A* та *B* за визначенням 4.6, *б*, якщо їх функціями належності є $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$ відповідно, подано на рис. 4.5.

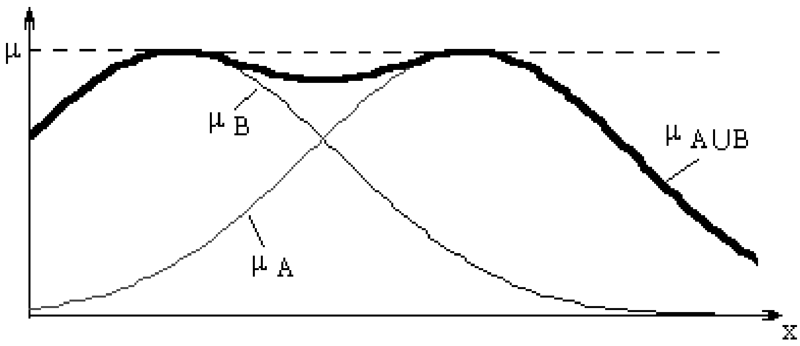


Рис. 4.5. Графік функції належності об’єднання нечітких множин *A* та *B* за визначенням 4.6, *б*

П р и к л а д 4.11. Знайдемо об′єднання підмножин *A* та *B* з прикладу 4.9 за визначенням 4.6, *б*. Отже,

$$A \cup B = \{(x_1|1),(x_2|0{,}6),(x_3|0{,}2),(x_4|0{,}6),(x_5|0{,}8)\}.$$

В и з н а ч е н н я 4.7. Перетином нечітких підмножин *A* та *B* універсальної множини *E* називається нечітка підмножина з функцією належності такого вигляду:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad x \in E. \qquad (4.10)$$

Її графік подано на рис. 4.6.

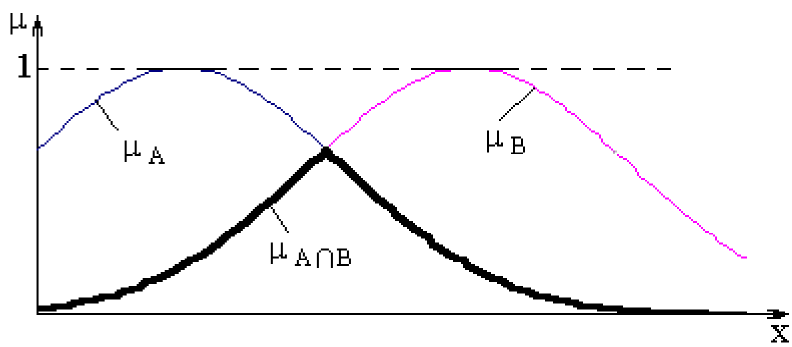


Рис. 4.6. Графік функції належності перетину нечітких множин *A* та *B* за визначенням 4.7

П р и к л а д 4.12. Визначимо перетин $A \cap B$ нечітких підмножин A та B універсальної множини E, використовуючи визначення 4.7, якщо

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},$$

$$A = \{(x_1|1), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}7), (x_5|0{,}8)\},$$

$$B = \{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}4), (x_5|0)\}.$$

Отже, $A \cap B = \{(x_1|0), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}4), (x_5|0)\}$.

Коли $\{A_y\}$ – скінченна або нескінченна сім'я нечітких підмножин, характерна функціями належності $\mu_{A_y}(x, y)$, де $y \in Y$, – параметр сім'ї, то перетин: $C = \bigcap\limits_y A_y$, її множин являє собою нечітку множину, функція належності якої

$$\mu_C(x) = \inf_{y \in Y} \mu_{A_y}(x, y), \quad x \in E. \tag{4.11}$$

Перетин нечітких підмножин можна визначити також іншим способом.

В и з н а ч е н н я 4.7, *а*. Перетин нечітких підмножин A та B – це обмежений добуток їхніх функцій належності, тобто

$$\mu_{A \cap B}(x) = \max\{0\,,\, \mu_{\text{A}}(x) + \mu_B(x) - 1\}. \tag{4.12}$$

Графічну інтерпретацію такого перетину бачимо на рис. 4.7. Тут $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$ відображають функції належності нечітких підмножин A та B відповідно. Товстою лінією зображено функцію належності перетину A та B.

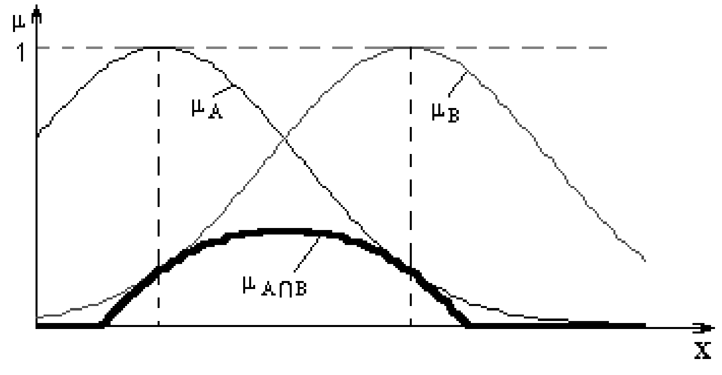


Рис. 4.7. Графік функції належності перетину нечітких множин за визначенням 4.7, *а*

Ще одне визначення перетину можна сформулювати, використовуючи алгебраїчний добуток їхніх функцій належності.

В и з н а ч е н н я 4.7, *б*. Перетином нечітких множин *A* та *B* назвемо нечітку множину, функція належності якої дорівнює алгебраїчному добутку функцій належності даних множин, тобто

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_{\mathrm{A}}(x)\mu_B(x). \tag{4.13}$$

Графіки функцій належності $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$ нечітких множин *A* і *B*, та їх перетину за визначенням 4.7, *б* зображено на рис. 4.8. Товста лінія графіка відповідає функції належності перетину.

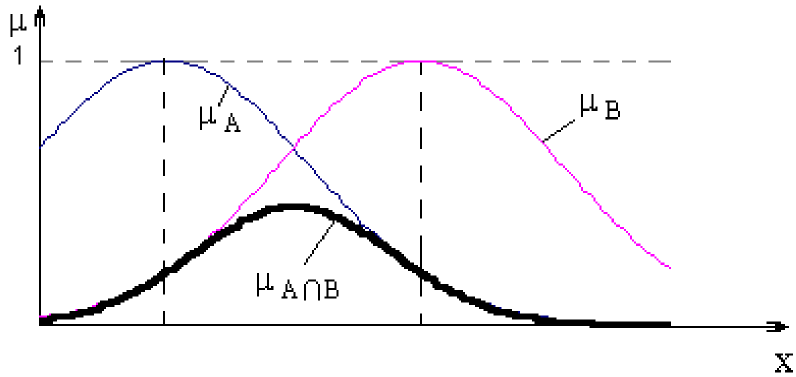


Рис. 4.8. Графік функції належності перетину нечітких множин *A* та *B* за визначенням 4.7, *б*

П р и к л а д 4.13. Знайдемо перетин нечітких підмножин *A* та *B*, якщо $A \subset E$, $B \subset E$, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,

$$A = \{(x_1|1), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}7), (x_5|0{,}8)\},$$

$$B = \{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}4), (x_5|0)\}.$$

Тоді за визначеннями 4.7

$$A \cap B = \{(x_1|0), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}1), (x_5|0)\},$$

а за визначеннями 4.7, *б*

$$A \cap B = \{(x_1|0), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}28), (x_5|0)\}.$$

В и з н а ч е н н я 4.8. *Доповненням* нечіткої множини *A* в *E* називається нечітка множина $\overline{A}$, характерна такою функцією:

$$\mu_A(x) = 1 - \mu_A(x),\ x \in E. \tag{4.14}$$

Зауважимо, що властивість: $A \cap \overline{A} = \varnothing$, яка за всіх умов виконується для звичайних множин, не завжди справедлива стосовно нечітких множин.

Наприклад, якщо доповнення нечіткої множини визначити, як описано вище, а перетин обчислено за правилом 4.7 або 4.7, *б*, то $A \cap \overline{A} \neq \varnothing$, але при обчисленні перетину за правилом 4.7, *а* рівність: $A \cap \overline{A} = \varnothing$, буде правильною. Який саме варіант перетину та об'єднання використовувати, обирає дослідник залежно від того, які властивості операцій істотні для розв'язуваної задачі.

П р и к л а д 4.18. Розглянемо таку нечітку підмножину: A = {числа, що значно більші за 0}, її функцію належності зображено на рис. 4.9 суцільною кривою. Доповненням множини A буде нечітка множина чисел, які не набагато перевищують нуль. Цій множині відповідає функція належності, графік якої зображено на рис. 4.9 пунктирною лінією.

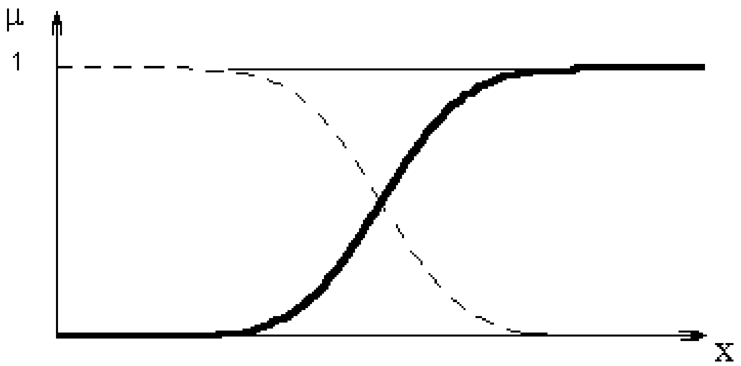


Рис. 4.9. Графіки функцій належності нечіткої множини A та її доповнення (до прикладу 4.18)

Непустий перетин множин A та $\overline{A}$ в цьому прикладі являє собою нечітку множину чисел, які «значно більші від нуля і не набагато перевищують нуль» одночасно. Непустота цієї нечіткої множини відображає той факт, що саме поняття «бути значно більшим» описано нечітко, тому деякі числа можуть певною мірою належати одночасно до обох множин. У деякому сенсі цей перетин ми можемо вважати «нечіткою межею» між множинами A та $\overline{A}$.

В и з н а ч е н н я 4.9. *Різницею* підмножин A та B універсальної множини E назвемо нечітку множину $A \backslash B$, характерну такою функцією належності:

$$\mu_{A\backslash B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) - \mu_B(x), & \text{коли} \quad \mu_A(x) \geq \mu_B(x), \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \tag{4.15}$$

тобто

$$\mu_{A\backslash B}(x) = \max\{\, \mu_{\mathrm{A}}(x) - \mu_B(x), 0 \,\}. \tag{4.16}$$

Знайдемо різницю нечітких підмножин A та B, якщо $A \subset E$, $B \subset E$, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,

$A = \{(x_1|1), (x_2|0{,}4), (x_3|0), (x_4|0{,}7), (x_5|0{,}8)\}$,

$B = \{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}4), (x_5|0)\}$,

Тоді за визначеннями 4.9, *а*

$A \setminus B = \{(x_1 \mid 1), (x_2 \mid 0), (x_3 \mid 0), (x_4 \mid 0{,}3), (x_5 \mid 0{,}8)\}$.

4.4. Відстань між нечіткими підмножинами

Відстань Хеммінга. Спочатку згадаємо поняття відстані Хеммінга у застосуванні до звичайних підмножин.

Нехай *A* і *B* – дві звичайні підмножини скінченної множини: $E = \{x_1, \dots, x_7\}$, причому

$B = \{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|0), (x_4|0), (x_5|0), (x_6|1), (x_7|1)\}$,

$A = \{(x_1|1), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0), (x_6|1), (x_7|0)\}$.

Під *відстанню Хеммінга* між *A* та *B* розуміють таку величину:

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|. \tag{4.17}$$

У нашому прикладі

$d(A, B) = |1-0| + |0-1| + |0-0| + |1-0| + |0-0| + |1-1| + |0-1| = 4$.

Відстань Хеммінга задовольняє всі аксіоми метрики, а саме:

1. $d(X, Y) \geq 0$,
2. $d(X, Y) = d(Y, X)$,
3. $d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$,
4. $d(X, X) = 0$.

Завдання. Перевірити виконання цих аксіом по відношенню до відстані Хеммінга.

Для скінченої множини *E*, потужність якої $m(E) = n$ (тобто n – число елементів множини *E*), визначимо також відносну відстань Хеммінга таким чином:

$$\delta(A,B)=\left(\frac{1}{n}\right)d(A,B). \tag{4.18}$$

Стосовно поданих вище підмножин A та B $\delta(A,B)=\frac{1}{7}\cdot d(A,B)=\frac{4}{7}$.

Очевидно, що завжди $0 \le \delta(A, B) \le 1$.

Узагальнення поняття відстані Хеммінга

Розглянемо тепер три нечіткі підмножини A, B, $C \subset E$, тут E − скінченна множина потужності n, а саме:

$$A=\frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \dots x_n}{a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid \dots a_n}, \tag{4.19}$$

$$B=\frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \dots x_n}{b_1 \mid b_2 \mid b_3 \mid \dots b_n}, \tag{4.20}$$

$$C=\frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \dots x_n}{c_1 \mid c_2 \mid c_3 \mid \dots c_n}. \tag{4.21}$$

Припустимо, що ми визначили відстань $D(a_i, b_i)$ між a_i та b_i, $i=\overline{1,n}$, а також між (b_i, c_i) та (a_i, c_i), $i=\overline{1,n}$. Ці відстані будуть відповідати таким нерівностям:

$$D(a_i,c_i)\le D(a_i,b_i)+D(b_i,c_i),\ \forall\, i=1,2,\dots,n\,. \tag{4.22}$$

Крім того, ми можемо записати, що

$$\sum_{i=1}^{n} D(a_i,c_i)\le \sum_{i=1}^{n} D(a_i,b_i)+\sum_{i=1}^{n} D(b_i,c_i), \tag{4.23}$$

а

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D^2(a_i,c_i)}\ \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D^2(a_i,b_i)}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D^2(b_i,c_i)}\,. \tag{4.24}$$

Ці дві формули дають дві оцінки відстані між підмножинами, зокрема вираз (4.23) дає лінійну оцінку, а (4.24) – квадратичну.

Розглянемо випадок, коли функції належності нечітких підмножин набувають своїх значень в інтервалі [0; 1], тобто, коли у виразах (4.19) – (4.21) величини a_i, b_i, $c_i \in [0; 1]$, $i = 1, 2, \dots n$.

Припустимо, що $D(a_i, b_i) = |a_i - b_i|$, $D(b_i, c_i) = |b_i - c_i|$, $D(a_i, c_i) = |a_i - c_i|$. Визначимо два типи відстаней.

Визначення 4.10. Узагальнена відстань Хеммінга або *лінійна відстань* обчислюється за такою формулою:

$$d(A,B) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|. \tag{4.25}$$

Очевидно, що

$$0 \le d(A,B) \le n. \tag{4.26}$$

Визначення 4.11. *Евклідову* або *квадратичну* відстань розраховують у такий спосіб:

$$e(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}. \tag{4.27}$$

Ця відстань задовольняє таку умову:

$$0 \le e(A,B) \le \sqrt{n}. \tag{4.28}$$

Визначимо також відносні відстані.

Узагальнена відносна відстань Хеммінга

$$\delta(A,B) = \frac{d(A,B)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, \tag{4.29}$$

для неї буде справедливою нерівність: $0 \le \delta(A,B) \le 1$.

Відносна евклідова відстань

$$\varepsilon(A,B) = \frac{e(A,B)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}, \tag{4.30}$$

$$0 \le \varepsilon(A,B) \le 1.$$

Вибір тієї чи іншої відстані залежить від природи проблеми, про яку йдеться. Кожна з цих відстаней має свої переваги й недоліки, які стають зрозумілими при їхніх застосуваннях. Очевидно, що можна задати й інші відстані.

Приклад 4.19. Визначити відстань між такими нечіткими множинами:

$$A = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline 0{,}7 & 0{,}2 & 0 & 0{,}6 & 0{,}5 & 1 & 0 \end{array}, \quad B = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}4 & 1 \end{array}.$$

Розв'язування

$d(A, B) = |0{,}7 – 0{,}2| + |0{,}2 – 0| + |0 – 0| + |0{,}6 – 0{,}6| + |0{,}5 – 0{,}8| + |1 – 0{,}4| +$

$+ |0 – 1| = 0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}6 + 1 = 2{,}6.$

$$\delta(A,B) = \frac{1}{7} d(A,B) = \frac{2{,}6}{7} = 0{,}37.$$

$$e(A,B) = \sqrt{(0{,}7-0{,}2)^2 + (0{,}2-0)^2 + (0-0)^2 + (0{,}6-0{,}6)^2 + (0{,}5-0{,}8)^2 + (1-0{,}4)^2 + (0-1)^2} =$$

$$= \sqrt{(0{,}5)^2 + 0{,}2^2 + 0{,}3^2 + 0{,}6^2 + 1} = \sqrt{0{,}25 + 0{,}04 + 0{,}09 + 0{,}36 + 1} = \sqrt{1{,}74} = 1{,}32,$$

$e(A, B) = 1{,}32,$

$$\varepsilon(A,B) = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot 1{,}32 = 0{,}49.$$

Відстані $d(A, B)$, $e(A, B)$ можуть бути визначені й тоді, коли універсальна множина нескінченна (лічильна або ні), якщо відповідні суми й інтеграли збігаються. Якщо E – лічильна, то

$$d(A,B) = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right|, \tag{4.31}$$

$$e(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}, \tag{4.32}$$

коли ці ряди збігаються.

Якщо $E = R$, то

$$d(A,B) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \mu_A(x) - \mu_B(x) \right| dx \tag{4.33}$$

і

$$e(A,B) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_A(x) - \mu_B(x))^2 \, dx}, \tag{4.34}$$

коли інтеграли збігаються.

Якщо ж $E \subset R$ обмежена зверху й знизу, то відповідні інтеграли завжди збігаються, а відстані $d(A, B)$ та $e(A, B)$ будуть скінченними. Тоді можна також визначити відносні відстані, а саме:

$$\delta(A,B) = \frac{d(A,B)}{\beta - \alpha}, \tag{4.35}$$

$$\varepsilon(A,B) = \frac{e(A,B)}{\beta - \alpha}, \tag{4.36}$$

тут $d(A,B) = \int_{\alpha}^{\beta} |\mu_A(x) - \mu_B(x)| dx$ і $e(A,B) = \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} (\mu_A(x) - \mu_B(x))^2 dx}$.

Розглянемо на прикладі геометричну інтерпретацію поняття відстані між нечіткими множинами. Нехай множини $\widetilde{A}$ та $\widetilde{B}$ являють собою підмножини універсальної множини: $E \subset R^1$, $E = [\alpha, \beta]$, а графіки їхніх функцій належності $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$ зображено на рис. 4.10. Тоді лінійна відстань між цими множинами відповідає площі заштрихованої фігури, яка обмежена кривими функцій $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$.

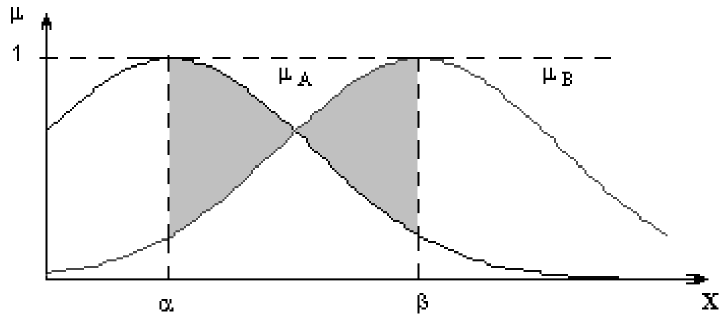


Рис. 4.10. Геометрична інтерпретація лінійної відстані між нечіткими множинами

4.5. Звичайна підмножина, найближча до нечіткої. Індекс нечіткості

Виникає питання, яка звичайна підмножина (або підмножини) перебуває на найменшій евклідовій відстані від даної нечіткої множини A. Легко бачити, що це буде звичайна підмножина (вона позначається $\underline{A}$), для якої

$$\mu_{\underline{A}}(x_i) = \begin{cases} 0\text{ , коли } \mu_A(x_i) < 0{,}5\text{ ,} \\ 1\text{ , коли } \mu_A(x_i) > 0{,}5\text{ ,} \\ 0\text{ або }1\text{ , коли } \mu_A(x_i) = 0{,}5. \end{cases} \tag{4.39}$$

Для уникнення неточності задамо, що $\mu_{\underline{A}}(x_i)=0$, коли $\mu_A(x_i)=0{,}5$. Отже, можна сформулювати визначення.

В и з н а ч е н н я 4.12. *Найближчою* до нечіткої множини A звичайною множиною називається множина $\underline{A}$, характерна такою функцією належності:

$$\mu_{\underline{A}}(x_i)=\begin{cases}0\,, \text{коли } \mu_A(x_i)\le 0{,}5\,,\\ 1\,, \text{ коли } \mu_A(x_i)>0{,}5.\end{cases} \tag{4.40}$$

П р и к л а д 4.20. Нехай $E=\{\,x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\,\}$, $A\subset E$ та

$A=\{(x_1|0{,}2),(x_2|0{,}8),(x_3|0{,}5),(x_4|0{,}3),(x_5|1),(x_6|0),(x_7|0{,}9),(x_8|0{,}4)\}$.

Найближчою до множини A звичайною множиною буде така:

$\underline{A}=\{(x_1|0),(x_2|1),(x_3|0),(x_4|0),(x_5|1),(x_6|0),(x_7|1),(x_8|0)\}$.

Використовуючи введені раніше поняття відстаней для нечітких підмножин, визначимо два *індекси нечіткості*.

Лінійний індекс нечіткості визначається через узагальнену відносну відстань Хеммінга таким чином:

$$\nu(A)=\frac{2}{n}d(A,\underline{A}). \tag{4.41}$$

Квадратичний індекс нечіткості визначається через відносну евклідову відстань, а саме:

$$\eta(A)=\frac{2}{\sqrt{n}}e(A,\underline{A}). \tag{4.42}$$

Множник 2 в чисельнику введено для того, щоб забезпечити утримання індексу нечіткості в таких межах:

$$0\le\nu(A,\underline{A})\le 1, \tag{4.43}$$

$$0\le\eta(A,\underline{A})\le 1. \tag{4.44}$$

Коли $E=[a,b]\subset R$, то лінійний індекс нечіткості обчислюють за такою формулою:

$$\nu(A,B)=\frac{2}{b-a}\int_a^b\left|\mu_A(x)-\mu_{\underline{A}}(x)\right|dx. \tag{4.45}$$

Геометричну інтерпретацію найближчої звичайної множини та індексу нечіткості бачимо на рис. 4.11. Тут товста лінія показує функцію належності найближчої звичайної множини $\underline{A}$ до нечіткої множини A, описуваної функцією належності μ_A. Лінійний індекс нечіткості відповідає нормалізованій площі заштрихованої фігури.

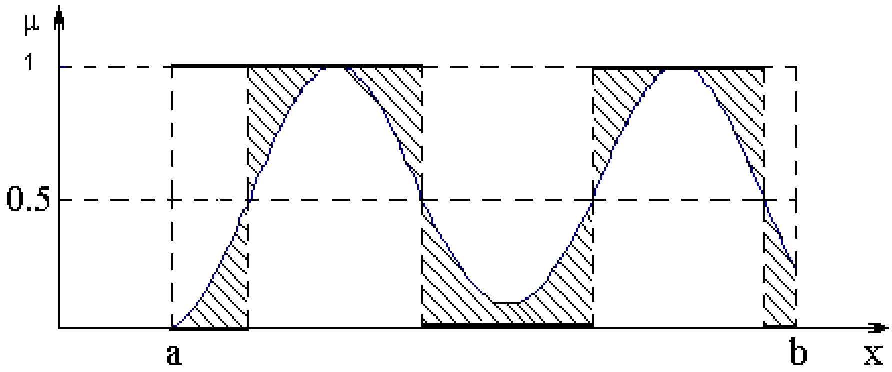


Рис. 4.11. Геометрична інтерпретація індексу нечіткості

Індекси нечіткості можна також визначити іншим способом, а саме:

$$\nu(A) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\min(\mu_A(x_i), \mu_{\overline{A}}(x_i)), \tag{4.46}$$

$$\eta(A) = \frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\min\left\{\mu_A^2(x_i), \mu_{\overline{A}}^2(x_i)\right\}}. \tag{4.47}$$

Дійсно, для будь-якого елемента $x_i \in E$

$$\left| \mu_A(x_i) - \mu_{\underline{A}}(x_i) \right| = \mu_{A\cap\overline{A}}(x_i). \tag{4.48}$$

Тоді формулу (4.41) для обчислення лінійного індексу нечіткості можна переписати в зручному вигляді, а саме:

$$\nu(A) = \frac{2}{n}\sum_{\mathrm{i}=1}^{n}\mu_{A\cap\overline{A}}(x_i). \tag{4.49}$$

З цього виразу 4.49 стає очевидним, що $\nu(A) = \nu(\overline{A})$.

П р и к л а д 4.21. Нехай $E = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \}$, $A \subset E$,

$$A = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}8), (x_3|0{,}5), (x_4|0{,}3), (x_5|1), (x_6|0), (x_7|0{,}9), (x_8|0{,}4)\},$$

$$\overline{A} = \{(x_1|0{,}8), (x_2|0{,}2), (x_3|0{,}5), (x_4|0{,}7), (x_5|0), (x_6|1), (x_7|0{,}1), (x_8|0{,}6)\},$$

Обчислимо індекс нечіткості множини A. Для цього спочатку визначимо перетин поданих вище множин.

$$A \cap \overline{A} = \{(x_1|0{,}2),(x_2|0{,}2),(x_3|0{,}5),(x_4|0{,}3),(x_5|0),(x_6|0),(x_7|0{,}1),(x_8|0{,}4)\}.$$

Тепер обчислимо лінійний індекс нечіткості:

$$\nu(A) = \frac{2}{8}(0{,}2+0{,}2+0{,}5+0{,}3+0+0+0{,}1+0{,}4) = 0{,}425.$$

Нехай A та B – дві нечіткі підмножини E. З'ясуємо, як співвідносяться індекси нечіткості перетину $A \cap B$ та об'єднання $A \cup B$ цих нечітких підмножин із індексами нечіткості вихідних підмножин?

Розглянемо приклади.

П р и к л а д 4.22. Нехай $E = \{x_1, x_2, x_3\}$, $A = \{(x_1|0{,}2),(x_2|0{,}6),(x_3|0{,}1)\}$, $B = \{(x_1|0{,}6),(x_2|0{,}3),(x_3|0{,}8)\}$. Обчислимо індекси нечіткості вихідних множин та їх перетину, а саме:

$$\overline{A} = \{(x_1|0{,}8),(x_2|0{,}4),(x_3|0{,}9)\}, \quad \nu(A) = \frac{2}{3}(0{,}2+0{,}4+0{,}1) \approx 0{,}46.$$

$$\overline{B} = \{(x_1|0{,}4),(x_2|0{,}7),(x_3|0{,}2)\}, \quad \nu(B) = \frac{2}{3}(0{,}4+0{,}3+0{,}2) \approx 0{,}6.$$

$$A \cap B = \{(x_1|0{,}2),(x_2|0{,}3),(x_3|0{,}1)\}, \ \overline{A \cap B} = \{(x_1|0{,}8),(x_2|0{,}7),(x_3|0{,}9)\},$$

$$\nu(A \cap B) = \frac{2}{3}(0{,}2+0{,}3+0{,}1) \approx 0{,}4.$$

Очевидно, що в цьому випадку індекс нечіткості перетину менший за індекси нечіткості вихідних підмножин.

П р и к л а д 4.23. Нехай $E = \{x_1, x_2, x_3\}$, $A' = \{(x_1|0{,}8),(x_2|0{,}6),(x_3|0{,}8)\}$, $B' = \{(x_1|0{,}4),(x_2|0{,}7),(x_3|0{,}2)\}$. Обчислимо індекси нечіткості цих множин та їх перетину, тобто

$$\overline{A}' = \{(x_1|0{,}2),(x_2|0{,}4),(x_3|0{,}2)\}, \qquad \nu(A') = \frac{2}{3}(0{,}2+0{,}4+0{,}2) \approx 0{,}53,$$

$$\overline{B'} = \{(x_1|0{,}6),(x_2|0{,}3),(x_3|0{,}8)\}, \qquad \nu(B') = \frac{2}{3}(0{,}4+0{,}3+0{,}2) = 0{,}60,$$

$$A' \cap B' = \{(x_1|0{,}4),(x_2|0{,}6),(x_3|0{,}2)\}, \quad \overline{A' \cap B'} = \{(x_1|0{,}6),(x_2|0{,}4),(x_3|0{,}8)\}$$

$$\nu(A' \cap B') = \frac{2}{3}(0{,}4+0{,}4+0{,}2) \approx 0{,}66.$$

У цьому прикладі індекс нечіткості перетину більший за індекси нечіткості вихідних підмножин.

Таким чином, ми бачимо, що індекс нечіткості перетину підмножин A та B може бути як меншим, так і більшим від індексів нечіткості вихідних підмножин. Те саме можна сказати і про об'єднання нечітких підмножин.

Сформульоване твердження буде справедливим також і для квадратичного індексу нечіткості.

4.6. Звичайна підмножина α-рівня нечіткої множини

В и з н а ч е н н я 4.13. Нехай $\alpha \in [0;1]$. Підмножиною α-рівня нечіткої підмножини A (позначається A_α) будемо називати звичайну множину, яка включає тільки ті елементи множини A, функція належності яких не менша за α, тобто

$$A_\alpha = \{x \,|\, \mu_A(x) \ge \alpha\}. \tag{4.50}$$

П р и к л а д 4.24. Нехай нечітку множину A задано в такому вигляді:

$$A = \frac{x_1 \,|\, x_2 \,|\, x_3 \,|\, x_4 \,|\, x_5 \,|\, x_6 \,|\, x_7}{0{,}8 \,|\, 0{,}1 \,|\, 1 \,|\, 0{,}3 \,|\, 0{,}6 \,|\, 0{,}2 \,|\, 0{,}5}.$$

Визначимо множини рівня 0,3 та 0,5 цієї нечіткої підмножини, а саме:

$$A_{0,3} = \frac{x_1 \,|\, x_2 \,|\, x_3 \,|\, x_4 \,|\, x_5 \,|\, x_6 \,|\, x_7}{1 \,|\, 0 \,|\, 1 \,|\, 1 \,|\, 1 \,|\, 0 \,|\, 1}, \qquad A_{0,3} = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_7\},$$

$$A_{0,5} = \frac{x_1 \,|\, x_2 \,|\, x_3 \,|\, x_4 \,|\, x_5 \,|\, x_6 \,|\, x_7}{1 \,|\, 0 \,|\, 1 \,|\, 0 \,|\, 1 \,|\, 0 \,|\, 1}, \qquad A_{0,5} = \{x_1, x_3, x_5, x_7\}.$$

П р и к л а д 4.25. Нехай універсальна множина $X = \{1, 2, ..., 6\}$, а функцію належності нечіткої множини $A \subset X$ подано таблицею:

x	0	1	2	3	4	5	6
$\mu_A(x)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1

Тоді для множини A можна виписати такі множини рівня:

$A_{0,1} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A_{0,3} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$,

$A_{0,5} = \{3, 4, 5, 6\}$, $A_{0,7} = \{4, 5, 6\}$,

$A_{0,9} = \{5, 6\}$, $A_1 = \{6\}$.

П р и к л а д 4.26. Нехай $X = R^+$, графік функції належності μ_A нечіткої множини A зображено на рис. 4.12, *а*. Множини рівня α_1 та α_2 та графіки їхніх функцій належності зображено на рис. 4.12, *б* та 4.12, *в*.

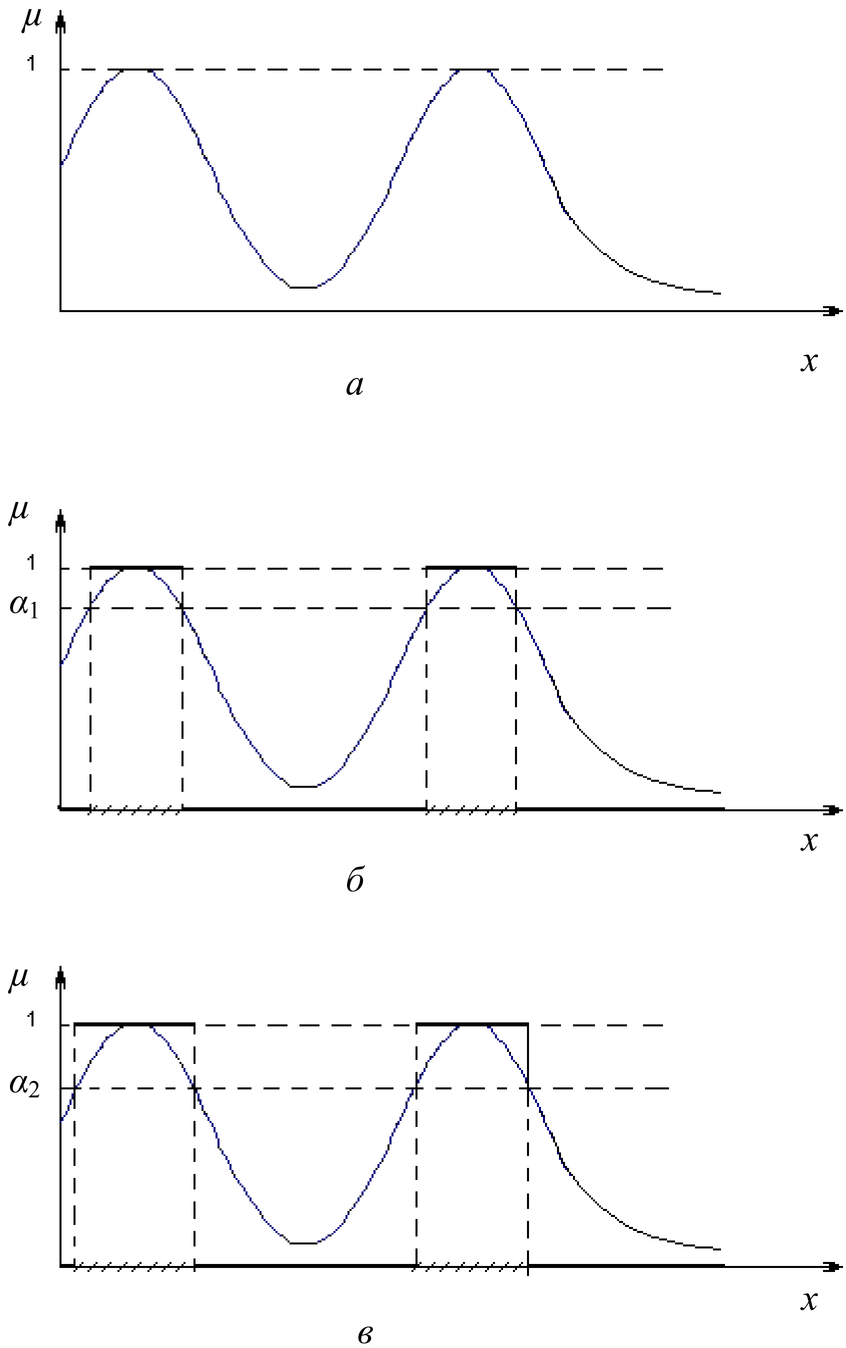


Рис. 4.12. Множини рівня та їх співвідношення

Як видно з цих прикладів, для всяких значень α_1 та α_2, що задовольняють такі умови: $0 < \alpha_1 \le 1$, $0 < \alpha_2 \le 1$ і $\alpha_2 < \alpha_1$, відповідні множини рівня A_{α_1} та A_{α_2} будуть пов'язані таким співвідношенням: $A_{\alpha_1} \subset A_{\alpha_2}$.

Множинами рівня зручно користуватися для формулювання та аналізу деяких задач прийняття рішень, ми також будемо їх застосовувати при розв'язуванні задач нечіткого математичного програмування.

Нехай $(A \bigcup B)_\alpha$ та $(A \bigcap B)_\alpha$ являють собою множини α-рівня об′єднання й перетину нечітких множин A та B відповідно. Розглянемо їхній зв'язок із множинами рівня A_α та B_α вихідних множин. Якщо для операцій перетину та об′єднання прийняти визначення 4.7 та 4.6 відповідно, то цей зв’язок буде таким:

$$(A \bigcup B)_\alpha = A_\alpha \bigcup B_\alpha, \qquad (A \bigcap B)_\alpha = A_\alpha \bigcap B_\alpha.$$

При використанні визначень 4.6, *б* та 4.7, *а* буде справедливим лише включення, тобто

$$(A \bigcup B)_\alpha \supset A_\alpha \bigcup B_\alpha, \qquad (A \bigcap B)_\alpha \subset A_\alpha \bigcap B_\alpha.$$

Для нечітких підмножин буде справедливою сформульована нижче теорема про декомпозицію.

Т е о р е м а 4.1. Будь-яку нечітку підмножину A можна розкласти на множини рівня, тобто подати її в такому вигляді:

$$A = \bigcup_\alpha \alpha A_\alpha, \tag{4.51}$$

причому функція належності множини αA_α: $\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = \alpha \mu_{A_\alpha}(x)$, об′єднання нечітких множин виконується за всіма значеннями $\alpha \in [0;1]$, а функцію належності множини рівня α задано таким чином:

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1, \mu_A(x) \ge \alpha, \\ 0, \mu_A(x) < \alpha. \end{cases}$$

П р и к л а д 4.27. Для множини A та її множин рівня з прикладу 4.25 ми можемо записати, що

$$A = 0{,}1\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \bigcup 0{,}3\{2, 3, 4, 5, 6\} \bigcup 0{,}5\{3, 4, 5, 6\} \bigcup 0{,}7\{4, 5, 6\} \bigcup$$
$$\bigcup 0{,}8\{5, 6\} \bigcup 1\{6\}.$$

Формула розкладання буде правильною й тоді, коли універсальна множина має потужність континуума.

П р и к л а д 4.28. Нехай нечітка множина $A \subset R^+$ задана своєю функцією належності: $\mu_A(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}, x \in R^+$. Розглянувши відрізок $[\alpha; 1]$, де $0 < \alpha \le 1$, можемо зробити такий висновок:

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1, \text{ коли } \mu_A(x) \in [\alpha; 1], \\ 0, \text{ коли } \mu_A(x) \overline{\in} [\alpha; 1]. \end{cases}$$

Отже, у цьому прикладі

$$\mu_{A_\alpha^2}(x) = \begin{cases} 1, \text{ коли } x \geq \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}, \\ 0, \text{ коли } x < \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}. \end{cases}$$

Теорему про декомпозицію можна застосувати не тільки для аналізу, але й для синтезу нечітких множин.

Розглянемо послідовність звичайних підмножин $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \ldots \subset A_n$, та задамо значення α_1 для множини A_1, α_2 для множини A_2 і т. д., α_n для A_n, причому $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$, тоді, використовуючи формулу (4.51), одержимо нечітку підмножину A.

П р и к л а д 4.29. Нехай задано звичайну множину:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}\},$$

і її підмножини:

$$A_1 = \{x_1, x_4, x_5, x_7, x_9\},$$

$$A_2 = \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9\},$$

$$A_3 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9\},$$

$$A_4 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9, x_{10}\},$$

а також визначено числа: $\alpha_1 = 0{,}9$, $\alpha_2 = 0{,}5$, $\alpha_3 = 0{,}4$, $\alpha_4 = 0{,}1$.

Використавши формулу (4.51), отримаємо нечітку множину A.
Побудуємо спочатку множини $\alpha_i A_i$, за такою формулою:

$$\mu_{\alpha_i A_i}(x_j) = \alpha_i \mu_{A_i}(x_j) = \begin{cases} \alpha_i, \text{ коли } x_j \in A_i, \\ 0, \text{ коли } x_j \overline{\in} A_i. \end{cases}$$

Тоді отримуємо такі підмножини:

$$\alpha_1 A_1 = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ \hline 0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0{,}9 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0{,}9 & 0 \end{array} \right|,$$

$$\alpha_2 A_2 = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ \hline 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{array} \right|,$$

$$\alpha_3 A_3 = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ \hline 0{,}4 & 0{,}4 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 & 0{,}4 & 0 \end{array} \right|,$$

$$\alpha_4 A_4 = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ \hline 0{,}1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{array} \right|.$$

Об'єднавши ці нечіткі множини, отримаємо шукану нечітку множину, тобто

$$A = \bigcup_{\alpha_i} \alpha_i A_i \,,$$

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ \hline 0{,}9 & 0{,}4 & 0 & 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}9 & 0 & 0{,}9 & 0{,}1 \end{array}.$$

4.7. Спеціальні операції над нечіткими множинами

Ми вже розглянули ряд операцій над нечіткими множинами. Вони були подібні до операцій із звичайними множинами, але, виступаючи в ролі нової структури, нечіткі множини мають і нові властивості, а тому стосовно них можуть бути введені нові операції, які не мають сенсу для звичайних множин.

Визначимо спочатку декартів добуток нечітких множин.

В и з н а ч е н н я 4.14. *Декартовим добутком* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ нечітких множин $A_i \subset X_i$, $i = 1, \ldots, n$ буде нечітка множина A у декартовому добутку $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, функція належності якої має такий вигляд:

$$\mu_A(x) = \min\{\mu_{A_1}(x_1),..\mu_{An}(x_n)\}\,, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X. \tag{4.52}$$

П р и к л а д 4.30. Визначимо декартів добуток нечітких множин A та B, якщо $A = \begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \end{array}$, $B = \begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{array}$.

Відповідно до визначення 4.14

$$A \times B = \begin{array}{c|ccccc} \dfrac{x_i \in B}{x_i \in A} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_1 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ x_2 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ x_3 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ x_4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ x_5 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{array}$$

В и з н а ч е н н я 4.15. *Опуклою комбінацією* нечітких підмножин $A_1, \ldots, A_n$ універсальної множини X називається нечітка множина A з функцією належності, що має такий вигляд:

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i(x)\,, \tag{4.53}$$

тут $\lambda_i \geq 0, \quad i = 1,..,n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

По відношенню до звичайних множин, на відміну від декартового добутку, операція опуклої комбінації не має сенсу.

В и з н а ч е н н я 4.16. Операції концентрування (CON) й розтягування (DIL) задамо таким чином:

$$\text{CON } A = A^2, \tag{4.54}$$

$$\text{DIL } A = A^{0,5}, \tag{4.55}$$

при цьому

$$\mu_{A^\alpha}(x) = \mu_A^\alpha(x),\ x \in X,\ \alpha > 0. \tag{4.56}$$

П р и к л а д 4.31. Нехай універсальна множина $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $A \subset E$,

$$A = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 \mid x_6}{0{,}25 \mid 0{,}9 \mid 0{,}4 \mid 0{,}6 \mid 1 \mid 0}.$$

Визначимо множини: $B = \text{CON } A$, $C = \text{DIL } A$, а саме:

$$B = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 \mid x_6}{0{,}0625 \mid 0{,}81 \mid 0{,}16 \mid 0{,}36 \mid 1 \mid 0},$$

$$C = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 \mid x_6}{0{,}5 \mid 0{,}95 \mid 0{,}63 \mid 0{,}77 \mid 1 \mid 0}.$$

П р и к л а д 4.32. Нехай нечітку множину $A \subset R^1$ подано своєю функцією належності: $\mu_A(x) = \dfrac{1}{1+|x-a|}$, тоді $\mu_{A^2}(x) = \dfrac{1}{(1+|x-a|)^2}$.

Графічно ці множини можна зобразити таким чином:

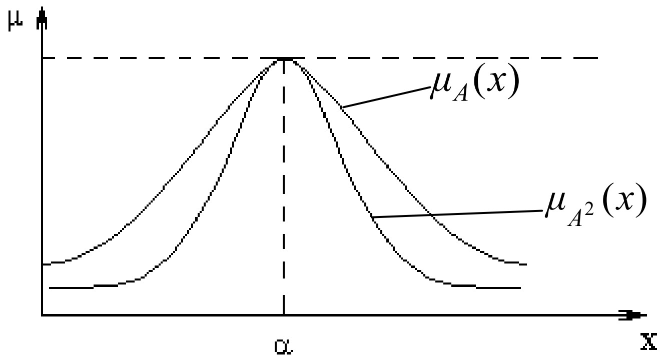


Рис. 4.13. Графіки функцій належності нечітких множин *A* та CON *A*.

Застосування операції концентрування до нечіткої множини означає зменшення її "нечіткості". У реальних задачах це може означати надходження нової інформації, що дозволяє більш точно (чітко) описати подану нечітку множину. Аналогічно операція розтягування може застосовуватися для моделювання ситуацій, пов'язаних із втратою інформації.

4.8. Нечіткі відношення

В и з н а ч е н н я 4.17. Нечітким відношенням R на множині X називається нечітка підмножина декартового добутку $X \times X$. Вона характеризується такою функцією належності: $\mu_R : X \times X \to [0;1]$.

Значення $\mu_R(x, y)$ цієї функції показує міру або ступінь, з якою виконується відношення R між елементами x та y. Зрозуміло, що звичайні відношення ми можемо вважати окремим випадком нечітких відношень, функції належності яких можуть мати тільки два значення: 0 або 1.

П р и к л а д 4.32. Розглянемо два подібні відношення на інтервалі [0; 1]. Це звичайне відношення «більше або дорівнює» R ($\geq$) та нечітке відношення «значно більше» $\widetilde{R}$ $(>>)$. Пари, пов'язані відношенням R, зображено на рис. 4.14, а відношенням $\widetilde{R}$ – на рис. 4.15.

Якщо має місце нечітке відношення R, то існують пари елементів, для яких воно виконується чітко, є пари, для яких це відношення не виконується, а також деяка проміжна зона, де пари мають той чи інший ступінь належності, тобто для них відношення виконується лише певною мірою залежно від ситуації. Нечітку межу в цьому випадку зображено змінною щільності штрихування.

Так само, як і при використанні звичайних відношень (див. розділ 2), нечіткі відношення можна задавати матрицею, графом або розрізами.

Рис. 4.14. Графічне зображення відношення «$\geq$»

Рис. 4.15. Графічне зображення відношення ">>"

Матриця нечіткого відношення аналогічна матриці звичайного відношення, тільки її елементами можуть бути числа від 0 до 1.

Коли нечітке відношення задають за допомогою графа, то кожній його дузі присвоюється число з інтервалу [0; 1], яке означає ступінь виконання нечіткого відношення для даної пари.

Верхні й нижні розрізи нечіткого відношення являють собою нечіткі множини, визначені таким чином:

$$R^{+}(x)=\left\{y \middle| \mu_R(y,x):\ \ y\in X,\ \ \mu_R(y,x)>0\right\},$$

$$R^{-}(x)=\left\{y \middle| \mu_R(x,y):\ \ y\in X,\ \ \mu_R(x,y)>0\right\}.$$

В и з н а ч е н н я 4.18. Носієм нечіткого відношення R на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$, що має такий вигляд:

$$\operatorname{supp} R=\left\{(x,y) \middle| (x,y)\in X\times X,\ \ \mu_R(x,y)>0\right\}.$$

Носій нечіткого відношення можна розуміти як звичайне відношення на множині X, що пов'язує пари (x, y), для яких відношення R виконується з ненульовою мірою.

П р и к л а д 4.33. Нехай відношення R – «приблизно дорівнює». Задамо його на множині: $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, за допомогою матриці. Вона може мати такий вигляд:

$$R=\begin{vmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тоді носієм описаного нечіткого відношення буде таке звичайне відношення:

$$\operatorname{supp} R=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Зауважимо, що конкретний вигляд матриці відношення залежить від сенсу задачі й того, як розуміють вираз «приблизно дорівнює».

4.9. Операції над нечіткими відношеннями

У попередніх підрозділах було розглянуто операції над нечіткими множинами та звичайними відношеннями. Операції над нечіткими відношеннями певною мірою поєднують у собі властивості і тих, і інших. Іншими словами, деякі з них являють собою аналоги відповідних операцій із звичайними відношеннями, але існують і такі, що притаманні лише нечітким відношенням. Наприклад, операції об'єднання та перетину нечітких відношень можна так само, як і для нечітких множин, визначити кількома способами.

Визначення 4.19. Нехай на множині X подано два нечітких відношення A та B, тобто в декартовому добутку X^2 подано дві нечіткі підмножини A та B. Тоді нечіткі множини: $C = A \bigcap B$ та $D = A \bigcup B$, назвемо відповідно *перетином* та *об'єднанням* нечітких відношень A та B на множині X.

Приклад 4.34. Відношення A та B подано в такому вигляді:

$$A = \begin{vmatrix} 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 \\ 1 & 1 & 0,4 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 1 & 1 \\ 0,8 & 0,8 & 1 \end{vmatrix}.$$

Знайдемо перетин та об'єднання цих відношень, використовуючи визначення 4.6 та 4.7, а саме:

$$A \bigcap B = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 \\ 0,8 & 0,8 & 0,4 \end{vmatrix}, \qquad A \bigcup B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0,3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Визначення 4.20. Нечітке відношення B *містить* нечітке відношення A, якщо для нечітких множин B та A має місце включення: $A \subset B$, тобто їх функції належності задовольняють таку нерівність:

$$\mu_A(x, y) \le \mu_B(x, y), \quad \forall x, y \in X .$$

Приміром, у розглянутому вище прикладі 4.32 відношення «≥» містить відношення «>>».

Визначення 4.21. Якщо R – нечітке відношення на множині X, то нечітке відношення $\overline{R}$, функція належності якого $\mu_{\overline{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y)$, назвемо *доповненням* відношення R у множині X.

Наприклад, доповненням нечіткого відношення «краще» буде відношення «не краще».

Обернене до R нечітке відношення R^{-1} на множині X визначається таким чином:

$$x\,R^{-1}\,y \;\Leftrightarrow\; y\,R\,x,\quad \forall x, y \in X,$$

або з використанням термінології функцій належності

$$\mu_{R^{-1}}(x, y) = \mu_R(y, x),\;\; \forall x, y \in X.$$

На відміну від звичайних відношень, добуток (або композицію) нечітких відношень можна визначити багатьма способами.

Розглянемо деякі з можливих визначень цієї операції.

В и з н а ч е н н я 4.22. *Максимінний* добуток нечітких відношень A та B на множині X описують такою функцією належності:

$$\mu_{A\cdot B}(x, y) = \sup_{z \in X} \min\{\mu_A(x, z),\; \mu_B(z, y)\}.$$

Якщо вихідні відношення задано на скінченій множині X, то матриця їх максимінного добутку дорівнює максимінному добутку матриць відношень A та B.

В и з н а ч е н н я 4.23. *Мінімаксний* добуток нечітких відношень A та B на множині X буде дорівнювати нечіткому відношенню, функція належності якого

$$\mu_{A\cdot B}(x, y) = \inf_{z \in X} \max\{\mu_A(x, z),\; \mu_B(z, y)\}.$$

В и з н а ч е н н я 4.24. *Максмультиплікативний* добуток нечітких відношень A та B характеризується функцією належності такого вигляду:

$$\mu_{A\cdot B}(x, y) = \sup_{z \in X}\left\{\mu_A(x, z)\cdot \mu_B(x, z)\right\}.$$

П р и к л а д 4.34. Нехай за допомогою матриць задано нечіткі відношення A та B.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 1 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 1 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 1 & 0 \\ 1 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0{,}5 \end{vmatrix}.$$

Знайдемо композиції відношень A та B, користуючись визначеннями 4.22 – 4.24, тоді отримуємо такі результати:

максимінну композицію буде описано такою матрицею:

$$A \cdot B_{\max\min} = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0,2 \\ 0,8 & 0,3 & 1 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0 \\ 1 & 1 & 0,5 & 0,5 \end{vmatrix},$$

мінімаксну композицію – матрицею такого вигляду:

$$A \cdot B_{\min\max} = \begin{vmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,7 & 0.7 & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,8 & 0 \end{vmatrix},$$

а максмультиплікативну композицію – такою матрицею:

$$A \cdot B_{\max\cdot} = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,2 & 1 & 0,1 \\ 0,8 & 0,3 & 1 & 0 \\ 0,3 & 0,12 & 0,4 & 0 \\ 1 & 1 & 0,4 & 0,5 \end{vmatrix}.$$

4.10. Властивості нечітких відношень

Розглянемо тепер, чим характерні нечіткі відношення.

В и з н а ч е н н я 4.25. Нечітке відношення R на множині X називається *рефлексивним*, якщо для будь-якого елемента $x \in X$ виконується така умова:

$$\mu_R(x, x) = 1.$$

Якщо рефлексивне відношення задано матрицею, то її головна діагональ включає тільки одиниці.

Прикладом рефлексивного буде відношення «приблизно дорівнює», задане на множині чисел.

В и з н а ч е н н я 4.26. Нечітке відношення R буде *антирефлексивним*, якщо $\mu_R(x, x) = 0$, $\forall x \in X$.

Доповнення рефлексивного відношення буде антирефлексивним. Прикладом антирефлективного на множині чисел може бути відношення «значно більше».

В и з н а ч е н н я 4.27. Нечітке відношення R на множині X називається симетричним, якщо для будь-яких елементів $x, y \in X$ виконується така умова:

$$\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x).$$

Матриця симетричного нечіткого відношення, поданого в скінченній множині, буде симетричною. Його прикладом буде відношення «сильно відрізнятися за величиною».

В и з н а ч е н н я 4.28. Відношення R на множині X буде асиметричним, якщо воно має таку властивість:

$$\mu_R(x,y) > 0, \Rightarrow \mu_R(y,x) = 0, \text{ або } \mu_R(x,y) = \mu_R(y,x) = 0, \qquad \forall x, y \in X,$$

іншими словами:

$$\min\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\} = 0, \quad \forall x, y \in X.$$

Асиметричним виступає відношення «значно більше».

В и з н а ч е н н я 4.29. Відношення R на множині X буде антисиметричним, якщо виконується така умова:

$$\min\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\} = 0, \quad x \neq y.$$

В и з н а ч е н н я 4.30. Нечітке відношення R на множині X називається транзитивним, якщо $R^2 \subset R$.

Очевидно, що властивість транзитивності залежить від способу визначення добутку відношень. Згідно з уведеними раніше визначеннями можна назвати три її види: максимінна (max min), мінімаксна (min max) і максмультиплікативна (max ·) транзитивність.

Легко побачити, що $R^2_{\max\text{-}\bullet} \subseteq R^2_{\max\min}$ Отже, з max min-транзитивності випливає максмультиплікативна транзитивність.

Прикладом max min-транзитивного є відношення «значно більше» на множині чисел.

П р и к л а д 4.35. Перевірити на транзитивність нечітке відношення, що має такий вигляд:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0{,}9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}9 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування

Для перевірки даної властивості необхідно обчислити max min, min max та max-мультиплікативну композиції даного відношення.

$$R^2_{\max\min} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0,9 & 1 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0 \\ 0 & 1 & 0,9 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Оскільки $R^2_{\max\min} \subset R$, то нечітке відношення R є max min-транзитивним, отже, воно буде й max-мультиплікативно транзитивним. Перевіримо відношення на min max-транзитивність. Відповідна йому композиція

$$R^2{}_{\min\max} = \begin{vmatrix} 0 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Як бачимо, $R^2_{\min\max} \not\subset R$.

Отже, відношення R не буде min max-транзитивним.

В и з н а ч е н н я 4.31. *Транзитивним замиканням* нечіткого відношення R буде нечітке відношення $\hat{R}$, яке отримують за таким правилом:

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots$$

Вочевидь, при визначенні транзитивного замикання необхідно спочатку встановити тип операції добутку відношень.

Стосовно транзитивного замикання має місце таке твердження:

Т е о р е м а 4.2. Транзитивне замикання будь-якого бінарного відношення R являє собою найменше транзитивне бінарне відношення, що містить у собі R.

Зауважимо, що α-рівень транзитивного замикання нечіткого відношення збігається з транзитивним замиканням відповідного α-рівня вихідного нечіткого відношення, тобто

$$\left(\hat{R}\right)_\alpha = \hat{R}_\alpha, \quad \forall \alpha \neq 0.$$

Наведемо формулювання двох теорем, які дозволяють побудувати транзитивне замикання в деяких випадках.

Т е о р е м а 4.3. Якщо існує число k, для якого $R^k = R^{k+1}$, то

$$\hat{R} = R \bigcup R^2 \bigcup \ldots \bigcup R^k .$$

Т е о р е м а 4.4. Якщо R являє собою нечітке відношення на скінченній множині E, причому $m(E) = n$, то $\hat{R} = R \bigcup R^2 \bigcup R \bigcup \ldots \bigcup R^n$ або існує число: $k \le n$, для якого $R^k = R^{k+1}$.

П р и к л а д 4.36. Побудуємо транзитивне (max min) замикання нечіткого відношення R, заданого такою матрицею:

$$R = \begin{vmatrix} 0,8 & 1 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,2 \end{vmatrix}.$$

Для цього обчислимо послідовно R^2, R^3, а саме:

$$R^2_{\max\min} = \begin{vmatrix} 0,8 & 0,8 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{vmatrix}, \qquad R^3_{\max\min} = \begin{vmatrix} 0,8 & 0,8 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{vmatrix}.$$

Бачимо, що $R^2 = R^3$, отже, $\hat{R} = R \bigcup R^2$ і набуває такого вигляду:

$$\hat{R} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,2 \end{vmatrix} \bigcup \begin{vmatrix} 0,8 & 0,8 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,8 & 1 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{vmatrix}.$$

4.11. Класифікація нечітких відношень

Усі типи нечітких відношень, беручи до уваги характерні їм властивості, можна поділити на три класи.

До першого класу належать симетричні відношення, більшість яких характеризують схожість або відмінність між об’єктами множини X. Такі відношення можна задавати за допомогою зваженого графа з неорієнтованими дугами.

Другий клас утворюють антисиметричні відношення. Вони задають на множині відношення впорядкованості, домінування. Їм відповідають орієнтовні зважені графи з однобічною орієнтацією дуг.

Третій клас включає решту відношень.

Відношення кожного класу у свою чергу можуть бути поділені на підкласи, з огляду на виконання умов рефлексивності або антирефлексивності. Схематично класифікацію нечітких відношень подано на рис. 4.14, більш детальну класифікацію можна знайти в збірнику [25]. Розглянемо деякі з нечітких відношень.

Нечітким *відношенням передпорядку* називається бінарне нечітке відношення, що має властивості транзитивності й рефлексивності.

Якщо R являє собою передпорядок, то мають місце такі рівності: $R = R^2 = ... = R^k = \hat{R}$.

Передпорядком на множині: $X = \{A, B, C, D, E\}$, буде, наприклад, відношення, що має такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0{,}3 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}7 & 1 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}9 & 1 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Нечіткий півпорядок – це транзитивне відношення, що не має властивості рефлексивності.

Симетричні, рефлексивні відношення називаються *відношеннями схожості.* Вони показують міру подібності (“близькості”) двох елементів.

Симетричні, антирефлексивні відношення називають відношеннями відмінності.

Для відношень схожості й відмінності характерне таке твердження: якщо R – нечітке відношення схожості, то $\overline{R}$ – відношення відмінності.

Серед відношень схожості особливо виділяють відношення подібності.

В и з н а ч е н н я 4.32. *Відношенням подібності* або *еквівалентності* називається нечітке бінарне відношення, якому властиві транзитивність, рефлексивність та симетричність.

Очевидно, що це відношення являє собою передпорядок.

Відношення

$$R_1 = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 1 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1 & 0{,}9 \\ B & 0{,}8 & 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ C & 0{,}7 & 0{,}7 & 1 & 0{,}7 & 0{,}7 \\ D & 1 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1 & 0{,}9 \\ E & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 \end{array}$$

являє собою нечітке відношення подібності.

Класифікація нечітких відношень

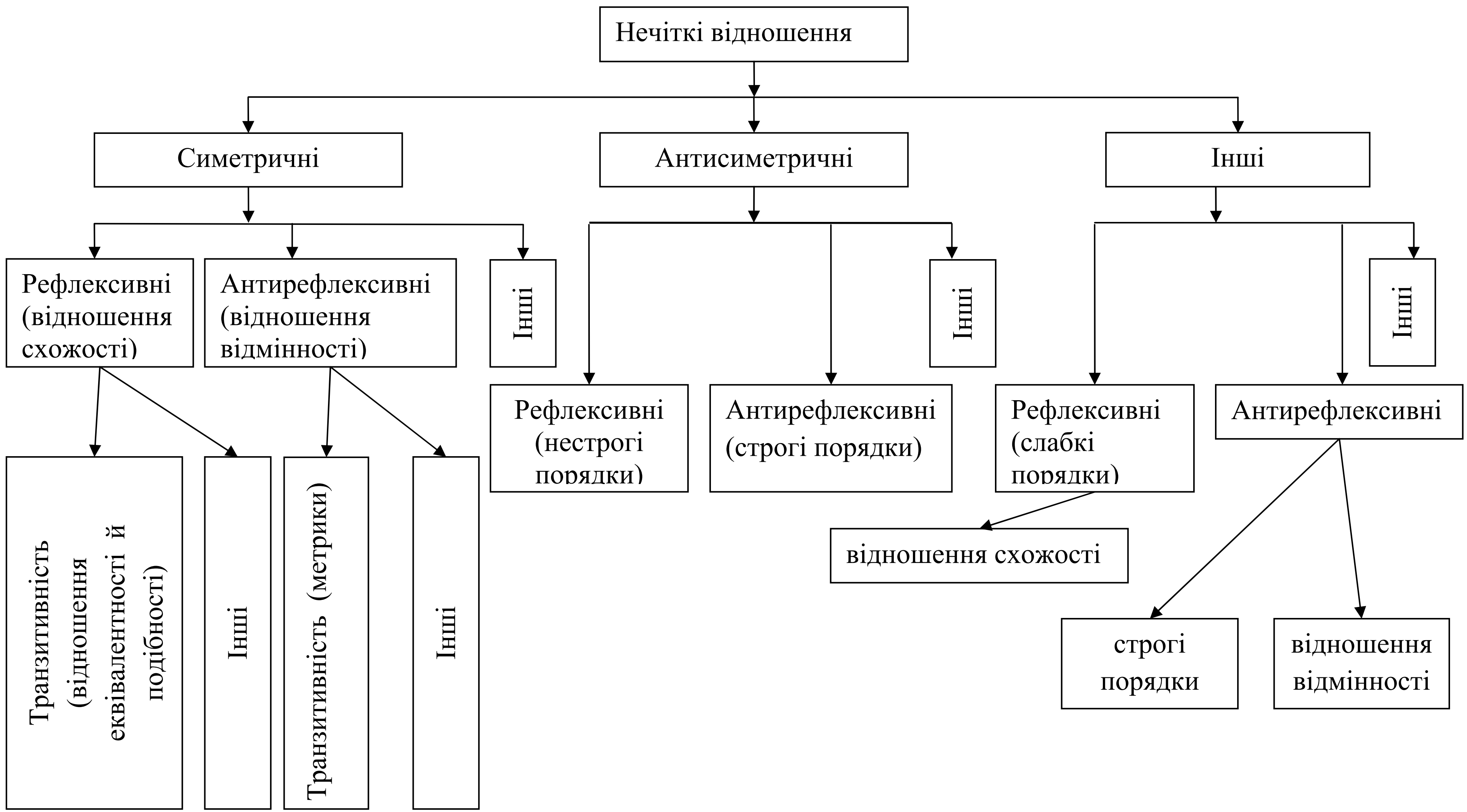


Рис. 4.14. Схема взаємозв’язку між видами нечітких відношень

Взагалі, відношення такого вигляду:

$$R_2 = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 1 & a & a & a & a \\ B & a & 1 & a & a & a \\ C & a & a & 1 & a & a \\ D & a & a & a & 1 & a \\ E & a & a & a & a & 1 \end{array}, \text{ коли } \ a \in [0,1],$$

будуть відношеннями подібності.

З а в д а н н я: перевірити транзитивність цих відношень.

П р и к л а д 4.40. Нечітке відношення $x\ R\ y$, де $x, y \in [0, +\infty)$, визначено такою функцією належності:

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} e^{-k(y+1)}, \ y < x, \ k > 1, \\ 1, \ y = x, \\ e^{-k(x+1)}, \ y > x, \ k > 1. \end{cases}$$

З а в д а н н я. Перевірити самостійно, чи є воно відношенням подібності

Кожен α-рівень нечіткого відношення подібності являє собою звичайне відношення еквівалентності. Нагадаємо, що всяке відношення еквівалентності задає на множині деяке розбиття. Отже, кожний α-рівень нечіткого відношення подібності також буде задавати на цій множині розбиття. Із властивості α-рівнів нечіткого відношення випливає також вкладеність відповідних розбиттів множини X. Причому із зменшенням величини α відбувається укрупнення класів еквівалентності. Таким чином, нечітке відношення еквівалентності, на відміну від звичайного відношення схожості, задає на множині X ієрархічну сукупність її розбиттів на неперетинні класи еквівалентності. Це пояснюється тим, що умова транзитивності накладає досить сильні обмеження на значення ступенів належності $\mu(x, y)$. А саме, для нечіткого відношення подібності має місце подана нижче теорема.

Т е о р е м а 4.5. Нехай $R \subset E \times E$ – відношення подібності і x, y, z – три елементи множини E. Задамо, що

$$c = \mu_R(x, z) = \mu_R(z, x),$$

$$a = \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x),$$

$$c = \mu_R(y, z) = \mu_R(z, y).$$

Тоді $c \ge a = b$ або $a \ge b = c$, або $b \ge c = a$, тобто з величин a, b, c принаймні дві рівні між собою, а третя не менша від них.

Визначення 4.33. Нечітке бінарне відношення, що має властивості антирефлексивності й симетричності, називається *відношенням відмінності.*

Приклади відношень відмінності:

1. Відношення на множині $\{A, B, C, D, E\}$, задане матрицею такого вигляду:

	A	B	C	D	E
A	0	0,2	0,3	0	0,1
B	0,2	0	0,3	0,2	0,2
C	0,3	0,3	0	0,3	0,3
D	0	0,2	0,3	0	0,1
E	0,1	0,2	0,3	0,1	0

2. Нечітке відношення, задане такою функцією належності:

$$\mu_{\overline{R}}(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-k(y+1)}, & y < x, \quad k > 1, \\ 0, & y = x, \\ 1 - e^{-k(x+1)}, & y > x, \quad k > 1, \end{cases}$$

являє собою відношення відмінності, воно утворюється внаслідок заміни: $\mu_{\overline{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y)$, у прикладі 4.40.

Міру відмінності можна вважати відстанню між елементами множини (якщо додати транзитивність), причому різні види транзитивності задають відповідно різні види відстаней.

Визначення 4.34. Нечітким *відношенням порядку* називається бінарне відношення, яке має властивості рефлексивності, транзитивності й антисиметричності.

Відрізняють відношення строгого й нестрогого порядку.

Строгий порядок являє собою антирефлексивне, асиметричне й транзитивне відношення.

Відношення нестрогого порядку – рефлексивні, антисиметричні й транзитивні.

4.12. Відображення нечітких множин. Принцип узагальнення

У багатьох задачах прийняття рішень виникає необхідність розширити область визначення X поданого відображення або відношення, шляхом включення до неї, поряд з окремими елементами множини X, її довільних нечітких підмножин.

Наприклад, на множині керувань (керівних впливів) U зафіксовано відображення $f: U \to V$, яке описує функціонування керованої системи. Для кожного керування $u \in U$ його образ: $v = f(u)$, відображає реакцію даної системи на вибір цього керування. Якщо вибране керування описано нечітко, наприклад, у формі нечіткої підмножини $\mu(u)$ множини U, то для відшукання реакції системи на нього необхідно визначити образ $\mu(u)$ при відображенні f.

Спосіб розширення області визначення відображення на клас нечітких множин називається *принципом узагальнення*.

Л.А. Заде запропонував принцип узагальнення, який базується на визначенні образу нечіткої множини при звичайному (чітко описаному) відображенні.

Нехай подано відображення $\varphi: X \to Y$, й A – деяка підмножина множини X, що характеризується функцією належності $\mu_A(x)$.

В и з н а ч е н н я 4.35. Образом нечіткої множини A при відображенні φ будемо називати нечітку підмножину множини Y, що являє собою сукупність таких пар:

$$(y, \mu_B(y)) = (\varphi(x), \mu_A(x)), \qquad x \in X ,$$

тут μ_B – функція належності образу, $\mu_B : Y \to [0;1]$.

Легко зрозуміти, що функцію належності μ_B можна записати таким чином:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x), \qquad y \in Y , \tag{4.57}$$

причому множина $\varphi^{-1}(y)$ для кожного фіксованого елемента $y \in Y$ визначається за таким правилом:

$$\varphi^{-1}(y) = \{x | \, x \in X, \varphi(\mathrm{x}) = y\},$$

тобто являє собою множину всіх тих елементів $x \in X$, образом яких при відображенні φ буде y.

П р и к л а д 4.42. Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, а множина $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Відображення $\varphi : X \to Y$ задано таблицею:

$$
\varphi = \begin{array}{c|ccc}
 & y_1 & y_2 & y_3 \\
\hline
x_1 & 1 & 0 & 0 \\
x_2 & 0 & 1 & 0 \\
x_3 & 0 & 1 & 0 \\
x_4 & 1 & 0 & 0 \\
x_5 & 0 & 0 & 1 \\
x_6 & 1 & 0 & 0 \\
x_7 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

На множині X задамо нечітку підмножину A, а саме:

$$
A = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 \mid x_6 \mid x_7}{0{,}3 \mid 0{,}5 \mid 1 \mid 0 \mid 0{,}5 \mid 0{,}8 \mid 0{,}4}.
$$

Знайдемо образ B нечіткої підмножини A при відображенні φ. Відповідно до визначення 4.35

$$
\mu_B(y_1) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y_1)} \mu_A(x),
$$

$$
\varphi^{-1}(y_1) = \{x_1, x_4, x_6\},
$$

тоді $\mu_B(y_1) = \sup\limits_{x \in \{x_1, x_4, x_6\}} \mu_A(x) = \sup\{0{,}3;\ 0;\ 0{,}8\} = 0{,}8$.

Аналогічно

$$
\mu_B(y_2) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y_2)} \mu_A(x) = \sup_{x \in \{x_2, x_3\}} \mu_A(x) = \sup\{0{,}5;\ 1\} = 1,
$$

$$
\mu_B(y_3) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y_3)} \mu_A(x) = \sup_{x \in \{x_5, x_7\}} \mu_A(x) = \sup\{0{,}5;\ 0{,}4\} = 0{,}5.
$$

Таким чином, образом множини A при відображенні φ буде нечітка множина $B \subset Y$, яка має такий вигляд:

$$
B = \frac{y_1 \mid y_2 \mid y_3}{0{,}8 \mid 1 \mid 0{,}5}.
$$

Застосуємо тепер принцип узагальнення для розширення області визначення нечіткого відображення.

Відображення множини X у множину Y назвемо *нечітким*, якщо кожному елементу $x \in X$ воно ставить у відповідність деяку нечітку підмножину множини Y. Описується нечітке відображення функцією належності

$\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$, причому функція $\mu_\varphi(x_0, y)$ для кожного фіксованого елемента: $x = x_0$, являє собою функцію належності нечіткої підмножини в множині *Y*, яка є образом елемента x_0 при відображенні φ.

Отже, нехай дано нечітке відображення $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$ і $\mu_A(x)$ – нечітка підмножина множині *X*. Якщо для відшукання образу цієї нечіткої множини при відображенні μ_φ застосувати принцип узагальнення за правилом (4.57), то отримаємо таку сукупність пар:

$$(\mu_\varphi(x, y), \mu_A(x)), \quad x \in X,$$

тут функція $\mu_\varphi(x, y)$ для кожного фіксованого елемента *x* задає нечітку підмножину множини *Y*.

У результаті можна зробити висновок, що образ нечіткої множини $\mu_A(x)$ в даному випадку є достатньо складним об’єктом, а саме, нечітким підкласом усіх нечітких підмножин множини *Y*. Отже, виникає потреба ввести принцип узагальнення в іншій формі.

В и з н а ч е н н я 4.36. Образом *B* нечіткої множини $A \subset X$ при нечіткому відображенні $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$ називається нечітка підмножина множини *Y*, характерна такою функцією належності:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \mu_\varphi(x, y)\}. \qquad (4.58)$$

В основі цього визначення лежить максимінний добуток (композиція) нечітких відношень.

Коли φ – звичайне відображення, тобто $\mu_\varphi(x, y) = 1$, якщо $y = \varphi(x)$, то формула (4.58) перетворюється на (4.57).

У багатьох задачах вихідне нечітке відображення μ_φ залежить від *n* змінних, тобто має такий вигляд: $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$, тут $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

Нехай у множині *X* подано нечітку підмножину μ_A. У загальному випадку функція належності цієї підмножини має такий вигляд:

$$\mu_A(x_1, ..., x_n) = \min(\mu_1(x_1), ..., \mu_n(x_n); \nu(x_1, ..., x_n)),$$

тут μ_i, $i = 1, ..., n$ та ν – відомі функції належності нечітких підмножин множини X_i, $i = 1, ..., n$ та *X* відповідно.

Застосовуючи в цьому випадку принцип узагальнення згідно з правилом (4.58), отримуємо таку формулу для функції належності образу нечіткої підмножини μ_A:

$$\mu_B(y) = \sup_{(x_1, ..., x_n) \in X} \min\{\mu_1(x_1), ..., \mu_n(x_n), \nu(x_1, ..., x_n), \mu_\varphi(x_1, ..., x_n, y)\}. \qquad (4.59)$$

П р и к л а д 4.42. Маємо множини: $X = \{x_1, ..., x_7\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ і нечітку підмножину A множини X, яку задано таким чином:

$$A = \frac{x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 \mid x_6 \mid x_7}{0{,}5 \mid 0{,}8 \mid 1 \mid 0 \mid 0{,}1 \mid 0{,}4 \mid 1}.$$

Крім того відомо нечітке відображення $\varphi : X \to Y$, функцію належності якого $\mu_\varphi : X \times Y \to [0; 1]$ подано таблицею, тобто

$$\mu_\varphi = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ x_2 & 0{,}4 & 0{,}8 & 1 \\ x_3 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0{,}5 & 1 \\ x_5 & 0 & 0 & 1 \\ x_6 & 0{,}3 & 0 & 0{,}8 \\ x_7 & 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{array}$$

Необхідно визначити образ $B \subset Y$ множини A при нечіткому відображенні φ.

Розв'язування

Будемо застосовувати визначення 4.36. Тоді для обчислення функції належності множини B використаємо максимінний добуток функцій μ_A та μ_φ. Отримані результати подано нижче.

$$\left(0{,}5;\ 0{,}8;\ 1;\ 0;\ 0{,}1;\ 0{,}4;\ 1\right) \cdot \begin{vmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 1 \\ 1 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{vmatrix} = \left(1;\ 0{,}8;\ 0{,}8\right).$$

Таким чином, $B = \dfrac{y_1 \mid y_2 \mid y_3}{1 \mid 0{,}8 \mid 0{,}8}.$

П р и к л а д 4.43. Поширимо область визначення арифметичної операції додавання на клас “нечітких чисел”, тобто на клас нечітких підмножин числової осі.

Операція додавання в множині чисел R^1 являє собою відображення $\varphi : R^1 \times R^1 \to R^1$, тобто $\varphi(r_1, r_2) = r = r_1 + r_2$.

Припустимо, що μ_1, μ_2 – два нечітких числа ($\mu_1, \mu_2 : R^1 \to [0,1]$). Образ пари (μ_1, μ_2) при відображенні φ назвемо їх сумою: $\mu_\Sigma = \mu_1 + \mu_2$. Тоді, використовуючи формулу (4.59), одержуємо такий результат:

$$\mu_\Sigma(r) = \sup_{\substack{r_1, r_2 \in R^1 \\ r_1 + r_2 = r}} \min\{\mu_1(r_1), \mu_2(r_2)\}. \qquad (4.60)$$

Зокрема, коли нечіткі числа μ_1 та μ_2 являють собою інтервали $[a_1, b_1]$ та $[a_2, b_2]$, то згідно з формулою (4.60)

$$[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2,\ b_1 + b_2].$$

В и з н а ч е н н я 4.37. Прообразом A нечіткої множини $B \subset Y$ при нечіткому відображенні $\mu_\varphi : X \times Y \to [0; 1]$, називається об’єднання всіх нечітких множин, образи яких при цьому відображенні належать (є підмножинами) нечіткій множині B.

Позначимо образ нечіткої множини μ_φ через $A \cdot \mu_\varphi$. Тоді умову для визначення прообразу множини можна записати таким чином:

$$\sup_{x \in X} \min\{\mu_2(x), \mu_\varphi(x, y)\} \le \mu_B(y), \qquad \forall y \in Y. \qquad (4.61)$$

Вона випливає із включення $A \cdot \mu_\varphi \subset Y$.

Явний вираз для функції належності прообразу подає наведена нижче теорема. Для її формулювання уведемо такі множини:

$$N = \{(x, y) | (x, y) \in X \times Y, \mu_\varphi(x, y) > \mu_B(y)\},$$

$$N_x = \{y | y \in Y,\ (x, y) \in N\},$$

$$N_y = \{x | x \in X,\ (x, y) \in N\},$$

$$X^\circ = \{x | x \in X, N_x \ne \varnothing\}.$$

Т е о р е м а 4.6. У введених вище позначеннях нечітка множина A (прообраз множини B) описується такою функцією належності:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in N_x} \mu_B(y), \ x \in X^\circ, \\ 1, x \in X \setminus X^\circ. \end{cases}$$

Легко перевірити, що коли відображення μ_φ чітке, тобто φ являє собою звичайне відображення $\varphi : X \to Y$ і функція належності

$$\mu_\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } y = \varphi(x), \\ 0 \text{ для всіх інших пар } (x, y) \in X \times Y, \end{cases}$$

то $\mu_A(x) = \mu_B(\varphi(x)), \quad \forall x \in X.$

Висновки

Нечіткі множини виступають як узагальнення поняття звичайної множини в тих випадках, коли елемент може належати множині тільки певною мірою. Теорія нечітких множин дозволяє більш адекватно описувати ситуації невизначеності, зумовлені неможливістю чітко описати переваги або множину допустимих альтернатив.

Операції над нечіткими множинами можна визначити різними способами, залежно від конкретних задач, за умови, що вони будуть правильно виконуватись стосовно чітких множин.

Нечіткі відношення являють собою розширення поняття бінарного відношення на клас нечітких множин. Їх властивості зумовлені ознаками нечітких множин і бінарних відношень.

Принцип узагальнення – це спосіб розширення області визначення відображення на клас нечітких множин.

Контрольні питання

1. Що означає характеристична функція множини?
2. Дайте визначення нечіткої множини.
3. Що називають носієм нечіткої множини?
4. Які операції над нечіткими множинами ви знаєте?
5. Як можна визначити доповнення нечіткої множини? Об’єднання та перетин нечітких множин?
6. Чим пояснюється існування кількох операцій об’єднання й перетину нечітких множин?
7. Які спеціальні операції над нечіткими множинами Ви знаєте?
8. Який сенс мають операції концентрування й розтягування?

9. Яким чином обчислюється відстань Хеммінга при розгляді скінченної множини? Лічильної множини? Множини потужності континуума?

10. Яким чином обчислюють евклідову відстань між множинами?

11. Який геометричний сенс має лінійна відстань між множинами?

12. Яку властивість характеризує індекс нечіткості множини? Яким чином його обчислюють?

13. Чи залежить індекс нечіткості перетину (об'єднання) множин від індексів нечіткості вихідних множин?

14. Чи змінюється індекс нечіткості множини внаслідок операцій концентрування та розтягування?

15. Дайте визначення найближчої чіткої множини до даної нечіткої?

16. Яку множину називають множиною рівня α нечіткої множини?

17. Сформулюйте теорему про розкладання нечіткої множини на множини рівня.

18. Сформулюйте теорему про декомпозицію нечітких множин.

19. Що називають нечітким відношенням?

20. Яким чином можна задавати нечіткі відношення?

21. Які математичні операції можна застосовувати до нечітких відношень?

22. Яке нечітке відношення називають рефлексивним (антирефлексивним)?

23. Які нечіткі відношення належать до симетричних, антисиметричних, асиметричних?

24. Яке нечітке відношення називають транзитивним? Яким чином пов'язані між собою різні види транзитивності нечітких відношень?

25. Що являє собою транзитивне замикання нечіткого відношення?

26. За якими ознаками прийнято класифікувати нечіткі відношеньня?

27. Дайте визначення відношень передпорядку, строгого та нестрогого порядку, еквівалентності, схожості, подібності, відмінності, переваги. На яких властивостях відношень базується ця класифікація?

28. Що являє собою відображення нечіткої множини?

29. Сформулюйте принцип узагальнення стосовно відображення нечітких множин.

30. Що являє собою образ нечіткої множини при звичайному відображенні?

31. Що являє собою нечітке відображення?

32. Як можна визначити образ нечіткої множини при нечіткому відображенні?

33. Що являє собою прообраз нечіткої множини при звичайному відображенні? При нечіткому відображенні?

Завдання до розділу 4

1. Дано такі нечіткі множини:

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	0,4	0,7	0,8	1	1	0,9

;

$B =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0,3	0,4	0,8	0,7	0,7	0,9

;

$$C:\quad \mu_C(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{9}(x-3)^2+1, & \textit{якщо } x\in(0;6),\\ 0, & \textit{якщо } x\notin(0;6) \end{cases};$$

$$D:\quad \mu_D(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{6}x, & \textit{якщо } x\notin(0;6),\\ 0 & \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

Чи будуть ці множини нормальними? Субнормальними? Визначити їхні носії.

2. Визначити перетин та об’єднання множин: а) A та B, б) C та D із завдання 1 (за трьома визначеннями).

3. Визначити доповнення множин A, C.

4. Виконати операції концентрування й розтягування множин B та D.

5. Розкласти нечіткі множини A та B (із завдання 1) на множини рівня.

6. Знайти найближчі до множин A, B, C, D із завдання 1 звичайні множини.

7. Знайти відстань Хеммінга та евклідову відстань між множинами: а) A та B, б) C та D.

8. Знайти лінійний і квадратичний індекси нечіткості множин B та D.

9. Обчислити лінійний індекс нечіткості множини, функція належності якої $\mu(x)=1-(x-1)^2$, де $x\in[0;\,2]$.

10. Навести приклад симетричного й рефлексивного нечіткого відношення.

11. Навести приклад транзитивного й рефлексивного нечіткого відношення.

12. Задати за допомогою матриці нечіткі відношення: а) «приблизно дорівнює», б) «значно більше», на множині чисел від 1 до 6.

13. Знайти max min-, min max- та max-мультиплікативну композиції нечітких відношень R_1 та R_2, які задано таким чином:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Які властивості має кожне з поданих нижче нечітких відношень:

а) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 1 & 0{,}9 \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 1 \end{pmatrix}$, б) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 1 & 1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$,

в) $R_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 0.7 & 1 & 0.2 \\ 0.20 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$, г) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 1 & 1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

15. Нехай задано такі множини: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Відображення $\varphi : X \to Y$, задано таблицею, а саме:

	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	0
x_2	0	1	0
x_3	1	0	0
x_4	0	1	0
x_5	1	0	0
x_6	0	0	1
x_7	0	0	1

Знайти образ $\varphi(A)$ множини A при відображенні φ, якщо множину A задано таким чином:

$$A = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}8 & 1 & 1 & 0{,}9 \end{array}.$$

16. Нехай маємо такі множини: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Нечітке відображення $\varphi : X \to Y$, задано таблицею, тобто

	y_1	y_2	y_3
x_1	0,7	0,5	0
x_2	0	1	0,9
x_3	0,8	0,6	0,5
x_4	0,7	0,3	0,9
x_5	1	0,7	0,6
x_6	0	0	1
x_7	0,2	0,7	1

Визначити множину $\varphi(A)$ при відображенні φ, якщо множину A задано в такому вигляді:

$$A = \frac{x_1}{0{,}5} \left| \frac{x_2}{0{,}4} \right| \frac{x_3}{0{,}7} \left| \frac{x_4}{0{,}8} \right| \frac{x_5}{1} \left| \frac{x_6}{1} \right| \frac{x_7}{0{,}9} \;.$$

РОЗДІЛ 5

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ НЕЧІТКИХ ВИХІДНИХ ДАНИХ

Мета розділу: вивчення методів прийняття рішень за наявності нечітких вихідних даних та їх застосування до розв'язування прикладних задач.

5.1. Задача досягнення нечітко визначеної мети (підхід Белмана – Заде)

Нехай X – універсальна множина альтернатив, тобто сукупність варіантів, серед яких ОПР здійснює вибір. *Нечіткою метою* в множині X будемо називати деяку її нечітку підмножину. Позначимо цю підмножину G. Нечітка мета описується функцією належності $\mu_G : X \to [0;1]$. Чим вищий ступінь належності альтернативи x до нечіткої множини мети μ_G, тобто чим більше значення $\mu_G(x)$, тим вищим буде ступінь досягнення цієї мети, якщо вибрати альтернативу x за розв'язок. Нечіткі обмеження, або множину допустимих альтернатив, також описують нечіткими підмножинами множини X. Позначимо їх як $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Будемо вважати, що нам відомі функції належності цих нечітких множин.

Розв'язати задачу означає досягнути мети й задовольнити обмеження, причому в такій постановці слід говорити не просто про досягнення мети, а про її реалізацію тією чи іншою мірою. Необхідно також враховувати й ступінь виконання обмежень.

Основним у підході Белмана – Заде до розв'язування цієї задачі, є те, що мету прийняття рішень і множину альтернатив розглядають як рівноважні нечіткі підмножини деякої універсальної множини альтернатив. Це дозволяє подати розв'язок задачі у відносно простому вигляді. Зокрема, у підході Белмана – Заде вимоги задачі враховуються описаним нижче способом.

Нехай, наприклад, деяка альтернатива x забезпечує досягнення мети (інакше – відповідає меті) зі ступенем $\mu_G(x)$ і задовольняє обмеження (або є допустимою) зі ступенем $\mu_C(x)$. За таких умов *нечітким розв'язком* D задачі досягнення нечіткої мети називається перетин нечітких множин мети й обмежень, тобто $D = G \bigcap C$. Отже, розв'язок задачі нечітко визначеної мети також являє собою деяку нечітку підмножину універсальної множини альтернатив X. Якщо перетин множин визначати за правилом 4.7, то функція належності розв'язку μ_D буде мати такий вигляд:

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}.$$

У разі, коли в задачі наявні кілька цілей та обмежень, нечіткий розв'язок можна описати такою функцією належності:

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_{G_1}(x), \ldots, \mu_{G_n}(x), \mu_{C_1}(x), \ldots, \mu_{C_m}(x)\}.$$

П р и к л а д 5.1. Нехай маємо таку універсальну множину альтернатив: $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. На цій множині задано множини мети й обмежень, а саме:

G – “x має бути близькою до 5” (нечітка мета),

C_1 – “x не повинна бути близькою до 4” (перше обмеження),

C_2 – “x повинна бути близькою до 6” (друге обмеження).

Їхні функції належності задано таблицею

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_G(x)$	0	0,1	0,4	0,8	1	0,7	0,4	0,2	0	0
$\mu_{C_1}(x)$	0,3	0,6	0,9	1	0,8	0,7	0,5	0,3	0,2	0
$\mu_{C_2}(x)$	0,2	0,4	0,6	0,7	0,9	1	0,8	0,6	0,4	0,2

Відповідно до підходу Белмана – Заде, функція належності нечіткого розв’язку задачі набуває на множині X таких значень:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_D(x)$	0	0,1	0,4	0,7	0,8	0,7	0,4	0,2	0	0

Вочевидь, такому розв’язку властива невизначеність, бо ми отримуємо не одну альтернативу, а деяку нечітку множину альтернатив. Якщо ОПР не здатна опрацювати такий тип розв’язку, то можна рекомендувати їй альтернативу, яка має найвищий ступінь належності до нечіткого розв’язку, тобто

$$\max_{x \in X} \mu_D(x) = \max_{x \in X} \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}.$$

Таку альтернативу називають *максимізувальним розв’язком.*

Це один із найбільш поширених у літературі способів вибору єдиної альтернативи.

У наведеному вище прикладі таким розв’язком буде число 5, оскільки ступінь його належності до нечіткого розв’язку максимальний.

П р и к л а д 5.2. Розв’язати задачу досягнення нечітко визначеної мети, коли мета й обмеження подано такими функціями належності:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} -\frac{1}{9}(x-3)^2 + 1, & \textit{якщо } x \in (0; 6), \\ 0, & \textit{якщо } x \notin (0; 6); \end{cases}$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x, & \textit{якщо } x \in (0; 6), \\ 0 & \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

Розв'язування

Щоб розв'язати цю задачу використаємо підхід Белмана – Заде, тобто

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}.$$

Для зручності зобразимо графіки функцій належності мети й обмежень (див. рис. 5.1).

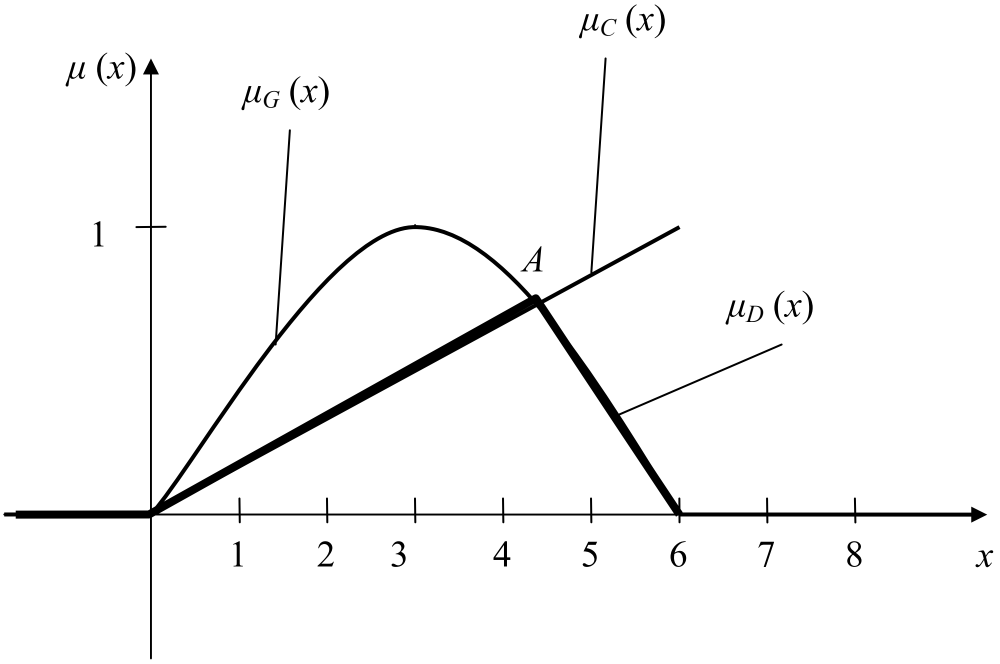


Рис. 5.1. Графічна інтерпретація розв'язування задачі досягнення нечітко визначеної мети

Тут товстою лінією показано функцію належності нечіткого розв'язку *D*. Опишемо її аналітично. Для цього знайдемо точки перетину графіків функцій належності мети й обмеження, склавши таке рівняння:

$$-\frac{1}{9}(x-3)^2 + 1 = \frac{1}{6}x.$$

Розв'язавши його, отримаємо координати двох точок перетину: $x_1 = 0$ та $x_2 = 4,5$. Тепер можемо записати функцію належності розв'язку в аналітичному вигляді, тобто

$$\mu_D(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x, \ \textit{якщо} \quad x \in (0;\ 4,5), \\ -\frac{1}{9}(x-3)^2 + 1, \ \textit{якщо} \ \ x \in (4,5;\ 6), \\ 0 \qquad\qquad \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

Максимізувальним розв'язком буде альтернатива: $x_2 = 4{,}5$, а ступінь її належності до нечіткого розв'язку $\mu_D(x) = 0{,}75$.

Розглянута вище ситуація прийняття рішень характеризувалася тим, що й мета, і обмеження були підмножинами однієї і тієї самої універсальної множини. Більш універсальною може бути інша постановка задачі, коли нечітка мета й обмеження є підмножинами різних універсальних множин. Розглянемо її.

Нехай, як і раніше, X – універсальна множина альтернатив, і нехай подано відображення $\varphi : X \to Y$, значення якого (елементи множини Y) можна розуміти як реакції деякої системи на вихідні дії $x \in X$ або як деякі оцінки вибору відповідних альтернатив. Відображення φ вважаємо однозначним.

Нечітка мета при цьому описується у вигляді нечіткої підмножини універсальної множини реакцій (оцінок) Y, тобто функцією належності $\mu_G : Y \to [0;1]$, а обмеження являють собою нечіткі підмножини вихідної множини X, функції належності яких $\mu_{C_i} : X \to [0;1]$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Задача при цьому зводиться до першої постановки (тобто до випадку, коли мета виступає нечіткою підмножиною множини X). Опишемо її.

Визначимо нечітку множину альтернатив станів $\overline{\mu}_G$, які забезпечують досягнення даної мети μ_G. Ця множина є прообразом нечіткої множини μ_G при відображенні φ, тобто

$$\overline{\mu}_G(x) = \mu_G(\varphi(x)).$$

Після цього вихідна задача буде еквівалентною задачі досягнення нечіткої мети $\overline{\mu}_G$ з огляду на ті самі нечіткі обмеження.

Визначення 5.1. Нехай G й C – нечіткі множини мети (у множині Y) та обмежень (у множині X). *Нечітким розв'язком* задачі досягнення мети G при обмеженнях C назвемо максимальну множину D, яка має такі властивості:

1. $D \subset C$ (розв'язок являє собою допустиму альтернативу);
2. $\varphi(D) \subset G$ (досягнення нечіткої мети), де $\varphi(D)$– образ множини D при нечіткому відображенні φ.

За умови, коли задано нечітке відображення множини альтернатив у множину реакцій або оцінок, нечіткий розв'язок можна знайти, користуючись визначенням прообразу, яке подано в попередньому розділі.

Нехай X – універсальна множина альтернатив, Y – універсальна множина оцінок, а також задано нечітке відображення X в Y, функція належності якого $\mu_\varphi : X \times Y \to [0;1]$. Кожній альтернативі це відображення ставить у відповідність її нечітку оцінку. Нечіткі обмеження описуються функцією належності $\mu_C(x)$.

За теоремою 4.6. прообраз множини D визначають таким чином:

$$N = \{(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y,\ \mu_\varphi(x, y) > \mu_G(y)\},$$

$$N_x = \{ y \mid y \in Y,\ (x, y) \in N \},$$

$$X^0 = \{ x \mid x \in X,\ N_x \neq \varnothing \},$$

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in N_x} \mu_G(y), & x \in X, \\ 1, & x \in X \setminus X^0. \end{cases}$$

Тепер нечіткий розв'язок описується такою функцією належності:

$$\mu_D(x) = \min \{ \mu_{\tilde{D}}(x), \mu_C(x) \},$$

або

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \begin{cases} \min\left\{ \mu_C(x), \inf\limits_{y \in N_x} \mu_G(x) \right\}, & x \in X,^0 \\ \mu_C(x), & x \in X \backslash X^0. \end{cases}$$

Якщо необхідно вибрати конкретну альтернативу, то за розв'язок задачі можна, наприклад, обрати ту, ступінь належності якої до нечіткого розв'язку μ_D максимальний, тобто альтернативу, що реалізує величину $\max\limits_{x \in X} \mu_D(x)$. Однак, цей вибір не можна вважати достатньо обґрунтованим, існують також інші способи визначення єдиної альтернативи.

Отже, підхід Белмана – Заде спирається на можливість симетричного опису множин мети й обмежень у вигляді нечітких підмножин однієї і тієї самої універсальної множини. Це дозволяє подати розв'язок задачі в досить простому вигляді. У той же час, не всяка задача прийняття рішень може бути сформульована таким чином.

Зауваження. Іноді важливість мети й обмежень враховують за допомогою вагових коефіцієнтів. Тоді розв'язок задачі описують у такий спосіб:

$$\mu_D(x) = \min\{\lambda_1 \mu_{G_1}(x), \ldots, \lambda_n \mu_{G_n}(x), \nu_1 \mu_{C_1}(x), \ldots, \nu_m \mu_{C_m}(x)\},$$

тут $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \nu_1, \ldots, \nu_m$ – вагові коефіцієнти цільових функцій та обмежень відповідно.

Цей підхід також не можна вважати достатньо обґрунтованим.

5.2. Задачі нечіткого математичного програмування та їх класифікація

Стандартна задача математичного програмування звичайно являє собою пошук максимуму (або мінімуму) заданої функції на даній множині допустимих альтернатив, яку описано системою нерівностей. Наприклад,

$$f(x) \to \max,$$
$$\varphi_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$x \in X,$$

де X – задана множина альтернатив, $f : X \to R^1$ й $\varphi_i : X \to R^1$, $i = 1,\dots,m$ – задані функції.

В той же час, при моделюванні реальних задач, дослідник часто може мати у своєму розпорядженні лише нечіткі описи функцій f і φ або їхніх параметрів, нечітко може бути описана й множина альтернатив X. Таке подання ситуації прийняття рішень може, наприклад, відображати неадекватність наявної інформації або бути формою наближеного опису, достатнього для розв'язування задачі.

Більше того, у деяких випадках точно визначена множина обмежень (допустимих альтернатив) може виявитися лише наближеною до реальної ситуації в тому сенсі, що у вихідній задачі альтернативи поза множиною обмежень можуть не бути недопустимими, а виявляються тільки тією чи іншою мірою менш бажаними для ОПР. До прикладу згадаємо ситуацію, де множиною допустимих альтернатив виступає сукупність усіляких способів розподілу ресурсів, які ОПР збирається вкласти в дану операцію. У цьому випадку, мабуть, недоцільно заздалегідь вводити чітку межу множини допустимих альтернатив (розподілів), оскільки може трапитися так, що розподіл ресурсів, який перебуває за цією межею, дасть ефект, який переважить "меншу" його бажаність для ОПР. Таким чином, нечіткий опис може виявитися більш адекватним реальності, ніж в деякому сенсі довільно прийняті чіткі обмеження.

Форми нечіткого опису інформації можуть бути різними, звідси й походить відмінність у математичних постановках задач *нечіткого математичного програмування* (НМП). Наведемо деякі з цих постановок, згрупованих у п'ять описаних нижче типів задач [27].

З а д а ч а І. Максимізація заданої звичайної функції на нечіткій множині альтернатив. Тобто маємо таку задачу:

$$f(x) \to \max,$$
$$x \in X,$$

тут $f : X \to R^1$, $\mu_C : X \to [0;1]$.

Опишемо підходи до розв’язування цієї задачі.

1. *Зведення до задачі нечітко визначеної мети*.

Для цього вихідна цільова функція нормується в такий спосіб:

$$\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{\sup\limits_{x \in \operatorname{supp} \mu_C} f(x)} \to \max.$$

Отриману функцію $\bar{f}(x)$ вважають функцією належності до нечіткої мети. При цьому значення $\bar{f}(x)$ буде ступенем досягнення мети при виборі альтернативи $x \in X$. Це дозволяє безпосередньо застосувати до розв’язування цієї задачі підхід Белмана – Заде. Раціональним вважається вибір альтернативи, яка має максимальний ступінь належності до нечіткого розв’язку, тобто реалізує таку величину:

$$\max_{x \in X} \min\{\mu_C(x), \bar{f}(x)\}.$$

2. *Зведення до задачі багатокритерійної оптимізації.*

У цьому підході враховується той факт, що потрібно досягти максимального значення функції і максимальної належності розв’язку задачі до множини допустимих альтернатив, а значить формулюємо таку багатокритерійну задачу:

$$f(x) \to \max,$$
$$\mu_C(x) \to \max,$$
$$x \in X.$$

Цей підхід детальніше буде розглянуто далі.

З а д а ч а II. Це нечіткий варіант стандартної задачі математичного програмування.

Його можна отримати, якщо “пом’якшити” обмеження, тобто припустити можливість деякого їх порушення у стандартній задачі математичного програмування, а саме:

$$f(x) \to \max,$$
$$\varphi(x) \,\tilde{\leq}\, 0,$$
$$x \in X.$$

Крім того, замість максимізації функції $f(x)$, можна прагнути досягнення певного фіксованого значення цієї функції, причому різним відхиленням $f(x)$ від цієї величини належить приписувати різні ступені допустимості (наприклад, чим більше відхилення, тим менший ступінь його допустимості). Нечітку задачу при цьому можна записати таким чином:

$$f(x) \geq z_\circ,$$
$$\varphi(x) \tilde{\leq} 0,$$
$$x \in X,$$

тут символ $\sim$ означає нечіткість відповідних нерівностей.

Опишемо один із способів формалізації таких задач.

Припустимо, що z_0 – задана величина цільової функції $f(x)$, досягнення якої вважається достатнім для виконання мети прийняття рішення, та існують (подані ОПР) два граничних рівні a й b, причому нерівність: $f(x) < z_\circ - a$ означає сильне порушення умови: $f(x) \geq z_\circ$, а $\varphi(x) > b$ – сильне порушення умови: $\varphi(x) \leq 0$. Тоді можна записати множини мети й обмежень, використовуючи такі функції належності:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \leq z_\circ - a, \\ \mu(x,a), & z_\circ - a < f(x) < z_\circ, \\ 1, & f(x) \geq z_\circ, \end{cases}$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, & \varphi(x) \geq b, \\ \nu(x,b), & 0 < \varphi(x) < b, \\ 1, & \varphi(x) \leq 0, \end{cases}$$

тут $\mu : X \to [0;1]$ та $\nu : X \to [0;1]$ – деякі функції, що описують міру виконання відповідних нерівностей з погляду ОПР та зважаючи на конкретну задачу прийняття рішень.

Таким чином, вихідну задачу буде сформульовано у вигляді задачі досягнення нечітко визначеної мети, до якої можна застосувати підхід Белмана – Заде, або можна звести її до задачі багатокритерійної оптимізації такого вигляду:

$$\mu_G(x) \to \max,$$
$$\mu_C(x) \to \max,$$
$$x \in X.$$

Детальніше методи розв’язування цієї задачі буде розглянуто нижче (розділ 5.3).

З а д а ч а III. Дано нечітко описану функцію, яку необхідно “максимізувати”, тобто відображення $\mu_\varphi : X \times R^1 \to [0;1]$, де X – універсальна множина альтернатив, R^1 – числова вісь. У цьому випадку функція $\mu_\varphi(x_0, r)$ при кожному фіксованому $x_0 \in X$ являє собою нечітку оцінку результату вибору альтернативи x_0 (нечітку *оцінку* альтернативи x_0) або нечітку реакцію системи на керування x_0. Задано також нечітку множину допустимих альтернатив $\mu_C : X \to [0;1]$.

До такої постановки зводиться багато класів задач нечіткого математичного програмування. Методи їх розв’язування розглянуто в монографії [25].

З а д а ч а IV. Задано звичайну цільову функцію $f : X \to R^1$ та систему обмежень: $\varphi_i(x) \le b_i$, $i = 1, \ldots, m$. Причому параметри в описі функцій $\varphi_i(x)$ задано нечітко, зокрема у формі нечітких множин.

Наприклад, у лінійному випадку $(X = R^n)$ функції $\varphi_i(x)$ мають такий вигляд:

$$\varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

а кожен з параметрів a_{ij} та b описано відповідною нечіткою множиною $\mu_{ij}(a_{ij})$, $\nu_i(b_i)$.

Розроблено кілька способів розв’язування таких задач.

Одним з них є метод модальних значень. Він полягає в тому, що нечіткий параметр замінюється своїм модальним значенням, а потім розв’язується отримана скалярна задача. Ступінь належності отриманого розв’язку обчислюється як мінімум серед ступенів належності модальних значень параметрів. Однак цей метод можна застосовувати тоді, коли функції належності параметрів унімодальні, тобто кожна з них досягає свого максимального значення тільки в одній точці. Якщо ж ця вимога не виконується, то питання про те, яке саме із значень параметрів, що мають найвищий ступінь належності, треба вибирати, залишається відкритим.

Інший спосіб розв’язування полягає у зведенні вихідної задачі до задачі типу I.

Існують також методи, які базуються на зведенні вихідної задачі до задачі багатокритерійної оптимізації [6].

З а д а ч а V. У її умові нечітко описано як параметри функцій обмежень, так і параметри цільової функції.

Одним з підходів до розв’язування такої задачі є її зведення до задачі типу III.

5.3. Задачі математичного програмування з нечіткими обмеженнями

Нехай на універсальній множині альтернатив X задано функцію $\varphi : X \to R^1$, значеннями якої оцінюються результати вибору альтернатив, і нечітку підмножину допустимих альтернатив $\mu_C : X \to [0;1]$. Належить “максимізувати” в деякому сенсі функцію φ на нечіткій множині μ_C, тобто

$$\varphi(x) \to \max,$$
$$x \in \tilde{C}.$$

Це означає, що під "максимізацією" можна розуміти вибір нечіткої підмножини μ_D (нечіткого рішення), якому відповідає найкраще в деякому сенсі нечітке значення функції φ. Зрозуміло, що подання розв'язку в такій формі доцільне лише тоді, коли вона змістовно сприймається ОПР.

Якщо ж ОПР не сприймає нечіткого опису задачі, то під "максимізацією" функції φ слід розуміти раціональний вибір конкретної альтернативи або множини альтернатив.

Раціональність при цьому означає, що, вибираючи конкретну альтернативу, ОПР має виходити з необхідності компромісу між бажанням отримати якомога більше значення функції φ та прагненням віддати перевагу допустимій альтернативі, яка має найбільший ступінь належності до множини допустимих альтернатив.

Розглянемо два підходи до розв'язування цієї задачі, їх обгрунтування наведено в монографії [27].

5.3.1. Розв'язок 1, який базується на множинах рівня нечіткої множини обмежень

Даний підхід полягає в тому, що вихідна задача нечіткого математичного програмування формулюється у вигляді сукупності звичайних задач максимізації функції φ на всіляких множинах рівня множини допустимих альтернатив. Якщо ж альтернатива $x_0 \in X$ є розв'язком задачі: $\varphi(x) \to \max$, на множині рівня λ, то природно вважати, що її ступінь належності до нечіткої множини розв'язків задачі не менший за λ.

Таким чином, перебравши всілякі значення λ, ми одержимо функцію належності нечіткого розв'язку.

Опишемо цей підхід більш детально.

Позначимо через C_λ множину рівня λ нечіткої множини допустимих альтернатив μ_C, тобто

$$C_\lambda = \{x \mid x \in X, \mu_C(x) \geq \lambda\}.$$

Для всіх чисел $\lambda \geq 0$, за умови що $C_\lambda \neq \varnothing$, уведемо таку множину:

$$N(\lambda) = \left\{ x \;\middle|\; x \in X, \varphi(x) = \sup_{x' \in C_\lambda} \varphi(x') \right\}.$$

Це множина розв'язків звичайної задачі максимізації функції φ на множині альтернатив, ступінь належності яких до множини допустимих альтернатив вихідної задачі НМП не менший за λ.

Для побудови функції належності нечіткого розв'язку необхідно кожній альтернативі $x \in X$ приписати ступінь належності до цієї множини. Зробимо це таким чином: ступенем належності альтернативи x_0 до нечіткої множини розв'язків будемо вважати максимальне (точніше верхню границю) з чисел λ, для яких відповідна множина $N(\lambda)$ містить альтернативу x_0.

Визначення 5.2. Розв'язком задачі НМП будемо називати нечітку підмножину μ_D, яка описується такою функцією належності:

$$\mu^1(x) = \sup_{\lambda : x \in N(\lambda)} \lambda . \tag{5.1}$$

Назвемо його розв'язком типу 1.

Твердження 5.1. Якщо $x \in \operatorname{supp} \mu^1(x)$, то $\mu^1(x) = \mu_C(x)$.

Доведення

а) Коли $x \in \operatorname{supp} \mu^1(x)$ і $\mu^1(x) > \mu_C$, то $\sup\limits_{\lambda : x \in N(\lambda)} \mu^1(x) > \mu_C(x)$. Це означає, що існує число $\tilde{\lambda}$, яке задовольняє умови: $\tilde{\lambda} > \mu_C(x)$, і $x \in N(\tilde{\lambda})$. Тоді, відповідно до визначення нечіткого розв'язку, $x \in C_{\tilde{\lambda}}$, а тому $\mu_C(x) \ge \tilde{\lambda}$, тобто нерівність: $\tilde{\lambda} > \mu_C(x)$, неможлива.

б) Якщо ж $x \in \operatorname{supp} \mu^1(x)$ і $\mu^1(x) < \mu_C(x)$, тобто

$$\sup_{\lambda : x \in N(\lambda)} \mu^1(x) < \mu_C(x) = \nu, \tag{5.2}$$

то для будь-якого числа λ, що задовольняє умову $x \in N(\lambda)$, виконується включення $x \in C_\nu \subset C_\lambda$, крім того, $x \notin N(\lambda)$, оскільки в протилежному випадку із нерівності (5.2) випливає, що $\nu < \nu$, звідси

$$\varphi(x) < \sup_{x' \in C_\nu} \varphi(x') \le \sup_{x' \in C_\lambda} \varphi(x') = \varphi(x).$$

Тим самим твердження доведено.

З огляду на твердження 5.1 і на визначення 5.2 функцію належності розв'язку типу 1 можна записати в такому вигляді:

$$\mu^1(x) = \begin{cases} \mu_C(x), & x \in \bigcup\limits_{\lambda > 0} N(\lambda), \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \tag{5.3}$$

таким чином,

$$\text{supp}\,\mu^1(x)=\bigcup_{\lambda>0}N(\lambda).$$

Будемо говорити, що розв'язок типу 1 існує, якщо $\mu^1(x)\neq 0$ на множині X, тобто тоді й тільки тоді, коли знайдеться таке число: $\lambda > 0$, для якого $N(\lambda)\neq\varnothing$.

Нечіткому розв'язку відповідає *нечітке* "максимальне" *значення* $\mu_\varphi(r)$ функції $\varphi(x)$. Воно є образом нечіткої множини $\mu^1(x)$ при відображенні φ і відповідно до визначення 4.36, має такий вигляд:

$$\mu_\varphi(r)=\sup_{x\in\varphi^{-1}(r)}\mu^1(x)=\sup_{x\in\varphi^{-1}(r)}\sup_{x\in N(\lambda)}\lambda\,, \tag{5.4}$$

тут

$$\varphi^{-1}(r)=\{x|x\in X,\varphi(x)=r\}.$$

Якщо в задачі НМП розв'язку типу 1 не існує, то можемо скористатися *ε-оптимальним нечітким розв'язком*, який для заданого числа $\varepsilon>0$, можна визначити таким чином:

$$\mu_\varepsilon^1(x)=\sup_{\lambda:x\in N(\varepsilon,\lambda)}\lambda\,, \tag{5.5}$$

тут $$N(\varepsilon,\lambda)=\left\{x\,\middle|\,x\in X,\varphi(x)\geq\sup_{x'\in C_\lambda}\varphi(x')-\varepsilon\right\}, \tag{5.6}$$

а відповідне йому нечітке значення функції φ описується такою функцією належності:

$$\mu_\varphi^\varepsilon(x)=\sup_{x\in\varphi^{-1}(r)}\mu_\varepsilon^1(x). \tag{5.7}$$

Границю μ_φ^ε, коли $\varepsilon\to 0$, можна вважати верхньою нечіткою границею функції φ на нечіткій множині μ_C.

Поняття ε-оптимального розв'язку може бути корисним не тільки тоді, коли $\mu^1(x)=0$ для всіх альтернатив $x\in X$, але й тоді, коли $N(\lambda)=\varnothing$ при деяких значеннях λ із інтервалу [0; 1].

Розглянемо властивості розв'язку 1.

1. Для будь-якого числа r_0 за умови, що $\mu_\varphi(r_0)>0$, знайдеться така альтернатива: $\tilde{x}\in X$, для якої $\varphi(\tilde{x})=r_0$ й $\tilde{x}\in N(\lambda)$ при деякому значенні $\lambda>0$, тобто

$$r_0\in\text{supp}\,\mu_\varphi\Rightarrow\left[\bigcup_{\lambda>0}N(\lambda)\right]\cap\varphi^{-1}(r_0)\neq\varnothing. \tag{5.8}$$

Доведення

Відповідно до визначення $\mu_\varphi(\cdot)$ й множини $\operatorname{supp}\mu_\varphi$ з лівої частини виразу (5.8) отримуємо такий результат:

$$\sup_{x\in\varphi^{-1}(r_0)} \sup_{\lambda:x\in N(\lambda)} \lambda > 0,$$

тобто знайдеться альтернатива $x' \in \varphi^{-1}(r_0)$, для якої буде справедливою нерівність: $\sup\limits_{\lambda:x'\in N(\lambda)} \lambda > 0$, а це, у свою чергу, означає, що знайдеться таке число $\lambda > 0$, для якого альтернатива $x' \in N(\lambda)$. Звідси одержуємо включення $x' \in \varphi^{-1}(r_0) \cap N(\lambda)$, що й доводить істинність виразу (5.8).

2. Якщо $r_0 \in \operatorname{supp}\mu_\varphi$, то $\sup\limits_{x\in\varphi^{-1}(r_\circ)} \mu^1(x) = \sup\limits_{x\in\varphi^{-1}(r_\circ)} \mu_C(x)$.

Доведення

З огляду на визначення нечіткого розв'язку, функції належності $\mu^1(x)$ та $\mu_C(x)$ пов'язані нерівністю: $\mu^1(x) \le \mu_C(x)$ для кожної альтернативи $x \in X$, тому буде справедливою і така нерівність:

$$\sup_{x\in\varphi^{-1}(r_\circ)} \mu^1(x) \le \sup_{x\in\varphi^{-1}(r_\circ)} \mu_C(x).$$

Припустимо, що для деякого числа $r_0 \in \operatorname{supp}\mu_\varphi$ вона виконується як строга. Тоді стосовно деякої альтернативи $x_0 \in \varphi^{-1}(r_0)$ нерівність:

$$\mu^1(x) < \mu_C(x_0) \qquad (*)$$

виконується для всіх альтернатив $x \in \varphi^{-1}(r_0)$.

Далі, оскільки $r_0 \in \operatorname{supp}\mu_\varphi$, то відповідно до властивості 1 знайдуться альтернатива $x' \in X$ й число: $\lambda > 0$, для яких справедливе твердження: $x' \in \varphi^{-1}(r_\circ) \bigcap N(\lambda)$. Оскільки $x' \in N(\lambda)$ й $\lambda > 0$ то, враховуючи визначення розв'язку, $\mu^1(x') = \mu_C(x') \ge \lambda$ і тому згідно з нерівністю (*) $\mu_C(x_0) > \lambda$, тобто $x_0 \in C_\lambda$. А з огляду на те, що $x' \in N(\lambda)$ й $x \in \varphi^{-1}(r_0)$, тобто $\varphi(x') = r_0$, маємо таку рівність:

$$\varphi(x') = \sup_{x\in C_\lambda} \varphi(x) = r_0 = \varphi(x_0),$$

тобто $x_0 \in \varphi^{-1}(r_0)$. Звідси $x_0 \in N(\lambda)$, і згідно з твердженням 5.1, $\mu^1(x_0) = \mu_C(x_0)$, що суперечить нерівності (*).

Властивість 2 доведено.

3. Функція $\mu_\varphi(r)$ монотонно спадає на множині $\operatorname{supp}\mu_\varphi$.

Доведення

Достатньо показати, що $\mu_\varphi(r_1) \le \mu_\varphi(r_2)$ для будь-яких значень $r_1, r_2 \in \operatorname{supp}\mu_\varphi$, які задовольняють нерівність: $r_1 > r_2$.

Припустимо протилежне, тобто для деяких чисел $r_1 > r_2$ з множини $\operatorname{supp}\mu_\varphi$ виконується нерівність: $\mu_\varphi(r_1) > \mu_\varphi(r_2)$. Тоді, відповідно до властивості 2

$$\sup_{x\in\varphi^{-1}(r_1)} \mu_C(x) > \sup_{x\in\varphi^{-1}(r_2)} \mu_C(x),$$

тобто знайдеться альтернатива $x_1 \in \varphi^{-1}(r_1)$ яка задовольняє таку нерівність:

$$\mu_C(x_1) > \mu_C(x), \qquad (**)$$

для всіх альтернатив $x \in X$.

Далі, оскільки $r_2 \in \operatorname{supp}\mu_\varphi$, то з огляду на властивість 1, знайдеться альтернатива $x_2 \in \varphi^{-1}(r_2)$ і число $\lambda > 0$ які відповідають такій умові: $x_2 \in N(\lambda)$, тобто $r_2 = \varphi(x_2) = \sup\limits_{x\in C_\lambda}\varphi(x)$.

Крім того, звідси й з нерівності (**) випливає, що $x_1 \in C_\lambda$, і тому

$$r_2 = \varphi(x_2) = \sup_{x\in C\lambda}\varphi(x) \ge \varphi(x_1) = r_1,$$

тобто $r_2 \ge r_1$, а це суперечить припущенню про те, що $r_1 > r_2$.

Властивість 3 доведено.

Отже, функцію $\mu_\varphi(r)$ описано таким чином, що її значення для конкретного числа $r \in R^1$ є максимальним ступенем належності альтернативи x множині $\mu_C(x)$, у межах якої функція $\varphi(x)$ набуває значення r.

Як було доведено в третій властивості, функція $\mu_\varphi(r)$ монотонно спадає на множині $\operatorname{supp}\mu_\varphi$. Це означає, зокрема, що в межах множини X немає жодної альтернативи, для якої виконувалися б одночасно нерівності: $\mu_C(x) > \mu_\varphi(x) > 0$ й $\varphi(x) > r$, тобто не існує такого елемента $x \in X$, що мав би більший, ніж $\mu_\varphi(r)$ ступінь належності $\mu_C(x)$ й забезпечив би більше від r значення максимізованої функції.

Якщо нечіткий розв'язок для ОПР неприйнятний і необхідно вибрати конкретну альтернативу $x \in X$, то цей вибір має спиратися не тільки на ступінь належності цієї альтернативи до нечіткої множини $\mu_C(x)$, але й на відповідне значення функції $\varphi(x)$. Як випливає з третьої властивості, чим більше значення

r_0, тим менше значення $\mu_C(x)$ ступеня належності тієї альтернативи x, яка забезпечує досягнення цього значення. За таких умов ОПР повинна спочатку звернутися до нечіткого максимального значення $\mu_\varphi(r)$ функції $\varphi(x)$ й обрати пару $(r_0, \mu_\varphi(r_0))$, що відповідає її прагненню отримати якомога більше значення r_0, й одночасно найвищий ступінь його належності до множини $\mu_\varphi(r)$. Після вибору такої пари доречно зупинитись на такій альтернативі $x_0 \in \varphi^{-1}(r_0)$, що має найбільший ступінь належності множині $\mu_C(x)$ (або на альтернативі, що в деякому сенсі близька до x).

Можна виділити два основні недоліки цього підходу.

По-перше, у цьому розв'язку недостатньо явно враховується необхідність компромісу між значеннями максимізованої функції та значеннями ступеня належності альтернативи до множини допустимих рішень.

По-друге, він складний для обчислення.

Якщо функція належності неперервна, то застосування цього підходу вимагає розгляду нескінченної кількості задач, оскільки нескінченною буде кількість множин рівня. Однак у разі практичного використання буде достатньо розглянути скінченну множину задач для множин рівня, визначених експертами або ОПР.

Розглянемо застосування описаного підходу для лінійної задачі НМП.

П р и к л а д 5.3. Розв'язати таку задачу нечіткого математичного програмування:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \max, \\
&2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\
&x_1 + 6x_2 \le 18, \\
&2x_1 + 3x_2 \lesssim 12, \\
&x_1, x_2 \ge 0,
\end{aligned}
$$

коли нечіткі обмеження описуються такою функцією належності:

$$
\mu(x) = \begin{cases}
0, & \textit{якщо}\ 2x_1 + 3x_2 \ge 14, \\
0{,}5, & \textit{якщо}\ 13 \le 2x_1 + 3x_2 \le 14, \\
0{,}7, & \textit{якщо}\ 12 \le 2x_1 + 3x_2 \le 13, \\
1, & \textit{якщо}\ 2x_1 + 3x_2 \le 12.
\end{cases}
$$

Розв'язування

Використаємо метод розкладання на множини рівня. Враховуючи вигляд функції належності обмежень, необхідно розв'язувати задачі на таких множинах рівня: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 0{,}7$; та $\lambda_3 = 0{,}5$.

На рівні: $\lambda_1 = 1$, задача набуває такого вигляду:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 6,$$
$$x_1 + 6x_2 \leq 18,$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 12,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Коли $\lambda_2 = 0{,}7$, то маємо таку задачу:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 6,$$
$$x_1 + 6x_2 \leq 18,$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 13,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Якщо рівень $\lambda_3 = 0{,}5$, задачу буде записано в такому вигляді:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 6,$$
$$x_1 + 6x_2 \leq 18,$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 14,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Сформульовані задачі являють собою задачі лінійного програмування і для їх розв'язування можна застосовувати, наприклад, симплекс-метод, або, оскільки кожна з них має лише дві змінні, існує можливість розв'язати їх графічно.

Із цією метою зобразимо на координатній площині множини рівня нечіткої множини допустимих альтернатив (див. рис. 5.2).

Тут багатокутник $ABCDE$ відповідає множині рівня: $\lambda_1 = 1$; A_1BCDE_1 – множині рівня: $\lambda_2 = 0{,}7$; A_2BCDE_2 – множині рівня: $\lambda_3 = 0{,}5$.

Розв'язком задачі на множині рівня 1 буде точка A. Знайдемо її координати з такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 = 18, \\ 2x_1 + 3x_2 = 12. \end{cases}$$

Отримуємо такий результат: $x_1 = 2, x_2 = 2\frac{2}{3}$.

Значення цільової функції в цій точці $f(A) = 17\frac{1}{3}$.

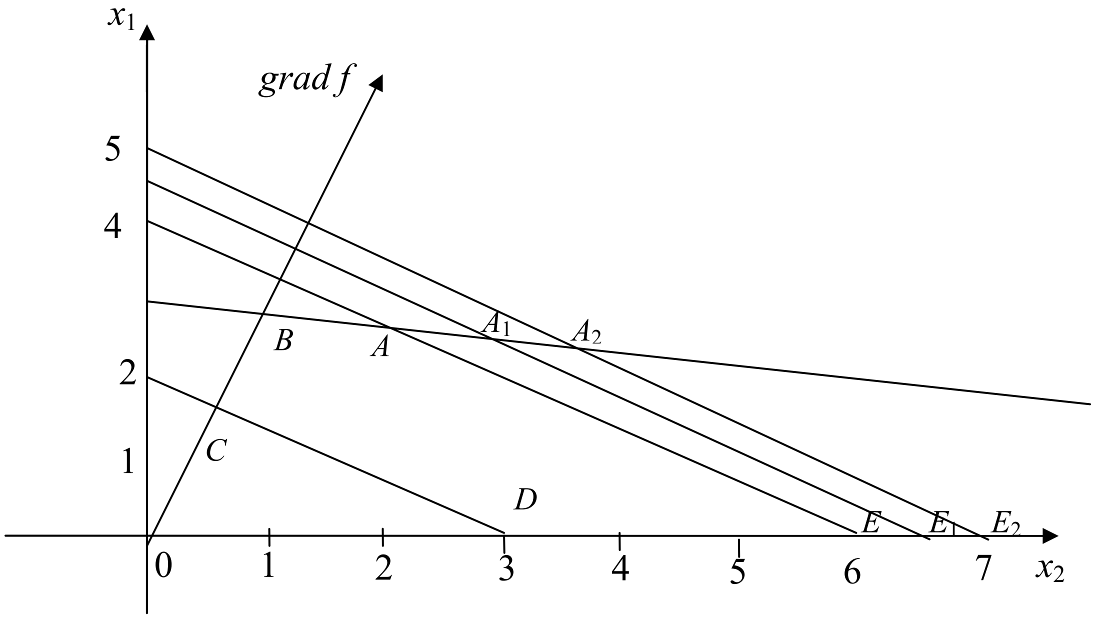


Рис. 5.2. Графічна інтерпретація розв’язування задачі нечіткого математичного програмування

Аналогічно розв’язуємо задачі на множинах рівня 0,7 та 0,5. У результаті отримуємо точку A_1, яка має такі координати: $x_1 = 2\frac{2}{3}, x_2 = 2\frac{5}{9}$, і точку A_2 (її координати: $x_1 = 3\frac{1}{3}$, $x_2 = 2\frac{4}{9}$). Відповідні цим точкам значення цільової функції: $f(A_1) = 18\frac{1}{9}$, $f(A_2) = 18\frac{2}{3}$.

Нечіткий розв’язок задачі опишемо, звівши одержані результати в таблицю.

x_1	x_2	f	λ
2	$2\frac{2}{3}$	$17\frac{1}{3}$	1
$2\frac{2}{3}$	$2\frac{5}{9}$	$18\frac{1}{9}$	0,7
$3\frac{1}{3}$	$2\frac{4}{9}$	$18\frac{2}{3}$	0,5

Нагадаємо, що коли функції належності неперервні, то необхідно розв’язувати задачі на нескінченній кількості множин рівня. Але на практиці достатньо визначити для розгляду кілька рівнів.

5.3.2. Розв'язок 2, що базується на знаходженні множини ефективних альтернатив. Еквівалентність розв'язків обох типів

Для цього підходу характерно те, що із самого початку явно враховується прагнення ОПР при виборі альтернативи отримати якомога більші значення як максимизованої функції, так і функції належності нечіткої множини допустимих альтернатив.

Із цією метою до визначення розв'язку включають лише ті альтернативи, які в задачах багатокритерійної оптимізації називаються ефективними за Парето.

Нагадаємо, що альтернатива $x_0 \in X$ називається ефективною за двома функціями $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$, коли для будь-якої іншої альтернативи $x' \in X$ з нерівностей: $\varphi(x') \geq \varphi(x_0)$ й $\mu_C(x') \geq \mu_C(x_0)$, випливає справедливість таких рівностей: $\varphi(x') = \varphi(x_0)$ й $\mu_C(x') = \mu_C(x_0)$.

Інакше кажучи, якщо x_0 – ефективна альтернатива для функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$ на множині *X*, то, вибравши будь-яку іншу альтернативу, не можна збільшити, порівняно з $\varphi(x_0)$ та $\mu_C(x_0)$, значення однієї функції, не зменшивши при цьому значення іншої.

У задачі прийняття рішень за наявності кількох критеріїв множина ефективних альтернатив виступає як сукупність запропонованих варіантів раціонального вибору, здійснюваного ОПР.

Отже, нехай *P* – множина всіх ефективних альтернатив для функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$, які розглядаються в задачі нечіткого математичного програмування.

В и з н а ч е н н я 5.3. Розв'язком задачі НМП називають нечітку множину, функція належності якої

$$\mu^2(x) = \begin{cases} \mu_C(x), & \text{коли } x \in P, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{5.9}$$

Його будемо називати розв'язком типу 2.

У цьому визначенні існує явне припущення про те, що ОПР має використовувати в процесі прийняття рішення лише ті альтернативи універсальної множини *X*, які дають одночасно неполіпшувані значення функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$.

Відповідне розв'язку 2 нечітке значення функції $\varphi(x)$ записується в такому вигляді:

$$\mu_\varphi^2(r) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(r)} \mu^2(x), \qquad r \in R^1. \tag{5.10}$$

Встановимо співвідношення між розв'язками обох типів.

Т е о р е м а 5.1 [27]. Якщо множина X компактна, функція $\varphi(x)$ неперервна, а функція $\mu_C(x)$ напівнеперервна зверху на множині X, то для кожного значення $r \in R^1$ виконується така рівність:

$$\mu_\varphi^1(r) = \mu_\varphi^2(r). \tag{5.11}$$

Доведення

Зауважимо, спочатку, що в умовах теореми множина $\varphi^{-1}(r)$ є замкненою в X стосовно кожного числа $r \in R^1$ і таким чином, для $\forall\, r \in R^1$ можна відшукати альтернативу $x_0 \in \varphi^{-1}(r)$ яка задовольняє таку рівність:

$$\sup_{x \in \varphi^{-1}(r)} \mu^1(x) = \mu^1(x_0). \tag{5.12}$$

Припустимо, що знайдеться число $r_0 \in R^1$, для якого $\mu_\varphi^1(r_0) > \mu_\varphi^2(r_0)$ або

$$\sup_{x \in \varphi^{-1}(r_0)} \mu^1(x) > \sup_{x \in \varphi^{-1}(r_0)} \mu^2(x). \tag{5.13}$$

Як наслідок рівності (5.12) і в умовах теореми вираз (5.13) набуває такого вигляду:

$$\mu_C(x_0) = \max_{x \in \varphi^{-1}(r_0)} \mu_C(x) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(r_0)} \mu^1(x) > \sup \mu^2(x). \tag{5.14}$$

Звідси

$$\mu_C(x_0) > \mu^2(x), \;\; \forall x \in \varphi^{-1}(r_0). \tag{5.15}$$

При цьому можливі такі ситуації:

а) Якщо $\mu^2(x) > 0$ для деякого елемента $x \in \varphi^{-1}(r_0)$, то $\mu^2(x_0) = \mu_C(x)$, а значить $\varphi(x_0) = \varphi(x) = r_0$, $\mu_C(x_0) > \mu_C(x)$. Але це суперечить ефективності альтернативи x для функцій $\varphi(x)$та $\mu_C(x)$.

б) Якщо $\mu^2(x) = 0$, $\forall x \in \varphi^{-1}(r_0)$, то жодна альтернатива не є ефективною, тобто для будь-якої альтернативи $x \in \varphi^{-1}(r_0)$ знайдеться інша альтернатива $x' \in X$, що відповідає таким умовам:

$$\varphi(x) \geq \varphi(x') = r_0, \;\; \mu_C(x) > \mu_C(x') \tag{5.16}$$

або

$$\varphi(x) > \varphi(x') = r_0, \;\; \mu_C(x) \geq \mu_C(x'). \tag{5.17}$$

Але якщо $x' \in \varphi^{-1}(r_0) \bigcap N(\lambda)$ для деякого числа $\lambda > 0$, то на підставі умов (5.17) робимо висновок, що $x \in C_\lambda$. Таким чином

$$\varphi(x) \le r_0 = \varphi(x'),$$

а це суперечить нерівностям (5.17).

Стосовно умов (5.16), то вони не мають місця для альтернативи $x' = x_0$ оскільки $x \in \varphi^{-1}(r_0)$ і $\mu_C(x_0) = \max\limits_{x \in \varphi^{-1}(r_0)} \mu_C(x)$.

Звідси $\mu_\varphi^1(r) = \mu_\varphi^2(r), \quad \forall r \in R^1$. Отже, теорему доведено.

З огляду на визначення 5.3, реалізацію розв’язку типу 2 зведено до пошуку множини ефективних альтернатив функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$. Однак ця множина включає, у загальному випадку, нескінченну кількість елементів, а її побудова являє собою досить складне завдання.

Разом з тим, для отримання такого розв’язку в конкретній задачі достатньо, щоб було визначено скінченну кількість ефективних альтернатив, рівномірно вибраних із множини *P*.

Для їх відшукування можна скористатися такою властивістю (див. розділ 3, теорему 3.1):

Якщо існують такі числа ν_1, ν_2 ($\nu_1 > 0,\ \nu_2 > 0,\ \nu_1 + \nu_2 = 1$), стосовно яких альтернатива x_0 забезпечує досягнення на множині X максимуму функції: $F(x) = \nu_1\varphi(x) + \nu_2\mu_C(x)$, то ця альтернатива є ефективною для цільових функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$.

Таким чином, надаючи різних додатних значень ваговим коефіцієнтам функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$ і максимізуючи відповідні функції $F(x)$, можна визначити будь-яку необхідну кількість ефективних альтернатив.

Отримані при цьому альтернативи разом з відповідними значеннями функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$ передаються в розпорядження ОПР, яка й робить остаточний вибір, виходячи із своїх суб’єктивних уявлень (або використовуючи не враховану в даній математичній моделі інформацію) про відповідну важливість значень функцій $\varphi(x)$ та $\mu_C(x)$.

5.4. Прийняття рішень при нечіткому відношенні переваги на множині альтернатив

Досліджуючи реальну ситуацію або процес з метою прийняття раціонального рішення, природно спочатку виявити множину всіх допустимих розв’язків або альтернатив.

Залежно від якості інформації, яку ми маємо, цю множину вдається описати з тією чи іншою мірою чіткості. Нехай, наприклад, маємо деяку універсальну множину альтернатив X і нечіткий опис її підмножини допустимих альтернатив $\mu_C(x)$. Значення функції μ_C описують міру допустимості відповідних альтернатив у поданій задачі.

Якщо окрім цієї функції, не існує іншої інформації про досліджувану альтернативу, то раціональним залишається прийняти вибір деякої альтернативи з такої множини:

$$X^D = \left\{ x \middle| x \in X,\ \mu_C(x) = \sup_{y \in X} \mu_C(y) \right\}.$$

Іншими словами, доцільно вибирати довільну альтернативу з тих, що мають максимальний ступінь прийнятності, оскільки не існує підстав віддавати перевагу іншим. При введені в модель додаткової інформації раціональним може виявитися вибір альтернатив з будь-якої підмножини множини X^D або будь-яких альтернатив, що не належать цій множині. Не виключено, що ця інформація може служити підставою для виявлення єдиної, найкращої з усіх альтернативи.

Інформація, про реальну ситуацію або процес, керуючись якою надають перевагу одній альтернативі над іншою, може бути виражена різними способами. У попередніх розділах ми вже розглянули випадки, коли її наводили у формі функцій корисності або описували числовими нерівностями, але такий спосіб опису не завжди можливий. Більш універсальним можна вважати подання інформації у формі відношень переваги на множині альтернатив, зокрема, у вигляді бінарних відношень (цей випадок було розглянуто в розділі 2), але не завжди вони можуть бути визначені чітко. Іншими словами, іноді більш точною моделлю ситуації буде опис переваг у вигляді нечітких відношень, тобто коли вони проявляються тільки певною мірою. Шляхи прийняття рішень за таких умов і буде розглянуто нижче.

5.4.1. Нечіткі відношення переваги та їхні властивості

В и з н а ч е н н я 5.3. Нехай *X* – задана множина альтернатив. *Нечітким відношенням нестрогої переваги* (НВП) на множині *X* будемо називати всіляке задане на ній рефлексивне відношення.

Це відношення описується функцією належності: $\mu_R : X \times X \to [0;1]$, яка є рефлексивною, тобто $\mu_R(x, x) = 1,\ \forall x \in X$.

Якщо μ_R – нечітке відношення переваги на множині *X*, то для будь-якої пари альтернатив $x, y \in X$ значення $\mu_R(x, y)$ відображати міру виконання переваги «*x* не гірше *y*», або $x \geq y$. З того, що $\mu_R(x, y) = 0$, випливає одне з двох тверджень: або $y = x$ або *x* та *y* не порівнянні між собою з додатною мірою. Рефлексивність цього відношення відображає той факт, що будь-яка альтернатива не гірша від себе самої.

Подане на множині X нечітке відношення переваги однозначно задає три відповідних йому нечітких відношення:

– однаковості $R^I\left(\mu_R^I\right)$,

– квазіеквівалентності $R^e\left(\mu_R^e\right)$,

– строгої переваги $R^S\left(\mu_R^S\right)$.

Ці відношення будуть використовуватись для визначення та аналізу властивостей недомінованих альтернатив у задачах прийняття рішень.

За аналогією до звичайних відношень їх можна визначити таким чином:

$$R^I = \left(X \times X \setminus R \bigcup R^{-1}\right) \bigcup \left(R \bigcap R^{-1}\right),$$

$$R^S = R \setminus R^{-1},$$

$$R^e = R \bigcap R^{-1},$$

де R^{-1}– обернене до R відношення, що описується такою функцією належності:

$$\mu_{R^{-1}}(x, y) = \mu_R(x, y), \qquad \forall (x,y) \in X \times X .$$

Використавши визначення операцій об’єднання, перетину та різниці нечітких множин, отримаємо наведені нижче вирази для опису функцій належності цих відношень.

1. Нечітке відношення байдужості

$$\mu_R^I(x, y) = \max\{1 - \max\{\mu_R(x, y), \mu_\mathrm{R}(y, x)\}, \min\{\mu_R(x, y), \mu_\mathrm{R}(y, x)\}\} =$$

$$= \max\left\{\min\left\{1 - \mu_R(x, y), 1 - \mu_R(y, x)\right\}, \min\left\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\right\}\right\}.$$

2. Нечітке відношення квазіеквівалентності

$$\mu_R^e(x, y) = \min\{\mu_R(x, y), \mu_\mathrm{R}(y, x)\}.$$

3. Нечітке відношення строгої переваги

$$\mu_R^S(x, y) = \begin{cases} \mu_R(x, y) - \mu_R(y, x), & \textit{коли} \;\; \mu_R(x, y) \geq \mu_R(y, x), \\ 0, & \textit{коли} \;\; \mu_R(x, y) < \mu_R(y, x). \end{cases}$$

Сенс цих відношень можна пояснити на прикладі.

П р и к л а д 5.4 (чітке відношення переваги). На множині X подано n функцій $f_i : X \to R^1$, $i = 1, \ldots, n$. Задамо на множині X відношення переваги R таким чином: $x \, R \, y \Leftrightarrow f_i(x) \geq f_i(y), \;\; \forall \;\; i = 1, \ldots, n$.

Легко помітити, що функція належності відношення R має такий вигляд:

$$\mu_R(x,y)=\begin{cases}1, \text{коли } f_i(x)\ge f_i(y),\ \forall i=\overline{1,n},\\ 0 \text{ в інших випадках.}\end{cases}$$

Зауважимо, що при такому відношенні переваги в множині X можуть бути альтернативи, які не можна порівняти, тобто $R\bigcup R^{-1}\ne X\times X$, й існують такі альтернативи x, y, для яких виконується умова $(x,y)\notin R\bigcup R^{-1}$. Наприклад, альтернативи x, y, для яких $f_i(x)\ge f_i(y)$, $\forall\ i\ne i_\circ$, але $f_{i_\circ}(x)<f_{i_\circ}(y)$.

З огляду на подані вище визначення

$$\mu_R^e(x,y)=\begin{cases}1, \text{коли } f_i(x)=f_i(y),\ \forall i=\overline{1,n},\\ 0 \text{ в інших випадках.}\end{cases}$$

Підкреслимо, що альтернативи, недоміновані стосовно даного відношення переваги, називаються ефективними або оптимальними за Парето для функцій $f_i(x)$, $i=1, 2, \dots, n$.

Розглянемо тепер деякі властивості визначених нечітких відношень μ_R^e та μ_R^S.

I. Нечіткі відношення μ_R^e і μ_R^I є рефлексивними та симетричними.

Дійсно, $\mu_R^e(x,x)=\mu_R^I(x,x)=\mu_R(x,x)=1$, оскільки вихідне відношення μ_R є рефлексивним. Симетричність цих відношень випливає з їхніх визначень.

II. Відношення μ_R^S – антирефлексивне й антисиметричне.

Справді, $\mu_R^S(x,x)=0$, оскільки вихідне НВП належить до рефлексивних, тобто $\mu_R(x,x)=1$, $\forall x\in X$.

Нехай, $\mu_R^S(x,y)>0$, тобто $\mu_R(x,y)-\mu_R(y,x)>0$, тоді $\mu_R^S(y,x)=0$, а це й свідчить про антисиметричність цього відношення.

Покажемо тепер, що коли вихідне НВП μ_R на множині X належить до транзитивних, то нечіткі відношення μ_R^e і μ_R^S теж транзитивні.

Т е о р е м а 5.2. Якщо НВП μ_R на множині X транзитивне, то й відповідне нечітке відношення μ_R^e також буде транзитивним.

Зауважимо, що з цієї теореми та з розглянутих вище властивостей відношення μ_R^e випливає, що в умовах теореми воно являє собою нечітке відношення еквівалентності (рефлексивне, симетричне, транзитивне).

Доведення

Припустимо, що в умовах теореми відношення μ_R^e не транзитивне. Інакше кажучи, можна виявити такі альтернативи $x,y,z\in X$, для яких буде справедливою нерівність:

$$\mu_R^e(x,y)<\min\left\{\mu_R^e(x,z),\mu_R^e(z,y)\right\}\ . \qquad (5.18)$$

Припустимо тепер, що $\mu_R(x,y) \geq \mu_R(y,x)$, тоді з визначення відношення μ_R^e робимо висновок: $\mu_R^e(x,y) = \mu_R(y,x)$. Користуючись цією рівністю, запишемо нерівність (5.18) у такому вигляді:

$$\mu_R(y,x) < \min\{\mu_R^e(y,z), \mu_R^e(z,x)\}. \tag{5.19}$$

Оскільки відношення μ_R^e симетричне, то з нерівності (5.19)

$$\mu_R^e(y,z) \leq \mu_R(y,z),$$

$$\mu_R^e(z,x) \leq \mu_R(z,x),$$

тобто $\min\{\mu_R^e(y,z), \mu_R^e(z,x)\} \leq \min\{\mu_R(y,z), \mu_R(z,x)\}$,
а $\mu_R(y,x) < \min\{\mu_R(y,z), \mu_R(z,x)\}$, що суперечить умові транзитивності вихідного відношення, за якою $\mu_R(x,y) \geq \max\limits_{z \in X} \min\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\}$.

Випадок, коли $\mu_R(y,x) \geq \mu_R(x,y)$, доводиться аналогічно.

Можна довести аналогічне твердження і стосовно відношення строгої переваги μ_R^S.

Т е о р е м а 5.3. Якщо нечітке відношення переваги μ_R на множині X транзитивне, то транзитивним буде також відповідне нечітке відношення строгої переваги μ_R^S.

Доведення

Припустимо, що в умовах теореми відношення μ_R^S не є транзитивним. Це означає, що знайдуться альтернативи $x, y, z \in X$, для яких справедлива така нерівність:

$$\mu_R^S(x,y) < \min\{\mu_R^S(x,z), \mu_R^S(z,y)\}. \tag{5.20}$$

Оскільки $\mu_R^S(x,y) > 0, \quad \forall x, y \in X$, то

$$\mu_R^S(x,z) = \mu_R(x,z) - \mu_R(z,x) > 0, \tag{5.21}$$

$$\mu_R^S(z,y) = \mu_R(z,y) - \mu_R(y,z) > 0. \tag{5.22}$$

Розглянемо два випадки.

а) Нехай $\mu_R(x,y) \leq \mu_R(y,x)$, тоді, враховуючи транзитивність відношення μ_R, можемо записати таку нерівність:

$$\mu_R(y,x) \geq \mu_R(x,y) \geq \min\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\}. \tag{5.23}$$

Крім того, із транзитивності відношення μ_R і нерівності (5.21) випливає, що

$$\mu_R(x,z) \geq \mu_R(z,x) \geq \min\{\mu_R(z,y), \mu_R(y,x)\}. \qquad (5.24)$$

Беручи до уваги співвідношення (5.23) та (5.24), робимо такий висновок:

$$\mu_R(x,z) \geq \min\{\mu_R(z,y), \mu_R(x,z)\}, \qquad (5.25)$$

тобто

$$\mu_R(x,z) > \mu_R(z,y), \qquad (5.26)$$

а з (5.23) випливає, що

$$\mu_R(x,y) \geq \mu_R(z,y). \qquad (5.27)$$

Далі, оскільки відношення μ_R – транзитивне, то

$$\mu_R(y,z) \geq \min\{\mu_R(y,x), \mu_R(z,y)\} \geq \min\{\mu_R(x,y), \mu_R(z,y)\}.$$

Беручи до уваги цю нерівність та співвідношення (5.27), робимо висновок що $\mu_R(y,z) \geq \mu_R(z,y)$, а це суперечить твердженню (5.22).

Таким чином, ми бачимо, що з умови (5.20) випливає неможливість виконання такої нерівності:

$$\mu_R(x,y) \leq \mu_R(y,x).$$

б) Припустимо тепер, що $\mu_R(x,y) > \mu_R(y,x)$, тоді

$$\mu_R^S(x,y) = \mu_R(x,y) - \mu_R(y,x) > 0,$$

а нерівність (5.20) можемо записати у такому вигляді:

$$\mu_R(x,y) - \mu_R(y,x) < \min\{[\mu_R(x,z) - \mu_R(z,x)], [\mu_R(z,y) - \mu_R(y,z)]\}. \qquad (5.28)$$

Далі, припустимо, що $\mu_R(y,z) \geq \mu_R(y,x)$, тоді функцію $\mu_R(y,z)$ у виразі (5.28) можна замінити на $\mu_R(y,x)$, тобто

$$\mu_R(x,y) - \mu_R(y,x) < \min\{[\mu_R(x,z) - \mu_R(z,x)], [\mu_R(z,y) - \mu_R(y,x)]\}. \qquad (5.29)$$

Коли додати до обох частин цієї нерівності $\mu_R(y,x)$, то цей вираз набуває такого вигляду:

$$\mu_R(x,y) < \min\{[\mu_R(x,z) + (\mu_R(y,x) - \mu_R(z,x))], \mu_R(z,y)\}. \qquad (5.30)$$

Тут слід розглянути дві можливості.

1) Якщо $\mu_R(y,x)-\mu_R(z,x)\le 0$, то з (5.30) одержуємо таку нерівність:

$$\mu_R(x,y)<\min\{\mu_R(x,z),\mu_R(z,y)\},$$

а вона суперечить транзитивності відношення μ_R.

2) Коли ж $\mu_R(y,x)-\mu_R(z,x)>0$, то, враховуючи транзитивность μ_R, можемо зробити висновок, що

$$\mu_R(x,y)>\mu_R(z,x)\ge\min\{\mu_R(z,y),\mu_R(y,x)\}.$$

Звідси випливає така нерівність:

$$\mu_R(y,x)>\mu_R(z,y),$$

а вона суперечить тому, що $\mu_R(y,z)\ge\mu_R(y,x)$.

Отже, ми показали, що коли виконано умову: $\mu_R(x,y)>\mu_R(y,x)$, то з огляду на нерівності (5.21), (5.22):

$$\mu_R(y,z)<\mu_R(y,x). \tag{5.31}$$

Аналогічно можна показати, що коли $\mu_R(x,y)>\mu_R(y,x)$, то з виразів (5.21) й (5.22) випливає нерівність:

$$\mu_R(z,x)<\mu_R(y,x). \tag{5.32}$$

Далі беручи до уваги, що

$$\mu_R(y,z)\ge\min\{\mu_R(y,x),\mu_R(x,z)\},$$

$$\mu_R(z,x)\ge\min\{\mu_R(z,y),\mu_R(y,x)\},$$

із виразів (5.31) і (5.32) отримуємо такі нерівності:

$$\mu_R(y,z)\ge\mu_R(x,z),$$

$$\mu_R(z,x)\ge\mu_R(z,y),$$

а вони суперечать припущенням (5.21) та (5.22).

Теорему доведено.

5.4.2. Нечітка підмножина недомінованих альтернатив

Розглянемо тепер задачу раціонального вибору альтернатив із множини X, на якій задано нечітке відношення переваги R, його функція належності $\mu_R : X \times X \to [0;1]$.

Як було зазначено раніше, у тих випадках, коли дані про ситуацію прийняття рішень описано у формі звичайного відношення переваги, то раціональним можна вважати вибір максимальних (недомінованих) альтернатив. Математично така задача зводиться до визначення на поданій множині X підмножини недомінованих альтернатив.

Далі спробуємо застосувати цей підхід до задач прийняття рішень, коли відношення переваги на множині альтернатив описано нечітко.

Отже, нехай маємо звичайну (чітко описану) множину альтернатив X та подане на ній нечітке відношення нестрогої переваги μ_R, і відповідне йому нечітке відношення строгої переваги μ_R^S. Визначимо підмножину недомінованих альтернатив множини (X, μ_R). Зауважимо, що оскільки вихідне відношення переваги нечітке, то природно чекати, що й відповідна підмножина недомінованих альтернатив буде нечіткою.

З огляду на визначення відношення строгої переваги, для будь-яких альтернатив $x, y \in X$ величина $\mu_R^S(y, x)$ являє собою міру, з якою альтернатива x буде домінована альтернативою y. Отже, стосовно фіксованої альтернативи $y \in X$ визначену на множині X функцію $\mu_R^S(y, x)$ можна вважати функцією належності нечіткої множини всіх альтернатив x, які строго доміновані альтернативою y.

Нехай, наприклад, міра належності альтернативи x_0 до цієї множини (відповідно деякій фіксованій альтернативі y) дорівнює 0,3. Це означає, що x_0 домінована альтернативою y зі ступенем 0,3. Легко зрозуміти, що множина "всіх" альтернатив x, які не домінуються альтернативою y, являє собою доповнення множини $\mu_R^S(y, x)$ у множині X, а її функцію належності можна записати таким чином:

$$1 - \mu_R^S(y, x),\ x \in X . \tag{5.33}$$

Якщо, наприклад, $\mu_R^S(y, x) =$ 0,3, то альтернатива x не домінується альтернативою y зі ступенем 0,7. Очевидно, що для визначення в множині X підмножини "всіх" альтернатив, кожна з яких не домінується жодною альтернативою цієї множини, необхідно взяти перетин нечітких множин, описаних виразом (5.33), за всіма альтернативами $y \in X$.

В и з н а ч е н н я 5.4. Нехай X – множина альтернатив, μ_R – подане на ній нечітке відношення переваги. Нечіткою підмножиною недомінованих альтернатив $\mu_R^{н.д.}(x)$ назвемо перетин нечітких множин, що мають вигляд, відповідний виразу (5.33) за всіма альтернативами $y \in X$, тобто

$$\mu_R^{н.д.}(x)=\inf_{y\in X}\left[1-\mu_R^S(y,x)\right],\quad x\in X, \tag{5.34}$$

або

$$\mu_R^{н.д.}(x)=1-\sup_{y\in X}\mu_R^S(y,x),\quad x\in X. \tag{5.35}$$

Значення функції $\mu_R^{н.д.}(x)$ відображає міру, з якою альтернатива x не буде домінуватись жодною альтернативою множини X.

Нехай $\mu_R^{н.д.}(x_0)=\alpha$ для деякої альтернативи x_0. У цьому випадку x_0 може домінуватися іншими альтернативами, але зі ступенем, не більшим від $(1-\alpha)$.

Справді, при цьому

$$\sup_{y\in X}\mu_R^S(y,x_0)=1-\alpha,$$

і тоді

$$\mu_R^S(y,x_0)\le 1-\alpha,\quad \forall y\in X.$$

Визначимо тепер нечітку підмножину альтернатив через функцію належності вихідного нечіткого відношення переваги μ_R. Для цього покажемо, що

$$\sup_{y\in X}\mu_R^S(y,x)=\sup_{y\in X}\left[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)\right],\quad \forall\, x\in X. \tag{5.36}$$

Дійсно, нехай довільно вибрано альтернативу $x\in X$. Уведемо такі множини

$$Y^1(x)=\{y|y\in X,\,\mu_{\mathrm{R}}(y,x)>\mu_R(x,y)\}, \tag{5.37}$$

$$Y^2(x)=\{y|y\in X,\,\mu_{\mathrm{R}}(y,x)\le\mu_R(x,y)\}. \tag{5.38}$$

Користуючись тим, що $Y^1(x)\bigcup Y^2(x)=X$, для кожної альтернативи $x\in X$ запишемо рівність (5.36) у такій формі:

$$\sup_{y\in X}\mu_R^S(y,x)=\max\left\{\sup_{y\in Y^1(x)}\mu_R^S(y,x),\ \sup_{y\in Y^2(x)}\mu_R^S(y,x)\right\}. \tag{5.39}$$

Далі, спираючись на визначення μ_R^S, виконуємо перетворення виразу (5.39), а саме:

$$\sup_{y\in X}\mu_R^S(y,x)=\max\left\{\sup_{y\in Y(x)}\left[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)\right],0\right\}=$$

$$= \max\left\{ \sup_{y\in Y^1(x)} [\mu_R(y,y) - \mu_R(x,y)],\ \sup_{y\in Y^2(x)} [\mu_R(y,x) - \mu_R(x,y)] \right\} =$$

$$= \sup_{y\in X} [\mu_R(y,x) - \mu_R(x,y)].$$

Беручи до уваги рівність (5.36) , можна описати множину недомінованих альтернатив за допомогою такої функції належності:

$$\mu_R^{'н.д.}(x) = 1 - \sup_{y\in X} [\mu_R(y,x) - \mu_R(x,y)]. \tag{5.40}$$

Формула (5.40) може стати в пригоді під час обробки інформації, поданої у вигляді нечіткого відношення переваги, для визначення в множині X підмножини недомінованих альтернатив.

Оскільки величина $\mu_R^{н.д.}(x)$ виступає як міра "недомінованості" альтернативи x, то раціональним, з огляду на подану нечітку інформацію, природно вважати вибір альтернатив, що мають якомога більший ступінь належності до нечіткої множини $\mu_R^{н.д.}(x)$, тобто тих альтернатив, які дають значення функції $\mu_R^{н.д.}(x)$, найближче до такої величини:

$$\sup_{x\in X} \mu_R^{н.д.}(x) = 1 - \inf_{x\in X} \sup_{y\in X} [\mu_R(y,x) - \mu_R(x,y)].$$

Альтернативи, для яких функція $\mu_R^{н.д.}(x)$ досягає своєї верхньої грані, тобто елементи такої множини:

$$X_{н.д.} = \left\{ x \middle| x \in X,\ \mu_{\mathrm{R}}^{н.д.}(x) = \sup_{z\in X} \mu_R^{н.д.}(z) \right\},$$

будемо називати максимальними недомінованими альтернативами множини (X, μ_R).

П р и к л а д 5.5. Дано скінченну множину: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4,\}$, й нечітке відношення переваги на ній, функція належності якого має такий вигляд:

$\mu_R(x_i, x_j) =$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,2	0,3	0,8
x_2	0,5	1	0,2	0,1
x_3	0,6	0,4	1	0,5
x_4	0,1	0,1	0,3	1

Знайдемо множину недомінованих альтернатив множини (X, μ_R).

Згідно з поданим вище визначенням

$$\mu_R^S(x_i, x_j) = \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 \\ \hline x_2 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ \hline x_4 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

тоді

$$\mu_R^{н.д.}(x_i) = \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 0{,}7 & 0{,}8 & 1 & 0{,}3 \end{array}.$$

Звідси бачимо, що найбільший ступінь недомінованості має альтернатива x_3, а тому її вибір слід вважати раціональним.

Визначення 5.5. Відношення R на множині X назвемо *лінійним*, якщо ним або оберненим до нього відношенням пов'язані кожні дві альтернативи множини X.

Тобто, коли відношення лінійне, то на множині X не існує непорівнянних між собою альтернатив. Для звичайних відношень лінійність означає, що буде справедливим таке твердження:

$$R \cup R^{-1} = X \times X,$$

де R^{-1} – обернене до R відношення, або з використанням термінів характеристичних функцій

$$\mu_R(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_R(y, x) = 1.$$

Якщо має місце нечітке відношення, однозначно можна виявити лише повну відсутність лінійності, тобто нечітке відношення μ_R не буде лінійним тоді і тільки тоді, коли знайдуться альтернативи $x, y \in X$, для яких виконується така рівність:

$$\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) = 0,$$

де $\mu_R(x, y)$ – функція належності даного нечіткого відношення.

Отже, властивість лінійності стосовно нечіткого відношення можна розуміти більш широко.

Визначення 5.6. Нехай λ – деяке число з інтервалу $[0; 1]$. Нечітке відношення μ_R будемо називати *λ-лінійним*, якщо його функція належності має таку властивість:

$$\max\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\} > \lambda, \quad \forall\ x, y \in X. \tag{5.41}$$

Таким чином, якщо, наприклад, нечіткий порядок являє собою 0,7-лінійне відношення, то з кожних двох альтернатив одна буде не гірша від іншої зі ступенем, не меншим за 0,7.

В и з н а ч е н н я 5.7. Нечітке відношення називається *сильно лінійним*, якщо його функція належності задовольняє таку умову:

$$\max\left\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\right\} = 1, \quad \forall\, x, y \in X \tag{5.42}$$

Інакше цю властивість можна визначити таким чином:

$$\mu_R(x, y) \geq \mu_R(y, x) \Rightarrow \mu_R(x, y) = 1. \tag{5.43}$$

Покажемо тепер, що сильна лінійність відповідає такій умові:

$$\mu_R(x, y) = 1 - \mu_R^S(y, x), \quad \forall\, x, y \in X, \tag{5.44}$$

де μ_R^S – відповідне нечітке відношення строгої переваги.

Дійсно, коли виконується умова (5.42), то з огляду на визначення відношення строгої переваги μ_R^S робимо висновок, що $\mu_R^S(y, x) = 0$ і $\mu_R^S(x, y) = 1,$ тобто умову (5.43) також виконано. З іншого боку, якщо виконано (5.43) й крім того справедлива нерівність: $\mu_R(x, y) \geq \mu_R(y, x)$, то $\mu_R^S(y, x) = 0$ й $\mu_R(x, y) = 1$, тобто виконується також умова (5.42).

Пояснимо сенс сильної лінійності. Наприклад, альтернатива x краща від альтернативи y зі ступенем 1 ($x \succ y$), тоді $(x, y) \notin R^{-1}$, тобто y не може бути кращою від x з жодним додатним ступенем. Коли ж має місце відношення $y \succ x$, то $(x, y) \in R^{-1}$, тобто $y \succ x$ зі ступенем 1. Якщо ж x краща від y зі ступенем α ($x \underset{\alpha}{\succ} y$), то зі ступенем $(1 - \alpha)$ виконується перевага: $y \succ x$. Таким чином, за своїм змістом сильна лінійність значною мірою аналогічна лінійності звичайного відношення.

Сильно лінійні відношення мають такі властивості:

1. $\mu_R(x_1, x_2) = 1, \quad \mu_R(x_2, x_1) = 0.$

2. Відношення R^e та R^I, відповідні сильно лінійному відношенню, збігаються.

Дійсно, коли для деяких пар альтернатив $(x, y) \in X$ виконано умову: $\mu_R(x, y) \geq \mu_R(y, x)$, то з визначення сильної лінійності випливає, рівність: $\mu_R(x, y) = 1$, а відповідно до визначення відношення μ_R^I робимо висновок, що $\mu_R^I(x, y) = \mu_R(x, y)$. Унаслідок симетричності відношення μ_R^I, коли $\mu_R(x, y) \leq \mu_R(y, x)$, то

$$\mu_R^I(x, y) = \min\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\} = \mu_R^e(x, y).$$

В и з н а ч е н н я 5.8. Нечітке відношення переваги назвемо *слабко лінійним*, якщо воно має таку властивість:

$$\mu_R(x, y) = 0 \Rightarrow \mu_R(y, x) > 0, \ \forall\ x, y \in X.$$

Наведемо приклади лінійних нечітких відношень.

Нехай X – множина, що складається з 4 елементів, тоді нечітке відношення з такою функцією належності:

$$\mu_R(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0,55 & 0,6 & 0 \\ 0 & 1 & 0,3 & 1 \\ 0,2 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,8 & 1 & 0,7 & 1 \end{pmatrix},$$

буде 0,5-лінійним.

Відношення, що описується функцією належності такого вигляду:

$$\mu_R(x_i, y_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0,8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0,3 & 1 \end{pmatrix},$$

буде сильно лінійним.

5.4.3. Чітко недоміновані альтернативи та їхні властивості

У даному підрозділі ми розглянемо задачі, у яких множина недомінованих альтернатив являє собою нормальну нечітку підмножину універсальної множини X, тобто функція належності цієї підмножини має таку властивість:

$$\sup_{x \in X} \mu_R^{н.д.}(x) = 1. \qquad (5.45)$$

У цьому випадку для нашої альтернативи з множини $X^{н.д.}$ максимальних недомінованих альтернатив виконано таку умову: $\mu_R^{н.д.}(x) = 1$, тобто міра недомінованості кожної з них дорівнює 1.

Іншими словами, для кожної альтернативи $x \in X^{н.д.}$ і будь-якої альтернативи $y \in X$ при цьому виконується така рівність: $\mu_R^S(y, x) = 0$, тобто жодна альтернатива не домінує з додатним ступенем над поданою альтернативою x.

Тому ці альтернативи ми будемо називати *чітко недомінованими*, множину таких альтернатив позначимо як $X^{\text{ЧНД}}$. Таким чином,

$$X^{\text{ЧНД}} = \left\{x \mid x \in X,\ \mu_R^{н.д.}(x) = 1\right\}. \qquad (5.46)$$

Як випливає з визначення множини $X^{\text{ЧНД}}$ та $\mu_R^{н.д.}$, для кожної чітко недомінованої альтернативи виконується така умова:

$$\sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x) = 0, \quad \forall x \in X^{\text{ЧНД}}, \qquad (5.47)$$

де μ_R^S – нечітке відношення строгої переваги, яке відповідає відношенню μ_R.

Звідси можна зробити висновок, що для будь-яких альтернатив $x_1, x_2 \in X^{ЧНД}$ справедливою буде така рівність:

$$\mu_R^S(x_1, x_2) = \mu_R^S(x_2, x_1) = 0. \qquad (5.48)$$

Із визначення випливає, що рівність (5.48) еквівалентна рівності:

$$\mu_R(x_1, x_2) = \mu_R(x_2, x_1),$$

але тоді

$$\mu_R^I(x_1, x_2) = \max\left\{1 - \mu_R(x_1, x_2), \mu_R(x_1, x_2)\right\} \geq 0{,}5.$$

Інакше кажучи, будь-які дві чітко недоміновані альтернативи пов'язані відношенням байдужості зі ступенем, не меншим за 0,5.

А відповідне нечітке відношення еквівалентності μ_R^e, буде визначатися таким чином:

$$\mu_R^e(x_1, x_2) = \mu_R(x_1, x_2) = \mu_R(x_2, x_1),\ \forall\, x_1, x_2 \in X^{ЧНД}. \qquad (5.49)$$

Коли мають місце довільні нечіткі відношення переваги, то може виявитися, що $\mu_R^e(x_1, x_2) = 0$ для деяких альтернатив $x_1, x_2 \in X^{ЧНД}$, тобто з жодною додатною мірою ці альтернативи не будуть еквівалентними. Зауважимо, що тоді $\mu_R(x_1, x_2) = 0$, тобто x_1 та x_2 не порівнянні між собою. Однак це не стосується лінійних відношень.

5.5. Прийняття рішень за існування кількох відношень переваги на множині альтернатив

Розглянемо задачу, у якій задано множину альтернатив X і кожна альтернатива цієї множини характеризується кількома ознаками, номери яких $j = 1,..,m.$ Інформацію про попарне порівняння альтернатив подано у вигляді відношень переваги R_j, $j = 1, 2, \dots m$. Таким чином, маємо m відношень переваги на множині X. Наша мета полягає в тому, щоб на основі даної інформації зробити раціональний вибір альтернатив з множини $\left(X, R_1, R_2 \dots R_m\right)$.

Звернімося спочатку до ситуації, коли відношення описуються числовими функціями корисності $f_j : X \to R^1$, $j = 1, \dots, m$, де R^1– числова вісь. Значення функції $f_j(x)$ можна вважати числовою оцінкою альтернативи за ознакою j, $j = 1, 2, \dots m$. Перевага з погляду ознаки j віддається альтернативі, характерній більш високою оцінкою $f_j(x)$. Задача полягає в тому, аби вибрати альтернативу, що має якомога більші оцінки за всіма ознаками. Раціональним у цьому випадку природно вважати вибір альтернативи x_0, яка має таку властивість:

$$\text{коли } f_j(y) \geq f_j(x_0),\ j = 1, 2, \dots, m, \text{ то } f_j(y) = f_j(x_0),\ j = 1, 2, \dots, m. \quad (5.50)$$

Такі альтернативи в багатокритерійній оптимізації називаються ефективними.

Легко помітити, що кожна функція $f_j(x)$, $j = 1, 2, \dots m$, описує звичайне відношення переваги на множині альтернатив таким чином:

$$R_j = \{(x, y) \mid x, y \in X,\ f_j(x) \geq f_j(y)\}. \quad (5.51)$$

Нехай $Q_1 = \bigcap_{j=1}^{m} R_j$. Упевнимось, що множина всіх ефективних (недомінованих) альтернатив у множині (X, Q_1) збігається з множиною ефективних альтернатив для набору функцій f_j, $j = 1, 2, \dots m$.

Припустимо, що x_0 – альтернатива, яка не домінується в множині (X, Q_1). Це означає, що для будь-якої альтернативи $y \in X$ виконується така умова:

$$(y, x_0) \notin Q_1^s, \quad (5.52)$$

де Q_1^S – відношення строгої переваги, відповідне відношенню Q_1, воно має такий вигляд:

$$Q_1^S = \left\{(x, y) \mid x, y \in X, f_j(x) \geq f_j(y),\ j = 1, \dots, m,\ \exists j_0\!: \ f_{j_0}(x) > f_{j_0}(y)\right\}. \quad (5.53)$$

Звідси і з урахуванням умови (5.52) робимо висновок, що має місце властивість (5.50), тобто x_0 – ефективна альтернатива для функції $f_j(x)$, $j = 1, 2, \dots m$.

Можна показати й зворотне, тобто, будь-яка ефективна для множини функцій $f_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots m$, альтернатива не домінується в множині (X, Q_1). Таким чином, для того, щоб знайти множину ефективних альтернатив, можна замість набору відношень R_j, $j = 1, 2, \ldots m$, взяти їхній перетин Q_1 і знайти множину недомінованих альтернатив у множині (X, Q_1). Запишемо тепер перетин відношень R_j в іншому вигляді.

Нехай

$$\mu_j(x, y) = \begin{cases} 1, \ \textit{якщо}\ (x, y) \in R_j, \\ 0, \ \textit{якщо}\ (x, y) \notin R_j, \end{cases} \tag{5.54}$$

де $\mu_j(x, y)$ – функція належності відношення R_j, $j = 1, 2, \ldots m$, тоді перетину цих відношень відповідає така функція належності:

$$\mu_{Q_1}(x, y) = \min\{\mu_1(x, y), \ldots, \mu_m(x, y)\}. \tag{5.55}$$

Вона виступає аналогом згортки критеріїв $f_j : F(x) = \min\limits_{j=1,..,m} \lambda_j f_j$, у багатокритерійних задачах прийняття рішень. Тут числа λ_i являють собою коефіцієнти відносної важливості критеріїв. У згортці (5.55) $\lambda_j = 1$, $j = 1, \ldots, m$, що відповідає ситуації, коли всі подані відношення належить однаковою мірою важливості враховувати при виборі альтернатив. Коли такі відношення відрізняються за важливістю відповідних ознак, на основі яких порівнюють альтернативи, то в згортці (5.55) можна використовувати різні за величиною коефіцієнти λ_j. При цьому вихідні відношення маємо розглядати як нечіткі, тобто у визначенні функції належності (5.54) числа 0 та 1 необхідно вважати крайніми точками одиничного інтервалу можливих значень ступеня належності.

У результаті згортки вихідних відношень R_j з коефіцієнтами λ_j, що відповідають умові: $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$, отримуємо функцію належності, яка має такий вигляд:

$$\mu_{Q_1}(x, y) = \min\{\lambda_1 \mu_1(x, y), \ldots, \lambda_m \mu_m(x, y)\}, \tag{5.56}$$

тобто функцію належності нечіткого відношення переваги. Але таке відношення не буде рефлексивним, отже, воно не належить до відношень переваги в сенсі визначення пункту 5.4.1, і тому описана згортка незручна для застосування, коли необхідно враховувати важливість поданих відношень.

Ось чому розглянемо згортку вихідних відношень іншого вигляду, а саме:

$$\mu_{Q_2}(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mu_j(x, y). \tag{5.57}$$

Зауважимо, що отримане після згортки (5.38) звичайних відношень R_j нечітке відношення μ_{Q_2} буде рефлексивним, оскільки такими є вихідні відношення.

Нехай усі вихідні відношення переваги однакові за важливістю. У згортці (5.57) цьому випадку відповідають такі значення вагових коефіцієнтів: $\lambda_j = \dfrac{1}{m}$, $j = 1, 2, \dots m$. Знайдемо підмножину альтернатив, не домінованих на множині (X, Q_2), використовуючи визначення з п. 5.4.2, таким чином:

$$\mu_{Q_2}^{н.д.}(x) = 1 - \frac{1}{m} \sup_{y \in X} \sum_{j=1}^{m} \left[\mu_j(y, x) - \mu_j(x, y) \right], \qquad x \in X. \tag{5.58}$$

Позначимо через $X_1^{ЧНД}$ підмножину чітко недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{θ_1}), а через $X_2^{ЧНД}$ відповідну підмножину в (X, μ_{θ_2}). Встановимо, що $X_2^{ЧНД} \subset X_1^{ЧНД}$. Дійсно, нехай $x_0 \in X_2^{ЧНД}$, тоді згідно з визначенням чітко недомінованої альтернативи та з огляду на формулу (5.58) можемо зробити висновок, що

$$\sup_{y \in X} \sum_{j=1}^{m} \left[\mu_j(y, x_0) - \mu_j(x_{0,y}) \right] = 0$$

або

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\mu_j(y, x_0) - \mu_j(x_0, y) \right] \le 0, \tag{5.59}$$

для всіх альтернатив $y \in X$.

Припустимо, що $x_0 \notin X_1^{ЧНД}$. Тоді, відповідно до властивості (5.50) і визначення (5.54) бачимо, що знайдеться така альтернатива $y \in X$, для якої $\mu_j(y, x_0) = 1$, $j = 1, 2, \dots m$, причому стосовно деякого індексу j_0 виконується рівність: $\mu_{j_0}(x_0, y) = 0$. Але тоді відносно альтернативи y не буде справедливою нерівність (5.59). Звідси випливає, що $x_0 \in X_1^{ЧНД}$, і відповідно $X_2^{ЧНД} \subset X_1^{ЧНД}$.

З а у в а ж е н н я. Множина $X_2^{ЧНД}$ не включає в себе всі ефективні альтернативи для функцій f_j, $j = 1, 2, \dots m$, тобто не збігається з множиною $X_1^{ЧНД}$, але можна показати, що кожна ефективна альтернатива, тобто кожний елемент $x \in X_1^{ЧНД}$ має додатний ступінь належності до множини $\mu_{Q_2}^{н.д.}$, тобто

$$X_1^{ЧНД} \subseteq \operatorname{supp} \mu_{Q_2}^{н.д.}.$$

Дійсно, коли стосовно будь-якої альтернативи $x \in X$ виконано рівність: $\mu_{Q_2}^{н.д.}(x) = 0$, то на основі визначення (5.58) виявляємо, що в множині X можна відшукати таку альтернативу y, для якої

$$\mu_j(y, x) - \mu_j(x, y) = 1, \quad j = 1, 2, \ldots m,$$

тобто $\mu_j(y, x) = 1$ і $\mu_j(x, y) = 0$, $j = 1, 2, \ldots m$. Це означає, що альтернатива y домінує над альтернативою x, тобто $f_j(y) > f_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots m$, і тому альтернатива x не може бути ефективною для набору функції f_j.

Функція $\mu_{Q_2}^{н.д.}$ впорядковує альтернативи за ступенем їх недомінованості. Наприклад, якщо $\mu_{Q_2}^{н.д.}(x) = 3/4$ і яка-небудь альтернатива $y \in X$ буде строго кращою від альтернативи x за якими-небудь двома ознаками, то не менше ніж за однією з решти ознак вона строго переважає альтернативу y.

Якщо взяти перетин множин $X_1^{\text{ЧНД}}$ й $\mu_{Q_2}^{н.д.}$, то отримаємо відповідне впорядкування на множині ефективних альтернатив, на базі якого серед них можна здійснити вибір.

Отже, застосування згортки (5.57) вихідних звичайних відношень до розв'язування задачі прийняття рішень на множині функцій дозволяє одержати додаткову інформацію про відносний ступінь недомінованості ефективних альтернатив, звузивши таким чином клас раціональних виборів до такої множини:

$$X^{\text{ЧНД}} = \left\{ x \,\middle|\, x \in X, \mu_{Q_2}^{н.д.}(x) = \sup_{x' \in X_2^{н.д.}} \mu_{Q_2}^{н.д.}(x') \right\}$$

У загальній задачі, коли на множині альтернатив задано m нечітких відношень переваги R_j, $j = 1, 2, \ldots m$, а також задано коефіцієнти λ_j, $j = 1, 2, \ldots m$, відносної ваги цих відношень, можна діяти так само, як і в попередньому випадку.

Сформулюємо тепер алгоритм прийняття рішень при кількох заданих відношеннях переваги на множині альтернатив.

1. Будуємо нечітке відношення Q_1 (перетин вихідних відношень):

$$\mu_{Q_1}(x, y) = \min\{\mu_1(x, y), \ldots, \mu_m(x, y)\}.$$

Далі визначаємо нечітку підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_1}) за такою формулою:

$$\mu_{Q_1}^{н.д.}(x) = 1 - \sup_{y \in X}\left[\mu_{\theta_1}(x, y) - \mu_{\theta_2}(x, y)\right].$$

2. Створюємо нечітке відношення Q_2 [згортку відношень типу (5.57)]:

$$\mu_{Q_2}(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mu_j(x, y)$$

і визначаємо нечітку підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_2}), а саме:

$$\mu_{Q_2}^{н.д..}(x) = 1 - \sup_{y \in X}\left[\mu_{Q_2}(y, x) - \mu_{Q_2}(x, y)\right].$$

3. Знаходимо перетин множин $\mu_{Q_1}^{н.д.}$ та $\mu_{Q_2}^{н.д.}$ за таким правилом:

$$\mu^{н.д.}(x) = \min\left\{\mu_{Q_1}^{н.д.}(x), \mu_{Q_2}^{н.д.}(x)\right\}.$$

4. Раціональним вважаємо вибір альтернатив із такої множини:

$$X^{н.д} = \left\{ x \in X \middle| \mu^{н.д.}(x) = \sup_{x' \in X} \mu^{н.д.}(x') \right\}.$$

Тут слід зауважити, що залежно від типу задачі раціональними можна вважати не тільки альтернативи з множини $X^{н.д.}$, але в тому чи іншому сенсі й слабко (або не дуже сильно) доміновані альтернативи, тобто ті, ступінь належності яких до множини $\mu^{н.д.}$ нижчий від певного заданого.

П р и к л а д 5.6. Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, і на ній подано три чіткі відношення переваги, що мають однакову значущість, а саме:

$R_1 =$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
x_2	1	1	1	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	1	0	1

$R_2 =$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
x_2	0	1	1	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	0	1	1

$R_3 =$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
x_2	1	1	1	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	1	1	1

Необхідно на їхній основі здійснити раціональний вибір альтернативи з множини X.

Розв'язування

Оскільки відношення переваги мають однакову значущість, то задамо, що коефіцієнти відносної ваги $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dfrac{1}{3}$.

1. Будуємо відношення: $Q_1 = \lambda_1 R_1 \cap \lambda_2 R_2 \cap \lambda_3 R_3$, для наших даних воно набуває такого вигляду:

$$\mu_{Q_1}(x_i, x_j) = \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ \hline x_2 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ \hline x_3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ \hline x_4 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}$$

Знаходимо відношення строгої переваги, тобто

$$\mu^s_{Q_1}(x_i, x_j) = \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ \hline x_2 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ \hline x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Далі знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_1}), а саме:

$$\mu^{н.д.}_{Q_1}(x_1) = \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 1 & 2/3 & 2/3 & 1 \end{array}.$$

2. Будуємо відношення: $Q_2 = \frac{1}{3}\left(\mu_1(x_i, x_j) + \mu_2(x_i, x_j) + \mu_3(x_i, x_j)\right)$, яке за нашими даними набуває такого вигляду:

$$\mu_{Q_2}(x_i, x_j) = \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline x_2 & 2/3 & 1 & 1 & 0 \\ \hline x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline x_4 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array}$$

Записуємо відповідне йому відношення строгої переваги, тобто

$$\mu^S_{Q_2}(x_i, x_j) = \begin{array}{c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ \hline x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_4 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \end{array}$$

Знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_2}), а саме:

$$\mu_{Q_2}^{н.д.}(x_i) = \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 1 & 2/3 & 0 & 1 \end{array}.$$

3. Множина недомінованих альтернатив являє собою перетин множин $\mu_{Q_1}^{н.д.}$ та $\mu_{Q_2}^{н.д.}$, тобто

$$\mu^{н.д.}(x_i) = \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 1 & 2/3 & 0 & 1 \end{array}.$$

Звідси робимо висновок, що в поданому прикладі раціональним слід вважати вибір альтернатив x_1 та x_4, які мають максимальний ступінь недомінованості.

П р и к л а д 5.7. Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. На ній подано два нечіткі відношення переваги R_1 та R_2, причому перше з них має значущість, вдвічі меншу ніж друге, зокрема

$$R_1 = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 0,5 & 0,3 \\ x_2 & 0 & 1 & 0,8 \\ x_3 & 1 & 0,5 & 1 \end{array}, \qquad R_2 = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 0,1 & 0 \\ x_2 & 0,3 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0,5 & 1 \end{array}$$

Необхідно здійснити раціональний вибір альтернативи з множини X на основі заданих відношень переваги.

Розв'язування

1. Будуємо відношення: $Q_1 = \lambda_1 R_1 \cap \lambda_2 R_2$, враховуючи, що $\lambda_1 = 0,33$ і $\lambda_2 = 0,67$, воно набуває такого вигляду:

$$\mu_{Q_1}(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 0,33 & 0,067 & 0 \\ 0 & 0,33 & 0,264 \\ 0,33 & 0,165 & 0,33 \end{pmatrix},$$

а відповідне йому відношення строгої переваги

$$\mu_{Q_1}^{s}(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0,033 & 0 \\ 0 & 0 & 0,167 \\ 0,33 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_1}). Її функція належності

$$\mu_{Q_1}^{н.д.}(x_i) = \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 0,67 & 0,967 & 0,833 \end{array}.$$

2. Будуємо відношення: $Q_2 = \lambda_1\mu_1(x_i, x_j) + \lambda_2\mu_2(x_i, x_j)$. Його функція належності

$$\mu_{Q_2}(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}367 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}867 \\ 1 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix},$$

а відповідне відношення строгої переваги має такий вигляд:

$$\mu_{Q_2}^S(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}167 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}367 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо підмножину недомінованих альтернатив у множині (X, μ_{Q_2}):

$$\mu_{Q_2}^{н.д..} = \frac{x_1}{0{,}2} \left| \frac{x_2}{0{,}833} \right| \frac{x_3}{0{,}633}$$

Вихідна множина недомінованих альтернатив має таку функцію належності:

$$\mu^{н.д.} = \frac{x_1}{0{,}2} \left| \frac{x_2}{0{,}833} \right| \frac{x_3}{0{,}633}.$$

Максимальним ступенем недомінованості характеризується альтернатива x_2, тому її вибір можна вважати раціональним.

5.6. Відношення переваги на нечіткій множині альтернатив

Розглянемо тепер випадок, коли підмножина припустимих альтернатив також нечітка.

Нехай X – універсальна множина альтернатив і на ній подано нечітку підмножину допустимих альтернатив, функція належності якої $\nu : X \to [0;1]$, а також нечітке відношення переваги з функцією належності $\mu_R(x, y)$.

У разі, коли множина допустимих альтернатив являє собою звичайну множину, вибір раціональної альтернативи відбувається тільки залежно від поданих на ній нечітких відношень переваги. Але тепер нам необхідно враховувати ще й ступінь належності альтернативи до множини допустимих альтернатив, тобто, перевагу слід віддавати тим з них, яким властиве більше значення функції $\nu(x)$.

Цю вимогу можна врахувати в такий спосіб:

Визначимо відношення переваги, породжене функцією ν, таким чином:

$$\mu_A(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \nu(x) \ge \nu(y), \\ 0, & \text{якщо } \nu(x) < \nu(y). \end{cases}$$

Тепер вихідну задачу зведено до постановки, вивченої в попередньому пункті, і для її розв'язування можна використати описану там процедуру.

5.7. Прийняття рішень, коли задано перевагу на множині ознак

Нехай задано множину альтернатив X і множину ознак (або експертів) P. Кожній альтернативі $x \in X$ тією чи іншою мірою притаманна кожна ознака з множини P. Для кожної фіксованої ознаки $p \in P$ відоме нечітке відношення переваги φ на множині альтернатив X, тобто відомо функцію належності $\varphi : X \times X \times P \to [0; 1]$. Її значення $\varphi(x_1, x_2, p)$ являє собою ступінь переваги альтернативи x_1 над альтернативою x_2 за ознакою p. Якщо P – множина експертів, то $\varphi(x_1, x_2, p)$ – відношення переваги на множині альтернатив, яке пропонується експертом p. Таким чином, функція φ описує сім'ю нечітких відношень переваги на множині X відносно параметра p.

Елементи множини P, різняться за важливістю, а нечітке відношення $\mu : P \times P \to [0; 1]$ описує важливість ознак, зокрема величина $\mu(p_1, p_2)$ показує ступінь, з якою ознака p_1 вважається не менш важливою, ніж ознака p_2.

Задача полягає в раціональному виборі альтернативи з множини X на основі описаної вище інформації.

Розглянемо один із можливих підходів до розв'язування цієї задачі.

Позначимо через $\varphi(x, p)$ нечітку підмножину недомінованих альтернатив, яка відповідає нечіткому відношенню переваги $\varphi(x_1, x_2, p)$ для фіксованої ознаки $p \in P$, тобто

$$\varphi^{н.д.}(x, p) = 1 - \sup[\varphi(y, x, p) - \varphi(x, y, p)]. \tag{5.60}$$

Якби альтернативи порівнювалися за єдиною ознакою p, то раціональним потрібно було б вважати вибір тих із них, що забезпечують найбільше значення функції належності $\varphi(x, p)$ (ступеня недомінованості) на множині X. Але в даному випадку необхідно вибирати альтернативу з урахуванням сукупності ознак, які різняться своєю важливістю.

При фіксованій альтернативі $x_0 \in X$ функція $\varphi^{н.д.}(x_0, p)$ описує нечітку підмножину ознак, за якими вона недомінована. Зрозуміло, що коли для двох альтернатив x_1 та x_2 нечітка множина $\varphi^{н.д.}(x_1, p)$ «не менш важлива», ніж нечітка множина ознак $\varphi^{н.д.}(x_2, p)$, то й альтернативу x_1 належить вважати не менш прийнятною, ніж альтернатива x_2. Таким чином, ситуація в даному випадку аналогічна тій, що розглядалася при аналізі задачі нечіткого математичного програмування.

Отже, тепер необхідно узагальнити подану нечітку підмножину множини P і вважати отримане нечітке відношення вислідним відношенням переваги на множині альтернатив X.

Згадане відношення, породжене функцією $\varphi^{н.д.}(x, p)$ і нечітким відношенням μ, визначимо за такою формулою:

$$\eta\left(x_1, x_2\right) = \sup_{(p_1, p_2) \in P^2} \min\left\{\varphi^{н.д.}\left(x_1, p_1\right), \varphi^{н.д.}\left(x_2, p_2\right), \mu^{н.д.}\left(p_1, p_2\right)\right\}. \qquad (5.61)$$

Це нечітке відношення переваги можна вважати результатом «згортки» сім'ї нечітких відношень $\varphi(x_1, x_2, p)$ в єдине вислідне нечітке відношення переваги, яке враховує інформацію про відносну важливість критеріїв, задану у формі нечіткого відношення переваги.

Таким чином, побудовою нечіткого відношення переваги η вихідну задачу вибору зведено до задачі вибору за єдиним відношенням переваги. Для її розв'язування достатньо визначити відповідну відношенню η скореговану нечітку множину недомінованих альтернатив і вибрати ті з них, які надають максимуму функції $\eta^{н.д.}(x)$.

Розглянемо задачі, які ілюструють описаний підхід.

П р и к л а д 5.8 (вибір на основі чітких відношень). Нехай задано множину альтернатив: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, які порівнюються між собою за трьома ознаками A, B, C. Результати порівняння описуються такими матрицями відношень нестрогої переваги:

за ознакою A

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	1	1
x_2	1	1	1	1
x_3	0	0	1	0
x_4	1	0	1	1 ,

за ознакою B

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	1
x_2	0	1	1	0
x_3	0	0	1	0
x_4	0	1	1	1,

за ознакою *C*

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	1	1
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	1
x_4	0	0	0	1.

Відношення відносної важливості ознак описується матрицею такого вигляду:

	A	*B*	*C*
A	1	1	1
B	1	1	1
C	0	0	1.

Із цієї матриці видно, що ознаки *A* та *B* еквівалентні одна одній і кожна з них важливіша за ознаку *C*.

Керуючись описаним підходом, визначимо множину альтернатив, які не домінуються за кожною з ознак, у результаті чого отримаємо такі функції належності:

$$\varphi^{н.д.}(x_i, A) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0};$$

$$\varphi^{н.д.}(x_i, B) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0};$$

$$\varphi^{н.д.}(x_i, C) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0}.$$

Отже, недомінованими виявились:

- за ознакою *A* альтернатива x_2;
- за ознакою *B* альтернатива x_1;
- за ознакою *C* альтернатива x_1, x_2, x_3.

Далі, за формулою (5.61) отримуємо таку матрицю вислідного відношення переваги на множині альтернатив *X*:

$$\eta(x_i, x_j) = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

А за формулою (5.60) маємо відповідну множину недомінованих альтернатив (нескореговану), тобто

$$\eta^{н.д.}(x_i) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1}.$$

Нарешті, використовуючи формулу: $\eta^{н.д.}(x_i) = \min\{\eta^{н.д.}(x_i), \eta^{н.д.}(x_i, x_i)\}$, знаходимо скореговану множину недомінованих альтернатив, а саме:

$$\eta^{н.д.}(x_i) = \frac{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4}{1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0}.$$

Таким чином, робимо висновок, що раціональним у даній задачі слід вважати вибір альтернативи x_1 або x_2. Зауважимо, що названі альтернативи є недомінованими за ознаками A та B , які найбільш (однаково) важливі.

П р и к л а д 5.9 (вибір на основі нечітких відношень). Розглянемо одну з типових задач прийняття рішень. Припустимо, що керівник фірми розглядає чотири проекти подальшого розвитку підприємства *А*, *Б*, *В*, *Г* і має вибрати для реалізації один з них. З цією метою він запросив чотирьох експертів: *Е*1, *Е*2, *Е*3, *Е*4, до позицій кожного з них він ставиться по-різному. Зокрема до висновків одного з експертів він прислухається більш уважно, ніж до поглядів іншого. Відносні переваги позицій експертів описано такою матрицею нечіткого відношення «не менш важливо»:

	*Е*1	*Е*2	*Е*3	*Е*4
*Е*1	1	0,4	0,6	0
*Е*2	1	1	0,8	1
*Е*3	0,2	1	1	1
*Е*4	0,8	0	0	1

На думку експертів, відношення переваги між проектами описуються функціями належності, які мають такий вигляд:

$E1$	A	$Б$	$В$	$Г$
A	1	0,8	1	0
$Б$	0	1	0,2	1
$В$	0	0,8	1	0
$Г$	0	0	0	1

$E2$	A	$Б$	$В$	$Г$
A	1	0,4	0,5	0,3
$Б$	0,8	1	0,8	0,8
$В$	0,5	1	1	0
$Г$	0,8	0	0	1

$E3$	A	$Б$	$В$	$Г$
A	1	0	0,8	0
$Б$	0	1	0	0
$В$	0,1	0	1	0,4
$Г$	1	0	1	1

$E4$	A	$Б$	$В$	$Г$
A	1	1	0,9	0
$Б$	0	1	1	1
$В$	0,4	0	1	0
$Г$	0	0	0	1

Розв'язування

Знайдемо нечіткі множини недомінованих за кожною ознакою альтернатив, тобто

	A	$Б$	$В$	$Г$
$\varphi^{н.д.}(\cdot, E1)$	1	0,2	0	0
$\varphi^{н.д.}(\cdot, E2)$	0,3	1	0,5	0,2
$\varphi^{н.д.}(\cdot, E3)$	0	0	0,3	1
$\varphi^{н.д.}(\cdot, E4)$	1	0	0	0

Далі шукаємо нечітке відношення переваги η, визначене на множині функціями $\varphi^{н.д.}$ й нечітким відношенням μ, а саме:

	A	$Б$	$В$	$Г$
A	1	0,4	0,4	1
$Б$	1	1	0,5	0,8
$В$	0,5	0,5	0,5	0,5
$Г$	1	1	0,5	1

Насамкінець, визначаємо відповідну відношенню η нечітку множину недомінованих альтернатив, її функція належності має такий вигляд:

$$\eta^{н.д.} = \frac{A \quad Б \quad\quad В \quad\quad Г}{1 \quad 0{,}4 \quad 0{,}9 \quad 0{,}8},$$

а скорегована множина недомінованих альтернатив буде такою:

$$\eta^{н.д.} = \frac{A \quad Б \quad\quad В \quad\quad Г}{1 \quad 0{,}4 \quad 0{,}5 \quad 0{,}8}.$$

Як бачимо, найбільший ступінь недомінованості має альтернатива A, тому вибір саме цього проекту можна вважати раціональним.

Тоді, коли найбільший ступінь недомінованості має не одна, а кілька альтернатив, то ОПР може або самостійно обрати одну з них, виходячи з якихось додаткових міркувань, або розширити коло експертів і знову розв'язати задачу, як описано вище.

Висновки

Теорія нечітких множин є математичним апаратом, що дозволяє описувати поняття, які не можуть бути висловлені чітко. Застосування цієї теорії доцільне в тих випадках, коли недостатньо інформації для прийняття рішення або опис ситуації засобами звичайних множин дуже «огрубляє» модель, що не дозволяє досягти задовільного результату.

Задачі нечіткого математичного моделювання являють собою узагальнення звичайних задач математичного моделювання. Їх класифікують залежно від того, які елементи тут виступають нечіткими, що зумовлює використання різних підходів до розв'язування. Зокрема це може бути розкладання на множини рівня, зведення до задачі нечітко визначеної мети або до задачі багатокритерійної оптимізації. Перелічені підходи належать до непрямих методів розв'язування задач НМП.

Нечіткі відношення переваги дозволяють моделювати ситуації, у яких інформація про переваги альтернатив не може бути висловлена однозначно. Вони враховують ці переваги «деякою мірою». У багатьох випадках це дає можливість побудувати більш адекватну математичну модель і спростити розв'язування задачі.

Контрольні питання

1. Сформулюйте задачу досягнення нечітко визначеної мети.
2. Які особливості має підхід Белмана – Заде до розв'язування задачі досягнення нечітко визначеної мети?
3. Яким чином враховують мету й обмеження при формулюванні та розв'язуванні задачі досягнення нечітко визначеної мети?

4. Чи можна сформулювати задачу досягнення нечітко визначеної мети в разі, коли мета й обмеження являють собою підмножини різних універсальних множин?

5. Сформулюйте загальну постановку задачі нечіткого математичного програмування.

6. Яким чином класифікують задачі нечіткого математичного програмування?

7. Які підходи застосовують до розв'язування задач НМП?

8. Які властивості має розв'язок задачі НМП?

9. У чому полягає сутність методу зведення до задачі досягнення нечітко визначеної мети при розв'язувані задач НМП?

10. У чому полягає метод розкладання на множини рівня при розв'язувані задач НМП?

11. Розкрийте сутність методу модальних значень у застосуванні до задач НМП?

12. Опишіть застосування методу зведення до багатокритерійної задачі при розв'язуванні задач НМП?

13. Які властивості мають розв'язки задачі НМП, базовані на різних підходах, який між ними існує зв'язок?

14. Що являє собою нечітке відношення переваги?

15. Які властивості має нечітке відношення переваги, що воно характеризує?

16. Як за даним відношенням переваги можна побудувати відношення строгої переваги, які його властивості?

17. Які відношення називають λ-лінійними? Сильно лінійними? Опишіть їхні властивості.

18. Яким чином здійснюють раціональний вибір альтернатив, коли відоме відношення переваги на даній множині альтернатив?

19. Дайте визначення недомінованої альтернативи.

20. Визначте поняття чітко недомінованої альтернативи.

21. Як відбувається раціональний вибір альтернатив, коли задано кілька відношенць переваги на множині альтернатив?

22. Які види згорток застосовують для вибору альтернативи на основі кількох відношень переваги? Окресліть межі їх застосування.

23. Яким чином виконують раціональний вибір альтернатив, коли задано відношення переваги на множині альтернатив й нечітку перевагу на множині ознак?

Завдання до розділу 5

Завдання А

1. Розв'язати задачу досягнення нечітко визначеної мети, за даними, які наведено в таблиці.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
G	0,8	0,6	0,7	0,4	0.2	0,1	0,1
C_1	0,5	0,3	0,5	0,4	0,6	0,5	0,4
C_2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
C_3	0,3	0,5	0,7	1	0,9	0,6	0,2

2. Мету й обмеження задачі описано такими функціями належності:

$$\mu_C(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}(x-3)^2+1, & \textit{якщо } x\notin(1;5)\\ 0 & \textit{в інших випадках},\end{cases}$$

$$\mu_D(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}x, & \textit{якщо} \quad x\in(0;6),\\ 1, & \textit{якщо} \quad x\geq 6,\\ 0 & \textit{в інших випадках}.\end{cases}$$

Розв’язати задачу досягнення нечітко визначеної мети.

3. Розв’язати задачу досягнення нечітко визначеної мети за такими умовами:

$$\mu_C(x)=\begin{cases}-(x-1)^2+1, & \textit{якщо } x\notin(0;2)\\ 0 & \textit{в інших випадках},\end{cases}$$

$$\mu_D(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}|x|, & \textit{якщо} \quad x\notin(0;2)\\ 0 & \textit{в інших випадках}.\end{cases}$$

4. Розв’язати таку задачу нечіткого математичного програмування:

$$\begin{aligned}&f_2(x_1,x_2)=x_1-x_2\to\min\\ &x_1-2x_2\geq 2,\\ &2x_1+5x_2\leq 10,\\ &-12x_1+8x_2\ \tilde{\leq}\ 24,\\ &x_1,x_2\geq 0.\end{aligned}$$

5. Розв’язати сформульовану нижче задачу нечіткого математичного програмування.

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \max \\
&x_1 + x_2 \ge 4, \\
&4x_1 + 6x_2 \stackrel{\sim}{\leqq} 24, \\
&3x_1 + 8x_2 \le 24, \\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

6. Розв'язати подану нижче задачу нечіткого математичного програмування методом розкладання на множини рівня.

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \min \\
&x_1 + 2x_2 \stackrel{\sim}{\geqq} 2, \\
&2x_1 + 5x_2 \le 10, \\
&12x_1 + 8x_2 \le 24, \\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

7. Розв'язати сформульовану нижче задачу нечіткого математичного програмування методом зведення до багатокритерійної задачі.

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \min \\
&x_1 + 2x_2 \ge 2, \\
&2x_1 + 5x_2 \le 10, \\
&12x_1 + 8x_2 \le 24, \\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

8. Множина $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, на ній подано два нечітких відношення переваги, важливість яких відповідно $\lambda_1 = 0{,}7$, $\lambda_2 = 0{,}3$. Здійснити раціональний вибір альтернативи з множини X за даними відношеннями, якщо

$$
R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 1 & 1 & 0{,}4 \end{pmatrix}, \qquad R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

9. За поданими нижче відношеннями переваги здійснити раціональний вибір альтернативи із множини: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$.

$$
R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

10. За поданими нижче відношеннями переваги здійснити раціональний вибір альтернативи із множини: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, якщо $\lambda_1 = 0{,}4$, $\lambda_2 = 0{,}6$.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}2 \\ 1 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання В

Використовуючи теорію нечітких множин, скласти математичні моделі наведених нижче задач.

1. Комерційно-транспортна фірма (дистриб'ютор) закуповує товар одного й того самого виду в групи постачальників, а також транспортує його та реалізовує покупцям. Припустимо, що в співробітництві задіяно M постачальників та N покупців. Відомі граничні можливості кожного з них, причому ці дані описані нечітко.

Крім того дистриб'ютор має у своєму розпорядженні інформацію про:

– ціну придбання одиниці товару в кожного постачальника $t_i, i = 1,2,...,M$;

– ціну продажу одиниці готової продукції $s_j, i = 1,2,...,N$;

– питомі транспортні витрати $c_{ij}, i = 1,2,...,M; j = 1,2,...,N$;

– обов'язковий обсяг пропозиції за контрактом $p_i, i = 1,2,...,M$;

– обов'язковий обсяг попиту за контрактом $q_j, i = 1,2,...,N$;

– ціну одиниці товару, який закуповується поза контрактом $k_i, i = 1,2,...,M$;

– ціну одиниці товару, який продається поза контрактом, $r_j, i = 1,2,...,N$;

Необхідно визначити, якими мають бути обсяги продукції x_{ij}, $i = 1,2,...,M$, $j = 1,2,...,N$, що закуповується в кожного з постачальників і продається кожному із споживачів, щоб мінімізувати суму витрат на перевезення цих товарів та максимізувати прибуток дистриб'ютора.

2. Підприємство використовує кілька виробничих приміщень. Кожне з них характеризується відмінними від інших параметрами (розміри, застосована система освітлення, рівень забрудненості атмосфери, відбивна здатність поверхні, вимоги до освітлення та економії ресурсів). Для освітлення цих приміщень можуть бути застосовані кілька видів світильників, що мають різні технічні параметри. Задача полягає в раціональному виборі джерела світла для кожного приміщення з огляду на перелічені вище характеристики, тобто

необхідно застосувати такий вид лампи, що найбільшою мірою задовольняє всі вимоги.

3. На Запорізькому залізорудному комбінаті в процесі видобутку корисної копалини застосовують твердіючу суміш, яка складається з в'язких та інертних матеріалів. Інертним заповнювачем у приготуванні такої суміші слугують відходи енергетичного, металургійного й гірничого виробництва, зокрема доменні шлаки (x_1), хвости ЦГЗК (x_2), вапняно-доломітні матеріали (x_3), пісок (x_4) та суглинок (x_5). Завдання полягає у визначенні такого складу суміші, щоб її вартість була мінімальною, а міцність відповідала нормативним умовам (має становити 20 – 60 кг/см^2), води повинно міститися приблизно 20 % від в'язких складових, а цементу, вапняно-доломітного матеріалу й піску приблизно 65, 9, 35 і 18 % від інертних компонентів у суміші відповідно.

Враховувати, що залежність міцності суміші від її складових описується такою функцією: $\varphi(x) = 467x_1 + 380x_2 - 54x_3 + 87x_4 - 120x_5 - 23{,}25$.

4. Для проведення закладних робіт на гірничому підприємстві використовують кілька видів сумішей, що характеризуються такими ознаками: міцність, вартість, основність, усадка, вміст горючих компонентів, пористість. Кожна з цих ознак має певний пріоритет. Необхідно вибрати оптимальний склад суміші відповідно до заданих пріоритетів.

5. Покупець вибирає одну з п’яти моделей пральних машин. Кожну він оцінює за такими ознаками: вартість, потужність, економічність, габаритні розміри, маса завантажуваної білизни. Завдання: а) сформулювати й розв’язати з огляду на ці умови задачу досягнення нечітко визначеної мети; б) сформулювати й розв’язати задачу вибору альтернативи за нечіткими відношеннями переваги. Які припущення необхідно зробити в кожному випадку?

6. Керівництву підприємства необхідно призначити одного з трьох кандидатів на посаду головного інженера. Необхідно враховувати такі критерії вибору: освіта, досвід роботи, авторитет у колективі, вік, організаторські здібності. Завдання: а) сформулювати і розв’язати з урахуванням цих умов задачу досягнення нечітко визначеної мети; б) сформулювати і розв’язати задачу вибору за нечіткими відношеннями переваги. Які припущення необхідно зробити в кожному випадку?

7. Для виготовлення сплаву зі свинцю, цинку та олова певного складу використовують сировину у вигляді п'яти сплавів з тих самих металів, але іншого складу й різної вартості за 1 кг (див. табл. 5.1). Визначити, яку кількість сплаву кожного виду потрібно взяти, щоб виготовити при мінімальній собівартості сплав, що містить олова приблизно 50 % і цинку близько 25 % .

Таблиця 5.1

Тип сплаву	Вміст металу, %			Питома вартість, грн/кг
	Свинець	Цинк	Олово	
I	25	30	45	8
II	10	50	40	17
III	30	30	40	10
IV	40	25	35	12
V	10	70	20	15

8. На шахті «Добропільска» функціонує три видобувних дільниці. Приблизний вміст сірки, вологи й зольність вугілля, що видобувається на кожній з них, різні (табл. 5.2). Відомі величини максимально можливого й мінімально необхідного обсягу видобутку вугілля з кожної дільниці, суми витрат на видобуток для кожної дільниці (табл. 5.2). Плановий обсяг видобутку на шахті становить 3000 тис. т. Необхідно, з огляду на можливості кожної дільниці, скласти план видобувних робіт таким чином, щоб витрати на видобуток були мінімальними й виконувалися б усі вимоги споживачів до якості сировини, зокрема зольність повинна становити приблизно 47 %, вологість – близько 10 % , вміст сірки – приблизно 3 % .

Таблиця 5.2

Характеристики вугілля, % та показники роботи дільниці	Номер дільниці		
	1	2	3
Зольність	49	37	23
Вологість	7	8	10
Вміст сірки	1,8	2,1	3
Витрати, грн	1184,210	1381,777	1083,515
Максимальний обсяг видобутку, тис. т	1650	1090	1270
Мінімальний обсяг видобутку сировини, тис. т	1200	600	530

Завдання С

1 – 8. Розв’язати сформульовані в завданні *В* задачі одним із методів.

РОЗДІЛ 6

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ Й НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Мета розділу: вивчення методів прийняття рішень в умовах ризику і невизначеності та їх застосування до розв'язування прикладних задач

6.1. Поняття про ситуацію прийняття рішень

Розглянемо тепер ситуацію, коли якість рішення залежить від зовнішніх факторів, на які ОПР (або орган управління) не впливає. Будемо також вважати, що ці параметри й збурення незмінні в часі, тобто модель є статичною.

Статична модель прийняття рішень, яка базується на теоретико-ігровій концепції, добре відома й поширена в багатьох реальних обставинах разового вибору варіантів (планів, дій, альтернатив, стратегій і т. д.), пов'язаних із невизначеним впливом середовища на ситуацію вибору, який проводить орган прийняття рішень.

Досліджуючи статичні моделі прийняття рішень, будемо виходити із схеми, у якій передбачено такі припущення:

1) орган управління має в наявності множину взаємовиключних рішень: $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ... \varphi_m\}$, одне з яких необхідно вибрати;

2) середовище C описується множиною взаємовиключних станів: $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, ... \theta_n\}$, і може перебувати в одному з них, однак на момент прийняття рішення органу управління невідомо, у якому саме стані воно перебуває (або буде перебувати);

3) визначено оцінний функціонал: $F = \{f_{j,k}\}$, який характеризує «виграш» або «програш» органу управління при виборі ним рішення $\varphi_k \in \Phi$, якщо середовище буде перебувати (або перебуває) в стані $\theta_j \in \Theta$.

Виходячи з цих припущень, процесс прийняття рішень в умовах невизначеності може бути описаний такою схемою:

1. Формування множини можливих рішень органу управління: $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ... \varphi_m\}$, і множини станів середовища: $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, ... \theta_n\}$.

2. Визначення та задання основних показників ефективності й корисності, які входять у розрахунок оцінного функціонала: $F = \{f_{j,k}\}$.

3. Визначення органом управління інформаційної ситуації, яка описує стратегію поведінки середовища C.

4. Вибір критерію прийняття рішень із множини критеріїв, які характеризують визначену органом управління інформаційну ситуацію.

5. Прийняття оптимального, за вибраним критерієм, рішення або його корекція.

Сформулюємо необхідні визначення.

Під *ситуацією прийняття рішень* будемо розуміти трійку $\{\Phi, \Theta, F\}$, у якій $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m\}$ – множина можливих рішень органу управління; $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n\}$ – множина можливих станів середовища; $F = \{f_{j,k}\}$ – оцінний функціонал, тут $f_{j,k} = f(\theta_j, \varphi_k)$.

У розгорнутій формі ситуація прийняття рішень характеризується такою матрицею:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_k & \cdots & \varphi_m \\
\theta_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1k} & \cdots & f_{1m} \\
\theta_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2k} & \cdots & f_{2m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\theta_j & f_{j1} & f_{j2} & \cdots & f_{jk} & \cdots & f_{jm} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\theta_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nk} & \cdots & f_{nm}
\end{array}$$

З категорією оцінного функціонала тісно пов'язані такі поняття як ефективність, корисність, втрати, ризик і под. При цьому вибір тієї чи іншої форми функціонала залежить від конкретних задач управління. Зазвичай використовують дві його форми: ті, що визначають корисність, або ті, що визначають втрати.

Якщо оцінний функціонал визначає ефективність, корисність, прибуток і т. і., тобто орган управління, приймаючи рішення, виходить із необхідності досягнення його максимуму, то говорять, що він має *додатний інгредієнт*. У цьому випадку оцінний функціонал позначають у такий спосіб: $F = F^+ = \{f^+_{j,k}\}$.

Коли орган управління виходить із потреби досягнення мінімуму оцінного функціонала (тобто він відображає втрати, ризик), то це означає, що він має від'ємний інгредієнт. Цей факт записують таким чином: $F = F^- = \{f^-_{j,k}\}$.

Інформаційною ситуацією прийняття рішень будемо називати ступінь градації невизначеності у виборі середовищем своїх станів із заданої множини Θ в момент прийняття рішення органом управління.

Виділяють такі інформаційні ситуації [35]:

I_1 – коли задано розподіл апріорних імовірностей на елементах множини станів середовища Θ, цю ситуацію називають також ситуацією прийняття рішень *в умовах ризику*;

I_2 – має місце заданий розподіл імовірностей з невідомими параметрами;

I_3 – задано системи лінійних відношень порядків на компонентах апріорного розподілу станів середовища C;

I_4 – коли розподіл імовірностей на множині станів середовища Θ невідомий;

I_5 – наявність антагоністичних інтересів середовища в процесі прийняття рішення;

I_6 – «проміжний» між I_1 та I_5 вибір середовищем своїх станів;

I_7 – існування нечіткої множини станів середовища.

Критерієм прийняття рішень будемо називати алгоритм, визначений для кожної ситуації прийняття рішень та інформаційної ситуації I, який дозволяє обрати єдине оптимальне рішення φ_0 з множини Ф або встановити множину таких рішень, які називають *еквівалентними* за даним критерієм.

У кожній інформаційній ситуації I можливе застосування кількох критеріїв. Вибір конкретного з них виконує орган прийняття рішень.

6.2. Критерії прийняття рішень в умовах ризику

Перша інформаційна ситуація I_1 характеризується заданим розподілом апріорних імовірностей на елементах множини Θ, а саме: $p = (p_1, p_2 \ldots p_n)$, тут $p_j = p(\theta = \theta_j)$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$. Вона є дуже поширеною при моделюванні практичних задач прийняття рішень в умовах ризику, оскільки дозволяє ефективно використовувати конструктивні методи теорії ймовірності в процесі розробки цілого наукового напряму – теорії статистичних рішень.

Зауважимо, що у реальних задачах розрахунок апріорного розподілу: $p = (p_1,\ \ p_2 \ldots p_n)$, здійснюється або шляхом обробки великого обсягу статистичного матеріалу, або на основі аналітичних методів, які базуються на гіпотезах про поведінку середовища та на застосуванні методів і теорем теорії ймовірності. Обидва ці методи дають деякою мірою наближені результати, оскільки певні труднощі й обмеження (вони стосуються вартості, часу і под.) виникають при обробці статистичних даних. Коли ж ідеться про використання аналітичних методів, доводиться робити певні припущення, іноді на шкоду точності опису процесу. Отриманий у такий спосіб апріорний розподіл ймовірності називають *об'єктивним.* Разом з тим, іноді застосування таких методів неможливе, оскільки немає достатньої кількості статистичного матеріалу, середовище характерне складною «поведінкою» і внаслідок цього застосування аналітичних методів потребує додаткових досліджень, що зумовлює значні витрати коштів і часу. У цих умовах орган прийняття рішень може використати для формулювання значень апріорного розподілу ймовірності думки та уявлення досвідчених експертів, які добре орієнтуються в ситуації. Таке визначення ймовірності називається *суб'єктивним*.

Опишемо критерії прийняття рішень у ситуації I_1.

1. *Критерій Байєса* (середнього значення). Сенс цього критерію полягає в максимізації математичного сподівання оцінного функціонала.

Згідно з критерієм Байєса, оптимальними рішеннями $\varphi_{k_0} \in \Phi$ (або множиною таких рішень) вважають такі, для яких математичне сподівання оцінного функціонала набуває найбільшого (або найменшого) можливого значення, а саме:

$$\varphi_{k_0} : B^+(\varphi_{k_0}, p) = \max_{\phi_k \in \Phi} B^+(\varphi_k, p), \quad k = 1,m, \;\; B^+(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_{ik}^+ \qquad (6.1)$$

для функціонала із додатним інгредієнтом;

$$\varphi_{k_0} : B^-(\varphi_{k_0}, p) = \min_{\phi_k \in \Phi} B^-(\varphi_k, p), \;\; k = 1,m, \;\; B^-(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_{ik}^- \qquad (6.2)$$

для функціонала із від'ємним інгредієнтом.

Критерій Байєса є найбільш використовуваним в інформаційній ситуації I_1. Його доцільно застосовувати тоді, коли ситуація повторюється багато разів, оскільки за таких умов максимізується середнє значення корисності (або мінімізується середній ризик).

2. *Критерій мінімуму дисперсії оцінного функціонала.* Для кожного рішення $\varphi_k \in \overline{\Phi}$ визначимо середнє значення $B^+(\varphi_k, p)$ оцінного функціонала та дисперсію σ_k^2 в такому вигляді:

$$B^+(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_{ik}^+ , \qquad (6.3)$$

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^+ - B^+(\varphi_k, p))^2 \, p_i , \qquad (6.4)$$

Дисперсія описує розсіювання випадкових значень оцінного функціонала для рішення φ_k відносно його середнього значення $B^+(\varphi_k, p)$.

Сутність критерію мінімізації дисперсії оцінного функціоналу полягає в тому, щоб знайти рішення $\varphi_{k_0} \in \Phi$ (або множини рішень $\overline{\Phi}$), для якого буде справедливою така рівність:

$$\sigma^2\left(p, \varphi_{k_0}\right) = \min_{\varphi_k \in \Phi} \sigma_k^2\left(p, \varphi_k\right). \qquad (6.5)$$

Основним недоліком цього критерію є те, що дисперсія на рішенні $\varphi_{k_1} \in \Phi$ може виявитися меншою ніж на рішенні $\varphi_{k_2} \in \Phi$, в той час коли $B^+(\varphi_{k_1}, p) < B^+(\varphi_{k_2}, p)$. Інакше кажучи, критерий мінімуму дисперсії з одного боку є допоміжним, а з іншого – його прийняття потребує довизначення й невеликої зміни вигляду дисперсії σ_k^2, наприклад, одним із поданих нижче способів:

$$\sigma^2(\varphi_k) = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^+ - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} B^+(\varphi_k, p))^2 \, p_i \qquad (6.6)$$

або

$$\sigma^2(\varphi_k) = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^{+} - \max_{\varphi_s \in \Phi} B^{+}(\varphi_s, p))^2 \, p_i \,. \qquad (6.7)$$

Якщо оцінний функціонал задано у формі від'ємного інгредієнта, а саме: $F = F^{-} = \left\{ f_{j,k}^{-} \right\}$, то рішення $\varphi_{k_0} \in \Phi$ також можна знайти, використовуючи умову (6.5), але тут величину σ_k^2 визначають одним із таких способів:

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^{-} - B^{-}(\varphi_k, p))^2 \, p_i \,, \qquad (6.8)$$

$$\sigma^2(\varphi_k) = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^{-} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} B^{-}(\varphi_k, p))^2 \, p_i \qquad (6.9)$$

або

$$\sigma^2(\varphi_k) = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^{-} - \min_{\varphi_s \in \Phi} B^{-}(\varphi_s, p))^2 \, p_i \,, \qquad (6.10)$$

причому $B^{-}(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_{ik}^{-}$.

3. *Критерій максимізації ймовірності розподілу оцінного функціонала.* Фіксуємо величину α, яка задовольняє таку умову: $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$, причому $\alpha_1 = \min_j \min_k f_{jk}^{+}$ і $\alpha_2 = \max_j \max_k f_{jk}^{+}$.

Для кожного рішення $\varphi_k \in \Phi$ визначають імовірність $p\left(f_{jk}^{+} \ge \alpha \right)$ того, що значення оцінного функціонала буде не меншим за величину α, коли середовище перебуває у стані θ_j й обрано рішення φ_k.

Сенс критерію максимізації ймовірності розподілу оцінного функціонала полягає у визначенні рішення $\varphi_{k_0} \in \Phi$ (або множини рішень $\overline{\Phi}$), для якого ця ймовірність буде максимальною, тобто

$$\varphi_{k_0} : p(f_{jk_0}^{+} \ge \alpha) = \max_{\varphi_k \in \Phi} p(f_{jk}^{+} \ge \alpha) \,. \qquad (6.11)$$

При використанні цього критерію орган управління виходить із необхідності прийняття конкретного рівня величини α й оптимальними вважаються ті рішення, для яких виконується умова (6.11).

Коли значення ймовірності α й рішення φ_k фіксовані, то нерівність: $f_{ik}^{+} \ge \alpha$ визначає множину станів середовища $\theta_{\alpha k}$, а ймовірність $p(f_{jk}^{+} \ge \alpha)$, обчислюється в такий спосіб:

$$p(f_{jk}^{+} \geq \alpha) = \sum_{\theta_j \in \theta_{\alpha k}} p(f_{jk}^{+} \geq \alpha), \quad \theta_{\alpha k} = \{\theta_j : f_{jk}{}^{+} \geq \alpha\}. \tag{6.12}$$

Якщо оцінний функціонал має від'ємний інгредієнт F^{-}, то відповідно належить визначити ймовірність $p(f_{ik}^{-} \leq \alpha)$, і критерій набуває такого вигляду:

$$p(f_{jk_0}^{-} \leq \alpha) = \max_{\varphi_k \in \Phi} p(f_{jk}^{-} \leq \alpha), \tag{6.13}$$

тут $p(f_{jk}^{-} \leq \alpha) = \sum_{\theta_j \in \theta_{\alpha k}} p(f_{jk}^{-} \leq \alpha), \quad \theta_{\alpha k} = \{\theta_j : f_{jk}{}^{-} \leq \alpha\}$.

4. *Модальний критерій.* Ідея цього критерію полягає в тому, що орган прийняття рішення виходить із найбільш імовірного стану середовища. Припустимо, що існує єдине значення j^*, яке забезпечує виконання такої умови:

5.

$$p(\theta_{j*}) = \max_{\theta_j \in \Theta} p(\theta j). \tag{6.14}$$

Тоді орган управління вважає, що середовище перебуває саме у стані θ_{j*} і обирає рішення φ_0, для якого $f_{j0}^{+} = \max_k f_{j*k}^{+}$, коли функціонал має додатний інгредієнт, або $f_{j0}^{-} = \min_k f_{j*k}^{-}$, коли функціонал характеризується від'ємним інгредієнтом.

Зауважимо, що тут можлива ситуація, коли максимальне значення ймовірності досягається одночасно на кількох елементах множини Θ, тобто

$$p(\theta_{j_1}) = p(\theta_{j_2}) = \ldots p(\theta_{j_s}) = \max_{\theta_j \in \Theta} p(\theta j),$$

тоді оптимальне рішення необхідно обирати, виходячи з такої умови:

$$\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} f_{j_r 0}^{+} = \max_{\varphi_k \in \Phi} \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} f_{j_r k}^{+}. \tag{6.15}$$

Перевагою модального критерію є його простота. По-перше, достатньо лише виявити найбільш імовірні стани середовища, і до того ж немає необхідності навіть знати числові значення цих імовірностей; по-друге, розрахунок значень оцінного функціонала можна виконувати лише для найбільш імовірних станів, що значно підвищує швидкість прийняття рішень.

Серед недоліків критерію слід назвати можливість того, що рішення, оптимальне за модальним критерієм, не завжди буде мати найбільше байєсове значення.

6. *Комбінований критерій.* Являє собою комбінацію критеріїв Байєса та мінімуму дисперсії, де враховано природне бажання органу управління забезпечити найкраще середнє значення (критерій Байєса) та мінімальну дисперсію.

Виберемо величину λ, $0 \le \lambda \le 1$ і для кожного з рішень φ_k, $k = 1, 2, \dots m$, обчислимо значення критерію за такою формулою:

$$k(\varphi_k, p) = (1-\lambda)\left(B^{+}(\varphi_k, p)\right)^2 - \lambda\sigma^2(\varphi_k, p), \qquad (6.16)$$

Найкращим вважають рішення φ_0, для якого виконано таку умову:

$$k\left(\varphi_0, p\right) = \max_{\varphi_k \in \Phi} k\left(\varphi_k, p\right).$$

Зауважимо, що при цьому значення коефіцієнта λ встановлюють з огляду на те, якому саме критерію (Байєса чи мінімуму дисперсії) потрібно надати більшу перевагу. Якщо $\lambda = 0$, то критерій $k\left(\varphi_k, p\right)$ збігається з критерієм Байєса, а коли $\lambda = 1$ – із критерієм мінімуму дисперсії.

Візьмемо для розгляду дві величини:

$$\lambda^{*} = \min_{\varphi_k \in \Phi} \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^{+}\right]^2}{\sum_{j=1}^{n} p_j (f_{jk}^{+})^2}; \qquad \lambda^{**} = \max_{\varphi_k \in \Phi} \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^{+}\right]^2}{\sum_{j=1}^{n} p_j (f_{jk}^{+})^2}. \qquad (6.17)$$

Вочевидь, вони задовольняють таку нерівність: $0 \le \lambda^{*} \le \lambda^{**} \le 1$. Тут мають місце наведені нижче твердження.

Лема 6.1. Якщо параметр λ задовольняє таку умову $0 \le \lambda \le \lambda^{*}$, то $k\left(\varphi_k, p\right) \ge 0$ для всякого рішення $\varphi_k \in \Phi$.

Лема 6.2. Коли параметр λ задовольняє таку умову $\lambda^{**} \le \lambda \le 1$, то $k\left(\varphi_k, p\right) \le 0$ для всякого рішення $\varphi_k \in \Phi$.

Доведення цих тверджень подається в монографії [35].

Таким чином, можемо зробити висновок, що коли $0 \le \lambda \le \lambda^{*}$, то в комбінованому критерії надано перевагу критерію Байєса, порівняно з критерієм мінімуму дисперсії, а коли $\lambda^{**} \le \lambda \le 1$, то більше враховується критерій мінімуму дисперсії.

7. *Критерій мінімальної ентропії математичного сподівання оцінного функціонала*. Припустимо, що $f_{jk}^{+} > 0$ для всіх значень $j = \overline{1, n}$ і $k = \overline{1, m}$. Стосовно кожного з можливих рішень $\varphi_k \in \Phi$ обчислюємо ентропію математичного сподівання оцінного функціонала за такою формулою:

$$H(p,\varphi_k) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i f_{ik}^{+}}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^{+}}\right)\cdot \ln\left(\frac{p_i f_{ik}^{+}}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^{+}}\right). \qquad (6.18)$$

Оптимальним вважається рішення φ_0, яке має мінімальну ентропію, тобто

$$\varphi_0 : H(p,\varphi_0) = \min_k H(p,\varphi_k).$$

Коли умова: $f_{jk}^{+} > 0$, $j = \overline{1,n}$ і $k = \overline{1,m}$, не виконується, то можна перейти до категорії втрат, скориставшись перетворенням: $\tilde{f}_{jk}^{-} = \max\limits_{\substack{\varphi_k \in \Phi \\ \theta_j \in \Theta}} f_{jk}^{+} - f_{jk}^{+}$ і відшукати рішення φ_0 за критерієм мінімуму ентропії математичного сподівання оцінного функціонала $H(p,\varphi_k)$, коли $\varphi_k \in \Phi$, де

$$H(p,\varphi_k) = -\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{p_i f_{ik}^{-}}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^{-}}\right)\cdot \ln\left(\frac{p_i f_{ik}^{-}}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^{-}}\right)\right\}, \quad f_{jk}^{-} > 0. \qquad (6.19)$$

8. *Умовні рішення.* Припустимо, що в ситуації прийняття рішень I можна застосовувати критерії з деякої множини: $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$. Один із них вважають головним, а для інших критеріїв задають обмеження такого вигляду: $c_i \le k_i \le c_i$, $i = 1,n$.

У такому разі рішення, прийняте органом управління за головним критерієм, називають *умовним*.

Тут належить взяти до уваги такі міркування:

1) оскільки пошук оптимальних рішень за описаних умов зводиться до перебору варіантів, то обмеження у вигляді рівностей не завжди доцільно застосувати, бо вони можуть привести до відсутності рішень (задача взагалі не буде мати жодного допустимого рішення);

2) умовне рішення можна обрати і без головного критерію, тоді воно буде являти собою розв'язок такої системи нерівностей:

$$c_i \le k_i \le c_i, i = 1,n.$$

Розглянемо приклад використання критеріїв прийняття рішень в умовах ризику на прикладі поданої нижче задачі.

П р и к л а д 6.1. Бригада монтерів енергомережі включає 5 робітників, що виконують ремонтно-відновлювальні роботи в разі настання аварійних ситуацій. Керівництву необхідно прийняти рішення про зміну кількості робітників. При цьому можливі такі варіанти:

φ_1 – не змінювати кількості робітників;

φ_2 – збільшити кількість робітників за рахунок комбінування змін (бригада буде мати змінний склад);

φ_3 – збільшити кількість робітників;

φ_4 – зменшити кількість робітників.

Належить враховувати можливі ситуації:

θ_1 – середня кількість аварій протягом доби буде великою (суттєво збільшиться);

θ_2 – середня кількість аварій протягом доби буде помірно великою (несуттєво збільшиться);

θ_3 – за добу буде траплятися небагато аварій (їх кількість не зміниться);

θ_4 – протягом доби буде траплятися мало аварій (їх число зменшиться);

θ_5 – аварій не буде.

За оцінками експертів імовірність кожної ситуації та ефективність прийнятих при цьому рішень можна описати таким чином:

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,2	θ_1	3	4	7	0
0,4	θ_2	5	5	6	1
0,2	θ_3	8	2	2	6
0,1	θ_4	3	1	0	7
0,1	θ_5	1	0	0	9

Необхідно вибрати оптимальне рішення.

Розв’яжемо задачу, використовуючи критерії першої інформаційної ситуації.

Критерій Байєса. Оскільки в нашій задачі для оцінювання можливих рішень використовується функціонал із додатним інгредієнтом (він описує ефективність рішень), то будемо використовувати формули (6.1).

Обчислимо байєсові значення для кожного з рішень, а саме:

$$B^+(\varphi_1, p) = \sum_{i=1}^{5} f_{i1}p_i = 3\cdot 0,2 + 5\cdot 0,4 + 8\cdot 0,2 + 3\cdot 0,1 + 1\cdot 0,1 = 4,6.$$

$$B^+(\varphi_2, p) = \sum_{i=1}^{5} f_{i2}p_i = 4\cdot 0,2 + 5\cdot 0,4 + 2\cdot 0,2 + 1\cdot 0,1 + 0\cdot 0,1 = 3,3.$$

$$B^+(\varphi_3, p) = \sum_{i=1}^{5} f_{i1}p_i = 7\cdot 0,2 + 6\cdot 0,4 + 2\cdot 0,2 + 0\cdot 0,1 + 0\cdot 0,1 = 4,2.$$

$$B^+(\varphi_4, p) = \sum_{i=1}^{5} f_{i1}p_i = 0\cdot 0,2 + 1\cdot 0,4 + 6\cdot 0.2 + 7\cdot 0,1 + 9\cdot 0,1 = 3,2.$$

Легко помітити, що найбільше байєсове значення має рішення φ_1: $B(\varphi_1, p) = 4{,}6$, тому його вибір можна вважати раціональним, отже потрібно залишити кількість робітників незмінною.

Критерій мінімуму дисперсії оцінного функціонала. За формулою (6.4) обчислимо значення дисперсій для кожного із можливих рішень, тобто

$$\sigma^2(\varphi_1, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i1} - 4{,}6)^2 p_i = 2{,}56 \cdot 0{,}2 + 0{,}16 \cdot 0{,}4 + 11{,}56 \cdot 0{,}2 + 2{,}56 \cdot 0{,}1 +$$
$$+12{,}96 \cdot 0{,}1 = 4{,}44.$$
$$\sigma^2(\varphi_2, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i2} - 3{,}3)^2 p_i = 0{,}49 \cdot 0{,}2 + 2{,}89 \cdot 0{,}4 + 1{,}69 \cdot 0{,}2 + 5{,}29 \cdot 0{,}1 +$$
$$+10{,}89 \cdot 0{,}1 = 3{,}21.$$

$$\sigma^2(\varphi_3, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i3} - 4{,}2)^2 p_i = 7{,}84 \cdot 0{,}2 + 3{,}24 \cdot 0{,}4 + 4{,}84 \cdot 0{,}2 + 17{,}64 \cdot 0{,}1 +$$
$$+17{,}64 \cdot 0{,}1 = 7{,}36.$$

$$\sigma^2(\varphi_4, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i4} - 3{,}2)^2 p_i = 10{,}24 \cdot 0{,}2 + 4{,}84 \cdot 0{,}4 + 7{,}84 \cdot 0{,}2 + 14{,}44 \cdot 0{,}1 +$$
$$+33{,}64 \cdot 0{,}1 = 10{,}36.$$

Найменше значення дисперсії має рішення φ_2, яке передбачає збільшення кількості робітників за рахунок комбінування змін, тому його вибір за цим критерієм буде раціональним.

Розглянемо модифікації цього методу.

Перша описується формулою (6.6). Обчислимо спочатку середнє байєсове значення за всіма критеріями, а саме:

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} B^{+}(\varphi_j, p) = 3{,}825.$$

Тепер обчислимо значення дисперсій відносно нього, тобто

$$\sigma_1^2(\varphi_1, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i1} - 3{,}825)^2 p_i = 0{,}68 \cdot 0{,}2 + 1{,}38 \cdot 0{,}4 + 17{,}43 \cdot 0{,}2 + 0{,}68 \cdot 0{,}1 +$$
$$+7{,}98 \cdot 0{,}1 = 5{,}04.$$

$$\sigma_2^2(\varphi_2, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i2} - 3{,}85)^2 p_i = 0{,}03 \cdot 0{,}2 + 1{,}38 \cdot 0{,}4 + 3{,}33 \cdot 0{,}2 + 7{,}98 \cdot 0{,}1 +$$
$$+14{,}63 \cdot 0{,}1 = 3{,}48.$$

$$\sigma_3^2(\varphi_3, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i3} - 3{,}85)^2 p_i = 10{,}08 \cdot 0{,}2 + 4{,}73 \cdot 0{,}4 + 3{,}33 \cdot 0{,}2 + 14{,}63 \cdot 0{,}1 +$$
$$+14{,}63 \cdot 0{,}1 = 7{,}5.$$

$$\sigma_4^2(\varphi_4, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i4} - 3{,}85)^2 p_i = 14{,}63 \cdot 0{,}2 + 7{,}98 \cdot 0{,}4 + 4{,}73 \cdot 0{,}2 + 10{,}08 \cdot 0{,}1 +$$
$$+26{,}78 \cdot 0{,}1 = 10{,}75.$$

Вочевидь, мінімальне значення дисперсії отримано для рішення φ_2, тому вибір цієї альтернативи можна вважати раціональним.

Друга модифікація описується формулою (6.7). Максимальне байєсове значення $\max\limits_j B^+(\varphi_j, p) = 4{,}6$. Обчислимо відхилення значень оцінного функціонала від нього для кожного з рішень, а саме:

$$\sigma_1^2(\varphi_1, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i1} - 4{,}6)^2 p_i = 2{,}56 \cdot 0{,}2 + 0{,}16 \cdot 0{,}4 + 11{,}56 \cdot 0{,}2 + 2{,}56 \cdot 0{,}1 +$$
$$+12{,}96 \cdot 0{,}1 = 4{,}44.$$

$$\sigma_2^2(\varphi_2, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i2} - 4{,}6)^2 p_i = 0{,}36 \cdot 0{,}2 + 0{,}16 \cdot 0{,}4 + 6{,}76 \cdot 0{,}2 + 12{,}96 \cdot 0{,}1 +$$
$$+21{,}16 \cdot 0{,}1 = 4{,}9.$$

$$\sigma_3^2(\varphi_3, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i3} - 4{,}6)^2 p_i = 5{,}76 \cdot 0{,}2 + 1{,}96 \cdot 0{,}4 + 6{,}76 \cdot 0{,}2 + 21{,}16 \cdot 0{,}1 +$$
$$+21{,}16 \cdot 0{,}1 = 7{,}52.$$

$$\sigma_4^2(\varphi_4, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i4} - 4{,}6)^2 p_i = 21{,}16 \cdot 0{,}2 + 12{,}96 \cdot 0{,}4 + 1{,}96 \cdot 0{,}2 + 5{,}76 \cdot 0{,}1 +$$
$$+19{,}36 \cdot 0{,}1 = 12{,}32.$$

Мінімальне значення модифікованої дисперсії відповідає рішенню φ_1, тому його вибір можна вважати раціональним.

Тепер розв'яжемо задачу за допомогою критерію *максимізації ймовірності розподілу* оцінного функціонала. Обчислимо необхідні параметри: $\alpha_1 = \min\limits_i \min\limits_j f_{ij}$ та $\alpha_2 = \max\limits_i \max\limits_j f_{ij}$, за нашими даними $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_2 = 9$. Тепер оберемо число α, яке задовольняє таку умову: $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$, припустимо, що $\alpha = 5$. За формулами (6.12) обчислимо ймовірності $p(f_k^+ \ge \alpha)$ для кожного рішення φ_k, тобто

$$\varphi_1:\ p(f_1^+ \ge 5) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6;$$

$$\varphi_2:\ p(f_2^+ \ge 5) = 0{,}4;$$

$\varphi_3: \ p(f_3^+ \geq 5) = 0,2 + 0,4 = 0,6$;

$\varphi_4: \ p(f_4^+ \geq 5) = 0,2 + 0,1 + 0,1 = 0,4$.

Максимальне значення ймовірності мають дві альтернативи: φ_1 та φ_3, тобто раціональними за цим критерієм можна вважати такі рішення: не змінювати кількості робітників або збільшити її.

Застосуємо тепер для розв'язування задачі *модальний критерій*.

Із цією метою визначимо стан середовища, який має найбільшу ймовірність, для сформульованої задачі це буде стан θ_2, тобто середня кількість аварій протягом доби буде помірно великою (несуттєво збільшиться). Оцінки рішень стосовно цього стану мають такі значення: $f_{21}^+ = 5$, $f_{22}^+ = 5$, $f_{23}^+ = 6$, $f_{24}^+ = 1$.

Найбільше значення відповідає рішенню φ_3, тому його вибір можна вважати раціональним, тобто необхідно збільшити кількість робітників.

Розглянемо ще кілька критеріїв, які можна застосовувати в цій ситуації.

Критерій мінімальної ентропії математичного сподівання оцінного функціонала. Стосовно кожного з можливих рішень обчислимо ентропію математичного сподівання оцінного функціонала за формулою (6.18).

У нашому випадку

$$H(p,\varphi_1) = -\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{p_i f_{i1}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{j1}^+}\right)\cdot\ln\left(\frac{p_i f_{i1}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{j1}^+}\right)\right\} = 1,1731.$$

$$H(p,\varphi_2) = -\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{p_i f_{i2}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{j2}^+}\right)\cdot\ln\left(\frac{p_i f_{i2}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{j2}^+}\right)\right\} = 1,008.$$

$$H(p,\varphi_3) = -\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{p_i f_{i3}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{j3}^+}\right)\cdot\ln\left(\frac{p_i f_{i3}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{j3}^+}\right)\right\} = 0,909.$$

$$H(p,\varphi_4) = -\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{p_i f_{i4}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{j4}^+}\right)\cdot\ln\left(\frac{p_i f_{i4}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{j4}^+}\right)\right\} = 0,96.$$

Мінімального значення критерій набуває для рішення φ_3. Таким чином, оптимальним буде вибір альтернативи φ_3 – збільшити кількість робітників.

Комбінований критерій. Розглянемо задачу вибору рішення за цим критерієм, використовуючи різні значення параметра λ. Обчислимо граничні значення параметра, за якими встановлюють перевагу критеріїв за формулами (6.17), а саме:

$$\lambda^* = \min_k \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^+\right]^2}{\sum_{j=1}^{n} p_j (f_{jk}^+)^2} = 0,497; \qquad \lambda^{**} = \max_k \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^+\right]^2}{\sum_{j=1}^{n} p_j (f_{jk}^+)^2} = 0,827.$$

Тепер обчислимо значення критерію, коли $\lambda = 0,4$ $(\lambda < \lambda^*)$, тобто

$$k(p,\varphi_1) = 4,6^2\left(1-0,4\right) - 0,4\cdot 4,44 = 10,92.$$

$$k(p,\varphi_2) = 3,3^2\left(1-0,4\right) - 0,4\cdot 3,21 = 5,25.$$

$$k(p,\varphi_3) = 4,3^2\left(1-0,4\right) - 0,4\cdot 6,61 = 7,64.$$

$$k(p,\varphi_4) = 3,2^2\left(1-0,4\right) - 0,4\cdot 10,36 = 2.$$

Максимальне значення критерію відповідає рішенню φ_1, тобто коли $\lambda < \lambda^*$, вибір цього рішення буде раціональним.

Тепер розглянемо задачу вибору за умови, що $\lambda = 0,9$ ($\lambda > \lambda^{**}$), а саме:

$$k(p,\varphi_1) = -1,88; \quad k(p,\varphi_2) = -1,8; \quad k(p,\varphi_3) = -4,86; \quad k(p,\varphi_4) = -8,3.$$

Максимальне значення критерію відповідає альтернативі φ_2, тобто якщо $\lambda > \lambda^*$, вибір цього рішення буде раціональним.

У разі, коли $\lambda = 0,662$ ($\lambda^* < \lambda < \lambda^{**}$), критерій набуває таких значень:

$$k(p,\varphi_1) = 4,2128; \; k(p,\varphi_2) = 1,5558; \; k(p,\varphi_3) = 1,09; \; k(p,\varphi_4) = -3,3972.$$

Отже, оптимальним буде рішення φ_1.

Запишемо результати, розраховані за допомогою різних критеріїв, у таблицю (табл. 6.1).

Аналізуючи результати, можна зробити висновок, що використання різних критеріїв дає різні оптимальні альтернативи, а тому перш ніж приймати рішення, необхідно визначити, за яким критерієм воно буде обиратися, враховуючи умови задачі та вимоги до рішення. Наприклад, у розглянутій нами задачі альтернатива φ_4 не буде оптимальною стосовно жодного з критеріїв, альтернатива φ_3 буде оптимальною лише за модальним критерієм, тобто особі, що приймає рішення, необхідно вибирати між двома альтернативами: φ_1 – не змінювати кількості робітників; φ_2 – збільшити кількість робітників за рахунок комбінування змін (бригада буде мати змінний склад).

Таблиця 6.1

Результати обчислення та прийняття рішень за різними критеріями в умовах ризику

Назва критерію	Значення критерію стосовно рішень				Оптимальне рішення
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	
Байєса	4,6	3,3	4,2	3,2	φ_1
Мінімуму дисперсії	4,44	3,21	7,36	10,36	φ_2
Модифікация 1	5,04	3,48	7,5	10,75	φ_2
Модифікация 2	4,44	4,9	7,52	12,32	φ_1
Максимізації ймовірності розподілу оцінного функціонала	0,6	0,4	0,6	0,4	φ_1, φ_2
Модальний	5	5	6	1	φ_3
Мінімуму ентропії	1,1731	1,008	0,909	0,96	φ_3
Комбінований, λ = 0,4	10,92	5,25	7,64	2	φ_1
Комбінований, λ = 0,9	–1,88	–1,8	–4,86	–8,3	φ_2
Комбінований, λ = 0,662	4,2128	1,5558	1,09	–3,3972	φ_1

6.3. Множини Байєса

Критерій Байєса дає можливість в інформаційній ситуації дослідити проблему синтезу під час вибору оптимального рішення відповідно до розподілу ймовірностей: $p = (p_1, ..., p_n)$, на множині станів середовища *C*. Позначимо через Δ множину можливих значень вектора апріорного розподілу ймовірності, а саме:

$$\Delta = \left\{ (p_1, \dots, p_n) : 0 \le p_j \le 1 \, , \, j = 1, \dots n \, , \, \sum_{i=1}^{n} p_j = 1 \right\},$$

і розглянемо $(n – 1)$-вимірний симплекс:

$$P_{n-1} = \left\{ (p_1, \dots, \, p_{n-1}) : 0 \le p_j \le 1, \, j = 1, \dots n-1, \, \sum_{i=1}^{n-1} p_j \le 1 \right\}. \qquad (6.20)$$

Він являє собою проекцією плоскої множини Δ, на $(n-1)$-вимірний простір значень перших $(n-1)$-х компонент вектора апріорного розподілу $p = (p_1, \dots, p_n)$.

Суть задачі синтезу полягає в розбитті симплексу P_{n-1} на множини $S_{\varphi_k} \subset P_{n-1}$, $k = 1, \dots m$, що задовольняють такі умови:

1) $S_{\varphi_i} \bigcap S_{\varphi_k} = \Lambda$, коли $i \neq k$, де $\Lambda -$ порожня множина;

2) $\bigcup\limits_{k=1}^{m} S_{\varphi_k} = P_{n-1}$.

3) Рішення $\varphi_k \in \Phi$ буде оптимальним за критерієм Байєса, якщо $p \subset S_{\varphi_k}$.

Множину S_{φ_k} будемо називати *байєсовою множиною* значень апріорних імовірностей: $p = (p_1, \dots, p_n)$, стосовно рішення φ_k, саме рішення $\varphi_k \in \Phi$ для ймовірності $p \subset S_{\varphi_k}$ назвемо *байєсовим* рішенням, а величину $B^{+}(p, \varphi_k)$ на байєсовому рішенні φ_k – оптимальним байєсовим значенням оцінного функціоналу.

Визначимо *байєсову поверхню* оптимальних байєсових значень оцінного функціонала F^{+} (або просто байєсову поверхню) для всіх імовірностей $p \in \Delta_n$ у такий спосіб:

$$B^{+}(p) = \max_{\varphi_k \in \Phi} B^{+}(p, \varphi_k). \qquad (6.21)$$

Якщо орган прийняття рішень має інформацію про байєсові множини, то він може порівняно просто приймати оптимальні (за критерієм Байєса) рішення, навіть коли апріорний розподіл імовірностей: $p = (p_1, \dots, p_n)$, станів середовища C визначено неточно, але проблема побудови самих Байєсових множин являє собою досить складну математичну задачу розбиття $(n-1)$-вимірного симплекса на підмножини (особливо, коли $n \geq 4$). Розглянемо далі методи побудови байєсових множин рішень.

6.3.1. Геометричний метод побудови байєсових множин

Зауважимо, що цей метод можна застосовувати лише для невеликого числа станів середовища, зокрема коли $n \leq 4$.

У загальному випадку геометричний метод побудови байєсової множини в $(n-1)$-вимірному просторі значень $p_1, \dots, p_{n-1}$ для обраного рішення $\varphi_k \in \Phi$ можна описати таким чином:

Кожна з множин S_{φ_k} буде являти собою множину точок p, які задовольняють таку систему нерівностей:

$$b^{+}_{\varphi_i \varphi_k}(\overline{p}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, i \neq k, \;\; p_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n-1, \; \sum_{j=1}^{n-1} p_j \leq 1, \qquad (6.22)$$

тут

$$b^{+}_{\varphi_i\varphi_k}(\overline{p}) = \sum_{j=1}^{n-1} p_j (f^{+}_{ji} - f^{+}_{jk}) + (1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i)(f^{+}_{ni} - f^{+}_{nk}). \qquad (6.23)$$

Отже, маємо систему ($n + m - 1$) нерівностей. Звідси випливає, що кожна з множин S_{φ_k} являє собою опуклий замкнутий багатогранник у ($n - 1$)-вимірному просторі, який повністю описується своїми вершинами.

Для знаходження вершин множини S_{φ_k} слід розглядати всілякі комбінації, складені з ($n - 1$)-го рівняння такого вигляду:

$$b^{+}_{\varphi_i\varphi_k}(\overline{p}) = 0,\ p_j = 0,\ \sum_{j=1}^{n-1} p_j = 1. \qquad (6.24)$$

Таких комбінацій може бути не більше за $C^{\,n-1}_{m+n-1}$. Вершиною множини S_{φ_k} буде будь-яка точка: $\overline{p} = (p_1, ..., p_{n-1})$, що задовольняє систему нерівностей (6.22) і систему з ($n - 1$)-го рівняння (6.24) з ненульовим визначником. Але цей спосіб не є раціональним, оскільки число комбінацій досить велике.

Приклад 6.2. Розглянемо задачу побудови байєсових множин для випадку наявності трьох можливих рішень: $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, і двох станів середовища: $\theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, тобто коли $n = 2$ і $m = 3$. Припустимо, що оцінний функціонал задано такою матрицею:

		φ_1	φ_2	φ_3
p	θ_1	f_{11}	f_{12}	f_{13}
$1-p$	θ_2	f_{21}	f_{22}	f_{23}

Запишемо байєсові значення функціонала для кожного з рішень, тобто

$$B^{+}(p, \varphi_1) = p f_{11} + (1-p) f_{21},$$

$$B^{+}(\rho, \varphi_2) = p f_{12} + (1-p) f_{22},$$

$$B^{+}(\rho, \varphi_3) = p f_{13} + (1-p) f_{23}.$$

Байєсову поверхню визначаємо за такою формулою: $B^{+}(p) = \max_{\phi_k \in \Phi} B^{+}(p, \varphi_k)$, а границі множин описуються точками, в яких проходить зміна лінії поверхні. Це точки перетину відповідних байєсових значень оцінного функціонала, а саме:

$$\Gamma_{\varphi_1\varphi_2}: \quad B^+(p,\varphi_1) = B^+(p,\varphi_2),$$

$$\Gamma_{\varphi_1\varphi_3}: \quad B^+(p,\varphi_1) = B^+(p,\varphi_3),$$

$$\Gamma_{\varphi_2\varphi_3}: \quad B^+(p,\varphi_2) = B^+(p,\varphi_3),$$

тут $\Gamma_{\varphi_i\varphi_j}$ – границя між множинами S_{φ_i} та S_{φ_j}.

Розглянемо приклад із числовими значеннями.

П р и к л а д 6.3. Припустимо, що оцінний функціонал задано таким чином:

	φ_1	φ_2	φ_3
θ_1	10	2	5
θ_2	-3	7	4

Тоді байєсові значення для кожного рішення набувають такого вигляду:

$$B^+(p,\varphi_1) = 10p + (-3)(1-p) = 10p - 3 + 3p = 13p - 3,$$

$$B^+(p,\varphi_2) = 2p + 7(1-p) = 2p + 7 - 7p = -5\rho + 7,$$

$$B^+(p,\varphi_3) = 5p + 4(1-p) = 5p + 4 - 4p = p + 4.$$

Побудуємо на координатній площині графіки цих функцій (див. рис. 6.1). Товстою лінією на рисунку позначено байєсову поверхню $B^+(p)$.

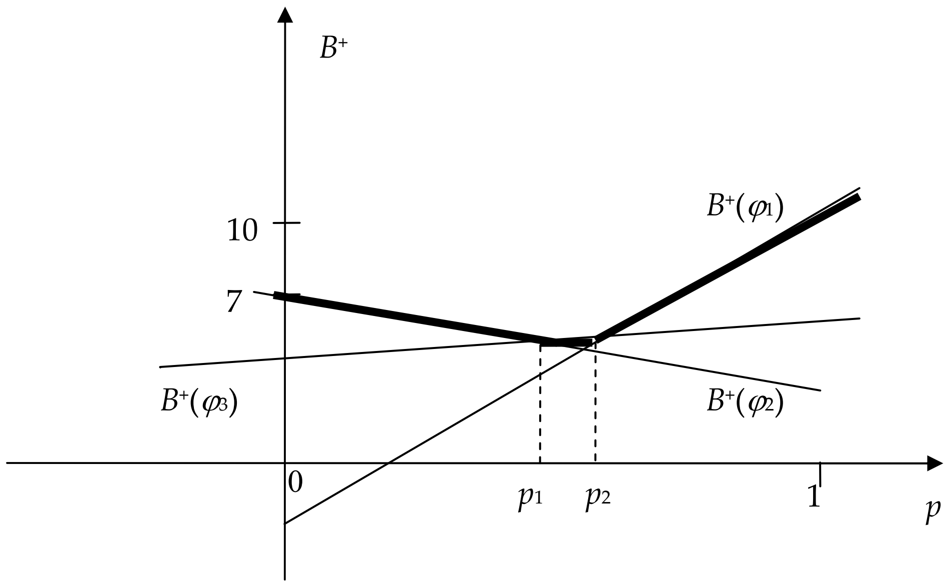


Рис. 6.1. Графічне зображення байєсової поверхні та байєсових множин до прикладу 6.3

Очевидно, що

$$B^{+}(p)=\begin{cases} B^{+}(p,\varphi_1),\ 0\le p\le p_1, \\ B^{+}(p,\varphi_3),\ p_1\le p\le p_2, \\ B^{+}(p,\varphi_2),\ p_2\le p\le 1. \end{cases}$$

Байєсові множини будуть мати такий вигляд: $S_{\varphi_1}=[0,p_1]$, $S_{\varphi_2}=[p_2,1]$, $S_{\varphi_3}=[p_1,p_2]$ відповідно. Для обчислення значень ймовірностей p_1 і p_2 складемо такі рівняння:

$$p_1:\ B^{+}(p,\varphi_2)=B^{+}(p,\varphi_3), \qquad p_2:\ B^{+}(p,\varphi_3)=B^{+}(p,\varphi_1),$$

$$-5p+7=p+4, \qquad 13p-3=p+4,$$

$$-6p=-3, \qquad 12p=7,$$

$$p_1=\frac{1}{2}. \qquad p_2=\frac{7}{12}.$$

Отже, остаточно байєсові множини набувають такого вигляду:

$$S_{\varphi_2}=\left[0;\frac{1}{2}\right],\quad S_{\varphi_3}=\left[\frac{1}{2};\frac{7}{12}\right],\quad S_{\varphi_1}=\left[\frac{7}{12};1\right].$$

6.3.2. Функціональний метод побудови байєсових множин

Побудова байєсових множин, коли існує декілька рішень, може здійснюватися або шляхом спільного розгляду всіх можливих пар рішень, або за допомогою послідовного переходу від двох рішень до трьох, від трьох до чотирьох і т. д. З огляду на це, існує прямий метод розв'язування задачі побудови байєсових множин і багатокроковий метод послідовного збільшення числа рішень.

Прямий метод побудови байєсових множин за умови існування кількох можливих рішень передбачає описану нижче послідовність дій.

Для вихідної множини рішень: $\Phi=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_m\}$, необхідно скласти всі можливі пари рішень:

(φ_1,φ_2), (φ_1,φ_3), (φ_1,φ_4), …, (φ_1,φ_m) – усього (m – 1) пара,

(φ_2,φ_3), (φ_2,φ_4), …, (φ_2,φ_m) – усього (m – 2) пари,

(φ_1,φ_4), …, (φ_1,φ_m) – усього (m – 3) пари,

……………………………………………………

$(\varphi_{m-1},\varphi_m)$ – 1 пара,

і для кожної з пар (φ_i, φ_k) розбити симплекс P_{n-1} на дві відповідні байєсові множини.

Позначимо через $S_{\varphi_k|\varphi_i}$ байєсову множину рішень $\varphi_k \in \Phi$ у групі тільки двох рішень (φ_i, φ_k), тоді

$$S_{\varphi_1} = \bigcap_{i=2}^{m} S_{\varphi_1|\varphi_i}.$$

Для частини симплексу $\mathrm{P}_{n\text{-}1} \setminus S_{\varphi_1}$ байєсову множину S_{φ_2} можна визначити в такий спосіб:

$$S_{\varphi_2} = (P_{n-1} \setminus S_{\varphi_1}) \bigcap_{i=3}^{m} S_{\varphi_2|\varphi_i}.$$

Після цього розглянемо частину симплексу $[P_{n-1} \setminus (S_{\varphi_1} \bigcup S_{\varphi_2})]$, для якого байєсову множину S_{φ_3} визначаємо за такою формулою

$$S_{\varphi_3} = [(P_{n-1} \setminus S_{\varphi_1} \cup S_{\varphi_2})] \bigcap_{i=4}^{m} S_{\varphi_3|\varphi_i}.$$

Продовживши процес, далі аналогічним чином встановимо, що

$$S_{\varphi_k} = [(P_{n-1} \setminus \bigcup_{s=1}^{k-1} S_{\varphi_s})] \bigcap_{i=k+1}^{m} S_{\varphi_k|\varphi_i}.$$

6.3.3. Метод варіації контрольної точки для побудови байєсових рішень

Припустимо, що вибрано деяку ймовірність: $p^0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$, $p^0 \in P_{n-1}$ (контрольна точка).

Опишемо схему методу.

1. Знайдемо байєсові значення оцінного функціонала стосовно рішень $\varphi_k \in \Phi$, коли $p = p^0$, а саме:

$$B^+(p^0, \varphi_k) = \sum_{j=1}^{n} p_j^0 f_{jk}^+, \; k = 1, 2, \dots m.$$

2. Визначимо рішення $\varphi_{k_0} \in \Phi$, для якого виконано таку умову:

$$B^+(p^0) = B^+(p^0, \varphi_{k_0}) = \max_{\phi_k \in \Phi} B^+(p^0, \varphi_k).$$

3. Обчислимо нев’язки: $\delta_{k_0 k} = B^+(p^0, \varphi_{k_0}) - B^+(p^0, \varphi_k)$, для всіх рішень $\varphi_k \in \Phi \setminus \varphi_{k_0}$.

4. Обчислимо вектори d_{kk_0} як різницю між k-м та k_0-м стовпцями оцінного функціонала F^{+} за таким правилом:

$$d_{kk_0}=\begin{pmatrix} f^{+}_{1k} \\ \dots \\ f^{+}_{nk} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} f^{+}_{1k_0} \\ \dots \\ f^{+}_{nk_0} \end{pmatrix}.$$

5. Розглянемо варіацію: $\overline{p}=(\overline{p}_1,\dots,\overline{p}_n)$, вихідної контрольної точки p^0, побудовану за правилом:

$$\overline{p}=p^0+q\,,\ \text{де}\ \ \overline{p}_j=p_j+q_i\,,\quad \sum_{j=1}^{n}\overline{p}_j=1,\quad \sum_{j=1}^{n}p_j^0=1,\quad \sum_{i=1}^{n}q_i=0.$$

Для кожної пари рішень $(\varphi_{k_0},\varphi_k)$ знайдемо скалярний добуток (q,d_{kk_0}), а саме: $(q,d_{kk_0})=\sum_{j=1}^{n}q_j d^{j}_{kk_0}$.

Границю, яка розділяє умовні байєсові множини $S_{\varphi_{k_0}|\varphi_k}$ і $S_{\varphi_k|\varphi_{k_0}}$, визначають шляхом розрахунку $(n-1)$ варіаційних точок $\overline{p}^1,\dots,\overline{p}^{n-1}$ на основі розв’язування $(n-1)$-ї системи лінійних алгебраїчних рівнянь, за якими знаходять вектори $q^1,\dots,q^{n-1}$, тобто

$$\begin{cases} (q,d_{kk_0})=\delta_{kk_0}, \\ q_i=0, \qquad\qquad i=1,2,\dots,n-1. \\ \sum_{l=1}^{n}q_l=0. \end{cases}$$

6. Рівняння гіперплощини $\Gamma_{\varphi_{k_0}\varphi_k}$, яка є границею множин $S_{\varphi_{k_0}|\varphi_k}$ та $S_{\varphi_k|\varphi_{k_0}}$ і проходить через точки $\overline{p}^1=(\overline{p}^1_1,\dots,\overline{p}^1_{n-1})$, … $\overline{p}^{n-1}=(\overline{p}^{n-1}_1,\dots,\overline{p}^{n-1}_{n-1})$, отримують шляхом розв’язування такого рівняння:

$$\begin{vmatrix} p_1-\overline{p}^1_1, & p_2-\overline{p}^1_2, & \dots & p_{n-1}-\overline{p}^1_{n-1} \\ \overline{p}^2_1-\overline{p}^1_1, & \overline{p}^2_2-\overline{p}^1_2, & \dots & \overline{p}^2_{n-1}-\overline{p}^1_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \\ \overline{p}^{n-1}_1-\overline{p}^1_1, & \overline{p}^{n-1}_2-\overline{p}^1_2, & \dots & \overline{p}^{n-1}_{n-1}-\overline{p}^1_{n-1} \end{vmatrix}=0\,.$$

Після побудови умовних байєсових множин $S_{\varphi_{k_0}|\varphi_k}$ байєсову множину $S_{\varphi_{k_0}}$ визначають таким чином: $S_{\varphi_{k_0}}=\bigcap_{\varphi_k\in\Phi\backslash\varphi_{k_0}}S_{\varphi_{k_0}|\varphi_k}$.

Далі процес побудови байєсових множин виконують, послідовно застосовуючи описаний метод для всіх рішень $\varphi_k \in \Phi$.

П р и к л а д 6.4. Розглянемо задачу побудови байєсових множин для випадку наявності трьох можливих рішень: $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, і трьох станів середовища: $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, тобто коли $n = 3$ і $m = 3$. Припустимо, що оцінний функціонал задано такою матрицею:

$$\begin{array}{c|cccc} & & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ p_1 & \theta_1 & 2 & 1 & 4 \\ p_2 & \theta_2 & 5 & 2 & 3 \\ 1 - p_1 - p_2 & \theta_3 & 2 & 5 & 1 \end{array}$$

Запишемо байєсові значення функціонала для кожного з можливих рішень, а саме:

$$B^+(p, \varphi_1) = 2p_1 + 5p_2 + 2(1 - p_1 - p_2) = 3p_2 + 2,$$

$$B^+(p, \varphi_2) = 1p_1 + 2p_2 + 5(1 - p_1 - p_2) = -4p_1 - 3p_2 + 5,$$

$$B^+(p, \varphi_3) = 4p_1 + 3p_2 + (1 - p_1 - p_2) = 3p_1 + 2p_2 + 1.$$

Тепер складемо рівняння границь:

1) $\Gamma_{\varphi_1, \varphi_2}: \ B^+(p, \varphi_1) = B^+(p, \varphi_2)$,
$$3p_2 + 2 = -4p_1 - 3p_2 + 5,$$
$$6p_2 = -4p_1 - 3,$$
$$p_2 = -0{,}67p_1 + 0{,}5.$$

2) $\Gamma_{\varphi_1, \varphi_3}: B^+(p, \varphi_1) = B^+(p, \varphi_3)$,
$$3p_2 + 2 = 3p_1 + 2p_2 + 1,$$
$$p_2 = 3p_1 - 1.$$

3) $\Gamma_{\varphi_2, \varphi_3}: B^+(p, \varphi_2) = B^+(p, \varphi_3)$,
$$-4p_1 - 3p_2 + 5 = 3p_1 + 2p_2 + 1,$$
$$-5p_2 = -4 + 7p_1,$$
$$p_2 = -1{,}4p_1 + 0{,}8.$$

За результатами обчислень побудуємо на координатній площині отримані зображення границь (див. рис. 6.2).

Як бачимо, вихідну область розбито на 6 підмножин. Визначимо тепер, яке рішення є оптимальним для кожної з них. Для цього в кожній підмножині виберемо довільну точку й обчислимо байєсові значення стосовно кожного з рішень у цій точці. Максимальне значення відповідатиме певній байєсовій множині. Результати розрахунків зведемо в табл. 6.2.

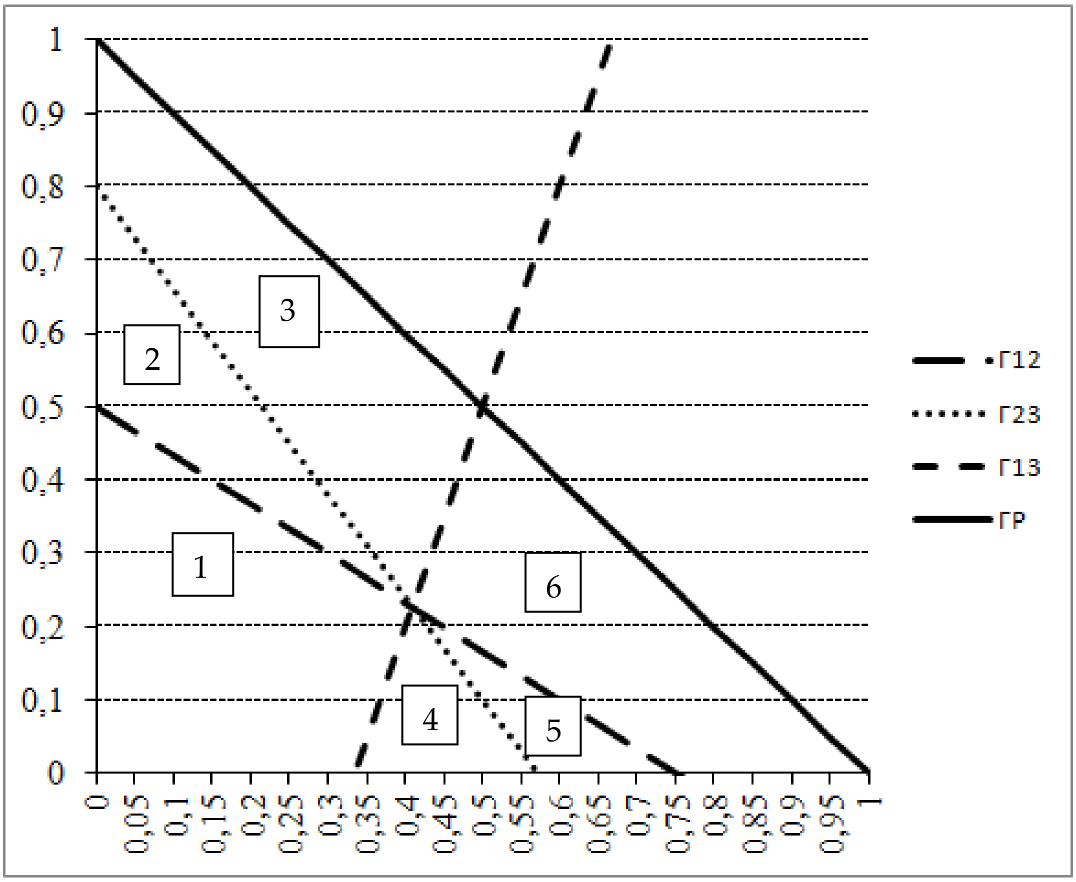


Рис. 6.2. Границі підмножин $S_{\varphi_{k_0}|\varphi_k}$ і $S_{\varphi_k|\varphi_{k_0}}$, отримані за результатами розрахунків у прикладі 6.4

Таблиця 6.2

Результати обчислення баєсових значень оцінного функціонала в кожній із підмножин

Підмножина	Координати точки		Байєсові значення			Максимальне значення	Належність до байєсової множини
	p_1	p_2	$B^+(p,\varphi_1)$	$B^+(p,\varphi_2)$	$B^+(p,\varphi_3)$		
1	0	0	2	5	1	5	S_{φ_2}
2	0	0,6	3,8	3,2	2,2	3,8	S_{φ_1}
3	0	0,9	4,7	2,3	2,8	4,7	S_{φ_1}
4	0,45	0	2	3,2	2,4	3,2	S_{φ_2}
5	0,65	0	2	2,4	3	3	S_{φ_3}
6	0,9	0	2	1,4	3,7	3,7	S_{φ_3}

Враховуючи отримані результати, остаточно маємо такі байєсові множини:

$$S_{\varphi_1}=\begin{cases}p_1+p_2\le 1,\\ p_2\ge -0{,}67p_1+0{,}5,\\ p_2\ge 3p_1-1,\\ p_1,p_2\ge 0.\end{cases}\qquad S_{\varphi_2}=\begin{cases}p_2\le -0{,}67p_1+0{,}5,\\ p_2\le -1{,}4p_1+0{,}8\,,\\ p_1,p_2\ge 0.\end{cases}\qquad S_{\varphi_3}=\begin{cases}p_1+p_2\le 1,\\ p_2\ge -1{,}4p_1+0{,}8,\\ p_2\le 3p_1-1,\\ p_1,p_2\ge 0.\end{cases}$$

Графічне зображення отриманих байєсових множин показано на рис. 6.3.

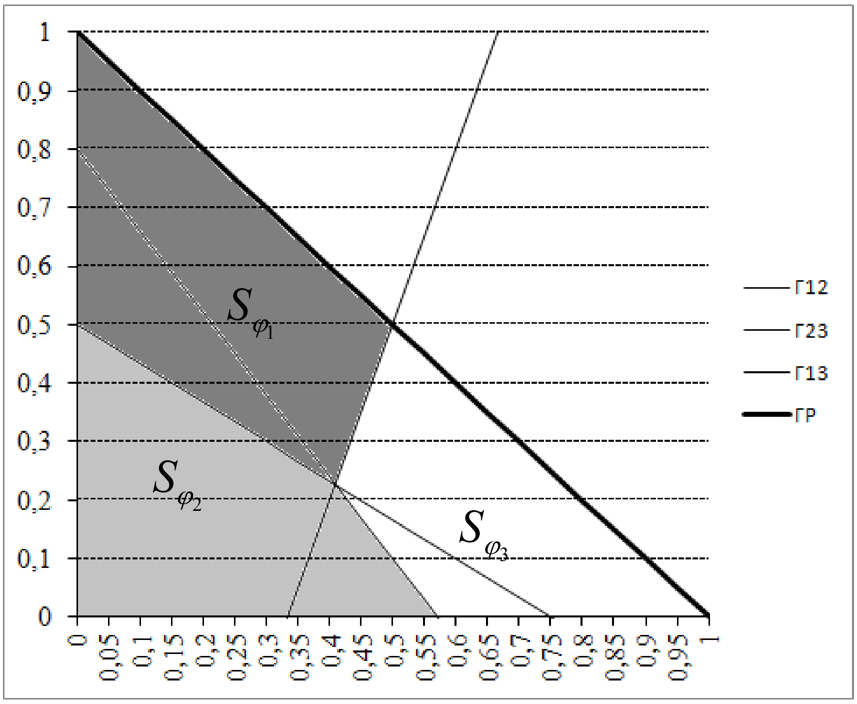


Рис. 6.3. Графічне подання байєсових множин (приклад 6.4)

П р и к л а д 6.5. Припустимо, що ситуацію прийняття рішень задано такою матрицею:

p		φ_1	φ_2	φ_3
0,3	θ_1	2	1	4
0,5	θ_2	5	2	3
0,2	θ_3	2	5	1

Контрольна точка $p_0 = (0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}2)$. Побудуємо байєсові множини, відповідно до описаної вище схеми.

Для цього виконаємо такі дії:

1. Обчислимо байєсові значення оцінного функціонала в контрольній точці, а саме:

$B^{+}(p_0,\varphi_1)=0,3\cdot 2+0,5\cdot 5+0,2\cdot 2=3,5$,

$B^{+}(p_0,\varphi_2)=0,3\cdot 1+0,5\cdot 2+0,2\cdot 5=2,3$,

$B^{+}(p_0,\varphi_3)=0,3\cdot 4+0,5\cdot 3+0,2\cdot 1=2,9$.

2. Знайдемо рішення φ_{k_0}, для якого

$$B^{+}(p_0,\varphi_{k_0})=\max_k B^{+}(p_0,\varphi_k)=3,9.$$

У нашому випадку $k_0=1$.

3. Для кожного рішення φ_k, окрім φ_{k_0}, обчислюємо нев'язки таким чином:

$$\delta_{k_0k}=B(p_0,\varphi_{k_0})-B(p_0,\varphi_{k_0}),$$

тобто $\delta_{12}=1,2$, $\delta_{13}=0,6$, $\delta_{32}=0,6$.

4. Спочатку будемо визначати границю між множинами S_{φ_1} та S_{φ_2}, для цього обчислимо таку різницю:

$$d_{21}=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\3\end{pmatrix}.$$

Вводимо в розгляд варіацію контрольної точки: $\overline{p}=p_0+q$, а саме:

$$\overline{p}_1=0,3+q_1,$$

$$\overline{p}_3=0,2+q_3,$$

$$\overline{p}_2=0,5+q_2.$$

Обчислимо скалярний добуток (d,q), тобто

$$(d,q)=\begin{pmatrix}-1\\-3\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}=-q_1-3q_2+3q_3.$$

Запишемо рівність: $(d,q)=\delta_{12}=1,2$, і складемо систему рівнянь для знаходження першої варіації, а саме:

$$\begin{cases} -q_1 - 3q_2 + 3q_3 = 1,2, \\ q_1 = 0, \\ q_1 + q_2 + q_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши її, маємо такі результати $q_1 = 0;\ q_2 = -0,2;\ q_3 = 0,2$, тобто

$$p_0 + q = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix},$$

а перша точка границі $\overline{p^1} = (0,3;\ 0,3;\ 0,4)$.

Обчислимо другу варіацію за такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} -q_1 - 3q_2 + 3q_3 = 1,2, \\ q_2 = 0, \\ q_1 + q_2 + q_3 = 0, \end{cases}$$

тоді $q_1 = -0,3;\ q_2 = 0;\ q_3 = 0,3$,

$$p_0 + q = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,3 \\ 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix},$$

а друга точка границі $\overline{p^2} = (0;\ 0,5;\ 0,5)$.

Рівняння прямої, яка проходить через ці дві точки, буде мати такий вигляд:

$$\frac{p_1 - 0,3}{0 - 0,3} = \frac{p_2 - 0,3}{0,5 - 0,3}.$$

Перетворимо його в канонічну форму таким чином:

$$\begin{aligned} &0,2(p_1 - 0,3) = -0,3(p_2 - 0,3), \\ &0,2p_1 - 0,06 = -0,3p_2 + 0,09, \\ &0,3p_2 = -0,2p_1 + 0,15, \\ &p_2 = -0,67p_1 + 0,5. \end{aligned}$$

Отже, границя $\Gamma_{\varphi_1,\varphi_2}$ між множинами S_{φ_1} та S_{φ_2} описується таким рівнянням:

$$p_2 = -0,67 p_1 + 0,5 .$$

Аналогічно побудуємо границі між множинами S_{φ_2} і S_{φ_3}, та між S_{φ_1} і S_{φ_3}. Тепер отримуємо такі результати:

$\Gamma_{\varphi_1,\varphi_3}:\ p_2 = 3p_1 - 1$, $\quad \Gamma_{\varphi_2,\varphi_3}:\ p_2 = -1,4p_1 + 0,8.$

Як бачимо, результати, отримані двома методами, однакові.

6.4. Побудова множин рішень відносно інших критеріїв. Метод оптимального розбиття множин

Розглянемо ситуацію прийняття рішень $\{\Phi, \Theta, F\}$, описану такою матрицею:

$$\begin{array}{cccc} & \varphi_1 & \ldots & \varphi_m \\ \theta_1 & f_{11} & \ldots & f_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_n & f_{n1} & \ldots & f_{nm} \end{array}$$

причому на множині станів середовища: $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$, нам відомий можливий розподіл імовірностей $p = (p_1, \ldots, p_n)$ та обрано критерій *K* прийняття рішень.

Необхідно розбити множину:

$$P_{n-1} = \left\{ (p_1,\ldots,p_{n-1}) : 0 \le p_j \le 1\ ,\ j = 1,\ldots n-1,\quad \sum_{i=1}^{n-1} p_j \le 1 \right\}, \tag{6.25}$$

на її підмножини $S_{\varphi_k} \subset P_{n-1}$, $k = 1, \ldots m$, що задовольняють такі умови:

$$S_{\varphi_i} \bigcap S_{\varphi_k} = \varnothing, \quad i \ne k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, m, \tag{6.26}$$

$$\bigcup_{i=1}^{m} S_{\varphi_i} = P_{n-1}, \tag{6.27}$$

причому для $p \subset S_{\varphi_k}$, $k = 1,\ldots m$ оптимальним за критерієм K є рішення φ_k.

У попередньому пункті нашого посібника було розглянуто задачу побудови множин рішень відносно критерію Байєса. Там було запропоновано геометричний та функціональний метод їх побудови. У статті [39] задачу побудови байєсових множин розв’язано за допомогою метода оптимального розбиття множин (ОРМ), описаного в монографії [15].

Спробуємо тепер відповісти на питання, чи можливо побудувати множини рішень стосовно інших критеріїв? Розглянемо задачу побудови множин рішень $S_{\varphi_k} \subset P_{n-1}$, $k=1, \ldots m$, відносно комбінованого критерію такого вигляду:

$$K(p,\varphi_k) = (1-\alpha)B^+(p,\varphi_k) - \alpha\sigma^2(p,\varphi_k), \qquad (6.28)$$

де $B^+(p,\varphi_k)$ – байєсове значення для рішення φ_k, яке відповідає апріорному розподілу ймовірності: $p=\left(p_1,\ldots,p_n\right)$; $\sigma^2(p,\varphi_k)$ – дисперсія значень оцінного функціонала, які відповідають рішенню φ_k; α – параметр, $0 \le \alpha \le 1$.

Вочевидь, побудову множин рішень можна розглядати як задачу оптимального розбиття симплекса P_{n-1} на підмножини, відповідні можливим рішенням. Щоб її розв'язати, сформулюємо вихідну задачу у вигляді задачі оптимального розбиття множин.

Задача А1. Розбити (n – 1)-вимірний симплекс:

$$P_{n-1} = \left\{\left(p_1,\ldots,p_{n-1}\right): 0 \le p_j \le 1,\ j=1,\ldots n-1,\quad \sum_{i=1}^{n-1} p_j \le 1\right\},$$

на його підмножини S_{φ_1}, S_{φ_2}, … S_{φ_m} таким чином, щоб виконувалися такі умови:

$$S_{\varphi_i} \cap S_{\varphi_k} = \varnothing,\quad i \ne k,\quad i,k = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\bigcup_{i=1}^{m} S_{\varphi_i} = P_{n-1},$$

і функціонал

$$F(S_{\varphi_1},\ldots,S_{\varphi_m}) = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{S_{\varphi_k}} c_k\left(p\right)\rho\left(p\right)dp, \qquad (6.29)$$

досягав максимального значення.

Тут $\rho\left(p\right)$ – дійсна, невід'ємна, інтегрована функція;

$$c_k\left(p\right) = \left(1-\alpha\right)\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left(f_{ik}-f_{nk}\right)p_i + f_{nk}\right) -$$

$$-\alpha\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_{ik}^2 - f_{nk}^2\right)p_i - \left(\sum_{i=1}^{n-1}(f_{ik}-f_{nk})p_i\right)^2 - 2f_{nk}\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_{ik}-f_{nk}\right)p_i\right),\ k=1, \ldots m.$$

Розбиття $S_{\varphi_1}, S_{\varphi_2}, \ldots\ S_{\varphi_m}$, яке є роз'язком задачі А1, назвемо оптимальним.

Сформульована задача А1 являє собою задачу ОРМ із фіксованими центрами підмножин без обмежень [15].

Для її розв'язування введемо характеристичні функції підмножин S_{φ_k}, $k=1, \ldots m$, а саме:

$$\lambda_k^*(p) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad p \in S_{\varphi_k}, \\ & \\ 0, & \text{якщо} \quad p \in S \setminus S_{\varphi_k}, \end{cases} \qquad k = 1, 2, ..., m.$$

Скориставшись термінами характеристичних функцій можемо записати задачу А1 у такому вигляді:

Задача В1. Знайти вектор-функцію: $\lambda^*(\cdot) = \left(\lambda_1^*(\cdot), ..., \lambda_m^*(\cdot)\right)$, що відповідає такій умові:

$$I(\lambda^*(\cdot)) = \max_{\lambda^*(\cdot)\in\Gamma_1} I(\lambda^*(\cdot)),$$

тут

$$I(\lambda(\cdot)) = \int\limits_{P_{n-1}} \sum_{k=1}^{m} \Bigg[(1-\alpha) \sum_{i=1}^{n-1} \left(\left(f_{ik} - f_{nk} \right) p_i + f_{nk} \right) -$$
$$- \alpha \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(f_{ik}^2 - f_{nk}^2 \right) p_i - \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i \right)^2 - 2 f_{nk} \sum_{i=1}^{n-1} \left(f_{ik} - f_{nk} \right) p_i \right) \Bigg] \lambda_k(p) dp,$$

$\Gamma_1 = \{\lambda(p) = (\lambda_1(p), ..., \lambda_m(p))$: $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k(p) = 1$, майже всюди для $p \in P_{n-1}$ $\lambda_k(p) = 0 \vee 1$, $p \in P_{n-1}$, $k = 1, ..., m\}$.

Зауважимо, що $F\left(S_{\varphi_1}, ..., S_{\varphi_m}\right) = I\left(\lambda(\cdot)\right)$.

Використовуючи метод оптимального розбиття множин, описаний у монографії [15], отримуємо розв’язок поставленої задачі в такому вигляді:

$$\lambda^*{}_k(p) = \begin{cases} 1, & (1-\alpha)\left(B_k\right) - \alpha\left(\sigma^2{}_k\right) \ge (1-\alpha)\left(B_j\right) - \alpha\left(\sigma^2{}_j\right), \forall j = \overline{1,m} \\ 0 & \text{в} \quad \text{інших} \quad \text{випадках,} \end{cases} \qquad (6.30)$$

тут $\lambda^*{}_1(p), \ldots, \lambda^*{}_m(p)$ – характеристичні функції підмножин $S_{\varphi_1}^*, \ldots, S_{\varphi_m}^*$, що утворюють оптимальне розбиття симплексу P_{n-1};

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left(f_{ik}^2 - f_{nk}^2 \right) p_i - \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i \right)^2 - 2 f_{nk} \sum_{i=1}^{n-1} \left(f_{ik} - f_{nk} \right) p_i,$$

$$B_k = \sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i + f_{nk}, \quad k = \overline{1,m}.$$

Упевнимося, що оптимальний роз’язок задачі А1 буде утворювати розбиття симплекса на множини рішень, тобто буде справедливим подане нижче твердження.

Т в е р д ж е н н я 6.1. Підмножини $S^*_{\varphi_1},...,S^*_{\varphi_m}$, що є оптимальним розв'язком задачі А1, утворюють множини розв'язків за комбінованим критерієм (6.28).

Доведення

Нехай розбиття $S^*_{\varphi_1},\dots,S^*_{\varphi_m}$ – розв'язок задачі А1. Розглянемо довільну підмножину $S^*_{\varphi_k}$, і точку $p=(p_1,\dots,p_n)\in S^*_{\varphi_k}$. Згідно з необхідною та достатньою умовою оптимальності розбиття [15] буде справедливою така нерівність:

$$c_k(p)\ge c_j(p),\quad j=\overline{1,m}. \tag{6.31}$$

Враховуючи, що $p_n=1-\sum_{k=1}^{n-1}p_k$, перетворимо вираз для визначення функції $c_k(p)$, а саме:

$$c_k(p)=(1-\alpha)\left(\sum_{i=1}^{n-1}(f_{ik}-f_{nk})p_i+f_{nk}\right)-$$
$$-\alpha\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_{ik}^2-f_{nk}^2\right)p_i-\left(\sum_{i=1}^{n-1}(f_{ik}-f_{nk})p_i\right)^2-2f_{nk}\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_{ik}-f_{nk}\right)p_i\right)=$$
$$=(1-\alpha)\left(\sum_{i=1}^{n-1}p_if_{ik}+(1-\sum_{i=1}^{n-1}p_i)f_{nk}\right)-$$
$$-\alpha\left(\sum_{i=1}^{n-1}f_{ik}^2p_i-\sum_{i=1}^{n-1}f_{nk}^2p_i+f_{nk}^2-f_{nk}^2-\left(\sum_{i=1}^{n-1}(f_{ik}-f_{nk})p_i\right)^2-2f_{nk}\sum_{i=1}^{n-1}(f_{ik}-f_{nk})p_i\right)=$$
$$=(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}p_if_{ik}-\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}f_{ik}^2p_i-f_{nk}^2-\left(\sum_{i=1}^{n-1}(f_{ik}-f_{nk})p_i\right)^2-2f_{nk}\sum_{i=1}^{n-1}(f_{ik}-f_{nk})p_i\right)=$$
$$=(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}p_if_{ik}-\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}f_{ik}^2p_i-\left(\sum_{i=1}^{n-1}(f_{ik}-f_{nk})p_i+f_{nk}\right)^2\right)=$$
$$=(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}p_if_{ik}-\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}f_{ik}^2p_i-\left(\sum_{i=1}^{n}f_{ik}p_i\right)^2\right)=$$
$$=(1-\alpha)B^+(p,\varphi_k)-\alpha\sigma^2(p,\varphi_k).$$

Тоді з нерівності (6.31) випливає, що

$$(1-\alpha)B^+(p,\varphi_k)-\alpha\sigma^2(p,\varphi_k)\ge(1-\alpha)B^+(p,\varphi_j)-\alpha\sigma^2(p,\varphi_j),\ \forall j=\overline{1,m}.$$

Отже, $(1-\alpha)B^{+}(p,\varphi_k)-\alpha\sigma^2(p,\varphi_k)=\max\limits_{\varphi_j\in\Phi}(1-\alpha)B^{+}(p,\varphi_j)-\alpha\sigma^2(p,\varphi_j)$,

тобто $K\left(p,\varphi_k\right)==\max\limits_{\varphi_j\in\Phi}K\left(p,\varphi_j\right)$.

Таким чином, рішення φ_k є оптимальним стосовно комбінованого критерію, коли $p=(p_1,...,p_n)$.

З іншого боку, якщо рішення φ_k вважати оптимальним за комбінованим критерієм, коли $p=p_0$, то виконується така умова:

$$K(p_0,\varphi^*)=\max_{\varphi_k\in\Phi}K(p_0,\varphi_k)=\max_{\varphi_k\in\Phi}\left[(1-\alpha)\left(\sum_{i=1}^{n}p_if_{ik}\right)-\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}(f_{ik}-\sum_{i=1}^{n}f_{ik}p_i)^2p_i\right)\right],$$

тобто
$$(1-\alpha)\left(\sum_{i=1}^{n}p_{0i}f_{ik}\right)-\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}(f_{ik}-\sum_{i=1}^{n}f_{ik}p_{0i})^2p_{0i}\right)\geq$$

$$\geq(1-\alpha)\left(\sum_{k=1}^{n}p_{0i}f_{ij}\right)-\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}(f_{ij}-\sum_{i=1}^{n}f_{ij}p_{0i})^2p_{0i}\right),\ \forall j=\overline{1,m}.$$

Враховуючи, що $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$, і, перетворюючи вирази, отримуємо таку нерівність:

$$(1-\alpha)\left(\sum_{i=1}^{n-1}(f_{ik}-f_{nk})p_{0i}+f_{nk}\right)-$$

$$-\alpha\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_{ik}^2-f_{nk}^2\right)p_{0i}-\left(\sum_{i=1}^{n-1}(f_{ik}-f_{nk})p_{0i}\right)^2-2f_{nk}\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_{ik}-f_{nk}\right)p_{0i}\right)\geq$$

$$\geq(1-\alpha)\left(\sum_{i=1}^{n-1}(f_{ij}-f_{nj})p_{0i}+f_{nj}\right)-$$

$$-\alpha\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_{ij}^2-f_{nj}^2\right)p_{0i}-\left(\sum_{i=1}^{n-1}(f_{ij}-f_{nj})p_{0i}\right)^2-2f_{nj}\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_{ij}-f_{nj}\right)p_{0i}\right),\quad\forall j=\overline{1,m}.$$

А згідно з формулою (6.30), це означає, що $p_0\in S_{\varphi_k}$.

Отже, підмножини $S^*_{\varphi_1},...,S^*_{\varphi_m}$ утворюють множини рішень стосовно комбінованого критерію. Твердження доведено.

Сформулюємо алгоритм розв'язування задачі А1, який базується на методі ОРМ [40].

А л г о р и т м А1

1. Множину P_{n-1} поміщаємо в паралелепіпед П, сторони якого паралельні осям декартової системи координат.

2. Паралелепіпед П покриваємо прямокутною сіткою.

3. Задаємо функцію $\rho\left(p\right)$ у вузлах сітки за таким правилом:

$$\rho\left(p\right)=\begin{cases}1, & \text{коли } p\in P_{n-1},\\ 0, & \text{коли } \ p\notin P_{n-1}.\end{cases}$$

4. Обчислюємо значення характеристичних функцій $\lambda_k^*(p), k=\overline{1,m}$, у вузлах сітки за формулою (6.30).

5. Коли $\lambda_k^*(p)=1$, точка p належить множині S_{φ_k}. В іншому разі – ні.

6. Для контролю правильності розрахунків обчислюємо значення цільової функції $F(S_{\varphi_1},...,S_{\varphi_m})$ у вузлі p.

Проілюструємо на прикладі застосування описаного алгоритму.

П р и к л а д 6.6. Розглянемо ситуацію прийняття рішень, яка описана такою матрицею:

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
θ_1	4,05	3,29	2,93	0,99
θ_2	3,79	4,12	4,05	4,19
θ_3	3,23	3,54	4,75	5,95

Необхідно побудувати множини рішень, відповідні комбінованому критерію (6.28).

Результат застосування алгоритму А1 показаний на рис. 6.4. Коли $\alpha=0$, отримуємо множини Байеса (рис. 6.4, *а*), якщо $\alpha=1$ – множини відповідні критерію мінімуму дисперсії (рис. 6.4, *б*), результати за комбінованим критерієм стосовно $\alpha=0,3$ (рис. 6.4, *в*) та $\alpha=0,7$ (рис. 6.4, *г*).

Очевидно, що в разі застосування критерію мінімуму дисперсії ($\alpha=$ 1), за довільним апріорним розподілом імовірності оптимальним буде рішення φ_1, у той же час рішення φ_4 не буде використовуватись у жодному разі і може бути виключено із розгляду. Використання інших рішень залежить від апріорного розподілу ймовірності й виду застосованого критерію.

Зауважимо, що описаний алгоритм може бути поширений також на ситуацію з більш ніж трьома станами середовища, а побудова множин рішень дозволяє знайти оптимальне рішення навіть у разі неточно визначеного апріорного розподілу ймовірності або принаймні оцінити можливу помилку.

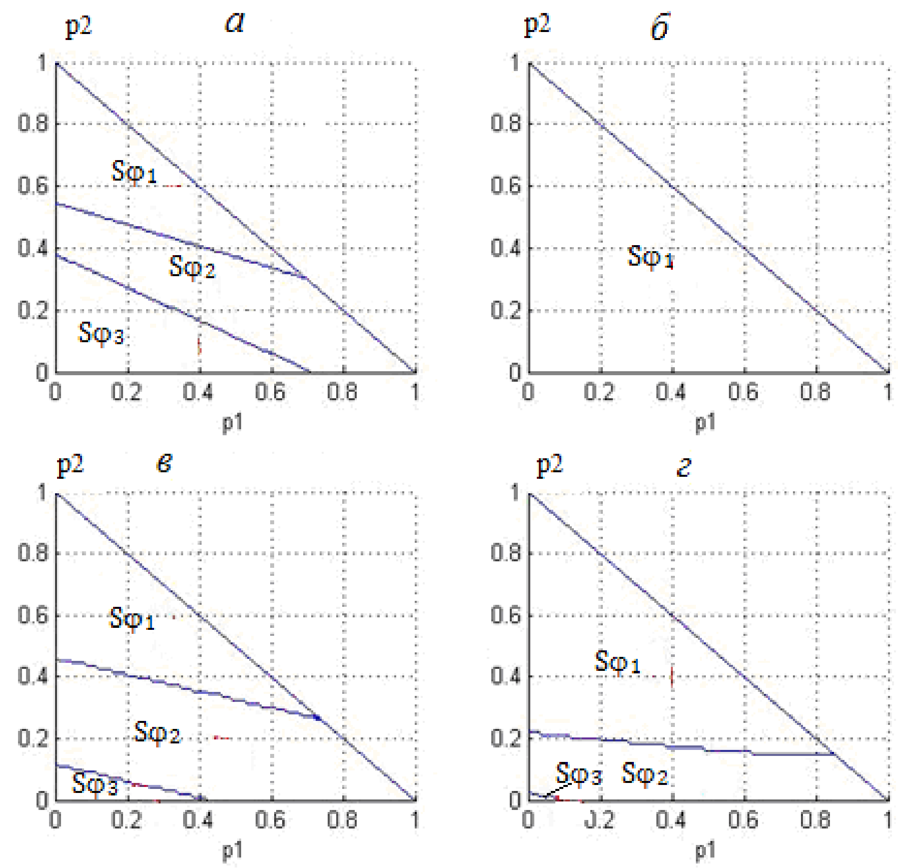


Рис. 6.4. Графічне подання множин рішень за комбінованим критерієм, отриманих за допомогою алгоритму А1.

6.5. Критерії прийняття рішень в умовах повної невизначеності

Розглянемо тепер критерії прийняття рішень, які застосовуються в інших інформаційних ситуаціях. Почнемо із ситуації I_4, характерної невідомим розподілом імовірності: $p = (p_1, p_2 \ldots p_n)$, $p_j = p(\theta = \theta_j)$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$, на множині станів середовища $\theta_1 \ldots \theta_n$ а також відсутністю активної протидії середовища цілям прийняття рішень. У певному сенсі, така ситуація відповідає моделі пасивної «поведінки» середовища в теорії статистичних рішень. Іншими словами, вона відображає повну відсутність в органа управління даних про поведінку середовища. У реальних умовах такі ситуації пов'язані із впровадженням у виробництво нового обладнання або при реалізації нових зразків товару, коли попит на продукцію повністю невідомий і т. д.

Розглянемо критерії прийняття рішень, які можуть бути застосовані в цій ситуації. Умовно їх можна поділити на дві групи: критерії інтегральних значень та оцінні критерії.

Охарактеризуємо різновиди інтегральних критеріїв.

Критерій максимальної міри байєсових множин. Маємо ситуацію прийняття рішень $\{\Phi, \Theta, F\}$. Позначимо через $S_{\varphi_1}, S_{\varphi_2}, \ldots S_{\varphi_m}$ байєсові множини рішень $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ відповідно, а через $\mu\left(S_{\varphi_1}\right), \mu\left(S_{\varphi_2}\right), \ldots \mu\left(S_{\varphi_m}\right)$ міри цих множин. Оскільки в ситуації I_4 розподіл імовірності невідомий, то доцільним у виборі рішення можна вважати принцип максимальної міри байєсових множин. Він відповідає припущенню, що істинним для середовища C із більшою ймовірністю буде апріорний розподіл з байєсової множини, яка має більшу міру.

Таким чином, оптимальним вважається рішення $\varphi_{k_0} \in \Phi$, яке задовольняє таку умову:

$$\mu\left(\varphi_{k_0}\right) = \max_{\varphi_k \in \Phi} \mu\left(\varphi_k\right). \tag{6.32}$$

Недоліком цього критерію є те, що оптимальне рішення φ_{k_0} не завжди може задовольняти бажану для органа прийняття рішень умову, тобто

$$\int_{S_{\varphi_0}} B^+\left(\varphi_0, p\right) dp \geq \int_{S_{\varphi_k}} B^+\left(\varphi_k, p\right) dp,$$

де величина $\int_{S_{\varphi_k}} B^+\left(\varphi_k, p\right) dp$ характеризує інтегральне байєсове значення оцінного функціонала.

Критерій максимального інтегрального байєсового значення оцінного функціонала

Інтегральним байєсовим значенням оцінного функціонала на рішенні φ_k називається величина $\int_{S_{\varphi_k}} B^+\left(\varphi_k, p\right) dp$.

Відповідно до названого критерію, оптимальним будемо вважати рішення φ_{k_0}, що задовольняє таку умову:

$$\int_{S_{\varphi_0}} B^+\left(\varphi_0, p\right) dp = \max_{\varphi_k \in \Phi} \int_{S_{\varphi_k}} B^+\left(\varphi_k, p\right) dp. \tag{6.33}$$

Недолік цього критерію полягає в тому, що оптимальне рішення φ_{k_0} не завжди може відповідати бажаній для органа прийняття рішень умові, а саме:

$$\mu\left(\varphi_{k_0}\right) \geq \mu\left(\varphi_k\right).$$

Критерій максимального інтегрального потенціалу. Недоліки описаних вище критеріїв можуть бути певної мірою нейтралізовані, якщо застосувати принцип вибору, в основі якого лежить поняття потенціалу рішення.

Інтегральним потенціалом рішення $\varphi_k \in \Phi$ будемо називати таку величину:

$$\pi_{\varphi_k} = \frac{\int\limits_{S_{\varphi_k}} B^+\left(\varphi_k, p\right)dp}{1-\mu\left(\varphi_k\right)/\mu\left(P_{n-1}\right)}. \tag{6.34}$$

Оптимальним стосовно критерію максимального потенціалу вважається рішення $\varphi_{k_0} \in \Phi$, яке задовольняє таку умову:

$$\pi_{\varphi_{k_0}} = \max_{\varphi_k \in \Phi} \pi_{\varphi_k}.$$

Описаний критерій можна вважати згорткою попередніх двох.

Розглянемо на прикладі застосування охарактеризованих вище критеріїв.

Приклад 6.7. Нехай ситуація прийняття рішень описується такою матрицею:

$$\begin{array}{cccc} & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \theta_1 & 10 & 2 & 5 \\ \theta_2 & -3 & 7 & 4 \end{array}$$

Відповідні даній ситуації множини Байєса було побудовано в п. 6.3.1 (див. приклад 6.3), а саме: $S_{\varphi_1} = \left[\frac{7}{12};1\right]$, $S_{\varphi_2} = \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $S_{\varphi_3} = \left[\frac{1}{2};\frac{7}{12}\right]$. Визначимо міри цих множин. Легко переконатися, що

$$\mu\left(S_{\varphi_1}\right) = \frac{5}{12};\ \mu\left(S_{\varphi_2}\right) = \frac{1}{2};\ \mu\left(S_{\varphi_3}\right) = \frac{1}{12}.$$

Як бачимо, за критерієм максимальної міри байєсових множин оптимальним буде рішення φ_2, бо саме йому відповідає множина найбільшої міри.

Тепер обчислимо інтегральні байєсові значення стосовно кожного з рішень. Як було встановлено вище (див. приклад 6.3), байєсові значення оцінного функціонала мають такий вигляд:

$$B^+\left(\varphi_1, p\right) = 13p-3,\ B^+\left(\varphi_2, p\right) = -5p+7,\ B^+\left(\varphi_3, p\right) = p+4,$$

тому

$$\int\limits_{S_{\varphi 1}} B^+(\varphi_1, p)\,dp = \int\limits_{\frac{7}{12}}^{1} (13p-3)\,dp = 13p^2 - 3p\Big|_{\frac{7}{12}}^{1} = 7{,}326,$$

$$\int\limits_{S_{\varphi 2}} B^+(\varphi_2, p)\,dp = \int\limits_{0}^{0{,}5} (-5p+7)\,dp = -5p^2 + 7p\Big|_{0}^{0{,}5} = 2{,}25,$$

$$\int\limits_{S_{\varphi 3}} B^+(\varphi_3, p)\,dp = \int\limits_{0{,}5}^{\frac{7}{12}} (p+4)\,dp = p^2 + 4p\Big|_{0{,}5}^{\frac{7}{12}} = 0{,}4236.$$

Як показують результати обчислень, оптимальним за критерієм максимізації інтегрального байєсового значення буде рішення φ_1.

Обчислимо тепер значення інтегрального потенціалу для кожного з рішень за формулою (6.34), а саме: $\pi_{\varphi_1} = 17{,}5824$, $\pi_{\varphi_2} = 4{,}5$, $\pi_{\varphi_3} = 0{,}4621$. Стосовно цього критерію оптимальним також буде рішення φ_1.

Критерій Бернуллі -- Лапласа

Застосування названого критерію в умовах повної невизначеності базується на принципі недостатньої підстави, його суть полягає в тому, що коли немає причини вважати який-небудь стан середовища ймовірнішим за інші, то апріорні ймовірності необхідно вважати рівними, тобто $\hat{p} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2 ... \hat{p}_n)$, $\hat{p}_j = \dfrac{1}{n}$, $j = 1, 2, \ldots n$, а після того, як їх буде визначено, рішення можна приймати за критеріями інформаційної ситуації I_1.

Критерій Бернуллі – Лапласа передбачає використання принципу недостатньої підстави та критерію Байєса, зокрема оптимальним за цим критерієм буде рішення φ_{k_0}, яке задовольняє таку умову:

$$B^+(\hat{p}, \varphi_{k_0}) = \max_{\varphi_k \in \Phi} B^+(\hat{p}, \varphi_k) = \max_{\varphi_k \in \Phi} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_{jk}.$$

Проаналізуємо отримане рішення на основі матриці оцінного функціонала. Очевидно, що рішення φ_k краще за рішення φ_i коли буде невід’ємною така різниця: $B^+(\hat{p}, \varphi_k) - B^+(\hat{p}, \varphi_i) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (f_{jk}^+ - f_{ji}^+)$. Тоді можна визначити необхідну й достатню умову того, що рішення φ_k буде оптимальним, а саме:

$$\min_{\substack{\varphi_i \in \Phi \\ i \neq k}} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (f_{jk}^+ - f_{ji}^+) \right\} \geq 0.$$

Докладнішу інформацію про дослідження цього критерію можна знайти в літературних джерелах [35].

Застосуємо на прикладі цей критерій.

П р и к л а д 6.7. Нехай ситуація прийняття рішень описується такою матрицею:

$$\begin{array}{cccc} & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \theta_1 & 1 & 4 & 2 \\ \theta_2 & 5 & 3 & 1 \\ \theta_3 & 2 & 3 & 5 \end{array}$$

Необхідно знайти оптимальне за критерієм Бернуллі – Лапласа рішення.

Розв'язування

Визначимо спочатку апріорний розподіл імовірності. Оскільки умови задачі передбачають три стани середовища, то $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$. Обчислимо тепер байєсові значення для кожного з рішень, а саме:

$$B^+(\varphi_k) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} f_{ik}^+ .$$

У числовому вираженні $B^+(\varphi_1) = \frac{7}{3}$, $B^+(\varphi_2) = \frac{10}{3}$, $B^+(\varphi_3) = \frac{8}{3}$.

Як бачимо, оптимальним є рішенням φ_2.

6.7. Критерії прийняття рішень в умовах антагоністичної поведінки середовища

Тепер розглянемо критерії прийняття рішень в умовах антагоністичної поведінки середовища (інформаційна ситуація I_5). Іншими словами, середовище активно протидіє цілям прийняття рішень, тобто з усіх своїх станів воно обирає саме ті, у яких оцінний функціонал набуває своїх найгірших значень. Ось чому в цій ситуації раціональним буде вибір рішення, яке дозволяє отримати гарантовані значення оцінного функціонала. Цього можна досягти, використовуючи критерії Вальда й Севіджа.

Критерій Вальда (***принцип максиміну***) застосовується, коли оцінний функціонал описує ефективність, вигоди, тобто він має додатний інгредієнт: $F = F^+$. При цьому раціональним вважається вибір рішення φ_{k_0}, яке задовольняє таку умову:

$$f_{k_0} = \max_{\varphi_k \in \Phi} \min_{\theta_j \subset \theta} f_{jk}^+ .$$

Інакше кажучи, обране рішення забезпечує максимальний виграш у найгіршій ситуації.

П р и к л а д 6.8. Ситуацію прийняття рішень задано такою матрицею:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\
\theta_1 & 2 & 1 & 7 & 8 \\
\theta_2 & 8 & 6 & 3 & 3 \\
\theta_3 & 2 & 10 & 4 & 0 \\
\theta_4 & 2 & 3 & 11 & 4 \\
\theta_5 & 16 & 4 & 7 & 10
\end{array}
$$

Необхідно знайти раціональне рішення, враховуючи антагоністичну поведінку середовища та необхідність набуття оцінним функціоналом максимального значення.

Розв'язування

Застосуємо критерій Вальда. Для цього визначимо найменший елемент у кожному стовпці, а потім серед них оберемо найбільший.

$$f_1 = \min_{\theta_j \subset \theta} f_{j1}^+ = \min\{2,8,2,2,16\} = 2,$$

$$f_2 = \min_{\theta_j \subset \theta} f_{j2}^+ = \min\{1,6,10,3,4\} = 1,$$

$$f_3 = \min_{\theta_j \subset \theta} f_{j3}^+ = \min\{7,3,4,11,7\} = 3,$$

$$f_4 = \min_{\theta_j \subset \theta} f_{j4}^+ = \min\{8,3,0,4,10\} = 0,$$

$$\max_{\varphi_k \in \Phi} \min_{\theta_j \subset \theta} f_{jk}^+ = \max\{2,1,3,0\} = 3.$$

Максимальне значення функціонала відповідає рішенню φ_3, тому його вибір можна вважати оптимальним.

До переваг критерію Вальда можна віднести той факт, що він «надзвичайно консервативний у ситуаціях, де консерватизм може мати місце» [35], а недоліком є те, що він виходить із припущення, що противник – досконалий майстер, який завжди знайде найкраще (для себе) рішення, а це не завжди відповідає дійсності.

Разом з тим, проти цього критерію можна висунути заперечення. Проілюструємо його на прикладі.

П р и к л а д 6.9. Візьмемо ситуацію прийняття рішень, яка описується поданою нижче матрицею.

$$F^+ = \begin{pmatrix} & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \theta_1 & 0 & 1 \\ \theta_2 & 100 & 1 \end{pmatrix}$$

Легко переконатися, що за критерієм Вальда оптимальним буде рішення φ_2, однак, середнє значення функціонала для рішення φ_1: $B^+\left(\varphi_1\right)=100\left(1-p\right)$, буде більшим за середнє значення на рішенні φ_2: $B^+\left(\varphi_2\right)=1-p$, для всіх апріорних розподілів ймовірності: $p_1=p$, $p_2=1-p$, коли $0\le p\le 1-10^{-2}$. Але незважаючи на це, вибір рішення φ_2 буде виправданим, якщо середовище виступає свідомим супротивником органу управління.

Усе сказане свідчить про те, що за певних умов для розв'язування задачі може бути доцільним введення додаткових обмежень, які, наприклад, базуються на критерії Бернуллі – Лапласа, тобто

$$f_{k_0}=\max_{\varphi_k\in\Phi}\min_{\theta_j\subset\theta} f_{jk}^+,$$

$$B^+(\frac{1}{n},\varphi_k)\ge B_0.$$

Критерій Савіджа (мінімаксного ризику) був запропонований у 1951 році і є одним із основних за частотою використання в теорії статистичних рішень. Він застосовується тоді, коли оцінний функціонал показує втрати або ризик, тобто $F=F^-$. При цьому оптимальним буде рішення φ_{k_0}, яке забезпечує виконання такої умови:

$$f_{k_0}=\min_{\varphi_k\in\Phi}\max_{\theta_j\subset\theta} f_{jk}^+.$$

При використанні цього критерію, як і в критерії Вальда, доцільним буде обмеження стосовно байєсового значення оцінного функціонала, а саме:

$$B^-(\frac{1}{n},\varphi_k)\le B_0.$$

Зауважимо, що критерій Савіджа дозволяє «пом'якшити» консерватизм мінімаксного критерію шляхом заміни матриці виграшів на матрицю втрат, яку визначають таким чином:

$$a^-\left(\theta_j,\varphi_k\right)=\max_{\varphi_k}\left\{a^+\left(\theta_j,\varphi_k\right)\right\}-a^+\left(\theta_j,\varphi_k\right),\ \theta_j\in\Theta,\ \varphi_k\in\Phi.$$

Візьмемо, приміром, матрицю виграшів з прикладу 6.9, а саме:

$$F^+=\begin{pmatrix} & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \theta_1 & 0 & 1 \\ \theta_2 & 100 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оптимальним за мінімаксним критерієм буде рішення φ_2 із гарантованим виграшем в одиницю. Подивимось, яким буде результат, коли замінити цю матрицю матрицею втрат. Згідно з поданим вище перетворенням, матриця набуває такого вигляду:

$$F^{-} = \begin{pmatrix} & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \theta_1 & 1 & 0 \\ \theta_1 & 0 & 99 \end{pmatrix},$$

і, відповідно до критерію Савіджа, раціональним буде вибір рішення φ_1.

Головне заперечення проти цього критерію такі: коли рішення $\varphi_{k_0} \in \Phi$ оптимальне за критерієм Савіджа і ми видалимо з множини рішень Φ неоптимальне рішення $\varphi_k \neq \varphi_{k_0}$, то на новій множині $\Phi \setminus \varphi_k$ рішення φ_{k_0} може вже й не бути оптимальним.

6.8. Критерії прийняття рішень в умовах часткової невизначеності

Інформаційна ситуація I_6 характеризується наявністю факторів, що зумовлюють два типи поведінки середовища.

Перший характеризується наявністю в органу управління деякої інформації про справжній розподіл імовірності на множині станів середовища, і хоча її недостатньо для точного визначення інформаційної ситуації, існує можливість встановити певний ступінь оптимізму-песимізму щодо поведінки середовища.

Другий тип припускає, що орган управління володіє інформацією про стани середовища , яка є проміжною між інформаційними ситуаціями I_1 та I_5, іншими словами, має місце повне або часткове знання про розподіл імовірності на множині станів середовища і про його антагоністичну поведінку.

Розглянемо критерії, які можуть бути корисними в таких ситуаціях.

Критерій Гурвіца. Побудований на основі бажання органу управління врахувати не тільки найгіршу щодо нього ситуацію (як критерії Вальда і Савіджа), а й найкращу також, тому він являє собою зважену комбінацію максимаксного і максимінного критеріїв.

Сутність критерію Гурвіца полягає у відшукуванні оптимального рішення φ_{k_0}, яке задовольняє таку умову:

$$\lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f^{+}_{jk_0} + (1-\lambda) \max_{\theta_j \in \Theta} f^{+}_{jk_0} = \max_{\varphi_k \in \Phi} \{ \lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f_{ik} + (1-\lambda) \max_{\theta_j \in \Theta} f_{jk} \}, 0 \le \lambda \le 1.$$

Коли $\lambda = 1$, то критерій Гурвіца збігається із критерієм Вальда, а коли $\lambda = 0$ – із максимаксним критерієм, який відповідає умовам найбільш сприятливого стану середовища. Реальний стан середовища перебуває десь між цими крайніми випадками і характеризується величиною $\lambda \in [0;1]$.

Разом із описаним критерієм можливе також застосування модифікованого критерію Гурвіца, коли кожному рішенню $\varphi_k \in \Phi$ відповідає своє значення коефіцієнта $\lambda_k \in [0;1]$, зокрема, оптимальним вважається рішення φ_{k_0}, яке задовольняє таку умову:

$$\lambda_{k_0} \min_{\theta_j \in \Theta} f^+_{jk_0} + (1-\lambda_{k_0}) \max_{\theta_j \in \Theta} f^+_{jk_0} = \max_{\varphi_k \in \Phi} \{\lambda_k \min_{\theta_j \in \Theta} f_{ik} + (1-\lambda_k) \max_{\theta_j \in \Theta} f_{jk}\},$$

$$0 \le \lambda_k \le 1, \quad k = 1, 2, \ldots m.$$

Зупинимось на практичному застосуванні цього критерію.

Приклад 6.10. Нехай ситуацію прийняття рішень описано такою матрицею:

F^+	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
θ_2	1	3	0	2	7
θ_3	3	1	10	8	1
θ_4	5	5	4	5	6
θ_5	3	7	3	6	2
θ_6	8	2	5	4	8

При цьому рівень оптимізму-песимізму ОПР $\lambda = 0,7$.

Оберемо оптимальне за критерієм Гурвіца рішення. Для цього спочатку обчислимо значення показника Гурвіца стосовно кожного з рішень за такою формулою:

$$f_{\lambda k} = \lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f_{ik} + (1-\lambda) \max_{\theta_j \in \Theta} f_{jk}.$$

Для зручності запишемо результати обчислення у вигляді такої таблиці:

F^+	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
θ_2	1	3	0	2	7
θ_3	3	1	10	8	1
θ_4	5	5	4	5	6
θ_5	3	7	3	6	2
θ_6	8	2	5	4	8
$\min_{\theta_j \in \Theta} f_{jk}$	1	1	0	2	1
$\max_{\theta_j \in \Theta} f_{jk}$	8	7	10	8	8
$f_{\lambda k}$	3,1	2,8	3	3,8	3,1

Як бачимо, максимальне значення показника Гурвіца відповідає рішенню φ_4, тому його вибір за даних умов можна вважати оптимальним.

Розглянемо на прикладі можливе заперечення щодо критерію Гурвіца. Припустимо, що ситуація прийняття рішень описана такою матрицею:

$$F^+ = \begin{pmatrix} & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \theta_1 & 0 & 1 \\ \theta_2 & 1 & 0 \\ \theta_3 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{100} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

За критерієм Гурвіца обидва рішення мають однакові оцінки, а значить вони оптимальні, але з огляду на матрицю оцінного функціонала, рішення φ_1 є значно кращим за φ_2. Врахувати цей факт можна, увівши для кожного рішення $\varphi_k \in \Phi$, яке досліджується на оптимальність за критерієм Гурвіца, обмеження такого вигляду:

$$B^+\left(\frac{1}{n}, \varphi_k\right) \geq B_0^+,$$

тут B_0^+ – задане значення.

Розглянемо тепер питання про вибір значення коефіцієнта $\lambda \in [0;1]$. Очевидно, що воно відповідає певному ступеню оптимізму-песимізму ОПР. Чим більшу впевненість відчуває ОПР стосовно одного з граничних випадків поведінки середовища, тим ближче до 0 або 1 буде значення λ. Значення $\lambda = \frac{1}{2}$, будучи рівноважною точкою проміжку $[0;1]$, свідчить про те, що ОПР вважає середовище однаковою мірою і антагоністичним, і таким, що буде максимально сприяти цілям прийняття рішень. У загальному випадку оптимальне рішення за критерієм Гурвіца являє собою функцію від λ. Проілюструємо на прикладі цей факт.

П р и к л а д 6.11. Припустимо, що ситуація прийняття рішень описується такою матрицею:

$$\begin{array}{ccccc} & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \Theta_1 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ \Theta_2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ \Theta_3 & 4 & 2 & 3 & 6 \\ \Theta_4 & 0 & 4 & 3 & 1 \end{array}.$$

Обчислимо значення критерію Гурвіца $f_{\lambda k}$ для кожного рішення $\varphi_k \in \Phi$ за такою формулою:

$$f_{\lambda k} = \lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f_{jk} + (1-\lambda) \max_{\theta_j \in \Theta} f_{jk}.$$

Зокрема

$$f_{\lambda 1} = \lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f_{j1} + (1-\lambda) \max_{\theta_j \in \Theta} f_{j1} = \lambda \cdot 0 + 4(1-\lambda) = 4 - 4\lambda;$$

$$f_{\lambda 2} = \lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f_{j2} + (1-\lambda) \max_{\theta_j \in \Theta} f_{j2} = 2\lambda + 5(1-\lambda) = 5 - 3\lambda;$$

$$f_{\lambda 3} = \lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f_{j3} + (1-\lambda) \max_{\theta_j \in \Theta} f_{j3} = 2\lambda + 3(1-\lambda) = 3 - \lambda;$$

$$f_{\lambda 4} = \lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f_{j4} + (1-\lambda) \max_{\theta_j \in \Theta} f_{j4} = 0 \cdot \lambda + 6(1-\lambda) = 6 - 6\lambda.$$

Побудуємо графіки отриманих залежностей (див. рис. 6.4).

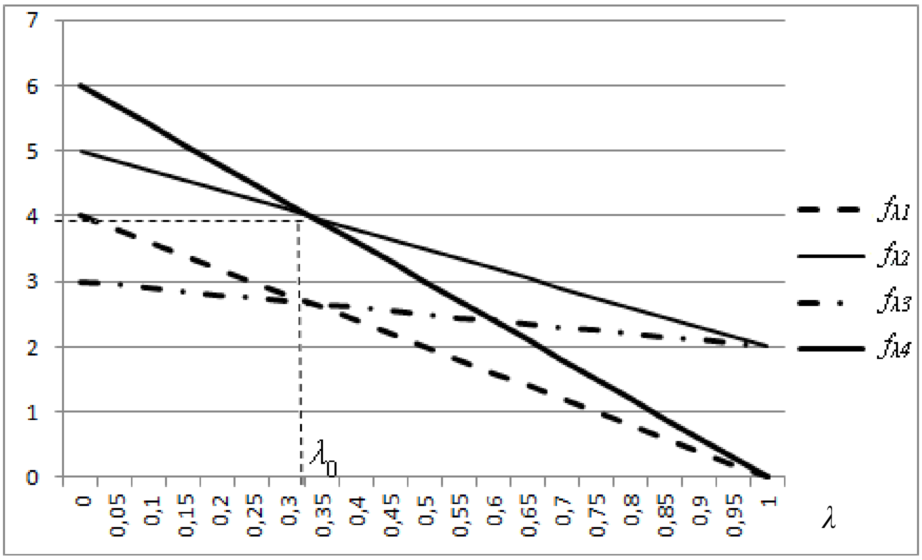


Рис. 6.4. Крива й множини Гурвіца до прикладу 6.10

Очевидно, що оптимальними з огляду на різні значення показника λ будуть рішення φ_2 та φ_4, а φ_1 та φ_3 неоптимальні за жодних значень. Таким чином, множину $[0;1]$ розбито на дві підмножини: Δ_{φ_2} та Δ_{φ_4}, причому $\Delta_{\varphi_2} = [0;\lambda_0]$, $\Delta_{\varphi_4} = [\lambda_0;1]$.

Знайдемо ці множини. Для цього обчислимо значення параметра λ_0 як точки перетину прямих $f_{\lambda 2}$ і $f_{\lambda 4}$, а саме: $\lambda_0 = \dfrac{1}{3}$. Таким чином, $\Delta_{\varphi_2} = \left[0;\dfrac{1}{3}\right]$, $\Delta_{\varphi_4} = \left[\dfrac{1}{3};1\right]$. Коли $\lambda \in \Delta_{\varphi_2} = \left[0;\dfrac{1}{3}\right]$, то оптимальним за критерієм Гурвіца буде рішення φ_2, а коли $\lambda \in \Delta_{\varphi_4} = \left[\dfrac{1}{3};1\right]$, оптимальним буде рішення φ_4.

Отже, можна сформулювати подані далі визначення.

Множиною Гурвіца назвемо множину Δ_{φ_k}, яка задовольняє таку умову:

$$\Delta_{\varphi_k} = \left\{ \lambda \in [0;1] \,\middle|\, f_{\lambda k} = \max_{\varphi_i \in \Phi} f_{\lambda i} \right\}, \ \varphi_k \in \Phi,$$

причому

$$\bigcup_{\varphi_k \in \Phi} \Delta_{\varphi_k} = [0;1], \quad \Delta_{\varphi_k} \cap \Delta_{\varphi_i} = \varnothing, \text{ коли } \varphi_i \neq \varphi_k.$$

Кривою Гурвіца будемо називати ламану $\Gamma^{+}(\lambda)$, визначену в такий спосіб:

$$\Gamma^{+}(\lambda) = \left\{ f_{\lambda k}, \text{коли } \lambda \in \Delta_{\varphi_k}, k = 1, 2, \ldots m \right\}$$

Вочевидь, крива й множини Гурвіца аналогічні кривій і множинам Байєса, тому, базуючись на них, ми можемо сформулювати критерії максимальної міри множин Гурвіца, максимального інтегрального значення показника Гурвіца а також максимуму інтегрального потенціалу.

Критерій Ходжеса – Лемана. У цьому критерії враховано припущення, за яким у реальних задачах прийняття рішень дійсні відомості про ситуацію часто перебувають між повним незнанням і наявністю точних даних стосовно апріорного розподілу ймовірності. Наприклад, апріорний розподіл може здаватися досить достовірним, але все ж таки недостатньо надійним для того, щоб базувати на ньому свої рішення.

Застосування критерію Ходжеса – Лемана дозволяє врахувати інформацію, якою володіє ОПР, і при цьому забезпечити деякий рівень гарантії на випадок, коли вона не точна. У певному сенсі цей критерій являє собою «суміш» критеріїв Байєса і Вальда.

Розглянемо ситуацію прийняття рішень $\{\Phi, \Theta, F\}$, коли оцінний функціонал задано у вигляді ризиків. Рішення φ_{k_0} назвемо *обмеженим байєсовим рішенням* відносно даного апріорного розподілу $p \in \Delta_n$, якщо $B^{-}(\varphi_{k_0}, p) = \min_{\varphi_k \in \Phi} B^{-}(\varphi_k, p)$ і крім того має місце така нерівність: $f^{-}_{jk_0} \leq f_0$, де f_0 – задане порогове значення функціонала.

Обмежене байєсове рішення можна також визначити такою умовою:

$$\min_{\varphi_k \in \Phi} \left\{ \lambda B^{-}(\varphi_k, p) + (1 - \lambda) \max_{\theta_j \in \Theta} f^{-}_{jk} \right\},$$

де стала $\lambda \in [0; 1]$ і відображає ступінь довіри до інформації, яку має ОПР.

Обирати оптимальне рішення за критерієм Ходжеса – Лемана зручно скориставшись таким алгоритмом:

1. Визначаємо мінімаксний ризик, тобто $f = \min_{\varphi_k \in \Phi} \max_{\theta_j \in \Theta} f_{jk}^{-}$.

2. Враховуючи обчислене значення ризику f і умови прийняття рішення, обираємо величину максимально допустимого ризику f_0, причому $f_0 \geq f$;

3. Вибираємо рішення φ_{k_0}, яке є найкращим за критерієм Байеса для припустимого значення апріорного розподілу $p_0 \in \Delta_n$, коли виконується така умова: $f_0 \geq \max_{\theta_j \in \Theta} f_{jk}$.

Тепер застосуємо розглянутий критерій на прикладі.

Приклад 6.11. Нехай ситуація прийняття рішень задана такою матрицею:

F^+	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
θ_2	4	3	0	2	7
θ_3	3	5	10	8	3
θ_4	5	5	4	5	6
θ_5	3	7	3	6	4
θ_6	8	6	5	4	8

Апріорний розподіл імовірності оцінено таким чином: $p_0 = (0,1; 0,3; 0,2; 0,1; 0,3)$.

Визначимо, яке рішення буде оптимальним за критерієм Ходжеса – Лемана.

Із цією метою запишемо матрицю оцінного функціонала у вигляді ризиків або втрат, для чого спочатку знайдемо максимальне значення оцінного функціонала, тобто $f_{\max} = \max_{\varphi_k \in \Phi} \max_{\theta_j \in \Theta} f_{jk}^{+} = 10$. Тепер втрати можна оцінити таким чином: $f_{jk}^{-} = f_{\max} - f_{jk}^{+}$. В результаті матриця оцінного функціонала набуває такого вигляду:

F^-	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
θ_2	6	7	10	8	3
θ_3	7	5	0	2	7
θ_4	5	5	6	5	4
θ_5	7	3	7	4	6
θ_6	2	4	5	6	2

Далі виконаємо розрахунки за поданим вище алгоритмом.

1. Обчислимо мінімаксний ризик, тобто $f = \min_{\varphi_k \in \Phi} \max_{\theta_j \in \Theta} f_{jk}^{-} = 7$.

2. Оберемо мінімально допустимий ризик, а саме: $f_0 = 8 \geq f = 7$.

3. Обчислимо байєсові значення $B^{-}(\varphi_k, p_0)$, для тих рішень φ_k, котрі задовольняють таку умову: $f_0 \geq \max_{\theta_j \in \Theta} f_{jk}$. У цій задачі це будуть рішення φ_1, φ_2, φ_5. Таким чином, $B^{-}(\varphi_1, p_0) = 5$, $B^{-}(\varphi_2, p_0) = 4{,}7$, $B^{-}(\varphi_5, p_0) = 4{,}4$. Найменше значення критерію Байєса відповідає рішенню φ_1, тому його вибір можна вважати оптимальним.

Контрольні питання

1. Що являє собою інформаційна ситуація як основа прийняття рішень.
2. Дайте визначення критерію прийняття рішень.
3. Які елементи описують ситуацію прийняття рішень?
4. У чому полягає відмінність оцінних функціоналів із додатним та від'ємним інгредієнтом?
5. Назвіть етапи процесу прийняття рішень.
6. Які характерні риси властиві ситуації прийняття рішень в умовах ризику?
7. Охарактеризуйте критерії, які застосовують в умовах ризику.
8. Коли доцільно застосовувати критерій Байєса?
9. За яких умов належить приймати рішення на основі критерію мінімуму дисперсії? Які особливості його застосування.
10. У яких ситуаціях застосовують модальний критерій?
11. Дайте визначення байєсової множини.
12. Які властивості мають байєсові множини?
13. Із якою метою використовують байєсові множини?
14. Які методи побудови байєсових множин ви знаєте?
15. У чому полягає геометричний метод побудови байєсових множин? Коли його можна застосовувати?
16. Як можна визначити суть функціонального методу побудови байєсових множин? Коли його можна застосовувати?
17. Сформулюйте алгоритм методу варіації контрольної точки для побудови байєсових множин?
18. Які критерії можна застосовувати в умовах повного незнання про ситуацію прийняття рішень?
19. У чому полягає сенс критерію Бернуллі – Лапласа?
20. Опишіть інтегральні критерії прийняття рішень (максимальної міри байєсових множин, інтегрального байєсового значення оцінного функціонала, інтегрального потенціалу)
21. Які критерії доцільно використовувати в умовах антагоністичної поведінки середовища?
22. Які недоліки й переваги мають критерії Севіджа й Вальда.
23. У якій ситуації доцільно застосовувати критерії Гурвіца й Ходжеса – Лемана? Розкрийте зміст кожного з цих критеріїв.

Завдання до розділу 6

Завдання А

1. Знайти оптимальні рішення в умовах ризику за допомогою критеріїв першої інформаційної ситуації, коли ситуація прийняття рішень описується таким чином:

а)

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,1	θ_1	1	5	3	0
0,3	θ_2	2	2	2	4
0,5	θ_3	4	2	3	6
0,1	θ_4	0	4	3	1

б)

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,2	θ_1	1	5	3	4
0,3	θ_2	3	2	2	4
0,4	θ_3	4	3	3	0
0,1	θ_4	1	4	3	1

в)

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,1	θ_1	5	4	0	0
0,5	θ_2	1	3	7	4
0,3	θ_3	0	5	2	6
0,1	θ_4	0	2	3	4

г)

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,1	θ_1	2	3	0	1
0,3	θ_2	3	2	2	4
0,3	θ_3	2	2	4	6
0,3	θ_4	2	4	3	1

д)

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,4	θ_1	2	5	3	1
0,3	θ_2	1	3	2	4
0,2	θ_3	4	2	3	5
0,1	θ_4	5	0	3	2

е)

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,1	θ_1	2	5	3	0
0,3	θ_2	5	0	2	4
0,5	θ_3	4	2	3	6
0,1	θ_4	7	4	3	3

2. Побудувати множини Байєса геометричним методом, якщо ситуація прийняття рішень задана однією з таких матриць:

а)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
θ_1	1	5	2	5
θ_2	4	0	3	2

б)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
θ_1	1	5	2	5
θ_2	4	0	3	2

в)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
θ_1	2	5	2	4
θ_2	2	3	7	2

г)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
θ_1	0	5	2	6
θ_2	4	3	3	2

3. Побудувати множини Байєса геометричним методом і методом контрольної точки, якщо ситуація прийняття рішень задана однією з таких матриць:

а)

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,1	θ_1	1	5	7
0,4	θ_2	7	2	1
0,5	θ_3	4	1	3

б)

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,4	θ_1	12	4	5
0,3	θ_2	10	6	12
0,3	θ_3	7	10	7

в)

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,2	θ_1	1	0	3
0,5	θ_2	1	4	1
0,3	θ_3	5	1	1

г)

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,2	θ_1	11	15	20
0,5	θ_2	17	3	14
0,3	θ_3	11	5	7

д)

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,4	θ_1	3	1	3
0,2	θ_2	2	2	2
0,4	θ_3	1	4	5

е)

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,1	θ_1	2	0	1
0,1	θ_2	1	2	3
0,8	θ_3	1	4	0

4. Обрати оптимальне рішення, використовуючи критерії максимальної міри байєсових множин, максимального інтегрального байєсового значення і максимуму інтегрального потенціалу для ситуації прийняття рішень із завдання 2.

5. Знайти оптимальне рішення за допомогою критерію Бернуллі – Лапласа, коли ситуація прийняття рішень задана таким чином:

а)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
θ_1	2	5	0	0
θ_2	2	2	2	4
θ_3	2	0	3	6
θ_4	2	4	3	1

б)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
θ_1	1	7	3	0
θ_2	2	2	5	4
θ_3	4	0	3	6
θ_4	1	4	3	1

6. Прийняти оптимальне рішення за допомогою критерію Гурвіца в таких умовах:

а)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
θ_1	1	2	3	0
θ_2	5	2	2	4
θ_3	4	4	3	6
θ_4	0	4	3	1

$\lambda = 0{,}7$

б)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
θ_1	1	5	3	2
θ_2	1	3	2	4
θ_3	4	2	4	6
θ_4	7	4	3	1

$\lambda = 0{,}5$

7. Побудувати множини Гурвіца для ситуації прийняття рішень із завдання 6.

8. Знайти оптимальне рішення за допомогою критерію Ходжеса – Лемана, в умовах такої ситуації прийняття рішень:

а)

p_0	F^+	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,1	θ_1	1	5	3	2
0,3	θ_2	2	6	2	4
0,5	θ_3	4	2	2	6
0,1	θ_4	1	4	3	1

б)

p_0	F^-	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,35	θ_1	1	5	3	0
0,15	θ_2	3	2	3	4
0,4	θ_3	4	2	3	6
0,1	θ_4	0	4	3	1

Завдання В

Подати описані нижче задачі у вигляді математичної моделі ситуації прийняття рішень та розв’язати їх.

1. Туристична агенція має у своєму розпорядженні 10 автомобілів для перевезення клієнтів і планує свою роботу на наступний рік. Вона може залишити кількість автомобілів незмінною, взяти додаткову кількість автомобілів в оренду або здати кілька з них в оренду. Вартість утримання кожного автомобіля, прибуток який він приносить, працюючи із повним завантаженням, витрати на оренду додаткових автомобілів і прибуток від здачі автомобіля в оренду (в умовних одиницях) наведено в табл. 6.3. Фактична потреба в автомобілях є величиною випадковою і залежить від багатьох невідомих чинників. Можливі стани середовища описуються таким чином:

– очікується незначне збільшення кількості туристів;
– кількість туристів значно збільшиться;
– кількість клієнтів буде сталою;
– кількість клієнтів зменшиться несуттєво;
– клієнтів майже не буде.

Таблиця 6.3

Вартість утримання одного автомобіля	5
Прибуток від роботи одного автомобіля	15
Витрати на оренду одного автомобіля	5
Прибуток від здачі автомобіля в оренду	5

2. За даними статистичних спостережень отримано дані про залежність відносної врожайності сільгоспкультур від початкової вологості грунту та обраної програми зрошення, які зведено в табл. 6.4. Сільськогосподарському підприємству необхідно зробити вибір програми зрошень, якщо ймовірності значень показника вологості відомі.

Таблиця 6.4

Вологість грунту, %	Програма зрошення				Імовірність значень показника вологості
	П1	П2	П3	П4	
10	0,13	0,40	1,00	1,00	0,03
20	0,28	0,40	1,00	0,98	0,08
30	0,37	0,53	1,00	0,96	0,1
40	0,60	0,61	0,96	0,90	0,12
50	0,58	0,74	0,94	0,86	0,18
60	0,62	0,86	0,88	0,75	0,14
70	0,76	1,00	0,61	0,50	0,1
80	0,86	1,00	0,53	0,40	0,12
90	0,90	1,00	0,40	0,32	0,08
100	0,99	0,72	0,40	0,28	0,05

3. Ігор – завзятий футбольний вболівальник, він періодично грає на тоталізаторі, роблячи ставки на результати матчу. Зараз йому треба прийняти рішення стосовно того, яку суму грошей із можливих варіантів: $\Phi = \{100, 200, 300, 400\}$, потрібно поставити на результат футбольного матчу беручи до уваги п’ять можливих сценаріїв його завершення:

Q_1– перемога із імовірністю 0,3;

Q_2– поразка з імовірністю 0,2;

Q_3 – перемога протягом додаткового часу – 0,1;

Q_4 – перемога за результатами пробиття пенальті – 0,1;

Q_5 – нічия з імовірністю 0,3.

Опишіть ситуацію прийняття рішень і порекомендуйте Ігорю стратегію поведінки, виходячи з таких припущень про його міркування:

а) упевнений у своїй оцінці результатів матчу;

б) не впевнений у своїй оцінці результатів матчу;

в) не хоче ризикувати;

г) зацікавлений у найбільшому виграші.

4. Охоронець правопорядку помітив двох підозрілих молодиків, які нахабно поводяться в людному місті, привертаючи до себе увагу, але не вчиняють при цьому протиправних дій. Його посадовою інструкцією передбачено таку множину альтернативних дій в описаній ситуації:

φ_1 – не очікуючи допомоги, припинити дії потенційних правопорушників;

φ_2 – викликати допомогу і, дочекавшись її, нейтралізувати потенційних правопорушників;

φ_3 – дочекатися скоєння молодиками протиправної дії, аби мати всі підстави застосувати до них силу;

φ_4 – зробити молодикам зауваження;

φ_5 – не звертати на цих осіб увагу.

Множина можливих станів середовища оцінюється таким чином:

θ_1 – молоді люди ні в чому не винні, просто в гарному настрої й відпочивають;

θ_2 – молоді люди – це погано контрольовані потенційні злочинці, що нахабнішають, коли не відчувають супротиву;

θ_3– молоді люди є провокаторами, їх мета – заволодіти табельною зброєю правоохоронця;

θ_4 – молоді люди – перевдягнені контролери із служби внутрішніх розслідувань.

Ситуація прийняття рішень має враховувати як власну потенційну небезпеку правоохоронця, так і небезпеку ситуації та її наслідків для громадян, спокій яких – мета його діяльності.

Опишіть ситуацію прийняття рішень і порекомендуйте правоохоронцю стратегію поведінки, виходячи з різних припущень.

5. В очікуванні посівного сезону фермер має обрати одну з таких альтернатив своєї діяльності:

φ_1 – вирощувати кукурудзу;

φ_2 – вирощувати пшеницю;

φ_3 – вирощувати боби;

φ_4 – використовувати землю під випас худоби.

Величина грошових витрат, пов'язаних з цими можливостями (див. табл. 6.5) залежить від кількості опадів, які умовно можна поділити на такі чотири категорії:

θ_1 – сильні опади;

θ_2 – помірні опади;

θ_3 – незначні опади;

θ_4 – посушлива погода.

Таблиця 6.5

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
θ_1	–20	40	–50	12
θ_2	60	50	100	15
θ_3	30	35	45	15
Θ_4	–5	0	–10	10

Дайте пораду фермеру у виборі рішення за таких умов:

а) відомі ймовірності кількості опадів, а саме: p = (0,3; 0,4; 0,2; 0,1).

б) фермер вважає, що йому постійно не щастить;

в) фермер не довіряє прогнозу погоди;

г) фермер вважає прогноз погоди досить точним, але хоче забезпечити собі певні гарантії успішної діяльності на випадок, коли прогноз не справдиться.

6. Фірма планує виробництво нової продукції. Фахівці дослідницького відділу впевнені в тому, що нова продукція буде мати великий попит, а тому наполягають на її негайному впровадженні у виробництво без проведення рекламної кампанії на ринках збуту. Відділ маркетингу оцінює стан речей по-іншому і пропонує провести інтенсивну рекламну кампанію, яка буде коштувати фірмі 100 000 грн, а в разі успіху принесе 950 000 грн прибутку. У разі провалу рекламної кампанії річний прибуток оцінюється лише в 200 000 грн. Якщо рекламну кампанію зовсім не проводити, то очікуваний прибуток оцінюється в 400 000 грн, коли нова продукція сподобається споживачам і в 200 000, коли вони залишаться байдужими до нової продукції. Дайте рекомендації директорові фірми у виборі рішення з огляду на такі умови:

а) очікується, що рекламна кампанія з імовірністю 0,8 буде успішною;

б) реакцію покупців на нову продукцію неможливо спрогнозувати, оскільки подібних товарів на ринку ще не було;

в) директор більше довіряє відділу маркетингу;

г) директор вважає прогноз досить точним, але прагне забезпечити собі певні гарантії успішної діяльності фірми.

Завдання С

1. Сформулювати задачу, яка моделюється першою інформаційною ситуацією. При цьому необхідно визначити:

– множину станів середовища;

– множину можливих рішень органу управління;

– функціонал, за яким можна оцінити якість рішення у певній ситуації;

– апріорні ймовірності на множині станів середовища.

Складену задачу подати за допомогою математичної моделі ситуації прийняття рішень та розв’язати її.

2. Виконати завдання 1 з урахуванням антагоністичної поведінки середовища, його часткової або повної невизначеності.

Список літератури

1. Акоф Р. Основы исследования операций [Текст] / Р. Акоф, М. Сасиени. – М. : Мир, 1971. – 534 с.

2. Волошин О.Ф. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посіб. для студ. вищих навч. закл. [Текст] / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко; М-во освіти і науки України, Київськ. нац. ун-т. – 2-ге вид., перероб. та допов. – К. : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. – 336 с.

3. Галушко О.С. Вибір ефективних напрямів розвитку промислового підприємства в умовах глобалізації на основі економіко-математичного моделювання. / О.С. Галушко, Ю.В. Никифорова, Л.С. Коряшкіна // Економічний вісник НГУ. – 2012. – № 3. – С. 103 – 115.

4. Грешилов А. А. Как принять наилучшее решение в реальных условиях? /А. А. Грешилов. – М. : Радио и связь, 1991. – 317 с.

5. Дороднов А. А. Теория принятия решений: учеб. пособие / А. А. Дороднов. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1981. – 112 с.

6. Зайченко Ю. П. Исследование операций [Текст] / Ю. П. Зайченко. – К. : Вища шк., 1988. – 552 с.

7. Зайченко Ю. П. Исследование операций [Текст]: сб. задач / Ю. П. Зайченко, С. А. Шумилова. – К. : Вища шк., 1984. – 220 с.

8. Зборовская О.М. Моделирование зависимости величины оборотного капитала от некоторых микроэкономических факторов / О.М. Зборовская, Л.С. Коряшкина // Питання прикладної математики і математичного моделювання. Зб. наук. праць / Дніпропетр. нац. ун-т. – Д., 2006. – С. 62 – 69.

9. Исследование операций. Т. 1. Методологические основы и математические методы [Текст]: пер. с англ. / под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М. : Мир, 1981. – 712 с.

10. Исследование операций. Т. 2. Модели и применения [Текст]: пер. с англ. / под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М. : Мир, 1981. – 677 с.

11. Іщенко К.С. Оптимізація параметрів врубу для ефективного руйнування напруженого середовища вибухом / К.С. Іщенко, С.А. Ус, М.М. Вдовиченко // Геотехнічна механіка : Міжвід. зб. наук. праць / Ін-т геотехн. мех. ім. М.С. Полякова НАН України. – Д., 2010. – Вип. 90. – С. 25 – 34.

12. Іщенко К.С. Вибір та обгрунтування оптимального складу суміші для закладання виробленого простору в умовах Смолінської шахти ДП «Схід ГЗК» / К.С. Іщенко, С.А. Ус, А.О. Корела // Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць /Ін-т геотех. мех. ім. М.С. Полякова НАН України. – Д., 2010. – Вип. 90. – С. 66 – 70.

13. Катренко А.В. Теорія прийняття рішень [Текст] / А.В. Катренко, В.А. Пасічник, В.П. Пасько – Л. : Новий світ – 2000, 2009. – 396 с.

14. Кини Р. Принятие решений при многих критериях, предпочтениях и замещениях: пер. с англ. / Р. Кини, Х. Райфа. – М. : Радио и связь, 1981. – 560 с.

15. Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: монография / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К. : Наук. думка, 2005. – 564 с.

16. Кисельова О.М., Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з курсу «Математичне моделювання економічних процесів». / О.М. Кисельова, Л.С. Коряшкіна; М-во освіти і науки України, Дніпропетр. нац. ун-т. – Д. : ДНУ, 2008. – 48 с.

17. Коряшкина Л.С. Особенности применения метода роя частиц для решения задач условной оптимизации / Л.С. Коряшкина, К.А. Кузнецов, Н.О. Лаухин // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. праць / Дніпропетр. нац. ун-т. – Д., 2007. – С. 171 – 179.

18. Коряшкіна Л.С., Системний аналіз та оптимізація витрат оборотного лому [брухту] при виробництві сталі. / Л.С. Коряшкіна, О.О. Сазонова // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. праць / Дніпропетр. нац. ун-т. – Д., 2012. – С. 188 – 196.

19. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М. : Радио и связь, 1982. – 432 с.

20. Математический аппарат экономического моделирования / под ред. Е. Г. Гольштейна. – М. : Наука, 1983. – 368 с.

21. Математические модели и методы в планировании и управлении горным призводством / А. Г. Протосеня, С. А. Кулиш, А. Е. Азбель и др. – М. : Недра, 1985. – 288 с.

22. Михалевич В. С. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем / В. С. Михалевич, В. Л. Волкович. – М. : Наука, 1982. – 286 с.

23. Моделирование и управление горнорудными предприятиями / С. Л. Каграманян, А. С. Давидкович, В. А. Малышев и др. – М. : Недра, 1989. – 360 с.

24. Модели и алгоритмы управления процессами добычи и обогащения полезных ископаемых. // Труды Свердловского горного института. – Свердловск : Изд-во УПИ, 1976. – Вып. 133. – 101 с.

25. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / под ред. Д. А. Поспелова. – М. : Наука, 1986. – 312 с.

26. Нейман Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. Нейман, О. Моргенштейн. – М. : Наука, 1970. – 707 с.

27. Орловский С. А., Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации [Текст] / С. А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 206 с.

28. Подиновский В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач [Текст] / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М. : Наука, 1982. – 254 с.

29. Резниченко С. С. Математические методы и моделирование в горной промышленности / С. С. Резниченко, А. А. Ашихмин; – М. : Изд-во МГУ, 1997. – 404 с.

30. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. / Т. Саати. – М. : Радио и связь, 1993. – 278 с.

31. Складання списку літератури в навчальних виданнях: посіб. для наук.-пед. працівників / В.О. Салов, О.Н. Нефедова, О.Н. Ільченко, В.В. Панченко, Т.О. Недайвода, В.Г. Римар; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. Д. : НГУ, 2013. – 40 с.

32. Таха Х. Введение в исследование операций: в 2-х томах / Х. Таха. – М. : Вильямс, 1985.

33. Теория выбора и принятия решений / И. М. Макаров, Т. М. Виноградская, А. А. Рубчинский, В. Б. Соколов. – М. : Наука, 1982. – 328 с.

34. Тимошенко Л.В. Управління витратами екологічної системи при підземному видобуванні рудної сировини / Л.В. Тимошенко, С.А. Ус // Науковий вісник НГУ. – 2010. – № 7 – 8. – С. 128 – 134.

35. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности [Текст] / Р. И. Трухаев. – М. : Наука, 1981. – 168 с.

36. Ус С. А. Теорія нечітких множин у системах прийняття рішень [Текст]: навч. посіб. / С. А. Ус; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. акад. України. – Д. : НГА, 2001. – 86 с.

37. Ус С. А. Методи прийняття рішень [Текст]: навч. посібник / С. А. Ус; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Д. : НГУ, 2012. – 212 с.

38. Ус, С.А. Системи й методи прийняття рішень. Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з дисципліни студентами напряму підготовки 6.040303 Системний аналіз / С. А. Ус; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Д. : НГУ. – 2013. – 55 с.

39. Ус С.А. Применение метода оптимального разбиения множеств к решению задачи построения байесовых множеств / С.А. Ус, Е. А. Рецкая // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. праць. / Дніпропетр. нац. ун-т. – Д., 2000. – С. 86 – 89.

40. Ус С.А., Застосування методу оптимального розбиття множин в задачах дослідження критеріїв прийняття рішень / С.А. Ус, С.О. Лєгостаєва // Вісник Запорізького національного університету: зб. наук. пр. / Запоріз. нац. ун-т. – Запоріжжя, 2011. – С.128 – 133.

41. Koriashkina L. The Decision Support System in selecting further industrial enterprise direction / L. Koriashkina, Y. Nikiforova, A. Pavlova. // Energy Efficiency Improvement of Geotechnical Systems: International Forum on Energy Efficiency. – London : CRC Press/ Balkema – Taylor & Francis Group, 2013. – P. 145 – 150.

Додаток 1

Методичні рекомендації до виконання курсової роботи

Мета курсової роботи – закріплення, поглиблення й узагальнення знань, засвоєних студентами під час вивчення нормативної дисципліни «Теорія прийняття рішень», та їх застосування для комплексного виконання конкретних завдань аналізу й оптимізації виробничих процесів.

Завдання на курсову роботу включає формулювання обраної для розрахунку задачі та методів її розв'язування. Задачу для розв'язування студент обирає самостійно, наприклад, скориставшись матеріалами виробничої практики, або вона може бути запропонована викладачем (див. додаток 2). У першому випадку зміст і обсяг завдання належить узгодити з викладачем не пізніше перших двох тижнів чверті.

У результаті виконання курсової роботи має бути сформульована змістова постановка обраної задачі; побудовані концептуальна та математична моделі; задачу належить розв'язати двома методами, вибір яких здійснюється з урахуванням різних можливих підходів до її розв'язування; на основі отриманих результатів слід запропонувати шляхи вирішення вихідної проблеми.

При виконанні курсової роботи на студента покладаються такі обов'язки:

– обрати й узгодити з керівником тему;

– отримати завдання;

– самостійно виконувати курсову роботу, користуючись матеріалами виробничої практики, виданнями методичного та інформаційного забезпечення навчального процесу;

– систематично відвідувати консультації, які проводить керівник роботи;

– сприймати зауваження та оперативно виконувати методичні вказівки керівника;

– подати курсову роботу на перевірку керівникові не пізніше ніж за тиждень до захисту;

– підготувати доповідь про основні положення курсової роботи;

– захистити роботу перед комісією.

Склад курсової роботи і структура пояснювальної записки

Перелік обов'язкових складових пояснювальної записки та їх рекомендований обсяг подано в табл. Д 1.1. Повний обсяг пояснювальної записки не повинен перевищувати 50 сторінок тексту на папері формату А4. Оформлення курсової роботи має відповідати чинним стандартам.

Таблиця Д 1.1

Складові пояснювальної записки до курсової роботи

№	Назва елемента роботи	Рекомендований обсяг, стор.
1	Титульний аркуш	1
2	Завдання на курсову роботу	1
3	Зміст	1
4	Вступ	1 – 3
5	Змістова постановка задачі	1
6	Концептуальна модель	1
7	Теоретичні відомості про використані в роботі методи	5 – 10
8	Опис побудови математичної моделі	1 – 2
9	Математична модель	1
10	Обґрунтування вибору методів розв'язування задачі	2
11	Розв'язування задачі	до 10
12	Отриманий результат розв'язування задачі	1
13	Аналіз результатів	1 – 2
14	Висновки	1
15	Список використаних джерел	1
16	Додатки (не обов'язково)	

Розглянемо послідовно кожну із складових пояснювальної записки до курсової роботи.

Завдання на курсову роботу включає формулювання її теми й обрані методи дослідження.

Зміст розташовують із нової сторінки і включають до нього такі елементи: вступ, послідовно перелічені назви всіх розділів, підрозділів, пунктів і підпунктів (якщо вони мають заголовки), висновки, перелік посилань, назви додатків і номери сторінок, де розміщено початок матеріалу.

Вступ теж починають на новій сторінці. Цей розділ роботи має відображати:

– опис об'єкта дослідження;

– зв'язок вирішуваних у роботі питань з об'єктом діяльності системного аналітика;

– сучасний стан питання (аналіз відомих аналогів, ступінь вирішення проблем, технічні протиріччя, прогалини знань у даній галузі, нездійснені вимоги до виробів чи розробок наукового, організаційного або іншого характеру);

– мету роботи;

– обґрунтування актуальності теми.

Змістова постановка задачі подається у вигляді опису проблемної ситуації, де має бути відображено

– цілі, яких необхідно досягти шляхом розв'язування задачі;

– наявні параметри й обмеження;

– дані, на базі яких належить розв'язувати задачу.

Приклад постановки задачі в курсовій роботі

Державне підприємство (ДП) «Добропіллявугілля» організоване в 1976 році на базі шахт м. Добропілля. Загальна виробнича потужність його шести діючих шахт становить 5150 тис. тонн вугілля за рік при встановленій нормативній потужності 4900 тис. тонн. Із шести шахт чотири позакатегорійні за газом, а дві стосовно цього показника віднесено до третьої категорії. Усі шахти небезпечні відносно пилу. У відпрацюванні перебуває 12 шахтопластів, їх середня потужність дорівнює 1,69 м. Зольність вугілля, яке видобувається, становить 41,5 %.

Продукція шахт – вугілля марок Д, Г та ДГ, воно йде на коксування. Промислові запаси вугілля становлять 471,6 млн тонн. Середня глибина розробки дорівнює 394 м, максимальна – 900 м. Протяжність гірничих виробок перевищує 405 км, з них не відповідають вимогам ПБ – 48 км, це 11,8 %.

За минулий рік значно підвищилась ефективність вугільного виробництва за рахунок застосування більш удосконалених видів кріплення типу ЗКД-90 в очисних вибоях та прохідницьких комбайнів П-110 у підготовчих вибоях. Усі шахти підприємства, за винятком "Добропільської" та "Алмазної", побудовано в післявоєнний період.

Крім вугільних шахт, до складу ДП входять 5 дочірніх підприємств: ДВАТ "Добропільська автобаза", ДВАТ "Добропільський РМЗ", ДВАТ "Добропіллявуглекомплект", ДВАТ "Вузол виробничо-технологічного зв'язку", ДП "Добропілляпостачзбут" та 12 структурних самостійних одиниць.

За рентабельністю п'ять ДП (крім шахти "Білицька") віднесені до другої групи. Шахта "Білицька", яка одержала протягом 2001 року 2,5 млн грн держпідтримки, за собівартістю віднесена до третьої групи.

На ДП «Добропіллявугілля» існує частково автоматизована система управління підприємством, тобто управлінські завдання в окремих підрозділах виконують, користуючись простими комп'ютерними програмами.

Перед керівництвом підприємства постає задача вибору: впровадити нові інтелектуальні системи управління (автоматизовану систему управління; інтегровану систему управління) чи залишити наявну.

Мета реорганізації системи управління – удосконалення роботи підприємства з огляду на економічні, соціальні та програмно-технічні вигоди. При цьому доводиться враховувати і потенційні витрати.

Концептуальна модель включає в себе докладний опис елементів задачі та зв'язків між ними, а також характеру цих зв'язків. Вона може бути подана у вигляді схем, графіків, словесного опису об'єкта.

Приклад Д1. Описаний вище об'єкт (ДП «Добропіллявугілля») має зв'язки з іншими підприємствами, клієнтами та безпосередньо зі своїм персоналом. На ці зв'язки впливають певні економічні, соціальні та програмно-технічні чинники. Це, зокрема, часові параметри, фінансова стабільність, рентабельність продажів, величина доходу, інвестиційна та інноваційна діяльність, безпека й надійність виробництва, швидкість доступу до інформації, підвищення кваліфікації персоналу, створення нових служб, швидкість і якість виконання завдань, безпека системи, можливість обробки великого обсягу даних, зміна складності та дотримання єдності технічної платформи, упровадження нової техніки.

Унаслідок комплексного вирішення даної проблеми побудовано ієрархії критеріїв для визначення потенційних вигід (подано на рис. Д1) і витрат (показано на рис. Д2).

Економічні чинники, що впливають на вибір, зосереджують у собі потенційні вигоди, пов'язані з виграшем часу, фінансовою стабільністю, збільшенням рентабельності продажів, підвищенням доходу, поліпшенням інвестиційної та інноваційної діяльності при впровадженні нової системи управління (АСУП або ІСУ) в порівнянні з ЧАСУ.

Упровадження нової СУ на підприємстві може сприяти додатковому залученню до роботи на виробництві місцевого населення за рахунок створення нових служб, до того ж з'являється можливість поліпшити умови роботи вже працюючого персоналу: полегшити його доступ до інформації в разі потреби, підвищити показники безпеки та надійності роботи шахт, а також кваліфікацію працівників.

Серед безумовних програмно-технічних вигід проекту – скорочення часу виконання завдань, поліпшення якості роботи, підвищення безпеки системи та можливість обробки великого обсягу даних.

Як і вигоди, витрати, пов'язані з вибором тієї чи іншої альтернативи реорганізації СУ, можна оцінювати під економічним і соціальним кутом зору, а також з огляду на програмно-технічні характеристики. В економічному аспекті враховують капітальні вкладення на впровадження СУ, витрати на її експлуатацію, на освоєння працівниками методів роботи з системою, а також час її окупності.

У передбаченні соціальних наслідків до уваги беруть можливість негативного ефекту від реорганізації багатьох служб, тобто неминучого звільнення працівників, необхідності у підвищенні кваліфікації персоналу.

У програмно-технічних витратах належить оцінити масштаби можливої шкоди від упровадження нової техніки, наприклад, порушення єдності технічної платформи, підвищення її складності.

Рис. Д1.1. Ієрархія вигід від реорганізації системи управління підприємством

Рис. Д1.2. Ієрархія витрат на реорганізацію системи управління підприємством

Приклад Д2. На Смолінській шахті в процесі видобутку уранової руди застосовують самотвердну закладну суміш, що включає в'язкі та інертні матеріали. Інертним наповнювачем для приготування суміші слугують відходи урановидобувної, металургійної та деревопереробної промисловості, продукти хімічної промисловості, зокрема хвости, доменний шлак, лігносульфонати, алюмокалієвий галун, а також доломітовий пил, природний ангідрид і вода. Необхідно визначити рецептуру закладної суміші, яка забезпечує її максимальну міцність. Для досягнення шуканого результату розглянемо два варіанти: задачу з чітко та з нечітко визначеними параметрами рівняння, що характеризує залежність міцності суміші від її складових. При цьому щільність суміші повинна становити 1950 – 2096 кг/м^3, період початку її тужавіння має коливатися в межах 12 – 30 хв, допустимі значення деформації 1 – 4 мм, зчеплення 0,08 – 0,7 МПа. Досить важливим показником вважаємо також вартість готової суміші, яка не може перевищувати 30 грн/т. Відомі такі вимоги до складу суміші: вміст хвостів не повинен перевищувати 0,124 масової частки, а води (її використовують тільки як розчинник) – 0,23 масової частки. Вміст інших компонентів у масових частках передбачено такий: доломітовий пил 0,106 – 0,326, алюмокалієвий галун – 0,045 – 0,154, лігносульфонат – не більше 0,103, доменний шлак – не більше 0,472 та ангідрид – не більше 0,372.

Опис побудови математичної моделі. Формулюючи математичну модель, необхідно виділити змінні, регульовані особою, що приймає рішення (ОПР) і ті, значення яких не залежать від ОПР; описати визначені в концептуальній моделі залежності у вигляді функцій, нерівностей та (або) відношень.

Приклад Д3 (відповідає концептуальній моделі, яка описана у прикладі Д2). Для побудови математичної моделі позначимо через x_i частку i-го складового компонента суміші ($i = 1, n$). Припустимо, що c_i – ціна за одну тонну i-го компонента, b_i – показник щільності, d_i – показник тривалості початку схоплювання, f_i – показник деформації а g_i – показник зчеплення i-го компонента. Також позначимо через $\varphi(x)$, $\theta(x)$, $\delta(x)$ функції міцності, щільності та деформації суміші відповідно, через $\tau(x)$ – функцію, що описує період початку тужавіння суміші, $\psi(x)$ – функцію зчеплення, y – функцію, що описує вартість закладної суміші.

Тепер цільова функція має такий вигляд:

$$\varphi(x) \to \max .$$

Обмеження на вміст компонентів у суміші в загальному вигляді можна записати таким чином:

$$b_{i\_\min} \le \theta(x) \le b_{i\_\max}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$d_{i\_\min} \le \tau(x) \le d_{i\_\max}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$f_{i\_\min} \le \delta(x) \le f_{i\_\max}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$g_{i\_\min} \le \psi(x) \le g_{i\_\max}, \ \ i = \overline{1,n};$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \le y_{\max}, \ \ i = \overline{1,n};$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i = 1,$$

де x_1 – доломітовий пил, x_2 – вода, x_3 – алюмокалієвий галун, x_4 – лігносульфонати, x_5 – доменний шлак, x_6 – ангідрид, x_7 – хвости, а функції $\varphi(x)$, $\theta(x)$, $\tau(x)$, $\delta(x)$, $\psi(x)$ за результатами експериментальних досліджень мають такий вигляд:

$$\varphi(x) = 47{,}31x_1 + 26{,}36x_2 + 93{,}76x_3 - 12{,}25x_6 + 33{,}41x_7,$$

$$\theta(x) = 2087{,}5x_1 + 1918{,}5x_2 + 2296{,}8x_3 + 1616{,}9x_4 + 1910{,}1x_5 + 2195{,}6x_6 + 2081{,}6x_7,$$

$$\tau(x) = 0{,}67x_2 - 0{,}55x_3 + 1{,}36x_4 + 0{,}54x_5 + 0{,}62x_6,$$

$$\delta(x) = 6{,}15x_2 - 7{,}75x_3 + 9{,}67x_4 + 6{,}23x_5,$$

$$\psi(x) = 0{,}45x_2 + 0{,}26x_5 + 1{,}48x_6.$$

Математичну модель належить виділити в тексті й записати окремо, відповідно до кожного з обраних методів розв’язування.

Обґрунтування вибору методів розв’язування. З огляду на побудовану математичну модель необхідно встановити, до якого класу задач вона відноситься і які методи розв’язування при цьому можуть бути застосовані.

Вибір методу здійснює студент самостійно, узгодивши його з викладачем. Методи рекомендовано обирати з різних груп (див. табл. Д1.2), обґрунтувавши застосування кожного з них у пояснювальній записці до курсової роботи.

Теоретичні відомості стосовно використаних у роботі методів розв’язування задач. Включають опис суті кожного із задіяних у роботі методів, виконаний на базі літературних джерел.

Розв’язування задачі. Розрахунки в курсовій роботі можуть бути виконані вручну, за допомогою стандартних програм або з використанням самостійно розробленого програмного продукту. У пояснювальній записці необхідно відобразити розв’язування задачі з необхідним для його розуміння ступенем деталізації.

Отриманий результат розв’язування задачі належить сформулювати в доступному для ОПР вигляді і продемонструвати шлях вирішення поставленої у завданні проблеми.

Аналіз результатів і висновки. Висновки вміщують безпосередньо після викладу розділів курсової роботи, починаючи з нової сторінки.

У цьому розділі оцінюють одержані результати роботи порівняно з аналогами, висвітлюють досягнутий ступінь новизни, практичне й наукове значення результатів, прогнозують подальший розвиток об’єкта дослідження або розробки. При цьому виявляють, чи узгоджується отриманий розв’язок із реальними або очікуваними інтуїтивно даними, порівнюють результати, отримані різними методами, і роблять висновки про можливість їх застосування для розв’язування задачі. Текст висновків може поділятись на пункти.

Таблиця Д 1.2

Рекомендовані методи розв’язування задач

Група методів	Назва методу	Рекомендована література
I	1. Розв’язування задач нечіткого математичного програмування на основі розкладання на множини рівня	[27, 36, 37,38]
	2. Розв’язування задачі нечіткого математичного програмування на основі зведення її до задачі багатокритерійної оптимізації	[27, 36, 37,38]
II	3. Метод аналізу ієрархій	[2,13, 30]
III	4. Вибір на основі заданих відношень переваги із урахуванням переваг на множині ознак (критеріїв)	[27, 37, 38]
	5. Метод послідовної редукції у розв’язуванні задачі МП з нечіткими параметрами	[6]
IV	6. Метод головного критерію у розв’язуванні задач багатокритерійної оптимізації	[6, 22, 28, 37, 38]
	7. Метод послідовної поступки у розв’язуванні задач багатокритерійної оптимізації	[6, 22, 28, 37, 38]
	8. Метод згортки у розв’язуванні задач багатокритерійної оптимізації	[6, 22, 28, 37, 38]
V	9. Власний варіант методу	[2, 6, 13, 35] та інші

Список використаних джерел. Перелік джерел, на які є посилання в основній частині пояснювальної записки, розташовують з нової сторінки. Бібліографічні описи кожного джерела в переліку посилань подають у порядку, за яким кожне вперше згадується в тексті пояснювальної записки. Порядкові номери описів у переліку одночасно являють собою посилання в тексті (т. з. номерні посилання). Оформлення бібліографічного списку виконується відповідно до вимог державного стандарту [31].

Додатки. У цій частині роботи зазвичай подають матеріал, що доповнює зміст пояснювальної записки, але не може бути послідовно розміщений в основній частині через великий обсяг.

Типи додатків: ілюстрації або таблиці доповнювального характеру; проміжні математичні докази й обчислення, формули, розрахунки; тексти програмного коду, вхідні дані великого обсягу.

Додаток 2

Перелік задач, рекомендованих для розв’язування в курсовій роботі

1. Підприємство має намір закупити вугілля певної якості. Для оцінювання пропозицій у виборі марок вугілля використовують такі критерії: вміст сірки, вміст золи, вихід летких сполук, калорійність, запас на складі, вартість.

Оцінки кожної з марок вугілля відповідно до перелічених критеріїв відомі. У розгляді берут участь п’ять марок вугілля (М1, М2, М3, М4, М5) з такими характеристиками:

М1 – довгополуменеве рядове вугілля (розмір частинок 0 – 300 мм) із нормальним вмістом сірки (0,3 %), середнім вмістом золи (14 %), великим виходом летких сполук і недостатньо високою калорійністю. Ціна за одну тонну прийнятна.

М2 – довгополуменеве дрібно-велике вугілля (25 – 200 мм) з нормальним вмістом сірки (0,4 %), малим вмістом золи (10,3 %), великим виходом летких сполук (43 %) і недостатньо високою калорійністю. Ціна за одну тонну прийнятна.

М3 – слабоспікне вугілля (6 – 13 мм) з нормальним вмістом сірки (0,3 %), середнім вмістом золи (15 %), середнім виходом летких сполук (24,6 %) і досить високою калорійністю. Ціна за одну тонну прийнятна.

М4 – довгополуменеве коксівне вугілля (13 – 100 мм) з нормальним вмістом сірки (0,25 %), середнім вмістом золи (16 %), високим виходом летких сполук (45,7 %) і достатньою калорійністю. Ціна за одну тонну прийнятна.

М5 – рядове шахтне вугілля (100 – 300 мм) з нормальним вмістом сірки (0,3 %), високим вмістом золи (18,5 %), низьким виходом летких речовин (14 %) і досить високою калорійністю. Ціна за одну тонну прийнятна.

Основні характеристики цих марок вугілля зведено в табл. Д2.1.

Таблиця Д2.1

Дані для оцінювання якості вугілля

Марки	Характеристики					
	Вміст сірки, %	Вміст золи, %	Вихід летких сполук, %	Калорійність, ккал/кг	Запас, т	Вартість за тонну, грн
М1	0,3	14	41,4	6100	2500	240
М2	0,4	10,3	43	6450	3450	280
М3	0,3	15	24,6	7450	5600	300
М4	0,2	16	45,7	6500	4300	210
М5	0,3	18,5	14	7350	1600	150

Визначити, яку кількість вугілля кожної марки необхідно закупити для виготовлення закладної суміші заданої якості за мінімальною ціною.

3. Відкрите акціонерне товариство "Полтавський ГЗК" працює на базі родовищ Кременчуцької магнітної аномалії. Сировина для комбінату надходить із Горишне-Плавнівського та Лавриківського родовищ. Найважливішим технологічним процесом у відкритій розробці руди є перевезення гірничої маси. Транспортні витрати становлять близько половини загальних витрат на видобуток корисної копалини. Сьогодні тут запроваджено комбінований тип перевезень – сукупність залізничного, автомобільного й конвеєрного транспорту. Автомашини, завдяки своїй маневреності й мобільності, доставляють гірську масу з робочої зони кар'єру до перевантажувальних пунктів, а далі в пункти призначення продукт перевозиться іншими видами транспорту.

У структурі основних виробничих фондів автогосподарства на кар'єрні самоскиди припадає близько 80 % капіталовкладень. З цієї причини підвищення ефективності основних виробничих фондів неможливе без збільшення річного обсягу перевезень автотранспортними засобами шляхом запровадження змінного графіка роботи самоскидів, скорочення їхніх простоїв під час технічного обслуговування й ремонту та без поліпшення якості управління виробничими процесами в автогосподарстві. Усе перелічене реально здійснити за умови доброго виробничо-технічного забезпечення підприємства.

Оскільки виникла необхідність у збільшенні обсягів видобутку руди, довелося при заглибленні кар'єру (–240 м) розширити його борти. Це зумовило часткову реорганізацію ЦПТ (циклічно-потокової технології), що передбачає попереднє дроблення й переміщення конвеєрним транспортом гірничої маси з низьких горизонтів на поверхню кар'єру. Щоб скоротити довжину маршрутів і зберегти обсяги перевезень, необхідно було прийняти рішення про створення додаткової кількості перевантажувальних пунктів. Але для уникнення простоїв залізничних комплексів на перевантажувальних пунктах необхідно збільшити кількість технологічних самоскидів. Таким чином, основна мета курсової роботи – вибір марки й типу самоскида серед наявних альтернативних варіантів.

4. Адміністрація Кримського заводу «ТИТАН» має вирішити проблему постачання рудного концентрату з нового титанового родовища. Для цього необхідно прийняти одне з рішень:

- увести в дію нове виробництво (за 20 км від старого, поряд із родовищем),
- повністю відновити старі виробничі потужності,
- модернізувати виробничий процес (підвищити дохідність руди за рахунок нового й старого родовищ);
- розділити виробничі потужності, тобто частину процесів (доводку) модернізувати та залишити на старому місці, а решту (гравітаційне збагачення) перенести на нове місце.

Останній варіант передбачає, що коли знайдеться покупець на первинний концентрат, то після гравітаційного збагачення весь продукт відправляється замовнику, коли ні, то за допомогою насосів та зворотної води первинний концентрат буде подаватись на подальшу обробку. При цьому кількість зворотної води зменшиться.

Отже, керівництво підприємства має прийняти правильне рішення беручи до уваги багато факторів впливу: економічних, екологічних і соціальних, та зважаючи на потенційні витрати, пов’язані із захистом довкілля, вартістю будівництва нових потужностей та ін.

5. Компанія "Оболонь" – один з найбільших національних виробників пива, слабоалкогольних і безалкогольних напоїв , що мають попит як в Україні, так і за її межами. Керівництво компанії приділяє велику увагу захисту навколишнього середовища, зокрема шляхом утилізації порожньої тари. Сьогодні наявне обладнання дозволяє переробляти за годину до 500 кг ПЕТ, а це понад 15 тис. пляшок (ПЕТ – поліетилентерефталат – сировина, з якої виготовляють упаковку, пластикову тару для рідких продуктів). З метою зменшення впливу на довкілля компанія організувала збір ПЕТ-пляшки в Україні. Керівництву підприємства належить обрати кілька видів автомобілів відповідного призначення для покупки. У виборі задіяно п’ять видів автомобілів.

6. Підприємство виготовляє і продає фарбу таких видів: морозостійку (I), водостійку (II), для фарбування шпалер (III), для покриття скла (IV).

У виробництві фарби використовують три вихідні продукти: *A*, *B*, *C*. Дані про витрати сировини на виготовлення 1 т кожного виду фарб, наявні запаси продуктів на складі та про виручку від реалізації 1 т фарби наведено в табл. Д2.2.

Визначити, яку кількість фарби кожного виду необхідно виробити підприємству, щоб отримати максимальний прибуток, за умови, що витрати на 1 т фарби кожного виду не перевищували б 3000, 2000, 1000 та 5000 грн відповідно, а в сумі були б мінімальними.

Таблиця Д2.2

Початковий продукт	Витрати продуктів у т на 1 т фарби				Запаси продуктів на складі, т
	I	II	III	IV	
A	0,1	0,1	0,4	0,1	1,6
B	0,3	0,1	0,3	0,4	2,1
C	0,2	0,3	0,2	0,1	1,8
Дохід від реалізації 1 т фарби	5000	4000	3000	7000	

7. Студії танцю «Силует» необхідно прийняти на роботу хореографа, для роботи з дітьми у віці від 4 до 9 років. Висунуто такі критерії відбору кандидатів:

- фахова освіта,
- досвід роботи в хореографії,
- досвід роботи із дітьми,
- комунікабельність,
- креативність,
- зайнятість на іншій роботі.

Необхідно здійснити вибір серед наявних кандидатів, що мають такі характеристики:

1) Руденко Катерина Іванівна, 41 рік, закінчила Московське вище танцювальне училище в 1990 р.; з 1990 по 2000 р. виступала в танцювальному колективі «Зірка», останні 5 років працювала в дитячому садку м. Дніпропетровськ вихователем і хореографом. Добра, чуйна людина, її постановки танців не відзначаються креативністю, але мають високий професійний рівень. На даний момент не працює.

2) Цукерман Юрій Сергійович, 34 роки, закінчив Київську театральну академію в 1997 р.; з 1997 по 2009 р. танцював у колективі «Туфлі», досвіду роботи із дітьми не має, але з 2007 по 2008 р. вивчав дитячу психологію, має відповідний сертифікат. Пунктуальна, сумлінна людина, у колективі «Туфлі» не раз був постановником креативних танців, зараз безробітний.

3) Тарзанов Андрій Вікторович, 35 років, закінчив Київську театральну академію в 1995 р.; з 1994 по 2004 р. був хореографом-постановником у колективі «Криничка», з 2005 по 2008 р. працював організатором позакласної роботи в школі № 111, з 2008 р. працює постановником програм у розважальному комплексі «Субмарина». Творча й комунікабельна людина, відомий як автор постановок багатьох феєричних шоу-програм.

4) Алексєєва Олена Дмитрівна, 27 років, закінчила Дніпропетровський театральний коледж у 2003 р.; з 2003 р. танцює в балеті «Венера». Відповідальна, працелюбна людина, не має досвіду постановок танцювальних номерів.

5) Доріна Орина Едуардівна, 29 років, спеціалізованої освіти не має, але з 15 років танцювала в різних колективах, з 2000 по 2006 р. працювала в лицеї № 15 м. Дніпропетровськ учителем молодших класів, з 2007 по 2009 р. виступала в складі шоу-балету «Аудіо». Добра, товариська людина, до роботи ставиться творчо. Зараз безробітна.

8. Перед підприємством стоїть завдання вибору найкращого постачальника молочної продукції. Для оцінювання комерційних пропозицій претендентів використовуються такі критерії: якість продукції, вартість і надійність поставок, фінансовий стан підприємства, рівень сервісу.

Оцінки постачальників за кожним із названих критеріїв відомі. Потрібно скласти рейтинг постачальників і вибрати оптимальний варіант. Розглядається шість підприємств (П1, П2, П3, П4, П5, П6) з такими характеристиками:

П1 – велике підприємство, що добре зарекомендувало себе на ринку, ціни на його продукцію значно перевищують ціни інших виробників. Високий рівень гнучкості поставок, якісне обслуговування. Висока якість продукції. Серед недоліків – географічна віддаленість і значні транспортні витрати.

П2 – новий постачальник на ринку, який не встиг зарекомендувати себе. Фінансовий стан стійкий. Ціни порівняно невисокі, якість продукції дуже добра. Розташоване поблизу від підприємства-споживача, що значно скорочує терміни поставок.

П3 – невелике підприємство, що динамічно розвивається. Фінансовий стан фірми можна характеризувати як стійкий. Особливу увагу на підприємстві приділяють якості продукції. До недоліків треба віднести великі терміни постачання та перебої в транспортуванні сировини. Вартість продукції порівняно висока за рахунок значних транспортних витрат.

П4 – відносно низька ціна (на 10 – 12 % нижча від вартості продукції інших постачальників), але має місце віддаленість від фірми-споживача. Фінансовий стан відносно стабільний. Налагоджено мережу постачання, хороше обслуговування. Якість продукції задовільна.

П5 – високий показник якості та свіжості продуктів. Географічна віддаленість, великі терміни поставок. Високий рівень обслуговування, відносно високі, але прийнятні ціни. Стабільний фінансовий стан.

П6 – хороша репутація, налагоджено розподільну мережу, різноманітний асортимент продукції, рекламна та інформаційна підтримка. Показник свіжості досить високий. Стабільний фінансовий стан. Вартість постачання продукції трохи перевищує вартість транспортування у постачальника П1.

Кількісний вимір показників роботи можливих постачальників молочної продукції зведено в табл. Д2.3.

Таблиця Д2.3

Кількісні характеристики критеріїв вибору постачальника

Постачальник	Вартість одиниці продукції, грн	Вартість доставки, грн	Термін поставок, доба
П1	5,4	38	3
П2	4,7	30	1
П3	5,1	36	2
П4	4,1	32	2,5
П5	4,8	35	4,5
П6	5,2	39	2

9. Молодому співробітникові підприємства «КН1», належить вибрати місце стажування, з огляду на такі критерії: вартість стажування, сума, яку сплатить за стажування підприємство, тривалість стажування, надання тимчасового помешкання, кількість місць стажування, рівень підготовки. Можливі варіанти подано у табл. Д2.4

Таблиця Д2.4

Назва країни	Вартість стажування, дол	Частка суми, яку сплачує за стажування підприємство, %	Тривалість стажування, місяць	Наявність тимчасового помешкання	Кількість місць стажування	Рівень підготовки
Франція	2000	50	3	надається	5	добрий
Німеччина	4000	65	4	надається	9	відмінний
Італія	1500	50	5	не надається	6	добрий
Швеція	5000	90	6	надається	7	добрий
Росія	3000	75	3	надається на перший та останній тиждень	8	середній
Швейцарія.	6500	30	2	надається на перший тиждень	2	відмінний

Беручи до уваги перелічені критерії, необхідно вибрати одне з місць стажування.

10. Сучасний ринок дитячих товарів надає можливість обрати будь-який товар на смак батьків. Найбільш популярними та різноманітними за ціновою ознакою виявились дитячі візочки. Покупець має вирішити складне питання вибору цього товару з огляду на власні потреби й на різноманітність конструкцій та дизайну.

Розв'язати задачу вибору, враховуючи такі вимоги: зручність, вага, сучасність, безпека, екологічно чисті матеріали, ціна та інші.

11. Подружжя вирішило провести медовий місяць у курортному місці. Перед молодятами стає питання вибору туристичного туру: «Єгипет», «Таїланд» або «Мальдіви». Вибір вони здійснюють за двома критеріями: гарно й максимально комфортно відпочити й мінімізувати витрати з огляду на рівень власного матеріального забезпечення.

12. Для оздоблення стін будинку бригада мулярів може використовувати три різні технології T_1, T_2, T_3 . Кожна з них потребує використання спеціальної суміші, яка виготовляється з трьох складових P_1, P_2, P_3, змішаних у певних пропорціях.

Вартість і продуктивність робіт з використанням кожної технології, а також склад відповідної суміші, подано в табл. Д2.5. Необхідно визначити тривалість використання технологій T_1, T_2, T_3, що дозволить забезпечити максимальний обсяг виконаних робіт і мінімальну їх вартість.

Зауважимо, що за згодою керівництва сумарну вартість робіт дозволено збільшити в деяких межах (вона не повинна перевищувати 9000 грн).

Таблиця Д2.5

Якісні характеристики оздоблювальних технологій

Назва технології	Масові частки складових суміші			Витрата, кг/м^2	Продуктивність бригади, м^2/год	Вартість робіт грн/ м^2
	P_1	P_2	P_3			
T_1	0,4	0,1	0,5	10	4	12
T_2	0,375	0	0,625	8	5	15
T_3	0	0,5	0,5	8	6	22
Наявні ресурси, кг	1000	900	2500			

14. Господиня збирається консервувати продукти. Вона може використовувати банки об'ємом 0,5; 0,75; 1; 1,5 і 3 л. Відомо, які продукти буде законсервовано, та деякі додаткові характеристики. Потрібно визначити, яку кількість банок кожного об’єму належить використовувати для консервування кожного продукту, щоб усі вони пішли в хід, а всі плани господині щодо заготівель було виконано.

Розглядають чотири види продукції (П1, П2, П3, П4) з такими характеристиками:

П1 – заготівля огірків середнього розміру, одна з найскладніших у приготуванні позиція, проте смак цієї консерви добре оцінено членами родини. Необхідно заготувати максимальну кількість саме їх, причому число банок об’ємом 0,5 і 0,75 л не повинно перевищувати 10 штук (у них закладуть маленькі огірки).

П2 – консервування помідорів. Заплановано заготувати томатний сік, лечо або цілі помідори. Зрозуміло, що в хід підуть банки всіх видів. Враховуючи потреби сім’ї, необхідно виготовити більше 30 літрів помідорних консервів.

П3 – заготівля варення, для чого підійде багато видів овочів і фруктів. Літраж банок при фасуванні цього продукту не має значення. Заплановано приготувати понад 25 літрів смачного варення.

П4 – асорті з овочів, дуже популярний продукт вид консервів, для якого підходять різноманітні банки. Заплановано виготовити цього продукту більше 20 літрів.

Наявну кількість банок різного об’єму подано нижче:

Літраж банок	0,5	0,75	1	1,5	3
Наявна кількість банок	50	10	15	30	20

15. Нехай маємо множину категорій споживачів: $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots x_{11}\}$, яку визначено таким чином:

за місцем проживання: x_1 – мешканці Дніпропетровська, x_2 – мешканці районних центрів, x_3 – жителі сіл;

за місцем отримання повної середньої освіти: x_4 – школа, x_5 – технікум, x_6 – спеціалізований ліцей;

за оцінками в шкільному атестаті: x_7 – відмінники, x_8 – ті, чиї знання оцінено добре й відмінно;

за перевагами особистих захоплень: x_9 – спортсмени, x_{10} – прихильники точних наук, x_{11} – гуманітарії.

Нехай множина університетів $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, причому

z_1 – Національний гірничий університет ;

z_2 – Дніпропетровський національний університет ;

z_3 – Дніпропетровська державна медична академія ;

z_4 – Дніпропетровський державний аграрний університет.

Множина ознак, за якими оцінюються університети, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, де

y_1 – територіальне розташування ВНЗ;

y_2 – бренд ВНЗ;

y_3 – відповідність обраному напряму навчання;

y_4 – схвальні відгуки близьких.

Необхідно визначити зони впливу університетів на відповідні категорії абітурієнтів, враховуючи перелічені ознаки.

16. Компанія для організації вантажних перевезень між центром і чотирма філіями, що розташовані в різних місцях, має у своєму розпорядженні 30 автомобілів. Кількість одиниць товару, яку може перевезти кожен автомобіль за один рейс, і пов'язані з цим витрати, обсяг яких залежить від запитів конкретної філії, подано в табл. Д2.6. Мінімальна кількість товару, яку потрібно доставити за місяць у кожну філію, становить, відповідно 4, 5, 3 та 4 тис. од. Величина прибутку від перевезення одиниці товару також зумовлена їх напрямком і дорівнює 20, 15, 18 і 30 грн відповідно. Кожен автомобіль може здійснити за місяць 20 рейсів. Потрібно розподілити автомобілі серед маршрутів, виходячи з умов максимізації прибутку компанії та мінімізації витрат на рейси. Обидва критерії вважати рівнозначними.

Таблиця Д2.6

Вихідні дані для розподілу автомобілів за маршрутами

Кількість товару/експлуатаційні витрати			
Філія 1	Філія 2	Філія 3	Філія 4
40/200	60/400	45/350	60/700

17. Друкарня ВАТ «Видавництво «Зоря» випускає товари народного споживання (ТНС): зошити, альбоми для малювання, щоденники учнівські, бланки шкільної документації (табелі та ін.), папір, блокноти, книги, папки, грамоти, дипломи, інші ТНС. Витрати паперу на виготовлення кожного виду продукції різні, їх подано в табл. Д2.7. У випуску всіх видів продукції задіяні такі чинники: електроенергія, людські ресурси, витратні матеріали. У собівартість одиниці продукції закладено таке співвідношення затрат: 10 % – електроенергія, 50 % – людські ресурси, 5 % – амортизаційні відрахування, 10 % – витратний матеріал. Споживання ресурсів не повинно перевищувати їх запасів. Кількісні характеристики ресурсів, що витрачаються на виготовлення одиниці продукції та відповідні їм граничні суми витрат наведено в табл. Д2.7. Крім того, відомо величини прибутку від одиниці продукції кожного виду (див. табл. Д2.7). Для задоволення потреб ринку в продукції підприємства друкарня повинна випускати щодня: зошитів не менше 2000 шт., альбомів для малювання – 20 шт., грамот, дипломів –15 шт., папок та інших ТНС – 50 і 70 шт. відповідно. При цьому виробничі потужності обладнання не дозволяють випускати більше 5000 зошитів на день.

Необхідно скласти такий план виробництва ТНС, виконання якого забезпечить максимальний прибуток, а загальна витрата паперу на виготовлення продукції буде мінімальною.

Таблиця Д2.7.

Вихідні дані до складання плану виробництва ТНС

Назви ресурсів	Вид продукції (витрати у грн)										Граничні витрати, грн
	зошит	альбом	щоденник	табель	фасований папір	книги	папка	блокнот	грамоти, дипломи	інше	
Електроенергія	0,098	0,095	0,098	0,089	0,085	0,084	0,089	0,095	0,059	0,099	7000
Людський ресурс	0,359	0,157	0,188	0,053	0,51	0,504	0,34	0,357	0,154	0,059	6380
Амортизація	0,349	0,475	0,049	0,445	0,043	0,242	0,044	0,147	0,030	0,049	3450
Папір	0,98	0,95	0,98	0,895	0,85	0,95	0,84	0,689	0,59	0,99	Не обмежений
Витратні матеріали	0,098	0,095	0,098	0,090	0,085	0,084	0,189	0,095	0,059	0,130	1940
Прибуток	0,294	0,285	0,294	0,269	0,255	0,285	0.252	0,267	0,177	0,297	

18. Фірма «Водолій» займається облаштуванням систем автоматичного поливу і складанням насосних станцій, застосовуючи устаткування різних постачальників. Обладнання, яке надходить від різних постачальників, оцінюють за такими ознаками: країна походження, технічний рівень, популярність серед споживачів, належність до бренду. Необхідно скласти рейтинг постачальників, з метою вибору найбільш вдалого для подальшого партнерства, враховуючи різні критерії. Крім того, потрібно розрахувати кількість випущених фірмою поливних установок з огляду на забезпечення максимального прибутку від реалізації кожної. При цьому належить взяти до уваги такі обставини: агрегати монтують на базі закупленого обладнання п'яти фірм-виробників, що зумовлює різний рівень складності його монтажу, певні конструктивні особливості агрегатів, специфіку підключення й технології складання, а тому час, витрачений на введення в експлуатацію установок, базованих на обладнанні різного походження, не буде однаковим. До того ж перелічені умови суттєво впливають на величину прибутку.

19. Кондитерська фабрика «Самарська» як один із найбільших вітчизняних виробників елітних солодощів щодня постачає продукцію споживачам на всій територіі України. Вантажі відправляють двома караванами фур. У табл. Д2.8 подано відомості про кількість транспортних засобів різних типів для щоденного комплектування караванів, вантажопідіймальність кожного засобу та ціну перевезення тонни вантажу. Визначити оптимальне число караванів фур кожного типу для перевезення максимальної кількості вантажу.

Таблиця Д2.8

Вихідні дані для здійснення щоденної схеми перевезень солодощів

Тип транспортного засобу за вантажопідіймальністю	Кількість автомашин	Тип каравану		Місткість, т	Вартість перевезення тонни вантажу, грн	
		1	2		I караван	II караван
Малої	50	4	6	5	15	17
Середньої	65	6	8	7	18	20
Великої	31	3	2	15	13	14

20. Нехай у момент часу T_0 маємо множину $\{C_1, C_2, .. C_т\}$ кредитних запитів, і кожен з них може бути прийнятий банком до виконання. Щодо всякого кредитного запиту відомі такі умови: розмір позики R_k, яку бажано отримати позичальнику в момент часу T_0; графік повернення позичених грошей з урахуванням відсотків за наданий кредит. У цьому графіку враховано розмір майбутніх платежів Y_k, які здійснює позичальник у моменти часу T_k , $k = 1, 2, ...$ l. Передбачимо, що r – процентна ставка банку за використання кредитних ресурсів у разі задоволення i-го запиту, m – відсоткова ставка в момент r^* , яку розраховують за схемою складних відсотків, тобто $R_k = (1 + r)nT_0 – 1$, $k = 1, 2, ... , l$. За умови виконання банком i-го кредитного запиту, а також при повному своєчасному погашенні кредиту, його чистий дохід D можна обчислити за такою формулою:

$$D_i = -Q_i + \sum_{k=1}^{l} \frac{V_k}{1+R_k}.$$

Оскільки кредитні ресурси банку обмежені, виникає завдання вибору запитів для розміщення їх у кредитному портфелі. Необхідно сформувати такий вміст кредитного портфеля, який забезпечує банку максимальний сумарний дохід від наявних в момент часу T_0 кредитних ресурсів з урахуванням ризиків неплатоспроможності позичальників і можливості збільшення за потреби кредитних ресурсів.

21. Потрібно вибрати один із трьох маршрутів перевезення меблевої продукції заводу «Прогрес» від підприємства до ж/м «Червоний Камінь» з урахуванням обмежень і вибраних критеріїв.

22. Маємо три елітних житлових комплекси: *A* – «Парковий», *B* – «Вежі», *C* – «Альбіон», які зведено різними будівельними компаніями. Кожен з них оцінюється за п'ятьма характеристиками:

– територіальна привабливість району;
– умови житлового кредитування;
– якість і вартість послуг, пов'язаних з експлуатацією житла;
– перспектива зростання вартості квартир;
– панорама, яка відкривається з вікон комплексу.

Експертами визначено відносну важливість кожної з цих характеристик і відношення переваг між комплексами за кожною характеристикою. Необхідно вибрати житловий комплекс, який найбільшою мірою задовольняє задані вимоги споживача.

23. Підприємству «Флешгер» необхідно вибрати радіостанції, на яких буде проводитися рекламна кампанія його продукції та розподілити між ними рекламний бюджет у розмірі 1 200 000 грн. За рішенням експертів для аналізу були вибрані такі радіостанції: «Мелодія», «Хіт ФМ», «Шарманка», «Російське радіо», «Наше радіо».

Необхідно сформувати інтегровані характеристики кожного з перелічених ЗМІ за такими критеріями як рейтинг серед слухачів, вартість виготовлення рекламного ролика, середня ціна за 15 секунд ефірного часу, зона покриття і частота виходу в ефір рекламних блоків, вміст й організація рекламного пакету. За цими критеріями необхідно вибрати найбільш ефективні радіостанції для проведення рекламної кампанії, а також визначити максимально прийнятну кількість випущених на кожній радіостанції роликів, попакетно з урахуванням ефективності пакета й самого каналу.

24. Підприємство випускає латунь звичайного, спеціального й декоративного призначення і реалізує їх за ціною 3, 4,5 і 6 грн за кілограм кожного виду відповідно. Виробнича потужність підприємства дозволяє виготовляти (протягом планового періоду) не більше 500 кг звичайної латуні, 600 кг спеціальної та 250 кг декоративної. Обов'язкові компоненти сплавів – мідь, цинк, свинець і нікель. За технологією декоративна латунь повинна містити не менше 7 % нікелю, 49 % міді і не більше 29 % свинцю; спеціальна – не менше 3 % нікелю, 71 % міді, 9 % цинку і не більше 21 % свинцю. У звичайному сплаві компоненти включено без обмежень.

Виходячи з необхідності задоволення потреб ринку в асортименті, передбачити можливість його корегування за окремими (або навіть за всіма) показниками, побудувати моделі для формулювання таких екстремальних задач: максимізування обсягу реалізації продукції; максимізування прибутку.

25. Об'єкт аналізу – виробництво тремпелів (плічок для одягу) обсягом 3000 штук на тиждень (6 робочих днів). У виготовленні продукції задіяно 2 види сировини: пластмаса й дерево. Пластмасові тремпелі реалізують споживачам по 3 грн за штуку, а дерев'яні – по 6 грн. Маса пластмасового тремпеля становить 0,1 кг, дерев'яного – 0,2 кг. На складі наявний залишок пластмаси у 50 кг. Крім того відомо, що максимальний тижневий обсяг замовлення обох видів сировини становить 400 кг, причому розмір поставок дерева може бути і меншим. Пластмасові тремпелі вважаються пріоритетнішими для виробництва через нижчу собівартість і менші затрати праці, що у свою чергу дозволяє підвищити обсяги випуску тремпелів. При замовленні сировини встановлено такі обмеження: пластмаси має бути в 1,5 раза більше ніж дерева. Потрібно знайти оптимальну кількість замовленої сировини, за якою продажна вартість тремпелів була б найвищою.

26. У ході планування діяльності підприємства "Полтавський ГЗК" на 2008 рік для зниження витрат на заміну обладнання кар'єрних великовантажних машин керівництвом підприємства було вирішено частково оновити парк цих транспортних засобів. Із цією метою було розглянуто такі моделі машин: самоскид 777Е, Котамі НБ785, БелАЗ 1200, бульдозер Е9К.

Аналіз пропонованих засобів здійснювали три експерти, довіру до яких визначено таким чином: $\lambda_1 = 0,5$; $\lambda_1 = 0,1$; $\lambda_1 = 0,4$ (λ_i – рівень довіри до i-го експерта). Необхідно визначити, яка модель машини може задовольнити оптимальний термін заміни (відновлення) обладнання.

27. Автоматизована система складання плану ліквідації аварій на гірничому підприємстві налаштована на вибір найбільш безпечного маршруту для виводу людей з місця аварії і прибуття допомоги на місце її виникнення, а також на організацію оперативної частини плану ліквідації небезпечної ситуації. У процесі вибору враховуються дані про різні показники стану тієї чи іншої гірничої вирубки.

Відомо, що ефективність вирішення проблем, які виникають в процесі ліквідації аварії, залежить від своєчасного прибуття відділень ДВГРС у потрібне місце, а значить, від вибору найкоротших за часом маршрутів їх прямування. До того ж належить враховувати й інші критерії, що оцінюють безпеку людей (загазованість, висока температура середовища і под.).

28. Підприємству «Міленіум Фло» необхідно розробити оптимальну рекламну стратегію. У зв’язку з цим розглянуто 5 варіантів випуску реклами продукції в таких медійних засобах: 11 канал, Інтер, СТБ, 9 канал, 1+1. Керівник відділу реклами спирається у своєму виборі на такі показники: рейтинг телеканалу, вартість проведення рекламної акції, зона покриття і частота виходу в ефір рекламних блоків. Пріоритети перелічених критеріїв він оцінює таким чином: 0,5, 0,2, 0,1 та 0,2.

29. У заводській лабораторії вивчають доменний і коксовий гази. Склад кожного газу визначено й записано в табл. Д2.10. У ході лабораторних досліджень виявилось, що при змішуванні газів у деяких співвідношеннях кількість тепла, яка виділяється сумішшю при згорянні, була більшою, ніж та що має місце внаслідок згоряння окремо доменного чи коксового газу. До того ж спостерігалось, що після підвищення вмісту в складі суміші CO_2 кількість виділеної теплоти при згорянні збільшується, а коли підвищити вміст N_2 – то зменшується. Необхідно визначити процентний склад суміші, яка має найбільшу тепловіддачу.

Таблиця 2Д.10

Вміст компонентів у досліджуваних газах, %

Назва компонента	Назва газу	
	доменний	коксовий
CO_2	15	3
H_2	2	59
CH_4	0,3	27
CO	27	7
N_2	55,5	0
O_2	0,2	1
інші	–	2

30. Торговельній компанії необхідно розробити оптимальну стратегію діяльності, що забезпечить їй отримання найбільшого прибутку від продажу косметики. Як варіанти співробітництва розглянуто такі п’ять виробників: Nail Tek, Essie, Aura Chake, Serge Louis Alvares, Paul Mitchel. Критеріями вибору партнера слугують: якість та екологічність продукції, перспективи фінансового прибутку, ефективність торгівлі. Також відомі пріоритети кожного критерію.

31. Підприємство виробляє три види продукції: дозиметри, спектрометри, радіометри. Експертами визначено відносну важливість кожної характеристики продукції та з’ясовано переваги серед товарів за кожним показником. Необхідно встановити, який вид продукції найбільшою мірою задовольняє задані характеристики.

32. Підприємство для виготовлення чотирьох видів продукції використовує 5 типів устаткування, а також комплектувальні вироби. Крім того, виробнича технологія передбачає виконання певних складально-налагоджувальних робіт. Норми всіх видів витрат на виготовлення кожного з виробів, суму готівкового фонду кожного з ресурсів, величину прибутку від реалізації одиниці продукції кожного виду та обмеження на можливий випуск продукції 2-го й 3-го виду наведено в табл. Д2.11.

Таблиця Д2.11

Вихідні дані для складання плану випуску продукції

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Види витрат та ресурсів</th><th colspan="4">Норми витрат на виготовлення одного виробу, грн</th><th rowspan="2">Загальний обсяг витрат, грн</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Обладнання</td><td>Першого типу</td><td>550</td><td>0</td><td>620</td><td>0</td><td>64270</td></tr>
<tr><td>Другого типу</td><td>40</td><td>30</td><td>20</td><td>20</td><td>4800</td></tr>
<tr><td>Третього типу</td><td>86</td><td>110</td><td>150</td><td>52</td><td>22360</td></tr>
<tr><td>Четвертого типу</td><td>160</td><td>92</td><td>158</td><td>128</td><td>26240</td></tr>
<tr><td>П'ятого типу</td><td></td><td>158</td><td>30</td><td>50</td><td>7900</td></tr>
<tr><td colspan="2">Комплектувальні вироби, шт.</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>3</td><td>520</td></tr>
<tr><td colspan="2">Складально-налагоджувальні роботи, люд.-год</td><td>4,5</td><td>4,5</td><td>4,5</td><td>4,5</td><td>720</td></tr>
<tr><td colspan="2">Прибуток від реалізації одного виробу, грн</td><td>315</td><td>278</td><td>573</td><td>370</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Обсяг випуску, шт.</td><td>мінімальний</td><td></td><td>40</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>максимальний</td><td></td><td></td><td>120</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Потрібно розробити план випуску продукції, що забезпечить максимальний прибуток від її реалізації. Обмеження на використання п'ятого виду обладнання вважати нечітким.

33. Виробничий комплекс «Марина» випускає морозиво трьох видів: «Десертне» – № 1, «Вершкове» – № 2, «Молочне» – № 3. Попит на морозиво № 2 вищий, ніж на морозиво № 1, від чого у свою чергу залежать обсяги виробництва кожного з цих видів продукції. До того ж відомо, що попит на морозиво № 3 трохи нижчий, ніж на морозиво № 1. У рецептурі приготування всіх видів морозива використовуються такі види сировини: незбиране молоко, сухе молоко, цукор, емульгатори й стабілізатори (ем/ст) 1-го сорту, для виробництва морозива № 3, емульгатори і стабілізатори (ем/ст) 2-го сорту для виробництва морозива № 1, № 2, інші інгредієнти.

Співвідношення основних видів складових у готовій продукції має бути таким:

Морозиво № 1: незбиране молоко – 30 % сухе молоко; – 20 %; цукор – 20 %; емульгатори й стабілізатори 2-го сорту – 20 %.

Морозиво № 2: незбиране молоко – 30 %; сухе молоко – 20 %; цукор – 20 %; емульгатори й стабілізатори 2-го сорту – 20 %.

Морозиво № 3: незбиране молоко – 35 %; сухе молоко – 15 %; цукор – 20 %; емульгатори й стабілізатори 1-го сорту – 20 %.

На складі підприємства наявні такі ресурси: незбиране молоко (1200 кг), сухе молоко (100 кг), цукор (900 кг), емульгатори й стабілізатори 1-го (300 кг); емульгатори й стабілізатори 2-го сорту (500 кг); кількість інших інгредієнтів у даному випадку не має значення. Прибуток від продажу кілограма морозива № 1 становить 2,5 грн, № 2 – 2,5 грн, № 3 – 2,6 грн.

Необхідно розробити план випуску продукції, який забезпечить максимальний прибуток від її продажу.

34. Дослідити проблему вибору одного з варіантів системи вимірювання (контролю параметра) в різних умовах. При цьому рекомендується брати до уваги такі критерії: вартість, точність, універсальність, габарити, рівень автоматизації, надійність, діапазон вимірювання, швидкість вимірювань.

Конкретну мету й умови проведення вимірів, для яких обирають систему і відповідні пріоритети критеріїв, студент формулює самостійно або з огляду на такі рекомендації:

– вимірювання проводиться в процесі виконання науково-дослідних робіт, коли потрібна максимальна точність результату;

– контроль параметра здійснюють у реальних виробничих умовах;

– вимірювання супроводжують випробування досліджуваного об’єкта.

35. Здійснити вибір одного з варіантів проекту розвитку регіону, скориставшись такими критеріями:

– економічними: розмір витрат на будівництво нових об’єктів та очікуваний прибуток;

– соціальними: можливість формування інфраструктури, створення нових робочих місць, налагоджування зв’язків, зміни статусу, поліпшення комфорту й безпеки;

– екологічними: вплив на довкілля, естетичний вигляд та інші.

Пріоритети критеріїв студент обирає самостійно з огляду на конкретну мету розвитку регіону, наприклад:

– розширення виробничих потужностей;

– поліпшення екологічної ситуації;

– розвиток інфраструктури.

36. Вивчити можливості вибору одного з кандидатів на посаду. У процесі вибору рекомендовано враховувати такі критерії: освіта, досвід роботи за фахом, комунікабельність, авторитет, вік, стан здоров’я, здатність приймати рішення.

Посаду (вид діяльності), на яку здійснюється вибір кандидатів, студент визначає самостійно або орієнтується на рекомендовані, наприклад, вибір керівника (начальника відділу, заступника директора і т. д.); вибір на робоче місце виконавця (бухгалтера, менеджера, оператора і под.)

37. Комерційно-транспортна фірма (дистриб'ютор) закуповує однотипний товар у різних постачальників, а також транспортує його та реалізовує покупцям. Припустимо, що в співробітництві задіяно M постачальників та N покупців. Відомі граничні можливості кожного з них, до того ж ці дані описані нечітко.

Крім того, дистриб'ютор має у своєму розпорядженні інформацію про:

– ціну придбання одиниці товару в кожного постачальника t_i, $i = 1, 2, \ldots, M$;

– ціну продажу одиниці готової продукції s_j, $j = 1, 2, \ldots, N$;

– питомі транспортні витрати c_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, M$, $j = 1, 2, \ldots, N$;

– обов'язковий обсяг пропозиції за контрактом p_i, $i = 1, 2, \ldots, M$;

– обов'язковий обсяг попиту за контрактом q_j, $j = 1, 2, \ldots, N$;

– ціну одиниці товару, який закуповується поза контрактом k_i, $i = 1, 2, \ldots, M$;

– ціну одиниці товару, який продається поза контрактом r_j, $j = 1, 2, \ldots, N$;

Необхідно визначити, якими мають бути обсяги продукції x_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, M$, $j = 1, 2, \ldots, N$, закупленої в кожного з постачальників і проданої кожному із споживачів, щоб мінімізувати транспортні витрати й максимізувати прибуток дистриб'ютора.

38. Підприємство використовує кілька виробничих приміщень. Кожне з них характеризується відмінними від інших параметрами (розміри, застосована система освітлення, рівень забрудненості атмосфери, відбивна здатність поверхні, вимоги до освітлення та економії ресурсів). Для освітлення цих приміщень можуть бути використані кілька видів світильників, що мають різні технічні параметри. Задача полягає в раціональному виборі джерела світла для кожного приміщення з огляду на перелічені вище характеристики, тобто необхідно визначити, який вид ламп найбільшою мірою задовольняє всі вимоги.

39. На Запорізькому залізорудному комбінаті в процесі видобутку корисної копалини застосовують твердіючу суміш, яка складається з в'язких та інертних матеріалів. Інертним заповнювачем у приготуванні такої суміші слугують відходи енергетичного, металургійного й гірничого виробництва, зокрема доменні шлаки (x_1), хвости ЦГЗК (x_2), вапняно-доломітні матеріали (x_3), пісок (x_4) та суглинок (x_5). Необхідно розробити такий склад суміші, щоб її вартість була мінімальною, а міцність відповідала нормативним умовам (має становити 20 – 60 кг/см^2), води повинно міститися приблизно 20 % від в'язких складових, а цементу, вапняно-доломітного матеріалу й піску приблизно 65, 9, 35 і 18 % від інертних компонентів у суміші відповідно.

Враховувати, що залежність міцності суміші від її складових описується такою функцією: $\varphi(x) = 467x_1 + 380x_2 - 54x_3 + 87x_4 - 120x_5 - 23{,}25$.

39. Для проведення закладних робіт на гірничому підприємстві використовують кілька видів сумішей, що характеризуються такими ознаками: вартість виготовлення, міцність, основність, усадка, вміст горючих компонентів, пористість. Кожна з цих ознак має певний пріоритет. Необхідно вибрати оптимальний склад суміші, відповідний заданим пріоритетам.

40. Покупець вибирає одну з п’яти моделей пральних машин, оцінюючи кожну за такими ознаками: вартість, потужність, економічність, габаритні розміри, маса завантажуваної білизни. Необхідно: а) сформулювати й розв’язати з огляду на ці умови задачу досягнення нечітко визначеної мети; б) сформулювати й розв’язати задачу вибору альтернативи за нечіткими відношеннями переваги. Зробіть необхідні припущення в кожному випадку.

Формулювання решти задач визначені тематично.

41. *Рейтинг клієнта* (який з клієнтів частіше купує мої товари? Хто з потенційних клієнтів найбільш перспективний?)

42. *Аналіз ризиків* (наприклад, вкладення в який із розглянутих керівництвом банку проектів найменш ризиковані?)

43. *Розподіл ресурсів.* Керівництво заводу розглядає перспективні проекти розвитку. Для них створюється модель рейтингової шкали. У підсумку кожному проекту приписується частка від одиниці. Ці частки показують, який відсоток від наявних ресурсів (сировини, грошей тощо) треба вкласти в кожен проект.

44. *Планування від досягнутого.* Беручи до уваги дані про основні фонди, кадри, сировину, інфраструктуру, партнерів, конкурентів, кон'юнктуру, вплив держави, наявну фінансову підтримку складають рейтинг можливостей формування певного становища підприємства через рік. При цьому мають на увазі такі ситуаціїї: все залишиться як є, банкрутство, бум основного виробництва, перепрофілювання, збільшення експорту, захоплення або втрата ринків тощо. Коли рейтинг таких можливостей відомий, то вживають заходи для підтримання позитивних тенденцій і для уникнення негативних.

45. *Планування бажаного майбутнього*. Рейтинг найбільш перспективних шляхів розвитку регіону відомий. Його керівники складають рейтинг заходів, яких треба вжити, щоб реалізувати найбільш перспективні сценарії.

46. *Комбіноване планування*. У визначенні пріоритетів діяльності результати планування від досягнутого та планування бажаного майбутнього враховують як рівноцінні.

47. *Прийняття кадрових рішень.* Передбачено складання рейтингу співробітників фірми за критерієм «корисність за останній місяць». у якому враховано такі фактори: компетентність, комунікабельність, участь у проектах, що принесли прибуток, і под. Переможці рейтингу можуть бути заохочені керівництвом.

48. *Вирішення конфліктів.* Керівники корпорації по-різному оцінюючи ситуацію, схиляються до реалізації різних проектів і не можуть дійти згоди в цих питаннях. Директор не вважає за потрібне приймати авторитарних рішень. З урахуванням специфіки діяльності корпорації необхідно скласти (можливо спільними зусиллями) рейтинг проектів і вибрати за його допомогою такий, що влаштовує всіх.

49. *Пошук істотних факторів.* Припустимо, що рейтинг як основу прийняття рішень складено. Відкидаємо деякі фактори. Якщо зміст рейтингу в принципі не змінився, то відкинуті критерії несуттєві. Визначення істотних факторів особливо актуальне для вирішення масштабних проблем та для процесу стратегічного планування.

50. *Задача вибору*. Вибір місця роботи серед декількох наявних варіантів з урахуванням таких факторів як, наприклад, розмір зарплати, пов'язаність або ні з відрядженнями, відстань від дому, можливість професійного зростання, соціальні гарантії, відповідність набутій спеціальності та ін.

51. *Визначення зон впливу.* Існує кілька підприємств, що виробляють однотипну продукцію, і деяка множина споживачів цієї продукції. Відомо критерії, за якими споживачі вибирають продукцію того чи іншого підприємства, і важливість цих критеріїв для кожного споживача, і також відповідність продукції цим критеріям. Необхідно визначити зони впливу кожного підприємства на споживачів (множину обслуговуваних ним споживачів).

52. *Планування діяльності підприємства*. Скориставшись даними про наявні виробничі потужності, запаси сировини, кількість замовлень і под., скласти програму діяльності, виконання якої забезпечить максимальний прибуток (повне використання сировини, максимальний рівень задоволення замовлень та ін.)

Предметний покажчик

Р

С

Т

Ф

Ч

Навчальне видання

Ус Світлана Альбертівна
Коряшкіна Лариса Сергіївна

МОДЕЛІ Й МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Навчальний посібник

Редактор О.Н. Ільченко

Підп. до друку 05.06.2014. Формат 30х42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 17,4.
Обл.-вид. арк. 23,0. Тираж 300 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видрукувано
в Державному вищому навчальному закладі
«Національний гірничий університет»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004 р.
49027, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса,19.