УДК 624.15

Шаповал В.Г., д.т.н., проф.
Государственный ВУЗ «НГУ», г. Днепропетровск, Украина
Моркляник Б.В., к.т.н., доц.
Национальный университет «Львовская политехника», г. Львов, Украина

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ СЕЗОННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ГРУНТОВОМ ОСНОВАНИИ

Задача определения закономерностей распределения температуры по глубине грунтовой толщи является основой при расчете коллекторов тепловых насосов [1]. На ее решение направлены изложенные ниже материалы теоретических исследований.

Задача исследований была сформулирована так. Известен закон изменения во времени температуры на верхней (при $z=0$) $T_{v1}(t)$ границе грунтового основания (рис. 1). Известно распределение температуры в основании по глубине $T_0(z)$ в момент времени $t=0$.

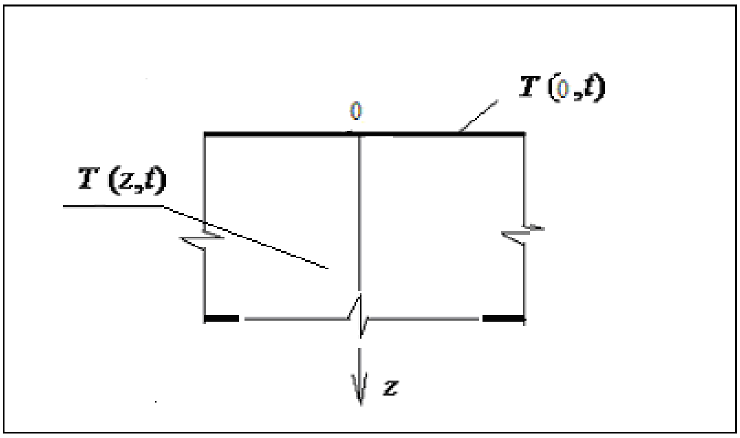

Рис. 1. К определению температурных полей в основании

Известны плотность ρ и теплофизические характеристики основания (т.е. его удельная теплоемкость c_p и коэффициент теплопроводности λ).

Требуется определить теоретический закон распределения температуры в грунтовом основании.

С физической точки зрения такая картина имеет место на вертикали, проходящей через центр неограниченного в плане основания [1, 2].

С математической точки зрения задача исследований сводится к решению уравнения теплопроводности вида [1, 2, 3]:

$$a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

при выполнении начального и граничных условий:

$$\left.\begin{aligned} &T(0,z) = T_0 = const; \\ &T(t,0) = T_V(t); \\ &z \in (0,\infty). \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Здесь

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}. \qquad (3)$$

Для того чтобы получить аналитическое решение (1) с учетом (2) следует представить граничное условие в аналитическом виде. Для этой цели используем полученную авторами работы [4] зависимость вида

$$\left.\begin{aligned} &T_V(t) = \sum_{i=0}^{4} a_i \cdot T_i^*(\xi); \\ &\xi = \frac{t}{12}. \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Здесь $T_i^*(x)$ - смещенные полиномы Чебышева первого рода [5]; a_i - коэффициенты аппроксимации фактических зависимостей "температура дневной поверхности – время" для городов Днепропетровска и Львова [4].

Численные значения коэффициентов a_i представлены в таблице 1.

Таблица 1

Коэффициенты a_i

Коэффициенты	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
Днепропетровск	5,377	1,915	-10,393	-6,246	5,319
Львов	7,135	0,359	-9,513	-5,309	4,649

Для того, чтобы найти решение (1) с учетом (2), (3) и (4) применим к уравнению теплопереноса (1), граничным и начальному условиям (2) и (4) одностороннее преобразование Лапласа по временной переменной t. Из (1) и (2) имеем:

$$a \cdot \frac{d^2 \overline{T}}{dz^2} - \omega \cdot \overline{T} = -T_0 \tag{5}$$

Из (2) имеем:

$$\left.\begin{aligned} T(0,z) &= \frac{T_0}{\omega}; \\ T(\omega,0) &= T_V(\omega). \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Из (4) имеем:

$$T_V(\omega) = \sum_{i=0}^{4} a_i \cdot \sum_{j=0}^{i} b_j \cdot \psi_j(\omega). \tag{7}$$

Здесь ω - параметр преобразования Лапласа; b_j - коэффициент j - того члена смещенного полинома Чебышева первого рода;

$$\psi_j(\omega) = \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{12}\right)^j \cdot e^{-\omega \cdot t} \cdot dt.$$

Решение (5) с учетом (6) имеет вид:

$$\overline{T} = \frac{T_0}{\omega} \cdot \left[1 - exp\left(-\frac{z \cdot \sqrt{\omega}}{\sqrt{a}}\right)\right] + T_W(\omega) \cdot exp\left(-\frac{z \cdot \sqrt{\omega}}{\sqrt{a}}\right) \tag{8}$$

Оригинал (8) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} & T(z,t) = T_0 \cdot erf\left(\frac{z}{\sqrt{a \cdot t}}\right) + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{\sqrt{a \cdot \pi}} \cdot \int_0^t \frac{T_V(\eta)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \cdot exp\left[-\frac{z^2}{4 \cdot a \cdot (t-\tau)}\right] \cdot d\tau; \\ & \eta = \frac{\tau}{12}. \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

С учетом (4) равенство (9) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &T(z,t) = T_0 \cdot erf\left(\frac{z}{\sqrt{a \cdot t}}\right) + \\ &+ \sum_{i=0}^{4} a_i \cdot \sum_{j=0}^{i} b_j \cdot \vartheta_j(z,t). \end{aligned}\right\}. \qquad (10)$$

Здесь:

$$\left.\begin{aligned}
&z1 = \frac{z}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}}; \\
&z2 = (z1)^2; \\
&\vartheta_0(z,t) = erfc(z1); \\
&\vartheta_1(z,t) = \frac{1}{12} \cdot \left[t \cdot erfc(z1) + \frac{z^2}{2 \cdot a} \cdot erfc(z1) - \frac{z \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{\pi \cdot a}} \cdot exp(-z2)\right]; \\
&\vartheta_2(z,t) = \frac{1}{12^2} \cdot \left\{\begin{aligned} &2 \cdot t^2 \cdot erfc(z1) + \frac{2 \cdot t \cdot z^2}{a} \cdot erfc(z1) + \\ &+ \frac{z^4}{6 \cdot a^2} \cdot erfc(z1) - \left[\begin{aligned} &\frac{10 \cdot z \cdot \sqrt{t^3}}{3 \cdot \sqrt{a \cdot \pi}} + \\ &\frac{z^3 \cdot \sqrt{t}}{3 \cdot \sqrt{a^3 \cdot \pi}} \end{aligned}\right] \cdot exp(-z2) \end{aligned}\right\}; \\
&\vartheta_3(z,t) = \frac{1}{12^3} \cdot \left\{\begin{aligned} &6 \cdot t^3 \cdot erfc(z1) + \frac{9 \cdot t^2 \cdot z^2}{a} \cdot erfc(z1) + \frac{3 \cdot t \cdot z^4}{2 \cdot a^2} \cdot erfc(z1) \\ &+ \frac{z^6}{20 \cdot a^3} \cdot erfc(z1) - \left[\begin{aligned} &\frac{66 \cdot z \cdot \sqrt{t^5}}{5 \cdot \sqrt{a \cdot \pi}} + \\ &\frac{14 \cdot z^3 \cdot \sqrt{t^3}}{5 \cdot \sqrt{a^3 \cdot \pi}} + \\ &\frac{z^5 \cdot \sqrt{t}}{10 \cdot \sqrt{a^5 \cdot \pi}} \end{aligned}\right] \cdot exp(-z2) \end{aligned}\right\};
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

$$\vartheta_4(z,t)=\frac{1}{12^4}\cdot\left\{\begin{array}{l} 24\cdot t^4\cdot erfc(z1)+\dfrac{48\cdot t^2\cdot z^3}{a}\cdot erfc(z1)+\\ \dfrac{12\cdot t^2\cdot z^4}{a^2}\cdot erfc(z1)+\\ +\dfrac{4\cdot t\cdot z^6}{5\cdot a^3}\cdot erfc(z1)+\dfrac{z^8}{70\cdot a^4}\cdot erfc(z1)-\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{2232\cdot z\cdot\sqrt{t^7}}{35\cdot\sqrt{a\cdot\pi}}+\dfrac{148\cdot z^3\cdot\sqrt{t^5}}{7\cdot\sqrt{a^3\cdot\pi}}+\\ \dfrac{54\cdot z^5\cdot\sqrt{t^3}}{35\cdot\sqrt{a^5\cdot\pi}}+\dfrac{z^7\cdot\sqrt{t}}{35\cdot\sqrt{a^7\cdot\pi}}\end{array}\right]\cdot exp(-z2)\end{array}\right\}. \qquad (11)$$

Здесь $erfc(x)=1-erf(x)$; $erf(x)$ - интеграл вероятности [5].

Выражение (10) с учетом (11) позволяет прогнозировать распределение температуры в грунтовой толще и при этом учитывать ее сезонные колебания. В этой связи они вполне могут быть использованы для расчета параметров тепловых насосов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шаповал В.Г., Моркляник Б.В. Основания и фундаменты тепловых насосов. Львов: Сполом - 2009 – 64 с.
2. Шаповал В.Г., Моркляник Б.В., Шаповал А.В. О целесообразности использования грунтовых оснований в качестве накопителей тепла. //Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво). Вип. 22. Полтава, 2008 – с. 138-142.
3. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. - М.: Высш.шк., 1985. - 480 с.
4. Моркляник Б.В. Закономерности сезонного распределения тепловых полей в грунтовом основании // Вісник Кременчуцького національного університету ім. М.Остроградського. – 2015. – № 2 (91). – С. 149-153.
5. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1974. – 840 с.