



НАУМ ЗУСЕЛЕВИЧ ШОР (1937 - 2006) один из основоположников направления недифференцируемой оптимизации в математическом программировании. Автор 10 монографий и более 200 статей

Родился 1 января 1937 г. в г. Киеве. После окончания в 1958 г. Киевского государственного университета им. Т. Г. Шевченко работал в Институте кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины (с 1983 по 1990 г.– заведующим лабораторией, с 1990 по 2006 г. – заведующим отделом). Профессор (1989), член-корреспондент (1990), академик (1997) Национальной академии наук Украины. Лауреат Государственных премий УССР (1973), СССР (1981), Украины (1993, 1999), премий НАН Украины имени В. М. Глушкова (1987), имени В. С. Михалевича (1997).

Работы Н. З. Шора положили начало численным методам оптимизации недифференцируемых функций и существенно повлияли на развитие линейного, нелинейного, дискретного и стохастического программирования. Разработанные им методы получили мировую известность и способствовали становлению Института кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины как одного из мировых лидеров в области теории и практики методов оптимизации.

Серия научных публикаций
«Недифференцируемая оптимизация и ее приложения»
посвященная Науму Зуселевичу Шору

Идеи и методы Н.З. Шора оказали большое влияние на развитие многих направлений математического программирования. Пионер субградиентного метода, он умело сочетал теорию и практику – придал субградиентным методам более высокую скорость сходимости и сделал их эффективным средством минимизации негладких функций, его техника лагранжевой релаксации для квадратичных невыпуклых задач оказалась очень эффективной при решении комбинаторных проблем. Книги Н.З. Шора стали настольными для ведущих отечественных и зарубежных специалистов в области математического программирования. Яркой характеристикой этому может служить письмо профессора С. Бойда (Stephen Boyd) из Стэнфордского университета.

Уважаемый профессор Шор!

Мы никогда не встречались, но ваши работы оказали на меня огромное влияние. Я начал с вашей небольшой книги по субградиентным методам (1985), я тогда был еще аспирантом. А сейчас я читаю вашу новую книгу о недифференцируемой оптимизации (1998) и просто наслаждаюсь ею.

Я высылаю Вам три написанных мною книги. Первая - о проектировании линейных контроллеров с помощью выпуклой оптимизации, вторая - о матричных неравенствах, а третья - учебник по выпуклой оптимизации. [...]

Надеюсь, Вы увидите ваше сильное влияние во всех этих книгах.

С уважением,

Стефан П. Бойд, 15.04-2005

В письме упоминаются две¹ англоязычные монографии Н.З. Шора. В первой книге значительное внимание уделяется использованию субградиентных методов для решения задач выпуклого программирования большой размерности, во второй – для решения многоэкстремальных квадратичных задач (с приложениями в задачах полиномиальной оптимизации и комбинаторных булевых задачах).

¹ SHOR N.Z.(1985) *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions*. - Berlin; New York: Springer-Verlag.

SHOR N.Z.(1998) *Nondifferentiable optimization and polynomial problems*. - Boston; Dordrecht; London: Kluwer Academic Publishers

На развитие идей Н.З. Шора были направлены два совместных проекта Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины и Академии транспорта, информатики и коммуникаций Республики Молдова. Первый проект закончился и был связан с опубликованием избранных трудов Н.З. Шора. Его результатом были три книги:

ШОР Н.З. Методы недифференцируемой оптимизации и сложные экстремальные задачи: Сб. избр. тр. – Кишинэу: Эврика, 2008. - 272 с.

ШОР Н.З. Методы минимизации негладких функций и матричные задачи оптимизации: Сб. избр. тр. – Кишинэу: Эврика, 2009. - 240 с.

ШОР Н.З. Алгоритмы последовательной и негладкой оптимизации: Сб. избр. тр. – Кишинэу: Эврика, 2012. - 270 с.

Второй проект связан с изданием серии книг под общим названием «Недифференцируемая оптимизация и ее приложения», где каждая отдельная книга посвящена современным теоретическим и практическим достижениям тех или иных направлений, связанных с научным наследием академика Н.З. Шора. Первая книга этой серии – монография Соломона Д.И. „*Дробное программирование и недифференцируемая оптимизация*“ была опубликована в 2010 году. Она посвящена методам решения задач дробного программирования с помощью субградиентных алгоритмов в сочетании со схемами декомпозиции.

Книга Стецюка П.И. „*Методы эллипсоидов и r-алгоритмы*“ продолжает эту серию. В ней представлены исследования автора по развитию методов эллипсоидов, которые являются частным случаем предложенных Н.З. Шором алгоритмов с преобразованием пространства. Эти методы базируются на внешней аппроксимации множества экстремумов эллипсоидами с монотонным уменьшением их объема и имеют „красивую“ геометрическую интерпретацию. В книге приведены ускоренные модификации методов эллипсоидов и показана их тесная связь с r-алгоритмами и другими методами минимизации негладких функций.

Следующей в серии «Недифференцируемая оптимизация и ее приложения» планируется публикация: Журбенко Н.Г. Субградиентные методы минимизации негладких функций. В настоящее время готовятся книги по использованию методов негладкой оптимизации в стохастическом программировании (Годонога А.Ф.) и проблемах раскраски плоских графов (Донец Г.А.).

Надеемся, что данная серия научных публикаций окажется полезной для специалистов в области математического программирования и они найдут в ней ряд оригинальных идей для построения эффективных алгоритмов решения экстремальных задач.

Редакционная коллегия

Из воспоминаний Е.М. Киселевой о сотрудничестве с Н.З. Шором

Первая моя встреча с Наумом Зуселевичем Шором состоялась в 1980 году в г. Пущино (Московской обл.) на VI Всесоюзном симпозиуме «Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования». Он руководил секцией, где я выступала с докладом «Об алгоритме решения одной задачи оптимального разбиения». Наум Зуселевич принял и одобрил схему перехода от исходной задачи бесконечномерного математического программирования (задачи оптимального разбиения) к конечномерной задаче оптимизации с недифференцируемой целевой функцией и практически мгновенно оценил слабую эффективность предлагаемого в докладе метода сглаживания для решения получаемой конечномерной задачи оптимизации. Для решения этой вспомогательной конечномерной негладкой оптимизационной задачи он предложил использовать метод минимизации с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных антиградиентов (r -алгоритм), автором которого он являлся.

Благодаря научному предвидению Наума Зуселевича, эта встреча оказалась судьбоносной не только для меня, но и для развития целого научного направления – нового раздела бесконечномерного математического программирования – теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств (ОРМ). Эта теория основанной на едином подходе, состоящем в сведении исходных бесконечномерных задач оптимизации определенным образом, например, через функционал Лагранжа, к негладким, как правило, конечномерным задачам оптимизации. Для численного решения полученных задач применяются современные эффективные методы недифференцируемой оптимизации – различные варианты r -алгоритма, разработанные Н.З. Шором и его учениками в Институте кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины.

Начавшееся в 1980 году научное сотрудничество с Наумом Зуселевичем воплотилось в основополагающие, для новой теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств, статьи:

КИСЕЛЕВА Е.М. Алгоритм решения задачи оптимального разбиения с ограничениями // Кибернетика, 1983. – № 1. – С. 115–120.

КИСЕЛЕВА Е.М., ШОР Н.З. Алгоритм решения многопродуктовой задачи оптимального разбиения с ограничениями // Кибернетика, 1985. – № 1. – С. 76–81.

КИСЕЛЕВА Е.М., ШОР Н.З. Решение непрерывной задачи оптимального разбиения в условиях неполной информации об исходных данных // Журн. вычисл. матем. и мат. Физики, 1991. – Т. 31, № 6. – С. 792–809.

КИСЕЛЕВА Е.М., ШОР Н.З. Исследование алгоритмов решения одного класса непрерывных задач разбиения // Кибернетика и системный анализ, 1994. – № 1. – С. 84 – 96.

С 1993 года под руководством проф. Е.М. Киселевой начинает формироваться научная школа, результаты которой (около 400 публикаций) вносят весомый вклад в развитие теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств.

Основы математической теории непрерывных линейных задач оптимального разбиения множеств n -мерного евклидова пространства на подмножества, сформировавшейся к 2005 году, представлены в монографии:

КИСЕЛЕВА Е.М., ШОР Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения // К.: Наукова думка, 2005. – 564 с.

Здесь же приведена обширная библиография, а также широкий спектр практических приложений непрерывных задач оптимального разбиения множеств и родственных с ними задач: оптимального покрытия, геометрического проектирования, классификации и кластеризации и др.

В силу того, что непрерывные задачи оптимального разбиения множеств часто выступают источником, порождающим негладкие задачи, составной частью численных алгоритмов их решения являются различные варианты r -алгоритма, разработанные в Институте кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины под руководством академика НАН Украины, д. ф.-м. н., профессора Н. З. Шора.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	15
ГЛАВА 1. Элементы нелинейного программирования и недифференцируемой оптимизации	18
1.1. Основная задача нелинейного программирования и некоторые методы ее решения.....	18
1.1.1. Постановка задачи нелинейного программирования....	18
1.1.2. Решение задач условной оптимизации методом Лагранжа.....	19
1.1.3. Градиентные методы решения задач безусловной оптимизации.....	21
1.1.4. Оптимизационные задачи для выпуклых функций.....	24
1.2. Элементы теории двойственности в нелинейном программировании.....	26
1.3. Специальные классы негладких функций. Источники, порождающие задачи негладкой оптимизации.....	29
1.3.1. Понятие субградиента выпуклой функции. Некоторые способы вычисления субградиента.....	29
1.3.2. Обобщенный градиентный спуск.....	33
1.3.3. Почти дифференцируемые функции. Полугладкие и полувыпуклые функции.....	37
1.4. Субградиентные методы с растяжением пространства в направлении субградиента.....	39
1.5. Субградиентные методы с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных субградиентов (γ -алгоритмы).....	45
1.5.1. Вычислительная схема γ -алгоритма.....	45
1.5.2. Применение γ -алгоритма к задаче поиска седловой точки выпукло-вогнутой функции. Псевдоградиентное множество.....	49
1.5.3. Модифицированные вычислительные схемы обобщенных градиентных методов с растяжением пространства.....	50
1.6. Общая схема декомпозиции по ограничениям и негладкие штрафные функции.....	52
1.6.1. Схема декомпозиции по ограничениям.....	53

1.6.2. Точные негладкие штрафные функции.....	56
Выводы к главе 1.....	61

ГЛАВА 2. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств n-мерного евклидова пространства E_n на подмножества. g-алгоритм Шора как составная часть методов оптимального разбиения множеств.....	62
2.1. Непрерывные линейные однопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств. Алгоритмы решения.....	62
2.1.1. Линейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множеств при ограничениях с отысканием координат центров подмножеств. Алгоритм решения..	62
2.1.2. Линейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множеств без ограничений с заданными координатами центров подмножеств и ее решение.....	70
2.1.3. Линейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множеств без ограничений с отысканием координат центров подмножеств и ее решение.....	71
2.1.4. Линейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множеств при ограничениях в форме равенств и неравенств с заданными координатами центров подмножеств и ее решение.....	72
2.2. Непрерывные линейные многопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств. Алгоритмы решения.....	74
2.2.1. Линейная многопродуктовая задача оптимального разбиения множеств при ограничениях с заданными координатами центров подмножеств. Алгоритм решения.....	74
2.2.2. Линейная многопродуктовая задача оптимального разбиения множеств при ограничениях с отысканием координат центров подмножеств. Алгоритм решения..	84
2.3. Непрерывные линейные задачи оптимального разбиения множеств из E_n с дополнительными ограничениями. Алгоритмы решения.....	91
2.3.1. Линейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множеств с дополнительными ограничениями.....	91

2.3.2. Линейная многопродуктовая задача оптимального разбиения множеств с дополнительными ограничениями.....	106
2.4. Непрерывные нелинейные задачи оптимального разбиения множеств n -мерного евклидова пространства E_n на подмножества с отысканием координат центров подмножеств.....	116
2.4.1. Нелинейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множеств с отысканием координат центров подмножеств для случая выпуклого целевого функционала Алгоритм решения.....	116
2.4.2. Нелинейная многопродуктовая задача оптимального разбиения множеств с отысканием координат центров подмножеств. Алгоритм решения.....	129
2.5. Применение γ -алгоритма Шора для решения динамических непрерывных задач оптимального разбиения множеств.....	140
2.5.1. Динамическая задача оптимального разбиения множеств с интегральными ограничениями.....	141
2.5.2. Динамическая задача оптимального разбиения множеств с размещением центров этих подмножеств..	154
2.5.3. Нелинейная динамическая задача оптимального разбиения множеств	166
Выводы к главе 2.....	177

ГЛАВА 3. Непрерывные задачи оптимального шарового покрытия и алгоритмы их решения..... 178

3.1. Непрерывные задачи оптимального однократного шарового покрытия множеств n -мерного евклидова пространства.....	178
3.1.1. Математические постановки непрерывных задач оптимального шарового покрытия и схемы их решения.....	179
3.1.2. Свойства непрерывной задачи об оптимальном шаровом покрытии. Построение субградиента целевой функции.....	183
3.1.3. Алгоритм оптимального однократного шарового покрытия множества.....	186

3.1.4.	Решение модельных задач об оптимальном шаровом покрытии множеств со сложной границей. О связи непрерывных задач оптимального шарового покрытия и оптимального разбиения множеств.....	192
3.2.	О некоторых практических задачах оптимального покрытия...	200
3.2.1.	Размещение базовых станций при проектировании сетей беспроводной связи.....	200
3.2.2.	Описание метода решения. Построение субградиента целевой функции.....	204
3.3.	Непрерывные задачи оптимального многократного шарового покрытия множеств и их практические приложения.....	207
3.3.1.	Математическая постановка задачи многократного оптимального покрытия.....	209
3.3.2.	Описание метода решения. Построение субградиента целевой функции.....	213
3.3.3.	Конструктивные алгоритмы решения задач оптимального многократного шарового покрытия ограниченного множества.....	217
3.3.4.	Результаты решения модельных задач многократного шарового покрытия.....	224
3.3.5.	Непрерывная задача оптимального многократного шарового покрытия множеств с ограничениями.....	229
	Выводы к главе 3.....	236

ГЛАВА 4. Применение методов оптимального разбиения множеств к решению различных задач теории и практики..... 237

4.1.	Теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств как универсальный математический аппарат построения диаграммы Вороного и её обобщения.....	237
4.1.1.	Диаграмма Вороного как математический инструментальный решения различных практических задач.....	237
4.1.2.	Определение диаграммы Вороного и некоторых её обобщений.....	240

4.1.3.	Построение диаграммы Вороного и её различных обобщений с помощью алгоритмов решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств.....	245
4.2.	Построение оптимальных квадратур.....	255
4.2.1.	Сведение задачи построения оптимальных квадратур к задаче оптимального разбиения множества.....	256
4.2.2.	Алгоритм отыскания узлов оптимальной квадратурной формулы.....	258
4.2.3.	Алгоритмы отыскания коэффициентов оптимальной квадратурной формулы.....	260
4.3.	Поиск глобального минимума недифференцируемой функции с помощью метода оптимального разбиения множеств.....	266
4.3.1.	Сведение задачи глобальной оптимизации к задаче оптимального разбиения множеств.....	268
4.3.2.	Алгоритмы решения задачи глобальной оптимизации, сведенной к задаче оптимального разбиения.....	272
4.3.3.	Результаты исследования эффективности алгоритмов глобальной оптимизации.....	281
4.4.	Решение обобщенной задачи Неймана–Пирсона с использованием методов оптимального разбиения множеств..	285
4.4.1.	Проблема Неймана–Пирсона. Некоторые понятия и определения теории статистических гипотез.....	285
4.4.2.	Математическая постановка обобщенной задачи Неймана-Пирсона, описание метода ее решения.....	290
4.4.3.	Алгоритм решения обобщенной задачи Неймана-Пирсона с одновременным отысканием констант, входящих в оптимальное решение.....	291
4.5.	Модельные нелинейные задачи оптимального разбиения множеств.....	294
4.5.1.	Нелинейные однопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств с отысканием координат центров подмножеств.....	294

4.5.2.	Нелинейные многопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств с отысканием координат центров подмножеств.....	299
4.5.3.	Решение модельных динамических задач оптимального разбиения множеств.....	304
4.6.	Обратные задачи математической физики, сводящиеся к непрерывным задачам оптимального разбиения множеств.....	310
4.6.1.	Постановка задачи восстановления разрывных начальных условий для параболического уравнения...	310
4.6.2.	Сведение задачи управления к непрерывной задаче оптимального разбиения и исследование ее разрешимости.....	312
4.6.3.	Необходимые и достаточные условия оптимальности редуцированной задачи оптимального разбиения множеств.....	316
4.6.4.	Конечномерная аппроксимация задачи оптимального разбиения множеств и алгоритм ее решения.....	323
4.6.5.	Сходимость и оценка погрешности конечномерной аппроксимации задачи.....	325
4.7.	Задачи идентификации разрывных правых частей параболического уравнения и начальных условий.....	331
4.7.1.	Задача идентификации функции распределенного источника.....	331
4.7.2.	Параметрическая идентификация кусочно-непрерывной функции начальных условий для параболического уравнения.....	333
4.8.	Задача управления с недифференцируемым критерием качества как модель задачи идентификации разрывных начальных условий.....	336
4.8.1.	Постановка задачи управления и схема метода ее решения.....	336
4.8.2.	Дифференциала Гато функционала вспомогательной задачи.....	338
4.8.3.	Элементы вычислительной технологии.....	340
4.8.4.	Решение тестовых и модельных задач с недифференцируемым функционалом.....	342

4.9. Решение некоторых задач идентификации динамических систем методами оптимального разбиения множеств.....	345
4.10. Размещение конечного числа источников в непрерывной среде с целью максимизации минимального совокупного эффекта действия этих источников.....	371
Выводы к главе 4.....	383
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	384
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	386

ПРЕДИСЛОВИЕ

Последние десятилетия характеризуются большим интересом исследователей, инженеров, математиков к проблемам негладкой оптимизации. Так называемые «негладкие задачи» (т.е. задачи, математическое описание которых содержит недифференцируемые функции или функционалы) появляются в технике, экономике, при моделировании технологических процессов. К задачам минимизации выпуклых функций с разрывным градиентом сводится большое число проблем, возникающих при решении сложных задач математического программирования. Большое внимание уделяется развитию аппаратных средств негладкого анализа (таких как субдифференциал и его обобщения), вариационного анализа, методов недифференцируемой оптимизации, применению негладкого анализа к решению задач экономики, механики, диагностики и распознавания образов, теории игр.

Владение методами недифференцируемой оптимизации дает возможность гибко использовать различные схемы декомпозиции (по переменным, ограничениям, ресурсам и т. п.), учитывая специфику задач большой размерности, позволяет эффективно получать двойственные оценки в задачах дискретного и непрерывно-дискретного программирования, а также для некоторых классов многоэкстремальных задач. Использование негладких функции штрафа позволяет при конечных значениях штрафных параметров получать задачу безусловной минимизации, полностью эквивалентную первоначальной задаче выпуклого программирования.

Цель данной монографии – познакомить читателей с моделями непрерывных задач оптимального разбиения множеств из пространства E_n , являющихся в некоторых постановках аналогами транспортных задач с континуальным спросом на продукцию. Ключевым моментом решения таких задач является сведение задач бесконечномерного программирования к задачам конечномерной оптимизации негладких функций и дальнейшее применение разработанных в Институте кибернетики методов недифференцируемой оптимизации.

В теории непрерывных задач ОРМ сформировался ряд направлений, обусловленных как различными типами математических постановок задач разбиения, так и различными сферами ее приложений. Это:

– детерминированные линейные и нелинейные, однопродуктовые и многопродуктовые задачи ОРМ при ограничениях, с заданным положением центров подмножеств или с поиском оптимального варианта их размещения;

– задачи оптимального разбиения множеств в условиях неопределенности, когда часть исходной информации имеет вероятностный характер или параметры, входящие в описание моделей, являются нечёткими, неточными, недостоверными;

– динамические задачи оптимального разбиения с критерием оптимальности, зависящим от фазовых траекторий и управления некоторой заданной управляемой системы;

– непрерывные задачи о шаровом покрытии, сводящиеся к задачам ОРМ.

Для решения приведенных классов задач оптимального разбиения множеств предложен единый подход, в основе которого лежит следующая идея. Исходные задачи ОРМ, математически сформулированные как бесконечномерные задачи оптимизации, сводятся определенным образом (например, через функционал Лагранжа) к вспомогательным конечномерным негладким задачам максимизации либо негладким задачам максимина, для численного решения которых применяются современные эффективные методы недифференцируемой оптимизации, а именно различные модификации γ -алгоритма Н. З. Шора.

Особенностью такого подхода для линейных задач ОРМ является тот факт, что решение исходных бесконечномерных задач оптимизации удается получить аналитически в явном виде, причем в аналитическое выражение могут входить параметры, отыскиваемые как оптимальное решение вышеназванных вспомогательных конечномерных задач оптимизации с негладкими целевыми функциями. Решение нелинейных задач ОРМ удается получить в виде операторных уравнений с параметрами, отыскиваемыми как оптимальное решение вышеназванных вспомогательных конечномерных негладких задач оптимизации, для решения которых применяются различные модификации γ -алгоритма.

Методы решения задач ОРМ, основанные на описанном выше походе, теоретически обоснованы. На их основе разработаны алгоритмы, составной частью которых является γ -алгоритм Шора или его модификации. Все алгоритмы программно реализованы и протестированы на модельных задачах.

Благодаря использованию γ -алгоритма и его модификаций как составной части разработанных методов решения задач оптимального разбиения множеств, технологии, основанные на математическом аппарате теории непрерывных задач ОРМ и соответствующем программном обеспечении, эффективно применяются для решения некоторых теоретических классов оптимизационных задач, сводящихся к задачам ОРМ. Это –

задачи распознавания образов (четких и нечетких), кластеризации, классификации; задачи теории статистических решений; теоретические задачи оптимизации, которые сводятся к задачам оптимального разбиения множеств, а именно: задачи глобальной оптимизации; задачи построения оптимальных квадратур; непрерывные задачи шарового покрытия; задачи стохастического программирования и другие.

Первая глава монографии имеет вводный характер, содержит некоторые элементы нелинейного программирования и недифференцируемой оптимизации.

Вторая глава содержит ряд математических моделей непрерывных задач оптимального разбиения множеств, линейных, нелинейных и динамических, однопродуктовых и многопродуктовых, а также алгоритмы их решения.

В третьей главе рассматриваются непрерывные задачи оптимального шарового покрытия ограниченных множеств, являющиеся родственными к задачам ОРМ.

Четвертая глава посвящена различным приложениям моделей и методов теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств. Продемонстрирована возможность применения математического и алгоритмического аппарата решения непрерывных задач ОРМ для: построения диаграммы Вороного и различных ее вариаций, имеющих широкий спектр практических приложений; построения оптимальных квадратур; поиска глобального оптимума в задачах многомерной оптимизации; решения некоторых обратных задач для динамических систем.

Авторы искренне признательны Н.В. Балейко за оформление рукописи.

Авторы надеются, что настоящая монография будет интересна специалистам и молодым исследователям (студентам, аспирантам, начинающим ученым) в области вычислительной математики и математической кибернетики. Знакомство с широким классом задач бесконечномерного математического программирования – непрерывными задачами оптимального разбиения множеств – и их проявлениями в теории и на практике окажется полезным и плодотворным для дальнейшего развития и приложений моделей и методов недифференцируемой оптимизации.

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Приведем основные сведения из теории нелинейного программирования, некоторые факты выпуклого анализа в конечномерном евклидовом пространстве и схемы декомпозиции, приводящие к задачам недифференцируемой оптимизации. Особое внимание уделим тем понятиям и вопросам, которые непосредственно используются в последующем изложении методов решения неклассических задач бесконечномерного математического программирования, таких как непрерывные задачи оптимального разбиения ограниченных множеств из пространства E_n , а также родственные им непрерывные задачи оптимального шарового покрытия множеств.

1.1. Основная задача нелинейного программирования и некоторые методы ее решения

1.1.1. Постановка задачи нелинейного программирования

Общая задача нелинейного программирования определяется как задача нахождения минимума (или максимума) целевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на множестве D :

$$D = \left\{ x \in R^n, \begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, & i = \overline{1, r} \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, & i = \overline{r+1, m} \end{cases} \right\}, \quad (1.1.1)$$

где *хотя бы одна* из функций f или g_i является нелинейной.

Задача нелинейного программирования однозначно определяется парой (D, f) и кратко может быть записана в следующем виде:

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in D}. \quad (1.1.2)$$

Вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in D$ называется *допустимым решением*. Если для любого $x \in D$ выполняется неравенство $f(x^*) \leq f(x)$, то x^* – *оптимальное решение* задачи (1.1.2), точка глобального минимума.

Задача (1.1.2) является весьма общей, т. к. допускает запись логических условий, например:

$$\left[(g_1(x) \leq 0) \Rightarrow (g_2(x) > 0) \right] \Leftrightarrow \left[g_1(x) + y^2 g_2(x) > 0, y \in R \right],$$

или запись условий дискретности множеств:

$$\left[(x = 0) \vee (x = 1) \right] \Leftrightarrow \left[x^2 - x = 0 \right].$$

Набор ограничений, определяющих множество D , при необходимости всегда можно свести либо к системе, состоящей из одних неравенств:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ -g(x) \geq 0, \end{cases}$$

либо, добавив фиктивные переменные y , к системе уравнений:

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) - y^2 = 0.$$

Перечислим свойства задач вида (1.1.2), которые существенно усложняют процесс их решения:

1. Множество допустимых планов D может иметь очень сложную структуру (например, быть невыпуклым или несвязным).

2. Глобальный минимум (максимум) может достигаться как внутри множества D , так и на его границах (где он, вообще говоря, не будет совпадать ни с одним из локальных экстремумов).

3. Целевая функция f может быть недифференцируемой, что затрудняет применение классических методов математического анализа.

В силу названных факторов задачи нелинейного программирования настолько разнообразны, что для них не существует общего метода решения.

1.1.2. Решение задач условной оптимизации методом Лагранжа

Одним из наиболее общих подходов к решению задачи поиска экстремума (локального минимума или максимума) функции при наличии связующих ограничений на ее переменные (или, как еще говорят, *задачи условной оптимизации*) является **метод Лагранжа**. Идея данного метода состоит в сведении задачи поиска условного экстремума целевой функции

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{1.1.3}$$

на множестве допустимых значений D , описываемом системой уравнений

$$D: \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

к задаче безусловной оптимизации функции

$$L(x, u) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.1.5)$$

где $u \in R^m$ – вектор дополнительных переменных, называемых *множителями Лагранжа*. Функцию $L(x, u)$, где $x \in R^n$, $u \in R^m$, называют *функцией Лагранжа*. В случае дифференцируемых функций f и g_i справедлива теорема, определяющая необходимое условие существования точки условного экстремума в задаче (1.1.3), (1.1.4). Поскольку она непосредственно относится к предмету математического анализа, приведем ее без доказательства.

Теорема 1.1. Если x^* является точкой условного экстремума функции (1.1.3) при ограничениях (1.1.4) и ранг матрицы первых частных производных функций

$$\left\| \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \right\|_{m \times n}$$

равен m , то существуют такие значения $u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*$, не равные одновременно нулю, при которых

$$\nabla L(x^*, u^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m u_i^* \nabla g_i(x^*) = 0. \quad (1.1.6)$$

Теорема 1.1 лежит в основе метода поиска условного экстремума, получившего название метода множителей Лагранжа, или просто **метода Лагранжа**, который состоит из следующих этапов.

1. Составление функции Лагранжа $L(x, u)$.
2. Нахождение частных производных

$$\frac{\partial L(x, u)}{\partial x_j} \quad (j = \overline{1, n}) \quad \text{и} \quad \frac{\partial L(x, u)}{\partial u_i} \quad (i = \overline{1, m}).$$

3. Решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x, u)}{\partial x_j} = 0, & (j = \overline{1, n}); \\ \frac{\partial L(x, u)}{\partial u_i} = g_i(x) = 0, & (i = \overline{1, m}) \end{cases} \quad (1.1.7)$$

относительно переменных x и u .

4. Исследование точек, удовлетворяющих системе (1.1.7), на минимум (максимум) с помощью достаточного признака экстремума.

Наличие четвертого этапа объясняется тем, что теорема 1.1 дает лишь необходимое, но не достаточное условие экстремума. Достаточные признаки условного экстремума существуют, но справедливы они для гораздо более частных ситуаций (при весьма жестких предпосылках относительно функций f и g_i) и, как правило, трудноприменимы на практике. Основное практическое значение метода Лагранжа заключается в том, что он *позволяет перейти от условной оптимизации к безусловной* и, соответственно, расширить арсенал доступных средств решения задачи. Задача решения системы уравнений (1.7), к которой сводится данный метод, в общем случае не проще исходной проблемы поиска экстремума (1.1.3), (1.1.4). Методы, подразумевающие такое решение, называются *непрямыми*. Они могут быть применены для весьма узкого класса задач, для которых удастся получить линейную или сводящуюся к линейной систему уравнений (1.1.7). Их применение объясняется необходимостью получить решение экстремальной задачи в аналитической форме (допустим, для тех или иных теоретических выкладок). При решении конкретных практических задач обычно используются *прямые* методы, основанные на итеративных процессах вычисления и сравнения значений оптимизируемых функций.

1.1.3. Градиентные методы решения задач безусловной оптимизации

Ведущее место среди прямых методов решения экстремальных задач занимает *градиентный метод* (точнее, семейство градиентных методов) поиска стационарных точек дифференцируемой функции $f(x)$. Напомним, что *стационарной* называется точка, в которой $\nabla f(x) = 0$ и которая, в соответствии с необходимым условием оптимальности, является «подозрительной» на наличие локального экстремума. Таким образом, применяя градиентный метод, находят множество точек локальных минимумов (или максимумов), среди которых определяется минимум (или максимум) глобальный.

Идея данного метода основана на том, что градиент функции указывает направление ее *наиболее быстрого возрастания* в окрестности той точки, в которой он вычислен. Поэтому, если из некоторой текущей точки $x^{(1)}$ переместиться в направлении вектора $\nabla f(x) = 0$, то функция f будет возрастать, по крайней мере, в некоторой окрестности $x^{(1)}$. Следовательно, для точки $x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda \nabla f(x^{(1)})$, ($\lambda > 0$), лежащей в такой окрестности, справедливо неравенство $f(x^{(1)}) \leq f(x^{(2)})$ (см. рис. 1.1).

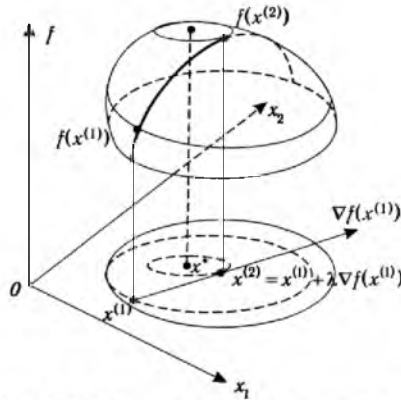


Рис. 1.1. Направление подъема в точке $x^{(1)}$

Рассмотрим задачу

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in R^n}.$$

Как только определяется направление движения, сразу же встает вопрос о том, как далеко следует двигаться в этом направлении. Другими словами, возникает проблема выбора шага λ в рекуррентной формуле

$$x^{(q+1)} = x^{(q)} - \lambda \nabla f(x^{(q)}), \quad (1.1.8)$$

задающей последовательность точек, стремящихся к точке минимума целевой функции. В зависимости от способа ее решения различают различные варианты градиентного метода. Наиболее известным из них является **метод наискорейшего спуска**.

Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – дифференцируемая функция, заданная на R^n , а $x^{(q)} = (x_1^{(q)}, x_2^{(q)}, \dots, x_n^{(q)})$ – некоторая текущая точка. Заметим, что каких-либо общих рекомендаций, касающихся выбора исходной точки (или, как еще говорят, начального приближения) $x^{(0)}$, не существует. По возможности, она должна находиться близко от искомого оптимального плана x^* . Если $x^{(q)}$ – нестационарная точка (т. е. $|\nabla f(x^{(q)})| > 0$), то при движении в направлении **антиградиента** $-\nabla f(x^{(q)})$ функция $f(x)$ на некотором промежутке обязательно будет убывать. Отсюда возникает естественная идея такого выбора ша-

га, чтобы движение в указанном направлении продолжалось до тех пор, пока возрастание не прекратится. Для этого выразим зависимость значения $f(x)$ от шагового множителя $\lambda > 0$, полагая $x = x^{(q)} - \lambda \nabla f(x^{(q)})$:

$$f(x) = f\left(x^{(q)} - \lambda \nabla f\left(x^{(q)}\right)\right) = \varphi(\lambda), \quad (1.1.9)$$

или, в координатной форме,

$$\varphi(\lambda) = f\left(x_1^{(q)} - \lambda \frac{\partial f(x^{(q)})}{\partial x_1}, \dots, x_n^{(q)} - \lambda \frac{\partial f(x^{(q)})}{\partial x_n}\right). \quad (1.1.10)$$

Чтобы добиться наибольшего из возможных значений $f(x)$ при движении по направлению $-\nabla f(x^{(q)})$, нужно выбрать такое значение $\tilde{\lambda}$, которое минимизирует функцию $\varphi(\lambda)$ ($\varphi(\tilde{\lambda}) = \min_{\lambda > 0} \varphi(\lambda)$). Для вычисления $\tilde{\lambda}$, можно воспользоваться необходимым условием экстремума: $d\varphi(\tilde{\lambda})/d\lambda = 0$. Заметим, что если для любого $\lambda > 0$ $d\varphi(\tilde{\lambda})/d\lambda < 0$, то функция $f(x)$ не ограничена снизу (т. е. не имеет минимума). В противном случае, на основе (1.1.10) получаем

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \times \frac{dx_1}{d\lambda} + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \times \frac{dx_n}{d\lambda}, \quad (1.1.11)$$

что, в свою очередь, дает

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \times \frac{\partial f(x^{(q)})}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \times \frac{\partial f(x^{(q)})}{\partial x_n} = \nabla f(x) \nabla f(x^{(q)}). \quad (1.1.12)$$

Если считать, что следующая точка $x^{(q+1)}$ соответствует оптимальному значению $\lambda = \tilde{\lambda}$, то в ней должно выполняться условие $d\varphi(\tilde{\lambda})/d\lambda = 0$, и $\tilde{\lambda}$ следует находить из условия

$$\nabla f\left(x^{(q)} - \tilde{\lambda} \nabla f\left(x^{(q)}\right)\right) \nabla f\left(x^{(q)}\right) = 0. \quad (1.1.13)$$

Условие (1.1.13) означает равенство нулю скалярного произведения градиентов функции f точках $x^{(q+1)}$ и $x^{(q)}$. Геометрически оно может быть интерпретировано как перпендикулярность векторов градиентов функции f в указанных точках, что и показано на рис. 1.2. В точке $x^{(q+1)}$ вектор $-\nabla f\left(x^{(q+1)}\right)$,

будучи антиградиентом, перпендикулярен линии уровня, проходящей через данную точку, а вектор $-\nabla f(x^{(q)})$ является касательным к этой линии.

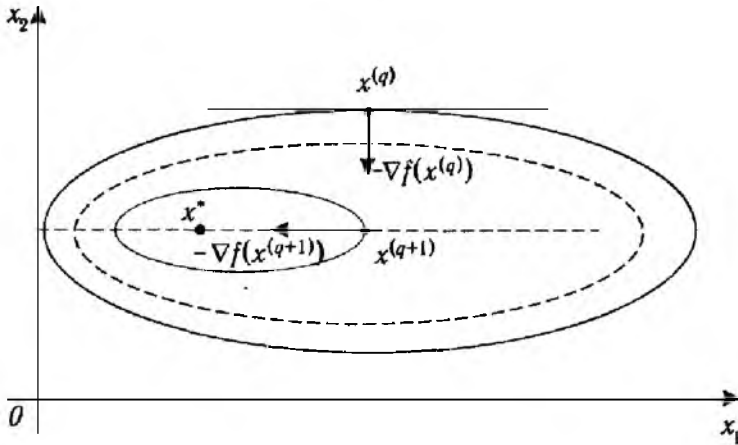


Рис. 1.2. Геометрическая интерпретация метода наискорейшего спуска

И таким образом, движение в направлении антиградиента $-\nabla f(x^{(q)})$ следует продолжать до тех пор, пока он пересекает линии уровня оптимизируемой функции. После того, как точка $x^{(q+1)}$ найдена, она становится текущей для очередной итерации. На практике признаком достижения стационарной точки служит достаточно малое изменение координат точек, рассматриваемых на последовательных итерациях. Одновременно с этим координаты вектора $\nabla f(x^{(q)})$ должны быть близки к нулю.

1.1.4. Оптимизационные задачи для выпуклых функций

Существует один класс функций, для которых градиентные методы приводят к нахождению глобального оптимума. Это выпуклые функции.

Функция $f(x)$ называется **выпуклой** на выпуклом множестве D , если для любых точек $x^{(1)}, x^{(2)} \in D$ и любого $\lambda \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$f\left((1-\lambda)x^{(1)} + \lambda x^{(2)}\right) \leq (1-\lambda)f\left(x^{(1)}\right) + \lambda f\left(x^{(2)}\right); \quad (1.1.14)$$

если же имеет место неравенство

$$f\left((1-\lambda)x^{(1)} + \lambda x^{(2)}\right) \geq (1-\lambda)f\left(x^{(1)}\right) + \lambda f\left(x^{(2)}\right), \quad (1.1.15)$$

то функция называется **вогнутой**.

Геометрический смысл понятий выпуклости и вогнутости для случая функции одной переменной представлен на рис. 1.3.

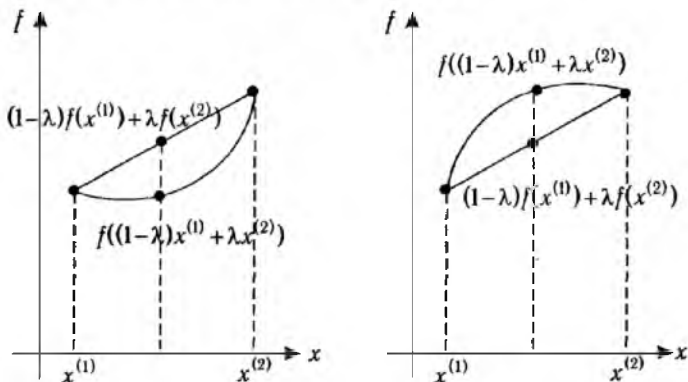


Рис. 1.3. Выпуклая и вогнутая функции

Как известно, достаточным условием выпуклости функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является положительная определенность матрицы

$$H(x) = \left\| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{m \times n},$$

называемой также *матрицей Гессе*, во всех точках $x \in D$. Соответственно, достаточным условием вогнутости является отрицательная определенность матрицы Гессе.

Как следует из геометрической интерпретации, для выпуклой функции локальный экстремум, если он существует, совпадает с глобальным ее экстремумом. Справедлива теорема.

Теорема 1.2. Если $f(x)$ выпуклая (вогнутая) на R^n функция и $\nabla f(x^*) = 0$, то x^* – точка глобального минимума (максимума).

Поскольку выпуклые функции обладают столь «полезными» оптимизационными качествами, они занимают исключительно важное место в теории математического программирования. Соответствующий раздел носит название

выпуклого программирования, а общая задача выпуклого программирования формулируется как проблема поиска минимума выпуклой (максимума вогнутой) функции на выпуклом множестве.

1.2. Элементы теории двойственности в нелинейном программировании

В настоящем параграфе кратко остановимся на некоторых фундаментальных моментах теории нелинейного программирования. Отправной точкой для них является распространение метода Лагранжа для решения задачи нелинейного программирования с ограничениями в форме неравенств:

$$f(x) \rightarrow \min, D = \{x \in X \mid g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, i \in 1:m\}, \quad (1.2.1)$$

где X – множество простой структуры в пространстве R^n .

Для задачи (1.2.1) определим функцию Лагранжа:

$$L(x, u) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.2.2)$$

Пара векторов (\bar{x}, \bar{u}) называется **седловой точкой** функции $L(x, u)$ в области $X \times U$, $U = \{u \in R^m : u_i \geq 0, i = \overline{1, m}\}$, если для любых $x \in X$ и $u \in U$

$$L(\bar{x}, u) \leq L(\bar{x}, \bar{u}) \leq L(x, \bar{u}). \quad (1.2.3)$$

Неравенства (1.2.3) также называют *неравенствами седловой точки* (рис. 1.4).

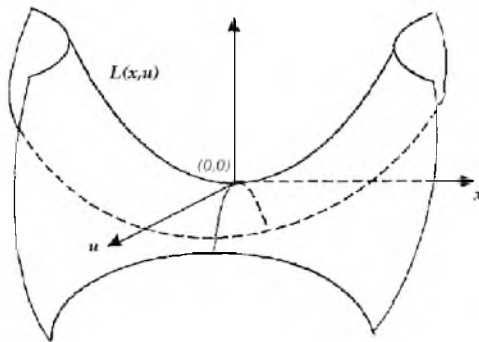


Рис. 1.4. Седловая точка функции $L(x, u)$

Центральное место в теории нелинейного программирования занимает теорема Куна — Таккера, которая связывает решение задачи нелинейного программирования с наличием седловой точки у соответствующей функции Лагранжа.

Теорема 1.3. (Достаточное условие экстремума). Если (\bar{x}, \bar{u}) — седловая точка функции Лагранжа, в области $x \in X \subseteq D$, $u \geq 0$, то \bar{x} является оптимальным решением задачи (1.16), причем справедливо так называемое **правило дополняющей нежесткости**:

$$\sum_{i=1}^m \bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0. \quad (1.2.4)$$

Утверждение, обратное теореме 1.3, т. е. необходимое условие экстремума в задаче нелинейного программирования, оказывается верным только при выполнении дополнительных условий, которым должна удовлетворять задача (1.2.1). Важнейшим из них является так называемое **условие регулярности Слейтера**.

Говорят, что функция $g_i(x)$, задающая ограничение в задаче (1.2.1), удовлетворяет условию регулярности Слейтера, если существует такая точка \tilde{x} , принадлежащая области допустимых решений D , что

$$g_i(\tilde{x}) < 0,$$

т. е. \tilde{x} является внутренней точкой относительно ограничения $g_i(x)$. Поэтому данное условие также называют условием телесности.

Вообще говоря, существуют разные варианты необходимого условия Куна — Таккера. Приведем один из них.

Теорема 1.4. (Необходимое условие наличия экстремума). Если задача (D, f) является задачей выпуклого программирования с решением \bar{x} , ее целевая функция $f(x)$ и функции ограничений $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, — дифференцируемы, нелинейные ограничения в форме неравенств удовлетворяют условию регулярности Слейтера, то существует такой вектор $\bar{u} \geq 0$, что (\bar{x}, \bar{u}) — седловая точка функции Лагранжа $L(x, u)$.

Заинтересованный в доказательстве теоремы 1.4 читатель может найти его в таких источниках, как [15, 16, 70, 112].

Значение теоремы Куна – Таккера состоит в том, что она позволяет связать процесс решения оптимизационной задачи с поиском седловых точек функции Лагранжа.

Определим $F(x)$ как функцию, ставящую в соответствие каждому значению x максимальное значение функции $L(x, u)$ по переменной u :

$$F(x) = \max_{u \in U} L(x, u),$$

и, по аналогии,

$$G(u) = \min_{x \in X} L(x, u).$$

Рассмотрим задачу отыскания минимума функции $F(x)$:

$$F(x) = \max_{u \in U} L(x, u) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (1.2.5)$$

и задачу максимизации $G(u)$:

$$G(u) = \min_{x \in X} L(x, u) \rightarrow \max, \quad u \in U. \quad (1.2.6)$$

Очевидно, что

$$F(x) = \max_{u \geq 0} L(x, u) = \begin{cases} f(x), & x \in D; \\ \infty, & x \notin D. \end{cases}$$

Отсюда следует, что минимум $F(x)$ находится в допустимой области D и совпадает с минимумом целевой функции $f(x)$ задачи (1.2.1):

$$\min_{x \in X} F(x) = \min_{x \in X} \max_{u \in U} L(x, u) = \min_{x \in D} f(x).$$

Таким образом, задача (1.2.5), в определенном смысле, равносильна (1.2.1). Аналогичные выводы могут быть получены и для (1.2.6). Задачи (1.2.5) и (1.2.6) образуют двойственную пару. При определенных условиях пара двойственных задач нелинейного программирования обладает свойствами, аналогичными свойствам двойственных линейных задач. В частности, при любых $x \in X, u \in U$:

$$F(x) \geq G(u). \quad (1.2.7)$$

Условие (1.2.7) находит широкое применение при построении оценок в итеративных методах решения оптимизационных задач. Например, если имеется возможность приблизительно решить прямую и двойственную задачи и получить последовательности приближений $\{x^{(q)}\}$ и $\{u^{(q)}\}$, то с помощью неравенств вида

$$f(x^{(q)}) \geq f(x^*) \geq G(u^{(q)})$$

можно определить момент остановки вычислительной процедуры.

В заключение отметим, что в процессе формирования нелинейных двойственных задач существует большая неоднозначность: их вид можно варьировать, включая в множество X часть ограничений $g_i(x) \leq 0$.

1.3. Специальные классы негладких функций. Источники, порождающие задачи негладкой оптимизации

Рассмотрим такие специальные классы недифференцируемых функций, которые, с одной стороны, являются не слишком широкими обобщениями класса непрерывно дифференцируемых функций в том смысле, что для функций этих классов можно достаточно разумно определить обобщенное понятие градиента и использовать его для построения процессов градиентного типа нахождения экстремума. С другой стороны, введенные специальные классы функций охватывают и функции, встречающиеся в большинстве практических приложений, где речь идет о непрерывных функциях, определенных на n -мерном евклидовом пространстве.

1.3.1. Понятие субградиента выпуклой функции. Некоторые способы вычисления субградиента

Пусть $f(x)$ – выпуклая функция, определенная на множестве $M \subseteq E_n$, X^* – множество минимумов (оно может быть и пустым), $x^* \in X^*$ – точка минимума; $\inf f(x) = f^*$; \bar{x} – внутренняя точка области определения M .

Определение. Субградиентом (обобщенным градиентом) $g_f(\bar{x})$ функции f в точке $\bar{x} \in \text{int} M$ называется вектор $g_f(\bar{x})$ такой, что

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq (g_f(\bar{x}), x - \bar{x}) \text{ для всех } x \in M.$$

Из определения субградиента следует, что если $f(x) < f(\bar{x})$, то

$$(-g_f(\bar{x}), x - \bar{x}) > 0. \tag{1.3.1}$$

Множество обобщенных градиентов (субградиентное множество) выпуклой функции $f(x)$ в точке \bar{x} обозначим $G_f(\bar{x})$. Для любой внутренней точки \bar{x} области определения M множество $G_f(\bar{x})$ не пустое, ограниченное, выпуклое и замкнутое (доказательство см. в [103]).

Для того чтобы внутренняя точка области определения $f(x)$ $x^* \in M$ была точкой минимума, необходимо и достаточно, чтобы $G_f(x^*)$ содержало точку 0.

Геометрически формула (1.3.1) означает, что *антисубградиент* в точке \bar{x} образует острый угол с произвольным направлением, проведенным из \bar{x} в сторону точки x с меньшим значением $f(x)$. Отсюда, если X^* непусто, $\bar{x} \notin X^*$, то при движении из \bar{x} в направлении $-g_f(\bar{x})$ с достаточно малым шагом расстояние до X^* убывает. Этот простой факт лежит в основе субградиентного метода или метода обобщенного градиентного спуска (ОГС), впервые предложенного в [103] в связи с решением сетевой транспортной задачи.

В [105] приведены следующие основные источники, порождающие задачи негладкой оптимизации.

1. **Задачи математического программирования большой размерности с блочной структурой и сравнительно небольшим числом связей между блоками.** Использование схем декомпозиции для решения таких задач приводит к задачам минимизации (максимизации), как правило, негладких функций от связывающих переменных или от множителей Лагранжа (двойственных оценок), соответствующих связывающим ограничениям.

2. **Задачи минимизации функции максимума.** Пусть задано параметрическое семейство выпуклых функций, определенных на всем пространстве E^n , $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$. Одним из источников получения негладких функций в выпуклом программировании является операция взятия поточечного максимума по параметру α , т.е. построение функции максимума:

$$F(x) = \sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x).$$

Область определения функции $F(x)$ ($\text{dom} F$) совпадает с такими значениями $x \in E^n$, при которых $\{f_\alpha(x)\}$ ограничена сверху по α . Для каждого $\bar{x} \in \text{dom} F$ определим подмножество индексов

$$I(\bar{x}) = \{\alpha \in A : f_\alpha(\bar{x}) = F(\bar{x})\}$$

Субградиентное множество $G_F(\bar{x})$ функции F в точке \bar{x} определяется формулой

$$G_F(\bar{x}) = \overline{\text{conv}} \left\{ \bigcup_{\alpha \in I(\bar{x})} G_{f_\alpha}(\bar{x}) \right\}, \quad (1.3.2)$$

где $\overline{\text{conv}}\{M\}$ обозначает операцию нахождения минимального выпуклого замкнутого множества, содержащего M , $G_{f_\alpha}(\bar{x})$ – субградиентные подмножества функций f_α в точке \bar{x} , $\alpha \in I(\bar{x})$. В случае, когда $I(\bar{x})$ – конечное множество, все крайние точки множества $G_F(\bar{x})$ являются субградиентами некоторых функций f_α , $\alpha \in I(\bar{x})$, в точке \bar{x} , и $G_F(\bar{x})$ представляет собой выпуклый многогранник соответствующей размерности.

3. Лагранжевы оценки в задачах математического программирования. Рассмотрим достаточно общую задачу математического программирования, ограничения которой разбиты на две группы, одни из которых имеют вид условия принадлежности $x \in X \subseteq E^n$, а другие составляют систему равенств:

найги

$$f^* = \inf_{x \in X} f(x), \quad X \subseteq E^n, \quad (1.3.3)$$

при ограничениях

$$g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.3.4)$$

Предположим, что X – замкнутое подмножество n -мерного евклидова пространства, $g_i(x)$ – непрерывные функции, определенные на X .

Для оценки f^* введем функцию Лагранжа

$$L(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x),$$

где $u = \{u_1, \dots, u_m\}$ – вектор множителей Лагранжа. Рассмотрим оценку

$$\psi(u) = \inf_{x \in X} L(x, u).$$

При любом допустимом x и произвольном u имеем $\psi(u) \leq f(x)$, откуда следует что $\psi(u) \leq f^*$.

Задача нахождения наилучшей оценки для оптимального значения задачи (1.3.3), (1.3.4) в данном классе лагранжевых оценок сводится к решению координирующей задачи: найти

$$\psi^* = \sup_{u \in R^m} \psi(u).$$

Функция $\psi(u)$ является вогнутой как результат операции минимизации по $x \in X$ параметрического (u – параметр) семейства линейных по u функций. Предположим, что $\psi(u)$ – собственная вогнутая функция с непустой об-

ластью $\text{dom } \psi$, имеющей внутренние точки. Пусть \bar{x} – некоторая внутренняя точка $\text{dom } \psi$, т.е. $\bar{x} \in \text{int dom } \psi$.

Тогда по правилам вычисления субградиента от функции максимума $\varphi(u) = -\psi(u)$ субградиентное множество $G_\varphi(\bar{u})$ определяется следующим образом:

$$G_\varphi(\bar{u}) = \overline{\text{conv}} \left\{ \bigcup_{x \in X(\bar{u})} G(x(\bar{u})) \right\},$$

где $X(u)$ – множество всевозможных решений локальной задачи $\inf_{x \in X} L(x, \bar{u})$; $G(x(\bar{u}))$ – вектор “невязок”, соответствующий решению $x(\bar{u})$, $G(x(\bar{u})) = \{g_1(x(\bar{u})), \dots, g_m(x(\bar{u}))\}$. Таким образом, если в точке \bar{x} локальная задача имеет неединственное решение, то градиент функции $\varphi(u)$ в соответствующей точке терпит разрыв.

4. Задачи минимизации функции максимума, характерные для моделей игрового характера, "многокритериальных" моделей оптимального планирования и исследования операций. К таким задачам сводятся задачи решения систем уравнений и неравенств, определения коэффициентов нелинейной регрессии, когда в качестве критерия используется чебышевский критерий минимизации максимума невязки (модуля невязки).

5. Задачи нелинейного программирования, для решения которых используется метод негладких штрафных функций. Негладкие штрафные функции определенного вида (см. далее) обладают несомненным преимуществом по сравнению с обычно применяемыми гладкими функциями штрафа: при использовании негладких штрафных функций нет необходимости устремлять штрафные коэффициенты к $+\infty$.

6. Задачи оптимального управления с непрерывным и дискретным временем. Использование принципа максимума Понтрягина или дискретного принципа максимума во многих случаях приводит к задачам минимизации функций с разрывным градиентом. Эти задачи можно рассматривать как специальные задачи нелинейного программирования, для решения которых применимы схемы декомпозиции или метод негладких штрафных функций.

7. Задачи дискретного программирования или задачи смешанного дискретно-непрерывного типа. Многие задачи такого рода достаточно успешно могут решаться с использованием метода ветвей и границ с получением оценок путем решения двойственной задачи. Двойственная задача обычно оказывается

задачей минимизации выпуклой кусочно-линейной функции с огромным числом "кусков" при простых ограничениях, т. е. задачей негладкой оптимизации.

8. *Функции с разрывным градиентом как результат кусочно-гладкой аппроксимации технико-экономических характеристик реальных объектов* могут непосредственно входить в модель задачи оптимального планирования, проектирования или исследования операций.

Следует также отметить, что с прикладной точки зрения нет резкой границы между негладкими и гладкими функциями: функция с очень быстро меняющимся градиентом близка по своим свойствам к негладкой функции. Поэтому вычислительные методы, разработанные для решения задач негладкой оптимизации, оказываются эффективными и для оптимизации "плохих" гладких функций (функций овражного типа).

Многочисленные приложения алгоритмов негладкой оптимизации для указанных классов задач можно найти в монографиях Н.З.Шора [100 – 105].

1.3.2. Обобщенный градиентный спуск

Методом обобщенного градиентного спуска (ОГС) или субградиентным методом называется процедура построения минимизирующей последовательности $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, а ее элемент x_k по следующему правилу:

$$x_{k+1} = x_k - h_k \frac{g_f(x_k)}{\|g_f(x_k)\|}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (1.3.5)$$

где x_0 – начальное приближение; $g_f(x_k)$ – произвольный субградиент функции $f(x)$ в точке x_k , $h_k > 0$ – шаговый множитель. Если $g_f(x_k) = 0$, то x_k – точка минимума функции $f(x)$, и процесс (1.3.5) останавливается.

Конкретный вариант метода ОГС типа (1.3.5) определяется процедурой выбора величины шага h_k . Среди известных способов определения h_k можно выделить следующие:

- 1) $h_{k+1} = \frac{h_0}{k+1}$, $h_0 > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$;
- 2) $h_{k+1} = \frac{h_k}{k+1}$, $h_0 > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$;
- 3) $h_{k+1} = \frac{h_k + h_{k-1}}{2}$, $h_0 > 0$, $h_1 = \frac{h_0}{2}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Наиболее общий результат о сходимости субградиентного метода связан с классическими условиями регулировки шага и содержится в следующей теореме [108].

Теорема 1.5. Пусть $f(x)$ – выпуклая функция, определенная на E_n , с ограниченной областью минимумов X^* , $\{h_k\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) – последовательность чисел, обладающая свойствами:

$$h_k > 0; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} h_k = 0; \quad \sum_{k=0}^{\infty} h_k = +\infty.$$

Тогда последовательность $\{x_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$), образованная по формуле (1.3.5), при произвольном $x_0 \in E_n$ обладает одним из следующих свойств: либо найдется такое $k = \bar{k}$, что $x_{\bar{k}} \in X^*$, либо $\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{y \in X^*} \|x_k - y\| = 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \min_{y \in E^n} f(x) = f^*.$$

Имеется несколько вариантов доказательства теоремы 1.5 и ее аналога для ОГС без нормировки субградиента:

$$x_{k+1} = x_k - h_k g_f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Все они основаны на изучении поведения последовательности $\{\rho_k\}_{k=0}^{\infty}$, где

$$\rho_k = \min_{x \in X^*} \|x_k - x\|.$$

Наиболее общий результат (для случая выпуклых функций, определенных в гильбертовом пространстве, когда минимизация производится при наличии ограничений) получен Б.Т. Поляком [75, 76]. Аналогичный результат для конечномерного случая получен Ю.М. Ермольевым [29]. Оба результата используют принцип доказательства от противного и не содержат конструктивных механизмов их распространения на специальные классы выпуклых функций. Конструктивный механизм содержит доказательство теоремы 1.5, принадлежащее Н.З. Шору. Оно использует вспомогательный результат о свойстве субградиентного процесса с постоянным шагом [103].

Лемма 1.1. Пусть в субградиентном методе (1.3.5) используется регулировка шага $h_k = h$, $h > 0$, для всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и $x^* \in X^*$ найдутся такие $k = k^*$ и $x \in E_n$, что будет выполняться свойство

$$f(\bar{x}) = f(x_{k^*}), \quad \text{причем} \quad \|\bar{x} - x^*\| < \frac{h}{2}(1 + \varepsilon).$$

Лемма 1.1 гарантирует уменьшение расстояния до точек области минимумов только в случае достаточно большого расстояния от множества минимумов

до точек x_k . Однако с помощью этой леммы можно обосновать сходимость субградиентного метода при дополнительных предположениях о свойствах минимизируемой функции. Так, например, если множество точек минимума содержит сферу радиуса $r > h/2$, то субградиентный метод с постоянным шагом h гарантирует нахождение такого k^* , что $x_{k^*} \in X^*$.

При определенных дополнительных предположениях некоторые варианты ОГС сходятся со скоростью геометрической прогрессии [103].

Теорема 1.6. Пусть $f(x)$ – выпуклая функция, определенная на E_n , и для всех $x \in E_n$ при некотором φ ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$) выполняется неравенство

$$(g_f(x), x - x^*(x)) \geq \cos \varphi \|g_f(x)\| \cdot \|x - x^*(x)\|, \quad (1.3.6)$$

где $x^*(x)$ – точка, принадлежащая множеству минимумов функции $f(x)$ и лежащая на кратчайшем расстоянии от x . Тогда, если при заданном x_0 выбрать величину h_0 , удовлетворяющую неравенству

$$h_0 \geq \begin{cases} \|x^*(x_0) - x_0\| \cos \varphi, & \pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2, \\ \|x^*(x_0) - x_0\| / (2 \cos \varphi), & 0 \leq \varphi < \pi/4, \end{cases}$$

определить $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$ в соответствии с рекуррентной формулой

$$h_{k+1} = h_k r(\varphi), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$r(\varphi) = \begin{cases} \sin \varphi, & \pi/4 \leq \varphi < \pi/2, \\ 1/(2 \cos \varphi), & 0 \leq \varphi < \pi/4, \end{cases}$$

и вычислить $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ по формуле (1.3.5), то либо при некотором индексе k^* $g_f(x_{k^*}) = 0$ и x_{k^*} принадлежит области минимумов, либо при всех $k = 0, 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$\|x_k - x^*(x_k)\| \leq \begin{cases} h_{k+1} / \cos \varphi, & \pi/4 \leq \varphi < \pi/2, \\ 2 \cos \varphi \cdot h_{k+1}, & 0 \leq \varphi < \pi/4. \end{cases}$$

Таким образом, если угол φ заранее известен, то, регулируя шаг по формулам теоремы 1.6, можно получить сходимость итерационного процесса (1.3.5) к точке минимума со скоростью геометрической прогрессии со знамена-

телем $q = r(\varphi)$. В формуле (1.3.5) величина $\cos \varphi$ характеризует степень вытянутости поверхностей уровня функции $f(x)$.

Если в некоторой окрестности минимума функции $f(x)$ не существует такого угла $\varphi < \pi/2$, что для любого x из этой окрестности выполняется (1.3.6), то такую функцию называют *существенно овражной*. При минимизации существенно овражных функций приведенный в теореме 1.6 способ регуляровки шаговых множителей неприменим. В этом случае следует использовать универсальный способ выбора шаговых множителей (см. теорему 1.5).

Следующая теорема, аналогичная теореме 1.6, сформулирована непосредственно в терминах, характеризующих степень "вытянутости" поверхностей уровня.

Теорема 1.7. Пусть выпуклая функция $f(x)$ определена на всем пространстве E_n , x^* – единственная точка минимума $f(x)$ и заданы начальное приближение x_0 и числа σ и h_0 , причем $\sigma \geq \sqrt{2}$, $h_0 \geq \|x_0 - x^*\|/\sigma$. Рассмотрим множество $Y = \{y : \|y - x^*\| \leq \sigma h_0\}$. Если для любой пары точек $x, z \in Y$ такой, что $f(x) = f(z) \neq f(x^*)$, выполняется условие

$$\|x - x^*\| \leq \sigma \|z - x^*\|,$$

то последовательность $\{x_k\}_{k=0}^\infty$, образованная с помощью рекуррентных формул (1.3.5), где $h_{k+1} = h_k \sqrt{\sigma^2 - 1}/\sigma$, сходится к x^* со скоростью геометрической прогрессии:

$$\|x - x^*\| \leq h_k \sigma,$$

за исключением случая, когда для некоторого $k = \bar{k}$ $g_f(x_{\bar{k}}) = 0$, т. е. $x_{\bar{k}} = x^*$.

Еще одним вариантом метода обобщенного градиентного спуска, сходящимся со скоростью геометрической прогрессии, является субградиентный метод, в котором шаговый множитель остается в течение определенного числа шагов постоянным, а затем уменьшается в два раза [103].

Теорема 1.8. Пусть выпуклая функция $f(x)$ определена на всем пространстве E_n , x^* – единственная точка минимума $f(x)$ и заданы начальное приближение x_0 и числа σ и h_0 , причем $\sigma \geq 2$, $h_0 \geq \|x_0 - x^*\|/\sigma$. Рассмотрим множество

$$Y = \{y : \|y - x^*\| \leq \sigma h_0\}.$$

Пусть для любой пары точек $x, z \in Y$, такой, что $f(x) = f(z) \neq f(x^*)$ выполняется условие

$$\|x - x^*\| \leq \sigma \|z - x^*\|.$$

Тогда для последовательности точек $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, построенных по формуле (1.3.5) при $h_k = h_0 \cdot 2^{-\lfloor (k)/N \rfloor}$, где $\lfloor a \rfloor$ – целая часть числа a , при достаточно большом h_0 и $N \geq 3\sigma^2 + 1$ выполняется неравенство

$$\|x_k - x^*\| \leq 2\sigma h_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 1.8 сформулирована в терминах, характеризующих степень вытянутости поверхностей уровня, и легко видеть, что чем больше σ , тем меньшей будет скорость сходимости субградиентного метода.

Методы ОГС дают возможность решать задачи производственно-транспортного планирования с применением схем декомпозиции для задач большой размерности. Подробную информацию об этих задачах можно найти в [72]. Метод ОГС также является основой для стохастического аналога обобщенного градиентного спуска, который имеет большое практическое применение, в частности, при решении многоэтапных задач стохастического программирования. В [100] описано применение метода обобщенного стохастического градиента к решению двухэтапной стохастической транспортной задачи, связанной с определением объемов складов однородной продукции при случайном спросе.

Результаты научных исследований, проводимых в Институте кибернетики по методам ОГС, получили развитие в работах И.И. Еремина [28] и Б.Т. Поляка [76] для решения задач выпуклого программирования с ограничениями.

1.3.3. Почти дифференцируемые функции. Полугладкие и полувывуклые функции

В большинстве работ, посвященных методам градиентного типа, предполагается непрерывность градиента, а для обобщенных градиентных методов – выпуклость минимизируемой функции. Но в прикладных задачах часто невозможно обеспечить выполнение этого условия. Например, в практике планирования и проектирования элементы функции затрат обычно задаются в виде кусочно-гладких не обязательно выпуклых функций от параметра, характеризующего производительность (пропускную способность) того или иного уст-

ройства. Отсутствие свойств выпуклости и гладкости характерно для широкого круга минимаксных задач.

Все это побуждает рассматривать задачи минимизации на классе функций, достаточно широком, чтобы охватить кусочно-гладкие функции и функции, встречающиеся в минимаксных задачах, и в то же время настолько узком, чтобы для этих функций можно было определить некоторый естественный аналог градиента и иметь возможность использовать методы градиентного типа для нахождения локальных минимумов. Одним из таких классов является класс почти дифференцируемых функций [103].

Определение. Функция $f(x)$, определенная на n -мерном евклидовом пространстве E_n , называется *почти дифференцируемой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) в любой ограниченной области удовлетворяет условию Липшица (локально липшицева);

б) почти везде дифференцируема;

в) ее градиент непрерывен на том множестве M , где он существует.

Отметим, что свойство б) не является независимым. Справедлива следующая теорема [103].

Теорема 1.9. Пусть действительная функция $f(x)$, определенная на открытом множестве $M \subset E_n$, имеет конечные частные производные по всем направлениям, т. е.

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \right| < +\infty$$

для любой точки $x \in M$ и любого вектора $v \in E_n$. Тогда $f(x)$ дифференцируема почти всюду на M .

Определение. Почти-градиентом функции $f(x)$ в точке x_0 называется вектор, являющийся предельной точкой некоторой последовательности градиентов $g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_k), \dots$, где $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность точек, сходящихся к точке x_0 , и такая, что во всех точках этой последовательности $f(x)$ дифференцируема.

Теорема 1.10. Множество $G(x)$ почти-градиентов в любой точке $x \in E_n$ почти дифференцируемой функции $f(x)$ является непустым, ограниченным и замкнутым.

Теорема 1.11. Произвольная выпуклая функция $f(x)$ на n -мерном евклидовом пространстве E_n является почти дифференцируемой, а ее любой почти-градиент в точке x совпадает с некоторым субградиентом.

Теорема 1.12. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ почти дифференцируемы, то $f_3(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, $f_4(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ также почти дифференцируемы.

Теорема 1.13. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ почти дифференцируемы, то $f_3(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$ также почти дифференцируема.

Определение. Назовем обобщенным **почти-градиентом** функции $f(x)$ в точке $x \in E_n$ произвольный вектор g , принадлежащий выпуклому замыканию множества почти-градиентов.

Из теоремы 1.10 вытекает, что множество обобщенных почти-градиентов выпукло, ограничено и замкнуто.

Класс почти дифференцируемых функций можно рассматривать как расширение класса непрерывных и кусочно-непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих локальному условию Липшица. Близок к классу почти дифференцируемых функций класс локально липшицевых функций, исследованный Кларком [59]. Несколько интересных классов негладких функций предложил Мифлин [145, 146].

1.4. Субградиентные методы с растяжением пространства в направлении субградиента

Операция растяжения пространства в направлении градиента первоначально введена Н.З. Шором [101 – 103] как эвристическая процедура, связанная с применением линейных неортогональных преобразований для улучшения свойств оптимизируемой функции в преобразованном пространстве переменных.

Рассмотрим суть идеи Шора.

Пусть на k -ой итерации ОГС проводится замена переменных $x = B_k y$, где B_k – неособая $n \times n$ матрица. Субградиент выпуклой функции $f(x)$ в точке x_k удовлетворяет неравенству

$$f(x) \geq f(x_k) + (g_f(x_k), x - x_k) \quad \forall x \in E_n,$$

Откуда, осуществляя замену переменных $x = B_k y$, получаем

$$\varphi(y) \geq \varphi(y_k) + (B_k^T g_f(x_k), y - y_k) \quad \forall y \in E_n.$$

Вектор $g_\varphi(y_k) = B_k^T g_f(x_k)$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi(y) \geq \varphi(y_k) + (g_\varphi(y_k), y - y_k) \quad \forall y \in E_n$$

и является субградиентом выпуклой функции $\varphi(y) = f(B_k^{-1} x_k)$ в точке $y_k = B_k^{-1} x_k$ преобразованного пространства переменных $y = B^{-1} x$.

Пусть к функции $\varphi(y)$ применяется субградиентный метод, где h_k – шаг в направлении нормированного антисубградиента. В преобразованном пространстве переменных $y = B^{-1} x$ этот метод имеет вид

$$y_{k+1} = y_k - h_k \frac{g_\varphi(y_k)}{\|g_\varphi(y_k)\|} = y_k - h_k \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.1)$$

И, следовательно, очередное приближение $x_{k+1} = B_k y_{k+1}$ будет получено по формуле

$$x_{k+1} = B_k y_k - h_k B_k \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|} = x_k - h_k B_k \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.2)$$

Дополняя формулы (1.4.1) и (1.4.2) правилом рекуррентного пересчета матрицы $B_{k+1} = B_k T_k$, можно получить наглядную интерпретацию субградиентного метода с последовательным (от одной итерации к другой) растяжением пространства переменных. Если матрицы T_k выбирать так, чтобы поверхность овражной функции в очередном преобразованном пространстве переменных становилась менее овражной, то такой метод оказывается эффективнее, чем ОГС.

Пусть x_0 – начальное приближение, B_0 – неособая $n \times n$ матрица. Тогда субградиентный метод с последовательным преобразованием пространства переменных имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|}, \quad B_{k+1} = B_k T_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.3)$$

где h_k – шаговый множитель, T_k – неособая $n \times n$ матрица, $g_f(x_k)$ – произвольный субградиент функции $f(x)$ в точке x_k .

Метод (1.4.3) принято называть B -формой субградиентного метода с преобразованием пространства; на каждой его итерации корректируется матрица, связанная с заменой переменных $x = By$. Этот же метод можно записать в H -форме (по типу методов переменной метрики) с помощью симметричной матрицы $H_k = B_k B_k^T$. Если матрицы T_0, T_1, \dots, T_{k-1} – неособые, и выпуклая функция $f(x)$ – непрерывно дифференцируема, $\nabla f(x_k)$ – ее градиент в точке x_k , то направление $-B_k B_k^T \nabla f(x_k) = -H_k \nabla f(x_k)$ всегда является направлением спуска, т.е. направлением убывания функции $f(x)$.

В основе двух семейств субградиентных методов с преобразованием пространства переменных, различающихся выбором направления растяжения, лежит оператор растяжения пространства.

Определение. Пусть $\xi \in E_n, \|\xi\| = 1$. Оператором растяжения в направлении ξ с коэффициентом $\alpha > 1$ называется линейный оператор $R_\alpha(\xi)$, определяемый соотношением

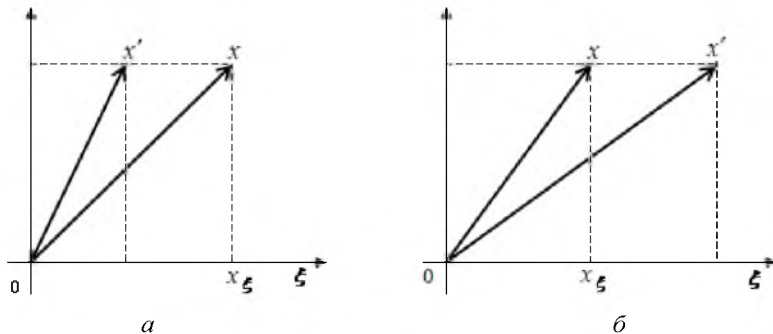
$$R_\alpha(\xi)x = x + (\alpha - 1)(\xi\xi^T)x \quad \forall x \in R^n.$$

Матрица, ассоциированная с этим оператором, имеет вид

$$I_n + (\alpha - 1)(\xi\xi^T),$$

где $(\cdot)^T$ означает транспонирование, $\|\cdot\|$ – евклидова норма, I_n – единичная $n \times n$ матрица, α – коэффициент растяжения пространства, ξ – направление растяжения. В дальнейшем различия между понятиями оператора $R_\alpha(\xi)$ и ассоциированной матрицы делать не будем.

Подробно свойства оператора $R_\alpha(\xi)$ изложены в [103]. Заметим только, что он оставляет инвариантным любой вектор, ортогональный вектору ξ , но умножает на $\alpha > 1$ всякий вектор, коллинеарный ξ . Действие оператора растяжения при $\alpha = 1/2$ и $\alpha = 2$ иллюстрируется на рис. 1.5 а и б соответственно.



**Рис. 1.5. Иллюстрация понятия оператора растяжения в R^2 :
для $\alpha = 1/2$ (а); для $\alpha = 2$ (б)**

При описании алгоритмов субградиентных методов с преобразованием пространства в B -форме используется оператор $R_\beta(\xi)$, обратный к оператору растяжения пространства $R_\alpha(\xi)$. Он имеет следующую форму (см. [103]):

$$R_\beta(\xi) = R_\alpha^{-1}(\xi) = I_n + (\beta - 1)\frac{\xi\xi^T}{\alpha}, \quad \beta = \frac{1}{\alpha} < 1,$$

и обеспечивает пересчет матрицы B_{k+1} за $2n^2$ арифметических операций умножения.

В первом семействе субградиентных методов используется операция растяжения пространства в направлении субградиента.

Определение. Субградиентным методом с растяжением пространства в направлении субградиента для минимизации выпуклой функции $f(x)$ называется процедура построения последовательностей $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ и $\{B_k\}_{k=0}^\infty$ по следующему правилу:

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k, \quad B_{k+1} = B_k R_{\beta_k}(\xi_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.4)$$

где

$$\xi_k = \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|}, \quad \beta_k = \frac{1}{\alpha_k} < 1. \quad (1.4.5)$$

Здесь x_0 – начальное приближение, $B_0 = I_n$ – единичная $n \times n$ матрица, h_k – шаговый множитель, α_k – коэффициент растяжения пространства, $g_f(x_k)$ – произвольный субградиент функции $f(x)$ в точке x_k .

Если $g_f(x_{k^*}) = 0$, то x_{k^*} – точка минимума функции $f(x)$, и процесс (1.4.4), (1.4.5) останавливается.

Очевидно, что существует столько же алгоритмов этого типа, сколько и способов выбора коэффициентов h_k , α_k и направления ξ_k на каждой итерации. Основную сложность при конструировании работоспособного алгоритма представляет выбор коэффициентов растяжения пространства α_k и стратегии изменения шаговых множителей h_k . Первые эксперименты показали, что, выбирая $\alpha = 2$ и $h_k = const$, для многих примеров выпуклых вращных функций можно получить хорошие результаты. К сожалению, такой простой способ не всегда приводит к цели. Теоретически удалось обосновать такие алгоритмы, в которых выбор шагового множителя и коэффициентов растяжения пространства подчиняется условию невозрастания последовательности расстояний до точки минимума в соответствующих преобразованных пространствах [103]. Этот принцип гарантирует сходимость со скоростью геометрической прогрессии по значению функции. Для его реализации использовалась дополнительная информация о функции $f(x)$ – значение функции в точке минимума f^* и так называемые постоянные роста M и N .

Теорема 1.14. Пусть $f(x)$ – выпуклая функция, определенная на E_n и в некоторой сферической окрестности S_d точки минимума $x^* : S_d = \{x : \|x - x^*\| \leq d\}$ субградиент удовлетворяет двустороннему неравенству

$$N(f(x) - f(x^*)) \leq (g_f(x), x - x^*) \leq M(f(x) - f(x^*)), \quad (1.4.6)$$

где $M > N$ – положительные константы. Тогда если в алгоритме (1.4.4), (1.4.5) принять:

- 1) $x_0 \in S_d$,
- 2) $h_k = \frac{2MN}{M+N} \frac{f(x_k) - f(x^*)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|}$,
- 3) $\alpha_k = \frac{(M+N)}{(M-N)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$,

то последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ такова, что

$$\|B_k^{-1}(x_k - x^*)\| \leq d, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.7)$$

Из неравенства (1.4.7) следует локализация x^* в эллипсоиде Φ_k с центром в точке x_k . Отношение объемов эллипсоидов Φ_{k+1} и Φ_k задается следующим равенством

$$\frac{\text{vol}(\Phi_{k+1})}{\text{vol}(\Phi_k)} = \beta_k = \frac{M - N}{M + N}.$$

Семейство алгоритмов с растяжением пространства в направлении субградиента содержит, как частный случай, так называемый метод эллипсоидов. Метод эллипсоидов был предложен Д.Б. Юдиным и А.С. Немировским [108], исходя из методов последовательных отсечений, а также, независимо, Н.З. Шпором [103], как частный случай алгоритма с растяжением пространства в направлении субградиента. Такой алгоритм использует следующие параметры: коэффициент растяжения пространства выбирается постоянным и равным

$$\alpha_{k+1} = \alpha = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}},$$

а регулировка шага осуществляется по правилу:

$$h_1 = \frac{r}{n+1}; \quad h_{k+1} = h_k \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}; \quad k = 1, 2, \dots,$$

где n – размерность пространства, r – радиус шара с центром в точке x_0 , содержащий точку x^* .

Метод эллипсоидов сходится со скоростью геометрической прогрессии по отклонению наилучшего достигнутого на данном шаге значения $f(x)$ от оптимального, при этом знаменатель геометрической прогрессии зависит только от размерности пространства n асимптотически

$$q_n \approx 1 - \frac{1}{2n^2}.$$

Алгоритмы типа обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства первоначально были разработаны для минимизации выпуклых функций. На практике оказалось, что некоторые их модификации применимы для нахождения локальных минимумов почти дифференцируемых функций (при этом роль обобщенного градиента в алгоритме играет почти-градиент).

Опыт применения алгоритмов с растяжением пространства в направлении градиента показал возможность существенного ускорения субградиентных процессов. Однако оказывается, что такие методы могут быть немонотонными. Это связано с таким геометрическим фактом: если находиться на границе двух «кусков» кусочно-гладкой поверхности уровня, а градиенты к этим «кускам», вычисленные в данной точке, образуют тупой угол, то никакое растяжение пространства в направлении градиентов не может изменить этот угол настолько, чтобы он стал острым. Угол может лишь приближаться к $\pi/2$, оставаясь тупым. И, таким образом, применяя растяжение пространства в направлении субградиента, невозможно получить направление убывания функции в виде антиградиента к одному из «кусков» в растянутом пространстве. В то же время растяжение пространства в направлении разности двух указанных градиентов с подходящим коэффициентом растяжения преобразуют тупой угол между градиентами в острый. Соответствующие образы этих антиградиентов в растянутом пространстве становятся направлениями убывания функции. Идея растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов лежит в основе второго семейства субградиентных методов, описание которого приведено в следующем разделе.

1.5. Субградиентные методы с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных субградиентов (г-алгоритмы)

1.5.1. Вычислительная схема г-алгоритма

Субградиентные методы, в которых используется растяжение пространства в направлении разности двух последовательных градиентов, получили название г-алгоритмов (от русского слова «разность»). Выбор шагового множителя в г-алгоритмах связан с поиском минимума функции по выбранному направлению. При определенной регулировке шага и коэффициентов растяжения пространства они являются монотонными по минимизируемой функции.

Рассмотрим описание г-алгоритмов в B -форме для минимизации выпуклой функции $f(x)$, определенной на E_n . Будем предполагать, что $f(x)$ имеет ограниченную область минимумов X^* , так что $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. Последнее обеспечивает корректность регулировки шага.

Определение. г-алгоритмом называется процедура построения последовательностей $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ по следующему правилу:

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k, \quad B_{k+1} = B_k R_{\beta_k}(\eta_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.5.1)$$

где

$$\xi_k = \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|}, \quad h_k \geq h_k^* = \arg \min_{h \geq 0} f(x_k - h B_k \xi_k), \quad (1.5.2)$$

$$\eta_k = \frac{B_k^T r_k}{\|B_k^T r_k\|}, \quad r_k = g_f(x_{k+1}) - g_f(x_k), \quad \beta_k = \frac{1}{\alpha_k} < 1. \quad (1.5.3)$$

Здесь x_0 – начальное приближение, $B_0 = I_n$ – единичная $n \times n$ матрица, h_k – шаговый множитель, α_k – коэффициент растяжения пространства, $g_f(x_k)$, $g_f(x_{k+1})$ – произвольные субградиенты функции $f(x)$ в точках x_k и x_{k+1} . Если $g_f(x_k^*) = 0$, то x_k^* – точка минимума функции $f(x)$, и процесс (1.5.1) – (1.5.3) останавливается.

Заметим, что применительно к задачам минимизации гладких функций г-алгоритмы по своей формальной структуре близки к алгоритмам квазиныютовского типа с переменной метрикой. Так, предельный вариант г-алгоритма с бесконечным коэффициентом растяжения (когда $\beta_k = \beta = 0$, $h_k = h_k^*$) является проективным вариантом метода сопряженных градиентов. Для задачи минимизации выпуклой непрерывно-дифференцируемой функции $f(x)$ предельный вариант г-алгоритма с восстановлением матрицы B_k после каждых n итераций обладает квадратичной скоростью сходимости при обычных условиях гладкости и регулярности $f(x)$ [103].

Несмотря на то, что г-алгоритмы используются уже более 40 лет, проблема обоснования их сходимости для всего класса выпуклых функций остается открытой и в настоящее время.

Замечательным свойством г-алгоритма является то, что его конкретные реализации показывают хорошие результаты при минимизации овражных функций. Одним из эффективных является вариант $\Gamma(\alpha)$ -алгоритма с постоянным коэффициентом растяжения пространства α и адаптивным способом регулировки шага. В нем h_k настраивается в процессе выполнения одномерного спуска в направлении нормированного антисубградиента в преобразованном пространстве переменных с помощью параметров h_0^0, q_1, q_2, n_h . Здесь h_0^0 – величина начального шага (используется на первой итерации, на каждой последующей уточняется); q_1 – коэффициент уменьшения шага ($q_1 \leq 1$), если

условие завершения спуска по направлению ($h_k^0 > h_k^*$) выполняется всего за один шаг одномерного спуска; натуральное число n_h задает число шагов одномерного спуска ($n_h > 1$), через каждые n_h шагов величина h_k^0 увеличивается в q_2 раз, $q_2 \geq 1$ – коэффициент увеличения шага. Подробные рекомендации по выбору коэффициента растяжения пространства и параметров адаптивной регулировки шага даны в [102, стр. 45 – 47]. По сути, адаптивный способ регулировки шагового множителя призван увеличивать точность поиска минимума функции по текущему направлению в процессе счета при условии, что число шагов по направлению не должно превышать в среднем двух-трех на одну итерацию.

Как показали многочисленные вычислительные эксперименты и практические расчеты, в большинстве случаев при $\alpha \in [2, 3]$, $m = 3$ и указанном выше способе регулировки h число шагов по направлению в среднем редко превосходит 2, при этом за n шагов г-алгоритма точность по функционалу, как правило, улучшается в 3-5 раз.

В случае минимизации гладкой функции для ускорения сходимости можно применять более тонкие способы поиска минимума по направлению, например, квадратичную аппроксимацию по трем точкам, процесс "золотого сечения" и др.

Далее рассмотрим монотонную модификацию г-алгоритма [104]. Эта модификация отличается от других вариантов г-алгоритмов как выбором направления движения, так и регулировкой величины шагового множителя. В общем случае монотонная модификация г-алгоритма состоит из последовательности итераций, на каждой из которых производятся следующие действия (ниже $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ – минимизирующая последовательность точек пространства E_n , на котором определена функция $f(x)$).

Пусть задана некоторая начальная точка $x_0 \in E_n$, неособая матрица B_0 размера $n \times n$. Начальная итерация соответствует первому шагу приведенной выше схемы г-алгоритма.

Пусть проделано \bar{k} итераций, $\bar{k} > 1$, в результате которых получена точка $x_{\bar{k}} \in E_n$, обратная матрица $B_{\bar{k}}$ преобразования пространства и субградиент $g(x_{\bar{k}})$. Следующее приближение точки минимума функции f вычисляется по формуле:

$$x_{\bar{k}+1} = x_{\bar{k}} - h_{\bar{k}}^{\min} B_{\bar{k}} B_{\bar{k}}^T g_{\bar{k}},$$

где $h_{\bar{k}}$ – неизвестный шаговый множитель, который определяется из условия минимума функции по направлению:

$$h_{\bar{k}}^{\min} = \arg \min f(x_{\bar{k}}(h_{\bar{k}})).$$

В частности, $h_{\bar{k}}^{\min}$ может равняться 0, и в этом случае $x_{\bar{k}+1} = x_{\bar{k}}$.

Среди субградиентов функции f в точке $x_{\bar{k}+1}$ находим субградиент, который образует с направлением движения угол, больший или равный $\frac{\pi}{2}$. Если искомый субградиент можно выбрать неоднозначно, то выбирается тот, проекция которого на направление спуска минимальна.

Последовательность $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{\bar{k}})$ является невозрастающей, так как следующая точка получается из предыдущей в результате операции нахождения приближенного минимума по некоторому направлению, применение которой обеспечивает выполнение неравенства $f(x_k) \geq f(x_{k+1})$. Отсюда ясно, что последовательность значений функции $\{f(x_k)\}_{k=0}^{\infty}$ имеет предел $f^* \geq f(x^*)$.

В алгоритм вводится новая возможность выбора направления движения, связанная с решением вспомогательных задач выпуклого квадратичного программирования. Рассмотрим случай минимизации функции максимума гладких выпуклых функций. Отметим, что гладкая выпуклая функция аппроксимируется снизу в любой точке \bar{x} линейной функцией вида $(g_f(\bar{x}), x - \bar{x})$.

Пусть $\varphi(x) = \max_{i \in I} f_i(x)$, где I – конечное множество индексов, $f_i(x)$ – непрерывно дифференцируемые выпуклые функции, определенные на всем E_n . Для упрощения выкладок будем считать, что $\varphi(x)$ имеет единственный минимум – искомую точку $x^* \in E_n$.

Пусть \bar{x} – произвольная точка из E_n . Обозначим

$$I_0(\bar{x}) = \{i \in I \mid \varphi(\bar{x}) = f_i(\bar{x})\}, I_{\varepsilon}(\bar{x}) = \{i \in I \mid \varphi(\bar{x}) \geq f_i(\bar{x}) \geq \varphi(\bar{x}) - \varepsilon\}.$$

$I_{\varepsilon}(\bar{x})$ будем называть ε -активным множеством индексов для точки \bar{x} .

При выборе направления спуска используется следующая специальная квадратичная задача:

найти величину

$$\rho^* = \min_{\{\lambda_i\}_{i \in I_\varepsilon(\bar{x})}} \sum_{p,j} \lambda_p \lambda_j (g_{f_p}(\bar{x}), g_{f_j}(\bar{x})) \quad (1.5.4)$$

при ограничениях

$$\lambda_i \geq 0 \text{ для всех } i \in I_\varepsilon(\bar{x}) \quad (1.5.5)$$

$$\sum_{i \in I_\varepsilon(\bar{x})} \lambda_i = 1 \quad (1.5.6)$$

Если $\rho^* = 0$, то $\varphi(x^*) \geq \varphi(\bar{x}) - \varepsilon$, т.е. значение $\varphi(\bar{x}) - \varepsilon$ является нижней оценкой. Имея значения рекорда и нижней оценки минимизируемой функции в точке \bar{x} , можно оценить точность определения минимума в текущей точке.

Если $\rho^* > 0$, то вектор, противоположный вектору $\sum_{i \in I_\varepsilon(\bar{x})} \lambda_i^* g_{f_i}(\bar{x})$ дает направление движения из точки \bar{x} , уменьшающее значение $\varphi(\bar{x})$ не менее, чем на ε .

Отметим, что вспомогательная задача (1.5.4) – (1.5.6) является относительно λ задачей квадратичного выпуклого программирования с линейными ограничениями, и она легко сводится к задаче безусловной минимизации негладкой кусочно-квадратичной функции, используя негладкие функции штрафа. Для решения этой задачи можно применить г-алгоритм в сочетании с методом негладких штрафных функций.

1.5.2. Применение г-алгоритма к задаче поиска седловой точки выпукло-вогнутой функции. Псевдоградиентное множество

Пусть задана выпукло-вогнутая функция $f(x, y)$ двухвекторных переменных $x \in E_n$, $y \in E_m$; $z = \{x, y\} \in E_n \times E_m \equiv E_{n+m}$; $z^* = (x^*, y^*)$ – седловая точка этой функции, т.е.

$$f(x^*, y) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x, y^*) \quad \forall x \in E_n, y \in E_m.$$

Рассмотрим **псевдоградиентное множество**

$$G(z) = G_f^x(x, y) \times (-G_f^y(x, y)),$$

где $G_f^x(x, y)$ – множество частных субградиентов функции $f(x, y)$, рассматриваемой как функция от x при фиксированном y ; $-G_f^y(x, y)$ – множество частных субградиентов функции $-f(x, y)$, рассматриваемой как функция от y при фиксированном x .

Сформируем векторное поле $g(z)$ следующим образом:

$$g(z) = \{g_f^x(z), -g_f^y(z)\}; \quad g_f^x(z) \in G_f^x(z); \quad g_f^y(z) \in G_f^y(z).$$

Покажем, что $(g(z), z - z^*) \geq 0$.

Из определения седловой точки следует, что

$$f(x, y^*) \geq f(x^*, y^*) \geq f(x^*, y).$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x, y^*) - f(x^*, y) = f(x, y^*) - f(x, y) + f(x, y) - f(x^*, y) \leq \\ &\leq (g_f^x(z), x - x^*) - (g_f^y(z), y - y^*) = (g(z), z - z^*). \end{aligned}$$

Таким образом, для локализации седловой точки z^* может быть применен алгоритм, описанный в предыдущем пункте.

Следует заметить, что в 1973 г. Я. З. Цыпкиным и Б. Т. Поляком также было введено понятие **псевдоградиента функционала**, на основе которого разработан единый подход к анализу и синтезу алгоритмов стохастической минимизации функционалов [76]. Класс ПГ алгоритмов очень широк и включает в себя все (или почти все) алгоритмы адаптации и обучения.

1.5.3. Модифицированные вычислительные схемы обобщенных градиентных методов с растяжением пространства

В работе [82] предложены модифицированные вычислительные схемы обобщенных градиентных методов с растяжением пространства, позволяющие существенно сократить число арифметических операций, связанных с преобразованием пространства. Суть этих схем сводится к тому, что преобразование матрицы B_k заменяется преобразованием симметричной матрицы $H_k = B_k B_k^T$. Приведем далее вариант г-алгоритма в H -форме.

0. *Инициализация*: выбираем x^0 – произвольное начальное приближение точки минимума; вычисляем субградиент $g_f(x^0)$ функции $f(x)$ в точке x^0 ; задаем $H_0 = I_n$ (единичная матрица) и параметры $\alpha > 1$, $\beta = \frac{1}{\alpha} < 1$.

$$k = 0.$$

1. Пусть на k -й итерации x^k – текущая точка; $g_f(x^k)$ – произвольный субградиент функции $f(x)$ в точке x^k ; $\alpha_k = \alpha$, $\beta_k = \beta$, $\forall k$.

2. Определяем следующее приближение x^{k+1} по формуле

$$x^{k+1} = x^k - h_k \frac{H_k g_f(x^k)}{\sqrt{(H_k g_f(x^k), g_f(x^k))}},$$

где $h_k \geq 0$ – шаговый множитель, выбирается из условия минимума функции по направлению $p_k = -H_k g_f(x^k)$.

3. Вычисляем $g_f(x^{k+1})$ – градиент (или субградиент) функции f в точке x^{k+1} . Пусть $r_k = g_f(x^{k+1}) - g_f(x^k)$.

4. Вычисляем матрицу

$$H_{k+1} = H_k + (\beta^2 - 1) \frac{H_k r_k r_k^T H_k}{(H_k r_k, r_k)} = H_k + (\beta^2 - 1) \frac{H_k r_k r_k^T H_k}{r_k^T H_k r_k}.$$

5. Если хотя бы один из критериев окончания итерационного процесса $\|g_f(x^{k+1})\| < \varepsilon$ или $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$

выполнен, то процесс вычислений заканчивается. Иначе $k := k + 1$ и перейти на шаг 2.

Определенный таким образом алгоритм применим и к функциям, не являющимся всюду дифференцируемыми, но в этом случае его поведение может быть существенно отличным от г-алгоритма, представленного в п. 1.5.1. В самом деле, направление $-B_k B_k^T g_f(x^k)$ не обязательно будет направлением спуска. Если это произойдет, мы получим $x^{k+1} = x^k$, и алгоритм уже не будет прогрессировать. Для исправления этой ситуации в [70] предложено модифицировать этап 2 алгоритма, заменив его такой последовательностью шагов.

А. На k -й итерации текущая точка есть x^k . Определяем x^{k+1} по формуле

$$x^{k+1} = x^k - h_k B_k B_k^T g_f(x^k),$$

где h_k выбирается из условия минимума функции $f(x)$ в направлении $p_k = -B_k B_k^T g_f(x^k)$.

Если $h_k = 0$, то полагаем:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &\leftarrow x^k, \\ x^k &\leftarrow x^{k-1}, \\ g_f(x^{k+1}) &\leftarrow g_f(x^k), \\ g_f(x^k) &\leftarrow g_f(x^{k-1}), \end{aligned}$$

Переходим на шаг Б.

Если величина шага $h_k \neq 0$, то определяем произвольный субградиент $g_f(x^{k+1})$ функции $f(x)$ в точке x^{k+1} и переходим на шаг Б.

Б. Полагаем

$$\xi_k = \frac{r_k}{\|r_k\|} \text{ при } r_k = B_k^T [g_f(x^{k+1}) - g_f(x^k)]$$

и пересчитываем матрицу оператора растяжения пространства

$$B_{k+1} = B_k R_\beta(\xi_k).$$

Таким образом, даже если алгоритм остается неподвижным в одной и той же точке в продолжение нескольких последовательных итераций, матрицы B_k продолжают изменяться (из-за растяжения пространства в направлении разности двух последних различных субградиентов), что позволяет определить на каждом шаге итерации новое направление возможного перемещения. Алгоритм деблокируется, как только обнаруживается некоторое направление спуска.

Еще раз подчеркнем, что преимущество этого алгоритма перед методами субградиента, описанными выше, состоит в том, что последовательность порожденных им значений $f(x^k)$ монотонно убывает. Можно доказать их сходимость к минимуму функции $f(x)$ при определенных условиях, накладываемых на саму функцию и выбор параметров метода [70].

Хотя могут встретиться и патологические случаи, в которых сходимости нет, но численные эксперименты, ссылки на которые можно найти в литературе, позволяют утверждать, что г-алгоритм действительно представляет собой один из наиболее эффективных среди известных в настоящее время методов решения задач оптимизации недифференцируемых функций.

1.6. Общая схема декомпозиции по ограничениям и негладкие штрафные функции

Широкое применение субградиентные методы нашли при построении общих схем и процедур решения задач условной минимизации, которые определенным образом сводятся к решению задач безусловной недифференцируемой оптимизации.

Основными приемами сведения задач условной оптимизации к поиску безусловного оптимума являются:

- построение функций Лагранжа;

- применение схем декомпозиции по ограничениям, переменным или ресурсам;
- использование негладких штрафных функций;
- применение субградиентных методов недифференцируемой оптимизации.

Функция Лагранжа была введена в п. 1.2. Далее рассмотрим общую схему декомпозиции по ограничениям и негладкие штрафные функции [84], которые в дальнейшем будут использоваться при описании методов и алгоритмов решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств. Также рассмотрим один из возможных вариантов применения методов недифференцируемой оптимизации к решению задачи максимина.

1.6.1. Схема декомпозиции по ограничениям

Функция Лагранжа может быть эффективно использована для получения двойственных оценок задач оптимизации и реализации схем декомпозиции в задачах математического программирования, в частности, для задач выпуклого и линейного программирования. Рассмотрим этот вопрос в общем случае для задачи математического программирования, записанной в следующем виде:

определить

$$f_0^* = \inf f_0(x) \quad (1.6.1)$$

при ограничениях

$$f_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1.6.2)$$

$$x \in X \subset E_n. \quad (1.6.3)$$

Если ограничения (1.6.2) и (1.6.3) несовместны, то полагаем $f_0^* = \infty$. Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x),$$

где $u = \{u_i\}_{i=1}^m$ – множители Лагранжа для ограничений (1.6.2). При $u \geq 0$ имеет место неравенство

$$L(x, u) \leq f_0(x)$$

для любого допустимого решения x задачи (1.6.1) – (1.6.3). Поэтому

$$\Psi(u) = \inf_{x \in X} L(x, u) \leq f_0^*$$

при $u \geq 0$, т.е. $\Psi(u)$ дает оценку снизу для оптимального значения целевой функции задачи (1.6.1) – (1.6.3). Чтобы получить наилучшую оценку из этого

класса оценок, которые будем называть двойственными, необходимо вычислить величину

$$\Psi^* = \sup_{u \geq 0} \Psi(u).$$

Задача нахождения

$$\inf_{x \in X} L(x, u)$$

называется внутренней, а задача

$$\sup_{u \geq 0} \Psi(u)$$

– внешней.

В общем случае указанная выше схема лежит в основе реализации принципов, использующих декомпозицию по ограничениям.

Известно, что при достаточно общих условиях внешняя задача сводится к задаче вогнутого программирования.

Теорема 1.15. Если функции $f_0(x), f_i(x), i = \overline{1, m}$ непрерывны на компактном множестве $X \subset E^n$, то $\Psi(u)$ вогнута и определена при всех $u \geq 0$.

Пусть $x^*(\bar{u})$ – точка минимума $L(x, \bar{u})$ по переменной $x \in X$. Тогда вектор $\{f_i(x^*(\bar{u})), i = \overline{1, m}\}$ является обобщенным градиентом (суперградиентом) функции $\Psi(u)$ в точке \bar{u} .

Если $x^*(\bar{u})$ определяется единственным образом, то в соответствующей точке функция $\Psi(\bar{u})$ непрерывно дифференцируема. В противном случае множество суперградиентов может содержать более одной точки, а в точке \bar{u} происходит разрыв градиента.

Теорема 1.15 показывает, что если внутренняя задача решается достаточно просто, то для решения внешней задачи можно применять методы максимизации негладких вогнутых функций.

Таким образом, для общей задачи математического программирования (1.6.1) – (1.6.3), при решении внутренней задачи $\inf_{x \in X} L(x, u)$ учитываются лишь ограничения $x \in X$, остальные ограничения с определенными множителями Лагранжа входят в целевую функцию $L(x, u)$. В процессе решения внешней задачи $\sup_{u \geq 0} \Psi(u)$ мы находим приближенные значения оптимальных множителей Лагранжа u^* . Если точка $x^*(u^*)$ единственна, то она является решением

задачи (1.6.1) – (1.6.3). В противном случае решение этой задачи следует искать среди множества $X^*(u^*)$ оптимальных решений внутренней задачи при $u = u^*$, а именно: в множестве $X^*(u^*)$ выбрать точки, которые удовлетворяют ограничениям (1.6.2).

Таким образом, если для решения внешней задачи $\sup_{u \geq 0} \Psi(u)$ использовать один из субградиентных методов, то на его $(k+1)$ -м шаге необходимо выполнить следующие три этапа.

1. При фиксированных значениях переменных $u = u^k$ решить задачу оптимизации по переменным x функции Лагранжа: найти решение $x^*(u^k)$, для которого

$$L(x^*(u^k), u^k) = \inf_{x \in X} L(x, u^k).$$

2. С учетом полученного решения $x^*(u^k)$ найти множество значений обобщенного градиента функции $\Psi(u)$ в точке u^k по формуле:

$$G_\Psi(u^k) = \left\{ g_i(u^k) = f_i(x^*(u^k)), \quad i = \overline{1, m} \right\}.$$

3. Вычислить значения координат новой точки u^{k+1} по формуле соответствующего субградиентного метода, которая, в общем случае, имеет вид:

$$u_i^{k+1} = \max \left\{ 0, u_i^k + h_{k+1} g_i(u^k) \right\}, \quad i = \overline{1, m},$$

где h_{k+1} – величина шага в субградиентном методе.

Как уже отмечалось, для задачи выпуклого программирования имеет место теорема Куна – Таккера. Для полноты и последовательности изложения материала приведем здесь ее формулировку.

Теорема 1.16 (Куна – Таккера). Пусть имеется задача выпуклого программирования:

$$f_0(x) \rightarrow \min \tag{1.6.4}$$

при ограничениях

$$x \in X \subset E_n, \quad f_i(x) \leq 0 \quad (i = \overline{1, m}), \tag{1.6.5}$$

где X – замкнутое выпуклое множество, $f_\tau(x)$, $\tau = \overline{0, m}$ – выпуклые функции. Пусть $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $L(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$ – функция Лагранжа

и пусть выполняется условие Слейтера: существует такая точка $\bar{x} \in X$, что $f_i(\bar{x}) < 0$ для $i = \overline{1, m}$.

Тогда для того, чтобы x^* было оптимальным решением задачи (1.6.4) – (1.6.5), необходимо и достаточно существование такого вектора u^* , что пара $\{x^*, u^*\}$ образовывала бы седловую точку функции Лагранжа на множестве $X \times \{u : u \geq 0\}$, и при этом выполнялись условия дополняющей нежесткости

$$u_i^* f_i(x^*) = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Таким образом, если X – выпуклое множество, $f_\tau(x)$, $\tau = \overline{0, m}$, – выпуклые функции, и для соответствующей задачи выпуклого программирования вида (1.6.4), (1.6.5) выполняется условие Слейтера, то, в силу теоремы Куна – Таккера, величина Ψ^* будет совпадать с f_0^* , т.е. оценка Ψ^* оказывается точной. При этом алгоритм вычисления Ψ^* будет соответствовать общей схеме декомпозиции по ограничениям. Действительно, если ограничения (1.6.5) разбить на две части:

- 1) $x \in X$,
- 2) $f_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}$,

то решение исходной задачи выпуклого программирования сводится к задаче нахождения седловой точки функции Лагранжа по рассмотренной выше схеме декомпозиции по ограничениям. Так как X – выпуклое множество, а $f_\tau(x)$, $\tau = \overline{0, m}$, – выпуклые функции, то внутренняя задача $\inf_{x \in X} L(x, u)$ будет задачей выпуклого программирования.

1.6.2. Точные негладкие штрафные функции

На основании функции Лагранжа и теоремы Куна – Таккера можно построить точные негладкие функции штрафа, позволяющие свести задачу выпуклого программирования к задаче безусловной оптимизации.

Рассмотрим задачу выпуклого программирования: найти

$$\min_{x \in E_n} \{f_0(x) : x \in X, f_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}\}. \quad (1.6.6)$$

Пусть множество оптимальных решений X^* непусто, $f_0(x^*) = f_0^*$ при $x^* \in X^*$ и пара $\{x^*, u^*\}$ образует седловую точку функции Лагранжа

$$L(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), \quad u \geq 0.$$

Для решения задачи выпуклого программирования могут быть использованы точные негладкие штрафные функции, которые сводят задачу (1.6.6) к задаче безусловной оптимизации. Рассмотрим основные штрафные функции и приведем полученные задачи недифференцируемой оптимизации, которые применяются при решении задач выпуклого программирования (1.6.6) [84].

1. Пусть $s = \{s_i\}_{i=1}^m \geq 0$ – вектор штрафных мультипликаторов. Построим штрафную функцию $P_1(x) = \sum_{i=1}^m s_i \max\{0, f_i(x)\}$, с помощью которой задача (1.6.6) сводится к решению задачи недифференцируемой оптимизации

$$\rho^* = \min_{x \in X} S_1(x, s), \quad (1.6.7)$$

где

$$S_1(x, s) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m s_i \max\{0, f_i(x)\}.$$

2. Пусть $p > 0$ – штрафной множитель. Построим штрафную функцию $P_2(x) = p \max\{0, \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x)\}$, с помощью которой задача (1.6.6) сводится к решению задачи недифференцируемой оптимизации

$$\min_{x \in X} S_2(x, p), \quad (1.6.8)$$

где

$$S_2(x, p) = f_0(x) + p \max\{0, \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x)\}.$$

3. Пусть заданы одномерные выпуклые функции $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, принимающие значение 0 при $t \leq 0$, и $\alpha_i(t) > 0$ для $t > 0$. Построим штрафную функцию $P_3(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(f_i(x))$, с помощью которой задача (1.6.6) сводится к решению задачи недифференцируемой оптимизации

$$\min_{x \in X} S_3(x, \alpha), \quad (1.6.9)$$

где функция S_3 определяется так:

$$S_3(x, \alpha) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i (f_i(x)),$$

$\alpha = \{\alpha_i\}$ – вектор-функция.

4. Пусть задана одномерная выпуклая функция $\beta(t)$, принимающая значение 0 при $t \leq 0$, и $\beta(t) > 0$ при $t > 0$. Построим штрафную функцию $P_4(x) = \beta(\max_{1 \leq i \leq m} f_i(x))$, с помощью которой задача (1.6.6) сводится к решению задачи недифференцируемой оптимизации

$$\min_{x \in X} S_4(x, \beta), \quad (1.6.10)$$

где

$$S_4(x, \beta) = f_0(x) + \beta(\max_{1 \leq i \leq m} f_i(x)).$$

Для решения задач минимизации функций $S_1(x, s)$, $S_2(x, p)$, $S_3(x, \alpha)$, $S_4(x, \beta)$ можно использовать субградиентные методы негладкой оптимизации.

Рассмотрим задачу выпуклого программирования (1.6.6), для решения которой применяется метод негладких штрафных функций. Пусть D – множество допустимых решений задачи (1.6.6).

Построим штрафные функции для задачи (1.6.6) по общей формуле

$$\bar{S}_t(x) = f_0(x) + P_t(x), \quad t = \overline{1, 4},$$

где функции $P_t(x)$, $t = \overline{1, 4}$ введены выше, и рассмотрим задачи

$$\min_{x \in X} \bar{S}_t(x), \quad t = \overline{1, 4}. \quad (1.6.11)$$

Для каждого $t = 1, 2, 3$ и 4 задача (1.6.11) соответствует задачам (1.6.7), (1.6.8), (1.6.9) и (1.6.10).

Так как функции $\bar{S}_t(x)$, $t = \overline{1, 4}$, являются негладкими и имеют точки разрыва градиента, то задачи (1.6.11) являются задачами недифференцируемой оптимизации.

Так как функции $\bar{S}_t(x)$ являются недифференцируемыми, то для решения любой из задач оптимизации типа $\min_{x \in X} \bar{S}_t(x)$ используется субградиентный метод. Рассмотрим общую схему решения задач (1.6.11) и приведем формулы определения субградиентов для каждой из них в отдельности.

Пусть на k -ом шаге субградиентного метода минимизации функций $\bar{S}_i(x)$ найдена точка x^k . Тогда на очередном $(k+1)$ -ом шаге субградиентного метода необходимо провести следующие три этапа.

1. Вычислить значения штрафной функции $P_i(x)$, $t = \overline{1, 4}$ в точке x^k .

2. Вычислить значения обобщенного градиента функции $\bar{S}_i(x)$ в точке x^k по формуле

$$g_{\bar{S}_i}(x^k) = \begin{cases} g_{f_0}(x^k), & \text{если } x^k \in D; \\ g_{f_0}(x^k) + g_{P_i}(x^k), & x^k \notin D, \end{cases}$$

где g_{f_0} – субградиент функции $f_0(x)$, а g_{P_i} – субградиент одной из функций $P_i(x)$, $t = \overline{1, 4}$, вычисленных в точке x^k .

Отметим некоторые особенности вычисления субградиентов функций $P_i(x)$, $t = \overline{1, 4}$, в точке x^k . Пусть $x^k \notin D$, а I^+ – дискретное множество индексов i , для которых $f_i(x^k) > 0$. Тогда для каждой функции в отдельности имеем:

$$1) \quad g_{P_i}(x^k) = \sum_{i \in I^+} s_i \cdot g_{f_i}(x^k),$$

где $g_{f_i}(x^k)$ – значения субградиентов функций $f_i(x)$, $i \in I^+$, вычисленных в точке x^k ;

$$2) \quad g_{P_2}(x^k) = p \cdot g_{f_{i^*}}(x^k),$$

где $g_{f_{i^*}}(x^k)$ – значение субградиента функции $f_{i^*}(x)$, вычисленной в точке x^k , а i^* – значение индекса i , для которого

$$f_{i^*}(x^k) = \max_{i \in I^+} f_i(x^k);$$

$$3) \quad g_{P_3}(x^k) = \sum_{i \in I^+} g_{\alpha_i} \cdot g_{f_i}(x^k),$$

где g_{α_i} – субградиенты функций $\alpha_i(x)$, а $g_{f_i}(x^k)$ – субградиенты функций $f_i(x)$, $i \in I^+$, вычисленных в точке x^k ;

$$4) \quad g_{P_4}(x^k) = g_\beta \cdot g_{f_{i^*}}(x^k),$$

где g_β – субградиент функции β , $g_{f_i^*}(x^k)$ – субградиент функции $f_i^*(x)$, а i^* – значение индекса i , для которого

$$f_{i^*}(x^k) = \max_{i \in I^*} f_i(x^k).$$

3. Вычислить значения новой точки x^{k+1} , применяя оператор P_X проектирования на множество X , т.е. находим

$$x^{k+1} = P_X \left(x^k - h_k g_{\bar{S}_i}(x^k) \right),$$

где h_k – величина шага в субградиентном методе, и проверяем критерий останова.

Здесь и далее под оператором проектирования P_X будем понимать возвращение тем или иным способом точки $\tilde{x} = x^k - h_k g_{\bar{S}_i}(x^k)$ в допустимое множество X в том случае, если она вышла за пределы X .

Следует отметить, что в общей схеме декомпозиции по ограничениям для решения исходной задачи (1.6.1) – (1.6.3) применяется процесс двухэтапной оптимизации, в котором на первом этапе (внешнем) решается задача недифференцируемой оптимизации по вектору переменных u , размерность которого зависит от количества ограничений в исходной задаче. На втором этапе (внутреннем) неоднократно решается задача минимизации функции на множестве переменных $x \in X$, размерность которой соответствует вектору x , а эффективность применяемого алгоритма зависит от структуры ограничений, образующие множество X .

На практике для отыскания седловой точки функции Лагранжа часто проводят одновременную оптимизацию и по переменной $x \in X$ и по двойственным переменным $u \geq 0$ с помощью субградиентного метода, применяя при этом понятие псевдоградиента (см. п. 1.5.2).

В методе штрафных функций при оптимизации по переменным x оператор проектирования на множество X можно использовать лишь в случае, когда множество допустимых решений X – выпукло, замкнуто и имеет достаточно простую структуру так, чтобы для отыскания проекции точки на множество не возникала необходимость решения вспомогательной задачи условной оптимизации.

Выводы к главе 1

Таким образом, методы обобщенного градиентного спуска положили начало новому направлению математического программирования – численным методам негладкой оптимизации, которому в настоящее время посвящены многочисленные научные статьи и монографии.

Субградиентные методы с растяжением пространства в направлении субградиента имеют ускоренную сходимость в сравнении с методами ОГС. Эти методы дали теории оптимизации уникальный в своем роде алгоритм – метод эллипсоидов, скорость сходимости которого зависит лишь от размерности пространства [86].

В рамках семейства субградиентных методов с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных субградиентов – γ -алгоритмов – получены достаточно эффективные их реализации. Число итераций для нахождения оптимального значения f^* с ε -точностью для функций от n переменных эмпирически оценивается как $N = O\left(n \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Разработанные модификации γ -алгоритма являются эффективным средством минимизации выпуклых негладких функций. При минимизации гладких функций они оказались конкурентоспособными с наиболее удачными реализациями методов сопряженных направлений и методов квазиньютоновского типа.

Сегодня γ -алгоритмы используются в задачах оптимизации большой размерности и в квазиблочных задачах с различными схемами декомпозиции, для вычисления двойственных лагранжевых оценок в многоэкстремальных и комбинаторных задачах оптимизации. На практике они применяются для решения задач оптимального планирования, оптимального проектирования, синтеза сетей, восстановления изображений, эллипсоидальной аппроксимации и локализации и др.

Сегодня γ -алгоритмы используются в задачах оптимизации большой размерности и в квазиблочных задачах с различными схемами декомпозиции, для вычисления двойственных лагранжевых оценок в многоэкстремальных и комбинаторных задачах оптимизации. На практике они применяются для решения задач оптимального планирования, оптимального проектирования, синтеза сетей, восстановления изображений, эллипсоидальной аппроксимации и локализации и др.

Для проведения вычислительных расчетов на ЭВМ имеется стандартная программная реализация одного из субградиентных методов (в частности, это известная программа RALG, разработанная Н.Г. Журбенко из пакета программ ПЛАНЕР реализации γ -алгоритма). При решении конкретной задачи необходимо разработать свои подпрограммы вычисления значений функции и субградиента в текущей точке, а также комплекс программ решения внутренних задач.

Далее продемонстрируем применение γ -алгоритма при решении неклассических задач математического программирования, которыми являются непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и родственные к ним непрерывные задачи оптимального шарового покрытия [36, 42].

ГЛАВА 2

НЕПРЕРЫВНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ n -МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА E_n НА ПОДМНОЖЕСТВА. r -АЛГОРИТМ ШОРА КАК СОСТАВНАЯ ЧАСТЬ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

2.1. Непрерывные линейные однопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств. Алгоритмы решения

2.1.1. Линейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множеств при ограничениях с отысканием координат центров подмно- жеств. Алгоритм решения

Сформулируем непрерывную линейную задачу оптимального разбиения множеств (ОРМ) n -мерного евклидова пространства E_n на подмножества с ограничениями и неизвестными заранее координатами некоторых, характерных для каждого подмножества, точек, называемых "центрами" подмножеств, см. [36, 48].

Пусть Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу множество в n -мерном евклидовом пространстве E_n .

Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ из $\Omega \subset E_n$ будем называть **возможным разбиением множества Ω** на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, если

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

где $\text{mes}(\cdot)$ означает меру Лебега.

Обозначим класс всех возможных разбиений множества Ω на непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, через Σ_{Ω}^N , т. е.

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N \right\}$$

Введем функционал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx.$$

Тогда под **непрерывной линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества Ω** из E_n на его непересекающиеся подмно-

жества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые) **при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров τ_1, \dots, τ_N этих подмножеств, соответственно**, будем понимать следующую задачу.

Задача А. Найти

$$\min_{(\Omega_1, \dots, \Omega_N), \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})$$

при условиях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; функции $c(x, \tau_i)$ – ограниченные, определенные на $\Omega \times \Omega$, измеримые по аргументу x при любом фиксированном $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ из Ω для всех $i = 1, \dots, N$; координаты $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$ центра τ_i , $i = 1, \dots, N$, заранее неизвестны (подлежат определению); $\rho(x)$ – ограниченные, измеримые, неотрицательные на Ω функции; a_1, \dots, a_N , b_1, \dots, b_N – заданные неотрицательные числа, причем

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Здесь и в дальнейшем интегралы понимаются в смысле Лебега. Будем считать, что мера множества граничных точек Ω_i , $i = 1, \dots, N$, равна нулю.

Разбиение $\{\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}\}$, являющееся решением задачи **А**, назовем оптимальным.

На рис. 2.1 изображено разбиение множества $\Omega \subset E_2$ на три подмножества $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ с центрами τ_1, τ_2, τ_3 этих подмножеств соответственно.

Введем характеристическую функцию

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases}$$

подмножества Ω_i , $i = 1, \dots, N$.

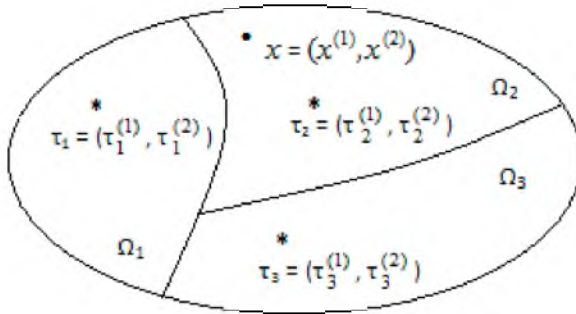


Рис. 2.1. Разбиение множества Ω на подмножества $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$

Перепишем задачу **A** в терминах характеристических функций $\lambda_i(x)$ подмножеств $\Omega_i, i = 1, \dots, N$, в следующем виде.

Задача В. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

где

$\Gamma_2 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ почти всюду (п.в.) для } x \in \Omega;$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N \};$$

$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N,$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega \};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N.$$

Здесь

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx.$$

Как доказано в работе [36], для каждого фиксированного $\tau \in \Omega$ (в предположении, что выполняется условия $\rho(x) \geq 0$ п.в. для $x \in \Omega$) имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.1. Для того чтобы возможное разбиение $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*j}, \dots, \Omega_{*N}) \in \Sigma_{\Omega}^N$ множества Ω являлось оптимальным для задачи **A**, необходимо и достаточно существование действительных констант $\psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ (среди которых $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ неотрицательны) таких, что

$$c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i \leq c(x, \tau_j) + a_j + \psi_j, \quad (2.1.1)$$

$i \neq j$, п.в. для $x \in \Omega_{*j}$, $i, j = 1, \dots, N$.

Следствие из теоремы 2.1. В точках x , принадлежащих оптимальной границе подмножеств Ω_{*i} и Ω_{*j} в неравенстве (2.1.1), достигается знак равенства.

Теорема 2.2. Оптимальное решение задачи **B** имеет следующий вид для $i = 1, \dots, N$ и почти всех $x \in \Omega$:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_{*i}) + a_i + \psi_i^* \leq c(x, \tau_{*j}) + a_j + \psi_j^*, \\ i \neq j \text{ п.в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, & \text{тогда } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

в качестве $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$, $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ выбирается оптимальное решение задачи

$$\begin{aligned} G(\psi) &= \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi) = \\ &= \min_{\tau \in \Omega^N} \left\{ \int_{\Omega} \min_{j=1, \dots, N} [c(x, \tau_j) + a_j + \psi_j] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \right\} \rightarrow \max \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

при условиях

$$\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N, \quad (2.1.3)$$

где

$$G_1(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i. \quad (2.1.4)$$

Для решения конечномерной задачи (2.1.2), (2.1.3) с недифференцируемой функцией (2.1.4) применим эвристический алгоритм псевдоградиентов с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов, близкий к γ -алгоритму Н.З. Шора. Подробное описание различных вариантов γ -алгоритма Н.З. Шора можно найти в работах [100 – 104].

Алгоритм решения задачи **A**

Приведем алгоритм решения задачи **A**, основанный на теореме 2.2. Для этого от задачи (2.1.2), (2.1.3) перейдем к задаче безусловной максимизации по

ψ с помощью введения в целевую функцию (2.1.4) негладкой штрафной функции множества $\{\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}$. Найти

$$\max_{\psi \in E_N} \min_{\tau \in \Omega^N} P(\tau, \psi),$$

$$P(\tau, \psi) = G_1(\tau, \psi) - S \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i),$$

где S – достаточно большое положительное число (значительно большее максимального из множителей Лагранжа для функции (2.1.4)).

Определим i -ю, $i = 1, \dots, N$, компоненту $2N$ -мерного вектора обобщенного псевдоградиента

$$g_p(\tau, \psi) = (g_p^\tau(\tau, \psi), -g_p^\psi(\tau, \psi)) = (g_p^{\tau_1}(\tau, \psi), \dots, g_p^{\tau_N}(\tau, \psi), -g_p^{\psi_1}(\tau, \psi), \dots, -g_p^{\psi_N}(\tau, \psi))$$

функции $P(\tau, \psi)$ в точке $(\tau, \psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$ следующим образом:

$$g_p^{\psi_i}(\tau, \psi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i, & i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + S \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), & i = p+1, \dots, N, \end{cases} \quad (2.1.5)$$

$$g_p^{\tau_i}(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) g_c^{\tau_i}(\tau, x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1.6)$$

где $g_p^{\tau_i}(\tau, x)$ – i -я компонента N -мерного вектора обобщенного градиента $g_p^{\tau}(\tau, x)$ функции $c(x, \tau_i)$ в точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_1, \dots, \tau_N)$ при фиксированном x , имеющая вид:

$$g_c^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(0)}}(x, \tau) \\ \dots\dots\dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau) \end{pmatrix}.$$

Здесь и в дальнейшем при описании алгоритма решения задачи ОРМ для второй компоненты вектора обобщенного псевдоградиента функции $P(\tau, \psi)$ в точке (τ, ψ) будем применять обозначение $\hat{g}_p^\psi(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}) = -g_p^\psi(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$.

В формулах (2.1.5), (2.1.6) значения характеристических функций $\lambda_i(x)$, $i = 1, \dots, N$, определяются следующим образом:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i \leq c(x, \tau_j) + a_j + \psi_j, \\ & i \neq j \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Опишем алгоритм решения задачи **A**, составной частью которого является модификация r -алгоритма Шора [103], так называемый $r(\alpha)$ алгоритм постоянным коэффициентом растяжения пространства α и адаптивным способом регулировки шагового множителя [101, 103].

Алгоритм 2.1

0-й шаг. Область Ω заключаем в прямоугольный параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем $\rho(x) = 0$ при $x \in \Pi \setminus \Omega$. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаём начальное приближение $(\tau, \psi) = (\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$. Задаём параметры $\alpha, q_1, q_2, n_h, \varepsilon$ модификации $r(\alpha)$ -алгоритма.

1-й шаг. Вычисляем значения $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (2.1.7) при $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}$. Вычисляем значения функции $G_1(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ и вектора $g_P(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ в узлах сетки по формулам (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6) при $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}, \lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$.

Выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$, полагаем $B_0^\tau = I_{nN}, B_0^\psi = I_N$, – квадратные матрицы размерностей $nN \times nN, N \times N$ соответственно, выбираем параметры $q_1, q_2, n_h, \varepsilon$ r -алгоритма Шора и находим:

$$\begin{aligned} \tau^{(1)} &= P_\Omega \left(\tau^{(0)} - h_0 g_P^\tau(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}) \right), \\ \psi^{(1)} &= \psi^{(0)} - h_0 \hat{g}_P^\psi(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}). \end{aligned}$$

Здесь P_Ω – оператор проектирования на Ω (см. п. 1.6.2).

2-й шаг. Пусть в результате вычислений после $k, k = 1, 2, \dots$ шагов алгоритма получены величины $\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$ в узлах сетки, матрицы B_k^τ, B_k^ψ .

Опишем **($k+1$)-й шаг.**

1. Вычисляем значения $\lambda^{(k)}(x)$ в узлах сетки по формулам (2.1.7) при $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}$.

2. Вычисляем значения $g_P(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$ в узлах сетки по формулам (2.1.5),

(2.1.6) при $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}, \lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$.

3. Проводим $(k+1)$ -й шаг $r(\alpha)$ -алгоритма обобщённых псевдоградиентов с растяжением пространства, близкого к r -алгоритму Шора [101], итерационная формула которого имеет вид:

$$\tau^{(k+1)} = P_{\Omega} \left(\tau^{(k)} - h_k B_{k+1} \frac{B_{k+1}^T g_P^T(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\|B_{k+1}^T g_P^T(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})\|} \right),$$

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} - h_k B_{k+1} \frac{B_{k+1}^T \hat{g}_P^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\|B_{k+1}^T \hat{g}_P^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})\|}.$$

Здесь B_{k+1}^T, B_{k+1}^w – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство с коэффициентом растяжения α , которые имеют вид:

$$B_{k+1}^w = B_k^w \left(I + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \theta_k^w (\theta_k^w)^T \right),$$

где w обозначает переменную τ или ψ , I – единичная матрица соответствующей размерности, θ_k^w – соответствует нормированному вектору разности двух последовательных псевдоградиентов в преобразованном пространстве, то есть:

$$\theta_k^w = \frac{(B_{k+1}^w)^T (g_P^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - g_P^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}))}{\|(B_{k+1}^w)^T (g_P^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - g_P^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}))\|},$$

при условии, что $\|(B_{k+1}^w)^T (g_P^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - g_P^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}))\| \geq \varepsilon_0$, и $\theta_k^w = 0$ в остальных случаях, здесь ε_0 – точность представления нуля ЭВМ.

Длина шагового множителя h_k регулируется адаптивным способом с параметрами h_0, q_1, q_2, n_h , согласно которому шаговый множитель выбирается из условия минимума разности

$$[G_1(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k)}) - G_1(\tau^{(k)}, \psi^{(k-1)})]$$

по направлению обобщённого антипсевдоградиента $-g_P(\tau, \psi)$ в преобразованном пространстве.

4. Если условие

$$\left\| \left(\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)} \right) - \left(\tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right) \right\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0, \quad (2.1.8)$$

не выполняется, переходим к $(k+2)$ -му шагу алгоритма с новыми значениями величин $\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}, \lambda^{(k)}(x)$, в узлах сетки, и матриц B_{k+1}^z, B_{k+1}^w , если выполняется, то переходим на п. 5.

Здесь ε – параметр, задающий условие останова алгоритма по отклонению аргумента.

5. Полагаем $\tau_* = \tau^{(l)}, \psi^* = \psi^{(l)}, \lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (2.1.8).

6. Вычисляем оптимальное значение двойственного функционала по формуле (2.1.4) при $\tau = \tau_*, \psi = \psi^*$, и для контроля правильности счёта, по формуле:

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_{*i}) + a_i] \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx.$$

Алгоритм 2.1 описан.

Отметим, что вычислительная эффективность описанного алгоритма в первую очередь зависит от коэффициента растяжения пространства α и параметров адаптивной регулировки шага q_1, q_2, n_h из $r(\alpha)$ -алгоритма. Как было отмечено в п. 1.5, параметры необходимо выбирать таким образом, чтобы адаптивный способ регулировки шагового множителя позволял увеличивать точность поиска минимума функции по направлению в процессе счёта и при этом не делал большого количества шагов в этом направлении. Для негладких функций этого можно добиться следующим выбором параметров: $\alpha = 2 \div 3$, $h_0 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1.1 \div 1.2$, $n_h = 2 \div 3$, где q_1 коэффициент уменьшения шага, если условие спуска по направлению выполняется за один шаг, q_2 – коэффициент увеличения шага, при этом натуральное число n_h ($n_h > 1$) задаёт количество шагов одномерного спуска, после которых шаг будет увеличиваться в q_2 раз.

Далее приведем три частные постановки задачи **A** и их решения в терминах характеристических функций подмножеств, а именно, непрерывную задачу оптимального разбиения без ограничений с фиксированными центрами подмножеств, задачу ОРМ без ограничений с отысканием координат центров подмножеств и задачу ОРМ при ограничениях с фиксированными центрами под-

множеств. Все условия на функции, входящие в постановки задач оптимального разбиения множеств, которые будут приведены ниже, остаются такими же, как и в задаче **A**.

2.1.2. Линейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множеств без ограничений с заданными координатами центров подмножеств и ее решение

Под непрерывной линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества Ω из E_n на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые) без ограничений с заданными координатами центров τ_1, \dots, τ_N подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, соответственно, будем понимать задачу **A1**.

Задача A1. Найти

$$\min_{(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in \Sigma_{\Omega}^N} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}),$$

где

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx;$$

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega; \tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N; \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)});$$

a_1, \dots, a_N – заданные неотрицательные числа, координаты $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$ центра τ_i , $i = 1, \dots, N$, фиксированы.

Для сформулированной задачи **A1**, являющейся частным случаем задачи **A**, имеют место аналоги теорем 2.1 и 2.2.

Аналог теоремы 2.1 для задачи A1. Для того чтобы возможное разбиение $(\Omega_{\omega_1}, \dots, \Omega_{\omega_j}, \dots, \Omega_{\omega_N}) \in \Sigma_{\Omega}^N$ множества Ω для каждого фиксированного $\tau \in \Omega$ являлось оптимальным для задачи **A1**, необходимо и достаточно чтобы

$$c(x, \tau_i) + a_i \leq c(x, \tau_j) + a_j,$$

$$i \neq j, \text{ п.в. для } x \in \Omega_{\omega_i}, i, j = 1, \dots, N.$$

Аналог теоремы 2.2 для задачи A1. Оптимальное решение $(\Omega_{\omega_1}, \dots, \Omega_{\omega_j}, \dots, \Omega_{\omega_N})$ задачи **A1**, в терминах характеристической вектор-функции $\lambda_{\omega}(x) = (\lambda_{\omega_1}(x), \dots, \lambda_{\omega_j}(x), \dots, \lambda_{\omega_N}(x))$ имеет вид для каждого фиксированного $\tau \in \Omega$ и почти всех $x \in \Omega$:

$$\lambda_{*j}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_{*j}) + a_i \leq c(x, \tau_{*j}) + a_j, \\ i \neq j \text{ п.в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, & \text{тогда } x \in \Omega_{*j}, \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

2.1.3. Линейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множеств без ограничений с отысканием координат центров подмножеств и ее решение

Под непрерывной линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества Ω из E_n на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые) без ограничений с размещением центров τ_1, \dots, τ_N подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ соответственно, будем понимать задачу **A2**.

Задача A2. Найти

$$\min_{(\Omega_1, \dots, \Omega_N), (\tau_1, \dots, \tau_N)} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx,$$

$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; координаты $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$ центра τ_i , $i = 1, \dots, N$, заранее неизвестны (подлежат определению).

Для сформулированной задачи **A2**, являющейся частным случаем задачи **A**, имеют место аналоги теорем 2.1 и 2.2.

Аналог теоремы 2.1 для задачи A2. Для того чтобы возможное разбиение $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*j}, \dots, \Omega_{*N}) \in \Sigma_{\Omega}^N$ множества Ω для каждого фиксированного $\tau \in \Omega$ являлось оптимальным для задачи **A2**, необходимо и достаточно чтобы

$$c(x, \tau_i) + a_i \leq c(x, \tau_j) + a_j,$$

$i \neq j$, п.в. для $x \in \Omega_{*j}$, $i, j = 1, \dots, N$.

Аналог теоремы 2.2 для задачи A2. Оптимальное решение $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*j}, \dots, \Omega_{*N})$ задачи **A2**, в терминах характеристической вектор-

функции $\lambda_{*i}(x) = (\lambda_{*i_1}(x), \dots, \lambda_{*i_j}(x), \dots, \lambda_{*i_N}(x))$ имеет вид для $i = 1, \dots, N$ и почти всех $x \in \Omega$:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_{*i_j}) + a_i \leq c(x, \tau_{*i_j}) + a_j, \\ i \neq j \text{ п.в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, & \text{тогда } x \in \Omega_{*i_j}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

в качестве $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$ выбирается оптимальное решение задачи

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i] \rho(x) dx \rightarrow \min, \tau \in \Omega^N.$$

2.1.4. Линейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множеств при ограничениях в форме равенств и неравенств с заданными координатами центров подмножеств и ее решение

Под непрерывной линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества Ω из E_n на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с заданными координатами центров τ_1, \dots, τ_N подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, соответственно, будем понимать задачу АЗ.

Задача АЗ. Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\})$$

при условиях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

где

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx,$$

$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; координаты $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$ центра τ_i , $i = 1, \dots, N$, фиксированы; a_1, \dots, a_N , b_1, \dots, b_N – заданные неотрицательные числа, причем имеет место неравенство

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Для сформулированной задачи **A3**, являющейся частным случаем задачи **A**, имеют место аналоги теорем 2.1 и 2.2.

Аналог теоремы 2.1 для задачи A3. Для того чтобы возможное разбиение $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N}) \in \Sigma_{\Omega}^N$ множества Ω для каждого фиксированного $\tau \in \Omega$ являлось оптимальным для задачи **A**, необходимо и достаточно существование действительных констант $\psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ (среди которых $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ неотрицательны) таких, что

$$\begin{aligned} c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i &\leq c(x, \tau_j) + a_j + \psi_j, \\ i &\neq j, \text{ п.в. для } x \in \Omega_{*i}, i, j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Аналог теоремы 2.2 для задачи A3. Оптимальное решение задачи **A3** имеет следующий вид для $i = 1, \dots, N$ и почти всех $x \in \Omega$:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i^* \leq c(x, \tau_j) + a_j + \psi_j^*, \\ i \neq j \text{ п.в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, & \text{тогда } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

в качестве $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ выбирается оптимальное решение задачи

$$G(\psi) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \rightarrow \max$$

при условиях

$$\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N.$$

Замечание 2.1. Поскольку непрерывные задачи оптимального разбиения множеств **A1**, **A2**, **A3** являются частными случаями задачи **A**, то нетрудно адаптировать алгоритм решения задачи **A** для решения задач **A1**, **A2**, **A3**, основываясь на соответствующих аналогах теоремы 2.1. Адаптированные версии алгоритма 2.1 к решению задач **A1**, **A2**, **A3** представлены в работе [36].

2.2. Непрерывные линейные многопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств. Алгоритмы решения

2.2.1. Линейная многопродуктовая задача оптимального разбиения множеств при ограничениях с заданными координатами центров подмножеств. Алгоритм решения

Непрерывную линейную многопродуктовую задачу оптимального разбиения множества $\Omega \subset E_n$ на его подмножества $\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M$ (среди которых могут быть пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с заданным положением центров подмножеств запишем в терминах характеристических функций в виде ВЗ, удобном для дальнейших исследований.

Задача ВЗ. Найти

$$\min_{\lambda(x) \in \Gamma_4} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx,$$

где

$$\Gamma_4 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_3 \text{ п. в. для } x \in \Omega ;$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N \};$$

$$\Gamma_3 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_N^1(x); \lambda_1^M(x), \dots, \lambda_N^M(x)) :$$

$$\lambda_i^j(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M \};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) - \text{заданный вектор из } \Omega^N.$$

Здесь функции $c^j(x, \tau_i)$ – действительные, ограниченные, определенные на $\Omega \times \Omega$, измеримые по x при любом фиксированном $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ для всех $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$; функции $\rho^j(x)$ – ограниченные, измеримые на Ω для всех $j = 1, \dots, M$; $a_1^1, \dots, a_N^M, b_1, \dots, b_N$ – заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи:

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Точка $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$, принадлежащая подмножеству Ω_i^j , одна и та же для всех $j = 1, \dots, M$, является общим центром подмножеств $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$.

Будем считать, что мера множества граничных точек Ω_i^j , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, равна нулю.

Характеристическая функция $\lambda_i^j(x)$ подмножества Ω_i^j , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, имеет вид:

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i^j, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i^j. \end{cases}$$

От задачи **В3** бесконечномерного математического программирования с булевыми значениями переменных $\lambda_i^j(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, перейдем к соответствующей задаче со значениями $\lambda_i^j(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, из отрезка $[0, 1]$, т. е. рассмотрим следующую задачу.

Задача В3.1. Найти вектор-функцию $\lambda_* (\cdot) = (\lambda_{*1}^1(\cdot), \dots, \lambda_{*N}^M(\cdot))$, такую, что

$$I(\lambda_*(\cdot)) = \min_{\lambda \in \Gamma_5} I(\lambda(\cdot)),$$

$$\Gamma_5 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma \text{ п. в. для } x \in \Omega ;$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N \}.$$

Здесь

$$I(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [c^j(x, \tau_i) + \alpha_i^j] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx,$$

$$\Gamma = \{ \lambda(x) : \sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, M,$$

$$0 \leq \lambda_i^j(x) \leq 1, \quad x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M \}.$$

Как следует из [36] Γ_5 – ограниченное, замкнутое, выпуклое множество гильбертова пространства $L_2^{MN}(\Omega)$ с нормой

$$\|\lambda(\cdot)\| = \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [\lambda_i^j(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

Согласно [15], $L_2^{MN}(\Omega)$ рефлексивно.

При каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ функционал $I(\lambda(\cdot))$ линеен, непрерывен относительно $\lambda(\cdot)$ на Γ_5 .

Имеют место три следующие утверждения, доказанные в [36].

Утверждение 2.1. При каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ ограниченное, замкнутое, выпуклое множество Γ_5 гильбертова пространства $L_2^{MN}(\Omega)$ слабо компактно и (согласно теореме Крейна – Мильмана [34]) содержит по крайней мере одну крайнюю точку.

Утверждение 2.2. Среди множества точек Γ_5^* , в которых линейный относительно $\lambda(\cdot)$ функционал $I(\lambda(\cdot))$ достигает при фиксированном $\tau \in \Omega^N$ минимального по $\lambda(\cdot)$ значения на множестве Γ_5 , найдется хотя бы одна крайняя точка множества Γ_5 .

Утверждение 2.3. Крайние точки множества Γ_5 представляют собой характеристические функции некоторых подмножеств Ω_i^j , образующих разбиение множества Ω при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$.

Отметим, что задача **В3** имеет решение. Действительно, так как Γ_5 – ограниченное, замкнутое, выпуклое множество гильбертова пространства $L_2^{MN}(\Omega)$, а функционал $I(\lambda(\cdot))$ линеен (а значит, выпуклый) и непрерывен относительно $\lambda(\cdot)$ на Γ_5 , тогда в силу обобщенной теоремы Вейерштрасса [15, 16] выпуклый непрерывный функционал $I(\lambda(\cdot))$ на замкнутом, ограниченном, выпуклом множестве Γ_2 гильбертова пространства $L_2^{MN}(\Omega)$ достигает своей нижней грани.

Заметим также, что, как следует из утверждения 2.2, среди множества оптимальных решений задачи **В3**, т. е. среди множества точек Γ_5^* , в которых линейный относительно $\lambda(\cdot)$ функционал $I(\lambda(\cdot))$ достигает минимального значения на множестве Γ_5 , найдется хотя бы одна крайняя точка множества Γ_5 .

А, как следует из утверждения 2.3, крайние точки множества Γ_5 представляют собой характеристические функции подмножеств Ω_i^j , образующих разбиение множества Ω . Отсюда следует, что среди множества оптимальных решений задачи **В3.1** содержатся оптимальные решения задачи **В3**. Приведенные утверждения сводят задачу **В3.1** к задаче **В3**.

Описание метода решения задачи В3

Под функционалом Лагранжа для задачи **В3.1** будем понимать функционал вида

$$h(\lambda, \psi) = I(\lambda(\cdot)) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i \right), \quad (2.2.1)$$

где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ есть N -мерный вектор вещественных чисел, у которого компоненты ψ_1, \dots, ψ_p произвольны по знаку, а $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ — неотрицательны; $\lambda(x) \in \Gamma$ для $x \in \Omega$.

Пару $(\lambda_*(\cdot), \psi^*)$ назовем седловой точкой функционала (2.2.1) на множестве $\Gamma \times \Lambda$, где

$$\Lambda = \{ \psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E_N : \psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N \},$$

если $h(\lambda_*(\cdot), \psi) \leq h(\lambda_*(\cdot), \psi^*) \leq h(\lambda(\cdot), \psi^*)$ для всех $\lambda \in \Gamma$, $\psi \in \Lambda$, или

$$h(\lambda_*(\cdot), \psi^*) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \sup_{\psi \in \Lambda} h(\lambda(\cdot), \psi) = \max_{\psi \in \Lambda} \inf_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\lambda(\cdot), \psi).$$

Введем функционалы

$$\chi(\lambda(\cdot)) = \sup_{\psi \in \Lambda} h(\lambda, \psi), \lambda \in \Gamma,$$

$$G(\psi) = \inf_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\lambda, \psi), \psi \in \Lambda.$$

Рассмотрим задачи

$$\chi(\lambda) \rightarrow \min, \lambda \in \Gamma. \quad (2.2.2)$$

$$G(\psi) \rightarrow \max, \psi \in \Lambda. \quad (2.2.3)$$

Задачу (2.2.2) назовем прямой, задачу (2.2.3) — двойственной к (2.2.2).

В [36] установлено, что решение пары двойственных задач (2.2.2), а значит **В3.1**, и (2.2.3) (каждая из которых разрешима) эквивалентно отысканию седловой точки функционала Лагранжа (2.2.1) на множестве $\Gamma \times \Lambda$.

Для отыскания седловой точки функционала Лагранжа (2.2.1) конкретизируем двойственную задачу (2.2.3). Для этого, подставляя в выражение вида

$$G(\psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\lambda, \psi), \quad \psi \in \Lambda,$$

выражение для $h(\lambda(\cdot), \psi)$ из (2.2.1), получаем:

$$\begin{aligned} G(\psi) &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\lambda(\cdot), \psi) = -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ &+ \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ \left[c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \right] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) \right\} dx, \quad \psi \in \Lambda. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Покажем, что минимальное значение функционала $h(\lambda(\cdot), \psi)$ из выражения (2.2.4) для каждого $\psi \in \Lambda$ достигается на вектор-функции $\lambda_*(x) = (\lambda_{*1}^1(x), \dots, \lambda_{*i}^j(x), \dots, \lambda_{*N}^M(x))$, i -я компонента которой имеет вид:

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k, \\ & i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, k = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Для этого рассмотрим задачу

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ \left[c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \right] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) \right\} dx \rightarrow \min, \quad \psi \in \Lambda,$$

при условиях

$$0 \leq \lambda_i^j(x) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, M,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, M.$$

Составим функционал Лагранжа для этой задачи, включая в него ограничение вида $\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1$:

$$\begin{aligned} L(\lambda(\cdot), \psi_0(\cdot)) &= \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \right] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) + \sum_{j=1}^M \psi_0^j(x) \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) - 1 \right) \right\} dx = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left[\left(c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \right) \rho^j(x) + \psi_0^j(x) \right] \lambda_i^j(x) dx - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \psi_0^j(x) dx \end{aligned}$$

при $0 \leq \lambda_1^1(x) \leq 1, \dots, 0 \leq \lambda_1^j(x) \leq 1, \dots, 0 \leq \lambda_N^M(x) \leq 1, \psi_0^j(\cdot) \in L_2(\Omega), j = 1, \dots, M$.

Так как функционал $L(\lambda, \psi_0)$ при любой фиксированной вектор-функции $\psi_0(\cdot) \in L_2(\Omega)$ линейный сепарабельный по λ на допустимом множестве, которое может быть представлено декартовым произведением $\{0 \leq \lambda_1^1(x) \leq 1\} \times \dots \times \{0 \leq \lambda_1^j(x) \leq 1\} \times \dots \times \{0 \leq \lambda_N^M(x) \leq 1\}, x \in \Omega$, то выполняется следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \min_{\substack{0 \leq \lambda_i^j \leq 1 \\ \dots \\ 0 \leq \lambda_N^M \leq 1}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left[(c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i) \rho^j(x) + \psi_0^j(x) \right] \lambda_i^j(x) dx = \\ & = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \min_{0 \leq \lambda_i^j \leq 1} \left\{ \left[(c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i) \rho^j(x) + \psi_0^j(x) \right] \lambda_i^j(x) \right\} dx. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Отсюда уже очевидно, что в (2.2.5) минимальное значение i, j -го выражения, $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$, стоящего в фигурных скобках, для каждого $\psi_0^j(\cdot) \in \Lambda$ достигается при $\lambda_i^j(x) = \lambda_{\omega_i^j}^j(x)$, где

$$\lambda_{\omega_i^j}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i) \rho^j(x) + \psi_0^j(x) \leq 0, \\ 0, & \text{если } (c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i) \rho^j(x) + \psi_0^j(x) > 0. \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Если учесть, что формула (2.2.7) получена для всех $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$, то легко увидеть, что каждая точка x из Ω будет принадлежать тому из его подмножеств, для которых соответствующая сумма $(c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i) \rho^j(x) + \psi_0^j(x)$ будет наименьшей, т. е. $x \in \Omega_{\omega_i^j}^j$, если

$$(c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i) \rho^j(x) + \psi_0^j(x) = \min_{k=1, \dots, N} (c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k) \rho^j(x) + \psi_0^j(x), \\ j = 1, \dots, M,$$

или (запишем по-другому):

$$(c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i) \rho^j(x) + \psi_0^j(x) \leq (c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k) \rho^j(x) + \psi_0^j(x), \\ k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M.$$

Исключая из предыдущего неравенства $\psi_0^j(x)$, перепишем (2.2.7) (пока еще не окончательно) для $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$, и при условии, что $\rho^j(x) \geq 0$ для $x \in \Omega$, в виде

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Пусть теперь точка x принадлежит оптимальной границе подмножеств Ω_{*i}^j и Ω_{*k}^j , $i \neq k$. Так как точка x в то же время принадлежит Ω_{*i}^j , то

$$c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k.$$

С другой стороны, так как $x \in \Omega_{*k}^j$, то

$$c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \geq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k.$$

Отсюда $c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i = c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k$ в точках оптимальной границы подмножеств Ω_{*i}^j и Ω_{*k}^j . Таким образом, в формуле (2.2.8) знак равенства может иметь место и в случаях, когда $i \neq k$, но, как предполагалось, лебегова мера таких точек равна нулю. Поэтому можно записать $c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k$ для $k=1, \dots, N$ и $i \neq k$ для всех точек $x \in \Omega$, кроме множества точек меры нуль (т. е. точек границы подмножеств Ω_{*i}^j и Ω_{*k}^j) или более кратко: $i \neq k$ почти всюду для $x \in \Omega$. Итак, выражение для $\lambda_{*i}^j(x)$ из (2.2.8) можно теперь представить в виде

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k, \\ & k=1, \dots, N, i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, \text{ тогда } x \in \Omega_{*i}^j, \\ 0 & \text{в остальных случаях, тогда } x \in \Omega \setminus \Omega_{*i}^j, \end{cases}$$

т. е. получили формулу (2.2.5).

Подставляя в (2.2.4) вместо $\lambda_{*i}^j(x)$ выражение из (2.2.5), получаем:

$$G(\psi) = -\sum_{i=1}^M \psi_i b_i + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \min_{k=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k] \rho^j(x) dx. \quad (2.2.9)$$

Из вида оптимального решения (2.2.5) (в предположении, что выполняются условия $\rho^j(x) \geq 0$ для $x \in \Omega$, $j=1, \dots, M$) следует теорема 2.3.

Теорема 2.3. Если возможное разбиение $(\Omega_{*1}^1, \dots, \Omega_{*1}^j, \dots, \Omega_{*N}^M)$ является оптимальным для задачи **В3**, то существуют действительные константы $\psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ (среди которых $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ неотрицательны), такие, что

$$c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k, \quad i \neq k, \quad (2.2.10)$$

п. в. для $x \in \Omega_{*i}^j$, $i, k=1, \dots, N$, $j=1, \dots, M$.

Замечание к теореме 2.3. Ввиду линейности функционала $I(\lambda(\cdot))$ необходимое условие (2.2.10) является и достаточным условием оптимальности для задачи **В3**.

Следствие из теоремы 2.3. В точках x , принадлежащих оптимальной границе подмножеств Ω_{*i}^j и Ω_{*k}^j , в неравенстве (2.2.10) достигается знак равенства.

Итогом приведенных выше рассуждений является следующая теорема.

Теорема 2.4. Седловая точка $(\lambda_*(\cdot), \psi^*)$ (где первая компонента $\lambda_*(\cdot)$ является оптимальным решением задачи **В3**) функционала (2.2.1) на множестве $\Gamma \times \Lambda$ определяется для $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$ и почти всех $x \in \Omega$ следующим образом:

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \Omega_{*i}^j, \\ 0, & \text{при } x \in \Omega \setminus \Omega_{*i}^j, \end{cases}$$

где

$$\Omega_{*i}^j = \left\{ x \in \Omega : c^j(x, \tau_i) + \alpha_i^j + \psi_i^* = \min_{k=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_k) + \alpha_k^j + \psi_k^*] \right\},$$

$$i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M\},$$

в качестве $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ выбирается оптимальное решение двойственной задачи (2.2.3), приведенной к виду:

$$G(\psi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \min_{k=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_k) + \alpha_k^j + \psi_k] \rho^j(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \rightarrow \max \quad (2.2.11)$$

при условиях

$$\psi_i \geq 0, i = p+1, p+2, \dots, N. \quad (2.2.12)$$

Алгоритм решения задачи **В3**

Для решения задачи (2.2.11), (2.2.12) максимизации вогнутой недифференцируемой функции $G(\psi)$ при условиях (2.2.12) будем использовать метод обобщенного градиентного подъема с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов (г-алгоритм) [103].

От задачи (2.2.11), (2.2.12) перейдем к задаче безусловной максимизации с помощью введения в целевую функцию (2.2.11) негладкой штрафной функции множества $\{ \psi_i \geq 0, i = p+1, p+2, \dots, N \}$:

$$P(\psi) = G(\psi) - S \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i) \rightarrow \max, \psi \in E_N, \quad (2.2.13)$$

где S – достаточно большое положительное число (значительно больше максимального из множителей Лагранжа для функции (2.2.11)).

Определим i -ю компоненту вектора обобщенного градиента $g_p(\psi) = (g_p^{\psi_1}(\psi), \dots, g_p^{\psi_N}(\psi))$ функции (2.2.13) в точке $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ следующим образом:

$$g_p^{\psi_i}(\psi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad (2.2.14)$$

$$g_p^{\psi_i}(\psi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i + S \cdot \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), \quad (2.2.15)$$

$$i = 1 + p, \dots, N,$$

где

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq \min_{k=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k], \\ & i \neq j \text{ п. в. для } x \in \Omega, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2.2.16)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

Опишем алгоритм решения задачи **ВЗ** на координатной сетке.

Алгоритм 2.2

Область Ω заключаем в параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем $\rho^j(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$, $j = 1, \dots, M$. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение $\psi = \psi^{(0)}$. Вычисляем значения $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (2.2.16) при $\psi = \psi^{(0)}$. Вычисляем значение $g_p^{\psi}(\psi^{(0)})$ по узлам сетки по формулам (2.2.14) и (2.2.15) при $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\psi = \psi^{(0)}$, выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$ г-алгоритма и находим

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} + h_0 g_p^{\psi}(\psi^{(0)}).$$

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после $k, k = 1, \dots, N$, шагов алгоритма получены определенные значения $\psi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$, в узлах сетки.

Опишем $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значение $\lambda^{(k)}(x)$ в узлах сетки по формулам (2.2.16) при $\psi = \psi^{(k)}$.

2. Вычисляем значение $g_p^{\psi}(\psi)$ по формулам (2.2.14), (2.2.15) при $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x), \psi = \psi^{(k)}$.

3. Проводим $(k+1)$ -й шаг г-алгоритма для максимизации функции (2.2.13) относительно ψ на E_N , краткая схема которого имеет вид:

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\psi} \tilde{g}_p^{\psi},$$

где B_{k+1}^{ψ} – оператор отображения преобразованного пространства в основное пространство E_N , причем $B_0^{\psi} = I_N$ (единичная матрица); $\tilde{g}_p = B_{k+1}^* g_p(\psi^{(k)})$; h_k – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия минимума по направлению.

4. Если условие

$$\|\psi^{(k)} - \psi^{(k+1)}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.2.17)$$

не выполняется, переходим к $(k+2)$ -му шагу алгоритма, если выполняется – то к п. 5.

5. Полагаем $\psi^* = \psi^{(l)}, \lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (2.2.17).

6. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала по формуле (2.2.9) при $\psi = \psi^*$ и, для контроля правильности счета, по формуле

$$I(\lambda_*(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx. \quad (2.2.18)$$

Алгоритм 2.2 описан.

Замечание к алгоритму 2.2. В результате работы алгоритма оптимальное разбиение для задачи **В3** получается для каждого продукта $j, j = 1, \dots, M$, в виде значений характеристических функций $\lambda_i^j(x)$ для каждого из подмножеств $\Omega_i^j, i = 1, \dots, N$, вычисленных в точках x , являющихся узлами прямоугольной сетки, покрывающей параллелепипед Π , в который заключена область Ω .

2.2.2. Линейная многопродуктовая задача оптимального разбиения множеств при ограничениях с отысканием координат центров подмножеств. Алгоритм решения

Под непрерывной линейной многопродуктовой задачей оптимального разбиения множества из n -мерного евклидова пространства E_n на подмножества с отысканием координат центров (с размещением центров) подмножеств при ограничениях в форме равенств и неравенств будем понимать задачу **A4**. Перепишем ее формулировку в виде **B4**, удобным для дальнейших исследований.

Задача B4. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_4 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

где

$$\Gamma_4 = \left\{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma'_3 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \right.$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N \};$$

$$\Gamma'_3 = \left\{ \lambda(x) : \lambda_i^j(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M, \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M \right\}.$$

Функции $c^j(x, \tau_i)$ – действительные, ограниченные, определенные на $\Omega \times \Omega$, измеримые по аргументу x при любом фиксированном $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ из Ω для всех $i = 1, \dots, N$; функции $\rho^j(x)$ – действительные, ограниченные, измеримые и неотрицательные на Ω для всех $j = 1, \dots, M$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ – заданная точка подмножества Ω , одна и та же для всех $j = 1, \dots, M$, называемая общим центром подмножеств $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$, не обязана принадлежать каждому из подмножеств $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$; $\alpha_1^1, \dots, \alpha_N^1, \dots, \alpha_1^M, \dots, \alpha_N^M, b_1, \dots, b_N$ – заданные неотрицательные числа, причем

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx.$$

Задача **B4** является задачей бесконечномерного математического программирования с булевыми переменными $\lambda(\cdot)$.

Будем так же рассматривать следующую задачу.

Задача B4.1. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_4 \times \Omega^M} I(\lambda(\cdot), \tau)$$

где

$$\Gamma_5 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma \text{ п. в. для } x \in \Omega ;$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N \}.$$

Здесь

$$\Gamma = \left\{ \lambda(x) : \sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M ; \right. \\ \left. 0 \leq \lambda_i^j(x) \leq 1, x \in \Omega, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, \dots, M \right\}.$$

Очевидно,

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \min_{\tau \in \Omega^M} \left[\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_5} I(\lambda(\cdot), \tau) \right]. \quad (2.2.19)$$

Как следует из [36], при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^M$ внутренняя задача (2.2.19) линейна относительно $\lambda(\cdot)$ на Γ_5 и глобально разрешима. Кроме того, при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^M$ во множестве оптимальных решений задачи **B4.1** содержатся оптимальные решения задачи **B4**.

Описание метода решения задачи A4

Введем функционал Лагранжа для задачи **B4.1** следующим образом:

$$h(\{ \lambda(\cdot), \tau \}, \psi) = I(\lambda(\cdot), \tau) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left[\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i \right] =$$

$$= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [c^j(x, \tau_i) + \alpha_i^j + \psi_i] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i, \quad (2.2.20)$$

где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ – N -мерный вектор вещественных чисел, у которого компоненты ψ_1, \dots, ψ_p произвольны по знаку, а $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ – неотрицательны; $\lambda(x) \in \Gamma$ для $x \in \Omega$; $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$.

Пару элементов $(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi^*)$ назовем седловой точкой функционала (2.2.20) на множестве $\{\Gamma \times \Omega^N\} \times \Lambda$, где

$$\Lambda = \{\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E_N : \psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\},$$

если

$$h(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi) \leq h(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi^*) \leq h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi^*)$$

для всех $\lambda \in \Gamma$, $\psi \in \Lambda$, или

$$\begin{aligned} & h(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi^*) = \\ & = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} \max_{\psi \in \Lambda} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi) = \max_{\psi \in \Lambda} \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi). \end{aligned}$$

Перейдем к решению задачи:

$$h(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi^*) = \max_{\psi \in \Lambda} \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi), \psi \in \Lambda.$$

Обозначим

$$G(\psi) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi), \psi \in \Lambda.$$

Задача, двойственная к задаче **B4.1**, имеет вид:

$$G(\psi) \rightarrow \max, \psi \in \Lambda. \quad (2.2.21)$$

От задачи отыскания $\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$ можно перейти к следующей задаче:

$$\min_{\tau \in \Omega^N} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi) \quad \text{при } \psi \in \Lambda. \quad (2.2.22)$$

Обозначим в (2.2.22)

$$G_1(\tau, \psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi). \quad (2.2.23)$$

Подставляя в (2.2.23) выражение для $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$ из (2.2.20), получаем:

$$G_1(\tau, \psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi) = -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i +$$

$$+ \min_{\substack{0 \leq \lambda_i^j \leq 1, \sum_{i=1}^M \lambda_i^j = 1 \\ i=1, \dots, N, j=1, \dots, M}} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx, \tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda. \quad (2.2.24)$$

Как следует из [36], минимальное значение по λ функционала $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$ в (2.2.24) достигается для каждых $\tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda$ при

$$\left(\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_1^j(x), \dots, \lambda_1^M(x) \right) = \left(\lambda_{\omega_1}^1(x), \dots, \lambda_{\omega_j}^j(x), \dots, \lambda_{\omega_N}^M(x) \right),$$

где

$$\lambda_{\omega_i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \Omega = \left\{ x \in \Omega : c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq \right. \\ & \left. \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k, \right. \\ & i \neq k \quad \text{п. в. для } x \in \Omega, k = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2.2.25)$$

и функционал $G_1(\tau, \psi)$ принимает вид:

$$G_1(\tau, \psi) = -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \min_{k=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k] \rho^j(x) dx. \quad (2.2.26)$$

Из вида оптимального решения (2.2.25) задачи (2.2.24) для каждого фиксированного $\tau \in \Omega^N$ (в предположении, что выполняются условия $\rho^j(x) \geq 0$ п. в. для $x \in \Omega, j = 1, \dots, M$) следует теорема 2.5.

Теорема 2.5. Для того чтобы возможное разбиение $(\Omega_{\omega_1}^1, \dots, \Omega_{\omega_j}^j, \dots, \Omega_{\omega_N}^M)$ являлось оптимальным для задачи **A4**, необходимо и достаточно существование действительных констант $\psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ (среди которых $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ неотрицательны), таких, что

$$c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k,$$

$$i \neq k \quad \text{п. в. для } x \in \Omega_{\omega_i}^j, i, k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M. \quad (2.2.27)$$

Следствие из теоремы 2.5. В точках x , принадлежащих оптимальной границе подмножеств $\Omega_{\omega_i}^j$ и $\Omega_{\omega_k}^j$, в неравенстве (2.2.27) достигается знак равенства.

Сформулируем теорему, подводящую итог вышеизложенным рассуждениям.

Теорема 2.6. Седловая точка $(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi^*)$ (где первая компонента $\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}$ является оптимальным решением задачи **B4**) функционала (2.2.20) на множестве $\{\Gamma \times \Omega^N\} \times \Lambda$ определяется для $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$, и почти всех $x \in \Omega$ следующим образом:

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \Omega_{*i}^j \text{ и } x \notin \Omega_{*q}^j, \quad q \leq i, \\ 0, & \text{при } x \notin \Omega_{*i}^j, \end{cases}$$

$$\text{где } \Omega_{*i}^j = \{x \in \Omega : c^j(x, \tau_{*i}) + a_i^j + \psi_i^* = \min_{k=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_{*k}) + a_k^j + \psi_k^*], \\ i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M\},$$

в качестве $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ выбирается оптимальное решение двойственной задачи (2.2.21), приведенной к виду:

$$G(\psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi) = \\ \min_{\tau \in \Omega^N} \left\{ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \min_{i=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i] \rho^j(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \right\} \rightarrow \max \quad (2.2.28)$$

при условиях

$$\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N. \quad (2.2.29)$$

Алгоритм решения задачи А4

Прежде чем сформулировать алгоритм решения задачи **B4**, основанный на теореме 2.6, остановимся на некоторых свойствах задачи (2.2.28), (2.2.29).

Очевидно, что по переменной ψ функция $G_1(\tau, \psi)$ из (2.2.26) является выпуклой недифференцируемой на множестве

$$\Lambda = \{\psi \in E_n : \psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}.$$

При каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ функция $G_1(\tau, \psi)$ по переменной τ на Ω^N обладает свойствами, установленными в [36] для задачи ОРМ без ограничений с отысканием координат центров подмножеств. То есть, вообще говоря, функция $G_1(\tau, \psi)$ из (2.2.26) при каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ является по $\tau \in \Omega^N$ многоэкстремальной.

Однако в некоторых частных случаях, описанных в [36], задача отыскания $\min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi)$, при каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$, одноэкстремальна.

Для отыскания решения задачи (2.2.28), (2.2.29) будем использовать алгоритм обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, близкий к г-алгоритму Шора. Для этого от задачи (2.2.28), (2.2.29) перейдем к задаче безусловной максимизации по ψ с помощью введения в целевую функцию (2.2.26) негладкой штрафной функции множества $\{\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}$ найти

$$\max_{\psi \in E_N} \min_{\tau \in \Omega^M} P(\tau, \psi), \quad (2.2.30)$$

где

$$P(\tau, \psi) = G_1(\tau, \psi) - S \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i).$$

Здесь S – достаточно большое положительное число (значительно больше максимального из множителей Лагранжа для функции (2.2.26)). О возможности перехода от задачи (2.2.28), (2.2.29) к (2.2.30) см. в [36].

Определим i -ю компоненту $2N$ -мерного вектора обобщенного псевдоградиента

$$g_p(\tau, \psi) = \left(g_p^\tau(\tau, \psi), -g_p^\psi(\tau, \psi) \right) = \\ \left(g_p^{\tau_1}(\tau, \psi), \dots, g_p^{\tau_N}(\tau, \psi), -g_p^{\psi_1}(\tau, \psi), \dots, -g_p^{\psi_N}(\tau, \psi) \right)$$

функции (2.2.30) в точке $(\tau, \psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$ следующим образом:

$$g_p^{\psi_i}(\tau, \psi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i, & i = 1, \dots, p \\ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i + S \cdot \max[0, \text{sign}(-\psi_i)], & \\ & i = p+1, \dots, N \end{cases}, \quad (2.2.31)$$

$$g_p^{\tau_i}(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) g_{c^j}^{\tau_i}(\tau, x) \lambda_i^j(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2.32)$$

где $g_p^{\tau_i}(\tau, \psi)$ есть i -я компонента N -мерного вектора обобщенного градиента $g_{c^j}^{\tau_i}(\tau, x)$ функции $c^j(x, \tau_j)$, $j = 1, \dots, M$, в точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$;

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i = \min_{k=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k^*], \\ & i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.2.33)$$

Алгоритм 2.3

Область Ω заключаем в параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем $\rho^j(x) = 0$, при $x \in \Pi/\Omega, j = 1, \dots, M$. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение $(\tau, \psi) = (\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$. Вычисляем значения $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (2.2.33) при $\psi = \psi^{(0)}, \tau = \tau^{(0)}$. Вычисляем значения $(g_p^\psi(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})), (g_p^\tau(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}))$ в узлах сетки по формулам (2.2.31), (2.2.32) при $\psi = \psi^{(0)}, \tau = \tau^{(0)}, \lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$. Выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$ г-алгоритма и находим:

$$\begin{aligned} \tau^{(1)} &= P_\Omega(\tau^{(0)} - h_0 g_p^\tau(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})), \\ \psi^{(1)} &= \psi^{(0)} - h_0 \hat{g}_p^\psi(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}), \end{aligned}$$

где P_Ω – оператор проектирования на Ω (см. п. 1.6.2).

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после k ($k = 1, 2, \dots$) шагов алгоритма получены определенные значения $\psi^{(k)}, \tau^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$ в узлах сетки.

Опишем $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значения $\lambda^{(k)}(x)$ в узлах сетки по формулам (2.2.33) при $\psi = \psi^{(k)}, \tau = \tau^{(k)}$.

2. Вычисляем значения $g_p(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$ по формулам (2.2.31), (2.2.32) при $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x), \psi = \psi^{(k)}, \tau = \tau^{(k)}$.

3. Проводим $(k+1)$ -й шаг г-алгоритма обобщенных почти - градиентов с растяжением пространства, близкого к г-алгоритму [103], краткая схема которого имеет вид:

$$\tau^{(k+1)} = P_\Omega(\tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^\tau \tilde{g}_p^\tau),$$

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} - h_k B_{k+1}^\psi \tilde{g}_P^\psi,$$

где $B_{k+1}^\tau, B_{k+1}^\psi$ – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство E_{N^*} , причем $B_0^\psi = I_{N^*}, B_0^\tau = I_N, I_N$ – единичная матрица; $\tilde{g}_P = B_{k+1}^* g_P(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$; h_k – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия минимума по направлению. Формулы для пересчета матриц $B_{k+1}^\tau, B_{k+1}^\psi$ см. в алгоритме 2.1.

4. Если условие

$$\left\| (\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - (\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}) \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.2.34)$$

не выполняется, переходим к $(k+2)$ -му шагу алгоритма, если выполняются, то – переход к п. 5.

5. Полагаем $\psi^* = \psi^{(l)}, \tau_* = \tau^{(l)}, \lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (2.2.34).

6. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала по формуле (2.2.26) при $\psi = \psi^*, \tau = \tau_*$, и, для контроля правильности счета, по формуле:

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_{*i}^j(x) dx. \quad (2.2.35)$$

Алгоритм 2.3 описан.

Замечание 2.3. В результате работы алгоритма оптимальное разбиение для задачи **A4** получается в виде значений характеристических функций $\lambda_i^j(x)$ для каждого из подмножеств $\Omega_i^j, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$, вычисленных в точках x , являющихся узлами прямоугольной сетки, покрывающей параллелепипед Π , в который заключена область Ω .

2.3. Непрерывные линейные задачи оптимального разбиения множеств из E_n с дополнительными ограничениями. Алгоритмы решения

2.3.1. Линейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множеств с дополнительными ограничениями

Под непрерывной линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества $\Omega \subset E_n$ на его подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (среди которых могут быть пустые) с размещением их центров при ограничениях в

форме равенств и неравенств и дополнительных ограничениях типа ограничений на пропускные способности коммуникаций будем понимать задачу, записанную в терминах характеристических функций в виде **B5**, удобном для дальнейших исследований.

Задача B5. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_6 \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_i) + a_i] \rho(x) \lambda_i(x) dx,$$

где

$$\Gamma_6 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ п. в. для } x \in \Omega ;$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

$$\int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq l_i, \quad i = 1, \dots, N \};$$

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \}; \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Функции $c(x, \tau_i)$ – ограниченные, определенные на $\Omega \times \Omega$, измеримые по аргументу x при любом фиксированном $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ из Ω для всех $i = 1, \dots, N$; координаты $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$ центра τ_i , $i = 1, \dots, N$ неизвестны; $\rho(x)$ – ограниченные, измеримые, неотрицательные на Ω функции; a_1, \dots, a_N , b_1, \dots, b_N , l_1, \dots, l_N – заданные неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям разрешимости, приведенным в следующей теореме.

Теорема 2.7. Для того чтобы множество допустимых решений задачи **B5** было непустым, необходимо выполнение следующих условий:

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq S, \quad \sum_{i=1}^p b_i \leq S, \quad \sum_{i=1}^N l_i \geq \min_{\tau \in \Omega^N} \int_{\Omega} \rho(x) \min_{1 \leq i \leq N} c(x, \tau_i) dx,$$

где $S = \int_{\Omega} \rho(x) dx$, $\rho(x) \geq 0$, $c(x, \tau_i) \geq 0$ для всех $x \in \Omega$, $i = 1, \dots, N$.

Задача **B5** является задачей бесконечномерного математического программирования с булевыми переменными $\lambda(\cdot)$.

Будем так же рассматривать следующую задачу.

Задача B5.1. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau)} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_i) + a_i] \rho(x) \lambda_i(x) dx$$

при условиях

$$A_i(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i = 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$A_i(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i \leq 0, \quad i = p+1, \dots, N,$$

$$\Phi_i(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx - l_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\lambda(\cdot) \in \Gamma', \quad \tau \in \Omega^N,$$

где $\Gamma' = \{\lambda(x) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N,$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega\}.$$

Доказано в [33], что задачи **B5** и **B5.1** при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ имеют решения, и при этом среди множества оптимальных решений задачи **B5.1** содержатся оптимальные решения задачи **B5**, что позволяет в дальнейшем перейти к рассмотрению задачи **B5.1**.

Получены необходимые условия оптимальности для задачи **B5.1** в рамках общей схемы Дубовицкого – Милотина [45] в виде следующей теоремы.

Теорема 2.8. Пусть $(\lambda_*(\cdot), \tau_*)$ – оптимальное решение задачи **B5.1**. Тогда найдутся числа $\psi_i, i = 0, 1, \dots, N$, не все равные нулю,

$$\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N, \quad \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\psi_i A_i(\lambda_*(\cdot)) = 0, \quad i = p+1, \dots, N, \quad \xi_i \Phi_i(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

такие, что

$$\psi_0 \left[\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} [c(x, \tau_{*i}) + a_i] \rho(x) (\lambda_i(x) - \lambda_{*i}(x)) dx + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n (\tau_i^{(k)} - \tau_{*i}^{(k)}) \int_{\Omega} g_c^{\tau_i^{(k)}}(x, \tau_{*i}) \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx \Big] + \\
& + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) (\lambda_i(x) - \lambda_{*i}(x)) dx \right) + \\
& + \sum_{i=1}^N \xi_i \left[\int_{\Omega} [c(x, \tau_{*i}) + a_i] \rho(x) (\lambda_i(x) - \lambda_{*i}(x)) dx + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^n (\tau_i^{(k)} - \tau_{*i}^{(k)}) \int_{\Omega} g_c^{\tau_i^{(k)}}(x, \tau_{*i}) \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx \right] \geq 0 \text{ для всех } (\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma' \times \Omega^N,
\end{aligned}$$

где $g_c^{\tau_i^{(k)}}(x, \tau_{*i})$ – $((i-1)n+k)$ -я компонента вектора обобщённого градиента функции $c(x, \tau)$ по τ в точке $\tau_* = (\tau_{1*}, \dots, \tau_{N*})$, $i=1, \dots, N$, $k=1, \dots, n$, который имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
g_c^{\tau}(x, \tau) = & \left(g_c^{\tau_1^{(1)}}(x, \tau), \dots, g_c^{\tau_1^{(n)}}(x, \tau), \dots, g_c^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau), \dots, g_c^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau), \dots, \right. \\
& \left. \dots, g_c^{\tau_N^{(1)}}(x, \tau), \dots, g_c^{\tau_N^{(n)}}(x, \tau) \right).
\end{aligned}$$

Обоснование метода решения задачи B5

Предлагаемый метод решения основывается на сведениях исходной бесконечномерной задачи оптимизации через функционал Лагранжа, с применением основной теоремы антагонистических игр, к двойственной конечномерной задаче с негладкой целевой функцией, для решения которой применяется одна из модификаций г-алгоритма Шора.

Введём функционал Лагранжа для задачи **B5.1** следующим образом:

$$\begin{aligned}
h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi) = & \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_i) + a_i] \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \xi_i \cdot \Phi_i(\lambda(\cdot), \tau) + \\
& + \sum_{i=1}^N \psi_i \cdot A_i(\lambda(\cdot)), \text{ для всех } \lambda(x) \in \Gamma', \tau \in \Omega^N, \quad (2.3.1)
\end{aligned}$$

где $\Psi = (\xi, \psi)$, а $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ – N -мерный вектор, компоненты которого неотрицательны, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_p, \dots, \psi_N)$ – N -мерный вектор, у которого компоненты ψ_1, \dots, ψ_p произвольны по знаку, а $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ – неотрицательны.

Пару элементов $(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \Psi^*)$ назовём седловой точкой функционала Лагранжа (2.3.1) на множестве $\{\Gamma' \times \Omega^N\} \times \Lambda$, где

$$\Lambda = \{(\xi, \psi) \in E_N \times E_N : \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N, \psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\},$$

если

$$h(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \Psi) \leq h(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \Psi^*) \leq h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi^*)$$

для всех $\{\lambda(\cdot), \tau\} \in \Gamma' \times \Omega^N$, $\Psi \in \Lambda$, или

$$\begin{aligned} h(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \Psi^*) &= \min_{\{\lambda(\cdot), \tau\} \in \Gamma' \times \Omega^N} \max_{\Psi \in \Lambda} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi) = \\ &= \max_{\Psi \in \Lambda} \min_{\{\lambda(\cdot), \tau\} \in \Gamma' \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi). \end{aligned}$$

Обозначим

$$G(\Psi) = \min_{\{\lambda(\cdot), \tau\} \in \Gamma' \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi), \quad \Psi \in \Lambda. \quad (2.3.2)$$

Задача, двойственная к задаче **B5.1**, имеет вид:

$$G(\Psi) \rightarrow \max, \quad \Psi \in \Lambda.$$

Далее рассмотрим вопрос о том, при каких условиях выполняется соотношение двойственности

$$\min_{\{\lambda(\cdot), \tau\} \in \Gamma' \times \Omega^N} \max_{\Psi \in \Lambda} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi) = \max_{\Psi \in \Lambda} \min_{\{\lambda(\cdot), \tau\} \in \Gamma' \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi). \quad (2.3.3)$$

Имеет место один из вариантов основной теоремы антагонистических игр, принадлежащий Г. Кнезеру, [33, 107].

Теорема 2.9. Если множество $\Gamma' \times \Omega^N$ – компактно, Λ – произвольное выпуклое множество в линейном пространстве, а функционал $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi)$ – выпуклый и полунепрерывный снизу (в частности, непрерывный) по $\{\lambda(\cdot), \tau\}$ на $\Gamma' \times \Omega^N$, вогнутый по $\Psi \in \Lambda$, то имеет место соотношение двойственности (2.3.3).

Далее из теоремы 2.9 следует, что решение пары двойственных задач эквивалентно отысканию седловой точки функционала Лагранжа (2.3.1) на $\{\Gamma' \times \Omega^N\} \times \Lambda$. Для отыскания седловой точки поступим следующим образом.

От задачи $\min_{\{\lambda(\cdot), \tau\} \in \Gamma' \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi)$ из (2.3.2) перейдем сначала к следующей задаче: найти

$$\min_{\tau \in \Omega^N} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi) \text{ при } \Psi \in \Lambda. \quad (2.3.4)$$

Отметим, что внутренняя задача в (2.3.4) глобально разрешима по $\lambda(\cdot)$ на Γ' .

Действительно, при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\Psi \in \Lambda$ функционал $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi)$ из (2.3.4), определяемый по формуле (2.3.1), будет выпуклым по $\lambda(\cdot)$ на $L_2^N(\Omega)$. Тогда из обобщённой теоремы Вейерштрасса следует, что при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\Psi \in \Lambda$ минимум по $\lambda(\cdot)$ функционала $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi)$ достигается на симплексе Γ' .

Рассмотрим локальную задачу из (2.3.4): найти

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi), \quad \tau \in \Omega^N, \Psi \in \Lambda, \quad (2.3.5)$$

где

$$\Gamma' = \{\lambda(x) \in L_2^N(\Omega) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, \quad (2.3.6)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega\}.$$

При фиксированных $\tau = \bar{\tau}$ и $\Psi = \bar{\Psi}$ введём функционал Лагранжа локальной задачи (2.3.5)-(2.3.6) следующим образом:

$$L_{\bar{\tau}}^*(\{\lambda(\cdot), \bar{\tau}\}, \bar{\Psi}) = h(\{\lambda(\cdot), \bar{\tau}\}, \bar{\Psi}) + \int_{\Omega} \psi_{0\bar{\tau}}^*(x) \cdot \left[\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) - 1 \right] dx, \quad (2.3.7)$$

где $\lambda(\cdot) \in \Gamma_0 = \{\lambda(\cdot) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega\}$, $\psi_{0\bar{\tau}}^*(x) \in L_2(\Omega)$ – оптимальный обобщённый множитель Лагранжа задачи (2.3.5) – (2.3.6), существование которого вытекает из [36].

Обозначим в (2.3.5)

$$G_1(\tau, \Psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi), \quad \tau \in \Omega^N, \Psi \in \Lambda. \quad (2.3.8)$$

Для каждого фиксированного $\Psi = \bar{\Psi}$ из Λ функция $G_1(\tau, \bar{\Psi})$, заданная соотношением (2.3.8), выпукла по τ на открытом множестве $W^N \supset \Omega^N$, где $W^N = \underbrace{W \times \dots \times W}_N$.

Как следует из [103], в каждой внутренней точке τ области определения W^N выпуклая функция $G_1(\tau, \bar{\Psi})$, определённая соотношением (2.3.8), имеет непустое субградиентное множество. Справедлива

Теорема 2.10. Пусть $\lambda_{\bar{\tau}}(\cdot)$ – оптимальное решение локальной задачи (2.3.5) – (2.3.6). Тогда обобщённый градиент функции $G_1(\tau, \bar{\Psi})$ в точке $\tau = \bar{\tau}$ может быть вычислен по формуле:

$$g_{G_1}^{\bar{\tau}}(\tau, \bar{\Psi}) = g_{L_{\bar{\tau}}}^{\bar{\tau}}(h(\{\lambda_{\bar{\tau}}(\cdot), \bar{\tau}\}, \bar{\Psi})),$$

где $g_{L_{\bar{\tau}}}^{\bar{\tau}}(h(\{\lambda_{\bar{\tau}}(\cdot), \bar{\tau}\}, \bar{\Psi}))$ есть N -мерная составляющая обобщённого градиента функционала Лагранжа (2.3.7) для задачи (2.3.5) – (2.3.6) в точке $\{\lambda_{\bar{\tau}}(\cdot), \bar{\tau}\}$.

Следствие 1 из теоремы 2.10. Обобщённый градиент функции $G_1(\tau, \bar{\Psi})$ по τ при фиксированном $\Psi = \bar{\Psi}$, $\bar{\Psi} \in \Lambda$ имеет вид $g_{G_1}^{\bar{\tau}}(\tau, \bar{\Psi}) = (g_{G_1}^{\tau_1}(\tau, \bar{\Psi}), \dots, g_{G_1}^{\tau_N}(\tau, \bar{\Psi}))$, где

$$g_{G_1}^{\tau_i}(\tau, \bar{\Psi}) = \int_{\Omega} (1 + \xi_i) \rho(x) g_c^{\tau_i}(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N,$$

причём $g_c^{\tau_i}(x, \tau_i)$ есть i -я компонента N -мерного вектора обобщённого градиента $g_c^{\tau}(x, \tau_i)$ функции $c(x, \tau_i)$ в точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$.

Следствие 2 из теоремы 2.10. Нетрудно показать, что компоненты обобщённого градиента $g_{G_1}^{\Psi}(\bar{\tau}, \xi, \psi) = (g_{G_1}^{\xi}(\bar{\tau}, \xi, \psi), g_{G_1}^{\psi}(\bar{\tau}, \xi, \psi))$ функции $G_1(\bar{\tau}, \Psi)$ по $\Psi = (\xi, \psi)$ при фиксированном $\tau = \bar{\tau}, \bar{\tau} \in W^N$ будут иметь вид:

$$g_{G_1}^{\xi}(\bar{\tau}, \xi, \psi) = \int_{\Omega} (1 + \xi_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx - l_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$g_{G_1}^{\psi}(\bar{\tau}, \xi, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Далее вместо двойственной задачи к задаче **B5.1**, учитывая (2.3.4) и (2.3.8), перейдем к решению следующей задачи:

$$\max_{\Psi \in \Lambda} \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \Psi).$$

Для этого сначала конкретизируем выражение $G_1(\tau, \Psi)$ из (2.3.8). Подставляя в (2.3.8) выражение для функционала $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi)$ из (2.3.1) и учитывая, что $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi)$ является линейным сепарабельным относительно $\lambda(\cdot)$ функционалом, получим:

$$\begin{aligned}
G_1(\tau, \Psi) &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \left[\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_i) + a_i] \rho(x) \lambda_i(x) dx + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^N \xi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) c(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx - l_i \right) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i \right) \right] = \\
&= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \left[\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [(1 + \xi_i) c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i] \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{i=1}^N \xi_i l_i - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \right] = \\
&\quad = - \sum_{i=1}^N \xi_i l_i - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\
&\quad + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \min_{\substack{\lambda(\cdot) \in \Gamma \\ 0 \leq \lambda_i(\cdot) \leq 1, \sum_{i=1}^N \lambda_i(\cdot) = 1}} \{ [(1 + \xi_i) c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i] \rho(x) \lambda_i(x) \} dx, \quad (2.3.11)
\end{aligned}$$

$$\tau \in \Omega^N, \Psi = (\xi, \psi) \in \Lambda.$$

Легко показать, что в (2.3.11) минимальное значение i -го выражения (из фигурных скобок) для каждого $\tau \in \Omega^N$, $\Psi \in \Lambda$ достигается при $\lambda_i(x) = \lambda_{\omega_i}(x)$, где

$$\lambda_{\omega_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_{\omega_i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2.3.12)$$

$$\Omega_{\omega_i} = \{x \in \Omega: (1 + \xi_i) c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i \leq (1 + \xi_k) c(x, \tau_k) + a_k + \psi_k, \\ \text{для } i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, k = 1, \dots, N\},$$

и тогда функцию $G_1(\tau, \Psi)$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
G_1(\tau, \Psi) &= \int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} [(1 + \xi_k) c(x, \tau_k) + a_k + \psi_k] \rho(x) dx - \\
&\quad - \sum_{i=1}^N \xi_i l_i - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i. \quad (2.3.13)
\end{aligned}$$

Из теоремы 2.8 и из вида оптимального решения (2.3.12) для задачи (2.3.11) при фиксированном $\tau \in \Omega^N$ (в предположении, что выполняются условия $\rho(x) \geq 0$ п. в. для $x \in \Omega$) следует теорема 2.11.

Теорема 2.11. Для того чтобы возможное разбиение $(\Omega_{\omega_1}, \dots, \Omega_{\omega_i}, \dots, \Omega_{\omega_N})$ являлось оптимальным для задачи **B5.1**, необходимо и достаточно существо-

вания действительных констант $\xi_1, \dots, \xi_N, \psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ (среди которых $\xi_1, \dots, \xi_N, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ – неотрицательные) таких, что

$$(1 + \xi_i)c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i \leq (1 + \xi_k)c(x, \tau_k) + a_k + \psi_k, \quad i \neq k, \quad (2.3.14)$$

п. в. для $x \in \Omega_{\tau_i}, i, k = 1, \dots, N$.

Сформулируем итоговую теорему.

Теорема 2.12. Седловая точка $(\{\lambda_{\omega}(\cdot), \tau_{*}\}, \Psi^{*})$ (где первая компонента $\{\lambda_{\omega}(\cdot), \tau_{*}\}$ является оптимальным решением задачи **B5.1** функционала (2.3.1) на множестве $\{\Gamma' \times \Omega^N\} \times \Lambda$ определяется для $i = 1, \dots, N$ и почти всех $x \in \Omega$ следующим образом:

$$\lambda_{\omega_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_{\tau_i}, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega \setminus \Omega_{\tau_i}, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{\tau_i} &= \{x \in \Omega : (1 + \xi_i^{*})c(x, \tau_{*i}) + a_i + \psi_i^{*} = \\ &= \min_{k=1, \dots, N} [(1 + \xi_k^{*})c(x, \tau_{*k}) + a_k + \psi_k^{*}]\}, \quad i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, \end{aligned}$$

в качестве $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}, \xi_1^{*}, \dots, \xi_N^{*}, \psi_1^{*}, \dots, \psi_N^{*}$ выбирается оптимальное решение двойственной задачи к задаче **B5.1**, приведённой к виду

$$\begin{aligned} G(\Psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \Psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \left\{ \int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} [(1 + \xi_k)c(x, \tau_k) + a_k + \psi_k] \rho(x) dx - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^N \xi_i l_i - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \right\} \rightarrow \max, \quad (2.3.15) \end{aligned}$$

при условиях

$$\xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N, \quad \psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N. \quad (2.3.16)$$

Алгоритм решения задачи B5

Приведём алгоритм решения задачи **A5**, основанный на теореме 2.12.

Для отыскания оптимального решения задачи (2.3.15) – (2.3.16) будем использовать эвристический алгоритм обобщённых псевдоградиентов с растяжением пространства, близкий к г-алгоритму Шора.

Для этого от задачи (2.3.15) – (2.3.16) введением в целевую функцию (2.3.15) негладких штрафных функции множеств $\{\xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}$, $\{\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}$ перейдём к задаче:

$$\text{найти} \quad \max_{\xi \in E_N} \max_{\psi \in E_N} \min_{\tau \in \Omega^N} P(\tau, \Psi), \quad (2.3.17)$$

где

$$P(\tau, \Psi) = G_1(\tau, \Psi) - S_1 \cdot \sum_{i=1}^N \max(0, -\xi_i) - S_2 \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i), \quad (2.3.18)$$

для всех $\xi \in E_N$, $\psi \in E_N$, $\tau \in \Omega^N$.

Здесь S_1, S_2 – достаточно большие положительные числа (значительно большие максимального из множителей Лагранжа для функции (2.3.13)).

(О возможности перехода от задачи (2.3.15) – (2.3.16) к задаче (2.3.17) – (2.3.18) см. в [36, 103].)

Определим, на основании следствий 1, 2 из теоремы 2.10 i -ю компоненту $3 \cdot N$ -мерного вектора обобщённого псевдоградиента

$$\begin{aligned} g(\tau, \xi, \psi) &= \left(g_p^\tau(\tau, \xi, \psi), -g_p^\xi(\tau, \xi, \psi), -g_p^\psi(\tau, \xi, \psi) \right) = \\ &= \left(g_p^{\tau_1}(\tau, \xi, \psi), \dots, g_p^{\tau_N}(\tau, \xi, \psi); \right. \\ &\quad \left. -g_p^{\xi_1}(\tau, \xi, \psi), \dots, -g_p^{\xi_N}(\tau, \xi, \psi); -g_p^{\psi_1}(\tau, \xi, \psi), \dots, -g_p^{\psi_N}(\tau, \xi, \psi) \right) \end{aligned}$$

функции (2.3.18) в точке $(\tau, \xi, \psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \xi_1, \dots, \xi_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$ следующим образом:

$$g_p^{\xi_i}(\tau, \xi, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) c(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx - l_i + S_1 \max(0, \text{sign}(-\xi_i)), \quad (2.3.19)$$

$$i = 1, \dots, N,$$

$$g_p^{\psi_i}(\tau, \xi, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad (2.3.20)$$

$$g_p^{\psi_i}(\tau, \xi, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + S_2 \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), \quad (2.3.21)$$

$$i = p+1, \dots, N,$$

$$g_p^{\tau_i}(\tau, \xi, \psi) = \int_{\Omega} (1 + \xi_i) \rho(x) g_c^{\tau_i}(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.3.22)$$

где $g_c^{\tau_i}(x, \tau_i)$ – i -я компонента N -мерного вектора обобщённого градиента $g_c^\tau(x, \tau_i)$ функции $c(x, \tau_i)$, в точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ при фиксированном x , имеющая вид:

$$g_c^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau) \\ \dots\dots\dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau) \end{pmatrix}.$$

В формулах (2.3.19) – (2.3.22) $\lambda_i(x)$, $i = 1, \dots, N$, определяется следующим образом:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (1 + \xi_i)c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i = \\ & = \min_{k=1, \dots, N} [(1 + \xi_k)c(x, \tau_k) + a_k + \psi_k], \\ & i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.3.23)$$

Замечание 2.2. В случае, когда $c(x, \tau_i)$ евклидова метрика, i -я компонента N -мерного вектора обобщённого градиента $g_c^\tau(x, \tau_i)$ функции $c(x, \tau_i)_E = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x^{(k)} - \tau_i^{(k)})^2}$, в точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ при фиксированном x , имеет следующий вид:

$$g_{c_E}^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} (\tau_i^{(1)} - x^{(1)}) / \sqrt{\sum_{k=1}^n (x^{(k)} - \tau_i^{(k)})^2} \\ \dots\dots\dots \\ (\tau_i^{(n)} - x^{(n)}) / \sqrt{\sum_{k=1}^n (x^{(k)} - \tau_i^{(k)})^2} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что вектор обобщённых псевдоградиентов функции $P(\tau, \psi, \xi)$ представляет собой сумму вектора обобщённых псевдоградиентов функции $G_1(\tau, \psi, \xi)$ и вектора градиентов штрафной части

$$\begin{aligned} & -S_1 \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i) - S_2 \cdot \sum_{i=1}^N \max(0, -\xi_i) + S_3 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \max\{0, x_{\min}^k - \tau_i^k\} + \\ & + S_4 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \max\{0, \tau_i^k - x_{\max}^k\} \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

функции $P(\tau, \psi, \xi)$. Здесь предполагается, что разбиваемое множество Ω представляет собой n -мерный параллелепипед.

Рассмотрим подробнее определение градиента штрафной части функции $P(\tau, \psi, \xi)$, которая определяется формулой (2.3.24):

1) i -я, $i = 1, \dots, N$, компонента градиента по τ штрафной части

$$\left[S_3 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \max\{0, x_{\min}^k - \tau_i^k\} \right] \text{ и } \left[S_4 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \max\{0, \tau_i^k - x_{\max}^k\} \right]$$

функции $P(\tau, \psi, \xi)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} & (S_3 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \max\{0, x_{\min}^k - \tau_i^k\})'_{\tau_i^k} = (S_3 \max\{0, x_{\min}^k - \tau_i^k\})'_{\tau_i^k} = \\ & = S_3 \cdot \left(\begin{array}{l} 0, \text{ если } x_{\min}^k - \tau_i^k < 0, \\ x_{\min}^k - \tau_i^k, \text{ если } x_{\min}^k - \tau_i^k \geq 0 \end{array} \right)'_{\tau_i^k} = S_3 \cdot \begin{cases} 0, & \text{если } x_{\min}^k - \tau_i^k < 0, \\ -1, & \text{если } x_{\min}^k - \tau_i^k \geq 0 \end{cases} = \\ & = -S_3 \cdot \begin{cases} 0, & \text{если } x_{\min}^k - \tau_i^k < 0, \\ 1, & \text{если } x_{\min}^k - \tau_i^k \geq 0 \end{cases} = -S_3 \max\{0, \text{sign}(x_{\min}^k - \tau_i^k)\}; \quad (2.3.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (S_4 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \max\{0, \tau_i^k - x_{\max}^k\})'_{\tau_i^k} = (S_4 \max\{0, \tau_i^k - x_{\max}^k\})'_{\tau_i^k} = \\ & = S_4 \cdot \left(\begin{array}{l} 0, \text{ если } \tau_i^k - x_{\max}^k < 0, \\ \tau_i^k - x_{\max}^k, \text{ если } \tau_i^k - x_{\max}^k \geq 0 \end{array} \right)'_{\tau_i^k} = S_4 \cdot \begin{cases} 0, & \text{если } \tau_i^k - x_{\max}^k < 0, \\ 1, & \text{если } \tau_i^k - x_{\max}^k \geq 0 \end{cases} = \\ & = S_4 \max\{0, \text{sign}(\tau_i^k - x_{\max}^k)\}; \quad (2.3.26) \end{aligned}$$

2) i -я, $i = p+1, \dots, N$, компонента градиента по ψ штрафной части

$$\left[-S_1 \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i) \right]$$

функции $P(\tau, \psi, \xi)$ определяется следующим образом:

$$(-S_2 \sum_{i=1}^N \max\{0, -\psi_i\})'_{\psi_i} = (-S_2 \max\{0, -\psi_i\})'_{\psi_i} =$$

$$\begin{aligned}
&= -S_2 \cdot \left(\begin{array}{l} 0, \text{ если } \psi_i > 0, \\ -\psi_i, \text{ если } \psi_i \leq 0 \end{array} \right)'_{\psi_i} = -S_2 \cdot \begin{cases} 0, \text{ если } \psi_i > 0, \\ -1, \text{ если } \psi_i \leq 0 \end{cases} = \\
&= S_2 \cdot \begin{cases} 0, \text{ если } \psi_i > 0, \\ 1, \text{ если } \psi_i \leq 0 \end{cases} = S_2 \max\{0, \text{sign}(-\psi_i)\}; \quad (2.3.27)
\end{aligned}$$

при $i = 1, \dots, p$ градиент по ψ штрафной части $\left[-S_2 \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i) \right]$ функции $P(\tau, \xi, \psi)$ равен нулю;

3) i -я, $i = 1, \dots, N$, компонента градиента по ξ штрафной части $-S_2 \cdot \sum_{i=1}^N \max(0, -\xi_i)$ функции $P(\tau, \psi, \xi)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&(-S_2 \sum_{i=1}^N \max\{0, -\xi_i\})'_{\xi_i} = (-S_1 \max\{0, -\xi_i\})'_{\xi_i} = \\
&= -S_1 \cdot \left(\begin{array}{l} 0, \text{ если } \xi_i > 0, \\ -\xi_i, \text{ если } \xi_i \leq 0 \end{array} \right)'_{\xi_i} = -S_1 \cdot \begin{cases} 0, \text{ если } \xi_i > 0, \\ -1, \text{ если } \xi_i \leq 0 \end{cases} = \\
&= S_1 \cdot \begin{cases} 0, \text{ если } \xi_i > 0, \\ 1, \text{ если } \xi_i \leq 0 \end{cases} = S_1 \max\{0, \text{sign}(-\xi_i)\}, \quad (2.3.28)
\end{aligned}$$

Опишем алгоритм решения задачи **B5**, составной частью которого является так называемый $r(\alpha)$ -алгоритм с постоянным коэффициентом растяжения пространства α и адаптивным способом регулировки шагового множителя [101, 102].

Алгоритм 2.4

0-й шаг. Область Ω заключаем в прямоугольный параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем $\rho(x) = 0$, при $x \in \Pi \setminus \Omega$. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаём начальное приближение $(\tau, \psi, \xi) = (\tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)})$. Задаём параметры $\alpha, q_1, q_2, n_h, \varepsilon$ модификации $r(\alpha)$ -алгоритма.

1-й шаг. Вычисляем значения $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (2.3.23) при $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}, \xi = \xi^{(0)}$. Вычисляем значения функции $G_1(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)})$

и вектора $g_P(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)})$ в узлах сетки по формулам (2.3.19) – (2.3.22) при $\tau = \tau^{(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$, $\xi = \xi^{(0)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$.

Выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$, полагаем $B_0^r = I_{nN}$, $B_0^w = I_N$, $B_0^s = I_N$ – квадратные матрицы размерностей $nN \times nN$, $N \times N$ и $N \times N$ соответственно, параметры $q_1, q_2, n_h, \varepsilon$ r -алгоритма Шора и находим:

$$\begin{aligned}\tau^{(1)} &= \tau^{(0)} - h_0 g_P^r(\tau^{(0)}, \xi^{(0)}, \psi^{(0)}), \\ \xi^{(1)} &= \xi^{(0)} - h_0 \hat{g}_P^s(\tau^{(0)}, \xi^{(0)}, \psi^{(0)}), \\ \psi^{(1)} &= \psi^{(0)} - h_0 \hat{g}_P^w(\tau^{(0)}, \xi^{(0)}, \psi^{(0)}).\end{aligned}$$

2-й шаг. Пусть в результате вычислений после k , $k = 1, 2, \dots$ шагов алгоритма получены величины $\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}$, $\lambda^{(k-1)}(x)$ в узлах сетки, матрицы B_k^r , B_k^w , B_k^s .

Опишем $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значения $\lambda^{(k)}(x)$ в узлах сетки по формулам (2.3.23) при $\tau = \tau^{(k)}$, $\psi = \psi^{(k)}$, $\xi = \xi^{(k)}$.

2. Вычисляем значения $g_P(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)})$ в узлах сетки по формулам (2.3.19)–(2.3.22) при $\tau = \tau^{(k)}$, $\psi = \psi^{(k)}$, $\xi = \xi^{(k)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$.

3. Проводим $(k+1)$ -й шаг $r(\alpha)$ -алгоритма обобщённых псевдоградиентов с растяжением пространства, близкого к r -алгоритму Шора, итерационная формула которого имеет вид:

$$\begin{aligned}\tau^{(k+1)} &= \tau^{(k)} - h_k B_{k+1} \frac{B_{k+1}^T g_P^r(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \psi^{(k)})}{\|B_{k+1}^T g_P^r(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \psi^{(k)})\|}, \\ \xi^{(k+1)} &= \xi^{(k)} - h_k B_{k+1} \frac{B_{k+1}^T \hat{g}_P^s(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \psi^{(k)})}{\|B_{k+1}^T \hat{g}_P^s(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \psi^{(k)})\|}, \\ \psi^{(k+1)} &= \psi^{(k)} - h_k B_{k+1} \frac{B_{k+1}^T \hat{g}_P^w(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \psi^{(k)})}{\|B_{k+1}^T \hat{g}_P^w(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \psi^{(k)})\|}.\end{aligned}$$

Здесь $B_{k+1}^r, B_{k+1}^w, B_{k+1}^s$ – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство с коэффициентом растяжения α , которые имеют вид:

$$B_{k+1}^w = B_k^w \left(I + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \theta_k^w (\theta_k^w)^T \right), \quad (2.3.29)$$

где w обозначает переменную τ, ψ или ξ , I – единичная матрица соответствующей размерности, θ_k^w – соответствует нормированному вектору разности двух последовательных псевдоградиентов в преобразованном пространстве, т. е.:

$$\theta_k^w = \frac{(B_{k+1}^w)^T (g_P^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_P^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}))}{\left\| (B_{k+1}^w)^T (g_P^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_P^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}, \xi^{(k-1)})) \right\|},$$

при условии, что

$$\left\| (B_{k+1}^w)^T (g_P^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_P^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}, \xi^{(k-1)})) \right\| \geq \varepsilon_0, \text{ и } \theta_k^w = 0 \text{ в остальных случаях, здесь } \varepsilon_0 \text{ – точность представления нуля ЭВМ.}$$

Длина шагового множителя h_k регулируется адаптивным способом с параметрами h_0, q_1, q_2, n_h , сообразно которому шаговый множитель выбирается из условия минимума разности

$$\left[G_1(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}) - G_1(\tau^{(k)}, \psi^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}) \right]$$

по направлению обобщённого антипсевдоградиента $-g_P(\tau, \psi, \xi)$ в преобразованном пространстве.

4. Если условие

$$\left\| (\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}, \xi^{(k+1)}) - (\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}) \right\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0, \quad (2.3.30)$$

не выполняется, переходим к $(k+2)$ -му шагу алгоритма с новыми значениями величин $\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}, \xi^{(k+1)}$, $\lambda^{(k)}(x)$, в узлах сетки, и матриц $B_{k+1}^r, B_{k+1}^w, B_{k+1}^s$, если выполняется, то переходим на п. 5.

Здесь ε – параметр, задающий условие останова алгоритма по отклонению аргумента.

5. Полагаем $\tau_* = \tau^{(l)}, \psi_* = \psi^{(l)}, \xi_* = \xi^{(l)}, \lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (2.3.30).

6. Вычисляем оптимальное значение двойственного функционала по формуле (2.3.13) при $\tau = \tau_*$, $\psi = \psi^*$, $\xi = \xi^*$, и для контроля правильности счёта, по формуле:

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_{*i}) + a_i] \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx.$$

Алгоритм 2.4 описан.

Как уже отмечалось, вычислительная эффективность описанного алгоритма в первую очередь зависит от коэффициента растяжения пространства α и параметров адаптивной регулировки шага q_1, q_2, n_n из $r(\alpha)$ -алгоритма. О выборе параметров см. п. 1.5.

2.3.2. Линейная многопродуктовая задача оптимального разбиения множеств с дополнительными ограничениями

Непрерывную линейную многопродуктовую задачу оптимального разбиения множества $\Omega \subset E_n$ на его подмножества $\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M$ (среди которых могут быть пустые) с размещением их центров при ограничениях в форме равенств и неравенств и дополнительных ограничениях типа ограничений на пропускные способности коммуникаций приведем в терминах характеристических функций в виде **В6**, [42].

Задача В6. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_3 \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx,$$

где

$$\Gamma_3 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_3 \text{ п. в. для } x \in \Omega ;$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i^j(x) dx \leq l_i, i = 1, \dots, N \};$$

$$\Gamma_3 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_N^1(x); \lambda_1^M(x), \dots, \lambda_N^M(x)) :$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Здесь $c^j(x, \tau_i)$ – действительные, ограниченные функции измеримого по аргументу x на некотором открытом, ограниченном, выпуклом множестве $W \subset E_n$, которое содержит Ω , и выпуклые по τ_i на W для всех $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$;

$\rho^j(x)$, $j = 1, \dots, M$, – действительные, ограниченные, измеримые и неотрицательные на Ω функции;

$\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ – некоторая заранее неизвестная точка подмножества Ω_i^j , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, одна и та же для всех $j = 1, \dots, M$, которая называется общим центром подмножества $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$; $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ – любая точка множества Ω ; $a_1^1, \dots, a_N^1; \dots; a_1^M, \dots, a_N^M$ – заданные действительные неотрицательные числа.

Будем также рассматривать следующую задачу.

Задача Вб.1. Найти

$$\min_{\{\lambda(\cdot), \tau\}} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx,$$

при ограничениях

$$A_i(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i = 0, i = 1, \dots, p,$$

$$A_i(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i \leq 0, i = p+1, \dots, N,$$

$$\Phi_i(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M c^j(x, \tau_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - l_i \leq 0, i = 1, \dots, N,$$

$$\lambda(\cdot) \in \Gamma, \tau \in \Omega^N,$$

где $\Gamma = \{\lambda(x) : 0 \leq \lambda_i^j(x) \leq 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M\}.$$

Доказано в [33], что задачи **В6** и **В6.1** при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ имеют решения, и при этом среди множества оптимальных решений задачи **В6.1** содержатся оптимальные решения задачи **В6**, что позволяет в дальнейшем перейти к рассмотрению задачи **В6.1**.

Обоснование метода решения задачи В6

Введём в рассмотрение функционал Лагранжа для задачи **В6.1**:

$$\begin{aligned} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi) = & \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [c^j(x, \tau_i) + \alpha_i^j] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx + \\ & + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i \right) + \\ & + \sum_{i=1}^N \xi_i \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i^j(x) dx - l_i \right). \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

Здесь $\lambda(x) \in \Gamma$ п. в. для $x \in \Omega$, $\tau \in \Omega^N$, а переменные

$$\Psi = (\psi^1, \psi^2, \xi) \in K^*, \quad K^* = K_1^* \times K_2^* \times K_3^*,$$

где $\psi^1 = (\psi_1^1, \dots, \psi_p^1) \in K_1^*$, $\psi^2 = (\psi_1^2, \dots, \psi_{N-p}^2) \in K_2^*$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in K_3^*$ называются множителями Лагранжа.

Для удобства пользования обозначим $\psi = (\psi^1, \psi^2) = (\psi_1^1, \dots, \psi_p^1, \psi_1^2, \dots, \psi_{N-p}^2) \in K_1^* \times K_2^*$, тогда $\Psi = (\psi, \xi)$;

$$K_1^* = \left\{ \psi^1 = (\psi_1^1, \dots, \psi_p^1) \in E_p : -\infty < \psi_i^1 < \infty, i = 1, \dots, p \right\},$$

$$K_2^* = \left\{ \psi^2 = (\psi_1^2, \dots, \psi_{N-p}^2) \in E_{N-p} : 0 \leq \psi_i^2 < \infty, i = 1, \dots, N-p \right\},$$

$$K_3^* = \left\{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in E_N : 0 \leq \xi_i < \infty, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Пусть

$$G(\Psi) = \min_{\{\lambda(\cdot), \tau\} \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi, \xi), \quad (2.3.32)$$

$$\psi^1 \in K_1^*, \psi^2 \in K_2^*, \xi \in K_3^*.$$

Определим задачу, двойственную к задаче **A8.1**, следующим образом:

$$G(\Psi) \rightarrow \sup, \quad (2.3.33)$$

при условиях

$$\psi^1 \in K_1^*, \psi^2 \in K_2^*, \xi \in K_3^*. \quad (2.3.34)$$

Далее, как известно, решение пары двойственных задач (задачи **B6.1** и двойственной задачи (2.3.33)–(2.3.34)) эквивалентно отысканию седловой точки функционала Лагранжа (2.3.31) на множестве $\{\Gamma \times \Omega^N\} \times K^*$.

Чтобы найти седловую точку функционала Лагранжа (2.3.31) задачи **B6.1**, конкретизируем двойственную задачу (2.3.33)–(2.3.34).

Для отыскания $\min_{\{\lambda(\cdot), \tau\} \in \Gamma \times \Omega^M} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi)$ из (2.3.32) перейдем к следующей задаче: при каждом фиксированном $\Psi \in K^*$ найти:

$$\min_{\tau \in \Omega^M} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi). \quad (2.3.35)$$

Обозначим в (2.3.35):

$$G_1(\tau, \Psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi), \quad \tau \in \Omega^M, \quad \Psi \in K^*. \quad (2.3.36)$$

Учитывая (2.3.35) и (2.3.36), перепишем двойственную задачу (2.3.33)–(2.3.34) в следующем виде:

$$\min_{\tau \in \Omega^M} G_1(\tau, \Psi) \rightarrow \max_{\Psi \in K^*}, \quad (2.3.37)$$

где $G_1(\tau, \Psi)$ задаётся формулой (2.3.36).

Чтобы решить двойственную задачу (2.3.37), конкретизируем выражение $G_1(\tau, \Psi)$ из (2.3.36).

Подставляя в (2.3.36) выражение для функционала $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi)$ из (2.3.31) получаем:

$$\begin{aligned} G_1(\tau, \Psi) &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi) = \\ &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \left[\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [c^j(x, \tau_i) + a_i^j] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i \right) + \sum_{i=1}^N \xi_i \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i^j(x) dx - l_i \right) \right] = \\ &= - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i - \sum_{i=1}^N \xi_i l_i + \\ &+ \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ \left((1 + \xi_i) c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \right) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) \right\} dx, \quad (2.3.38) \end{aligned}$$

$$\tau \in \Omega^N, \Psi = (\psi, \xi) \in K^*.$$

Как следует из [42], минимальное значение функционала $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi)$ из (2.3.38) для каждого $\tau \in \Omega^N$ и каждого $\Psi = (\psi, \xi) \in K^*$ достигается на вектор-функции $\lambda_{\omega_i}^j(x) = (\lambda_{\omega_1}^1(x), \dots, \lambda_{\omega_N}^M(x))$, (i, j) -я компонента которой имеет вид:

$$\lambda_{\omega_i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (1 + \xi_i)c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq (1 + \xi_k)c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k, \\ & k = 1, \dots, N, i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.3.39)$$

Подставляя в (2.3.38) вместо $\lambda_{\omega_i}^j(x)$ выражение из (2.3.39), получаем:

$$G_1(\tau, \Psi) = -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i - \sum_{i=1}^N \xi_i l_i + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \min_{k=1, \dots, N} \left[(1 + \xi_k)c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k \right] \rho^j(x) dx. \quad (2.3.40)$$

Из вида оптимального решения (2.3.39) (в предположении, что выполняются условия $\rho^j(x) \geq 0$ для $x \in \Omega$) при фиксированном $\tau \in \Omega^N$ следует

Теорема 2.13. Для того чтобы возможное разбиение $(\Omega_{\omega_1}^1, \dots, \Omega_{\omega_i}^j, \dots, \Omega_{\omega_N}^M)$ являлось оптимальным для задачи **В6**, необходимо и достаточно существования действительных констант $\psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N, \xi_1, \dots, \xi_N$ (среди которых $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N, \xi_1, \dots, \xi_N$ – неотрицательные) таких, что

$$(1 + \xi_i)c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \leq (1 + \xi_k)c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k, \quad i \neq k, \quad (2.3.41)$$

$$\text{п. в. для } x \in \Omega_{\omega_j}^j, \quad i, k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M.$$

Следствие из теоремы 2.13. В точках x , принадлежащих оптимальной границе подмножеств $\Omega_{\omega_i}^j$ и $\Omega_{\omega_k}^j$, в неравенстве (2.3.41) достигается знак равенства.

Сформулируем итоговую теорему.

Теорема 2.14. Седловая точка $(\{\lambda_{\omega}(\cdot), \tau, \Psi^*\})$ (где первая компонента $\{\lambda_{\omega}(\cdot), \tau, \Psi^*\}$ является оптимальным решением задачи **В6.1**) функционала (2.3.31) на множестве $\{\Gamma \times \Omega^N\} \times K^*$ определяется для $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ и почти всех $x \in \Omega$ следующим образом:

$$\lambda_{\omega_j^j}^j(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_{\omega_j^j}^j, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega \setminus \Omega_{\omega_j^j}^j, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{где } \Omega_{\omega_j^j}^j &= \{x \in \Omega : (1 + \xi_j^*)c^j(x, \tau_{\omega_j^j}) + a_j^j + \psi_j^* = \\ &= \min_{k=1, \dots, N} [(1 + \xi_k^*)c^j(x, \tau_{\omega_k^j}) + a_k^j + \psi_k^*], i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M\}, \end{aligned}$$

в качестве $\tau_{\omega_1^1}, \dots, \tau_{\omega_N^1}, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*, \xi_1^*, \dots, \xi_N^*$ выбирается оптимальное решение двойственной задачи (2.3.33)–(2.3.34), приведённой к виду:

$$\begin{aligned} G(\Psi) &= \min_{\tau \in \Omega^M} G_1(\tau, \Psi) = \\ &= \min_{\tau \in \Omega^M} \left\{ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \min_{k=1, \dots, N} [(1 + \xi_k^*)c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k] \rho^j(x) dx - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i - \sum_{i=1}^N \xi_i l_i \right\} \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

при условиях

$$\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N, \quad \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N. \quad (2.3.43)$$

Алгоритм решения задачи В6

Приведём алгоритм решения задачи В6, основанный на теореме 2.14.

Для решения задачи (2.3.42) – (2.3.43) условной оптимизации функционала $G(\Psi)$ из (2.3.42) при условиях (2.3.43) перейдём к задаче безусловной оптимизации путём введения в целевую функцию (2.3.42) негладких штрафных функции множеств $\{\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}$, $\{\xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}$ и множества

$$\{\tau = (\tau_1^1, \dots, \tau_1^{(n)}, \dots, \tau_N^1, \dots, \tau_N^{(n)}), \tau \in E_N^n : x_{\min}^k \leq \tau_i^k \leq x_{\max}^k, i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n\}.$$

$$\text{Здесь } x_{\min}^k = \min_{x \in \Omega} x^k, x_{\max}^k = \max_{x \in \Omega} x^k, k = 1, \dots, n.$$

Получаем следующую задачу: найти

$$\max_{\psi \in E_M} \max_{\xi \in E_M} \min_{\tau \in E_N^n} P(\tau, \psi, \xi), \quad (2.3.44)$$

где

$$P(\tau, \psi, \xi) = G_1(\tau, \psi, \xi) - S_1 \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i) - S_2 \cdot \sum_{i=1}^N \max(0, -\xi_i) +$$

$$+S_3 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \max\{0, x_{\min}^k - \tau_i^k\} + S_4 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \max\{0, \tau_i^k - x_{\max}^k\}, \quad (2.3.45)$$

для всех $\psi \in E_N$, $\xi \in E_N$, $\tau \in E_N^n$, $\tau_i \in E^n$, S_1, S_2, S_3, S_4 – достаточно большие положительные числа (значительно большие максимального из множителей Лагранжа для функции (2.3.42)).

Очевидно, что вектор обобщённых псевдоградиентов функции $P(\tau, \Psi)$ представляет собой сумму вектора обобщённых псевдоградиентов функции $G_1(\tau, \Psi)$ и вектора градиента штрафной части функции $P(\tau, \Psi)$.

Можно показать (см. теорему 2.10), что обобщённый градиент функции $G_1(\tau, \bar{\Psi})$ по τ при фиксированном $\Psi = \bar{\Psi}$, $\bar{\Psi} \in K^*$ имеет вид $g_{G_1}^{\tau}(\tau, \bar{\Psi}) = (g_{G_1}^{\tau_1}(\tau, \bar{\Psi}), \dots, g_{G_1}^{\tau_N}(\tau, \bar{\Psi}))$, где

$$g_{G_1}^{\tau_i}(\tau, \bar{\Psi}) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M (1 + \xi_j) \rho^j(x) g_{c^j}^{\tau_i}(x, \tau_i) \lambda_i^j(x) dx, \quad i = 1, \dots, N,$$

причём $g_{c^j}^{\tau_i}(x, \tau_i)$ есть i -я компонента N -мерного вектора обобщённого градиента $g_{c^j}^{\tau}(x, \tau_i)$ функции $c^j(x, \tau_i)$, в точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$.

Компоненты обобщённого градиента

$$g_{G_1}^{\Psi}(\bar{\tau}, \psi, \xi) = (g_{G_1}^{\psi}(\bar{\tau}, \psi, \xi), g_{G_1}^{\xi}(\bar{\tau}, \psi, \xi)) = (g_{G_1}^{\psi_1}(\bar{\tau}, \psi, \xi), \dots, g_{G_1}^{\psi_N}(\bar{\tau}, \psi, \xi), \\ g_{G_1}^{\xi_1}(\bar{\tau}, \psi, \xi), \dots, g_{G_1}^{\xi_N}(\bar{\tau}, \psi, \xi))$$

функции $G_1(\bar{\tau}, \Psi)$ по $\Psi = (\psi, \xi)$ при фиксированном $\tau = \bar{\tau}$, $\bar{\tau} \in W^N$ будут иметь вид:

$$g_{G_1}^{\psi_i}(\bar{\tau}, \psi, \xi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i, \quad i = 1, \dots, N, \\ g_{G_1}^{\xi_i}(\bar{\tau}, \psi, \xi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M c^j(x, \tau_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - l_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Тогда вектор обобщённых псевдоградиентов функции $P(\tau, \psi, \xi)$, которая задана формулой (2.3.45), в точке

$$(\tau, \psi, \xi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N, \xi_1, \dots, \xi_N),$$

можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
g_p(\tau, \psi, \xi) &= \left(g_p^\tau(\tau, \psi, \xi), -g_p^\psi(\tau, \psi, \xi), -g_p^\xi(\tau, \psi, \xi) \right) = \\
&= \left(g_p^{\tau_1}(\tau, \psi, \xi), \dots, g_p^{\tau_N}(\tau, \psi, \xi); \right. \\
&\left. -g_p^{\psi_1}(\tau, \psi, \xi), \dots, -g_p^{\psi_N}(\tau, \psi, \xi); -g_p^{\xi_1}(\tau, \psi, \xi), \dots, -g_p^{\xi_M}(\tau, \psi, \xi) \right),
\end{aligned}$$

где i -е компоненты $(nN + N + N)$ -мерного вектора обобщённых псевдоградиентов функции $P(\tau, \psi, \xi)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
g_p^{\tau_i}(\tau, \psi, \xi) &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M (1 + \xi_j) g_{c^j}^{\tau_i}(x, \tau_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - \\
&\quad - S_3 \max\{0, \text{sign}(x_{\min}^k - \tau_i^k)\} - \\
&\quad - S_4 \max\{0, \text{sign}(\tau_i^k - x_{\max}^k)\}, \quad i = 1, \dots, N,
\end{aligned} \tag{2.3.46}$$

$$g_p^{\psi_i}(\tau, \psi, \xi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i, \quad i = 1, \dots, p, \tag{2.3.47}$$

$$g_p^{\xi_i}(\tau, \psi, \xi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i + S_1 \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), \tag{2.3.48}$$

$$i = p + 1, \dots, N,$$

$$\begin{aligned}
g_p^{\xi_i}(\tau, \psi, \xi) &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M c^j(x, \tau_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - l_i + \\
&+ S_2 \max(0, \text{sign}(-\xi_i)), \quad i = 1, \dots, N,
\end{aligned} \tag{2.3.49}$$

где $g_{c^j}^{\tau_i}(x, \tau_i)$ есть i -я компонента N -мерного вектора обобщённого градиента $g_{c^j}^{\tau}(x, \tau_i)$ функции $c^j(x, \tau_i)$, в точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ при фиксированном x , имеющая вид:

$$g_{c^j}^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_{c^j}^{\tau_i^{(0)}}(x, \tau) \\ \dots\dots\dots \\ g_{c^j}^{\tau_i^{(m)}}(x, \tau) \end{pmatrix}.$$

В формулах (2.3.46) – (2.3.49) $\lambda_i^j(x)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, определяется следующим образом:

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (1 + \xi_i)c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i = \\ & = \min_{k=1, \dots, N} [(1 + \xi_k)c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k], \\ & i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.3.50)$$

Опишем алгоритм решения задачи **В6**, который является обобщением алгоритма 2.4 на случай многопродуктовости задачи ОРМ на подмножества с размещением их центров при дополнительных ограничениях.

Алгоритм 2.5

0-й шаг. Область Ω заключаем в прямоугольный параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем $\rho^j(x) = 0$, при $x \in \Pi \setminus \Omega$. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаём начальное приближение $(\tau, \psi, \xi) = (\tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)})$. Задаём параметры $\alpha, q_1, q_2, n_h, \varepsilon$ модификации $r(\alpha)$ -алгоритма.

1-й шаг. Вычисляем значения $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (2.3.50) при $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}, \xi = \xi^{(0)}$. Вычисляем значения функции $G_1(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)})$ и вектора $g_p(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)})$ в узлах сетки по формулам (2.3.46)–(2.3.49) при $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}, \xi = \xi^{(0)}, \lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$.

Выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$, полагаем $B_0^\tau = I_{nN}, B_0^\psi = I_N, B_0^\xi = I_N$ – квадратные матрицы размерностей $nN \times nN, N \times N$ и $N \times N$ соответственно. Находим:

$$\begin{aligned} \tau^{(1)} &= \tau^{(0)} - h_0 g_p^\tau(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)}), \\ \psi^{(1)} &= \psi^{(0)} - h_0 \hat{g}_p^\psi(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)}), \\ \xi^{(1)} &= \xi^{(0)} - h_0 \hat{g}_p^\xi(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)}). \end{aligned}$$

2-й шаг. Пусть в результате вычислений после $k, k = 1, 2, \dots$ шагов алгоритма получены величины $\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$ в узлах сетки, матрицы $B_k^\tau, B_k^\psi, B_k^\xi$.

Опишем $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значения $\lambda^{(k)}(x)$ в узлах сетки по формулам (2.3.50) при $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}, \xi = \xi^{(k)}$.

2. Вычисляем значения $g_p(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)})$ в узлах сетки по формулам (2.3.46)–(2.3.49) при $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}, \xi = \xi^{(k)}, \lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$.

3. Проводим $(k+1)$ -й шаг $r(\alpha)$ -алгоритма обобщённых псевдоградиентов с растяжением пространства, близкого к r -алгоритму Шора, итерационная формула которого имеет вид:

$$\begin{aligned}\tau^{(k+1)} &= \tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^\tau \frac{(B_{k+1}^\tau)^T g_p^\tau(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)})}{\left\| (B_{k+1}^\tau)^T g_p^\tau(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}) \right\|}, \\ \psi^{(k+1)} &= \psi^{(k)} - h_k B_{k+1}^\psi \frac{(B_{k+1}^\psi)^T \hat{g}_p^\psi(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)})}{\left\| (B_{k+1}^\psi)^T \hat{g}_p^\psi(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}) \right\|}, \\ \xi^{(k+1)} &= \xi^{(k)} - h_k B_{k+1}^\xi \frac{(B_{k+1}^\xi)^T \hat{g}_p^\xi(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)})}{\left\| (B_{k+1}^\xi)^T \hat{g}_p^\xi(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}) \right\|}.\end{aligned}$$

Здесь $B_{k+1}^\tau, B_{k+1}^\psi, B_{k+1}^\xi$ – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство с коэффициентом растяжения α , которые задаются формулами (2.3.29).

Длина шагового множителя h_k регулируется адаптивным способом с параметрами $r(\alpha)$ -алгоритма h_0, q_1, q_2, n_h , приемлемые значения которых: $\alpha = 2 \div 3, h_0 = 1, q_1 = 1, q_2 = 1.1 \div 1.2, n_h = 2 \div 3$.

4. Если условие

$$\left\| (\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}, \xi^{(k+1)}) - (\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)}) \right\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0, \quad (2.3.51)$$

не выполняется, переходим к $(k+2)$ -му шагу алгоритма с новыми значениями величин $\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}, \xi^{(k+1)}, \lambda^{(k)}(x)$, в узлах сетки, и матриц $B_{k+1}^\tau, B_{k+1}^\psi, B_{k+1}^\xi$, если выполняется, то переходим на п. 5.

1. Полагаем $\tau_* = \tau^{(l)}, \psi^* = \psi^{(l)}, \xi^* = \xi^{(l)}, \lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (2.3.51).

6. Вычисляем оптимальное значение двойственного функционала по формуле (2.3.40) при $\tau = \tau_*$, $\psi = \psi^*$, $\xi = \xi^*$, и для контроля правильности счёта, по формуле:

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [c^j(x, \tau_{*i}) + a_i^j] \rho^j(x) \lambda_{*i}^j(x) dx.$$

Алгоритм 2.5 описан.

2.4. Непрерывные нелинейные задачи оптимального разбиения множеств n -мерного евклидова пространства E_n на подмножества с отысканием координат центров подмножеств

В отличие от линейных задач ОРМ, рассмотренных в разделе 2.1, 2.2, для которых оптимальное решение исходной бесконечномерной задачи удается найти в явном виде, в нелинейном случае отыскание оптимального решения исходной бесконечномерной задачи сводится к отысканию решения некоторого вспомогательного операторного уравнения с параметрами.

В данной разделе приведены методы решения нелинейных задач ОРМ с неизвестным заранее расположением центров подмножеств, координаты которых отыскиваются в процессе решения исходной задачи, [35, 37, 42].

На основе предложенных методов разработаны алгоритмы, составной частью которых является модификация τ -алгоритма Н. З. Шора. Приведены результаты реализации разработанного алгоритма для некоторых модельных задач.

2.4.1. Нелинейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множеств с отысканием координат центров подмножеств для случая выпуклого целевого функционала. Алгоритм решения

Приведём математическую постановку непрерывной нелинейной однопродуктовой задачи оптимального разбиения множества Ω из E_n на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров τ_1, \dots, τ_N этих подмножеств соответственно, [42].

Задача А7.

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i \left(\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \right) + \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx \right]$$

при условиях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$.

Здесь функции $c(x, \tau_i)$ – действительные, ограниченные, определенные на $\Omega \times \Omega$, измеримые по x при любом фиксированном $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ из Ω для всех $i = 1, \dots, N$; $\rho(x)$ – ограниченная, измеримая, неотрицательная на Ω функция; $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$ – действительные, ограниченные, выпуклые, дважды непрерывно дифференцируемые функции своего аргумента; b_1, \dots, b_N – заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Перепишем задачу **A7** в терминах характеристических функций $\lambda_i(x)$ подмножеств Ω_i , $i = 1, \dots, N$, в следующем виде.

Задача В7. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

где

$$\Gamma_2 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \};$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N \}; \tau \in \Omega^N,$$

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1, i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \}.$$

Функционал задачи **B7** имеет вид:

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) + \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx \right].$$

От задачи **B7** с булевыми значениями переменных $\lambda_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, перейдём к соответствующей задаче со значениями $\lambda_i(\cdot)$ из отрезка $[0, 1]$, т. е. рассмотрим следующую задачу.

Задача B7.1. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

где

$$\Gamma_2 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma' \text{ п. в. для } x \in \Omega ;$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N \};$$

$$\Gamma' = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, x \in \Omega, i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Как доказано в [36], Γ_2 – ограниченное, замкнутое, выпуклое множество гильбертова пространства $L_2^N(\Omega)$ с нормой

$$\| \lambda(\cdot) \| = \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [\lambda_i(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

Тогда, согласно [15], множество Γ_2 слабо компактно в гильбертовом пространстве $L_2^N(\Omega)$.

Имеют место следующие три утверждения.

Утверждение 2.1. Если функции $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, выпуклые или непрерывные снизу (слабо полунепрерывные снизу) функции своего аргумента, то при каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ задача **B7.1** имеет глобальное решение.

Описание метода решения задачи А7

Введем для задачи условной оптимизации **В7.1** функционал Лагранжа следующим образом:

$$\begin{aligned} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi) &= I(\lambda(\cdot), \tau) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left[\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) + \int_{\Omega} (c(x, \tau_i) + \psi_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx \right] - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i, \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

где $\psi = (\psi_1 \dots \psi_N)$ – N -мерный вектор вещественных чисел, у которого компоненты $\psi_1 \dots \psi_p$ произвольны по знаку, а $\psi_{p+1} \dots \psi_N$ – неотрицательны; $\lambda(x) \in \Gamma'$ для $x \in \Omega$; $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$.

Пару элементов $(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi^*)$ назовем седловой точкой функционала (2.4.1) на множестве $\{\Gamma' \times \Omega^N\} \times \Lambda$, где

$$\Lambda = \{\psi = (\psi_1 \dots \psi_N) \in E_N : \psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\},$$

если

$$h(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi) \leq h(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi^*) \leq h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi^*)$$

$$\text{для всех } \lambda(x) \in \Gamma', \tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda,$$

или

$$\begin{aligned} &h(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi^*) = \\ &= \max_{\psi \in \Lambda} \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma' \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma' \times \Omega^N} \max_{\psi \in \Lambda} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi). \end{aligned}$$

Не останавливаясь пока на исследовании вопроса о существовании седловой точки, перейдем к решению задачи:

$$\max_{\psi \in \Lambda} \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma' \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi).$$

Обозначим

$$G(\psi) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma' \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi), \quad \psi \in \Lambda.$$

Задача двойственная к задаче **В7.1** имеет вид:

$$G(\psi) \rightarrow \max, \quad \psi \in \Lambda. \quad (2.4.2)$$

Для отыскания $\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma' \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$ перейдем к следующей задаче:

$$\min_{\tau \in \Omega^N} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi) \text{ при } \psi \in \Lambda. \quad (2.4.3)$$

Утверждение 2.2. При каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ функционал $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$ из (2.4.3), определяемый по формуле (2.4.1), будет выпуклым по $\lambda(\cdot)$ на $L_2^N(\Omega)$, если $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, – выпуклые функции своего аргумента.

Утверждение 2.3. При каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ минимум по $\lambda(\cdot)$ функционала $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$ достигается на симплексе Γ' .

Как следует из [42], внутренняя задача в (2.4.3) глобально разрешима по $\lambda(\cdot)$ на Γ' .

Обозначим в (2.4.3)

$$G_1(\tau, \psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi), \tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda. \quad (2.4.4)$$

То есть дальше вместо двойственной задачи (2.4.2), учитывая (2.4.3), (2.4.4), перейдем к решению следующей задачи:

$$\max_{\psi \in \Lambda} \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi).$$

Для этого сначала конкретизируем выражение $G_1(\tau, \psi)$ из (2.4.4).

Подставляя в (2.4.4) выражение для $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$ из (2.4.1), получаем:

$$\begin{aligned} G_1(\tau, \psi) = & - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ & + \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) + \int_{\Omega} (c(x, \tau_i) + \psi_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx \right], \quad (2.4.5) \\ & \tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda. \end{aligned}$$

Обозначим в (2.4.5)

$$\Phi_i(\lambda_i(\cdot), \tau_i, \psi_i) = \varphi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) + \int_{\Omega} (c(x, \tau_i) + \psi_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx,$$

и рассмотрим задачу

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} \Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi), \tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda,$$

где

$$\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(\lambda_i(\cdot), \tau_i, \psi_i). \quad (2.4.6)$$

Очевидно, что при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ функционал $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ из (2.4.6), будет выпуклым по $\lambda(\cdot)$ на $L_2^N(\Omega)$, если $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, – выпуклые функции своего аргумента, и минимум по $\lambda(\cdot)$ функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ достигается на множестве Γ' .

Обозначим через $sgrad_\lambda \Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ субградиент по $\lambda(\cdot)$ выпуклого по $\lambda(\cdot)$ при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$.

Можно показать, что $sgrad_\lambda \Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & sgrad_\lambda \Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi) = \\ & = \left(\Phi'_\lambda(\lambda_1(\cdot), \tau_1, \psi_1), \dots, \Phi'_\lambda(\lambda_i(\cdot), \tau_i, \psi_i), \dots, \Phi'_\lambda(\lambda_N(\cdot), \tau_N, \psi_N) \right), \end{aligned}$$

где

$$\Phi'_\lambda(\lambda_i(\cdot), \tau_i, \psi_i) = \varphi'_{iY_i} \left(\int_\Omega \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) \cdot \rho(x) + (c(x, \tau_i) + \psi_i) \rho(x), \quad i = 1, \dots, N,$$

здесь

$$Y_i = \int_\Omega \rho(x) \lambda_i(x) dx. \quad (2.4.7)$$

Согласно [90], при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ необходимое и достаточное условие минимума по $\lambda(\cdot)$ выпуклого по $\lambda(\cdot)$ функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ на симплексе Γ' имеет вид:

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} \int_\Omega \left(sgrad_\lambda \Phi(\lambda^*(\cdot), \tau, \psi), (\lambda(x) - \lambda^*(x)) \right) dx = 0.$$

Перепишем полученное равенство в виде:

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left(sgrad_\lambda \Phi(\lambda^*(\cdot), \tau, \psi), \lambda^*(x) \right) dx = \\ & = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} \int_\Omega \left(sgrad_\lambda \Phi(\lambda^*(\cdot), \tau, \psi), \lambda(x) \right) dx. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Предположим, что при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ для функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ из (2.4.6) по переменной $\lambda(\cdot)$ выполняется условие, которое мы назовем, следуя [90], условием сильной регулярности, если

$$\Phi'_{\lambda_i}(\lambda_i^*(\cdot), \tau_i, \psi_i) = \varphi'_{Y_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx \right) \cdot \rho(x) + (c(x, \tau_i) + \psi_i) \rho(x) \neq 0,$$

$i = 1, \dots, N$, за исключением множества точек $x \in \Omega$ нулевой меры, или, в другой записи,

$$\text{mes} \left\{ x \in \Omega : \left(c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{Y_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx \right) \right) \rho(x) = 0 \right\} = 0, \quad (2.4.9)$$

где Y_i , $i = 1, \dots, N$, имеет вид (2.4.7).

Условие сильной регулярности означает, что для оптимальной вектор-функции $\lambda^*(x)$ ни на одном множестве точек $x \in \Omega$ ненулевой меры не удовлетворяется ни одно из уравнений Эйлера

$$\Phi'_{\lambda_i}(\lambda_i^*(\cdot), \tau_i, \psi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

для задачи минимизации без ограничений функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ из (2.4.6).

Как следует из [36, 90], в случае выполнения условия сильной регулярности (2.4.9) вектор-функция $\lambda^*(x)$, доставляющая минимум линейному функционалу из правой части формулы (2.4.8), определяется при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$, а также, с учетом (2.4.9) и того, что мера множества граничных точек подмножеств Ω_i , $i = 1, \dots, N$, равна нулю, из следующего операторного уравнения:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{Y_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx \right) \leq \\ & \leq c(x, \tau_k) + \psi_k + \varphi'_{Y_k} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_k^*(x) dx \right), \\ & i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega \text{ (другими словами,} \\ & i = k \text{ только на множестве меры ноль,} \\ & \text{т. е. в точках границы между} \\ & \text{подмножествами } \Omega_i \text{ и } \Omega_k) \text{ } i, k = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.4.10)$$

Учитывая обозначения (2.4.7), прибавляя и вычитая под знаком суммы в (2.4.5) выражение $\varphi'_{Y_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx \right)$, перепишем $G_1(\tau, \psi)$ из (2.4.5) в виде:

$$\begin{aligned}
G_1(\tau, \psi) = & -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} \sum_{i=1}^N \left[\left(\varphi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \varphi'_{Y_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) \cdot \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) + \right. \\
& \left. + \int_{\Omega} \left(c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{Y_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) \right) \rho(x) \lambda_i(x) dx \right] \quad (2.4.11) \\
& \tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda.
\end{aligned}$$

Подставляя выражение для $\lambda_i^*(x)$ из (2.4.10) в ту часть формулы (2.4.11), которая линейно зависит от $\lambda(\cdot)$ и оставляя пока переменной величину Y_i , $i = 1, \dots, N$, связанную с $\lambda(\cdot)$ зависимостью (2.4.7), получаем (с учетом ограничений задачи В7.1) выражение для $G_1(\tau, \psi)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
G_2(Y, \tau, \psi) = & -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \sum_{i=1}^N \left[\left(\varphi_i(Y_i) - \varphi'_{Y_i}(Y_i) \cdot Y_i \right) + \right. \\
& \left. + \int_{\Omega} \min_{k=1, N} \left(c(x, \tau_k) + \psi_k + \varphi'_{Y_k}(Y_k) \right) \rho(x) dx \right], \quad (2.4.12) \\
\tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda, Y \in U = & \left\{ Y = (Y_1, \dots, Y_N) \in E_N : 0 \leq Y_i \leq b_i, i = 1, \dots, N \right\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, конкретизируя выражение для $G_1(\tau, \psi)$ из (2.4.4), двойственная задача (2.4.2) приводится к виду:

$$\max_{\psi \in \Lambda} \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in U} G_2(Y, \tau, \psi). \quad (2.4.13)$$

Для задачи **В7.1** имеет место теорема Куна – Таккера в двойственной форме, т. е. $I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = G(\psi^*)$, где $(\lambda_*(\cdot), \tau_*)$ – оптимальное решение задачи **В7.1**, ψ^* – оптимальное решение двойственной задачи (2.4.13), причем максимум в двойственной задаче (2.4.13) достигается.

Имеет место теорема, обуславливающая переход от бесконечномерной задачи **В7.1** к поиску седловой точки функционала (2.4.1) посредством решения негладкой конечномерной задачи (2.4.13), к которой сведена двойственная задача (2.4.2).

Теорема 2.15. Пусть

1) $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, – выпуклые, дважды непрерывно дифференцируемые функции своего аргумента;

2) при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ имеет место условие сильной регулярности (2.4.9):

$$\text{mes} \left\{ x \in \Omega : \left(c(x, \tau_i) + \psi_i + \phi'_{Y_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_q^*(x) dx \right) \right) \rho(x) = 0 \right\} = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

тогда седловая точка $(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi^*)$, (где первая компонента $\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}$ является оптимальным решением задачи **B7.1**) функционала (2.4.1) на множестве $\{\Gamma \times T_{\langle \tau_1, \dots, \tau_N \rangle}^j\} \times \Lambda$ (здесь $T_{\langle \tau_1, \dots, \tau_N \rangle}^j$ – выпуклые подмножества множества Ω^N , определяемые своим отношением порядка между координатами точек τ_1, \dots, τ_N , на которых функция $G_2(Y, \tau, \psi)$ из (2.4.12) – выпукла, и объединение которых составляет множество Ω^N) определяется для $i = 1, \dots, N$ и почти всех $x \in \Omega$ следующим образом:

$$\lambda_q^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_{*i} \text{ и } x \notin \Omega_{*q}, \quad q \leq i, \\ 0 & \text{при } x \notin \Omega_{*i}, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{*i} &= \left\{ x \in \Omega : c(x, \tau_i^*) + \psi_i^* + \phi'_{Y_i}(Y_i^*) = \right. \\ &= \left. \min_{k=1, \dots, N} \left(c(x, \tau_k^*) + \psi_k^* + \phi'_{Y_k}(Y_k^*) \right), \quad i \neq k \text{ n. в. для } x \in \Omega \right\}, \end{aligned}$$

в качестве Y_1^*, \dots, Y_N^* , $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$, $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ выбирается оптимальное решение двойственной задачи (2.4.2), приведенной к виду

$$\begin{aligned} G(\psi) &= \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in U} G_2(Y, \tau, \psi) = \\ &= \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in U} \left\{ - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i - \sum_{i=1}^N \left[(\varphi_i(Y_i) - \phi'_{Y_i}(Y_i) \cdot Y_i) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \int_{\Omega} \min_{k=1, N} \left(c(x, \tau_k) + \psi_k + \phi'_{Y_k}(Y_k) \right) \rho(x) dx \right] \right\} \rightarrow \max, \end{aligned}$$

при условиях

$$\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N.$$

Имеет место следующее утверждение, [42].

Утверждение 2.2. При выполнении условия сильной регулярности (2.4.9) множества оптимальных решений задач **B7** и **B7.1** совпадают.

Далее приведем алгоритм решения задачи **A7**, основанный на теореме 2.15, составной частью которой является Γ -алгоритм Шора.

Алгоритм решения задачи **A7**

Для отыскания оптимального решения задачи (2.4.13) будем использовать эвристический алгоритм обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, близкий к Γ -алгоритму Шора.

Для этого от задачи (2.4.13) введем в целевую функцию (2.4.12) негладких штрафных функций множеств $\{\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}$, $\{Y_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}$, $\{Y_i \leq b_i, i = 1, \dots, N\}$ перейдем к следующей задаче:

найти

$$\max_{\psi \in E^N} \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in E^N} P(Y, \tau, \psi), \quad (2.4.14)$$

где

$$\begin{aligned} P(Y, \tau, \psi) = & G_2(Y, \tau, \psi) - S_1 \cdot \sum_{i=1}^N \max\{0, -\psi_i\} - S_2 \cdot \sum_{i=1}^N \max\{0, Y_i\} - \\ & - S_3 \cdot \sum_{i=1}^N \max\{0, Y_i - b_i\}. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Здесь S_1, S_2, S_3 – достаточно большие положительные числа, значительно большие максимальных из множителей Лагранжа для функции (2.4.12).

О возможности перехода от задачи (2.4.13) к задаче (2.4.14), (2.4.15) см. в п. 1.6.2.

Определим i -ю компоненту $3 \cdot N$ -мерного вектора обобщенного псевдоградиента

$$\begin{aligned} g(Y, \tau, \psi) = & \left(-g_p^Y(Y, \tau, \psi), g_p^\tau(Y, \tau, \psi), -g_p^\psi(Y, \tau, \psi) \right) = \\ = & \left(\begin{array}{l} -g_p^{Y_1}(Y, \tau, \psi), \dots, -g_p^{Y_N}(Y, \tau, \psi); \\ g_p^{\tau_1}(Y, \tau, \psi), \dots, g_p^{\tau_N}(Y, \tau, \psi); -g_p^{\psi_1}(Y, \tau, \psi), \dots, -g_p^{\psi_N}(Y, \tau, \psi) \end{array} \right) \end{aligned}$$

функции (2.4.15) в точке $(Y, \tau, \psi) = (Y_1, \dots, Y_N; \tau_1, \dots, \tau_N; \psi_1, \dots, \psi_N)$ следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l}
g_p^{Y_i}(Y, \tau, \psi) = -\varphi''_{iY_i}(Y_i) \cdot Y_i + S_2 \max[0, \text{sign}(-Y_i)] - \\
\quad - S_3 \max[0, \text{sign}(Y_i - b_i)], \\
\text{если } i \neq k, \text{ где } k : [c(x, \tau_k) + \psi_k + \varphi'_{kY_k}(Y_k)] = \\
\quad = \min_{i=1, N} [c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i}(Y_i)], \\
g_p^{Y_k}(Y, \tau, \psi) = -\varphi''_{kY_k}(Y_k) \cdot Y_k + \varphi''_{kY_k}(Y_k) \cdot \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_k(x) dx + \\
\quad + S_2 \max[0, \text{sign}(-Y_k)] - S_3 \max[0, \text{sign}(Y_k - b_k)]; \\
\quad \quad \quad i = 1, \dots, N;
\end{array} \right. \quad (2.4.16)$$

$$g_p^{\tau_i}(Y, \tau, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \cdot g_c^{\tau_i}(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.4.17)$$

где $g_c^{\tau_i}(x, \tau_i)$ – i -я компонента N -мерного вектора обобщенного градиента $g_c^{\tau_i}(x, \tau_i)$ функции $c(x, \tau_i)$, в точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_1, \dots, \tau_N)$ при фиксированном x , имеющая вид:

$$g_c^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(0)}}(x, \tau) \\ \text{-----} \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau) \end{pmatrix};$$

$$g_p^{\psi_i}(Y, \tau, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + S_1 \max[0, \text{sign}(-\psi_i)], \quad (2.4.18)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

В формулах (2.4.16) – (2.4.18) $\lambda_i(x)$, $i = 1, \dots, N$, определяется следующим образом:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i}(Y_i) = \\ & = \min_{k=1, N} [c(x, \tau_k) + \psi_k + \varphi'_{kY_k}(Y_k)], \\ & i \neq k \quad \text{п. в. для } x \in \Omega, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.4.19)$$

Опишем алгоритм решения задачи **A7**.

Алгоритм 2.6

Предварительный этап. Область Ω заключаем в n -мерный параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем $\rho(x) = 0$ при $x \in \Pi \setminus \Omega$, $j = 1, \dots, M$. Параллелепипед Π покрываем

прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение $(Y, \tau, \psi) = (Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)})$. Вычисляем значение $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (2.4.19) при $Y = Y^{(0)}$, $\tau = \tau^{(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$. Вычисляем значение

$$g_P^Y(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}), g_P^\tau(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}), g_P^\psi(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)})$$

в узлах сетки по формулам (2.4.16)-(2.4.18) при $Y = Y^{(0)}$, $\tau = \tau^{(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$. Выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$ г-алгоритма Н. З. Шора.

Первый шаг алгоритма проводим по формулам

$$\begin{aligned} Y^{(1)} &= Y^{(0)} - h_0 \hat{g}_P^Y(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}), \\ \tau^{(1)} &= P_\Omega \left(\tau^{(0)} - h_0 g_P^\tau(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}) \right), \\ \psi^{(1)} &= \psi^{(0)} - h_0 \hat{g}_P^\psi(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}), \end{aligned}$$

где P_Ω – оператор проектирования на Ω (см. п. 1.6.2).

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после k , $k = 1, 2, \dots$, шагов алгоритма получены определенные значения $Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$ в узлах сетки.

Опишем **(k+1)-й шаг** алгоритма.

1. Вычисляем значения $\lambda^{(k)}(x)$ в узлах сетки по формулам (2.4.19) при $Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}$.

2. Вычисляем значения $g_P(Y, \tau, \psi)$ по формулам (2.4.16) – (2.4.18) при $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$, $Y = Y^{(k)}$, $\tau = \tau^{(k)}$, $\psi = \psi^{(k)}$.

3. Проводим (k+1)-й шаг г-алгоритма обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, близкого к г-алгоритму Шора в Н-форме [73], итерационная формула которого имеет вид:

$$\begin{aligned} Y^{(k+1)} &= Y^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} \hat{g}_P^Y(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\sqrt{\left(H_{k+1} \hat{g}_P^Y(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}), \hat{g}_P^Y(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) \right)}}, \\ \tau^{(k+1)} &= P_\Omega \left(\tau^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} g_P^\tau(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\sqrt{\left(H_{k+1} g_P^\tau(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}), g_P^\tau(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) \right)}} \right), \end{aligned}$$

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} \hat{g}_P^\psi(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\sqrt{\left(H_{k+1} \hat{g}_P^\psi(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) \right)^T \left(H_{k+1} \hat{g}_P^\psi(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) \right)}}$$

где H_{k+1} – матрица растяжения пространства с коэффициентом α (его целесообразно брать равным 3) в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, имеющая вид

$$H_{k+1} = H_k + \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \frac{H_k \Delta_k \Delta_k^T H_k}{(H_k \Delta_k, \Delta_k)},$$

$$\Delta_k = g_P^T(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - g_P^T(Y^{(k-1)}, \tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}),$$

(здесь T – одна из переменных Y , τ или ψ); также напомним, что

$$\hat{g}_P^Y(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) = -g_P^Y(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}); \hat{g}_P^\psi(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) = -g_P^\psi(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}).$$

Если из-за округлений счета H_{k+1} перестает быть положительно определенной, заменяем ее единичной матрицей.

Шаговый множитель h_k выбираем из условия минимума разности

$$[G_2(Y^{(k)}, \tau^{(k-1)}, \Psi^{(k)}) - G_2(Y^{(k-1)}, \tau^{(k)}, \Psi^{(k-1)})]$$

по направлению антипсевдоградиента $-g(Y, \tau, \Psi)$ в преобразованном пространстве.

4. Если условие

$$\left\| (Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - (Y^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}) \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.4.20)$$

не выполняется, переходим к $(k+2)$ -му шагу алгоритма, в противном случае – к п. 5.

5. Полагаем $Y_* = Y^{(l)}$, $\tau_* = \tau^{(l)}$, $\psi_* = \psi^{(l)}$, $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (2.4.20).

6. Вычислим оптимальное значение целевого функционала по формуле (2.4.15) при $Y = Y_*$, $\tau = \tau_*$, $\psi = \psi_*$ и, для контроля правильности счета, по формуле:

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx \right) + \int_{\Omega} c(x, \tau_{*i}) \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx \right].$$

Алгоритм 2.6 описан.

2.4.2. Нелинейная многопродуктовая задача оптимального разбиения множеств с отысканием координат центров подмножеств. Алгоритм решения

Рассмотрим **непрерывную нелинейную многопродуктовую задачу ОРМ с отысканием координат центров при ограничениях в виде равенств и неравенств**, постановка которой, в сравнении с задачей из раздела 2.4.1, усложнена тем, что функции спроса и стоимости транспортировки единицы продукции от предприятия к потребителю задаются разными для разных видов продукции.

Задача А8. Найти

$$\min_{(\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^M\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [\varphi_i^j \left(\int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx \right) + \int_{\Omega_i^j} c^j(x, \tau_i) \rho^j(x) dx]$$

при условиях:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx &= b_i, \quad i = 1, \dots, p, \\ \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx &\leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N, \\ \{\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M\} &\in \Sigma_{\Omega}^{NM}, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N. \end{aligned}$$

Здесь функции $c^j(x, \tau_i)$ – действительные, ограниченные, определенные на $\Omega \times \Omega$, измеримые по аргументу x при любом фиксированном $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ из Ω , $i = 1, \dots, N$; функции $\rho^j(x)$ – действительные, ограниченные, измеримые и неотрицательные на Ω для всех $j = 1, \dots, M$; точка $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ – центр, общий для подмножеств $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$, $i = 1, \dots, N$, один и тот же для всех $j = 1, \dots, M$; $\varphi_i^j(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$ – действительные, ограниченные, выпуклые, дважды непрерывно дифференцируемые функции своего аргумента, b_1, \dots, b_N – заданные неотрицательные числа, причём

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.4.25)$$

Введем характеристическую функцию подмножества Ω_i^j :

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i^j, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i^j, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$$

и рассмотрим функционал

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i^j \left(\int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right) + \int_{\Omega} c^j(x, \tau_j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right], \quad (2.4.26)$$

где вектор-функция $\lambda(x)$ имеет вид:

$$\lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_N^1(x); \dots; \lambda_1^M(x), \dots, \lambda_N^M(x)).$$

Перепишем задачу **A8** в следующем виде.

Задача B8. Найти пару элементов $(\lambda_*(x), \tau_*)$ ($\lambda_*(x) \in \Gamma_1$ почти всюду (п. в.) для $x \in \Omega$, $\tau_* \in \Omega^N$), такую, что

$$I(\lambda_*(x), \tau_*) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_1 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_N^1(x); \dots; \lambda_1^M(x), \dots, \lambda_N^M(x)) \in \Gamma'_1 \text{ п. в. для } x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N \},$$

где $\Gamma'_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_N^1(x); \dots; \lambda_1^M(x), \dots, \lambda_N^M(x)) : \lambda_i^j(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M \}; \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

От бесконечномерной задачи **B8** с булевыми значениями переменных $\lambda_i^j(\cdot)$, $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$, перейдем к соответствующей задаче со значениями $\lambda_i^j(\cdot)$, $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$, из отрезка $[0, 1]$.

Задача B8.1. Найти пару элементов $(\lambda_*(x), \tau_*)$, где $\lambda_*(x) \in \Gamma_2$, $\tau_* \in \Omega^N$, такую, что

$$I(\lambda_*(x), \tau_*) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

$$\Gamma_2 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma \text{ п. в. для } x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N\},$$

здесь $\Gamma = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_N^1(x); \dots; \lambda_1^M(x), \dots, \lambda_N^M(x)) : 0 \leq \lambda_i^j(x) \leq 1 \quad x \in \Omega, \right.$
 $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M, \left. \sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M \right\}$.

Описание метода решения задачи А8

Для задачи **В8.1** введем функционал Лагранжа следующим образом:

$$h((\lambda(\cdot), \tau), \psi) = I(\lambda(\cdot), \tau) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\sum_{j=1}^M \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i \right) = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i^j \left(\int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right) + \int_{\Omega} (c^j(x, \tau_i) + \psi_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right], \quad (2.4.27)$$

где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in \Lambda$ – N -мерный вектор с действительными компонентами, причем ψ_1, \dots, ψ_p произвольны по знаку, а $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ – неотрицательны; $\lambda(x) \in \Gamma$ для $x \in \Omega$; $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$.

Пару элементов $((\lambda_*(\cdot), \tau_*), \psi^*)$ – назовем седловой точкой функционала (2.4.27) на множестве $(\Gamma \times \Omega^N) \times \Lambda$, где

$$\Lambda = \{\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E_N : \psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N\},$$

если

$$h(((\lambda_*(\cdot), \tau_*), \psi)) \leq h((\lambda_*(\cdot), \tau_*), \psi^*) \leq h((\lambda(\cdot), \tau), \psi^*) \quad (2.4.28)$$

для всех $\lambda \in \Gamma, \tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda$,

или

$$h((\lambda_*(\cdot), \tau_*), \psi^*) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} \max_{\psi \in \Lambda} h((\lambda(\cdot), \tau), \psi) =$$

$$= \max_{\psi \in \Lambda} \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h((\lambda(\cdot), \tau), \psi) \quad (2.4.29)$$

Перейдем к решению задачи:

$$h((\lambda_*(\cdot), \tau_*), \psi^*) = \max_{\psi \in \Lambda} \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h((\lambda(\cdot), \tau), \psi). \quad (2.4.30)$$

Обозначим $G(\psi) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h((\lambda(\cdot), \tau), \psi)$, $\psi \in \Lambda$, тогда двойственной к задаче **B8.1** будет задача

$$G(\psi) \rightarrow \max, \quad \psi \in \Lambda. \quad (2.4.31)$$

По аналогии с работой [37], для нахождения $\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h((\lambda(\cdot), \tau), \psi)$, перейдем к следующей задаче:

$$\min_{\tau \in \Omega^N} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h((\lambda(\cdot), \tau), \psi), \quad \text{при } \psi \in \Lambda. \quad (2.4.32)$$

Обозначим в (2.4.32)

$$G_1(\psi, \tau) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h((\lambda(\cdot), \tau), \psi), \quad \tau \in \Omega^N, \quad \psi \in \Lambda, \quad (2.4.33)$$

тогда, учитывая в (2.4.33) выражение для $h((\lambda(\cdot), \tau), \psi)$ из (2.4.27), получим:

$$G_1(\psi, \tau) = -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i^j \left(\int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right) + \int_{\Omega} (c^j(x, \tau_i) + \psi_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right], \quad (2.4.34)$$

$$\tau \in \Omega^N, \quad \psi \in \Lambda.$$

Обозначим в (2.4.34)

$$\Phi_i^j(\lambda_i^j(\cdot), \tau_i, \psi_i) = \varphi_i^j \left(\int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right) + \int_{\Omega} (c^j(x, \tau_i) + \psi_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx$$

и рассмотрим задачу

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \Phi_i^j(\lambda_i^j(\cdot), \tau_i, \psi_i), \quad (2.4.35)$$

$$\tau \in \Omega^N, \quad \psi \in \Lambda.$$

Согласно [37], функционал $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ – выпуклый по $\lambda(\cdot)$ на $L_2^{N \times M}(\Omega)$, если $\varphi_i^j(\cdot)$, $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ – выпуклые функции своего аргумента, и минимум по $\lambda(\cdot)$ функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ достигается на множестве Γ . В свою очередь, субградиент такого функционала при каждом фиксированных $\tau \in \Omega^N$ и $\psi \in \Lambda$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
& sgrad_{\lambda} \Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi) = \\
& = (\Phi'_{\lambda_1}(\lambda_1^1(\cdot), \tau_1, \psi_1), \dots, \Phi'_{\lambda_N}(\lambda_N^1(\cdot), \tau_N, \psi_N); \dots; \\
& \quad \Phi'_{\lambda_1^M}(\lambda_1^M(\cdot), \tau_1, \psi_1), \dots, \Phi'_{\lambda_N^M}(\lambda_N^M(\cdot), \tau_N, \psi_N)),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi'_{\lambda_i^j}(\lambda_i^j(\cdot), \tau_i, \psi_i) &= \varphi'_{iY^j} \left(\int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right) \cdot \rho^j(x) + (c^j(x, \tau_i) + \psi_i) \rho^j(x), \\
& i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M.
\end{aligned}$$

Для упрощения записи введем обозначение:

$$Y_i^j = \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M. \quad (2.4.36)$$

Согласно [90], необходимым и достаточным условием минимума по $\lambda(\cdot)$ выпуклого по $\lambda(\cdot)$ функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ на Γ является условие

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \int_{\Omega} (sgrad_{\lambda} \Phi(\lambda^*(\cdot), \tau, \psi), (\lambda(x) - \lambda^*(x))) dx = 0,$$

которое еще можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (sgrad_{\lambda} \Phi(\lambda^*(\cdot), \tau, \psi), \lambda^*(x)) dx = \\
& = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \int_{\Omega} (sgrad_{\lambda} \Phi(\lambda^*(\cdot), \tau, \psi), \lambda(x)) dx.
\end{aligned} \quad (2.4.37)$$

Из [90] также известно, что если для оптимальной вектор-функции $\lambda^*(\cdot)$ (задачи минимизации без ограничений функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ из (2.4.35)) ни на одном множестве точек $x \in \Omega$ ненулевой меры не удовлетворяется ни одно из уравнений Эйлера

$$\Phi'_{\lambda_i^j}(\lambda_i^{*j}(\cdot), \tau_i, \psi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$$

то для функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ по переменной $\lambda(\cdot)$, при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и $\psi \in \Lambda$, выполняется условие сильной регулярности, которое еще можно записать так:

$$mes \left\{ x \in \Omega : \left(c^j(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY^j} \left(\int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^{*j}(x) dx \right) \right) \rho^j(x) = 0 \right\} = 0, \quad (2.4.38)$$

где Y_i^j , имеет вид (2.4.36).

Следуя [35, 37, 90], если условие сильной регулярности (2.4.38) выполняется, тогда вектор-функция $\lambda^*(\cdot)$, которая доставляет минимум линейному функционалу с правой части формулы (2.4.37), определяется при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и $\psi \in \Lambda$, а также, с учетом (2.4.38) и того, что мера множества граничных точек подмножеств $\Omega_i^j, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$, равна нулю, из следующего операторного уравнения:

$$\lambda_i^{*j}(x) = \begin{cases} 1, & c^j(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi_{iY^j}^{\prime j} \left(\int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^{*j}(x) dx \right) \leq \\ & \leq c^j(x, \tau_k) + \psi_k + \varphi_{kY^j}^{\prime j} \left(\int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_k^{*j}(x) dx \right), \\ & i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega \text{ (другими словами,} \\ & i = k \text{ только на множестве меры ноль,} \\ & \text{т. е. в точках границы между} \\ & \text{подмножествами } \Omega_i^j \text{ и } \Omega_k^j), i, k = 1, \dots, N, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2.4.39)$$

$$j = 1, \dots, M.$$

В выражении (2.4.34), под знаком суммы, прибавим и отнимем $\varphi_{iY^j}^{\prime j} \left(\int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right)$, после чего получим:

$$G_1(\psi, \tau) = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i^j \left(\int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right) - \right. \\ \left. - \varphi_{iY^j}^{\prime j} \left(\int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right) \cdot \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx + \right. \\ \left. + \int_{\Omega} \left(c^j(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi_{iY^j}^{\prime j} \left(\int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right) \right) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \right] \quad (2.4.40)$$

$$\tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda.$$

Учитывая выражение (2.4.39), перепишем выражение (2.4.40) в части, которая линейно зависит от $\lambda_i^j(\cdot)$, согласно ограничениям задачи **B8.1**, в виде:

$$G_2(\psi, \tau) = -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i^j(Y_i^j) - \varphi_{Y_i^j}^j(Y_i^j) \cdot Y_i^j + \int_{\Omega} \min_{k=1, N} (c^j(x, \tau_k) + \psi_k + \varphi_{kY_k^j}^j(Y_k^j)) \rho^j(x) dx \right] \quad (2.4.41)$$

$$\tau \in \Omega^N, \quad \psi \in \Lambda,$$

$$Y \in U = \left\{ Y = (Y_1^1, \dots, Y_N^1, \dots; Y_1^M, \dots, Y_N^M) \in E_{N \times M} : 0 \leq \sum_{j=1}^M Y_i^j \leq b_i, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Итак, задачу (2.4.31), двойственную к задаче **B8.1**, приведем к виду:

$$\min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in U} \left(-\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i^j(Y_i^j) - \varphi_{Y_i^j}^j(Y_i^j) \cdot Y_i^j + \int_{\Omega} \min_{k=1, N} (c^j(x, \tau_k) + \psi_k + \varphi_{kY_k^j}^j(Y_k^j)) \rho^j(x) dx \right] \right) \rightarrow \max, \quad (2.4.42)$$

$$\psi \in \Lambda,$$

$$Y \in U = \left\{ Y = (Y_1^1, \dots, Y_N^1, \dots; Y_1^M, \dots, Y_N^M) \in E_{N \times M} : 0 \leq \sum_{j=1}^M Y_i^j \leq b_i, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Таким образом, если $\varphi_i^j(\cdot)$, $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ – выпуклые, дважды непрерывно дифференцируемые функции своего аргумента, и при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и $\psi \in \Lambda$ имеет место условие сильной регулярности:

$$mes \left\{ x \in \Omega : \left(c^j(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi_{Y_i^j}^j \left(\int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^{*j}(x) dx \right) \right) \rho^j(x) = 0 \right\} = 0,$$

где $Y_i^j = \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx$, $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$, тогда седловая точка

$((\lambda_*(\cdot), \tau_*, \psi^*))$ (где первая компонента является оптимальным решением задачи **B8.1**) функционала (2.4.27) на множестве $(\Gamma \times \Omega^N) \times \Lambda$ определяется для $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$, и почти всех $x \in \Omega$ следующим образом:

$$\lambda_i^{*j}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \Omega_{*i}^j \text{ и } x \notin \Omega_{*q}^j, \quad q \leq i, \\ 0, & \text{при } x \notin \Omega_{*i}^j, \end{cases}$$

где подмножества Ω_{*i}^j имеют вид:

$$\Omega_{*i}^j = \left\{ \begin{array}{l} x \in \Omega: c^j(x, \tau_i^*) + \psi_i^* + \varphi_{iY_i^j}^{\prime j} \left(\int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^{*j}(x) dx \right) = \\ = \min_{k=1, N} (c^j(x, \tau_k^*) + \psi_k^* + \varphi_{kY_k^j}^{\prime j} \left(\int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_k^{*j}(x) dx \right)), \\ i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M, \end{array} \right\} \quad (2.4.43)$$

а в качестве $Y_1^*, \dots, Y_N^*, \tau_1^*, \dots, \tau_N^*, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ выбирается оптимальное решение двойственной задачи (2.4.31), которая приведена к такой форме:

$$G(\psi) = \min_{\tau \in \Omega^M} \max_{Y \in U} \left(-\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[\begin{array}{l} \varphi_i^j(Y_i^j) - \varphi_{iY_i^j}^{\prime j}(Y_i^j) \cdot Y_i^j + \\ + \int_{\Omega} \min_{k=1, N} (c^j(x, \tau_k) + \psi_k + \\ + \varphi_{kY_k^j}^{\prime j}(Y_k^j)) \rho^j(x) dx \end{array} \right] \right) \rightarrow \max, \quad (2.4.44)$$

$$\psi \in \Lambda,$$

$$Y \in U = \left\{ Y = (Y_1^1, \dots, Y_N^1; \dots; Y_1^M, \dots, Y_N^M) \in E_{N \times M} : 0 \leq \sum_{j=1}^M Y_i^j \leq b_i, i = 1, \dots, N \right\}.$$

при условиях

$$\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N. \quad (2.4.45)$$

Поскольку, согласно [37], множества оптимальных решений задач **B8** и **B8.1** совпадают, перейдем к формулированию алгоритма решения задачи **B8**, используя формулы (2.4.43)–(2.4.45).

Алгоритм решения задачи **A8**

Для решения задачи (2.4.44) – (2.4.45) используем эвристический алгоритм обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, близкий к г-алгоритму Шора [103]. Этот алгоритм описан в [37] для однопродуктовой задачи, а здесь он обобщен и применен для случая многопродуктовой задачи, см. в работе [35].

От задачи (2.4.44) – (2.4.45) перейдем к задаче безусловной оптимизации по ψ с помощью введения в целевую функцию (2.4.41) негладких штрафных функций множеств

$$\begin{aligned} & (\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N), \\ & (Y_i^j \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M), \\ & \left(\sum_{j=1}^M Y_i^j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, N \right): \end{aligned}$$

найти

$$\max_{\psi \in E_N} \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in E_{N,M}} P(Y, \tau, \psi), \quad (2.4.46)$$

где

$$\begin{aligned} P(Y, \tau, \psi) &= G_2(Y, \tau, \psi) - \\ &- S_1 \cdot \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i) - S_2 \cdot \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \max(0, -Y_i^j) - \\ &- S_3 \cdot \sum_{i=1}^N \max(0, \sum_{j=1}^M Y_i^j - b_i). \end{aligned} \quad (2.4.47)$$

Здесь S_1, S_2, S_3 – достаточно большие положительные числа, гораздо больше максимальных значений множителей Лагранжа для функции (2.4.41). Возможность перехода от задачи (2.4.44) – (2.4.45) к задаче (2.4.46) – (2.4.47) рассматривается в [36, 84, 103].

Обобщенный псевдоградиент функции (2.4.47) в точке

$$(Y, \tau, \psi) = (Y_1^1, \dots, Y_N^1, \dots, Y_1^M, \dots, Y_N^M; \tau_1, \dots, \tau_N; \psi_1, \dots, \psi_N)$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} g_p(Y, \tau, \psi) &= (-g_p^Y(Y, \tau, \psi), g_p^\tau(Y, \tau, \psi), -g_p^\psi(Y, \tau, \psi)) = \\ &= (-g_p^{Y_1^1}(Y, \tau, \psi), \dots, -g_p^{Y_N^1}(Y, \tau, \psi); \dots; -g_p^{Y_1^M}(Y, \tau, \psi), \dots, -g_p^{Y_N^M}(Y, \tau, \psi); \\ &g_p^{\tau_1}(Y, \tau, \psi), \dots, g_p^{\tau_N}(Y, \tau, \psi); -g_p^{\psi_1}(Y, \tau, \psi), \dots, -g_p^{\psi_N}(Y, \tau, \psi)), \end{aligned}$$

а его компоненты определяются следующим образом:

– по Y_i^j :

$$\begin{aligned} g_p^{Y_i^j}(Y, \tau, \psi) &= -\varphi_{Y_i^j}^{n_j}(Y_i^j) \cdot Y_i^j + \varphi_{Y_i^j}^{n_j}(Y_i^j) \cdot \int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx + \\ &+ S_2 \cdot \max(0, \text{sign}(-Y_i^j)) - S_3 \cdot \max(0, \text{sign}\left(\sum_{j=1}^M Y_i^j - b_i\right)), \end{aligned} \quad (2.4.48)$$

$$i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M;$$

– по τ_i :

$$g_p^{\tau_i}(Y, \tau, \psi) = \sum_{j=1}^M \int_{\Omega} \rho^j(x) \cdot g_{c^j}^{\tau_i}(x, \tau_i) \lambda_i^j(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.4.49)$$

где $g_{c^j}^{\tau_i}(x, \tau)$ – i -я компонента N -мерного вектора обобщенного градиента $g_{c^j}(x, \tau)$ функции $c^j(x, \tau_i)$, $j = 1, \dots, M$, в точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$, где $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ при фиксированном x имеет вид:

$$g_{c^j}^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_{c^j}^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau) \\ \dots\dots\dots \\ g_{c^j}^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau) \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, M;$$

– по ψ_i :

$$g_p^{\psi_i}(Y, \tau, \psi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i, & i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i + S_1 \cdot \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), & i = p+1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.4.50)$$

В формулах (2.4.48) – (2.4.50) $\lambda_i^j(x)$, $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ определяют следующим образом:

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c^j(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi_{iY_i}^j(Y_i^j) = \\ = \min_{k=1, N} (c^k(x, \tau_k) + \psi_k + \varphi_{kY_k}^j(Y_k^j)), & \\ i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, & \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.4.51)$$

Алгоритм 2.7

Область Ω заключаем в n -мерный параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат. Положим $\rho^j(x) = 0$ при $x \in \Pi \setminus \Omega$, $j = 1, \dots, M$. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение $(Y, \tau, \psi) = (Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)})$. Вычисляем значе-

ние $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (2.4.51) при $Y = Y^{(0)}$, $\tau = \tau^{(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$, а значение $g_P^Y(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)})$, $g_P^\tau(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)})$, $g_P^\psi(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ в узлах сетки по формулам (2.4.48) – (2.4.50) при $Y = Y^{(0)}$, $\tau = \tau^{(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$. Выбираем начальный шаг $h_0 > 0$ г-алгоритма.

Первый шаг алгоритма выполняем по формулам:

$$Y^{(1)} = Y^{(0)} - h_0 \hat{g}_P^Y(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}), \quad \tau^{(1)} = P_\Omega(\tau^{(0)} - h_0 g_P^\tau(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)})), \\ \psi^{(1)} = \psi^{(0)} - h_0 \hat{g}_P^\psi(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}),$$

где P_Ω – оператор проектирования на Ω (см. п. 1.6.2).

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после k , $k=1, 2, \dots$, шагов алгоритма в узлах сетки получены значения $Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$.

Опишем **(k+1)-й шаг** алгоритма.

1. Вычисляем значения $\lambda^{(k)}(x)$ в узлах сетки по формулам (2.4.51) при $Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}$.

2. Вычисляем значения $g_P(Y, \tau, \psi)$ по формулам (2.4.48) – (2.4.50) при $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$, $Y = Y^{(k)}$, $\tau = \tau^{(k)}$, $\psi = \psi^{(k)}$.

3. Проводим (k+1)-й шаг r -алгоритма обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, близкого к г-алгоритму Шора в Н-форме [103]:

$$Y^{(k+1)} = Y^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} \hat{g}_P^Y(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\sqrt{(H_{k+1} \hat{g}_P^Y(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}), \hat{g}_P^Y(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})}}}, \\ \tau^{(k+1)} = P_\Omega \left(\tau^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} g_P^\tau(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\sqrt{(H_{k+1} g_P^\tau(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}), g_P^\tau(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})}} \right), \\ \psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} \hat{g}_P^\psi(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\sqrt{(H_{k+1} \hat{g}_P^\psi(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}), \hat{g}_P^\psi(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})}}},$$

где H_{k+1} – матрица растяжения пространства с коэффициентом α в направлении разницы двух последовательных обобщенных градиентов, которая определяется следующим образом:

$$H_{k+1} = H_k + \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \frac{H_k \Delta_k \Delta_k^T H_k}{(H_k \Delta_k, \Delta_k)},$$

$$\Delta_k = g_P^T(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - g_P^T(Y^{(k-1)}, \tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}),$$

(здесь T – одна из переменных Y , τ или ψ);

$$\hat{g}_P^Y(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) = -g_P^Y(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}); \hat{g}_P^\psi(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) = -g_P^\psi(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}).$$

Шаговый множитель h_k выбираем из условия минимума разницы

$$G_2(Y^{(k)}, \tau^{(k-1)}, \psi^{(k)}) - G_2(Y^{(k-1)}, \tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)})$$

по направлению антисевдоградиента $-g_P(Y, \tau, \psi)$ в преобразованном пространстве.

4. Если условие

$$\|(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - (Y^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)})\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.4.52)$$

не выполняется, переходим к $(k+2)$ -му шагу алгоритма, в противном случае – переход к п. 5.

5. Полагаем $Y^* = Y^{(l)}$, $\tau_* = \tau^{(l)}$, $\psi^* = \psi^{(l)}$, $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (2.4.52).

6. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала по формуле (2.4.47) при $Y = Y^*$, $\tau = \tau_*$, $\psi = \psi^*$ и, для контроля правильности вычислений, по формуле

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i^j \left(\int_{\Omega} \rho^j(x) \lambda_{*i}^j(x) dx \right) + \int_{\Omega} c^j(x, \tau_{*i}) \rho^j(x) \lambda_{*i}^j(x) dx \right].$$

Алгоритм 2.7 описан.

2.5. Применение г-алгоритма Шора для решения динамических непрерывных задач оптимального разбиения множеств

Первые математическая постановка простейшей динамической задачи оптимального разбиения множества n -мерного евклидова пространства была представлена в [41]. В [36] эта постановка обобщена на случай, когда изменение состояния процесса (объекта) может описываться системой нелинейных дифференциальных уравнений, а также, когда на фазовые переменные накладываются интегральные ограничения. Все эти задачи требуют детального исследования [42]. Для частного случая задачи в [50, 54] были представлены два подхода к ее решению и выявлены некоторые свойства решений. В работе [55] доказана теорема о редукции простейшей динамической задачи оптимального разбиения множества к семейству задач оптимального управления системой с

сосредоточенными параметрами. На основе этой теоремы предложен метод и соответствующий численный алгоритм решения простейшей динамической задачи ОРМ. Получены оптимальные решения возможных вариантов ее решений, связанных с выбором коэффициентов приоритета слагаемых целевого функционала.

Если в динамической задаче оптимального разбиения множеств область изменения фазовой координаты не ограничена и на управляющие параметры не накладывается никаких условий, то оптимальное решение задачи можно получить в аналитическом виде. В случае же наличия дополнительных интегральных ограничений на фазовую или управляющую переменную или требования наряду с разбиением отыскивать и некоторые параметры задачи, последние с помощью привлечения необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина, а также аппарата штрафных функций сводится к задаче оптимизации негладкой функции конечного числа переменных [55]. Перейдем к рассмотрению таких задач.

2.5.1. Динамическая задача оптимального разбиения множеств с интегральными ограничениями

Сформулируем динамическую задачу ОРМ с интегральными фазовыми ограничениями, выпишем необходимые и достаточные условия оптимальности управляемого процесса, приведем численный алгоритм решения задачи.

Постановка задачи

Пусть Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу множество из E_n ; Σ_{Ω}^N – класс всевозможных разбиений множества Ω на N подмножеств.

Введем в рассмотрение функционал

$$J(\bar{\omega}, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) = \beta_0 \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) dx dt + \beta_1 \int_0^T \int_{\Omega} u^2(x, t) dx dt, \quad (2.5.1)$$

где $\beta_0, \beta_1 \geq 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$ – коэффициенты, определяющие приоритет слагаемых в функционале; $c(x, \tau_i, t)$ – действительные, ограниченные, определенные на $\Omega \times \Omega \times [0, T]$ функции, измеримые по переменной x при произвольном фиксированном векторе параметров $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n) \in \Omega$, $i = \overline{1, N}$; $T > 0$, a_i , $i = \overline{1, N}$, – заданные неотрицательные величины; функция $\rho(x, t)$ для каждого $x \in \Omega$ является решением задачи Коши

$$\begin{aligned}\dot{\rho}(x, t) &= u(x, t), \quad t \in [0, T], \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x);\end{aligned}\tag{2.5.2}$$

и удовлетворяет условиям

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x, t) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N}.\tag{2.5.3}$$

Здесь $u(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ – функция управления, $\rho_0(x)$ – известная, определенная на множестве Ω функция. Точки $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n) \in \Omega, i = \overline{1, N}$, – так называемые «центры» подмножеств – также предполагаются известными.

Под **динамической задачей оптимального разбиения множеств** $\Omega \subset E_n$ с **интегральными ограничениями** будем понимать следующую задачу:

Задача А9. Требуется найти разбиение $\bar{\omega}^* = (\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \in \Sigma_\Omega^N$, управление $u^*(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ и соответствующую фазовую траекторию $\rho^*(x, t)$ (удовлетворяющую задаче (2.5.2) и условиям (2.5.3)), при которых функционал (2.5.1) достигал бы своего минимального значения.

Коротко задача записывается следующим образом:

$$J(\bar{\omega}, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{(\bar{\omega}, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in \Phi},\tag{2.5.4}$$

$$\begin{aligned}\Phi = \{ & (\bar{\omega}, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) : \bar{\omega} \in \Sigma_\Omega^N, u(\cdot, \cdot) \in L_2(\Omega \times [0, T]); \dot{\rho}(x, t) = u(x, t), t \in [0, T], \\ & \rho(x, 0) = \rho_0(x); \int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x, t) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N} \}.\end{aligned}$$

Оптимальным решением задачи (2.5.4) будем называть допустимую тройку $(\bar{\omega}^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$, которая доставляет минимальное значение функционалу J .

Метод решения задачи

Введя в рассмотрение характеристические функции подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, функционал и интегральные ограничения задачи (2.5.4) запишутся в виде:

$$\begin{aligned}I_1(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) &= \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \left(\beta_0 \sum_{i=1}^N [(c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) \lambda_i(x)] + \beta_1 u^2(x, t) \right) dx dt,\end{aligned}$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N},$$

$$\text{где } \Lambda = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1; \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \forall x \in \Omega \right\}.$$

Динамическая задача оптимального разбиения множеств (2.5.4) в терминах характеристических функций подмножеств записывается так:

$$I_1(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V_0}, \quad (2.5.5)$$

где

$$\begin{aligned} V_0 = & \left\{ (\lambda(x), u(x, t), \rho(x, t)) : \lambda(x) \in \Lambda, u(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T]), \right. \\ & \dot{\rho}(x, t) = u(x, t) \forall t \in [0, T], \rho(x, 0) = \rho_0(x) \forall x \in \Omega; \\ & \left. \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N} \right\} \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Согласно теории непрерывных задач ОРМ, множество Λ погружается в симплекс Λ_1

$$\Lambda_1 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1; 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \forall x \in \Omega \right\}$$

и вместо задачи (2.5.5), (2.5.6) решается задача

$$I_1(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V}, \quad (2.5.7)$$

$$\begin{aligned} V_1 = & \left\{ (\lambda(x), u(x, t), \rho(x, t)) : \lambda(x) \in \Lambda_1, u(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T]), \right. \\ & \dot{\rho}(x, t) = u(x, t) \forall t \in [0, T], \rho(x, 0) = \rho_0(x) \forall x \in \Omega; \\ & \left. \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N} \right\}. \end{aligned}$$

Под функционалом Лагранжа задачи (2.5.7) будем понимать функционал

$$\begin{aligned} h((\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi) = \\ = I_1(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) + \sum_{i=1}^N \xi_i \left(\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx dt - b_i \right), \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

определенный на $V \times \Gamma$, где

$$V = \{(\lambda(x), u(x, t), \rho(x, t)) : \lambda(x) \in \Lambda_1, u(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T]), \\ \dot{\rho}(x, t) = u(x, t) \forall t \in [0, T], \rho(x, 0) = \rho_0(x) \forall x \in \Omega\};$$

$$\Gamma = \{\xi \in R^N : \xi_i \geq 0, i = \overline{1, N}\}.$$

Определение [15]. Пару $((\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)), \xi^*)$ будем называть седловой точкой функционала Лагранжа $h((\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi)$ на множестве $V \times \Gamma$, если для всех $(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V, \xi \in \Gamma$ выполняется соотношение

$$h((\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)), \xi) \leq h((\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)), \xi^*) \leq h((\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi^*).$$

Задача, двойственная к задаче (7), имеет вид:

$$\chi(\xi) = \min_{(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V} h((\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi) \rightarrow \max_{\xi \in \Gamma} \quad (2.5.9)$$

Отметим, что задача (2.5.9) является конечномерной, в отличие от задачи (2.5.7).

Нетрудно показать (по аналогии с [15]), что для того, чтобы задачи (2.5.9) и (2.5.7) были связаны соотношением двойственности $I_{1*} = \chi^*$, причем верхняя грань в двойственной задаче (2.5.9) достигалась, необходимо и достаточно, чтобы функционал (2.5.8) имел седловую точку в смысле введенного выше определения.

И, таким образом, решение пары двойственных задач (2.5.9) и (2.5.7) сводится к нахождению седловой точки функционала Лагранжа $h((\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi)$ на множестве $V \times \Gamma$.

Уточним вид функции $\chi(\xi)$. Пусть $\xi \in \Gamma$ – произвольный, но фиксированный вектор. Рассмотрим задачу

$$h((\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V} \quad (2.5.10)$$

Справедлива

Теорема [50]. Для того, чтобы процесс $(\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)) \in V$ доставлял минимальное значение функционалу задачи (2.5.10) при произвольном фиксированном $\xi \in \Gamma$, необходимо и достаточно, чтобы почти всюду для $x \in \Omega$ выполнялось равенство

$$\int_0^T \left(\sum_{i=1}^N [(\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i) \rho^*(x, t) \lambda_i^*(x)] + \beta_1 (u^*(x, t))^2 \right) dt =$$

$$= \min_{\substack{\lambda(x) \in \Lambda_2 \\ u(x, \cdot) \in L_2([0, T])}} \int_0^T \left(\sum_{i=1}^N [(\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i) \rho(x, t) \lambda_i(x)] + \beta_1 u^2(x, t) \right) dt, \quad (2.5.11)$$

где $\Lambda_2 = \left\{ \mu \in R^N : \mu_i \geq 0, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \mu_i = 1 \right\}$, функция $\rho(x, t)$ – решение задачи Коши (2.5.2), соответствующее функции управления $u(x, \cdot)$.

С целью более детального представления целевой функции задачи (2.5.9) для каждой точки $x \in \Omega$ будем решать задачу оптимального управления

$$P_\xi(\lambda(x), u(x, \cdot)) \rightarrow \min_{\substack{\lambda(x) \in \Lambda_2 \\ u(x, \cdot) \in L_2([0, T])}}$$

при условии (2.5.2), где

$$P_\xi(\lambda(x), u(x, \cdot)) = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^N [(\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i) \rho(x, t) \lambda_i(x)] + \beta_1 u^2(x, t) \right) dt.$$

Применяя принцип максимума Понтрягина, оптимальное решение задачи минимизации функционала $P_\xi(\lambda(x), u(x, \cdot))$ при условии (2.5.2) для любого значения параметра $\lambda(x)$ можно получить в следующем виде:

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2\beta_1} \int_T^t \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i) \lambda_i(x) d\sigma; \quad (2.5.12)$$

$$\rho^*(x, t) = \rho_0(x) + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \int_T^\theta \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i) \lambda_i(x) d\sigma d\theta. \quad (2.5.13)$$

Подставив найденные выражения для функций $u^*(x, t)$ и $\rho^*(x, t)$ в функционал $P_\xi(\lambda(x), u(x, \cdot))$, получим задачу условной минимизации функции N переменных:

$$\bar{P}_\xi(\lambda(x)) \rightarrow \min_{\lambda(x) \in \Lambda_2}, \quad (2.5.14)$$

где

$$\bar{P}_\xi(\lambda(x)) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^T Q_j(x, t) \rho_0(x) \lambda_j(x) dt - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\beta_1} \int_0^T Q_j(x, t) \int_0^t \int_0^T \sum_{i=1}^N Q_i(x, \sigma) \lambda_i(x) \lambda_j(x) d\sigma d\theta dt \Big) + \\
& + \frac{1}{4\beta_1} \int_0^T \left\{ \int_0^t \sum_{i=1}^N Q_i(x, \sigma) \lambda_i(x) d\sigma \right\}^2 dt,
\end{aligned}$$

$$Q_i(x, t) = \beta_0 (c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i.$$

Очевидно, что задача (2.5.14) представляет собой минимизацию квадратичной функции на симплексе Λ_2 . Найдем ее аналитическое решение.

Далее, для упрощения математических выкладок, опустим аргумент x у функций $Q_i(x, t; \xi_i)$, $\rho_0(x)$ и у компонент вектора $\lambda(x)$ в силу формулировки задачи (2.5.14) для каждого произвольного, но фиксированного $x \in \Omega$.

Исследуем свойства функции $\bar{P}_\xi(\lambda)$. Выпишем ее градиент и гессиан. k -тая компонента вектора градиента имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{P}_\xi(\lambda)}{\partial \lambda_k} = \\
& = -\frac{1}{2\beta_1} \left[\sum_{i=1}^N \int_0^T Q_k(t) \int_0^t \int_0^T Q_i(\sigma) d\sigma d\theta dt \lambda_i + \sum_{j=1}^N \int_0^T Q_j(t) \int_0^t \int_0^T Q_k(\sigma) d\sigma d\theta dt \lambda_j \right] + \\
& + \frac{1}{2\beta_1} \sum_{i=1}^N \int_0^T \left(\int_0^t Q_i(\sigma) d\sigma \lambda_i \cdot \int_0^t Q_k(\sigma) d\sigma \right) dt + \rho_0 \int_0^T Q_k(t) dt = \\
& = \rho_0 \int_0^T Q_k(t) dt - \frac{1}{2\beta_1} \sum_{i=1}^N \lambda_i \times \\
& \times \int_0^T \left[\int_0^t \int_0^T (Q_k(t) Q_i(\sigma) + Q_i(t) Q_k(\sigma)) d\sigma d\theta - \int_0^t Q_i(\sigma) d\sigma \cdot \int_0^t Q_k(\sigma) d\sigma \right] dt,
\end{aligned}$$

а элементы гессиана записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \bar{P}_\xi(\lambda)}{\partial \lambda_k \partial \lambda_s} = -\frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_0^t \int_0^T (Q_k(t) Q_s(\sigma) + Q_s(t) Q_k(\sigma)) d\sigma d\theta dt + \\
& + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_0^t Q_s(\sigma) d\sigma \cdot \int_0^t Q_k(\sigma) d\sigma dt.
\end{aligned}$$

Упростим последнее выражение, для этого введем следующее обозначение: $\int_0^T Q_s(\sigma) d\sigma = W_s(t)$. Отметим, что $W_s(T) = 0$. Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{P}_\xi(\lambda)}{\partial \lambda_k \partial \lambda_s} &= \\ &= -\frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \left[Q_k(t) \int_0^t W_s(\theta) d\theta + Q_s(t) \int_0^t W_k(\theta) d\theta - W_s(t) \cdot W_k(t) \right] dt. \end{aligned}$$

Применяя формулу интегрирования по частям для определенного интеграла, приходим к равенству:

$$\int_0^T Q_k(t) \int_0^t W_s(\theta) d\theta dt = \int_0^T W_k(t) \cdot W_s(t) dt.$$

Меняя индексы k и s местами, получим

$$\int_0^T Q_s(t) \int_0^t W_k(\theta) d\theta dt = \int_0^T W_k(t) \cdot W_s(t) dt.$$

Таким образом, выражения для элементов матрицы Гессе функции $\bar{P}_\xi(\lambda)$ имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_\xi(\lambda)}{\partial \lambda_k \partial \lambda_s} = -\frac{1}{2\beta_1} \int_0^T [W_s(t) \cdot W_k(t)] dt, \quad k, s = \overline{1, N}. \quad (2.5.15)$$

Очевидно, что главный минор первого порядка матрицы отрицательный. Для минора второго порядка удастся получить лишь следующую оценку снизу:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{1}{4\beta_1^2} \left(\int_0^T W_s^2(t) dt \cdot \int_0^T W_k^2(t) dt - \left(\int_0^T W_s(t) \cdot W_k(t) dt \right)^2 \right) \geq \\ &\geq -\frac{1}{16\beta_1^2} \left(\int_0^T W_s^2(t) dt - \int_0^T W_k^2(t) dt \right)^2. \end{aligned}$$

Кроме того, легко привести примеры такого задания функций $c(x, \tau_i, t)$, при котором минор второго порядка будет отрицательным. Следовательно, в общем случае ничего определенного о выпуклости - вогнутости функции $\bar{P}_\xi(\lambda)$ сказать нельзя. Значит, для решения задачи (2.5.7) приходится ограничиваться лишь необходимыми условиями оптимальности, или, возможно, применять другой подход к учету интегральных ограничений на фазовую переменную $\rho(x, t)$. В частном же случае, когда $c(x, \tau_i, t) \equiv c(x, \tau_i) f(t)$, где

$f(t) \in L_2([0, T])$ – одна и та же функция для всех $i = \overline{1, N}$, выражения для компонент матрицы Гессе упрощаются:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_\xi(\lambda)}{\partial \lambda_k \partial \lambda_s} = -\frac{1}{6\beta_1} c_s \cdot c_k \int_0^T f^2(\sigma) d\sigma.$$

Легко показать, что среди главных миноров такой матрицы лишь минор первого порядка отрицательный, все остальные – равны нулю. Следовательно, в соответствии с критерием Сильвестра, матрица Гессе является отрицательно определенной. Функция $\bar{P}_\xi(\lambda)$ является вогнутой на симплексе Λ_2 , а значит, достигает своего минимального значения в крайних точках этого множества. Крайние точки множества Λ_2 представляют собой значения характеристических функций подмножеств $\Omega_i, i = \overline{1, N}$, образующих разбиение множества Ω . Поэтому в случае, когда $c(x, \tau_i, t) \equiv c(x, \tau_i) f(t)$, задача (2.5.7) эквивалентна задаче (2.5.5), (2.5.6). И, тем самым, в указанном частном случае переход от задачи бесконечномерного программирования с булевыми переменными к задаче бесконечномерного программирования на симплексе является теоретически обоснованным.

Далее будем рассматривать задачу (2.5.4), и эквивалентную ей (2.5.5), (2.5.6), в которых $c(x, \tau_i, t) \equiv c(x, \tau_i) f(t)$, $i = \overline{1, N}$. Учитывая тот факт, что $\bar{P}_\xi(\lambda)$ достигает своего минимального значения в крайних точках симплекса Λ_2 , а для этих точек выполняются соотношения: $\lambda_i^2 = \lambda_i$, $\lambda_i \lambda_j = 0$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1, N}$, можно существенно упростить выражение для функционала $\bar{P}_\xi(\lambda)$, после чего – найти решение задачи (2.5.14) в аналитическом виде. Приведем упрощенный вид функционала $\bar{P}_\xi(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \bar{P}_\xi(\lambda(x)) = & \sum_{j=1}^N \left(\int_0^T Q_j(x, t; \xi_j) p_0(x) \lambda_j(x) dt - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T Q_j(x, t; \xi_j) \int_0^t \int_0^T \sum_{i=1}^N Q_i(x, \sigma; \xi_i) \lambda_i(x) \lambda_j(x) d\sigma d\theta dt \right) + \\ & + \frac{1}{4\beta_1} \int_0^T \left\{ \int_t^T \sum_{i=1}^N Q_i(x, \sigma; \xi_i) \lambda_i(x) d\sigma \right\}^2 dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^N \left(\int_0^T Q_j(x, t; \xi_j) \rho_0(x) dt - \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_0^t \int_0^t Q_j(x, t; \xi_j) Q_j(x, \theta; \xi_j) d\theta d\xi dt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4\beta_1} \int_0^T \left\{ \int_0^t Q_j(x, \theta; \xi_j) d\theta \right\}^2 dt \right) \lambda_j(x).
\end{aligned}$$

Оптимальное решение задачи (2.5.14) в аналитическом виде при фиксированном параметре $\xi \in \Gamma$ записывается так:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_i(x; \xi_i) = \min_{k=1, \overline{N}} B_k(x; \xi_k), \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (2.5.16)$$

где величина $B_i(x; \xi_i)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
B_i(x; \xi_i) &= \int_0^T Q_j(x, t; \xi_j) \rho_0(x) dt - \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_0^t \int_0^t Q_j(x, t; \xi_j) Q_j(x, \theta; \xi_j) d\theta d\xi dt + \\
&\quad + \frac{1}{4\beta_1} \int_0^T \left\{ \int_t^T Q_j(x, \theta; \xi_j) d\theta \right\}^2 dt. \quad (2.5.17)
\end{aligned}$$

Если обозначить через $G_j(x, t; \xi_j) = \int_0^t Q_j(x, \theta; \xi_j) d\theta$ и применить формулу интегрирования по частям, то выражение (2.5.17) преобразуется так:

$$\begin{aligned}
B_j(x; \xi_j) &= \int_0^T (Q_j(x, t; \xi_j) \rho_0(x) dt - \\
&\quad - \frac{1}{4\beta_1} \left(T \cdot G_j^2(x, T; \xi_j) - 2 \int_0^T Q_j(x, t; \xi_j) \cdot \left(\int_0^t G_j(x, \sigma; \xi_j) d\sigma \right) dt - \int_0^T G_j^2(x, t; \xi_j) dt \right)).
\end{aligned}$$

С учетом полученного аналитического решения задачи (2.5.14), целевая функция двойственной задачи (2.5.9), записывается в виде:

$$\chi(\xi) = \int_{\Omega} \min_{j=1, \overline{N}} B_j(x; \xi_j) dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j. \quad (2.5.18)$$

Седловая точка $((\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot), \xi^*))$ функционала Лагранжа (2.5.8) на множестве $V \times \Gamma$ определяется для $i = 1, 2, \dots, N$ и почти всех $x \in \Omega$ следующим образом:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_i(x; \xi_i^*) = \min_{k=1, \overline{N}} B_k(x; \xi_k^*), \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (2.5.19)$$

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2\beta_1} \int_T^t \sum_{i=1}^N (\beta_0 (c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i^*) \lambda_i^*(x) d\sigma; \quad (2.5.20)$$

$$\rho^*(x, t) = \rho_0(x) + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \int_T^{\theta} \sum_{i=1}^N (\beta_0 (c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i^*) \lambda_i^*(x) d\sigma d\theta, \quad (2.5.21)$$

где

$$B_j(x; \xi_j) = \int_0^T Q_j(x, t; \xi_j^*) \rho_0(x) dt - \\ - \frac{1}{4\beta_1} \left(T \cdot G_j^2(x, T; \xi_j^*) - 2 \int_0^T Q_j(x, t; \xi_j^*) \cdot \left(\int_0^t G_j(x, \sigma; \xi_j^*) d\sigma \right) dt - \int_0^T G_j^2(x, t; \xi_j^*) dt \right), \\ Q_j(x, t; \xi_j^*) = \beta_0 (c(x, \tau_j, \sigma) + a_j) + \xi_j^*, \quad G_j(x, t; \xi_j^*) = \int_0^t Q_j(x, \theta; \xi_j^*) d\theta,$$

а в качестве ξ_1^*, \dots, ξ_N^* выбирается оптимальное решение двойственной задачи (2.5.9), приведенной к виду (2.5.18).

Для решения задачи максимизации негладкой вогнутой функции (2.5.18) на множестве $\xi \in \Gamma$ применяется метод обобщенного градиентного подъема с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов – г-алгоритм Шора Н.З. При этом от задачи (2.5.9) совершается переход к задаче безусловной оптимизации при помощи введения в целевую функцию негладкой штрафной функции множества Γ :

$$\bar{\chi}(\xi) = \chi(\xi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, (-\xi_i)) \rightarrow \max_{\xi \in E^N}, \quad (2.5.22)$$

где S – достаточно большое положительное число.

Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть в функционале (2.5.1) функции $c(x, \tau_i, t) \equiv c(x, \tau_i) f(t)$, $i = \overline{1, N}$, где $c(x, \tau_i)$ – действительные, ограниченные, определенные на $\Omega \times \Omega$ функции, измеримые по переменной x при произвольном фиксированном векторе параметров $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n) \in \Omega$, $i = \overline{1, N}$; $f(t) \in L_2([0, T])$. Для того

чтобы допустимое разбиение $\bar{\omega}^* = (\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*)$ было оптимальным для задачи (2.5.4), необходимо существование неотрицательных значений параметров ξ_1, \dots, ξ_N , таких что

$$\int_0^T Q_j(x, t; \xi_j) \rho_0(x) dt - \frac{1}{4\beta_1} \left(T \cdot G_j^2(x, T; \xi_j) - 2 \int_0^T Q_j(x, t; \xi_j) \cdot \left(\int_0^t G_j(x, \sigma; \xi_j) d\sigma \right) dt - \int_0^T G_j^2(x, t; \xi_j) dt \right) \leq$$

$$\leq \int_0^T Q_k(x, t; \xi_k) \rho_0(x) dt - \frac{1}{4\beta_1} \left(T \cdot G_k^2(x, T; \xi_k) - 2 \int_0^T Q_k(x, t; \xi_k) \cdot \left(\int_0^t G_k(x, \sigma; \xi_k) d\sigma \right) dt - \int_0^T G_k^2(x, t; \xi_k) dt \right)^2$$

$j \neq k$, почти всюду для $x \in \Omega_j^*$, $j, k = \overline{1, N}$.

Утверждение 2. Если вектор правых частей условий (2.5.3) удовлетворяет соотношению

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq T \int_{\Omega} \left(\rho_0(x) - \frac{\beta_0 T^2}{6\beta_1} \bar{c}(x) \right) dx, \quad (2.5.23)$$

где $\bar{c}(x) = \min_{i=1, N} \left(\min_{t \in [0, T]} c(x, \tau_i, t) + a_i \right)$, $\forall x \in \Omega$, то множество допустимых решений задачи (2.5.4) не пусто.

Доказательство. Просуммируем ограничения – неравенства (2.5.6):

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) dx dt \leq \sum_{j=1}^N b_j, \quad (2.5.24)$$

и оценим левую часть полученного соотношения с учетом (2.5.21) и того, что $\xi \in \Gamma$:

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) dx dt \leq \int_0^T \int_{\Omega} \left(\rho_0(x) + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \int_{\theta=0}^{\theta} \sum_{i=1}^N (\beta_0 (c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i) \lambda_i(x) d\sigma d\theta \right) dx dt =$$

$$\begin{aligned}
&= T \int_{\Omega} \rho_0(x) dx - \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\int_0^t \int_{\Theta} \sum_{i=1}^N (\beta_0 (c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i) \lambda_i(x) d\sigma d\theta \right) dx dt \leq \\
&\leq T \int_{\Omega} \rho_0(x) dx - \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\int_0^t \int_{\Theta} \sum_{i=1}^N (\beta_0 (c(x, \tau_i, \sigma) + a_i)) \lambda_i(x) d\sigma d\theta \right) dx dt \leq \\
&\leq T \int_{\Omega} \rho_0(x) dx - \frac{\beta_0}{2\beta_1} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\int_0^t \int_{\Theta} \sum_{i=1}^N \left(\min_{v \in [0, T]} c(x, \tau_i, v) + a_i \right) \lambda_i(x) d\sigma d\theta dt \right) dx = \\
&= T \int_{\Omega} \rho_0(x) dx - \frac{\beta_0}{2\beta_1} \frac{T^3}{3} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left(\min_{v \in [0, T]} c(x, \tau_i, v) + a_i \right) \lambda_i(x) dx \leq \\
&\leq T \int_{\Omega} \rho_0(x) dx - \frac{\beta_0}{2\beta_1} \frac{T^3}{3} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \bar{c}(x) \lambda_i(x) dx = T \int_{\Omega} \left(\rho_0(x) - \frac{\beta_0 T^2}{6\beta_1} \bar{c}(x) \right) dx.
\end{aligned}$$

И, таким образом, имеет место неравенство

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) dx dt \leq T \int_{\Omega} \left(\rho_0(x) - \frac{\beta_0 T^2}{6\beta_1} \bar{c}(x) \right) dx \quad (2.5.25)$$

Сравнивая выражения (2.5.24) и (2.5.25), приходим к выводу, что в случае выполнения для вектора $b = (b_1, b_2, \dots, b_N)$ условия (2.5.23) всегда найдется разбиение $\bar{\omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}$ множества Ω из класса Σ_{Ω}^N , удовлетворяющее условиям (2.5.3). В этом случае множество допустимых разбиений задачи (2.5.4) не пусто.

Алгоритм А8

1. Множество Ω покрываем прямоугольной $m \times ml$ сеткой и задаем начальное приближение двойственных переменных $\xi_i^{(0)}$, $i = \overline{1, N}$.

2. Вычисляем $\lambda_i^{(0)}((s, j))$, $i = \overline{1, N}$ в каждом узле (s, j) сетки по формулам (2.5.16), (2.5.17) при $\xi_i = \xi_i^{(0)}$, $i = \overline{1, N}$. Вычисляем управляющую функцию $u^{(0)}((s, j), \cdot)$ и фазовую траекторию $\rho^{(0)}((s, j), \cdot)$ по формулам (2.5.12) и (2.5.13) соответственно при $\lambda = \lambda^{(0)}(\cdot)$.

3. Вычисляем компоненты $g_{\bar{\lambda}}^{\xi_i}$, $i = \overline{1, N}$ обобщенного градиента функции $\bar{\lambda}(\xi)$ в точке $\xi = (\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_N^{(0)})$ при $\lambda(\cdot) = \lambda^{(0)}(\cdot)$, $\xi_i = \xi_i^{(0)}$, $i = \overline{1, N}$, $u^{(0)}((s, j), \cdot)$, $\rho^{(0)}((s, j), \cdot)$.

4. Выбираем начальный шаг $h_0 > 0$ г-алгоритма, находим

$$\xi^{(1)} = \xi^{(0)} + h_0 g_{\bar{\lambda}}^{\xi}(\xi^{(0)})$$

и переходим на второй шаг.

Пусть в результате вычислений после $k, k=1,2,\dots$ шагов алгоритма получены некоторые значения $\xi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}((s,j)), u^{(k-1)}((s,j),\cdot), \rho^{(k-1)}((s,j),\cdot)$ в каждом узле (s,j) сетки.

(k+1)-й шаг:

а) вычисляем значения $\lambda^{(k)}((s,j))$ в узлах сетки по формулам (2.5.16), (2.5.17) при $\xi = \xi^{(k)}$; вычисляем управляющую функцию $u^{(k)}((s,j),\cdot)$ и фазовую траекторию $\rho^{(k)}((s,j),\cdot)$ по формулам (2.5.12) и (2.5.13) соответственно при $\lambda = \lambda^{(k)}(\cdot)$;

б) приближенно вычисляем компоненты вектора обобщенного градиента $g_{\bar{\lambda}}^{\xi}(\xi^{(k)})$ при $\lambda(\cdot) = \lambda^{(k)}(\cdot), \xi_i = \xi_i^{(k)}, i = \overline{1, N}, u^{(k)}((s,j),\cdot), \rho^{(k)}((s,j),\cdot)$;

в) осуществляем $(k+1)$ -й шаг г-алгоритма для максимизации функции $\bar{\chi}(\xi)$, краткая схема которого записывается следующим образом:

$$\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\xi} \tilde{g}_{\bar{\lambda}}^{\xi}(\xi^{(k)}),$$

где B_{k+1}^{ξ} – оператор отображения преобразованного пространства в основное пространство E_N , причем $B_0^{\xi} = I_N, I_N$ – единичная матрица; $\tilde{g}_{\bar{\lambda}}^{\xi} = B_{k+1}^{\xi*} g_{\bar{\lambda}}^{\xi}(\xi^{(k)})$, h_k – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия максимума функции по соответствующему направлению; формулы для пересчета матриц B_{k+1}^{ξ} см. алгоритм А1;

г) проверяем условия

$$\|g_{\bar{\lambda}}^{\xi}(\xi^{(k+1)})\| \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad \|\xi^{(k)} - \xi^{(k+1)}\| \leq \varepsilon. \quad (2.5.26)$$

Если ни одно из условий не выполняется, то осуществляем переход на $(k+2)$ -ый шаг, иначе – на пункт д);

д) полагаем $\lambda^*(\cdot) = \lambda^{(l)}(\cdot), \xi_i^* = \xi_i^{(l)}, i = \overline{1, N}, u^*((s,j),\cdot) = u^{(l)}((s,j),\cdot), \rho^*((s,j),\cdot) = \rho^{(l)}((s,j),\cdot)$, где l – номер итерации, на которой выполняется хотя бы одно из условий (2.5.23) окончания итерационного процесса.

Вычисляем оптимальное значение целевого функционала $I_1(\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$ и, для контроля правильности счета, значение функции (2.5.18) при найденных величинах ξ^* , $\lambda^*(\cdot)$, $u^*(\cdot, \cdot)$, $\rho^*(\cdot, \cdot)$.

Алгоритм А8 описан.

2.5.2. Динамическая задача оптимального разбиения множеств с размещением центров этих подмножеств

Рассмотрим динамическую задачу оптимального разбиения множеств $\Omega \subset R^n$, которая является обобщением модели, рассмотренной выше. В этой задаче требуется не только найти разбиение множества Ω на N подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые), но и разместить центры τ_1, \dots, τ_N этих подмножеств. Кроме того, будем считать, что на состояние управляемой системы влияют некоторые внешние факторы, которые можно описать известной функцией $f(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$.

Математическая постановка задачи

Пусть Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу множество из пространства E_n , Σ_Ω^N – класс всех возможных разбиений множества Ω на N подмножеств.

Введем в рассмотрение функционал

$$J(\gamma) = \beta_0 \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) dx dt + \beta_1 \int_0^T \int_{\Omega} u^2(x, t) dx dt, \quad (2.5.27)$$

где $\gamma = (\bar{\omega}, \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot))$, $\bar{\omega} \in \Sigma_\Omega^N$, $\tau \in \Omega^N$, $u(\cdot, \cdot) \in L_2(\Omega \times [0, T])$, $\rho(\cdot, \cdot) \in C^1(\Omega \times [0, T])$; $T > 0$, $\beta_0, \beta_1 \geq 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$ – заданные параметры; $c(x, \tau_i, t) \equiv c(x, \tau_i)q(t)$, $q(t) \in L_2([0, T])$, $c(x, \tau_i)$ – действительные, ограниченные, определенные на $\Omega \times \Omega$ функции, измеримые по x при произвольном фиксированном векторе $\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$ параметров; $a_i, i = \overline{1, N}$, – заданные неотрицательные величины; функция $\rho(x, t)$ для каждого $x \in \Omega$ является решением задачи Коши

$$\dot{\rho}(x, t) = u(x, t) + f(x, t), \quad t \in [0, T], \quad (2.5.28)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad (2.5.29)$$

и удовлетворяет условиям

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x,t) dx \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.5.30)$$

Функции $f(x,t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ и $\rho_0(x)$ в задаче (2.5.28), (2.5.29) считаются известными.

Под **динамической задачей оптимального разбиения множества** $\Omega \subset E_n$ на подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ с размещением центров этих подмножеств будем понимать следующую задачу.

Задача А10. Необходимо найти разбиение $\bar{\omega}^* = (\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \in \Sigma_{\Omega}^N$, набор точек $\tau^* = (\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N$, управление $u^*(x,t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ и соответствующую фазовую траекторию $\rho^*(x,t)$ (удовлетворяющую задаче (2.5.28) – (2.5.30)), при которых функционал (2.5.27) достигал бы минимального значения.

Оптимальным решением задачи А10 будем называть допустимую четверку $\gamma^* = (\bar{\omega}^*, \tau^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$, которая доставляет минимальное значение функционалу J .

В терминах характеристических функций подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, составляющих допустимое разбиение множества, задача А10 формулируется так:

Задача В10: необходимо найти вектор-функцию $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)) \in \Lambda$, набор $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$, управляющую функцию $u(\cdot, \cdot) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ и соответствующую фазовую переменную $\rho(\cdot, \cdot)$, так, чтобы функционал

$$I(\lambda(\cdot), \tau, \rho(\cdot, \cdot), u(\cdot, \cdot)) = \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \{ \beta_0 [c(x, \tau_i, t) + a_i] \rho(x, t) + \beta_1 u^2(x, t) \} \lambda_i(x) dx dt \quad (2.5.31)$$

достигал минимального значения при условиях

$$\dot{\rho}(x, t) = u(x, t) + f(x, t) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.5.32)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.5.33)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = 1..N, \quad (2.5.34)$$

где множество Λ определяется следующим образом:

$$\Lambda = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ почти всюду для } x \in \Omega \right\}.$$

Описание метода решения задачи

В соответствии с теорией непрерывных задач ОРМ, погружаем множество Λ в симплекс Λ_1

$$\Lambda_1 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) \in [0, 1], i = \overline{1, N}, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ почти всюду для } x \in \Omega \right\},$$

и переходим к задаче бесконечномерного программирования:

$$I(\lambda(x), \tau, u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V_1} \quad (2.5.35)$$

при условиях (2.5.34), где

$$V_1 = \left\{ (\lambda(x), \tau, u(x, t), \rho(x, t)) : \lambda(x) \in \Lambda_1, \tau \in \Omega^N, u(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T]), \right. \\ \left. \dot{\rho}(x, t) = u(x, t) + f(x, t) \quad \forall t \in [0, T], \rho(x, 0) = \rho_0(x) \quad \forall x \in \Omega \right\}.$$

Для задачи (2.5.35), (2.5.34) введем в рассмотрение функционал Лагранжа:

$$h((\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi) = I(\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) + \sum_{i=1}^N \xi_i \left(\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx dt - b_i \right),$$

определенный на $V_1 \times \Gamma$, $\Gamma = \left\{ \xi \in R^N : \xi_i \geq 0, i = \overline{1, N} \right\}$.

Определение [53]. Пару $\left((\lambda^*(\cdot), \tau, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)), \xi^* \right)$ будем называть седловой точкой функционала Лагранжа $h((\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi)$ на $V_1 \times \Gamma$, если для всех $(\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V_1$, $\xi \in \Gamma$ выполняются соотношения

$$h\left((\lambda^*(\cdot), \tau^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)), \xi \right) \leq \\ \leq h\left((\lambda^*(\cdot), \tau^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)), \xi^* \right) \leq h\left((\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi^* \right).$$

Задача, двойственная к задаче (2.5.35), (2.5.34), записывается так:

$$\chi(\xi) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V_1} h\left((\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi \right) \rightarrow \max_{\xi \in \Gamma}. \quad (2.5.36)$$

В случае существования седловой точки функционала Лагранжа (в смысле введенного определения) задачи (2.5.34) – (2.5.36) связаны соотношением двойственности $I_* = \chi^*$, причем верхняя грань целевой функции в двойственной задаче (2.5.36) достигается. И решение пары указанных двойственных задач эквивалентно нахождению седловой точки функционала Лагранжа $h((\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi)$ на множестве $V_1 \times \Gamma$.

Пусть $\xi \in \Gamma$ – произвольный, но фиксированный вектор. Будем рассматривать задачу

$$h((\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V_1}. \quad (2.5.37)$$

Зафиксируем также произвольный вектор $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$. Обозначим через V_1^τ сечение множества V_1 при заданном векторе $\tau \in \Omega^N$.

Нетрудно показать, что при произвольных, но фиксированных значениях $\xi \in \Gamma$ и $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$ допустимый процесс $(\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)) \in V_1^\tau$ будет доставлять минимальное значение функционалу задачи (2.5.37) тогда и только тогда, когда *почти всюду* для $x \in \Omega$ будет выполняться равенство

$$\int_0^T \left[\sum_{i=1}^N [(\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i) \rho^*(x, t) \lambda_i^*(x)] + \beta_1 (u^*(x, t))^2 \right] dt = \\ = \min_{\substack{\lambda(x) \in \Lambda_2, \\ u(x, \cdot) \in L_2([0, T])}} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^N [(\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i) \rho(x, t) \lambda_i(x)] + \beta_1 u^2(x, t) \right] dt,$$

где $\Lambda_2 = \left\{ \lambda \in R^N : \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\}$, функция $\rho(x, t)$ – решение задачи Коши (2.5.28), (2.5.29), соответствующее функции управления $u(x, \cdot)$.

Введем обозначение для функционала Лагранжа, соответствующего фиксированным значениям $\xi \in \Gamma$ и $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$:

$$P_{\xi, \tau}(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) = \\ = \int_0^T \left[\sum_{i=1}^N [(\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i) \rho(x, t) \lambda_i(x)] + \beta_1 u^2(x, t) \right] dt.$$

Для каждой точки $x \in \Omega$ оптимальное решение задачи

$$P_{\xi, \tau}(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \rightarrow \min_{(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \in V_1^{\tau x}}, \quad (2.5.38)$$

где V_1^{tx} – сечение множества V_1^t при фиксированной точке $x \in \Omega$, записывается так:

$$u^*(x, t; \tau, \xi) = \frac{1}{2\beta_1} \int_T^t \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_j) \lambda_i(x) d\sigma; \quad (2.5.39)$$

$$\begin{aligned} \rho^*(x, t; \tau, \xi) = \\ = \rho_0(x) + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \int_T^{\theta} \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_j) \lambda_i(x) d\sigma d\theta + \int_0^t f(x, \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (2.5.40)$$

$$\lambda_i^*(x; \tau, \xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_i(x; \tau_i, \xi_i) = \min_{k=1, \overline{N}} B_k(x; \tau_k, \xi_k), \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (2.5.41)$$

где величина $B_j(x; \tau_j, \xi_j)$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} B_j(x; \tau_j, \xi_j) = & \int_0^T Q_j(x, t; \tau_j, \xi_j) \left(\rho_0(x) + \int_0^t f(x, \theta) d\theta \right) dt - \\ & - \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_0^t \int_0^T Q_j(x, t; \tau_j, \xi_j) Q_j(x, \theta; \tau_j, \xi_j) d\theta d\zeta dt + \\ & + \frac{1}{4\beta_1} \int_0^T \left\{ \int_t^T Q_j(x, \theta; \tau_j, \xi_j) d\theta \right\}^2 dt, \end{aligned}$$

$$Q_j(x, t; \tau_j, \xi_j) = \beta_0(c(x, \tau_j, t) + a_j) + \xi_j, \quad j = \overline{1, N}.$$

Аналитические выражения (2.5.39) – (2.5.41) могут быть получены с помощью принципа максимума Понтрягина, который, учитывая свойства задачи (2.5.38), определяет не только необходимые, но и достаточные условия оптимальности управляемого процесса. Если ввести обозначения

$$G_j(x, t; \tau_j, \xi_j) = \int_0^t Q_j(x, \theta; \tau_j, \xi_j) d\theta, \quad f_0(x, t) = \rho_0(x) + \int_0^t f(x, \theta) d\theta,$$

то выражение для величины $B_j(x; \tau_j, \xi_j)$ преобразуется так:

$$\begin{aligned} B_j(x; \tau_j, \xi_j) = & \int_0^T (Q_j(x, t; \tau_j, \xi_j) f_0(x, t) dt - \frac{1}{4\beta_1} T \cdot G_j^2(x, T; \tau_j, \xi_j) + \\ & + \frac{1}{4\beta_1} \left(2 \int_0^T Q_j(x, t; \tau_j, \xi_j) \cdot \left(\int_0^t G_j(x, \sigma; \tau_j, \xi_j) d\sigma \right) dt + \int_0^T G_j^2(x, t; \tau_j, \xi_j) dt \right). \end{aligned} \quad (2.5.42)$$

С учетом полученного аналитического решения задачи (2.5.37), соответствующего фиксированным векторам $\tau \in \Omega^N$ и $\xi \in \Gamma$, целевая функция двойственной задачи (2.5.36) записывается следующим образом:

$$\chi(\xi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \int_{\Omega} \min_{j=1, N} B_j(x; \tau_j, \xi_j) dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j. \quad (2.5.43)$$

Таким образом, седловая точка $\left((\lambda^*(\cdot), \tau^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)), \xi^* \right)$ функционала Лагранжа задачи (2.5.36) на множестве $V_1 \times \Gamma$ определяется почти всюду для $x \in \Omega$ по следующим формулам:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_i(x; \tau_i^*, \xi_i^*) = \min_{k=1, N} B_k(x; \tau_k^*, \xi_k^*), \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (2.5.44)$$

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2\beta_1} \int_T^t \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i^*, \sigma) + a_i) + \xi_i^*) \lambda_i^*(x) d\sigma; \quad (2.5.45)$$

$$\rho^*(x, t) = f_0(x, t) + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \int_T^{\theta} \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i^*, \sigma) + a_i) + \xi_i^*) \lambda_i^*(x) d\sigma d\theta, \quad (2.5.46)$$

где

$$\begin{aligned} B_j(x; \tau_j^*, \xi_j^*) &= \int_0^T (Q_j(x, t; \tau_j^*, \xi_j^*) f_0(x, t) dt - \\ &- \frac{1}{4\beta_1} \left(T \cdot G_j^2(x, T; \tau_j^*, \xi_j^*) - 2 \int_0^T Q_j(x, t; \tau_j^*, \xi_j^*) \cdot \left(\int_0^t G_j(x, \sigma; \tau_j^*, \xi_j^*) d\sigma \right) dt - \right. \\ &\left. - \int_0^T G_j^2(x, t; \tau_j^*, \xi_j^*) dt \right), \end{aligned}$$

$$Q_j(x, t; \tau_j^*, \xi_j^*) = \beta_0(c(x, \tau_j^*, t) + a_j) + \xi_j^*, \quad G_j(x, t; \tau_j^*, \xi_j^*) = \int_0^t Q_j(x, \theta; \tau_j^*, \xi_j^*) d\theta,$$

а в качестве $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*; \xi_1^*, \dots, \xi_N^*$ выбирается оптимальное решение двойственной задачи (10), приведенной к виду

$$\chi(\xi) \rightarrow \max_{\xi \in \Gamma}, \quad (2.5.47)$$

где

$$\chi(\xi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \chi_1(\tau, \xi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \left(\int_{\Omega} \min_{j=1, N} B_j(x; \tau_j, \xi_j) dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j \right).$$

Сформулируем условия разрешимости задачи (2.5.27) – (2.5.30). Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Если вектор правых частей неравенств (2.5.30) удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq \int_{\Omega} \left(\int_0^T f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0 T^3}{6\beta_1} \bar{c}(x) \right) dx, \quad (2.5.48)$$

где $f_0(x, t) = \rho_0(x) + \int_0^t f(x, \theta) d\theta$, $\bar{c}(x) = \min_{i=1, N} \left(\min_{t \in [0, T]} \min_{\tau \in \Omega^T} c(x, \tau, t) + a_i \right)$, $\forall x \in \Omega$,

то множество допустимых решений задачи (2.5.27) – (2.5.30) не пусто.

Доказательство. Просуммируем ограничения (2.5.30):

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) dx dt \leq \sum_{j=1}^N b_j \quad (2.5.49)$$

и оценим левую часть этого соотношения с учетом выражения (2.5.46) и того, что $\xi \in \Gamma$. Опустив в (2.5.46) пометку * и подставив это выражение в (2.5.44), будем иметь:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) dx dt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \left(f_0(x, t) + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \int_0^{\theta} \sum_{i=1}^N (\beta_0 (c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i) \lambda_i(x) d\sigma d\theta \right) dx dt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} f_0(x, t) dt - \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\int_0^t \int_0^{\theta} \sum_{i=1}^N (\beta_0 (c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i) \lambda_i(x) d\sigma d\theta \right) dx dt \leq \\ & \leq \int_0^T \int_{\Omega} f_0(x, t) dt - \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\int_0^t \int_0^{\theta} \sum_{i=1}^N (\beta_0 (c(x, \tau_i, \sigma) + a_i)) \lambda_i(x) d\sigma d\theta \right) dx dt \leq \\ & \leq \int_0^T \int_{\Omega} f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0}{2\beta_1} \int_0^T \int_0^t \int_0^{\theta} \sum_{i=1}^N \left(\min_{v \in [0, T]} c(x, \tau_i, v) + a_i \right) \lambda_i(x) d\sigma d\theta dt dx = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0}{2\beta_1} \frac{T^3}{3} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left(\min_{v \in [0, T]} \min_{\tau \in \Omega^T} c(x, \tau_i, v) + a_i \right) \lambda_i(x) dx \leq \\ & \leq \int_0^T \int_{\Omega} f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0}{2\beta_1} \frac{T^3}{3} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \bar{c}(x) \lambda_i(x) dx = \end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} \left(\int_0^T f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0 T^3}{6\beta_1} \bar{c}(x) \right) dx.$$

Замечание 1. Если в задаче (2.5.27) – (2.5.30) функции $c_i(x, \tau_i, t)$, $i = \overline{1, N}$, неотрицательны почти всюду для $x \in \Omega$ и $t \in [0, T]$, оценку (2.5.48) можно огрубить до следующей:

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq \int_{\Omega} \left(\int_0^T f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0 T^3}{6\beta_1} \cdot \min_{i=1, N} a_i \right) dx.$$

Теорема. Пусть в задаче (2.5.27) – (2.5.30) множество Ω – выпуклое, замкнутое, ограниченное, функции $c_i(x, \tau_i, t)$, $i = \overline{1, N}$, непрерывны по переменным τ_i на множестве Ω почти всюду для $x \in \Omega$ и $t \in [0, T]$. Кроме того, пусть выполняются условия утверждения. Тогда задача (2.5.27) – (2.5.30) разрешима.

Доказательство. Необходимость выполнения условия утверждения очевидна, так как в противном случае класс допустимых разбиений для задачи (2.5.27) – (2.5.30) может быть пустым, вследствие чего динамическая задача ОРМ станет неразрешимой.

Выше было установлено, что задача (2.5.27) – (2.5.30) эквивалентна задаче (2.5.36), а решение последней, при условии выполнения утверждения, определяется формулами (2.5.44) – (2.5.46). Поэтому вопрос о существовании решения динамической задачи ОРМ с размещением центров подмножеств (2.5.27) – (2.5.30) сводится к исследованию разрешимости задачи (2.5.36), приведенной к виду (2.5.47). Покажем, что при выполнении условий теоремы эта задача имеет решение.

При условии непрерывности функций $c_i(x, \tau_i, t)$ по переменным τ_i , непрерывными на Ω^N по параметрам τ_i , $i = \overline{1, N}$, также будут и функции $\rho(x, t; \tau)$ и $u(x, t; \tau)$, определяемые по формулам (2.5.40) и (2.5.39) соответственно, для всех $x \in \Omega$ и $t \in [0, T]$. Вместе с этими функциями непрерывными на Ω по параметрам τ_i оказываются и функции $Q_i(x, t; \tau_i, \xi_i)$, $G_i(x, t; \tau_i, \xi_i)$, $B_i(x, \tau_i, \xi_i)$, $i = \overline{1, N}$.

Действительно, из того что для произвольной последовательности $\{\tau^{(k)}\} = \{\tau_1^k, \dots, \tau_N^k\}$, сходящейся к произвольной, но фиксированной точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$, справедливо соотношение:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c(x, \tau_i^{(k)}, t) = c(x, \tau_i, t), \quad x \in \Omega \text{ и } t \in [0, T],$$

следует, что при каждом фиксированном векторе $\xi \in \Gamma$, а также $x \in \Omega$ и $t \in [0, T]$, справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} Q_i(x, t; \tau_i^{(k)}, \xi_i) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\beta_0(c(x, \tau_i^{(k)}, t) + a_i) + \xi_i) = \\ &= (\beta_0(\lim_{k \rightarrow \infty} c(x, \tau_i^{(k)}, t) + a_i) + \xi_i) = \\ &= \beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i = Q_i(x, t; \tau_i, \xi_i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} G_j(x, t; \tau_j^{(k)}, \xi_j) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t Q_j(x, \theta; \tau_j^{(k)}, \xi_j) d\theta = \int_0^t \lim_{k \rightarrow \infty} Q_j(x, \theta; \tau_j^{(k)}, \xi_j) d\theta = \\ &= \int_0^t Q_j(x, \theta; \tau_j, \xi_j) d\theta = G_j(x, \tau_j, \xi_j); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} B_j(x; \tau_j^{(k)}, \xi_j) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_0^T (Q_j(x, t; \tau_j^{(k)}, \xi_j) f_0(x, t) dt - \frac{1}{4\beta_1} T \cdot G_j^2(x, T; \tau_j^{(k)}, \xi_j) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4\beta_1} \left(2 \int_0^T Q_j(x, t; \tau_j^{(k)}, \xi_j) \cdot \left(\int_0^t G_j(x, \sigma; \tau_j^{(k)}, \xi_j) d\sigma \right) dt + \int_0^T G_j^2(x, t; \tau_j^{(k)}, \xi_j) dt \right) \right] = \\ &= B_j(x; \tau_j, \xi_j). \end{aligned}$$

Для целевой функции задачи (2.5.47) при произвольном, фиксированном векторе $\xi \in \Gamma$ выполняется равенство:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_1(\tau^{(k)}, \xi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \min_{j=1, N} B_j(x; \tau_j^{(k)}, \xi_j) dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j \right) = \\ &= - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \min_{j=1, N} B_j(x; \tau_j^{(k)}, \xi_j) dx = \\ &= - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} (\lim_{k \rightarrow \infty} B_j(x; \tau_j^{(k)}, \xi_j)) dx = \chi_1(\tau, \xi), \end{aligned}$$

что означает непрерывность функции $\chi_1(\tau, \xi)$ по переменным τ_i , $i = \overline{1, N}$, на множестве Ω^N .

В соответствии с теоремой Вейерштрасса, непрерывная по переменной τ функция $\chi_1(\tau, \xi)$ на выпуклом ограниченном множестве Ω^N достигает своего минимального значения для произвольного фиксированного вектора $\xi \in \Gamma$. Таким образом, внутренняя задача (2.5.47) минимизации функции $\chi_1(\tau, \xi)$ по переменной τ разрешима. Существование же вектора $\xi \in \Gamma$, доставляющего максимум функции $\chi(\xi)$, следует из теоремы двойственности.

Таким образом, показано, что при выполнении условий теоремы задача (2.5.47) разрешима, вследствие чего динамическая задача ОРМ (2.5.27) – (2.5.30) также имеет решение. Теорема доказана.

Для решения задачи максимизации негладкой вогнутой на множестве Γ функции (2.5.43) может быть применен какой-либо известный метод, например, метод типа субградиентного, эллипсоидов [86] и др.

Далее приведен численный алгоритм решения задачи (2.5.47), основанный на методе обобщенного градиентного подъема с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов – г-алгоритм Шора Н.З. При этом от задачи (2.5.47) совершается переход к задаче безусловной максимизации с помощью введения в целевую функцию негладкой штрафной функции множества Γ :

$$\bar{\chi}(\tau, \xi) = \chi_1(\tau, \xi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, (-\xi_i)) \rightarrow \max_{\xi \in E^N} \min_{\tau \in \Omega^N}, \quad (2.5.50)$$

где S – достаточно большое положительное число (значительно большее максимального множителя Лагранжа). О возможности перехода от задачи (2.5.47) к задаче (2.5.50) см., например, в [84].

Алгоритм А9

Не в общности, будем считать, что множество Ω является параллелепипедом Π , стороны которого параллельны осям декартовой прямоугольной системы координат.

1. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение $(\psi, \tau) = (\psi^{(0)}, \tau^{(0)})$. Пусть $\hat{\Pi}$ – множество узлов пространственной сетки.

2. Покрываем отрезок $[0, T]$ сеткой с шагом h_l , обозначим через

$\hat{T} = \left\{ t : t = lh_l, l = \overline{1, n_T} \right\}$ множество узлов сетки по временной переменной.

3. Решаем задачу (2.5.47):

а. Для каждого узла $x \in \hat{\Pi}$ вычисляем значения характеристических функций подмножеств $\lambda_i^{(0)}(x)$, $i = \overline{1, N}$ по формулам (2.5.41), (2.5.42) при значениях $\xi_i = \xi_i^{(0)}$, $\tau_i = \tau_i^{(0)}$, $i = \overline{1, N}$. Вычисляем управляющую функцию $u^{(0)}(x, t)$ и фазовую траекторию $\rho^{(0)}(x, t)$ в каждой точке $t \in \hat{T}$ по формулам (2.5.39) и (2.5.40) соответственно при $\lambda = \lambda^{(0)}(\cdot)$, $\psi = \psi^{(0)}$, $\tau = \tau^{(0)}$.

б. Вычисляем компоненты $\left(g_{\bar{\lambda}}^{\tau_i}, \dots, g_{\bar{\lambda}}^{\tau_N}; g_{\bar{\lambda}}^{\xi_1}, \dots, g_{\bar{\lambda}}^{\xi_N} \right)$ обобщенного градиента функции $\bar{\chi}(\tau, \xi)$ в точке $(\tau, \xi) = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)}; \xi_1^{(0)}, \dots, \xi_N^{(0)})$ при $\lambda(\cdot) = \lambda^{(0)}(\cdot)$, $\xi_i = \xi_i^{(0)}$, $\tau_i = \tau_i^{(0)}$, $i = \overline{1, N}$; $u^{(0)}(\cdot, \cdot)$, $\rho^{(0)}(\cdot, \cdot)$.

с. Выбираем начальный шаг $h_0 > 0$ г-алгоритма и находим

$$\begin{aligned} \xi_i^{(1)} &= \xi_i^{(0)} + h_0 g_{\bar{\lambda}}^{\xi_i}(\xi^{(0)}); \\ \tau_i^{(1)} &= P_{\Omega} \left[\tau_i^{(0)} - \beta_0 g_{\bar{\lambda}}^{\tau_i}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}) \right], \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

где P_{Ω} – оператор проектирования на множество Ω .

Совершаем переход на второй шаг.

Пусть в результате вычислений после k , $k=1, 2, \dots$ шагов алгоритма получены определенные значения $\tau^{(k)}$, $\xi^{(k)}$, $\lambda^{(k-1)}(\cdot)$, $u^{(k-1)}(\cdot, \cdot)$, $\rho^{(k-1)}(\cdot, \cdot)$.

д. $(k+1)$ -й шаг:

а) для каждого узла $x \in \hat{\Pi}$ вычисляем: значения характеристических функций $\lambda^{(k)}(x)$ по формулам (2.5.41), (2.5.42) при $\tau = \tau^{(k)}$; $\xi = \xi^{(k)}$; значения управляющей функции $u^{(k)}(x, t)$ и фазовой траектории $\rho^{(k)}(x, t)$ в точках $t \in \hat{T}$ по формулам (2.5.39) и (2.5.40) соответственно при $\tau = \tau^{(k)}$; $\xi = \xi^{(k)}$; $\lambda = \lambda^{(k)}(\cdot)$;

б) вычисляем приближенно компоненты вектора обобщенного градиента $\left(g_{\bar{\lambda}}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}), g_{\bar{\lambda}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) \right)$ при $\lambda(\cdot) = \lambda^{(k)}(\cdot)$, $u^{(k)}(\cdot, \cdot)$, $\rho^{(k)}(\cdot, \cdot)$;

в) осуществляем $(k+1)$ -й шаг г-алгоритма для решения задачи (2.5.47), краткая схема которого записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\xi^{(k+1)} &= \xi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\xi} \tilde{g}_{\bar{\xi}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}), \\ \tau^{(k+1)} &= P_{\Omega^N} \left[\tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\tau} \tilde{g}_{\bar{\xi}}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) \right],\end{aligned}$$

где B_{k+1}^{ξ} , B_{k+1}^{τ} – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство E^N , $B_0^{\xi} = I_N$, $B_0^{\tau} = I_N$ (I_N – единичная матрица), $\tilde{g}_{\bar{\xi}}^{\xi} = (B_{k+1}^{\xi}) g_{\bar{\xi}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)})$, $\tilde{g}_{\bar{\xi}}^{\tau} = (B_{k+1}^{\tau}) g_{\bar{\xi}}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)})$, h_k – шаговой множитель, выбор которого осуществляется из условия оптимума функции по рассматриваемому направлению. Формулы для пересчета матриц B_{k+1}^{ξ} , B_{k+1}^{τ} см. в алгоритме А1;

г) если условие

$$\left\| (\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - (\tau^{(k+1)}, \xi^{(k+1)}) \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.5.51)$$

не выполняется, то переходим на $(k+2)$ -й шаг алгоритма, иначе – шаг 4.

4. Полагаем $\psi^* = \psi^{(l)}$, $\tau^* = \tau^{(l)}$, $\lambda^*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, $u^*(x, t) = u^{(l)}(x, t)$, $\rho^*(x, t) = \rho^{(l)}(x, t)$, $x \in \hat{\Pi}$, $t \in \hat{T}$, где l – номер итерации, на которой вектор $(\tau^{(k)}, \xi^{(k)})$ удовлетворяет условию (2.5.51) окончания итерационного процесса.

Вычисляем оптимальное значение целевого функционала $I_1(\lambda^*(\cdot), \tau^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$ и, для контроля правильности результата, значение функции (2.5.47) при следующих параметрах: $\xi = \xi^*$, $u = u^*(\cdot, \cdot)$, $\rho = \rho^*(\cdot, \cdot)$, $\lambda(\cdot) = \lambda^*(\cdot)$, $\tau = \tau^*$.

Алгоритм А9 описан.

Замечание 2. Приведенный алгоритм легко адаптировать для решения динамических задач оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств, в которых отсутствуют ограничения типа (2.5.30). При этом функция (2.5.43) не содержит слагаемые с двойственными переменными и, следовательно, отпадает потребность в максимизации указанной функции по переменным ξ_i , $i = \overline{1, N}$, осуществляется лишь ее минимизация по координатам центров подмножеств τ_i , $i = \overline{1, N}$.

Замечание 3. Для решения задачи минимизации функции (2.5.47) по переменной $\tau \in \Omega^N$ не обязательно применять метод проекции градиента. К тому же, в случае, когда множество Ω имеет сложную форму или не является вы-

пуклым, проекцию точки на множество Ω найти сложно или вовсе невозможно. Тогда целесообразно ввести штрафную функцию множества Ω :

$$P(\tau) = \begin{cases} 0, & \forall \tau \in \Omega^N, \\ \infty, & \forall \tau \in \tau \in R^{nN} \setminus \Omega^N, \end{cases}$$

расширить ею целевую функцию (2.5.47) и решать задачу безусловной оптимизации:

$$\bar{\chi}(\tau, \xi) = \chi_1(\tau, \xi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, (-\xi_i)) + P(\tau) \rightarrow \max_{\xi \in R^N} \min_{\tau \in R^{nN}} .$$

Результаты решения модельных задач будут приведены ниже в главе 4.

2.5.3. Нелинейная динамическая задача оптимального разбиения множеств

Вообще говоря, нелинейность задач ОРМ может быть связана, прежде всего, с видом функционала (например, это может быть среднеквадратическое отклонение состояния системы от желаемого, или функционал, содержащий функции $|\cdot|$, $\max(\cdot)$ и другие). Кроме того, нелинейной может оказаться и дифференциальная связь. Несколько подходов к решению таких задач представлены в [42].

Представим здесь одну из математических моделей нелинейных динамических задач оптимального разбиения множеств. Особенностью этой задачи является зависимость скорости изменения состояния некоторой управляемой системы в каждой точке рассматриваемого множества Ω от принадлежности этой точки к определенному подмножеству Ω_i множества Ω и квадратичный критерий качества разбиения.

Постановка задачи

Пусть Ω – ограниченное, измеряемое по Лебегу множество из E_n , Σ_{Ω}^N класс всевозможных разбиений множества Ω на N подмножеств:

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ \bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N} \right\},$$

где $\text{mes}(\cdot)$ означает меру Лебега. Пусть функции $u_i(x, t; \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, – заданные действительные, ограниченные, определенные на $\Omega \times [0, T] \times \Omega$, измеримые по x при соответствующих произвольных векторах параметров

$\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^K) \in \Xi_i$, $\Xi_i \subseteq R^K$, $i = \overline{1, N}$. Далее, используя терминологию теории непрерывных задач ОРМ, векторы τ_i , $i = \overline{1, N}$, будем называть «центрами» подмножеств Ω_i , $i = \overline{1, N}$, хотя в действительности интерпретировать эти точки как центры этих подмножеств можно только в частном случае, когда $K = n$, $\Xi_i \equiv \Omega_i$, $i = \overline{1, N}$.

Введем в рассмотрение класс допустимых управляющих функций:

$$U = \left\{ (u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau) : u(x, t; \bar{\omega}, \tau) = u_i(x, t; \tau_i), \text{ н. в. для } x \in \Omega_i, \tau_i \in \Xi_i, i = \overline{1, N}, \right. \\ \left. \bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N); t \in [0, T] \right\}$$

и функционал

$$F(\gamma) = \iint_{\Omega} \int_0^T (\rho(x, t; u(x, t; \bar{\omega}, \tau)) - \hat{\rho}(x, t))^2 dt dx,$$

где $\gamma = (\bar{\omega}, \tau, u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau), \rho(\cdot, \cdot))$, $T > 0$ – заданный момент времени; $u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau) \in U$, $\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N$, $\tau \in \Xi$, $\Xi = \Xi_1 \times \Xi_2 \times \dots \times \Xi_N$, функция $\rho(x, \cdot) \in C^1([0, T])$ для каждого $x \in \Omega$ является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x, t) &= \alpha \rho(x, t) + u(x, t; \bar{\omega}, \tau), \quad t \in [0, T], \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x), \end{aligned} \quad (2.5.52)$$

причем

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x, t) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.5.53)$$

В выражениях (2.5.52), (2.5.53) α, b_1, \dots, b_N – заданные величины.

Нелинейной динамической задачей оптимального разбиения множества $\Omega \subseteq E^n$ на ее подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ с размещением центров этих подмножеств называется следующая задача [61].

Задача. Необходимо найти такой набор $\gamma^* = (\bar{\omega}^*, \tau^*, u^*(\cdot, \cdot; \bar{\omega}^*, \tau^*), \rho^*(\cdot, \cdot))$, где разбиение $\bar{\omega}^* = (\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \in \Sigma_{\Omega}^N$, параметры $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Xi$, управление $u^*(\cdot, \cdot; \bar{\omega}^*, \tau^*) \in U$ и фазовая траектория $\rho^*(x, t)$ (удовлетворяющая условиям (2.5.52), (2.5.53)), при котором функционал $F(\gamma)$ достигал бы минимального значения.

Коротко задачу будем записывать так:

$$F(\bar{\omega}, \tau, u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau), \rho(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{(u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau), \rho(\cdot, \cdot)) \in \Phi}, \quad (2.5.54)$$

$$\begin{aligned} \Phi = \{ & (\bar{\omega}, \tau, u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau), \rho(\cdot, \cdot)) : \bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N, \tau \in \Xi, u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau) \in U; \\ & \dot{\rho}(x, t) = \alpha \rho(x, t) + u(x, t; \bar{\omega}, \tau), \quad t \in [0, T], \\ & \rho(x, 0) = \rho_0(x); \int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x, t) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N} \}. \end{aligned}$$

Оптимальным решением задачи (2.5.54) будем называть допустимую четверку $\gamma^* = (\bar{\omega}^*, \tau^*, u^*(\cdot, \cdot; \bar{\omega}^*, \tau^*), \rho^*(\cdot, \cdot))$, доставляющую минимальное значение функционалу F .

Замечание 1. Каждое допустимое разбиение $\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N$ и набор параметров $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Xi$ определяет функцию $u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}, \tau) \in U$ такую, что соответствующая задача Коши (2.5.53) имеет единственное решение $\rho(x, t)$ в следующем смысле: $\forall x \in \Omega_i, i = \overline{1, N}$, функция $\rho(x, t)$ – непрерывна по временной переменной $t \in [0, T]$ и удовлетворяет равенству

$$\rho(x, t) = \rho_0(x) + \int_0^t (\alpha \rho(x, \theta) + u_i(x, \theta; \tau_i)) d\theta, \quad t \in [0, T].$$

Замечание 2. Задаче (2.5.54) при условиях $\forall \tau_i \in \Omega_i, i = \overline{1, N}$, можно дать следующую экономическую интерпретацию. Пусть рассматривается сосуществование производителей однотипных товаров (сходных по цене и качеству), потребителями которых является определенный слой общества с примерно одинаковым уровнем доходов, проживающий в одинаковых условиях и имеющих одинаковую шкалу предпочтений. Общим интересом для фирм-производителей однотипного товара является удержание спроса $\rho(x, t)$ на данный товар на определенном уровне $\hat{\rho}(x, t)$, который можно лишь несколько увеличивать или уменьшать со временем, сохраняя при этом главную тенденцию колебаний в окрестности желаемого спроса, при условии учета предельной границы потребления данного товара и производственных мощностей предприятия. Считается, что динамика спроса прямо пропорциональна самому спросу (что отображается в линейном слагаемом дифференциального уравнения (2.5.52), α – коэффициент пропорциональности). Повышение спроса на продукцию может быть вызвано также проведением субъектами производства

определенных действий, например, незначительное сокращение стоимости товара за счет модернизации производства, рекламных акций и т. д. Сила воздействия таких мероприятий i -го производителя описывается функцией $u_i(x, \tau_i, t)$, $i = \overline{1, N}$. Поскольку предполагается сосуществование производителей, не имеет смысла каждому из них «вкладывать средства» в каждого потребителя. Необходимо лишь найти оптимальные местоположения производителей в регионе Ω и распределить потребителей на зоны влияния и обслуживания соответствующих производителей с учетом их общих интересов. Ограничения типа (2.5.53) могут учитывать или предельную границу потребления данного товара, или производственные мощности предприятий.

Замечание 3. Вместо интегральных ограничений типа (2.5.53) на фазовую переменную в задаче (2.5.54) могут быть введены аналогичные ограничения на управляющую функцию:

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_i(x, t; \tau_i) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.5.53')$$

Тогда экономически задача (2.5.54) с такими ограничениями (2.5.53') при условии $\Xi = \Omega^N$ может быть интерпретирована так. Пусть, как и в замечании 2, рассматривается сосуществование производителей однотипных товаров, координаты расположения которых $\tau_i \in \Omega_i$, $i = \overline{1, N}$, могут быть заданы, а могут подлежать определению. Будем считать, что можно спрогнозировать уровень $\hat{\rho}(x, t)$ спроса на данный товар в каждой точке x региона Ω на некоторый период $t \in [0, T]$. Общим интересом для фирм-производителей однотипного товара является удовлетворение этого спроса. Пусть функция $\rho(x, t)$ описывает количество товара у потребителя x в момент времени $t \in [0, T]$. При $t = 0$ эта величина известна и задается функцией $\rho_0(x)$, $x \in \Omega$. Изменение количества товара у потребителя с течением времени происходит за счет потребления товара. Будем считать, что такие изменения пропорциональны самому количеству с коэффициентом $\alpha < 0$, а также могут происходить за счет производства и доставки продукции производителем Ω_i в количестве $u_i(x, \tau_i, t)$ в единицу времени. Ограничения (2.5.53') учитывают мощности самих производителей. Необходимо закрепить каждого потребителя за одним производителем для как можно более полного удовлетворения спроса.

Для корректности поставленной задачи правые части неравенств (2.5.53)

или (2.5.53') должны удовлетворять некоторым условиям, при которых сформулированная задача была бы разрешимой. Эти условия получим в процессе разработки и обоснования метода решения задачи (2.5.54).

Метод и алгоритм решения задачи

Согласно методике решения непрерывных задач ОРМ, от задачи (2.5.54) перейдем к эквивалентной задаче бесконечномерного программирования с булевыми переменными: найти вектор-функцию $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot))$, и набор векторов $\tau \in \Xi$, которые минимизируют функционал

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int \int_{\Omega} \int_0^T (\rho(x, t; \lambda(x), \tau) - \hat{\rho}(x, t))^2 dt dx \rightarrow \min_{\substack{\lambda(\cdot) \in \Lambda \\ \tau \in \Xi}} \quad (2.5.55)$$

при условиях

$$\dot{\rho}(x, t) = \alpha \rho(x, t) + \sum_{j=1}^N u_j(x, t; \tau_j) \lambda_j(x), \quad t \in [0, T], \quad (2.5.56)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\int \int_{\Omega} \int_0^T \rho(x, t) \lambda_i(x) dx dt \leq b_i; \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.5.57)$$

Решение задачи Коши (2.5.56) для каждого $x \in \Omega$ легко получить в аналитическом виде:

$$\rho(x, t; \lambda(x), \tau) = \rho_0(x) + \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_j(x, \theta; \tau_j) d\theta \right) \lambda_j(x), \quad (2.5.58)$$

$$x \in \Omega, t \in [0, T].$$

Учитывая выражение (2.5.58), задачу (2.5.55) – (2.5.57) можно переписать следующим образом:

$$I(\lambda(\cdot), \tau) \rightarrow \min_{\substack{\lambda(\cdot) \in \Lambda \\ \tau \in \Xi}} \quad (2.5.59)$$

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int \int_{\Omega} \int_0^T \left(\sum_{i=1}^N \left(\int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_i(x, \theta; \tau_i) d\theta \right) \lambda_i(x) - \bar{\rho}(x, t) \right)^2 dt dx$$

при условиях

$$\int \int_{\Omega} \int_0^T \left(\rho_0(x) + \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_j(x, \theta; \tau_j) d\theta \right) \lambda_j(x) \right) \lambda_i(x) dt dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.5.60)$$

где $\bar{\rho}(x, t) = \hat{\rho}(x, t) - \rho_0(x)$.

Для упрощения и функционала (2.5.59), и соотношения (2.5.60) воспользуемся следующим свойством элементов множества Λ :

$$\lambda_i^2(x) = \lambda_i(x), \quad \lambda_i(x)\lambda_j(x) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \lambda_i(x), & i = j \end{cases}, \quad \forall x \in \Omega, i, j = \overline{1, N}.$$

Тогда задача (2.5.59), (2.5.60) приобретает следующий вид:

$$I_1(\lambda(\cdot), \tau) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Lambda \times \Xi}, \quad (2.5.61)$$

$$\begin{aligned} I_1(\lambda(\cdot), \tau) = & \\ = & \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left(\int_0^T \left[\int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_i(x, \theta; \tau_i) d\theta \right]^2 - 2\bar{\rho}(x, t) \int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_i(x, \theta; \tau_i) d\theta \right] dt \lambda_i(x) dx + \\ & + \int_{\Omega} \int_0^T (\bar{\rho}(x, t))^2 dt dx \end{aligned}$$

при условиях

$$\int_{\Omega} \left(T\rho_0(x) + \int_0^T \int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_i(x, \theta; \tau_i) d\theta dt \right) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.5.62)$$

Таким образом, от непрерывной динамической задачи оптимального разбиения множества с квадратичным функционалом (2.5.54) удастся перейти к эквивалентной непрерывной линейной задаче ОРМ с ограничениями-неравенствами. К решению полученной задачи (2.5.61) – (2.5.62) можно применить метод, представленный в разделе 2.5.2. При этом для оптимального решения задачи (2.5.61), (2.5.62) нетрудно получить следующие расчетные формулы:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_i(x; \tau_i^*, \xi_i^*) = \min_{k=\overline{1, N}} B_k(x; \tau_k^*, \xi_k^*), \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (2.5.63)$$

где

$$\begin{aligned} B_i(x; \tau_i^*, \xi_i^*) &= \xi_i T\rho_0(x) + \int_0^T \phi_i(x, t; \tau_i^*) \left(\phi_i(x, t; \tau_i^*) - 2\bar{\rho}(x, t) + \xi_i \right) dt, \\ \phi_i(x, t; \tau_i) &= \int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_i(x, \tau_i, \theta) d\theta, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

а в качестве $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*; \xi_1^*, \dots, \xi_N^*$ выбирается оптимальное решение задачи

$$\chi(\xi) = \min_{\tau \in \Xi} \left(\int_{\Omega} \min_{j=1, N} B_j(x; \tau_j, \xi_j) dx + \int_{\Omega} \int_0^T (\bar{\rho}(x, t))^2 dt dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j \right) \rightarrow \max_{\xi \in \Gamma} . \quad (2.5.64)$$

Нелинейную задачу (2.5.4) – (2.5.6) можно также привести к непрерывной линейной задаче ОРМ, основываясь на следующем представлении задачи Коши (2.5.5):

$$\rho(x, t) = \rho_1(x, t) + \rho_2(x, t; \lambda(x), \tau), \quad (2.5.65)$$

где функция $\rho_1(x, \cdot)$ для каждого $x \in \Omega$ является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1(x, t) &= \alpha \rho_1(x, t), \quad t \in [0, T], \\ \rho_1(x, 0) &= \rho_0(x), \end{aligned} \quad (2.5.66)$$

а функция $\rho_2(x, \cdot; \lambda(x), \tau)$ – удовлетворяет задаче Коши

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_2(x, t) &= \alpha \rho_2(x, t) + \sum_{j=1}^N u_j(x, \tau_j, t) \lambda_j(x), \quad t \in [0, T], \\ \rho_2(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.67)$$

Задача (2.5.66) решается однозначно:

$$\rho_1(x, t) = \rho_0(x) e^{\alpha t}, \quad x \in \Omega, t \in [0, T].$$

Решение задачи (2.5.67) записывается следующим образом:

$$\rho_2(x, t) = \sum_{j=1}^N \eta_j(x, t; \tau_j) \lambda_j(x), \quad x \in \Omega, t \in [0, T],$$

где $\eta_j(x, t; \tau_j) = \int_0^t e^{-\alpha \theta} u_j(x, \theta; \tau_j) d\theta, \quad j = \overline{1, N}$.

Задача (2.5.55) – (2.5.57) с учетом представления (2.5.65) и указанных выше свойств множества Λ записывается следующим образом:

$$I_2(\lambda(\cdot), \tau) \rightarrow \min_{\substack{\lambda(\cdot) \in \Lambda \\ \tau \in \Xi}} \quad (2.5.68)$$

при условиях

$$\int_{\Omega} \left(A_0(x) + \int_0^T \eta_i(x, t; \tau_i) dt \right) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.5.69)$$

где функционал $I_2(\lambda(\cdot), \tau)$ имеет вид:

$$I_2(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left(\int_0^T [\eta_i^2(x, t; \tau_i) - 2\bar{\rho}(x, t)\eta_i(x, t; \tau_i)] dt \right) \lambda_i(x) dx + \int_{\Omega} \int_0^T (\bar{\rho}(x, t))^2 dt dx, \quad (2.5.70)$$

$$\bar{\rho}(x, t) = \hat{\rho}(x, t) - \rho_1(x, t), \quad A_0(x) = \rho_0(x) \int_0^T e^{\alpha t} dt, \quad x \in \Omega.$$

Далее, пользуясь методикой решения непрерывных линейных задач оптимального разбиения множеств с ограничениями в форме неравенств и с расположением центров подмножеств, подробно описанной в разделе 2.5.2, можно получить следующие расчетные формулы для характеристических функций подмножеств, составляющих оптимальное разбиение в задаче (2.5.54):

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \int_0^T \nu_i(x, t; \tau_i^*) dt + \xi_i^* A_0(x) = \\ & = \min_{k=1, N} \int_0^T \nu_k(x, t; \tau_k^*) dt + \xi_k^* A_0(x), \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (2.5.71)$$

где $\nu_i(x, t; \tau_i^*) = \eta_i^2(x, t; \tau_i^*) - (2\bar{\rho}(x, t) - \xi_i^*) \eta_i(x, t; \tau_i^*)$, $i = \overline{1, N}$,

а в качестве $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$; ξ_1^*, \dots, ξ_N^* выбирается оптимальное решение задачи

$$\chi(\xi) \rightarrow \max_{\xi \in \Gamma}, \quad (2.5.72)$$

где

$$\chi(\xi) = \min_{\tau \in \Xi} \left(\int_{\Omega} \left[\min_{k=1, N} \int_0^T \nu_k(x, t; \tau_k^*) dt + \xi_k^* A_0(x) \right] dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j \right).$$

Алгоритм решения задачи (2.5.54), записанной в терминах характеристических функций, аналогичен алгоритму, представленному в разделе 2.5.2.

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение. Если константы b_1, \dots, b_N удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^N b_i > S = T \int_{\Omega} \rho_0(x) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} \bar{u}(x, \theta) d\theta dt dx, \quad (2.5.73)$$

где $\bar{u}(x, t) = \max_{i=1, N} \max_{\tau_i \in \Xi_i} u_i(x, t; \tau_i) \forall x \in \Omega, t \in [0, T]$, множество допустимых процессов задачи (2.5.54) не является пустым.

Оценку (2.5.73) можно записать, используя представление (2.5.65), и таким образом:

$$\sum_{i=1}^N b_i > S = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha T} - 1) \rho_0(x) + \int \int_{\Omega} \int_0^T e^{-\alpha \theta} \bar{u}(x, \theta) d\theta dt dx.$$

Далее приведем численный алгоритм, в котором для решения задачи минимизации функции (2.5.64) по набору параметров $\tau \in \Xi$ применяется метод проекции градиента, а условия неотрицательности множителей Лагранжа ξ_i учитываются с помощью функции внешнего штрафа, т. е. решается следующая задача:

$$\bar{\chi}(\tau, \xi) \rightarrow \max_{\xi \in R^N} \min_{\tau \in \Xi}, \quad (2.5.74)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(\tau, \xi) &= \int_{\Omega} \min_{j=1, N} B_j(x; \tau_j, \xi_j) dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j - S \sum_{i=1}^N \max(0, (-\xi_i)) \\ B_i(x; \tau_i, \xi_i) &= \xi_i T \rho_0(x) + \int_0^T \phi_i(x, t; \tau_i) (\phi_i(x, t; \tau_i) - 2\bar{\rho}(x, t) + \xi_i) dt, \\ \phi_i(x, t; \tau_i) &= \int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} u_i(x, \tau_i, \theta) d\theta, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

В случае, когда $\tau_i \in \Omega$, $i = \overline{1, N}$, а множество Ω имеет сложную форму или не является выпуклым, проекцию точки на Ω найти сложно или невозможно. Тогда целесообразно ввести штрафную функцию множества Ω :

$$P(\tau_i) = \begin{cases} 0, & \forall \tau_i \in \Omega, \\ \infty, & \forall \tau_i \in R^n \setminus \Omega, \end{cases}$$

расширить с ее помощью целевую функцию (2.5.74) и решать такую задачу безусловной оптимизации:

$$\bar{\bar{\chi}}(\tau, \xi) = \chi_i(\tau, \xi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, (-\xi_i)) + \sum_{i=1}^N P(\tau_i) \rightarrow \max_{\xi \in R^N} \min_{\tau \in R^{nN}}. \quad (2.5.75)$$

Алгоритм А10

Не теряя общности, будем считать, что множество Ω является параллелепипедом Π , стороны которого параллельны осям декартовой прямоугольной системы координат.

1. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаем на-

чальное приближение $(\tau, \xi) = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)}; \xi_1^{(0)}, \dots, \xi_N^{(0)})$. Пусть $\hat{\Pi}$ – множество узлов пространственной сетки.

2. Покрываем отрезок $[0, T]$ сеткой с шагом h_t , обозначая через $\hat{T} = \{t: t = lh_t, l = \overline{1, n_T}\}$ множество узлов сетки по временной переменной.

3. Для каждого узла $x \in \hat{\Pi}$:

3.1. Вычисляем $\lambda_i^{(0)}(x)$, $i = \overline{1, N}$, по формуле (2.5.63) при значениях $\xi_i = \xi_i^{(0)}$, $\tau_i = \tau_i^{(0)}$, $i = \overline{1, N}$.

3.2. Вычисляем значение фазовой переменной $\rho(x, t; \lambda(x), \tau)$ в каждом узле временной сетки \hat{T} по формуле (2.5.58) при $\lambda_i = \lambda_i^{(0)}$, $\tau_i = \tau_i^{(0)}$, $i = \overline{1, N}$.

4. Вычисляем компоненты $(g_{\bar{z}}^{\tau_1}, \dots, g_{\bar{z}}^{\tau_N}; g_{\bar{z}}^{\xi_1}, \dots, g_{\bar{z}}^{\xi_N})$ обобщенного градиента функции $\bar{\chi}(\tau, \xi)$ в точке $(\tau, \xi) = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)}; \xi_1^{(0)}, \dots, \xi_N^{(0)})$ при $\lambda(\cdot) = \lambda^{(0)}(\cdot)$, $\xi_i = \xi_i^{(0)}$, $\tau_i = \tau_i^{(0)}$, $i = \overline{1, N}$.

5. Выбираем начальный шаг $h_0 > 0$ г-алгоритма и находим:

$$\begin{aligned} \xi_i^{(1)} &= \xi_i^{(0)} + h_0 g_{\bar{z}}^{\xi_i}(\xi^{(0)}); \\ \tau_i^{(1)} &= P_{\Xi_i} \left[\tau_i^{(0)} - h_0 g_{\bar{z}}^{\tau_i}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}) \right], \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

где P_{Ξ_i} – оператор проектирования на множество Ξ_i .

Осуществляем переход на второй шаг.

Пусть в результате вычислений после k , $k = 1, 2, \dots$ шагов алгоритма получены некоторые значения $\tau^{(k)}$, $\xi^{(k)}$, $\lambda^{(k-1)}(x)$.

($k+1$)-й шаг:

6. Для каждого узла $x \in \hat{\Pi}$:

6.1. Вычисляем $\lambda_i^{(k)}(x)$, $i = \overline{1, N}$ по формуле (2.5.63) при значениях $\xi_i = \xi_i^{(k)}$, $\tau_i = \tau_i^{(k)}$, $i = \overline{1, N}$.

6.2. Вычисляем значение фазовой переменной $\rho(x, t; \lambda(x), \tau)$ в каждом узле временной сетки \hat{T} по формуле (2.5.58) при $\lambda_i = \lambda_i^{(k)}$, $\tau_i = \tau_i^{(k)}$, $i = \overline{1, N}$.

7. Вычисляем компоненты $(g_{\bar{\zeta}}^{\tau_1}, \dots, g_{\bar{\zeta}}^{\tau_N}; g_{\bar{\zeta}}^{\xi_1}, \dots, g_{\bar{\zeta}}^{\xi_N})$ обобщенного градиента функции $\bar{\chi}(\tau, \xi)$ в точке $(\tau, \xi) = (\tau_1^{(k)}, \dots, \tau_N^{(k)}; \xi_1^{(k)}, \dots, \xi_N^{(k)})$ при $\lambda(\cdot) = \lambda^{(k)}(\cdot)$, $\xi_i = \xi_i^{(k)}$, $\tau_i = \tau_i^{(k)}$, $i = \overline{1, N}$.

8. Осуществляем $(k+1)$ -й шаг Γ -алгоритма для решения задачи (2.5.74), краткая схема которого записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi^{(k+1)} &= \xi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\xi} \bar{g}_{\bar{\zeta}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}), \\ \tau^{(k+1)} &= P_{\Xi} \left[\tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\tau} \bar{g}_{\bar{\zeta}}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) \right], \end{aligned}$$

где B_{k+1}^{ξ} , B_{k+1}^{τ} – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство E^N , пересчет которых производится по следующим формулам: $B_0^{\xi} = I_N, B_0^{\tau} = I_N$ (I_N – единичная матрица),

$$\begin{aligned} B_{k+1}^{\xi} &= B_k^{\xi} R_{\alpha} \left(\frac{r_k}{\|r_k\|} \right), \quad r_k = g_{\bar{\zeta}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_{\bar{\zeta}}^{\xi}(\tau^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}), \\ B_{k+1}^{\tau} &= B_k^{\tau} R_{\alpha} \left(\frac{\bar{r}_k}{\|\bar{r}_k\|} \right), \quad \bar{r}_k = g_{\bar{\zeta}}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_{\bar{\zeta}}^{\tau}(\tau^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}), \end{aligned}$$

$R_{\alpha}(\zeta)$ – оператор растяжения пространства в направлении ζ с коэффициентом растяжения α , матричная форма которого имеет вид:

$$\begin{aligned} R_{\alpha}(\zeta) &= I_N + (\alpha - 1) \zeta \zeta^T; \\ \bar{g}_{\bar{\zeta}}^{\xi} &= (B_{k+1}^{\xi})^T g_{\bar{\zeta}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}), \quad \bar{g}_{\bar{\zeta}}^{\tau} = (B_{k+1}^{\tau})^T g_{\bar{\zeta}}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}), \end{aligned}$$

h_k – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия оптимума функции по рассматриваемому направлению.

9. Если условие

$$\left\| (\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - (\tau^{(k+1)}, \xi^{(k+1)}) \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.5.76)$$

не выполняется, то $k := k+1$ и осуществляем переход на шаг 6, иначе – переход на шаг 3, если не все точки пространственной сетки просмотрены, или на шаг 10 – если исчерпаны все точки $x \in \hat{\Pi}$.

10. Полагаем $\lambda^*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ для каждой точки $x \in \hat{\Pi}$, $\xi^* = \xi^{(l)}$, $\tau^* = \tau^{(l)}$, где l – номер итерации, на которой вектор $(\tau^{(k)}, \xi^{(k)})$ удовлетворяет условию (2.5.76) окончания итерационного процесса. Вычисляем оптимальное значение

целевого функционала $I_1(\lambda^*(\cdot), \tau^*)$ и, для контроля правильности результата, значение функции (2.5.74) при следующих параметрах: $\xi = \xi^*$, $\lambda(\cdot) = \lambda^*(\cdot)$, $\tau = \tau^*$.

Алгоритм А10 описан.

Замечание 4. Приведенный алгоритм легко адаптировать для решения динамических задач оптимального разбиения множеств, в которых отсутствуют ограничения типа (2.5.53). При этом функция (2.5.64), а значит и (2.5.74), не содержит слагаемые с двойственными переменными и, таким образом, нет необходимости максимизировать указанную функцию по переменным $\xi_i, i = \overline{1, N}$, осуществляется только ее минимизация по параметрам τ_i .

Заключение к главе 2

Таким образом, в главе рассмотрены математические постановки некоторых непрерывных задач оптимального разбиения множеств n -мерного пространства на подмножества с размещением центров подмножеств или с заданными координатами этих центров. Некоторые из указанных задач характеризуются наличием интегральных ограничений-неравенств. Сформулированы условия существования оптимального решения задач ОРМ, методы их решения, редукция к задачам недифференцируемой оптимизации. Приведены алгоритмы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств, составной частью которых является g -алгоритм Шора.

Обобщения непрерывных задач оптимального разбиения множеств на случай наличия нечетких данных или формулировки задачи в условиях риска см., например, в работах [55 – 57].

Далее представим класс задач, являющихся в некотором смысле родственными к непрерывным задачам оптимального разбиения множеств – это непрерывные задачи шарового покрытия ограниченных множеств евклидова пространства. Покажем связь между задачами разбиения и покрытия, а также продемонстрируем возможность применения элементов теории ОРМ к решению задач о шаровом покрытии.

ГЛАВА 3

НЕПРЕРЫВНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ШАРОВОГО ПОКРЫТИЯ И АЛГОРИТМЫ ИХ РЕШЕНИЯ

3.1. Непрерывные задачи оптимального однократного шарового покрытия множеств n -мерного евклидова пространства

В настоящее время задачи об оптимальном шаровом покрытии множеств произвольной структуры и методы их решения интенсивно исследуются украинскими и зарубежными научными школами [6–8, 21, 22, 38, 43, 44, 46, 131, 135 и др.]. В [36] приведены многочисленные публикации, связанные с разработкой и обоснованием методов решения задач о покрытии. Важность и ценность этих задач объясняются, прежде всего, разнообразием приложений в технике, экономике и других областях человеческой деятельности. Не пытаясь исчерпать все, приведем следующие практические задачи:

- задача построения сети из искусственных спутников земли, предназначенных для контроля диапазона круговых орбит;
- задача об оптимальном (с точки зрения минимизации максимально возможного проигрыша) выборе параметров нескольких типов летательных аппаратов, проектируемых для выполнения всего заданного диапазона маневров;
- задача о выборе оптимальной мощности универсальных двигательных установок малой тяги;
- задачи оптимального размещения предприятий, филиалов банков, баз снабжения и др.

Среди теоретических задач, сводящихся к задачам оптимального покрытия, можно выделить, например, задачи Неймана-Пирсона [47,127], глобальной оптимизации [15], построения оптимальных квадратур [87]. Подробное описание указанных задач и применение для их решения γ -алгоритма Шора будет представлено в главе 4.

В данном разделе приведем формулировку непрерывной задачи об оптимальном однократном шаровом покрытии множеств, ее свойства и алгоритмы решения, разработанные на основе методов оптимального разбиения множеств и различных модификаций γ -алгоритма Шора.

3.1.1. Математические постановки непрерывных задач оптимального шарового покрытия и схемы их решения

Пусть Ω – ограниченное, замкнутое, измеримое по Лебегу множество в n -мерном евклидовом пространстве E_n .

Будем называть c -шаром радиуса R с центром в точке τ_i из E_n множество вида $B(\tau_i, R) = \{x \in E_n : c(x, \tau_i) \leq R\}$, где $c(x, \tau_i)$ – некоторая квазиметрика [87].

Будем говорить, что совокупность центров τ_1, \dots, τ_N задает шаровое покрытие множества Ω с радиусом R , если

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(\tau_i, R).$$

Ясно, что радиус R покрытия множества Ω , задаваемого центрами τ_1, \dots, τ_N (вектором τ^N), имеет вид:

$$R(\tau^N) = \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (3.1.1)$$

где $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{E_n \times \dots \times E_n}_N = E_n^N$ (либо, в частном случае,

$$\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N).$$

Очевидно, что покрытие множества Ω , задаваемое вектором $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, с радиусом $R(\tau^N)$, определяемым по формуле (3.1.1), является минимальным c -шаровым покрытием, генерируемым вектором τ^N , т. е. никакие c -шары меньшего радиуса с центрами в τ_1, \dots, τ_N не покрывают Ω [87, 134].

Покрытие минимального радиуса назовем *оптимальным*.

Таким образом, для отыскания оптимального покрытия надо найти *радиус оптимального покрытия*

$$R(\tau_*^N) = \inf_{\tau^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \quad (3.1.2)$$

и вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$, при котором в (3.1.2) достигается нижняя грань.

Приведем три известные непрерывные задачи о c -шаровом покрытии, следуя [87, 134].

Задача III (центры фиксированы). Для заданной системы центров

τ_1, \dots, τ_N из пространства E_n^N (либо из Ω^N) требуется найти минимальное ϵ -сферовое покрытие множества Ω , т. е. определить величину (3.1.1).

Как известно [87, 135], величина радиуса $R(\tau^N)$ покрытия, заданного вектором $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ из Ω^N в задаче **П1**, тесно связана с разбиением Вороного множества Ω , т. е. с таким разбиением множества Ω на измеримые попарно непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, объединение которых есть Ω , и такие, что

$$c(x, \tau_i) = \min_{j=1, \dots, N} c(x, \tau_j), \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Подробно о диаграмме Вороного, ее обобщениях и алгоритмах построения см. в параграфе 4.1.

В [135] показано, что имеет место равенство

$$R(\tau^N) = \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) = \sup_{i=1, \dots, N} \sup_{x \in \Omega_i} c(x, \tau_i).$$

И следовательно, для отыскания решения задачи **П1** можно воспользоваться такой схемой (рис. 3.1):

- 1) найти разбиение Вороного $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, генерируемое вектором $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ из Ω^N ;
- 2) для каждого подмножества Ω_i найти максимальное расстояние от точки τ_i до его границы;
- 3) среди этих максимальных расстояний выбрать наибольшее и принять его в качестве радиуса $R(\tau^N)$ покрытия.

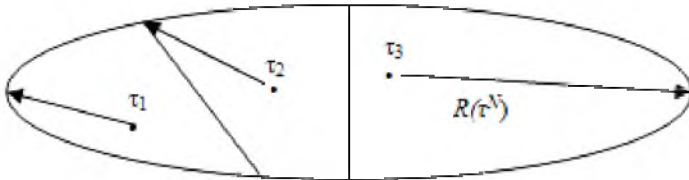


Рис. 3.1. Схема отыскания решения задачи о покрытии с фиксированными центрами

Таким образом, на первом этапе этой схемы решения задачи **П1** возникает задача оптимального разбиения компактного множества Ω на непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ с фиксированными центрами τ_1, \dots, τ_N

этих подмножеств, математически сформулированная в виде задачи **A1** (см. п.2.1.2).

Задача A1: найти вектор-функцию $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x))$, характеризующую разбиение множества Ω на подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, такую что функционал

$$I(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N c(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx$$

достигал бы минимального значения при условиях

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega.$$

Учитывая вышесказанное, для выполнения первого этапа решения задачи о покрытии **П1** можно использовать оптимальное решение задачи **A1**, являющееся разбиением Вороного, имеющее для $i = 1, \dots, N$ и почти всех $x \in \Omega$ вид:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & c(x, \tau_i) = \min_{j=1, \dots, N} c(x, \tau_j), \quad x \in \Omega_i, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Сформулируем теперь более сложную задачу об оптимальном покрытии, в которой, в отличие от задачи **П1**, центры τ_1, \dots, τ_N не фиксированы, а должны быть размещены во множестве Ω так, чтобы получить покрытие минимального радиуса.

Задача П2 (об оптимальном ограниченном ϵ -шаровом покрытии). При заданном числе N центров τ_1, \dots, τ_N найти их размещение в области Ω , обеспечивающее покрытие множества Ω ϵ -шарами минимального радиуса, т. е. найти величину

$$R(\tau^N) = \inf_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (3.1.3)$$

и вектор $\tau^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N \subset E_n^N$, при котором в (3.1.3) достигается значение, равное нижней грани.

Заметим, что если Ω – компактное множество, а функция $c(x, \tau_i)$ – непрерывна, то оптимальное покрытие множества Ω заданным числом N ϵ -шаров одинакового радиуса существует [74].

Приведем далее постановку задачи об оптимальном покрытии, отличающую

щуюся от задачи **П2** тем, что центры τ_1, \dots, τ_N могут размещаться не во множестве Ω , а во всем пространстве E_n .

Задача П3 (об оптимальном c -шаровом покрытии). При заданном числе N центров τ_1, \dots, τ_N найти их размещение в E_n , осуществляющее покрытие множества Ω с минимальным радиусом, т. е. найти величину

$$R(\tau_*^N) = \inf_{\tau^N \in E_n^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (3.1.4)$$

и вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in E_n^N$, при котором в (3.1.4) достигается значение, равное нижней грани.

Заметим, что обобщением задач **П2** и **П3** является задача об оптимальном покрытии, в которой каждый (или все) из центров τ_i может размещаться в соответствующем множестве T_i (выпуклом, замкнутом, ограниченном) из E_n , которое не обязательно совпадает с подмножеством Ω_i .

Схема решения задачи **П2** состоит из первых трех пунктов схемы решения задачи **П1** и 4-го пункта, состоящего в следующем:

4) из всех наборов $(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$ выбрать тот (обозначим его $(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$), для которого радиус $R(\tau_*^N)$ будет минимальным.

Результат четвертого пункта схемы решения задачи **П2** представлен на рис. 3.2.

И, наконец, сформулируем задачу о покрытии, отличающуюся от первых трех задач тем, что число N центров τ_1, \dots, τ_N заранее не задано.

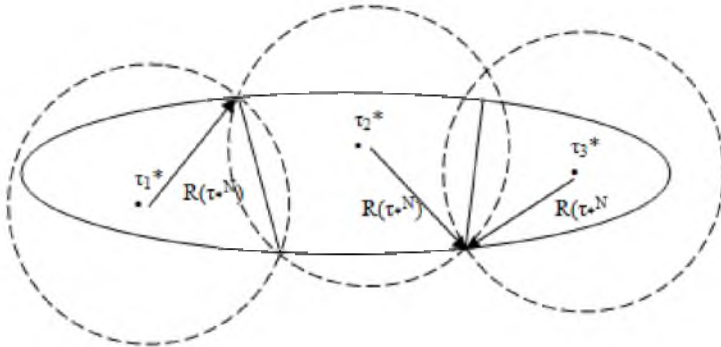


Рис. 3.2. Ограниченное оптимальное c -шаровое покрытие множества Ω при $N = 3$, $\tau^N \in \Omega^N$

Задача П4 (об отыскании минимальной по числу совокупности центров покрытия): при заданном радиусе покрытия R найти минимальную по числу N совокупность центров τ_1, \dots, τ_N , генерирующую покрытие компактного множества Ω .

Задача **П2** отличается от задачи **П3** так же, как задача конечномерной условной оптимизации отличается от задачи конечномерной безусловной оптимизации. Кроме того, как указано в работе [74], задачи **П2** и **П4** в определенном смысле взаимны. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь задачи **П2**.

Далее будем рассматривать задачу **П2**, в которой функция $c(x, \tau_i)$ определяется как одна из метрик:

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^j - \tau_i^j)^2} \text{ — евклидова,} \quad (3.1.5)$$

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_1 = \sum_{j=1}^n |x^j - \tau_i^j| \text{ — манхэттенская,} \quad (3.1.6)$$

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_0 = \max_{j=1, \dots, n} \{ |x^j - \tau_i^j| \} \text{ — Чебышева.} \quad (3.1.7)$$

Поскольку для компактного множества Ω из E_n и непрерывной функции c оптимальное покрытие множества Ω заданным числом N c -шаров одинакового радиуса существует, то задачу (3.1.4) можно переписать следующим образом:

$$R(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N}. \quad (3.1.8)$$

3.1.2. Свойства непрерывной задачи об оптимальном шаровом покрытии. Построение субградиента целевой функции

Приведем некоторые свойства функции $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (3.1.8) для случая евклидовой нормы $c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2$. Обоснование и иллюстрацию этих свойств см. в работе [36].

1. Функция $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ — непрерывна и ограничена на Ω^N .
2. Функция $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (3.1.8) является *липшицевой* на Ω^N , т. е. выполняется неравенство

$$\left| \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) - \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \bar{\tau}_i) \right| \leq L \cdot \|\tau^N - \bar{\tau}^N\|_{E_n^N},$$

где $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, $L > 0$ – константа Липшица, не зависящая от выбора точек τ^N и $\bar{\tau}^N$ из множества Ω^N .

Доказательство см. в работе [135].

3. Функция $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (3.1.8) не выпукла на множестве Ω^N .

4. Из того, что функция $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ удовлетворяет условию Липшица, следует, что она почти всюду дифференцируема [103].

5. Многоэкстремальная функция $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ в зависимости от вида множества Ω может обладать (с точностью до перенумерации центров) конечным или бесконечным числом глобальных минимумов, а также может иметь локальные минимумы.

6. Для непустого компактного множества $\Omega \subset E_n$ и $\tau_i \in \Omega$, $i = 1, \dots, N$, справедливо следующее равенство [135]:

$$R(\tau^N) = \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) = \max_{i=1, \dots, N} \max_{x \in \Omega_i} c(x, \tau_i), \quad (3.1.9)$$

где множества Ω_i , $i = 1, \dots, N$, составляют диаграмму Вороного для множества Ω , т. е.

$$\Omega_i = \{x \in \Omega : c(x, \tau_i) = \min_{j=1, \dots, N} c(x, \tau_j)\} \text{ и } \Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i,$$

причем множества Ω_i – компактны для всех $i = 1, \dots, N$. Тот факт, что множество Ω_i определяется точкой τ_i , иногда будем отражать так $\Omega(\tau_i)$.

7. Если A – непустое компактное множество из E_n , то для любых $y \in E_n$ имеет место равенство [135]:

$$y_0 = \sup_{x \in A} \|y - x\|_{E_n} = \sup_{x \in \text{co}(A)} \|y - x\|_{E_n},$$

где $\text{co}(A)$ – выпуклая оболочка множества A .

8. Пусть T – фиксированное разбиение непустого компактного множества Ω на N непересекающихся подмножеств $T_1, \dots, T_i, \dots, T_N$, т. е. $\bigcup_{i=1}^N T_i = \Omega$, $T_i \cap T_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, N$, T_i – непустые, компактные. Введем для каждого $i = 1, \dots, N$ функции

$$\sigma_i(\tau^N) = \max_{x \in T_i} c(x, \tau_i). \quad (3.1.10)$$

Поскольку в (3.1.10) функции $c(x, \tau_i)$, $i = 1, \dots, N$, определены на

$T_i \times E_n$, непрерывны по x и выпуклы по τ_i на E_n (либо на открытом выпуклом множестве из E_n) при любом $x \in T_i$, (см. [101], теорема 1.9), функции $\sigma_i(\tau^N)$ выпуклы по τ_i на E_n^N . И, согласно той же теореме, субградиентное множество $G_{\sigma_i}(\tau_0^N)$ в точке τ_0^N функции (3.1.10) вычисляется по формуле:

$$G_{\sigma_i}(\tau_0^N) = \overline{\text{co}} \bigcup_{x \in I(\tau_0^N)} G_{c(x, \tau_i)}(\tau_0^N), \quad (3.1.11)$$

где $I(\tau_0^N) = \{x: x \in T_i; c(x, \tau_i^0) = \sigma_i^T(\tau_0^N)\}$; $G_{\sigma_i}(\tau_0^N)$ – субдифференциал функции $c(x, \tau_i)$ по τ_i на E_n при данном $x \in T_i$.

Субградиентное множество $G_{\sigma_i}(\tau_0^N)$ непустое, выпуклое, компактное.

Таким образом, из выпуклости функций $\sigma_i(\tau^N)$ на E_n^N и равенства (3.1.9) следует, что значением целевой функции задачи (3.1.8) является максимум решений конечного числа выпуклых оптимизационных задач.

Заметим, что формуле (3.1.11) T_i – i -е подмножество фиксированного разбиения множества Ω . Если же разбиение множества Ω на подмножества не фиксировано и неизвестно заранее положение точек τ_1, \dots, τ_N , генерирующих оптимальное покрытие множества Ω , а значит, и соответствующее разбиение Вороного, то функция $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (3.1.8) не является, как отмечалось выше, выпуклой на Ω^N вследствие невыпуклости по $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ на Ω^N функции $r(x, \tau^N) = \min_{j=1, \dots, N} c(x, \tau_j)$.

Но, хотя функция $r(x, \tau^N)$ не является выпуклой по τ^N при любом фиксированном $x \in \Omega$, она состоит из выпуклых участков, отвечающих локальным минимумам функции $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$, а, как известно [103], для невыпуклых кусочно-гладких функций **почтиградиент** совпадает с субградиентом к одному из примыкающих к данной точке выпуклых участков.

Приведенная далее лемма дает возможность генерировать монотонно убывающую последовательность значений целевой функции $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (3.1.8) об оптимальном покрытии множества Ω .

Лемма 3.1. Пусть Ω компактное множество из E_n и

$$R(\tau^N) = \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) .$$

Если центры $\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_N$ выбрать из условия

$$\max_{x \in \Omega(\tilde{\tau}_i)} c(x, \tilde{\tau}_i) = \min_{\tau_i \in \text{co}\Omega(\tau_i)} \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tau_i), \quad i = 1, \dots, N ,$$

то $R(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_N) \leq R(\tau_1, \dots, \tau_N)$, т.е. центр $\tilde{\tau}_i$ задает шар, покрывающий $\Omega(\tau_i)$ с минимальным радиусом.

Доказательство леммы см. [36, с. 351 – 352].

3.1.3. Алгоритм оптимального однократного шарового покрытия множества

Приведём численный алгоритм решения непрерывной задачи об оптимальном однократном шаровом покрытии множеств из пространства E_n , разработанный с привлечением элементов теории оптимального разбиения множеств и γ -алгоритма Шора. Этот алгоритм, в отличие от алгоритмов оптимального покрытия, представленных в [13, 74, 87, 130, 131, 135], обладает следующими свойствами:

- он не зависит от геометрических особенностей покрываемого множества и размерности пространства E_n ;

- каждый итерационный шаг его позволяет улучшать положение одновременно всех центров τ_1, \dots, τ_N ;

- его можно использовать для различных квазиметрик c из [87];

- он имеет простую программную реализацию.

Для решения задачи (3.1.5) об оптимальном покрытии, т. е. для отыскания координат центров $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ и значения радиуса покрытия $R(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$, минимизирующих целевую функцию

$$R(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \quad (3.1.12)$$

при условии

$$(\tau_1, \dots, \tau_N) \in (\text{co}\Omega)^N, \quad (3.1.13)$$

необходимо, согласно лемме 3.1, минимизировать по τ_i , $i = 1, \dots, N$, на множестве $\text{co}\Omega(\tau_i)$ функции

$$R_i(\tau_i) = \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tau_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.1.14)$$

Минимизация на множестве $\text{co}\Omega(\tau_i)$ допустима, так как

$$co\Omega = co\bigcup_{i=1}^N \Omega(\tau_i) \supseteq \bigcup_{i=1}^N co\Omega(\tau_i).$$

Поскольку функции $R_i(\tau_i)$ из (3.1.14) недифференцируемы, для решения задачи (3.1.12), (3.1.13) будем применять один из вариантов g -алгоритма Шора.

Как следует из [42], i -я компонента N -мерного вектора обобщенного градиента

$$g_R(\tau^N) = (g_{R_1}^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g_{R_i}^{\tau_i}(\tau^N), \dots, g_{R_N}^{\tau_N}(\tau^N)) \quad (3.1.15)$$

функции $R(\tau^N)$ из (3.1.8) в точке $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ является элементом субградиентного множества функции $R_i(\tau_i)$, $i = 1, \dots, N$, из (3.1.14) в точке τ_i , которое имеет следующий вид:

$$G_{R_i}^{\tau_i}(\tau^N) = co\left\{g_c^{\tau_i}(\tau^N, \bar{x}_i); \bar{x}_i : \|\bar{x}_i - \tau_i\| = \max_{x \in \Omega(\tau_i)} \|x - \tau_i\|\right\}, \quad (3.1.16)$$

где $g_c^{\tau_i}(\tau^N, \bar{x}_i)$ – обобщенный градиент функции $c(\bar{x}, \tau_i)$ в точке $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$, а $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$.

Перейдем от задачи условной минимизации (3.1.12), (3.1.13) по τ^N на множестве $(co\Omega)^N$ к задаче безусловной минимизации по τ^N на E_n^N с помощью введения в целевую функцию (3.1.12) негладкой штрафной функции множества $co\Omega$.

Если $co\Omega = \{x \in E_n : \rho(x) \leq 0\}$, где $\rho(x)$ – функция, задающая границу области $co\Omega$, то негладкую штрафную функцию H для задачи (3.1.12), (3.1.13) можно ввести следующим образом:

$$H(\tau_1, \dots, \tau_N) = S \sum_{i=1}^N \max\{0, \rho(\tau_i)\}, \quad (3.1.17)$$

где S – достаточно большое положительное число.

Заметим, что, как известно [102], функции вида $\max\{0, \rho(\tau_i)\}$, $i = 1, \dots, N$, выпуклы на множестве $co\Omega$, если выпуклы функции $\rho(\tau_i)$ на $co\Omega$, и i -я компонента N -мерного вектора обобщенного градиента

$$g_H(\tau^N) = (g_H^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g_H^{\tau_i}(\tau^N), \dots, g_H^{\tau_N}(\tau^N))$$

функции H в точке $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in E_n^N$ имеет вид

$$g_H^{\tau_i}(\tau_1, \dots, \tau_N) = S \cdot \max\{0, \rho(\tau_i)\} g_\rho^{\tau_i}(\tau_i), \quad (3.1.18)$$

где $g_\rho^{\tau_i}(\tau_i)$ – обобщенный градиент функции $\rho(\tau_i)$ в точке τ_i .

Таким образом, от задачи условной минимизации (3.1.12), (3.1.13) совершается переход к следующей задаче безусловной минимизации:

$$\bar{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = R(\tau_1, \dots, \tau_N) + H(\tau_1, \dots, \tau_N) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in E_n^N}, \quad (3.1.19)$$

где функции $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ и $H(\tau_1, \dots, \tau_N)$ имеют вид (3.1.12) и (3.1.17) соответственно. Обобщенный градиент функции $\bar{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ в точке $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ задается формулой

$$g_{\bar{R}}(\tau^N) = g_R(\tau^N) + g_H(\tau^N), \quad (3.1.20)$$

где i -я компонента N -мерного вектора обобщенного градиента $g_R(\tau^N)$ из (3.1.15) функции $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ в точке $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ – любой элемент множества $G_R^{\tau_i}(\tau^N)$ (см. (3.1.16)), а i -я компонента N -мерного вектора $g_H(\tau^N)$ задается формулой (3.1.18).

Для формулировки алгоритма отыскания оптимального покрытия множества Ω конкретизируем в E_n вид обобщенного градиента $g_c^{\tau_i}(\tau^N, \bar{x})$ для каждой из метрик $c(x, \tau_i)$, определенных формулами (3.1.2) – (3.1.4):

если $c(\bar{x}, \tau_i) = \|\bar{x} - \tau_i\|_2$, то

$$g_c^{\tau_i}(\tau^N, \bar{x}) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(\tau^N, \bar{x}) \\ \dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(\tau^N, \bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{x}^{(1)} - \tau_i^{(1)}}{\|\bar{x} - \tau_i\|_2} \\ \dots \\ -\frac{\bar{x}^{(n)} - \tau_i^{(n)}}{\|\bar{x} - \tau_i\|_2} \end{pmatrix}; \quad (3.1.21)$$

если $c(\bar{x}, \tau_i) = \|\bar{x} - \tau_i\|$, то

$$g_c^{\tau_i}(\tau^N, \bar{x}) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(\tau^N, \bar{x}) \\ \dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(\tau^N, \bar{x}) \end{pmatrix},$$

где каждая компонента вычисляется по формуле:

$$g_c^{\tau_i^{(k)}}(\tau^N, \bar{x}) = \begin{cases} -1, & \text{если } \bar{x}^{(k)} - \tau_i^{(k)} \geq 0, \\ 1, & \text{если } \bar{x}^{(k)} - \tau_i^{(k)} < 0, \quad k = 1, 2, \dots, n; \end{cases} \quad (3.1.22)$$

если $c(\bar{x}, \tau_i) = \|\bar{x} - \tau_i\|_0$, а $n = 2$, то

$$g_c^{\tau_i}(\tau^N, \bar{x}) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(\tau^N, \bar{x}) \\ g_c^{\tau_i^{(2)}}(\tau^N, \bar{x}) \end{pmatrix},$$

где

$$g_c^{\tau_i^{(1)}}(\tau^N, \bar{x}) = \begin{cases} -1, & \text{если } |\bar{x}^{(1)} - \tau_i^{(1)}| \geq |\bar{x}^{(2)} - \tau_i^{(2)}| \wedge (\bar{x}^{(1)} - \tau_i^{(1)}) \geq 0, \\ 1, & \text{если } |\bar{x}^{(1)} - \tau_i^{(1)}| \geq |\bar{x}^{(2)} - \tau_i^{(2)}| \wedge (\bar{x}^{(1)} - \tau_i^{(1)}) < 0, \\ 0, & \text{если } |\bar{x}^{(1)} - \tau_i^{(1)}| < |\bar{x}^{(2)} - \tau_i^{(2)}|, \end{cases} \quad (3.1.23)$$

$$g_c^{\tau_i^{(2)}}(\tau^N, \bar{x}) = \begin{cases} -1, & \text{если } |\bar{x}^{(1)} - \tau_i^{(1)}| < |\bar{x}^{(2)} - \tau_i^{(2)}| \wedge (\bar{x}^{(2)} - \tau_i^{(2)}) \geq 0, \\ 1, & \text{если } |\bar{x}^{(1)} - \tau_i^{(1)}| < |\bar{x}^{(2)} - \tau_i^{(2)}| \wedge (\bar{x}^{(2)} - \tau_i^{(2)}) < 0, \\ 0, & \text{если } |\bar{x}^{(1)} - \tau_i^{(1)}| \geq |\bar{x}^{(2)} - \tau_i^{(2)}|. \end{cases}$$

Перейдем к описанию алгоритма решения задачи (3.1.12), (3.1.13) об оптимальном покрытии множества Ω из E_n .

Для этого область Ω заключим в n -мерный параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, вводя вспомогательную функцию $\rho(x)$, определенную на Π , такую, что

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \Pi \setminus \Omega, \\ 1 & \text{для } x \in \Omega. \end{cases}$$

Тогда в задаче (3.1.12), (3.1.13) в качестве выпуклой оболочки $co \Omega$ множества Ω будет выступать n -мерный параллелепипед Π , а под функцией $c(x, \tau_i)$ будет пониматься функция $c(x, \tau_i) \cdot \rho(x)$, определенная на Π и совпадающая с $c(x, \tau_i)$ на Ω .

Для упрощения записи алгоритма вектор $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ будем обозначать через $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$.

Алгоритм 3.1

Предварительный этап. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой с шагом $\Delta h_j, j = 1, \dots, n$, и задаем начальное положение центров покрытия $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$.

Строим разбиение Вороного $\{\Omega(\tau_1^{(0)}), \dots, \Omega(\tau_N^{(0)})\}$, используя алгоритм решения задачи **A1** (см. п. 2.1.2) ОРМ без ограничений с заданными координатами центров подмножеств.

Для каждого узла сетки отыскиваем $\min_{k=1,2,\dots,N} c(x, \tau_k^{(0)})$ и запоминаем величину k_1 , равное наименьшему значению индекса k , на котором достигается $\min_{k=1,2,\dots,N} c(x, \tau_k^{(0)})$. Значение индекса указывает на принадлежность данного узла сетки подмножеству Ω_{k_1} .

Для каждого подмножества $\Omega(\tau_i^{(0)})$, $i = 1, \dots, N$, находим перебором на сетке все наиболее удаленные точки $\bar{x}_i^{(0)}$ от соответствующего центра $\tau_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, N$. С помощью этих точек по формуле (3.1.20) и одной из формул (3.1.21), (3.1.22), (3.1.23) (в зависимости от метрики $c(x, \tau_i)$), вычисляем вектор-градиент $g_{\bar{R}}(\tau^N)$ в точке $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$, выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$.

Первый шаг алгоритма проводим по формуле:

$$\tau^1 = P_{\Pi}(\tau^{(0)} - h_0 g_{\bar{R}}(\tau^{(0)})),$$

P_{Π} – оператор проектирования на Π .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после k , $k = 1, 2, \dots$, шагов алгоритма получен определенный вектор $\tau^{(k)} = (\tau_1^{(k)}, \dots, \tau_N^{(k)})$.

Опишем **(k+1)-й шаг** алгоритма.

1. По центрам $\tau_1^{(k)}, \dots, \tau_N^{(k)}$ с помощью алгоритма решения задачи **A1** (см. п. 2.1.2) оптимального разбиения множеств строим разбиение Дирихле – Вороного $\{\Omega(\tau_i^{(k)}), i = 1, \dots, N\}$. Для каждого множества $\Omega(\tau_i^{(k)})$, $i = 1, \dots, N$, находим перебором на сетке все наиболее удаленные точки $\bar{x}_i^{(k)}$ от соответствующего центра $\tau_i^{(k)}$.

2. Вычисляем значения $g_{\bar{R}}(\tau)$ по формулам (3.1.20) при $\tau = \tau^{(k)}$.

3. Проводим $(k+1)$ -й шаг γ -алгоритма в Н-форме [102], итерационная формула которого имеет вид:

$$\tau^{(k+1)} = P_{\Pi} \left(\tau^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} g_{\bar{R}}(\tau^{(k)})}{\sqrt{(H_{k+1} g_{\bar{R}}(\tau^{(k)}), g_{\bar{R}}(\tau^{(k)}))}} \right),$$

где H_{k+1} – матрица растяжения пространства с коэффициентом α (его целесообразно брать равным 3) в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, имеющая вид:

$$H_{k+1} = H_k + \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \frac{H_k \Delta_k \Delta_k^T H_k}{(H_k \Delta_k, \Delta_k)},$$

$$\Delta_k = g_{\bar{R}}(\tau^{(k)}) - g_{\bar{R}}(\tau^{(k-1)}).$$

Если из-за округлений счета H_{k+1} перестает быть положительно определенной, заменяем ее единичной матрицей.

Шаг h_k выбираем из условия минимума по направлению спуска.

$$\min_{h>0} \bar{R} \left(\tau^{(k)} - h \frac{H_{k+1} g_{\bar{R}}(\tau^{(k)})}{\sqrt{(H_{k+1} g_{\bar{R}}(\tau^{(k)}), g_{\bar{R}}(\tau^{(k)}))}} \right).$$

4. Если условие

$$\|\tau^{k+1} - \tau^k\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.1.24)$$

не выполняется, переходим к **(k+2)-му шагу** алгоритма, в противном случае – к п. 5.

5. Полагаем $\tau_* = \tau^{(l)}$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (3.1.24) завершения работы алгоритма.

6. Вычисляем значение минимального радиуса покрытия по формуле

$$R(\tau) = \max_{i=1, 2, \dots, N} \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tau_i),$$

при $\tau = \tau_*$.

Алгоритм **3.1** описан.

Замечание к алгоритму **3.1**. Близость точек τ^{k+1} и τ^k в (3.1.24) определяется по одной из формул (3.1.2) – (3.1.4), в зависимости от выбранной в алгоритме **3.1** метрики $c(x, \tau_i)$.

Описанный алгоритм **3.1** из-за невыпуклости целевой функции $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (3.1.8) приводит в пределе к системе центров $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$, являющейся, вообще говоря, точкой локального минимума этой функции.

Будем говорить, что точка $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N$ является точкой *локального минимума* функции $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ из (3.1.8) на множестве Ω^N , если существует $\delta > 0$, такое, что $R(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \leq R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ для всех $\tau^N \in B_\delta(\tau_*^N) \cap \Omega^N$, где $B_\delta(\tau_*^N)$ – окрестность точки $\tau_*^N \in \underbrace{E_n \times \dots \times E_n}_N$, т. е. $B_\delta(\tau_*^N) = \tau^N \in \underbrace{E_n \times \dots \times E_n}_N : \|\tau^N - \tau_*^N\| \leq \delta$, где норма $\|\cdot\|$ – одна из метрик (3.1.2) – (3.1.4).

Другими словами, любое смещение из точки $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ в пределах некоторой окрестности $B_\delta(\tau_*^N)$ не сможет уменьшить радиус покрытия $R(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$.

Если такая окрестность $B_\delta(\tau_*^N)$ совпадает со всем множеством Ω^N , то точка $\tau_*^N \in \Omega^N$ будет точкой *глобального минимума* функции $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (3.1.8).

3.1.4. Решение модельных задач об оптимальном шаровом покрытии множеств со сложной границей. О связи непрерывных задач оптимального шарового покрытия и оптимального разбиения множеств

Прежде чем представить результаты решения конкретных практических задач оптимального покрытия, продемонстрируем работу алгоритма **3.1** для решения тестовых задач об оптимальном покрытии ограниченных двумерных областей, в том числе и областей со сложной границей. Для сравнения в каждой рассматриваемой здесь задаче приведем также и решение задачи оптимального разбиения множеств с отысканием центров подмножеств и укажем, в каких случаях задачи оптимального покрытия и оптимального разбиения множеств имеют одинаковое расположение размещаемых центров.

Как уже отмечалось, для покрытия множества Ω , генерируемого вектором $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ можно использовать оптимальное решение задачи **A1** (см. п. 2.1.2) оптимального разбиения множеств с фиксированными центрами τ_1, \dots, τ_N , являющееся разбиением Вороного.

В силу того, что различны критерии оптимальности задачи **P2** о покрытии множества Ω с минимальным радиусом и задачи **A2** (см. п. 2.1.3) о разбиении

нии этого множества с размещением центров подмножеств, различными, вообще говоря, являются и глобальные оптимальные решения этих задач с точки зрения координат размещаемых центров. Геометрически это отражает тот факт, что в задаче о покрытии **П2** на 4-м этапе ее решения отыскивается центр τ_i^* c -шара наименьшего радиуса, содержащего Ω_i , в задаче же разбиения **A2** (см.п.2.1.3) отыскивается центр тяжести подмножества Ω_i . Приведем несколько примеров, иллюстрирующих этот факт.

Пример 3.1. На рис. 3.3 изображены глобальное оптимальное решение задачи о покрытии **П2** и диаграмма Вороного для этого покрытия, полученные алгоритмом **3.1**.

Минимальный радиус покрытия $R(\tau_*^{\text{п}}) \sim 0,503$. Координаты центров оптимального покрытия:

$$\tau_*^{\text{п}} = (\tau_1^{\text{п}*}, \tau_2^{\text{п}*}, \tau_3^{\text{п}*}) \sim \left\{ \begin{pmatrix} 0,062 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,563 \\ 0,25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,563 \\ 0,75 \end{pmatrix} \right\}.$$

На рисунке они отмечены знаком «•». Диаграмма Вороного для этого покрытия изображена пунктирной линией.

На этом же рис. 3.3 изображено глобальное оптимальное решение задачи **A2** (см.п.2.1.3) разбиения единичного квадрата на три подмножества с размещением центров этих подмножеств. Оптимальные координаты центров подмножеств Ω_1^* , Ω_2^* , Ω_3^* :

$$\tau_*^{\text{п}} = (\tau_1^{\text{п}*}, \tau_2^{\text{п}*}, \tau_3^{\text{п}*}) \sim \left\{ \begin{pmatrix} 0,202 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,686 \\ 0,235 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,686 \\ 0,765 \end{pmatrix} \right\}.$$

На рисунке они отмечены знаком «×». Оптимальные границы между подмножествами изображены сплошной линией.

Как видно из рис. 3.3, радиус оптимального покрытия $R(\tau_*^{\text{п}})$ меньше, чем радиус покрытия $R(\tau_*^{\text{р}})$, получаемый из решения задачи **A2** (см.п.2.1.3). При сравнении значений целевого функционала

$$G(\tau) = \inf_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N} \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) dx$$

задачи **A2** (см.п.2.1.3) ОРМ с размещением центров подмножеств на глобальных оптимальных решениях задач **П2** и **A2**, оказалось, что $G(\tau_*^{\text{п}}) > G(\tau_*^{\text{р}})$. Здесь $G(\tau_*^{\text{п}}) = 0.250$, а $G(\tau_*^{\text{р}}) = 0.237$. И, таким образом, глобальное опти-

мальное решение задачи о разбиении **A2** не является глобальным оптимальным решением задачи о покрытии **П2** и наоборот.

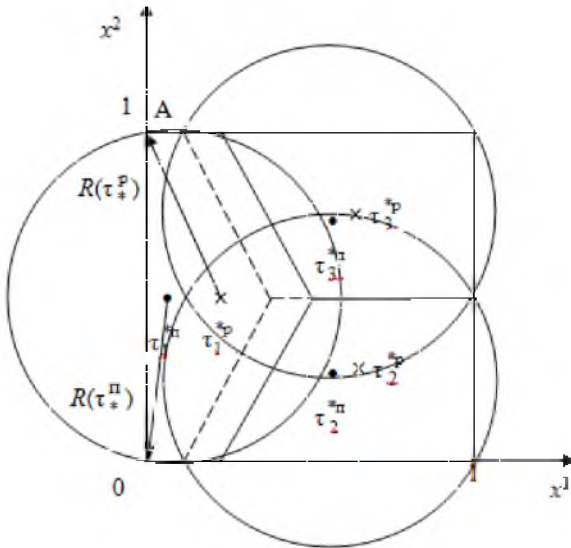


Рис. 3.3. Глобальные оптимальные решения задач П2 и А2 при N=3, $\Omega = \{[0,1] \times [0,1]\}$

Пример 3.2. На рис. 3.4 изображено глобальное оптимальное решение задачи **П2** оптимального покрытия выпуклого множества Ω , граница которого на рисунке выделена жирной линией, а также задачи **A2** (см.п.2.1.3) оптимального разбиения этого множества при $N = 2$.

Получены следующие данные:

– для задачи **П2** координаты центров глобального оптимального покрытия имеют вид:

$$\tau_*^{\text{П}} = (\tau_1^{\text{П}*}, \tau_2^{\text{П}*}) \sim \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,866 \\ 1,000 \end{pmatrix} \right\},$$

на рис. 3.4 они отмечены знаком «*»; минимальный радиус покрытия $R(\tau_*^{\text{П}}) = 1$; диаграмма Вороного для этого покрытия изображена пунктирной линией;

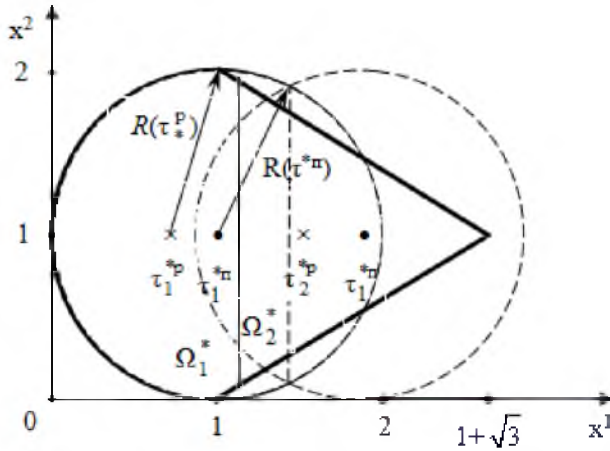


Рис. 3.4. Глобальные оптимальные решения задач П2 и А2 в случае выпуклой области Ω при $N=2$

– для задачи **A2** оптимальные координаты центров подмножеств Ω_1^* , Ω_2^* :

$$\tau_*^p = (\tau_1^{p*}, \tau_2^{p*}) \sim \left\{ \begin{pmatrix} 0,665 \\ 1,000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,703 \\ 1,000 \end{pmatrix} \right\},$$

на рисунке они отмечены знаком «x». Оптимальные границы между подмножествами Ω_1^* и Ω_2^* изображены сплошной линией.

Заметим, что, как видно из рис. 3.4, $R(\tau_*^p) > R(\tau_*^\pi)$. Кроме того, $G(\tau_*^\pi) > G(\tau_*^p)$, $G(\tau_*^p) = 1,688$; $G(\tau_*^\pi) \sim 1,773$.

Пример 3.3. Рассматривается тестовая задача об оптимальном шаровом покрытии невыпуклой области Ω при $N=3$, представленная в работе [131].

На рис. 3.5 изображено глобальное оптимальное разбиение невыпуклой области Ω на три подмножества, полученное с помощью алгоритма решения задачи **A2** (см.п.2.1.3).

Оптимальные координаты центров подмножеств Ω_1^* , Ω_2^* , Ω_3^* для задачи **A2** (см.п.2.1.3) имеют следующие значения:

$$\tau_*^p = (\tau_1^{p*}, \tau_2^{p*}, \tau_3^{p*}) \sim \left\{ \begin{pmatrix} 6,394 \\ 1,107 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,920 \\ 1,435 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2,459 \\ 4,772 \end{pmatrix} \right\}.$$

На рис. 3.5 они отмечены знаком «×». Оптимальные границы между подмножествами изображены сплошной линией.

На этом же рисунке изображено глобальное оптимальное решение задачи о покрытии П2:

- минимальный радиус покрытия $R(\tau_*^n) \sim 2,693$;
- координаты центров глобального оптимального покрытия:

$$\tau_*^n = (\tau_1^{n*}, \tau_2^{n*}, \tau_3^{n*}) \sim \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,8 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\},$$

на рис. 3.5 они отмечены знаком «•». Диаграмма Вороного для этого покрытия изображена пунктирной линией.

Здесь так же $G(\tau_*^n) > G(\tau_*^p)$, $G(\tau_*^p) = 1,688$; $G(\tau_*^n) \sim 49,537$, $R(\tau_*^n) < R(\tau_*^p)$, где $R(\tau_*^p)$ – радиус покрытия, генерируемого решением задачи о разбиении А2 (см.п.2.1.3).

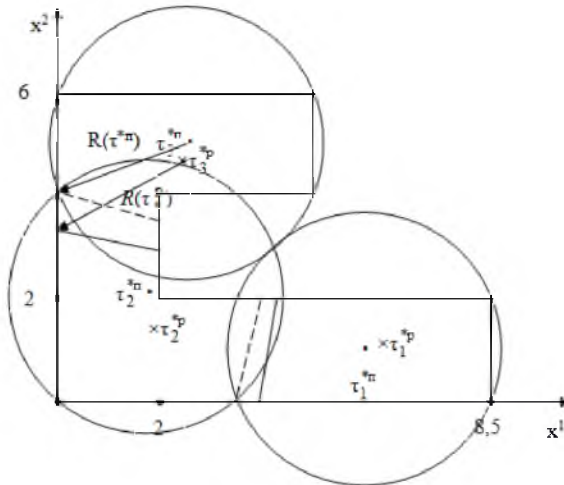


Рис. 3.5. Глобальные оптимальные решения задач А2 и П2 в случае невыпуклой области Ω при $N=3$

Заметим, что в примерах 3.1 – 3.3 функция $c(x, \tau_i)$ – евклидова метрика.

Имеют место частные случаи, когда центры оптимального покрытия (ЦОП) совпадают с центрами оптимального разбиения (ЦОР). Так, например, если $c(x, \tau_i)$ представляет собой метрику Чебышева

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_0 = \max \left\{ |x^{(1)} - \tau_i^{(1)}|, |x^{(2)} - \tau_i^{(2)}| \right\},$$

т.е. в качестве покрывающего c -шара $B(\tau_i, R)$ выступает квадрат, диаграмма Вороного, представленная на рис. 3.6, является одновременно глобальным оптимальным решением и для задачи покрытия **П2**, и для задачи разбиения **A2**.

Обоснование этого факта дает следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть множество Ω и метрика $c(x, \tau_i)$ таковы, что

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N B(\bar{\tau}_i, \bar{R}), \quad (3.1.25)$$

$$mes(B(\bar{\tau}_i, \bar{R}) \cap B(\bar{\tau}_j, \bar{R})) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N}, \quad (3.1.26)$$

где $mes(\cdot)$ – мера Лебега. Тогда вектор $\bar{\tau}^N = (\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_N)$, удовлетворяющий условиям (3.1.25), (3.1.26), является одновременно глобальным оптимальным решением задачи о покрытии **П2** и задачи о разбиении **A2**.

Приведем примеры, иллюстрирующие эту теорему.

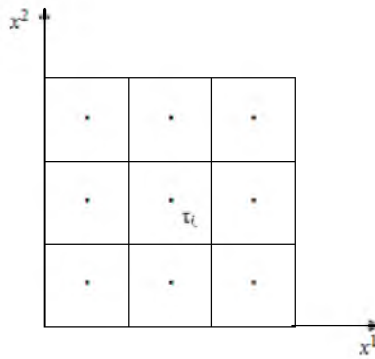


Рис. 3.6. Случай, когда центры оптимального разбиения совпадают с центрами оптимального покрытия

Пример 3.4. Множество $\Omega \subset E_2$ – ромб с диагоналями $2S$ и $2P$, $N = m^2$, где m – любое натуральное число (на рис. 3.7 $m = 2$). Метрика $c(x, \tau_i)$ такова,

что $c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|$. В качестве покрывающего ϵ -шара выступает ромб D с диагоналями $\frac{2S}{m}$ и $\frac{2P}{m}$. Точки $\bar{\tau}_i, i=1, \dots, 4$, являются центрами и оптимального покрытия, и оптимального разбиения.

Пример 3.5. Множество $\Omega \subset E_2$ – правильный треугольник со стороной P ; $N = 4^m$, где m – любое натуральное число (на рис. 3.8 $m = 1$). По Ω можно построить метрику, в которой в качестве покрывающего ϵ -шара выступает правильный треугольник D со стороной $\frac{P}{2m}$. Точки $\bar{\tau}_i, i=1, \dots, 4$, являются одновременно ЦОП и ЦОР.

Пример 3.6. На рис.3.9 множество $\Omega \subset E_2$ – сотообразная мозаика, $N = 7$. По Ω можно построить метрику, в которой покрывающим ϵ -шаром является правильный шестиугольник D , и тогда точки $\bar{\tau}_i, i=1, \dots, 7$, есть одновременно и ЦОП и ЦОР.

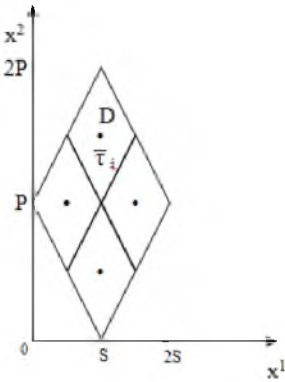


Рис. 3.7. Покрывающий ϵ -шар – ромб

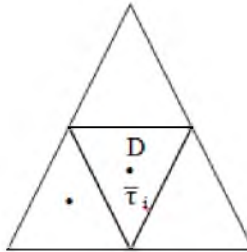


Рис. 3.8. Покрывающий ϵ -шар – правильный треугольник

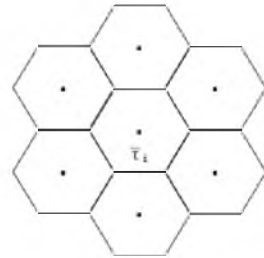


Рис. 3.9. Покрывающий ϵ -шар – правильный шестиугольник

Таким образом, для непрерывной задачи об оптимальном ϵ -шаровом покрытии компактного множества Ω из E_n заданным количеством центров с минимальным радиусом покрытия разработан алгоритм решения **3.1**, основан-

ный на использовании γ -алгоритма Шора. В [36] подробно исследованы свойства задачи оптимального покрытия множества, установлены ее сходство и различие с задачей оптимального разбиения того же множества на непересекающиеся подмножества с размещением центров подмножеств.

К достоинствам алгоритма **3.1** следует отнести, прежде всего, тот факт, что он позволяет находить одновременно все центры оптимального покрытия множеств. Кроме того, покрываемое множество может быть из евклидова пространства произвольной размерности, иметь различные геометрические особенности. Алгоритм также может быть применен к решению дискретных задач оптимального покрытия.

Для программной реализации алгоритма **3.1** следующие параметры могут корректироваться пользователем, либо могут быть заданы «по умолчанию» в программе:

- ε – точность вычисления координат центров покрытия;
- M – количество узлов сетки, аппроксимирующей множество Ω по каждой из координатных осей (вообще говоря, количество узлов по различным координатным осям может быть различным);
- N – число покрывающих c -шаров;
- $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$ – начальное приближение для оптимальных центров покрытия.

В результате численных экспериментов установлено, что алгоритм хорошо работает из любого начального приближения для центров покрытия $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$.

Достоверность численных результатов, полученных алгоритмом **3.1**, подтверждена либо совпадением с уже известными как экспериментальными, так и теоретическими результатами из [13, 74, 87, 131], если такие имелись, либо геометрическими соображениями для новых тестовых примеров.

Алгоритм **3.1**, вообще говоря, отыскивает локальное оптимальное решение задачи об оптимальном шаровом покрытии. Хотя, как правило, в результате численных экспериментов, проведенных для метрик (3.1.5)–(3.1.7), алгоритм приводил к глобальному оптимальному решению.

Алгоритм **3.1** позволяет получить результаты, вообще говоря, для произвольного значения N . Ограничения на N сверху могут быть связаны с возможностями γ -алгоритма Шора. Однако, как установлено в результате численных экспериментов, с увеличением N может увеличиваться и относительная погрешность, с которой получены оптимальные решения.

3.2. О некоторых практических задачах оптимального шарового покрытия

3.2.1. Размещение базовых станций при проектировании сетей беспроводной связи

Беспроводные сети (БС), насчитывающие сегодня сотни базовых станций, стали обычным явлением человеческой жизнедеятельности. В случае недостаточной мощности радиосигнала, который затухает, например, по мере удаления абонента от базовой станции и увеличения застроенности территории, при использовании мобильной связи могут возникать проблемы сбоев соединения, прерывания связи, выпадения слов из разговора и т.п. В настоящее время актуальным остается вопрос об оптимизации беспроводных сетей, что подразумевает под собой решение различных связанных между собой задач, таких как, например, задача оптимального размещения базовых станций (БС) на заданной территории, которая, в свою очередь, может иметь несколько содер­жательных постановок:

Задача БС1. Требуется определить места расположения базовых станций в заданном количестве на заданной территории так, чтобы обеспечить наилучшее значение некоторого критерия качества размещения.

Задача БС2. Определить минимальное количество базовых станций и координаты их расположение на заданной территории, обеспечивающее заданное значение критерия качества.

Задача БС3. Пусть на заданной территории имеется некоторое количество базовых станций, характеристики и координаты которых известны. Необходимо определить оптимальное число и места расположения дополнительных базовых станций, размещаемых на этой территории с целью обеспечения требуемого значения качества размещения.

Существует целый ряд показателей качества, с помощью которых можно оценить работу сети беспроводной связи в целом или отдельных ее составляющих [10]. Такими показателями могут быть, например, стоимость системы, ее пропускная способность, требования соответствия экологическим стандартам, уровень сигнала.

В математических формализациях приведенные выше задачи сводятся к различным задачам оптимального покрытия и размещения. Причем, каждая из них, в зависимости от исходных предположений, может быть рассмотрена в дискретной, непрерывной либо смешанной постановке.

Далее представим математические модели задач оптимального размещения БС, построенных и подробно изученных в работе [24]. Эти задачи харак-

теризуются общим критерием качества размещения, а различаются учетом дополнительных предположений, таких как:

- подключаются все заданные клиенты;
- каждый клиент подключается только к одной БС;
- к каждой станции может быть подключено только определенное, наперед заданное количество абонентов, зависящее от ее возможностей, заранее известных.

Критерием качества размещения БС выступает затухание радиосигнала, для вычисления уровня которого используется следующая формула:

$$PL = 69,55 + 26,16 \lg f_{mh} - 13,82 \lg h_1 - a(h_2) + (3.2.1) \\ + (44,9 - 6,55 \lg h_1) \lg d + S,$$

где

$$d = \sqrt{(\tau_1 - x_1)^2 + (\tau_2 - x_2)^2}, \\ a(h_2) = (1,1 \lg f_{mh} - 0,7)h_2 - (1,56 \lg f_{mh} - 0,8), \\ S = 30 - 25 \lg B_l, \text{ где } 0 < B_l < 51\%.$$

Здесь f_{mh} – частота, МГц; τ_1, τ_2 – координаты местоположения БС, x_1, x_2 – координаты местоположения покрываемого абонента, h_1 – высота подвеса антенны БС, м; h_2 – высота антенны приемника в м; d – расстояние, км.

Формула (3.2.1) действует в предположении, что 15% площади застроено зданиями.

Выбор функции (3.2.1) в качестве критерия размещения обусловлен следующими соображениями.

Во-первых, очевидно, что уровень радиосигнала зависит от расстояния между передающей станцией и пунктом приема, но, поскольку эта зависимость не является линейной, использование только функции расстояния может привести к неверному (неоптимальному) варианту размещения БС.

Во-вторых, распространение сигнала зависит не только от расстояния между объектами, но и от многих других параметров, в частности от высоты, на которой расположена передающая станция, что учитывает приведенная выше формула.

Задачи размещения БС в непрерывной постановке [24].

Задача БС4. Пусть имеется некоторое множество Ω потребителей услуг сотовой связи. Известен спрос $\rho(x)$ на услуги в каждой точке x области Ω .

Необходимо разместить в области Ω N базовых станций заданной мощности $b_j, j = 1, \dots, N$, и разбить множество Ω на зоны обслуживания каждой станцией $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ таким образом, чтобы все клиенты были подключены (каждый клиент обслуживается только одной БС), выполнялись ограничения на мощность каждой станции, и обеспечивалось минимальное затухание радиосигнала. Математическая модель поставленной задачи будет иметь вид:

$$\max_{j=1, \dots, N} \max_{x \in \Omega_j} PL(x, \tau^j) \rightarrow \min_{(\tau^1, \dots, \tau^N) \in \Omega^N},$$

$$\bigcup_{j=1}^N \Omega_j = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\int_{\Omega_j} \rho(x) dx \leq b_j, \quad j = \overline{1, N}.$$

Задача БС5. Пусть имеется некоторое множество Ω потребителей услуг сотовой связи. Известен спрос $\rho(x)$ на услуги в каждой точке x области Ω . Необходимо разместить в этой области минимальное количество базовых станций заданной мощности $b_j, j = 1, 2, \dots, N$, и разбить множество Ω на зоны обслуживания каждой станцией $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ так, чтобы все клиенты были подключены (каждый клиент обслуживается только одной БС), выполнялись ограничения по мощности, и обеспечивалось заданное затухание радиосигнала.

Пусть m – число устанавливаемых базовых станций. Тогда математическая постановка задачи будет иметь вид:

$$m \rightarrow \min,$$

при ограничениях

$$\bigcup_{j=1}^m \Omega_j = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\int_{\Omega_j} \rho(x) dx \leq b_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad \max_{x \in \Omega} \min_{j=1, \dots, N} PL(x, \tau^j) \leq P.$$

Задачи **БС4** и **БС5** представляют собой непрерывные задачи оптимального покрытия при ограничениях. Результаты решения этих задач при конкретных исходных данных с помощью алгоритмов **3.1** и **3.2**, разработанных на основе метода ОРМ, приведены в [93]. В этой же работе авторы представляют задачу оптимального размещения БС в смешанной постановке, как наиболее приемлемую с практической точки зрения модель, в которой учитывается, что

потребители непрерывно заполняют некоторую область, а множество возможных мест расположения базовых станций дискретно и конечно.

Задача 6. Пусть множество $J = \{1, 2, \dots, m\}$ соответствует перечню возможных пунктов размещения базовых станций $\tau^j, j = 1, \dots, m$. В любом из пунктов $\tau^j, j = 1, \dots, m$, можно установить базовую станцию, величина $b_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m$, задает ее мощность – максимальное количество абонентов, которое она может обслужить одновременно. Потребители мобильной связи распределены неравномерно в области Ω , спрос на услуги в каждой точке x области Ω известен и описывается функцией $\rho(x)$.

Задача состоит в том, чтобы найти подмножество $S \subseteq J, |S| = N$, номеров пунктов, в которых следует установить станции БС, а также разбить множество потребителей Ω на зоны $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ их обслуживания так, чтобы обеспечить всех потребителей качественной мобильной связью с учетом ограниченной мощности устанавливаемых станций. Под качеством связи будем, как и выше, понимать минимальное затухание радиосигнала, вырабатываемого каждой станцией.

Математически задача записывается так:

$$\max_{i=1, m} \max_{x \in \Omega_i} PL(x, \tau^i) s_i \rightarrow \min_s$$

$$s_j = \begin{cases} 1, & \text{если в } j\text{-ом пункте устанавливается БС} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^m s_j = N,$$

$$\bigcup_{j=1}^N \Omega_j = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad \int_{\Omega_j} \rho(x) dx \leq b_j, j = \overline{1, N}.$$

Алгоритм решения этой задачи, разработанный на основе синтеза методов оптимального покрытия, описанных выше, и методов комбинаторной оптимизации, представлен в работе [93].

Задача **БС6** легко обобщается на случай, когда на заданной территории имеется множество $S^1 = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M\}$ базовых станций, расположение которых известно множество, и множество $J = \{1, 2, \dots, m\}$ задает перечень возможных пунктов размещения дополнительных базовых станций соответ-

вующей мощности. Требуется определить минимальное количество станций, которые необходимо дополнительно установить с целью обеспечения всех потребителей качественной мобильной связью, при условии, что каждый потребитель закреплен только за одной станцией.

Следует заметить, что расчет угасания радиосигнала может проводиться по другим, отличным от (3.2.1), формулам. Например, в условиях плотной городской застройки лучше применять формулу Уолта-Бертони [9, 78, 156].

Для решения дискретных аналогов вышеприведенных задач могут быть применены методы дискретной или комбинаторной оптимизации, генетические и гибридные алгоритмы [см., например, 119, 129, 133]. Однако, в реальных условиях, когда количество абонентов, хотя и конечно, но очень велико, решение таких задач может быть затруднительно ввиду их больших размерностей, тогда целесообразным является переход к непрерывным задачам оптимального покрытия и размещения. Некоторые подходы к решению задач покрытия и размещения, отличные от тех, что разработаны на основе методов ОРМ, представлены в работах [74, 20, 36, 46, 115, 116, 128].

3.2.2. Оптимизация освещения производственных помещений

В работе [94] подробно описаны и решены задачи оптимального размещения источников света в следующих постановках.

Задача O1. Пусть имеется заданное количество источников света, характеристики которых известны. Необходимо разместить их так, чтобы обеспечилась максимальная освещенность помещения.

Задача O2. Пусть имеется заданное количество источников света. Необходимо определить оптимальное их размещение и мощность с целью обеспечения нормативного освещения в каждой точке помещения.

Задача O3. Необходимо определить оптимальное размещение источников света данного типа в производственном помещении, их количество и мощность с целью обеспечения нормативного освещения в каждой точке помещения.

Заметим, что задача **O1** является частным случаем задачи **O2**, а задача **O3** может быть сведена к последовательному решению ряда задач **O2**. Поэтому здесь представим математическую модель задачи **O2** и покажем, что эта задача является частным случаем задачи об оптимальном шаровом покрытии множеств, для решения которой могут быть применены алгоритмы **3.1** и **3.2**.

Определять освещенность в любой точке помещения можно как в горизонтальной, так и в вертикальной или наклонной плоскостях. Далее будем рассматривать освещенность только в горизонтальной плоскости.

Пусть Ω – заданное множество из пространства E_2 . Необходимо разместить n центров τ_1, \dots, τ_n (проекция точек расположения источников света в помещении) в области Ω таким образом, чтобы обеспечить наилучшее освещение в каждой точке области.

Поскольку освещение конкретного участка пропорционально расстоянию от источника света, в качестве критерия размещения предлагается рассматривать максимальное расстояние от точки области Ω до источника света:

$$R(\tau^N) = \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i),$$

где $c(x, \tau_i) = \sqrt{(x^1 - \tau_i^1)^2 + (x^2 - \tau_i^2)^2}$ – расстояние от точки x помещения до проекции источника света τ_i на освещаемую поверхность.

Для учета требований нормативной освещенности в каждой точке производственного помещения введем дополнительное ограничение

$$\sum_{i=1}^n E_i(x) \geq N \quad \forall x \in \Omega,$$

где $\sum_{i=1}^n E_i$ – суммарная освещенность от всех источников света в помещении;

N – норма освещенности.

Освещенность в каждой точке производственного помещения задается формулой:

$$E = \frac{I \cos \alpha \sin^2 \alpha}{d^2}.$$

Здесь d – расстояние от точки помещения до проекции источника света на освещаемую поверхность, м; I_α – сила света по направлению к точке, кДж; α – угол между нормалью к поверхности, которой принадлежит точка, и лучом

$\alpha = \arctg \frac{p}{h}$, где p – расстояние от точки до проекции оси симметрии светильника на плоскость, ей перпендикулярную и проходящую через точку, м; h – высота подвеса светильников, м.

Освещенность, создаваемая в точке источником света τ_i , можно описать следующим образом:

$$E_i = \frac{I_\alpha \cos \alpha \sin^2 \alpha}{d^2},$$

где I_α – известное значение силы света для заданных значений α и различных типов светильников;

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{h}{\sqrt{h^2 + c_i^2(x, \tau_i)}}; \quad \sin \alpha = \frac{c_i(x, \tau_i)}{\sqrt{h^2 + c_i^2(x, \tau_i)}}; \\ d &= c(x, \tau_i) = \sqrt{(x^1 - \tau_i^1)^2 + (x^2 - \tau_i^2)^2}. \end{aligned}$$

И, таким образом, суммарная освещенность в точке от всех источников света может быть выражена формулой:

$$E = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \frac{I_{\rho/h} h}{(h^2 + \sqrt{(x^1 - \tau_i^1)^2 + (x^2 - \tau_i^2)^2})^{3/2}}.$$

Тогда требование соблюдения заданной освещенности помещения запишется в форме неравенства

$$\sum_{i=1}^n E_i \geq N \quad \text{или} \quad \frac{I_{\rho/h} h}{(h^2 + \sqrt{(x^1 - \tau_i^1)^2 + (x^2 - \tau_i^2)^2})^{3/2}} \geq N,$$

а поставленная задача может быть математически сформулирована следующим образом.

Требуется при заданном числе N центров τ_1, \dots, τ_N найти такое их размещение в области Ω , при котором достигается нижняя грань величины

$$R(\tau_*^n) = \inf_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, n} c(x, \tau_i)$$

и выполняется ограничение

$$\sum_{i=1}^n \frac{I_{\rho/h} h}{(h^2 + \sqrt{(x^1 - \tau_i^1)^2 + (x^2 - \tau_i^2)^2})^{3/2}} \geq N \quad \forall x \in \Omega.$$

Очевидно, что полученная задача является задачей об оптимальном ограниченном c -шаровом покрытии (задача **П2**) с дополнительным ограничением, и для ее решения может быть применен алгоритм оптимального покрытия

множества, основанный на использовании методов оптимального разбиения, методов штрафных функций и τ -алгоритма Шора (алгоритм **3.2**).

В работе [94] приведены результаты решения задачи **O2** для конкретного производственного объединения. Там же показано, что при одинаковых исходных данных применение алгоритма оптимального покрытия множества, основанного на методах оптимального разбиения и τ -алгоритме Шора, позволяет получить координаты расположения источников света, обеспечивающие лучшие показатели освещенности всех точек заданной области по сравнению с другими методами решения таких задач.

3.3. Непрерывные задачи оптимального многократного шарового покрытия множеств и их практические приложения

Задачи многократного шарового покрытия области возникают в самых разнообразных сферах человеческой деятельности, от телекоммуникаций до медицины. Приведем лишь несколько приложений таких задач:

- *навигационные системы* GPS, Глонасс, Галилео (в разработке) используют именно многократное покрытие зон обслуживания – с целью максимального уточнения координат (чем больше кратность покрытия, тем больше спутников находится в одной зоне и тем точнее и быстрее работает навигация);

- *размещение поворотных видеокамер противопожарной системы наблюдения за лесными массивами*. Для надежного и точного определения координат возможных очагов возгорания покрывать наблюдаемую зону кругами обзора видеокамер необходимо как минимум двукратно;

- *размещение центров служб чрезвычайных ситуаций, пожарных служб, правоохранительных органов* в пределах района;

- *размещение пунктов приема вторсырья* (пластик, металл, бумага) – с целью стимулирования населения соблюдать санитарные нормы и перерабатывать мусор, пункты приема мусора должны быть доступны и располагаться недалеко, даже в случае, если ближайший будет закрыт;

- *размещение банкоматов* – задача минимум двукратного покрытия некоторой территории, занимаемой клиентами банка (в случае поломки или недостатка денег в ближайшем банкомате, желательно, чтобы другой банкомат располагался не слишком далеко);

- *размещения станций сотовой связи стандарта GSM* – задача минимум троекратного оптимального покрытия. За цель преследуется непрерывное обслуживание абонента в случае перегрузки сети в его секторе – чем

больше станций находится в зоне его обслуживания, тем вероятнее, что хотя бы одна из них не будет перегружена и сможет его обслужить, лишь в этом случае связь не оборвется;

- *размещения источников света в производственных помещениях* – необходимо обеспечить равномерное качественное освещение с наименьшими затратами с предвидением возможности перегорания некоторых ламп;

- *задача изготовления ткани для гимнастических /медицинских/ спортивных биндажей* – с целью распределения равномерной нагрузки на мышцы элементы с повышенным коэффициентом упругости должны располагаться в ткани так, чтобы покрывать всю поверхность, а покрытие в несколько слоев увеличит срок службы изделия, т.к. снизит вероятность потери тканью упругих свойств;

- *задача размещения пунктов хранения химических реагентов для нефте- или газодобычи*, в которой важно разместить эти пункты так, чтобы как можно быстрее доставлять реагенты в нужную точку;

- *задача изготовления полиэтиленовых пакетов* аналогична предыдущей – зоны уплотнений должны располагаться равномерно и в несколько покрытий, чтобы выдерживать большие грузы.

Непрерывные задачи о многократном шаровом покрытии ограниченной области возникают при математическом описании некоторых задач теоретической механики, математической физики и т.д.

Все перечисленные задачи объединяет общее условие: если «сервисный центр» не может по каким-либо причинам удовлетворить потребность в той или иной услуге, то другой центр должен быть как можно ближе к клиенту и включать этого клиента (потребителя) в зону своего обслуживания.

Приведем далее строгие математические формулировки задач многократного покрытия ограниченной в E_n области шарами минимального радиуса, используя математический аппарат теории непрерывных задач оптимального покрытия множеств, и представим конструктивные алгоритмы решения таких задач. При этом, следуя [42], при определении расстояний между конкретными объектами будем использовать функции, являющиеся некоторыми метриками в пространстве E_n , которому принадлежит покрываемое множество, такие как евклидова, манхэттенская, метрика Чебышева, взвешенная l_p -метрика и другие. Выбор метрики зависит от свойств множества и от существующих связей центра с «клиентами».

3.3.1. Математическая постановка задачи многократного оптимального покрытия

Пусть Ω – ограниченное, замкнутое множество в пространстве E_n . Как и в параграфе 3.1, пусть множество $B(\tau_i, R) = \{x \in E_n : c(x, \tau_i) \leq R\}$ – c -шар радиуса R с центром в точке τ_i из E_n , $c(x, \tau_i)$ – некоторая квазиметрика.

Будем говорить, что совокупность центров τ_1, \dots, τ_N задает **k -кратное шаровое покрытие множества Ω с радиусом \hat{R}** , если

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(\tau_i, \hat{R}),$$

и для каждой точки $x \in \Omega$ выполняется условие $x \in \bigcap_{j=1}^l B(\tau_{i_j}, \hat{R})$, $i_j \in \{1, 2, \dots, N\}$, $k \leq l \leq N$.

Радиус \hat{R} k -кратного покрытия множества Ω , которое задается центрами τ_1, \dots, τ_N (вектором τ^N), определяется так:

$$\hat{R}(\tau^N) = \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (3.3.1)$$

при этом для каждой точки $x \in \Omega$ выполняется условие

$$x \in \bigcap_{j=1}^l B(\tau_{i_j}, \hat{R}), \quad k \leq l \leq N, \quad i_j \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (3.3.2)$$

где $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in E_n^N$ (либо, в частном случае, $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$).

k -кратное покрытие множества Ω , задаваемое вектором $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, с радиусом $\hat{R}(\tau^N)$, который определяется по формуле (3.3.1) и удовлетворяет условиям (3.3.2), является **минимальным k -кратным c -шаровым покрытием**, генерируемым вектором τ^N . Это означает, что никакие c -шары меньшего радиуса с центрами в точках τ_1, \dots, τ_N k -кратно не покрывают множество Ω .

Определение. k -кратное покрытие минимального радиуса называется **оптимальным k -кратным покрытием**.

Таким образом, для отыскания оптимального k -кратного покрытия необходимо определить величину радиуса оптимального покрытия

$$\hat{R}(\tau_*^N) = \inf_{\tau^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i)$$

и вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$, на котором достигается значение $\hat{R}(\tau_*^N)$ при условии, что для каждой точки $x \in \Omega$ выполняется включение (3.3.2).

Задача о поиске радиуса N кругов, образующих k -кратное с-шаровое покрытие множества, может быть формализована математически следующим образом.

Пусть Ω – ограниченное, замкнутое множество в пространстве E_n , $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ – заданный на множестве Ω (или в пространстве E_n) набор точек, в дальнейшем называемых центрами. Будем говорить, что точки $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_k}$ являются **k ближайшими соседями точки $x \in \Omega$** из заданных N точек, если

$$\forall j = \overline{1, k} \quad c(x, \tau_{i_j}) < c(x, \tau_m), \quad m \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}. \quad (3.3.3)$$

В частных случаях, например, когда множество Ω имеет симметричную структуру, или центры τ_1, \dots, τ_N размещены в области Ω с определенной закономерностью, для некоторых точек $x \in \Omega$ знак неравенства в (3.3.2) может быть нестрогим, то есть некоторые из заданных центров τ_1, \dots, τ_N могут находиться на одинаковом расстоянии от фиксированной точки $x \in \Omega$. Тогда будем считать, что точка $x \in \Omega$ имеет несколько различных наборов из k ближайших соседей. При численной реализации поиска k ближайших соседей фиксированной точки $x \in \Omega$ для однозначности будем полагать, что набор k ближайших соседей образуют точки $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_k}$, удовлетворяющие следующей системе неравенств

$$\forall j = \overline{1, k} \quad c(x, \tau_{i_j}) \leq c(x, \tau_m), \quad m \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$$

и имеющие наименьшие возможные индексы.

Введем в рассмотрение множество Λ_N^k N -мерных векторов, координаты которых могут принимать значения 0 или 1, причем в каждом таком векторе единиц может быть ровно k :

$$\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) : \lambda_i = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}; \sum_{i=1}^N \lambda_i = k \right\}.$$

Очевидно, $|\Lambda_N^k| = C_N^k$.

Тогда для каждой точки $x \in \Omega$ k ближайших соседей из фиксированного набора точек (τ_1, \dots, τ_N) можно найти, решая задачу поиска такого вектора

$\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Lambda$, при котором достигается минимальное значение следующей величины:

$$C(x) = \min_{\lambda(x) \in \Lambda^k} \max_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x).$$

Таким образом, можно считать, что на множестве Ω определена вектор-функция $\lambda(\cdot)$ со значениями в

$$\hat{\Lambda} = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda(x) \in \Lambda_N^k \quad \forall x \in \Omega \right\},$$

так что для каждой точки $x \in \Omega$ компонента $\lambda_i(x)$ этой вектор-функции равна 1 тогда и только тогда, когда центр τ_i считается одним из k возможных «соседей» этой точки. Если же вектор $\lambda(x)$ таков, что на нем достигается величина $C(x)$, то он будет соответствовать **ближайшим к точке x k соседям**. Эту величину $C(x)$ и будем считать радиусом кругов с центрами $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_k}$, покрывающих k -кратно точку x . Индексы этих центров совпадают с индексами единичных компонент вектора $\lambda(x)$. Если среди всех величин $C(x)$, $x \in \Omega$, выбрать наибольшую, то эта величина и будет определять радиус кругов с центрами в точках (τ_1, \dots, τ_N) , покрывающих k -кратно множество Ω .

Итак, **задача о поиске радиуса N кругов, образующих k -кратное c -шаровое покрытие множества**, состоит в отыскании величины

$$\hat{R} = \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x).$$

Задача о минимальном k -кратном c -шаровом покрытии с размещением центров шаров математически может быть сформулирована так:

Требуется найти величину

$$\hat{R}(\lambda^*(\cdot), \tau_*^N) = \inf_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x), \quad (3.3.4)$$

где

$$\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) : \lambda_i = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}; \sum_{i=1}^N \lambda_i = k \right\},$$

а также вектор-функцию $\lambda^*(x) \in \hat{\Lambda}$ и вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N \subset E_n^N$, при которых в (3.3.4) достигается нижняя грань.

Если в задаче (3.3.4) не интересоваться, какими именно c -шарами покрывается каждая точка $x \in \Omega$, то вектор-функцию $\lambda^*(\cdot)$ слева в равенстве (3.3.4)

можно опустить. В таком случае вектор-функция $\lambda(\cdot)$ используется лишь для конструктивной записи математической модели задачи и является промежуточным результатом.

Частными случаями приведенных двух задач о k -кратном c -шаровом покрытии множества или их обобщениями являются следующие постановки.

Задача k-П1 (задача k -кратного покрытия заданного множества из E_n с фиксированными центрами). Для заданного набора центров (τ_1, \dots, τ_N) из E_n^N (или из Ω^N) требуется найти минимальное k -кратное c -шаровое покрытие множества Ω .

Математически задача **k-П1** сводится к отысканию величины (3.3.1).

Предполагая, что координаты центров τ_1, \dots, τ_N не известны заранее и требуя их размещения во множестве Ω так, чтобы получить k -кратное c -шаровое покрытие минимального радиуса, можно сформулировать следующую задачу об оптимальном k -кратном покрытии.

Задача k-П2 (задача об оптимальном ограниченном k -кратном c -шаровом покрытии). При заданном количестве N центров τ_1, \dots, τ_N найти такое их размещение в области Ω , которое генерирует k -кратное покрытие множества Ω с минимальным радиусом.

Если предположить, что центры τ_1, \dots, τ_N могут располагаться не только во множестве Ω , но и во всем пространстве E_n , то можно сформулировать следующую задачу.

Задача k-П3 (задача об оптимальном k -кратном c -шаровом покрытии). При заданном количестве N центров τ_1, \dots, τ_N найти такое их размещение в E_n , которое генерирует k -кратное покрытие множества Ω с минимальным радиусом.

В предположении о том, что количество N центров τ_1, \dots, τ_N может не быть заданным наперед, можно также сформулировать следующую задачу о нахождении минимальной по количеству совокупности центров k -кратного покрытия.

Задача k-П4. При заданном радиусе покрытия \hat{R} найти минимальную по количеству N совокупность центров τ_1, \dots, τ_N , генерирующую k -кратное покрытие множества Ω .

3.2.2. Описание метода решения. Построение субградиента целевой функции

Поскольку для компактного множества Ω из E_n и непрерывной функции c оптимальное k -кратное покрытие множества Ω заданным числом N c -шаров одинакового радиуса существует, то задачу (3.3.4) можно переписать следующим образом:

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N}, \quad (3.3.5)$$

где

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x).$$

Нетрудно показать, что целевая функция $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (3.3.5) для случая евклидовой нормы $c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2$ обладает следующими свойствами.

1. Функция $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ – непрерывна и ограничена на Ω^N .

2. Функция $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (3.3.5) удовлетворяет условию Липшица на множестве Ω^N :

$$\left| \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x) - \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \bar{\tau}_i) \lambda_i(x) \right| \leq L \cdot \|\tau^N - \bar{\tau}^N\|_{E_n^N},$$

где $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, $L > 0$ – константа Липшица, не зависящая от выбора точек τ^N и $\bar{\tau}^N$ из Ω^N .

3. Функция $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (3.3.5) не является выпуклой на Ω^N .

4. Функция $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ почти всюду дифференцируема на Ω^N .

5. Многоэкстремальная функция $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ в зависимости от вида множества Ω может обладать (с точностью до перенумерации центров) конечным или бесконечным числом глобальных минимумов, а также может иметь локальные минимумы.

6. Для непустого компактного множества Ω из E_n и (τ_1, \dots, τ_N) из Ω^N справедливо следующее равенство:

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x) = \max_{m=1, \dots, M} \max_{x \in \Omega_m} \max_{i \in T_m} c(x, \tau_i),$$

где множества Ω_m , $m = \overline{1, M}$, $M \leq C_N^k$, составляют k -кратную диаграмму Вороного для множества Ω , т.е. такое разбиение множества Ω на подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_M$, что:

$$\bigcup_{i=1}^M \Omega_i = \Omega; \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad \forall i \neq j, i, j = \overline{1, M};$$

$$\Omega_m = \{x \in \Omega: \forall j \in T_m \quad c(x, \tau_j) < c(x, \tau_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus T_m\},$$

где $T_m = \{i_1^m, i_2^m, \dots, i_k^m\}$, $m = \overline{1, M}$ – всевозможные k -элементные подмножества множества индексов $\{1, 2, \dots, N\}$.

Поскольку множество Ω_m определяется набором из k центров с индексами $i_1^m, i_2^m, \dots, i_k^m$, иногда Ω_m будем записывать как $\Omega(\bar{\tau}^{T_m})$, указывая при этом, что данная ячейка Вороного соответствует набору центров $\bar{\tau}^{T_m} = \{\tau_{i_1^m}, \tau_{i_2^m}, \dots, \tau_{i_k^m}\}$. Фактически, обобщенные ячейки Вороного Ω_m определяют точки множества Ω , для которых центры с индексами из соответствующего набора $T_m = \{i_1^m, i_2^m, \dots, i_k^m\}$ являются k -ближайшими соседями.

Численные алгоритмы решения задачи (3.3.5), приведенные далее, базируются на методе проекции обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательно обобщенных градиентов (г-алгоритм Шора [103]). При этом j -ю компоненту N -мерного вектора обобщенного градиента

$$g_{\hat{R}}(\tau^N) = (g^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g^{\tau_j}(\tau^N), \dots, g^{\tau_N}(\tau^N)) \quad (3.3.6)$$

функции $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ в точке $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ будем вычислять двумя способами:

1) с применением формул численного дифференцирования:

$$g^{\tau_j}(\tau^N) = (g_1^{\tau_j}(\tau^N), g_2^{\tau_j}(\tau^N), \dots, g_n^{\tau_j}(\tau^N)), \quad (3.3.7)$$

где s -ая компонента вычисляется приближенно по следующей формуле:

$$g_s^{\tau_j}(\tau^N) = \frac{\hat{R}(\tau_1, \dots, (\tau_j^{(1)}, \dots, \tau_j^{(s)} + \Delta, \dots, \tau_j^{(n)}), \dots, \tau_N) - \hat{R}(\tau_1, \dots, (\tau_j^{(1)}, \dots, \tau_j^{(s)}, \dots, \tau_j^{(n)}), \dots, \tau_N)}{\Delta},$$

$$s = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, N};$$

Δ – некоторое приращение компоненты вектора τ , параметр метода;

2) с применением k -кратной диаграммы Вороного. Опишем этот способ вычисления субградиента функции $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (3.3.5) более подробно.

Обозначим через V фиксированное разбиение непустого компактного множества Ω на $\bar{M} \leq C_N^k$ подмножеств $V_1, \dots, V_m, \dots, V_{\bar{M}}$, составляющих k -кратную диаграмму Вороного для Ω , причем все V_i – непустые, компактные.

Введем также для каждого $i = 1, \dots, N$ функции

$$R_i(\tau^N) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\bar{\tau}^m)} c(x, \tau_i). \quad (3.3.8)$$

Субградиентное множество $G_{R_i}(\hat{\tau}^N)$ в точке $\hat{\tau}^N$ функции (3.3.8) вычисляется по формуле

$$G_{R_i}(\hat{\tau}^N) = \overline{\text{co}} \bigcup_{x \in I(\hat{\tau}^N)} G_{c(x, \tau_i)}(\hat{\tau}^N), \quad (3.3.9)$$

где $I(\hat{\tau}^N) = \left\{ x : x \in \bigcup_{m: i \in T_m} V_m; c(x, \hat{\tau}_i) = R_i(\hat{\tau}^N) \right\}$; $G_{c(x, \tau_i)}(\hat{\tau}^N)$ – субдифференциал

функции $c(x, \tau_i)$ по τ_i на E_n при фиксированном $x \in V_i$.

Обобщенный градиент целевой функции задачи (3.3.5) имеет следующий вид:

$$g_{\hat{R}}(\tau^N) = (g_{R_1}^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g_{R_i}^{\tau_i}(\tau^N), \dots, g_{R_N}^{\tau_N}(\tau^N)),$$

i -ая компонента которого является элементом субградиентного множества функции $R_i(\tau^N)$, $i = \overline{1, N}$, из (3.3.8) в точке τ_i , которое записывается так:

$$G_{R_i}^{\tau_i}(\tau^N) = \overline{\text{co}} \left\{ g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^N), \bar{x} : c(\bar{x}, \tau_i) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\bar{\tau}^m)} c(x, \tau_i) \right\}, i = 1, \dots, N. \quad (3.3.10)$$

Здесь $g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^N)$ – обобщенный градиент функции $c(x, \tau_i)$ в точке $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$, а $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$.

На рис.3.10 представлена двукратная диаграмма Вороного для 8 точек на квадрате, для каждого центра которой указано направление к одному из элементов множества (3.3.10).

Субградиентное множество $G_{R_i}^{\tau_i}(\tau^N)$ непустое, выпуклое, компактное.

Замечание. В формуле (3.3.10) T_m – m -е подмножество фиксированного k -кратного разбиения множества Ω . Однако, если разбиение множества Ω на

подмножества не фиксировано и неизвестно заранее положение точек τ_1, \dots, τ_N , генерирующих оптимальное покрытие множества Ω , а значит, и соответствующее k -кратное разбиение Вороного, то функция $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (3.3.5) не является выпуклой на Ω^N вследствие невыпуклости по $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ на Ω^N функции $\hat{r}(x, \tau^N) = \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x)$.

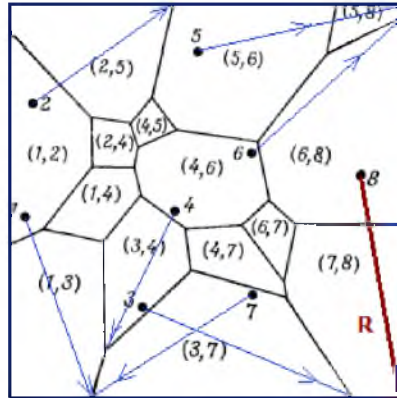


Рис. 3.10. Двукратная диаграмма Вороного с указанием возможного направления сдвига центров

Но хотя функция $\hat{r}(x, \tau^N)$ не является выпуклой по τ^N при любом фиксированном $x \in \Omega$, она состоит из выпуклых участков, отвечающих локальным минимумам функции $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$, поэтому (см. [103]), ее **почтиградиент** совпадает с субградиентом к одному из примыкающих к данной точке выпуклых участков.

Далее приведем лемму, которая дает возможность генерировать монотонно убывающую последовательность значений целевой функции $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачи (3.3.5) об оптимальном k -кратном покрытии множества Ω .

Лемма 3.2. Пусть Ω компактное множество из E_n и

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x).$$

Если центры $\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_N$ выбрать из условия

$$\max_{x \in \Omega(\tilde{\tau}_i)} c(x, \tilde{\tau}_i) = \min_{\tau_i \in \text{co } \Omega(\tau_i)} \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tau_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

то $R(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_N) \leq R(\tau_1, \dots, \tau_N)$. Здесь центр $\tilde{\tau}_i$ задает шар, покрывающий $\Omega(\tau_i)$ с минимальным радиусом.

3.3.3. Конструктивные алгоритмы решения задач оптимального многократного шарового покрытия ограниченного множества

Представим здесь приближенный алгоритм решения задачи о поиске радиуса N кругов, образующих k -кратное c -шаровое покрытие множества, а также алгоритм решения задачи о минимальном k -кратном c -шаровом покрытии с размещением центров шаров. Приведем и проанализируем результаты некоторых вычислительных экспериментов.

Не теряя общности, сформулируем алгоритм решения задачи оптимального многократного покрытия единичного n -мерного куба $\Omega = \underbrace{[0, 1] \times \dots \times [0, 1]}_n$.

Для упрощения обозначений в алгоритме вместо вектора τ^N будем писать τ .

Для решения задачи об отыскании радиуса N кругов, образующих k -кратное c -шаровое покрытие заданного множества Ω предложены два подхода.

Первый подход реализует математическую модель задачи, переформулированную следующим образом: пусть \bar{I} – множество всех сочетаний из N элементов по k элементов, то есть множество всех возможных индексов k центров, зоны наблюдения которых могут одновременно покрывать любую точку множества Ω . Обозначим I_m – элемент множества \bar{I} . Очевидно, $|\bar{I}| = C_N^k$.

Требуется найти величину

$$R = \max_{x \in \Omega} \min_{I_m \in \bar{I}} \max_{i \in I_m} c(x, \tau_i). \quad (3.3.11)$$

Для реализации формулы (3.3.11) множество Ω покрывается прямоугольной сеткой. Обозначим $\tilde{\Omega}$ множество всех узлов сетки. Приближенное значение искомого радиуса вычисляется по следующей формуле:

$$\tilde{R} = \max_{x \in \tilde{\Omega}} \min_{I_m \in \bar{I}} \max_{i \in I_m} c(x, \tau_i).$$

Второй подход разработан с использованием алгоритмов сортировки массива расстояний от фиксированной точки $x \in \Omega$ до заданных центров (τ_1, \dots, τ_N) .

Перейдем к описанию алгоритма решения задачи (3.3.1) или (3.3.3) о поиске радиуса N кругов, образующих k -кратное c -шаровое покрытие заданного множества Ω из E_n . Если область Ω имеет сложную границу, то заключим в n -мерный параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, вводя вспомогательную функцию $\rho(x)$, определенную на Π , такую, что

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \Pi \setminus \Omega, \\ 1 & \text{для } x \in \Omega. \end{cases}$$

Тогда в задаче (3.3.1) под функцией $c(x, \tau_i)$ будем понимать функцию $c(x, \tau_i) \rho(x)$, определенную на параллелепипеде Π и совпадающую с $c(x, \tau_i)$ на множестве Ω .

Алгоритм 3.1-К

Предварительный этап. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой с шагом $\Delta h_j, j = 1, \dots, n$; обозначим $\tilde{\Pi}$ – множество узлов сетки. Задаем положение центров покрытия (τ_1, \dots, τ_N) .

Шаг 1. Для каждой точки x сетки $\tilde{\Pi}$ строим массив расстояний от этой точки до всех центров: $D(x) = (c(x, \tau_1), c(x, \tau_2), \dots, c(x, \tau_N))$.

Шаг 2. Полученный массив расстояний $D(x)$ сортируем по возрастанию элементов.

Шаг 3. В каждом отсортированном массиве отбираем элемент, стоящий на k -м месте (с порядковым номером k), обозначим этот элемент $c^k(x, \tau_k)$.

Шаг 4. Среди всех отобранных элементов находим наибольший:

$$\tilde{R} = \max_{x \in \Pi} c^k(x, \tau_k).$$

Полученное максимальное значение и является приближенным значением радиуса окружностей с центрами в точках (τ_1, \dots, τ_N) , которые k -кратно покрывают множество Ω .

Очевидно, на одинаковых пространственных сетках численные алгоритмы, реализующие оба подхода, дают одинаковые результаты. Время же работы алгоритма **3.1-К** значительно меньше времени, за которое вычисляется радиус шаров с заданными центрами, k -кратно покрывающими множество Ω . Этим свидетельствует информация, приведенная в табл. 3.1 о времени работы алгоритмов при решении задачи поиска радиуса N кругов, образующих k -кратное c -шаровое покрытие единичного квадрата $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ в случае, когда шаг разбиения $\Delta h_j = 0.005, j = 1, 2$.

Таблица 3.1 Зависимость времени работы алгоритмов от количества центров N и кратности покрытия k

Входные данные		Время работы алгоритмов, реализующих	
N	k	Первый подход	Второй подход
4	2	2,2784	0,1822
9	2	6,3777	0,3108
14	3	36,0772	0,4286
20	4	651,0002	0,9246
25	3	276,2283	0,7917

Учитывая указанное временное преимущество алгоритма **3.1-К**, именно этот алгоритм будем в дальнейшем применять при описании алгоритмов решения задачи о минимальном k -кратном c -шаровом покрытии с размещением центров шаров.

Представим далее один из возможных численных алгоритмов решения задачи (3.3.5) об оптимальном k -кратном покрытии – отыскания координат центров $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$, минимизирующих целевую функцию

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_M^*} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x)$$

в предположении, что покрываемое множество имеет простую структуру. В основе этого алгоритма лежит, как уже было отмечено, метод проекции обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов – **г-алгоритма Шора**. В первом варианте этого алгоритма для вычисления компонент субградиента используются формулы численного дифференцирования (3.3.6), (3.3.7). Второй вариант алгоритма включает этап построения k -кратной диаграммы Вороного и вычисление вектора обобщенного градиента целевой функции задачи (3.3.5) по формулам (3.3.8) – (3.3.10).

Алгоритм 3.2-К

Предварительный этап. Куб Ω покрываем прямоугольной сеткой с шагом $\Delta h_j, j = 1, \dots, n$. Множество узлов прямоугольной сетки на множестве Ω обозначим $\tilde{\Omega}$. Задаем шаг численного дифференцирования Δ . Задаем начальное положение центров покрытия $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$.

Вычисляем по этим центрам величину

$$R(\tau^{(0)}) = \max_{x \in \tilde{\Omega}} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i^{(0)}) \lambda_i(x),$$

используя алгоритм **3.1-К** решения задачи поиска радиуса N кругов, образующих k -кратное c -шаровое покрытие заданного множества Ω .

По формулам (3.3.6), (3.3.7) вычисляем вектор-градиент $g_{\hat{R}}(\tau)$ в точке $\tau^{(0)}$, выбираем начальный пробный шаг τ -алгоритма $h_0 > 0$.

Первый шаг алгоритма проводим по формуле

$$\tau^{(1)} = P_{\Omega}(\tau^{(0)} - h_0 g_{\hat{R}}(\tau^{(0)})),$$

P_{Ω} – оператор проектирования на множество Ω .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после $m, m = 1, 2, \dots$, шагов алгоритма получен определенный вектор $\tau^{(m)} = (\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)})$.

Опишем **($m+1$)-й шаг** алгоритма.

1. Вычисляем по известным центрам $\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)}$ с помощью алгоритма

3.1-К величину

$$R(\tau^{(m)}) = \sup_{x \in \tilde{\Omega}} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i^{(m)}) \lambda_i(x).$$

2. Вычисляем значения $g_{\hat{R}}(\tau)$ по формулам (3.3.6), (3.3.7) при $\tau = \tau^{(m)}$.

3. Проводим $(m+1)$ -й шаг τ -алгоритма в Н-форме [101], итерационная формула которого имеет вид

$$\tau^{(m+1)} = P_{\Omega} \left(\tau^{(m)} - h_m \frac{H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}), g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}))}} \right),$$

где H_{m+1} – матрица растяжения пространства с коэффициентом α в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, имеющая вид

$$H_{m+1} = H_m + (1/\alpha^2 - 1) \frac{H_m \xi_m \xi_m^T H_k}{(H_m \xi_m, \xi_m)}, \quad \xi_m = g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}) - g_{\hat{R}}(\tau^{(m-1)}).$$

Если из-за округлений счета H_{m+1} перестает быть положительно определенной, заменяем ее единичной матрицей.

Шаг h_m выбираем из условия:

$$\min_{h>0} \hat{R} \left(\tau^{(m)} - h \frac{H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}), g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}} \right).$$

4. Если условие

$$\|\tau^{(m+1)} - \tau^{(m)}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.3.12)$$

не выполняется, то переходим к $(m+2)$ -му шагу алгоритма, в противном случае – переход к п. 5.

5. Полагаем $\tau_* = \tau^{(l)}$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (3.3.12) завершения работы алгоритма.

6. Вычисляем значение минимального радиуса покрытия по формуле

$$\hat{R}(\tau_*) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_{ij}^x} \max_{i=1, N} c(x, \tau_{*i}) \lambda_i(x)$$

с помощью алгоритма **3.1-К**.

Алгоритм 3.2-К описан.

Как уже было отмечено, если область Ω имеет сложную форму, то заключим в n -мерный параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, вводя вспомогательную функцию $\rho(x)$, определенную на Π , такую, что

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \Pi \setminus \Omega, \\ 1 & \text{для } x \in \Omega, \end{cases}$$

и в задаче (3.3.5) под функцией $c(x, \tau_i)$ будем понимать функцию $c(x, \tau_i) \rho(x)$, определенную на параллелепипеде Π и совпадающую с $c(x, \tau_i)$ на множестве Ω .

Алгоритм 3.3-К

Предварительный этап. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой с шагом $\Delta h_j, j = 1, \dots, n$. Множество узлов прямоугольной сетки на множестве Ω обозначим $\tilde{\Omega}$. Задаем начальное положение центров покрытия $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$.

Вычисляем по этим центрам величину

$$R(\tau^{(0)}) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i^{(0)}) \lambda_i(x),$$

используя алгоритм **3.1-К** решения задачи поиска радиуса N кругов, образующих k -кратное c -шаровое покрытие заданного множества Ω . При этом для каждого $i = 1, \dots, N$ вычисляем значение функции (3.3.8):

$$R_i(\tau^{(0)}) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\bar{\tau}^{(0)m})} c(x, \tau_i^{(0)}).$$

По формуле (3.3.10) строим субградиентное множество $G_{R_i}^{\tau_i}(\tau^{(0)}) = \overline{co} \left\{ g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^{(0)}), \bar{x} : c(\bar{x}, \tau_i) = R_i(\tau_i^{(0)}) \right\}$, где $g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^{(0)})$ – обобщенный градиент функции $c(x, \tau_i)$ в точке $\tau^{(0)}$. Выбираем вектор $g_{R_i}^{\tau_i}(\tau^{(0)}) \in G_{R_i}^{\tau_i}(\tau^{(0)})$, задаем начальный пробный шаг h_0 алгоритма $h_0 > 0$.

Первый шаг алгоритма проводим по формуле

$$\tau^{(1)} = P_{\Omega}(\tau^{(0)} - h_0 g_{R_i}^{\tau_i}(\tau^{(0)})),$$

P_{Ω} – оператор проектирования на множество Ω .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после $m, m = 1, 2, \dots$, шагов алгоритма получен определенный вектор $\tau^{(m)} = (\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)})$.

Опишем **($m+1$)-й шаг** алгоритма.

1. По центрам $\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)}$ с помощью алгоритма **3.1-К** вычисляем величину

$$R(\tau^{(m)}) = \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i^{(m)}) \lambda_i(x),$$

используя алгоритм **3.1-К** решения задачи поиска радиуса N кругов, образующих k -кратное c -шаровое покрытие заданного множества Ω . При этом для каждого $i = 1, \dots, N$ вычисляем значение функции (3.3.8):

$$R_i(\tau^{(m)}) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\bar{\tau}^{(0)m})} c(x, \tau_i^{(m)}).$$

2. По формуле (3.3.10) строим субградиентное множество $G_{R_i^*}^{\tau_i}(\tau^{(m)}) = \overline{co} \left\{ g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^{(m)}), \bar{x} : c(\bar{x}, \tau_i) = R_i(\tau_i^{(m)}) \right\}$, где $g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^{(m)})$ – обобщенный градиент функции $c(x, \tau_i)$ в точке $\tau^{(m)}$.

4. Выбираем вектор $g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}) \in G_{R_i^*}^{\tau_i}(\tau^{(m)})$.

5. Проводим $(m+1)$ -й шаг г-алгоритма в Н-форме [101], итерационная формула которого имеет вид

$$\tau^{(m)} = P_{\Omega} \left(\tau^{(m)} - h_m \frac{H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}), g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}} \right),$$

где H_{m+1} – матрица растяжения пространства с коэффициентом α (его целесообразно брать равным 3) в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, имеющая вид

$$H_{m+1} = H_m + (1/\alpha^2 - 1) \frac{H_m \xi_m \xi_m^T H_m}{(H_m \xi_m, \xi_m)}, \quad \xi_m = g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}) - g_{\hat{R}}(\tau^{(m-1)}).$$

Если из-за округлений счета H_{m+1} перестает быть положительно определенной, заменяем ее единичной матрицей.

Шаг h_m выбираем из условия:

$$\min_{h>0} \hat{R} \left(\tau^{(m)} - h \frac{H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}), g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}} \right).$$

7. Если условие

$$\|\tau^{(m+1)} - \tau^{(m)}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.3.13)$$

не выполняется, переходим к $(m+2)$ -му шагу алгоритма, в противном случае – переход к п. 5.

8. Полагаем $\tau_* = \tau^{(l)}$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (3.3.12) завершения работы алгоритма.

9. Вычисляем значение минимального радиуса покрытия по формуле

$$\hat{R}(\tau_*) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_{\lambda}^*} \max_{i=1, N} c(x, \tau_{*i}) \lambda_i(x)$$

с помощью алгоритма **3.1-К**.

Алгоритм **3.3-К** описан.

3.3.4. Результаты решения модельных задач многократного шарового покрытия

Приведем результаты некоторых вычислительных экспериментов по многократному покрытию единичного квадрата из E_2 в случае, когда функция $c(x, \tau_i)$ задается формулой (3.1.5).

На рис. 3.11, $a, b, в, г, д, е$ изображены оптимальные покрытия единичного квадрата, полученные с точностью $\varepsilon=0.0001$ алгоритмом **3.2-К**, для $N = 2, 3, 4, 5, 8, 15$ соответственно. В табл. 3.2 приведены минимальные радиусы однократного покрытия в задаче (3.3.5) для соответствующих значений N , полученные с указанной точностью алгоритмом **3.2-К**, в сравнении с оптимальными решениями, полученными с помощью алгоритма **3.1**. Результаты, полученные алгоритмом **3.2-К** для указанных значений N , согласуются с результатами, описанными в работах [13], [74]. Незначительное расхождение в оптимальных значениях радиусов покрытия объясняется, прежде всего, погрешностью алгоритма (приближенное вычисление компонент обобщенного градиента целевой функции, дискретизация области и т.п.), а также вычислительной погрешностью.

Таблица 3.2 Минимальный радиус 1-кратного покрытия единичного квадрата

N	R(τ_*) (алгоритм 3.2-К)	R(τ_*) (алгоритм 3.1)	N	R(τ_*) (алгоритм 3.2-К)	R(τ_*) (алгоритм 3.1)
2	0,5545	0,5599	9	0,2500	0,2339
3	0,5022	0,5033	10	0,2328	0,2186
4	0,3541	0,3536	11	0,2236	0,2125
5	0,3233	0,3266	12	0,2191	0,2068
6	0,3162	0,3001	13	0,2166	0,1956
7	0,2926	0,2596	14	0,2070	0,1859
8	0,265	0,2596	15	0,1892	0,1807

Результаты приведенных ниже и других вычислительных экспериментов по численному решению задачи (3.3.5) об оптимальном многократном c -шаровом покрытии свидетельствуют о наличии свойства многоэкстремальности целевой функции задачи. Из различных начальных приближений набора центров $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$ можно прийти к различным локальным решениям задачи (3.3.5).

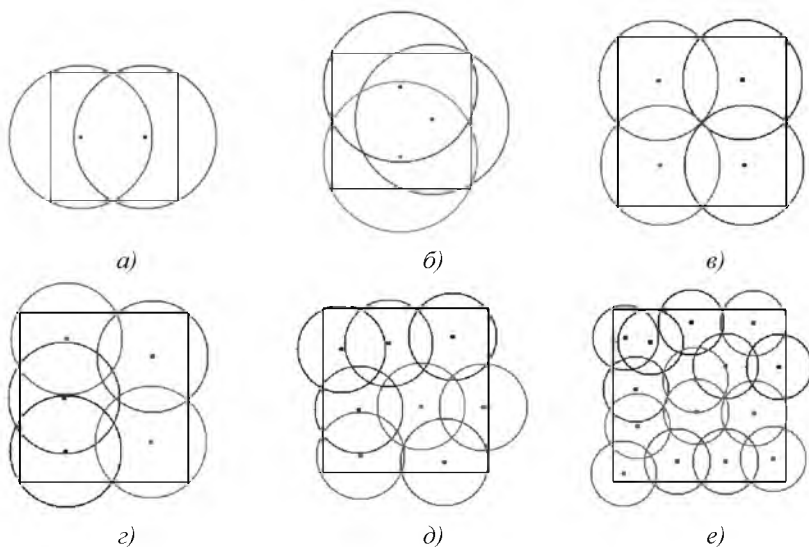
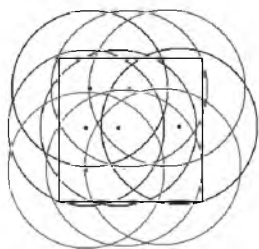


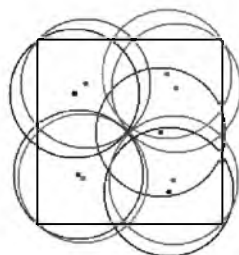
Рис. 3.11. Оптимальное однократное покрытие единичного квадрата, полученное алгоритмом 3.2-К: $\|x\| = \|x\|_2$

На рис. 3.12 представлено двукратное покрытие единичного квадрата 9-ю заданными центрами, полученное с помощью алгоритма 3.1-К. На рис. 3.13 изображено соответствующее оптимальное покрытие квадрата, полученное алгоритмом 3.2-К.

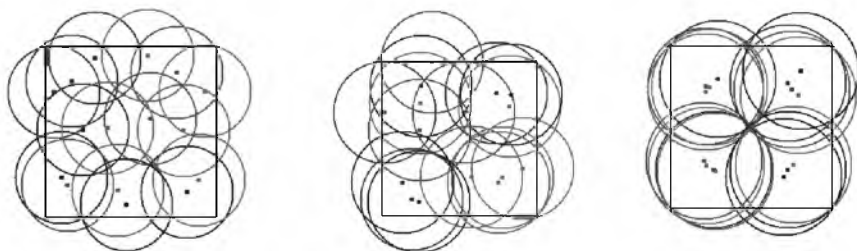
На рис. 3.14 представлены результаты работы алгоритма 3.2-К по многократному покрытию разной кратности 16-ю центрами того же единичного квадрата. Там же приведены и минимальные радиусы покрытия соответствующей кратности.



**Рис. 3.12. 2-кратное покрытие квадрата, полученное алгор. 3.1-К (N=9, центры фиксированы):
R=0.5488**



**Рис. 3.13. Оптимальное 3-кратное покрытие квадрата, полученное алгоритмом 3.2-К (N=9):
R=0.3538**



$k=2; R=0,272855$

$k=3; R=0,333016$

$k=4; R=0,361247$

Рис. 3.14. Оптимальное k -кратное покрытие единичного квадрата при заданном количестве $N=16$ центров: метрика – евклидова

Другие результаты работы алгоритмов **3.1-К** и **3.2-К** приведены в [43]. Сравнительный анализ результатов вычислительных экспериментов по 2-, 3-, 4-х-кратному покрытию единичного квадрата позволил выявить достоинства и недостатки алгоритма. Это, прежде всего, – зависимость результатов вычислений (величины минимального радиуса шарового покрытия) от исходных данных и параметров алгоритма – начального приближения координат центров, величины шага пространственной сетки, величины шага численного дифференцирования при вычислении компонент обобщенного градиента. Серия вычислительных экспериментов показывает, что для получения радиуса покрытия, близкого к оптимальному радиусу, величину шага численного дифференцирования Δ в алгоритме **3.2-К** нужно согласовывать с шагом дискретизации области, с количеством центров и кратностью покрытия. Для устранения этого недостатка предлагается применять алгоритм **3.3-К**, в котором при вычислении компонент обобщенного градиента целевой функции задачи (3.3.5) используется k -кратная диаграмма Вороного. Практика расчетов показывает, что наилучшие результаты многократного покрытия получаются, если сначала при не очень густой пространственной сетке найти оптимальные расположения центров с помощью алгоритма **3.2-К**, а затем уточнить координаты этих центров с помощью алгоритма **3.3-К**.

В табл. 3.3, 3.4 приведены результаты решения задачи оптимального двукратного покрытия единичного квадрата, полученные в работе [21], и для сравнения – полученные с помощью описанного выше алгоритма, как с применением формул численного дифференцирования, так и с использованием многократных диаграмм Вороного.

Таблица 3.3 Сравнительный анализ результатов многократного шарового покрытия единичного квадрата

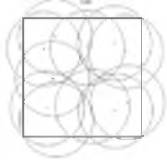
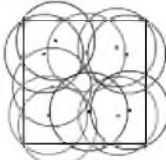
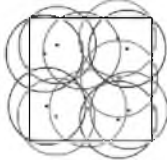

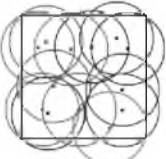
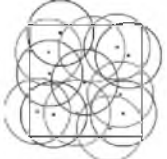
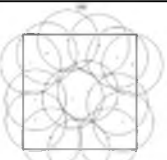
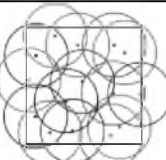
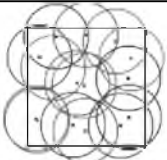
N	Оптимальное 2-кратное покрытие, полученное с помощью алгоритма		
	предложенного в [21]	3.2-К	3.3-К
11			
13			
15			

Таблица 3.4. Минимальный радиус 2-кратного покрытия единичного квадрата

N	R(τ_*) [21]	R(τ_*), полученное с помощью	
		алгоритмов 3.2-К	алгоритмов 3.3-К
11	0.31280	0.31819	0.3164
13	0.29106	0.29740	0.2970008
15	0.26650	0.27869	0.278076
17	0.25372	0.25927	0.2657
19	0.22766	0.23753	0.236849
21	0.21601	0.21351	0.225

На рис. 3.15 представлены результаты двукратного покрытия единичного квадрата 19-ю кругами, полученные с помощью алгоритмов **3.2-К** и **3.3-К**. На рис. 3.16 показаны многократные оптимальные покрытия при других N и k .

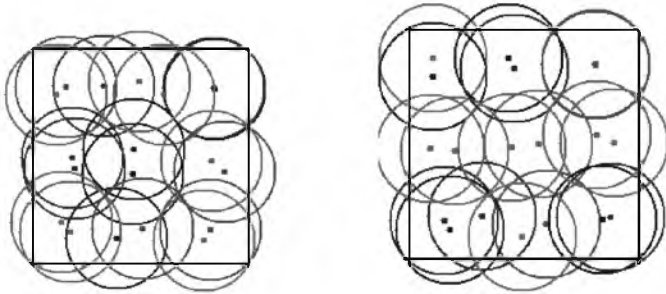
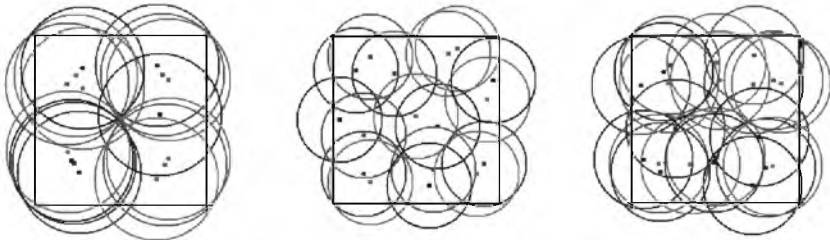


Рис. 3.15. 2-кратное оптимальное покрытие единичного квадрата, $N=19$, полученные с применением: слева – численного дифференцирования; справа – двукратной диаграммы Вороного



$N=15, k=3$

$N=17, k=2$

$N=21, k=3$

Рис. 3.16. k -кратное покрытие единичного квадрата, $\|x\| = \|x\|_2$

Как нетрудно заметить, результаты решения некоторых задач оптимального многократного покрытия свидетельствуют о том, что при определенных значениях N и k оптимальное расположение центров таково, что несколько центров могут быть расположены очень близко друг к другу (см. рис. 3.15, 3.16), что на практике не всегда реализуемо или нежелательно. Поэтому в следующем параграфе математическая модель задачи об оптимальном многократном шаровом покрытии будет уточнена некоторым регуляризирующим условием, отвечающим за невозможность «слипания» центров.

3.3.5. Непрерывная задача оптимального многократного шарового покрытия множеств с ограничениями

Пусть Ω – ограниченное, замкнутое множество в пространстве E_n , множество $B(\tau_i, R) = \{x \in E_n : c(x, \tau_i) \leq R\}$ – c -шар радиуса R с центром в точке τ_i из E_n , $c(x, \tau_i)$ – некоторая квазиметрика (евклидова, манхэттенская). Требуется определить величину радиуса оптимального покрытия

$$\hat{R}(\tau^N) = \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (3.3.14)$$

и вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$, на котором достигается значение $\hat{R}(\tau_*^N)$, при этом для каждой точки $x \in \Omega$ выполняется включение

$$x \in \bigcap_{j=1}^l B(\tau_{i_j}, \hat{R}), \quad k \leq l \leq N, \quad i_j \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (3.3.15)$$

а центры удовлетворяют условиям:

$$\min_{(i,j): i>j} c(\tau_i, \tau_j) \geq \sigma, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.3.16)$$

где $\sigma > 0$ – заданная величина.

Если ввести в рассмотрение множество Λ_N^k :

$$\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) : \lambda_i = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}; \sum_{i=1}^N \lambda_i = k \right\},$$

и на множестве Ω определить вектор-функцию $\lambda(\cdot)$ со значениями в

$$\hat{\Lambda} = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda(x) \in \Lambda_N^k \quad \forall x \in \Omega \right\},$$

то задача о минимальном k -кратном c -шаровом покрытии с ограничениями на размещении центров шаров математически может быть сформулирована так: требуется найти величину

$$\hat{R}(\lambda^*(\cdot), \tau_*^N) = \inf_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x), \quad (3.3.17)$$

а также вектор-функцию $\lambda^*(x) \in \hat{\Lambda}$ и вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N \subset E_n^N$, при которых в (3.3.17) достигается нижняя грань, и выполняются условия (3.3.16).

Если в задаче (3.3.17) не интересоваться, какими именно c -шарами покрывается каждая точка $x \in \Omega$, то вектор-функцию $\lambda^*(\cdot)$ слева в равенстве (3.3.17) можно опустить, что и будем далее предполагать.

Описание метода и алгоритма решения задачи

Для решения задачи (3.3.17), (3.3.16) предлагается следующий подход [44]. Для учета дополнительных условий (3.3.16) в задаче многократного покрытия вводится в рассмотрение штрафная функция вида

$$P(\tau_1, \dots, \tau_N) = M \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \max^2(0, \sigma - c(\tau_i, \tau_j)),$$

где $M \gg 0$ – коэффициент штрафа, и от задачи (3.3.17), (3.3.16) совершается переход к задаче:

$$\bar{R}_M(\tau^N) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N}, \quad (3.3.18)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{R}_M(\tau^N) &= \hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) + P(\tau_1, \dots, \tau_N) = \\ &= \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_x^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x) + P(\tau_1, \dots, \tau_N). \end{aligned}$$

Численный алгоритм решения задачи (3.3.18), приведенный далее, базируется на методе обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов (г-алгоритм Шора). При этом j -ю компоненту N -мерного вектора обобщенного градиента

$$g_{\hat{R}}(\tau^N) = (g^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g^{\tau_j}(\tau^N), \dots, g^{\tau_N}(\tau^N)) \quad (3.3.19)$$

функции $\bar{R}_M(\tau_1, \dots, \tau_N)$ в точке $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ будем вычислять по формуле:

$$g^{\tau_j}(\tau^N) = g_{R_j^y}^{\tau_j}(\tau^N) + M \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \max(0, \sigma - c(\tau_i, \tau_j)) \frac{\partial c(\tau_j, \tau_i)}{\partial \tau_j}, \quad 3.3.(20)$$

где $g_{R_j^y}^{\tau_j}(\tau^N) \in G_{R_j^y}^{\tau_j}(\tau^N)$ (см. формула (3.3.9)).

Представим приближенный алгоритм решения задачи о минимальном k -кратном c -шаровом покрытии с размещением центров шаров так, чтобы минимальное расстояние между каждыми двумя центрами было не меньше заданной величины σ , составной частью которого является алгоритм **3.1-К**, позволяющий отыскивать радиус N кругов, образующих k -кратное c -шаровое покрытие множества при фиксированных центрах. Приведем и проанализируем результаты некоторых вычислительных экспериментов.

Не теряя общности, сформулируем алгоритм решения задачи оптимального многократного покрытия единичного n -мерного куба

$\Omega = \underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \dots \times [0,1]}_n$. Для упрощения обозначений в алгоритме вместо

вектора τ^N будем писать τ .

Как и в предыдущих параграфах, если область Ω имеет сложную форму, то заключим Ω в n -мерный параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, введя вспомогательную функцию $\rho(x)$, определенную на Π , такую, что

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \Pi \setminus \Omega, \\ 1 & \text{для } x \in \Omega. \end{cases}$$

Тогда в задаче (3.3.1) под функцией $c(x, \tau_i)$ будем понимать функцию $c(x, \tau_i) \rho(x)$, определенную на параллелепипеде Π и совпадающую с $c(x, \tau_i)$ на множестве Ω .

Алгоритм 3.4-К

Предварительный этап. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой с шагом $\Delta h_j, j = 1, \dots, n$. Множество узлов прямоугольной сетки на множестве Ω обозначим $\tilde{\Omega}$. Задаем величину штрафа $M \gg 0$. Задаем начальное положение центров шаров $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$.

Вычисляем по этим центрам величину радиуса покрытия $\hat{R}(\tau^{(0)}) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_M^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x)$, используя алгоритм 3.1-К. При этом для каждого $i = 1, \dots, N$ вычисляем значение функции (3.3.7) :

$$R_i(\tau^{(0)}) = \max_{T_m, i \in T_m} \max_{x \in V(\bar{T}^{T_m})} c(x, \tau_i^{(0)}).$$

Вычисляем величину $\bar{R}_M(\tau^{(0)}) = \hat{R}(\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)}) + P(\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$.

По формуле (3.3.9) строим субградиентное множество $G_{R_M}^{\tau_i}(\tau^{(0)}) = \overline{co} \left\{ g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^{(0)}), \bar{x} : c(\bar{x}, \tau_i) = R_i(\tau_i^{(0)}) \right\}, i = 1, \dots, N$, где $g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^{(0)})$ – обобщенный градиент функции $c(x, \tau_i)$ в точке $\tau^{(0)}$. Выбираем вектор $g_{\bar{R}_M}^{\tau_i}(\tau^{(0)})$ из множества (3.3.11), (3.3.12), задаем начальный пробный шаг r -алгоритма $h_0 > 0$.

Первый шаг алгоритма проводим по формуле:

$$\tau^{(1)} = P_{\Omega}(\tau^{(0)} - h_0 g_{\hat{R}}(\tau^{(0)})),$$

P_{Ω} – оператор проектирования на множество Ω .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после m , $m = 1, 2, \dots$, шагов алгоритма получен определенный вектор $\tau^{(m)} = (\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)})$.

Опишем **(m+1)-й шаг** алгоритма.

1. Вычисляем по известным центрам $\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)}$ величину

$$R(\tau^{(m)}) = \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_x^c} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i^{(m)}) \lambda_i(x),$$

используя алгоритм **3.1-К** решения задачи поиска радиуса N кругов, образующих k -кратное s -шаровое покрытие заданного множества Ω . При этом для каждого $i = 1, \dots, N$ вычисляем значение функции (3.3.7):

$$R_i(\tau^{(m)}) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\mathbb{E}^{T_m})} c(x, \tau_i^{(m)}).$$

2. По формуле (9) строим субградиентное множество $G_{R_i^c}^{\tau_i}(\tau^{(m)})$. Выбираем вектор $g_{\hat{R}_M}(\tau^{(m)})$ по формулам (3.3.11), (3.3.12).

3. Проводим **(m+1)-й шаг** г-алгоритма в Н-форме [101], итерационная формула которого имеет вид:

$$\tau^{(m)} = P_{\Omega} \left(\tau^{(m)} - h_m \frac{H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}), g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}} \right),$$

где H_{m+1} – матрица растяжения пространства с коэффициентом α в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, имеющая вид

$$H_{m+1} = H_m + (1/\alpha^2 - 1) \frac{H_m \xi_m \xi_m^T H_m}{(H_m \xi_m, \xi_m)}, \quad \xi_m = g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}) - g_{\hat{R}}(\tau^{(m-1)}).$$

Если из-за округлений счета H_{m+1} перестает быть положительно определенной, заменяем ее единичной матрицей.

Шаг h_m выбираем из условия:

$$\min_{h>0} \hat{R} \left(\tau^{(m)} - h \frac{H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}), g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}} \right).$$

4. Если условие

$$\|\tau^{(m+1)} - \tau^{(m)}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.3.21)$$

не выполняется, то переходим к $(m+2)$ -му шагу алгоритма, в противном случае – переход к п. 5.

5. Полагаем $\tau_* = \tau^{(l)}$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (3.3.21) завершения работы алгоритма.

6. Вычисляем значение минимального радиуса покрытия по формуле

$$\hat{R}(\tau_*) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda'_y} \max_{i=1, N} c(x, \tau_{*i}) \lambda_i(x)$$

с помощью алгоритма 3.1-К.

Алгоритм 3.4-К описан.

При реализации описанного подхода возникает вопрос о выборе штрафного коэффициента M . С одной стороны, штраф должен быть достаточно большим, чтобы полученное значение $\hat{R}(\tau_*^N)$ было как можно ближе к оптимальному, а вектор τ_*^N – как можно ближе к условному оптимуму. С другой стороны, слишком большое значение штрафного коэффициента может вызвать вычислительные трудности при отыскании оптимального решения в задаче без ограничений. Поэтому, метод штрафа лучше использовать в итерационной форме, начиная выбор коэффициента M со значения m_1 , не слишком высокого, и решая задачу:

$$R(\tau^N; m_1) = \hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) + m_1 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \max^2(0, \sigma - c(\tau_i, \tau_j)) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N}.$$

Если при этом полученное решение $\tau_*^N(m_1)$ будет хорошим приближением для оптимума, то вычисления заканчиваются. В противном случае штраф, соответствующий нарушению условий (3.3.16), недостаточно высок, и увеличивая его в несколько раз (например, полагая $m_2 = 7m_1$), следует решить новую задачу без ограничений (3.3.16) и т.д.

Анализ результатов вычислительных экспериментов

Приведем результаты решения нескольких задач многократного шарового покрытия единичного квадрата из E_2 при ограничениях на расстояния между центрами, в случае, когда функция $c(x, \tau_i)$ задается формулой:

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^j - \tau_i^j)^2}.$$

На рис. 3.15 были представлены результаты двукратного покрытия единичного квадрата 19-ю кругами, полученные при решении задачи (3.3.14) (3.3.15), без учета ограничений вида (3.3.16). Как видно, некоторые центры практически совмещены. Минимальное двукратное покрытие 19-ю кругами квадрата, но уже при условии размещения центров на допустимом расстоянии друг от друга, представлены на рис. 3.17 а), б).

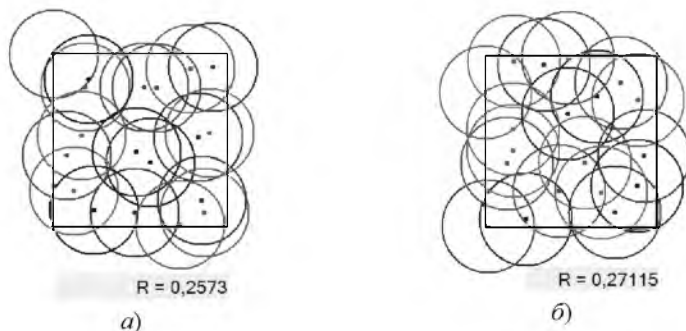


Рис. 3.17 Оптимальное 2-кратное покрытие 19-тью кругами:

а) при условиях (3) $\sigma = 0.05$; в) при ограничениях (3) $\sigma = 0.15$

На рис. 3.18 показано трехкратное оптимальное покрытие при $N=15$. Очевидно, при реализации такой модели центры кругов, образующих многократное покрытие находятся также на некотором допустимом расстоянии друг от друга.

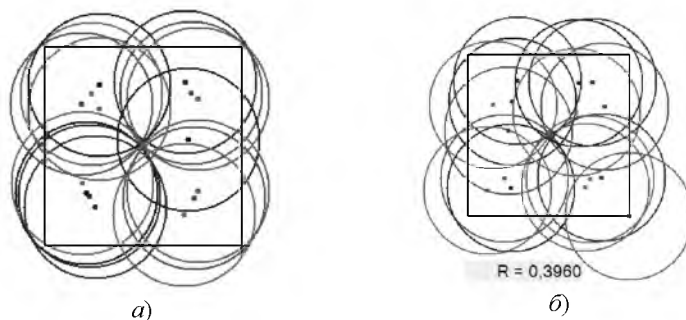


Рис. 3.18. 3-кратное оптимальное покрытие единичного квадрата:
а) без ограничений; б) с контролем минимального расстояния между центрами

Замечание 1. При построении математических моделей задач оптимального покрытия, возникающих в условиях практики, ограничения на расположение центров покрываемых шаров могут иметь и другой вид. Например, можно потребовать, чтобы центры были размещены как можно более равномерно в области (см. рис. 3.19), или чтобы ни один из них не попал в некоторый запретный ее участок.

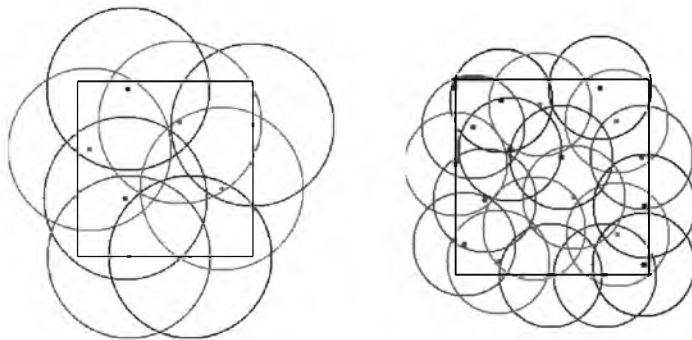


Рис. 3.19 2-кратное оптимальное покрытие единичного квадрата с равномерным размещением центров в области

Заключение к главе 3

Представлены математические модели и методы решения непрерывных задач покрытия ограниченной области парами минимального радиуса. Рассмотрены варианты однократного и многократного покрытия области.

Для непрерывной задачи об оптимальном ϵ -шаровом покрытии компактного множества Ω из E_n заданным числом центров с минимальным радиусом предложен и обоснован алгоритм решения **3.1**, основанный на использовании метода обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов (Γ -алгоритма Н. З. Шора).

Исследованы свойства рассматриваемой задачи об оптимальном ϵ -шаровом покрытии множества Ω , установлены ее сходство и различие с задачей оптимального разбиения этого множества на непересекающиеся подмножества с размещением центров подмножеств, что позволяет в тех случаях, когда это целесообразно, сводить решение задачи о покрытии к задаче разбиения.

Предложенные алгоритмы: 1) позволяют одновременно находить все центры оптимального покрытия; 2) не зависят от размерности пространства, которому принадлежит порываемое множество; 3) не связаны с геометрическими особенностями покрываемого множества; 4) могут быть применены к решению дискретных задач оптимального покрытия.

Алгоритмы, вообще говоря, приводят к локальным оптимальным решениям задач об оптимальном шаровом покрытии. Хотя, в некоторых численных экспериментах, проведенных для определенных метрик, алгоритмы приводили к глобальным оптимальным решениям.

Непрерывные задачи многократного шарового покрытия обобщены на случай наличия дополнительных условий, связанных с возможным расположением размещаемых центров шаров. Разработан и программно реализован алгоритм решения указанных задач, основанный на дискретизации покрываемой области и применении для решения задач недифференцируемой оптимизации Γ -алгоритма Шора. При этом для учета ограничений в задачах привлекается аппарат штрафных функций, а для приближенного вычисления компонент обобщенного градиента расширенной целевой функции применяются k -кратные диаграммы Вороного.

В следующей главе рассмотрим различные приложения теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств и Γ -алгоритмов, как ключевых составляющих методов решения таких задач.

ГЛАВА 4

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ К РЕШЕНИЮ РАЗЛИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ

4.1. Теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств как универсальный математический аппарат построения диаграммы Вороного и ее обобщений

В данном разделе продемонстрируем возможность построения диаграммы Вороного и ее различных обобщений на основе единого подхода: формулирования непрерывной задачи оптимального разбиения множества с критерием качества разбиения, обеспечивающим соответствующий вид диаграммы Вороного, и применения математического и алгоритмического аппарата решения таких задач, составной частью которого является t -алгоритм Шора. Результатом такого подхода является возможность строить не только уже известные диаграммы Вороного, но и конструировать новые.

4.1.1. Диаграмма Вороного как математический инструментальный решения различных практических задач

Как известно, диаграмма Вороного – это математический объект, который нестрого описывается следующим образом. *Диаграмма Вороного заданного конечного множества M точек плоскости (пространства)* представляет такое разбиение плоскости (пространства), при котором каждая область (*ячейка Вороного*) этого разбиения образует множество точек, более близких к одному из элементов множества M , чем к любому другому элементу этого множества.

Рассматриваемая математическая структура называется по имени Георгия Вороного [19], но она также известна под названием *полигонов Тиссена* [109] или *двумерных сот Дирихле* [129]. Диаграммы Вороного в двух и трехмерных пространствах используются в самых разных областях прикладных наук: кристаллографии, физике, астрономии, химии, микробиологии, компьютерной графике, при решении проблем искусственного интеллекта, распознавания образов, офтальмологии. В физике конденсированных сред такие мозаики также известны как *блоки Вигнера-Зейтца* [88]. Для общих решеток в группах Ли клетки называют просто *фундаментальными областями* [140]. В случае общих метрических пространств, клетки часто называют *метрическими фундамен-*

тальными многоугольниками. Существуют также и другие названия этой математической структуры (или конкретных важных ее приложений): *многогранники Вороного, полигоны Вороного, домены влияния, разложения Вороного, мозаики Вороного, тесселяции Дирихле, разбиения Вороного-Дирихле или Дирихле-Вороного.*

Применение диаграмм Вороного дает возможность разрабатывать эффективные алгоритмы комбинаторных геометрических задач. Приведем перечень этих задач, основываясь на работах [1 – 3, 77]. Это – задача о минимальном евклидовом дереве; задача о ближайших соседях множества M точек плоскости; задача о минимальной триангуляции; задача о круге наибольшего радиуса, не содержащем заданных точек, центр которого принадлежит выпуклой оболочке этих точек; задача о k ближайших точках из числа заданных; задача о круге минимального радиуса, содержащего заданные k точек. Диаграммы Вороного находят также применение в задачах, связанных с оптимальным размещением предприятий в заданном районе, с оценкой интегралов от монотонных функций на заданном множестве, при решении проблемы упаковки шаров в трехмерном евклидовом пространстве. Диаграммы Вороного положены в основу построения теории полиэдров и квадратичных форм. Плодотворным оказывается применение диаграмм Вороного при изучении термодинамических свойств различных молекулярных и ионных соединений. По виду диаграммы Вороного судят о термодинамических характеристиках соединений, об их устойчивости, форме эквипотенциальных поверхностей и областей «влияния» ионов. В археологии многоугольники Вороного используются для нанесения на карту ареала применения орудий труда в древних культурах и для изучения влияния соперничающих центров торговли. Использование диаграммы Вороного, отражающей картину расселения животных и распределения жизненно важных ресурсов, помогает исследовать эффект перенаселенности.

Спектр практических задач, при решении которых используются диаграммы Вороного, достаточно широк. К таким задачам, например, относятся:

- задачи размещения сенсорных датчиков беспилотных летательных аппаратов, летающих на разных высотах и наблюдающих за большими плоскими географическими регионами;
- задачи оптимизации размещения электростанций и др.

В работе [134] выдвинута идея применения диаграмм Вороного в *географических информационных системах* (ГИС). Полигоны Тиссена используется при формировании цифровых моделей рельефа. Среди практических примеров наличия динамики в диаграммах Вороного можно привести пример из работы

[113]. Здесь авторы отмечают, что динамические модели данных Вороного оказываются перспективным кандидатом для разработки будущих ГИС.

Диаграммы Вороного применяются и для *определения максимального свободного пространства*. В этом случае формулируется задача о размещении какой-либо службы или предприятия, в которой нужно выбрать положение объекта так, чтобы он был максимально удален от других заданных объектов. Размещаемый объект может быть источником загрязнения (атомная электростанция, склад органических (токсичных) отходов), и тогда его следует размещать так, чтобы минимизировать «эффективность» такого соседства. Либо это может быть новое производство, и поэтому желательно избежать конкуренции за окружающее пространство.

В настоящее время диаграммы Вороного нашли свое приложение в *социологии и политологии*. В формализованных моделях n -мерное политическое пространство разбивается на непересекающиеся области: электораты различных партий. Геометрически они представляют собой полиэдры Дирихле-Вороного: совокупности точек пространства, расположенных ближе к точке платформы данной партии, чем к любой другой платформе, и отделенные от соседней совокупности точек $(n-1)$ – мерной гиперплоскостью. В [143] представлены результаты компьютерных экспериментов на моделях с двумя видами агентов – избирателями и партиями, предусматривавших возможность «рождения» и «гибели» партий.

В работе [144] продемонстрировано применение диаграмм Вороного и ее вариаций к проблеме нарезки избирательных округов в США. В качестве одного из обобщений структуры рассматривалась Voronoiesque diagram (диаграмма в стиле Вороного): изменение диаграммы Вороного на основе равных масс регионов.

Есть и другие области применения разбиений Дирихле – Вороного. Содержательные обзоры приложений диаграмм Вороного в различных областях приведены в работах [42, 150]. Широкий обзор последних технических результатов и приложений, с несколькими сотнями ссылок на литературу по вычислительной геометрии можно найти в [110]. Кроме полезности диаграмм Вороного, нельзя отрицать красоту и гармонию их геометрии, что в последнее время все больше замечают архитекторы и дизайнеры.

Несмотря на то, что многие из известных алгоритмов построения диаграмм Вороного имеют сложность $O(|M|\log(|M|))$, а некоторые из этих алго-

ритмов даже работают в среднем за $O(|M|)$, все эти алгоритмы весьма сложны.

А что касается диаграммы Вороного на случай пространства произвольной размерности, то её построение связано со значительными алгоритмическими проблемами. Действительно, известно [77], что при заданном числе N точек количество элементов, необходимых для описания диаграммы Вороного, растет экспоненциально в зависимости от размерности пространства.

Далее опишем единый подход к построению диаграммы Вороного и различных её обобщений, основанный на формулировании непрерывных задач оптимального разбиения множеств из n -мерного евклидова пространства на подмножества с критерием качества, обеспечивающим соответствующий вид диаграммы Вороного, и применении разработанного в [36, 42] математического и алгоритмического аппарата решения таких задач.

В основе этого математического аппарата лежит следующая общая идея. Исходные задачи оптимального разбиения множеств, которые математически сформулированы как бесконечномерные задачи оптимизации, сводятся через функционал Лагранжа к вспомогательным конечномерным негладким задачам максимизации либо негладким задачам максимина, для численного решения которых применяются современные эффективные методы недифференцируемой оптимизации, а именно, различные модификации γ -алгоритма Шора. Особенностью такого подхода является тот факт, что решение исходных бесконечномерных задач оптимизации удается получить аналитически в явном виде, причем в аналитическое выражение могут входить параметры, отыскиваемые как оптимальное решение вышеназванных вспомогательных конечномерных задач оптимизации с негладкими целевыми функциями.

4.1.2. Определение диаграммы Вороного и некоторых ее обобщений

Стандартной (классической) диаграммой Вороного (ДВ) конечного множества M точек τ_1, \dots, τ_N в n -мерном евклидовом пространстве E_n ($n \geq 1$) называется совокупность *многогранников Вороного* (МВ) $Vor(\tau_i), i = 1, \dots, N$, исходных точек:

$$Vor(\tau_i) = \{x \in E_n : r(x, \tau_i) \leq r(x, \tau_j), j \neq i, j = 1, \dots, N\}, \quad (4.1.1)$$

где $r(x, y)$ – определяется как одна из метрик:

$$\text{– евклидова } r(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^j - \tau_i^j)^2}, \quad (4.1.2)$$

$$\text{– манхэттенская } r(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_1 = \sum_{j=1}^n |x^j - \tau_i^j|, \quad (4.1.3)$$

$$\text{– Чебышева } r(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_0 = \max_{j=1, \dots, n} \{x^j - \tau_i^j\}. \quad (4.1.4)$$

Другими словами, диаграммой Вороного конечного множества M называется следующее множество:

$$Vor(M) = \bigcup_{\tau_i \in M} Vor(\tau_i), \text{ причем } mes(Vor(\tau_i) \cap Vor(\tau_j)) = 0.$$

Далее, если не оговорено иного, будем рассматривать случай евклидовой метрики.

МВ формируют нормальное заполнение E_n , т.е. заполняют его полностью и без наложений и примыкают друг к другу по целым граням.

МВ образованы пересечением соответствующих полупространств. Они выпуклы и могут быть неограниченными. Разбиение E_n на МВ заданного множества точек однозначно.

В поисках структуры данных, обеспечивающей эффективное решение задачи поиска k -ближайших соседей, может возникнуть желание определить области, содержащие точки, более близкие к некоторому заданному подмножеству из k элементов заданного множества M , чем к любому другому подмножеству с таким же числом элементов. Если положить $k = |M| - 1$, то получится

диаграмма Вороного дальней точки (Furthest Point Voronoi Diagram). Разработке эффективных алгоритмов построения таких диаграмм, а также вопросам их практического применения посвящены, например, работы [77, 111, 157].

Одним из наглядных способов получения диаграммы Вороного является выращивание кристаллов. Если кристаллы начинают расти в одно и то же время и с одной и той же скоростью, то получается определенное число растущих кругов, которые встречаясь, образуют прямые. В конечном счете, вся плоскость заполняется, при этом каждый кристалл точно занимает область Вороного его возникновения. В действительности, кристаллы начинают расти в разное время. Даже если они растут с одинаковой скоростью, но рост начинается в разное время, то границы между ними уже представляют собой гиперболические сегменты. Такая ситуация соответствует так называемой **аддитивно взвешенной диаграмме Вороного (Additively Weighted Voronoi Diagram)** [111]. Она опреде-

ляется как обычная (стандартная) диаграмма Вороного, но каждая точка в ней имеет свой вес w_i , который добавляется к функции, задающей расстояние, при измерении последнего:

$$AWVor(\tau_i) = \left\{ x \in E_n : r(x, \tau_i) - w_i \leq r(x, \tau_j) - w_j, \quad \forall j \neq i \right\}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Одним из наиболее интересных фактов использования аддитивно взвешенной диаграммы Вороного является ее применение в анимации. Например, в работе [155] продемонстрировано применение аддитивно взвешенных диаграмм Вороного в качестве диаграмм деформации для коррекции искаженных изображений, в электронной анимации ECTS.

Случай, когда все кристаллы начинают расти одновременно, но растут с разной скоростью, соответствует так называемой **мультипликативно взвешенной диаграмме Вороного (Multiplicatively Weighted Voronoi Diagram)** [1, 155]. Приведем её определение.

Пусть τ_1, \dots, τ_N – точки в E_n ($n \geq 1$), которым поставлены в соответствие положительные числа (веса) $w_1, \dots, w_N > 0$.

Взвешенной (мультипликативно взвешенной) областью (ячейкой) Вороного точки τ_i называют множество точек пространства, взвешенное расстояние от которых до точки τ_i не превосходит взвешенного расстояния до любой другой исходной точки:

$$MWVor(\tau_i) = \left\{ x \in E_n : r(x, \tau_i) / w_i \leq r(x, \tau_j) / w_j, \quad \forall j \neq i, \quad j = 1, \dots, N \right\}, \\ i = 1, \dots, N.$$

Области $MWVor(\tau_i)$, $i = 1, \dots, N$, образуют *взвешенную (мультипликативно взвешенную) диаграмму Вороного точек τ_1, \dots, τ_N* .

Существует еще одно обобщение диаграммы Вороного, известное под названиями: **комплексы ячеек Дирихле, диаграмма Пауэра** или **диаграмма Лаггерра (Power Voronoi Diagram)**. Пусть M – множество из N точек в пространстве E_n . С каждой точкой τ_i множества M связано действительное число w_i . Для каждой точкой $\tau_i \in M$ определим множество

$$GVor(M_i) = \left\{ x \in E_n : r^2(x, \tau_i) - w_i \leq r^2(x, \tau_j) - w_j \quad \forall j \neq i, \quad j = 1, \dots, N \right\}, \\ i = 1, \dots, N,$$

называемое обобщенной областью Вороного точки τ_i (относительно множества M). *Обобщенной диаграммой Вороного (Power Voronoi Diagram* или *Gen-*

eral Voronoi Diagram) множества M называется следующее множество $GVor(M) = \bigcup_{\tau_i \in M} GVor(\tau_i)$.

Диаграммы Вороного для N точек в n -мерном пространстве требует $O(N^{[n/2]})$ места для хранения. Следовательно, хранить диаграммы Вороного для $n > 2$ часто не представляется возможным. В качестве альтернативы можно использовать *приближенные (нечеткие) диаграммы Вороного* [136], где клетки Вороного имеют нечеткие границы, каждая из которых может быть аппроксимирована. Нечеткие диаграммы Вороного появляются и в том случае, когда любая точка множества M имеет нечеткие координаты или веса функций двух точек, определяющих ячейки Вороного, заданы нечетко.

В работе [118] изучаются *диаграммы Вороного с ограничениями на мощности точек – генераторов*. При этом в качестве мощности точки τ_i (генератора) множества $M \subset \Omega$, $\Omega \subset E_n$, выступает взвешенная площадь ячейки Вороного, определяемая следующей формулой:

$$|Vor(\tau_i)| = \int_{x \in Vor(\tau_i)} \rho(x) dx,$$

где $\rho(x) > 0$, $x \in \Omega$ – заданная функция плотности.

Диаграммой Вороного с ограничениями на мощности $|Vor(\tau_i)|$ точек $\tau_i, i = 1, \dots, N$, называют диаграмму Вороного на множестве Ω , в которой каждая точка $\tau_i \in M$ имеет свою мощность $b_i \in S$ или, что то же, диаграмма, удовлетворяющая следующему условию:

$$\int_{x \in Vor(\tau_i)} \rho(x) dx = b_i, i = 1, \dots, N,$$

причем b_1, \dots, b_N – заданные положительные числа и выполняется условие:

$$S = \int_{x \in \Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N b_i, 0 < b_i \leq S, i = 1, \dots, N.$$

Следует заметить, что такого рода диаграммы рассматривались в научной литературе задолго до появления работы [118]. Так, в работах [39, 40, 41] представлены непрерывные задачи оптимального разбиения множеств с ограничениями на мощности подмножеств, математические формулировки которых включают в себя, с точностью до обозначений, выше приведенные условия на взвешенные площади ячеек Вороного. Оптимальными разбиениями в таких

задачах и есть так называемые диаграммы Вороного с ограничениями на мощности точек-генераторов.

Еще одним обобщением являются *динамические диаграммы Вороного* [113, 138, 149]. Так, например, в [113] задача управления малым самолетом при наличии ветров проинтерпретирована как задача построения динамической диаграммы Вороного (ZVD-задача). Узлы диаграммы (точки-генераторы) – не фиксированы, а являются подвижными целями, которые необходимо достичь за минимальное время. Эта задача известна как задача навигации Цермело.

Как уже отмечалось, динамические диаграммы Вороного являются мощным инструментом при проектировании современных географических информационных систем. Об использовании данного инструментария при решении задач распознавания образов, технике, компьютерных науках см., например, в работах [111, 155].

В тех случаях, когда точки-генераторы должны быть расположены (выбираются) в ограниченном множестве $\Omega \subset E_n$, можно ввести еще один вариант диаграммы Вороного, а именно диаграмму Вороного конечного числа точек, оптимально размещенных в ограниченном множестве [51, 52].

Определение. *Диаграммой Вороного конечного числа точек-генераторов $\tau_i, i = 1, \dots, N$, оптимально размещенных в ограниченном множестве Ω , будем называть такое разбиение множества Ω на N подмножеств, при котором суммарное взвешенное расстояние от точек множества Ω до соответствующих точек-генераторов является наименьшим, т.е. функционал*

$$F(\{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{Vor(\tau_i)} (r(x, \tau_i) / w_i + a_i) \rho(x) dx,$$

принимает минимальное значение.

Замечание. Задавая значения параметров $a_1, \dots, a_N, w_1, \dots, w_N$, вид функций $r(x, \tau_i)$ и $\rho(x)$ в выражении для функционала $F(\{\tau_1, \dots, \tau_N\})$, можно получить различные варианты диаграммы Вороного с оптимальным размещением точек-генераторов (аддитивно-, мультипликативно взвешенные и др.)

Перейдем теперь к демонстрации возможности построения диаграммы Вороного и различных её обобщений на основе единого подхода, основанного на аппарате теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств, представленном в пп. 2.1.1 и 2.1.2.

4.1.3. Построение диаграммы Вороного и её различных обобщений с помощью алгоритмов решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств

Покажем, что непрерывная задача оптимального разбиения множеств может быть сформулирована с **таким** критерием качества разбиения и дополнительными условиями, которые обеспечивали бы получение в качестве ее решения соответствующий вид диаграммы Вороного.

Проиллюстрируем работу алгоритма решения непрерывной линейной задачи оптимального разбиения множеств (задачи **A**, см. п. 2.1.1) и ее частных случаев для построения стандартной (классической) диаграммы Вороного и ее различных обобщений для множества $\Omega = \{(x^1, x^2) \in R^2 : 0 \leq x^i \leq 10, i = 1, 2\}$.

Отметим, что в результате такого подхода появляется возможность строить не только уже известные диаграммы Вороного, но и конструировать новые. Так, например, решением непрерывной задачи **A2** (см. п. 2.1.3) оптимального разбиения множеств Ω на его непересекающиеся подмножества с размещением центров этих подмножеств является новая диаграмма Вороного конечного числа точек-генераторов, оптимально размещенных в ограниченном множестве, опреление которой дано в пункте 4.1.2.

На рис. 4.1 представлены полученные при решении задачи **A1** **стандартные (классические) диаграммы Вороного множества Ω** семи заданных точек при таких исходных данных: $N = 7$, функция расстояния $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i)$ определяется по одной из формул (4.1.2) – (4.1.4), $a_1 = \dots = a_N = 0$, функция плотности $\rho(x) = 1$ при всех $x \in \Omega$.

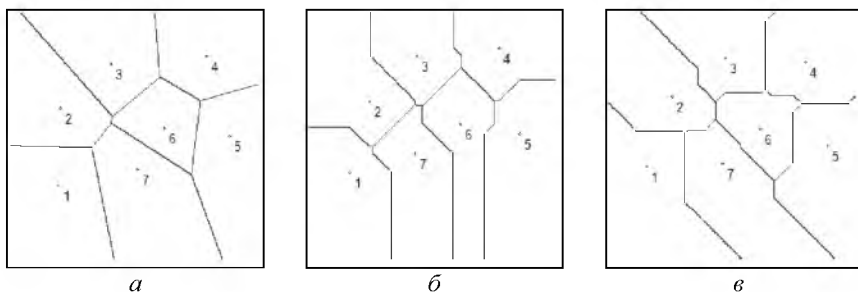


Рис. 4.1. Диаграмма Вороного семи точек в случае евклидовой метрики (а); манхеттенской метрики (б); метрики Чебышева (в)

На рис. 4.2, а, б, в соответственно представлены аддитивно взвешенные диаграммы Вороного тех же семи точек-генераторов с положительными весами $w = (1; 0.3; 0.6; 0.2; 0.9; 2; 3)$, с отрицательными весами $w = (-1; -0.3; -0.6; -0.2; -0.9; -2; -3)$ и в случае, когда веса принимают значения разных знаков $w = (1; 0.3; 0.6; -0.2; -0.9; -1.3; 0)$. Эти диаграммы получены в результате решения задачи **A1** при выборе в качестве функции расстояния – евклидовой метрики, параметров $a_i = -w_i, i = \overline{1, 7}, \rho(x) = 1$ при всех $x \in \Omega$.

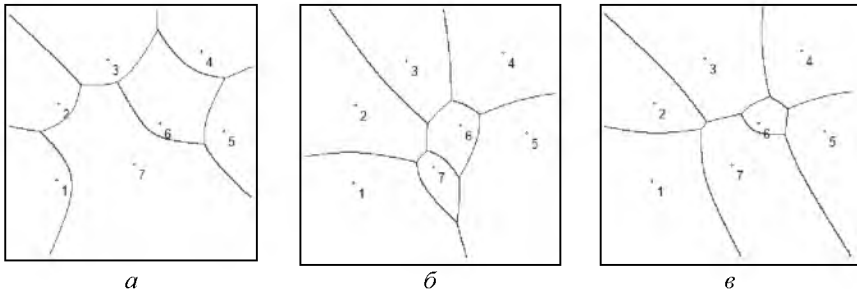


Рис. 4.2. Аддитивно взвешенная диаграмма Вороного семи точек-генераторов с весами: положительными (а); отрицательными (б); принимающими значения различных знаков (в)

При решении задачи **A1** (см. п. 2.1.2) с функцией $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i) / w_i$, где $r(x, \tau_i)$ – евклидова метрика, $w = (1; 0.3; 0.6; 0.2; 0.9; 0.4; 0.8)$, $a_1 = \dots = a_7 = 0$, $\rho(x) = 1$ при всех $x \in \Omega$, а координаты точек-генераторов $\tau_i, i = \overline{1, 7}$, – такие же, как и выше, получена **мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного**, представленная на рис. 4.3. Нетрудно заметить, что границы между различными ячейками в аддитивно взвешенной диаграмме представляют собой сегменты ветвей гипербол, а в мультипликативно взвешенной – сегменты окружностей.

При задании ненулевых значений параметров $a_i, i = \overline{1, 7}$, а именно $a = (-0.3; -0.7; -1; -2; -0.6; 0.9; 1)$, решение той же задачи **A1** (см. п. 2.1.2) приводит к **аддитивно и мультипликативно взвешенной диаграмме Вороного** с весами $w_i = -a_i, i = \overline{1, 7}$, изображенной на рис. 4.4.

Если в качестве функции $c(x, \tau_i)$ рассматривать квадрат расстояния между двумя точками, т.е. $c(x, \tau_i) = r^2(x, \tau_i) = (x_i^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2 + (x_i^{(2)} - \tau_i^{(2)})^2$, а значения параметров $a_i, i = \overline{1, 7}$, задать так $a = (1; 0.3; 0.6; -0.2; -0.9; -1.3; 0)$, то при решении задачи **A1** (см. п. 2.1.2) можно получить **диаграмму Пауэра (диаграмма Лагерра)** с весами $w_i = a_i, i = \overline{-1, 7}$, представленную на рис. 4.5.

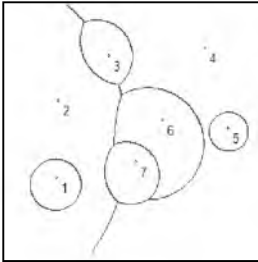


Рис. 4.3. Мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного

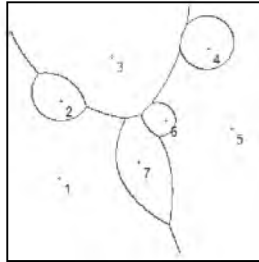


Рис. 4.4. Аддитивно и мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного

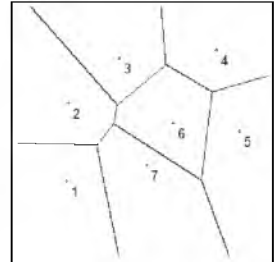


Рис. 4.5. Диаграмма Пауэра

На рис. 4.6 представлена диаграмма Вороного дальней точки, полученная при решении задачи **A1** (см. п. 2.1.2) при $c(x, \tau_i) = -r(x, \tau_i)$, где $r(x, \tau_i)$ – евклидова метрика, $a_1 = \dots = a_7 = 0$, $\rho(x) = 1$ при всех $x \in \Omega$.

Диаграмма Вороного семи точек-генераторов с **ограниченными мощностями** третьей и шестой ячеек приведена на рис. 4.7. Она получена в результате решения задачи **A3** (см. п. 2.1.4) со следующими исходными данными:

$$N = 7, p = 7, c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i) = \sqrt{(x_i^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2 + (x_i^{(2)} - \tau_i^{(2)})^2}, a_1 = \dots = a_7 = 0, \rho(x) = 1 \text{ при всех } x \in \Omega, b = (200, 200, 5, 200, 200, 2, 200).$$

Решением задачи **A2** (см. п. 2.1.3) при $N = 7, c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i) = \sqrt{(x_i^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2 + (x_i^{(2)} - \tau_i^{(2)})^2}, a_1 = \dots = a_7 = 0, \rho(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$, является так называемая диаграмма Вороного с оптимальным размещением семи точек, изображенная на рис. 4.8. Заметим, что такое расположение точек-генераторов получается с точностью до нумерации из любого начального приближения координат этих точек. Оптимальные координаты центров: $\tau_1 = (1.8, 2.08)$,

$\tau_2=(2.56,4.24)$, $\tau_3=(5.24,5.92)$, $\tau_4=(4.24,4.8)$, $\tau_5=(6.04,1.84)$, $\tau_6=(1.48,7)$,
 $\tau_7=(4.64,8.84)$.

На рис. 4.9 изображена полученная при решении задачи A2 (см. п. 2.1.3) аддитивно взвешенная диаграмма Вороного с оптимальным размещением точек-генераторов в заданной области при таких исходных данных:

$w = (1; 2; 1; 2; 1; 2; 1)$; $c(x, \tau_i) = \sqrt{(x_i^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2 + (x_i^{(2)} - \tau_i^{(2)})^2}$; $a = (-1; -2; -1; -2; -1; -2; -1)$.

Оптимальные координаты центров: $\tau_1=(2.48,1.56)$, $\tau_2=(1.46,4.98)$,

$\tau_3=(4.98,4.98)$, $\tau_4=(8.50,4.98)$, $\tau_5=(4.47,1.55)$, $\tau_6=(2.48,8.40)$, $\tau_7=(4.47,8.40)$.

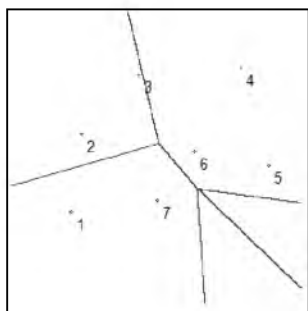


Рис. 4.6. Диаграмма Вороного дальней точки

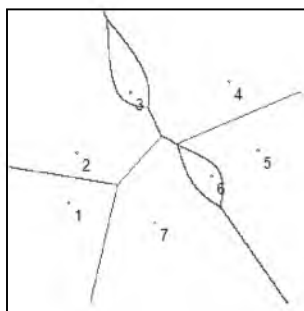


Рис. 4.7. Диаграмма Вороного с ограниченными мощностями третьей и шестой ячеек

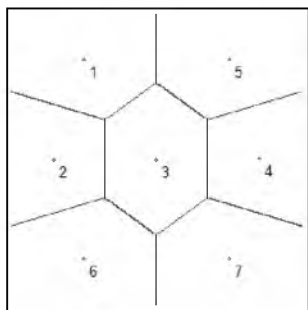


Рис. 4.8. Диаграмма Вороного с оптимальным размещением семи точек-генераторов

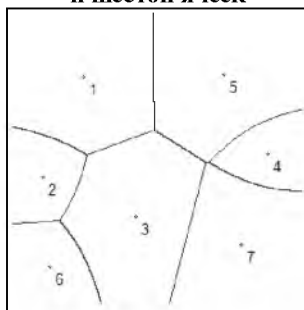


Рис. 4.9. Аддитивно взвешенная диаграмма Вороного с оптимальным размещением точек-генераторов

Варианты диаграммы Вороного, полученные при решении задачи **A1** (см. п. 2.1.2) при соответствующих способах задания подинтегральной функции критерия качества разбиения, в которых расстояние между двумя точками определяется **манхэттенской метрикой**, представлены на рис. 4.10 а, б, в, г соответственно при следующих векторах весовых коэффициентов: $w = \Theta$, $a = \Theta$; $a = (-2; -1; -3; -1; -4; -1; -2)$, $w = \Theta$; $w = (2; 1; 3; 1; 4; 1; 2)$, $a = \Theta$; $w = (2; 1; 3; 1; 4; 1; 2)$; $a = (1; 3; 2; 2; 1; 1; 2)$.

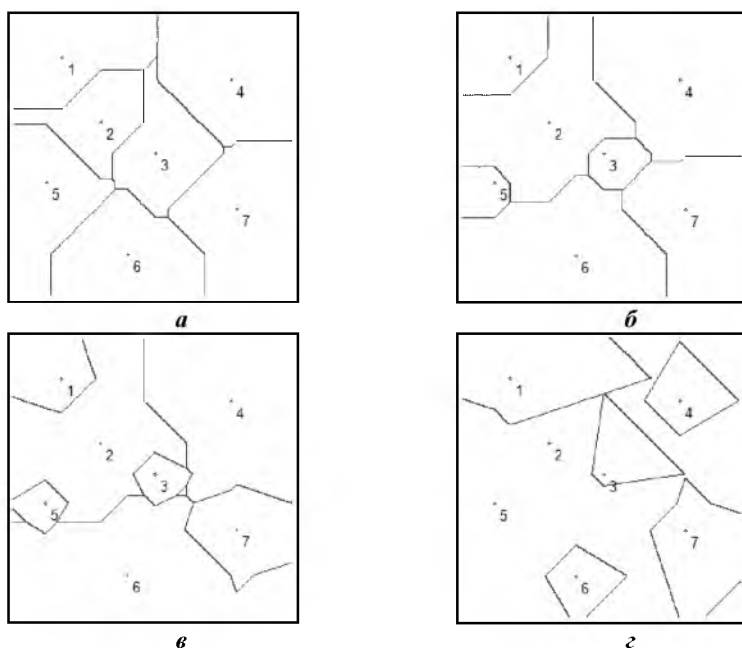


Рис. 4.10. Диаграмма Вороного семи точек при манхэттенской метрике: стандартная (а); аддитивно взвешенная (б); мультипликативно взвешенная (в); аддитивно и мультипликативно взвешенная (г)

На рис. 4.11 а, б, в соответственно приведены диаграммы Вороного для случая выбора **метрики Чебышева** в качестве функции расстояния между точками множества и точками-генераторами стандартная, аддитивно и мультипликативно взвешенные с одинаковыми весами $w = (2; 1; 2; 1; 2; 1; 3)$.

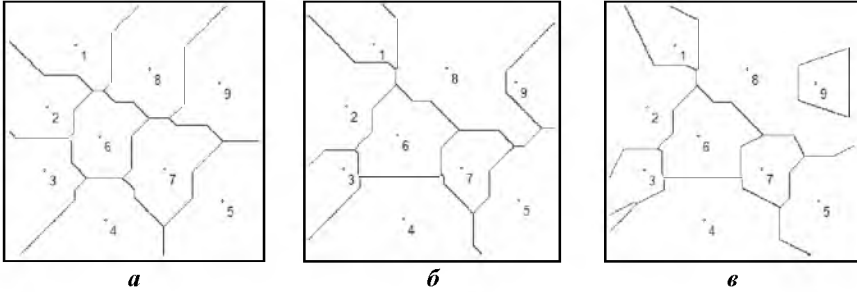


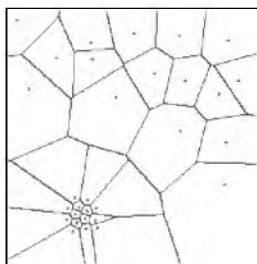
Рис. 4.11. Диаграмма Вороного девяти точек при метрике Чебышева: стандартная (а); аддитивно взвешенная (б); мультипликативно взвешенная (в)

Все приведенные выше взвешенные диаграммы Вороного рассматривались для случая, когда вес имели лишь точки-генераторы. Описанный в статье подход к построению диаграммы Вороного, основанный на применении методов ОРМ, позволяет легко строить диаграмму Вороного для множества Ω , каждая точка которого имеет свой собственный вес. Этот вес в задачах ОРМ определяется функцией плотности $\rho(x)$. Так, например, представленные на рис. 4.12 диаграммы Вороного тридцати точек-генераторов, оптимально размещенных во взвешенной области Ω , получены при решении задачи **A1** (см. п. 2.1.2) с нулевыми параметрами $a_i, i = \overline{1, N}$. Рис. 4.12, а и рис. 4.12, б соответствуют заданиям весовой функции плотности в виде $\rho(x) = 300e^{-(x^{(1)}-3)^2 - 4(x^{(2)}-8)^2}$ и

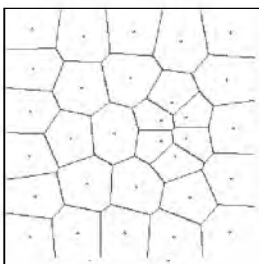
$$\rho(x) = \begin{cases} 10, & \text{если } 0.25(x^{(1)} - 6.7)^2 - 0.44(x^{(2)} - 8)^2 < 1 \\ 0.1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

соответственно.

На рис. 4.13 представлена **диаграмма Вороного десяти точек с ограниченными мощностями ячеек Вороного**, полученная при решении задачи **A3** (см. п. 2.1.4) при таких значениях параметров: $a_i = 0, i = \overline{1, 10}$, $b_i = 100, i = \overline{1, 10}, i \neq 3, 6$; $b_3 = 5, b_6 = 2, p = 10$.



a



б

Рис. 4.12. Диаграммы Вороного с оптимальным размещением тридцати точек-генераторов для разных функций $\rho(x)$

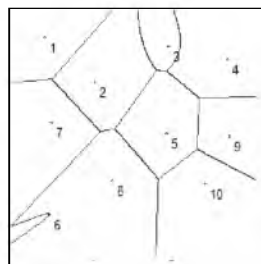
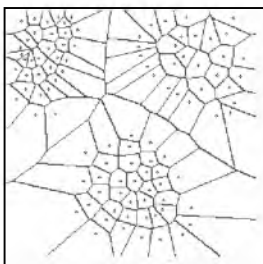
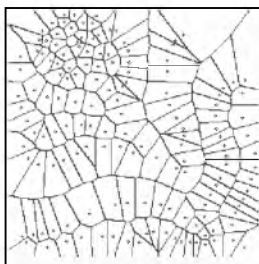


Рис. 4.13. Диаграмма Вороного с ограничением на мощности третьей и шестой ячеек

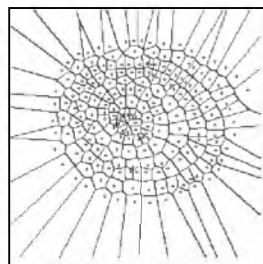
Диаграммы, представленные на рис. 4.14, 4.15, свидетельствуют о том, что сложность алгоритмов построения диаграмм Вороного на основе описанного в статье подхода существенно не меняется при увеличении количества точек-генераторов.



a



б



в

Рис.4.14. Диаграммы Вороного, генерируемые N точками, полученные при решении непрерывной линейной задачи ОРМ без ограничений с заданным расположением центров подмножеств: $N= 100$ (*a*); $N= 150$ (*б*); $N= 200$ (*в*)

Таким образом, при соответствующей формулировке непрерывной линейной задачи оптимального разбиения множества решение этой задачи приводит к тому или иному варианту диаграммы Вороного заданного числа точек. Заметим также, что алгоритмы решения непрерывных линейных задач ОРМ обладают рядом достоинств: не зависят от размерности пространства E_n (вопрос сводится лишь к вычислению многомерных интегралов); не зависят от

геометрии разбиваемых множеств; благодаря высокому быстродействию г-алгоритма Шора применимы для задач больших размерностей ($N=100, 200, 300$ и т.д.).

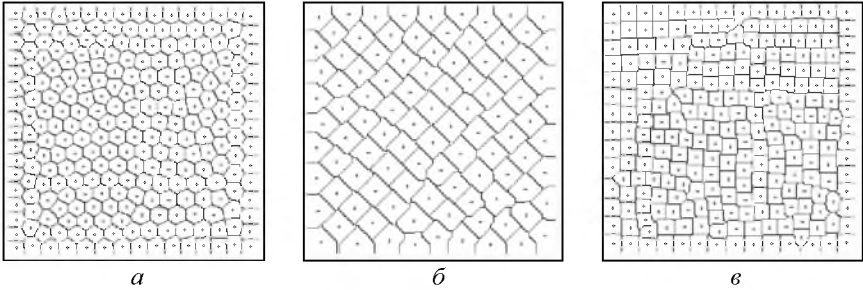


Рис.4.15. Диаграммы Вороного с оптимальным размещением N точек-генераторов: евклидова метрика при $N= 250$ (а); манхэттенская метрика при $N= 100$ (б); метрика Чебышева при $N= 250$ (в)

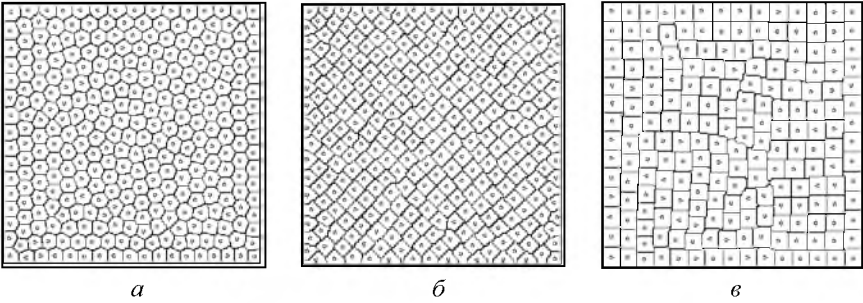


Рис.4.15. Диаграммы Вороного с оптимальным размещением N точек-генераторов: евклидова метрика при $N= 300$ (а); манхэттенская метрика при $N= 300$ (б); метрика Чебышева при $N= 200$ (в)

В табл. 4.1 приведено соответствие между конкретным вариантом диаграммы Вороного и математической моделью непрерывной задачи оптимального разбиения множеств, в результате решения которой может быть получена эта диаграмма.

Таблица 4.1 Модели непрерывных задач ОРМ и диаграммы Вороного, являющиеся оптимальным решением этих задач

Модель непрерывной задачи ОРМ	Диаграмма Вороного
Задача А1: $\rho(x) = 1 \quad x \in \Omega$, $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i), \quad a_i = 0, \quad i = \overline{1, N}$	Стандартная
Задача А1: $\rho(x) = 1 \quad x \in \Omega$, $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i), \quad a_i \neq 0, \quad i = \overline{1, N}$	Аддитивно взвешенная
Задача А1: $\rho(x) = 1 \quad x \in \Omega$, $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i) / w_i, \quad w_i > 0, \quad a_i = 0, \quad \forall i$	Мультипликативно взвешенная
Задача А1: $\rho(x) = 1 \quad x \in \Omega$, $c(x, \tau_i) = \beta_i r(x, \tau_i), \quad \beta_i, a_i > 0, \quad i = \overline{1, N}$	Мультипликативно и аддитивно взвешенная
Задача А1: $\rho(x) = 1 \quad x \in \Omega$, $c(x, \tau_i) = r^2(x, \tau_i), \quad a_i = A_i^2, \quad i = \overline{1, N}$	Диаграмма Пауэра или Лагерра (Power Voronoi Diagram) с весами A_i^2
Задача А1: $\rho(x) = 1 \quad x \in \Omega$, $c(x, \tau_i) = -r(x, \tau_i), \quad a_i = 0, \quad i = \overline{1, N}$	Дальней точки
Задачи А1: $\rho(x)$ – произвольная $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i), \quad a_i = Const, \quad i = \overline{1, N}$	Другие взвешенные диаграммы
Задача А1: $\rho(x) = 1 \quad x \in \Omega$, $c(x, \tau_i) = f_i(x, \tau_i), \quad a_i = 0, \quad i = \overline{1, N}$	Основанная на эффективности
Задача А2: $\rho(x) = 1 \quad x \in \Omega$, $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i), \quad a_i = 0, \quad i = \overline{1, N}$	Конечного числа точек-генераторов, оптимально размещенных в Ω
Задача А2: $\rho(x) = 1 \quad x \in \Omega$, $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i), \quad a_i \neq 0, \quad i = \overline{1, N}$	Аддитивно взвешенная конечного числа точек-генераторов, оптимально размещенных в Ω
Задача А3: $\rho(x) = 1 \quad x \in \Omega$, $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i), \quad a_i = 0, \quad i = \overline{1, N}$	С ограничениями на мощности точек-генераторов
Задача А3: $\rho(x) = 1 \quad x \in \Omega$, $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i), \quad a_i \neq 0, \quad i = \overline{1, N}$	Аддитивно взвешенная с ограничениями на мощности точек-генераторов
Задача А3: $\rho(x) = 1 \quad x \in \Omega$, $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i) / w_i, \quad w_i > 0, \quad a_i \neq 0, \quad \forall i$	Мультипликативно и аддитивно взвешенная с ограничениями на мощности точек-генераторов

Таблицу 4.1 можно продолжить, изменяя параметры задачи **A** (см. п. 2.4.1) и получая при этом все новые, не представленные в научной литературе, обобщения диаграммы Вороного.

С учетом вышеизложенного можно утверждать, что единым подходом (способом) построения различных вариантов диаграммы Вороного является подход, основанный на формулировании непрерывных задач оптимального разбиения множеств с критериями качества разбиения, обеспечивающими соответствующие виды диаграммы Вороного, и применении разработанного в [36, 42] математического и алгоритмического аппарата решения таких задач.

Универсальность данного подхода к построению диаграмм Вороного подтверждается еще и следующими фактами:

- модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств могут быть обобщены на случай нечеткого задания исходных параметров задачи или требования нечеткого разбиения множества, в результате чего и результирующие диаграммы Вороного могут носить нечеткий характер [136];

- если при математическом описании практических задачах оптимального разбиения множеств учитывать состояние некоторого объекта или процесса, которое может изменяться со временем и/или в пространстве, то можно получить в результате решения некоторых таких задач динамические диаграммы Вороного [113];

- среди непрерывных задач оптимального разбиения множеств выделяют класс задач, в которых наряду с разбиением нужно отыскать еще и оптимальное расположение центров подмножеств. Таким образом, наряду с задачей построения диаграммы Вороного можно ставить задачу отыскания оптимальных (в каком-то смысле) координат точек-генераторов этой диаграммы;

- сложность алгоритмов построения диаграмм Вороного на основе описанного подхода существенно не меняется при увеличении количества точек-генераторов;

- результатом такого подхода является возможность строить не только уже известные диаграммы Вороного, но и конструировать новые.

4.2. Построение оптимальных квадратур

Рассматривается задача построения оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов вида

$$\int_{\Omega} f(x) dx,$$

где Ω – измеримое множество конечной лебеговой меры в n -мерном евклидовом пространстве E_n .

Функции f принадлежат классу F_c измеримых на Ω функций, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x) - f(\tau_i)| \leq c(x, \tau_i), \text{ для всех } x, \tau_i \in \Omega,$$

где функции $c(x, \tau_i)$ – ограниченные, определенные на $\Omega \times \Omega$, измеримые по x при любом фиксированном τ_i из Ω и обладают следующими свойствами квазиметрики (являются квазиметрикой) [87]:

$$c(x, x) = 0,$$

$$c(x, \tau_i) + c(y, \tau_i) \geq c(x, y),$$

$$c(x, y) = c(y, x),$$

$$c(x, \tau_i) \geq 0$$

для любых $x, y, \tau_i \in \Omega$

С помощью различных квазиметрик $c(\cdot, \cdot)$ можно описать многие важные, с точки зрения теории и приложений, функциональные классы. Частными случаями функционального класса, заданного квазиметриками, являются классы функций, удовлетворяющие различным формам условий Липшица или Гельдера с фиксированной константой или с разными константами в разных подобластях области определения; классы, заданные модулями непрерывности, и т. д.

Отметим также, что классы F_c содержат разрывные функции, если функция $c(\cdot, \cdot)$ является разрывной [87].

Традиционно всякая квадратурная формула вида

$$\int_{\Omega} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N p_i f(\tau_i) \quad (4.2.1)$$

задается вектором коэффициентов и узлов $(p^N, \tau^N) = \{p_1, \dots, p_N, \tau_1, \dots, \tau_N\}$, где p_1, \dots, p_N – произвольные действительные числа, а

$\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n)$, $i = 1, \dots, N$, – точки из Ω ;

– оптимальными на классе F_c коэффициентами квадратурной формулы при фиксированных узлах τ_1, \dots, τ_N называют (см. [87]) коэффициенты $p_1^*(\tau^N), \dots, p_N^*(\tau^N)$, для которых

$$\sup_{f \in F_c} \left| \int_{\Omega} f(x) dx - \sum_{i=1}^N p_i^*(\tau^N) f(\tau_i) \right| = \min_{p^N \in E^N} \sup_{f \in F_c} \left| \int_{\Omega} f(x) dx - \sum_{i=1}^N p_i f(\tau_i) \right|; \quad (4.2.2)$$

– оптимальными на классе F_c узлами называют узлы $\tau_1^*, \dots, \tau_N^* \in \Omega$, для которых

$$\begin{aligned} & \min_{p^N \in E^N} \sup_{f \in F_c} \left| \int_{\Omega} f(x) dx - \sum_{i=1}^N p_i f(\tau_i^*) \right| = \\ & = \min_{\tau^N \in \Omega^N} \min_{p^N \in E^N} \sup_{f \in F_c} \left| \int_{\Omega} f(x) dx - \sum_{i=1}^N p_i f(\tau_i) \right|, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

где

$$\Omega^N = \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N, \quad E^N = \underbrace{E_1 \times \dots \times E_1}_N;$$

– квадратурная формула с оптимальными узлами и оптимальными коэффициентами называется оптимальной.

Таким образом, задача построения оптимальной квадратурной формулы сводится к задаче одновременного отыскания оптимальных узлов $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ (см. (4.2.3)) и оптимальных коэффициентов (см. (4.2.2)) этой квадратурной формулы.

4.2.1. Сведение задачи построения оптимальных квадратур к задаче оптимального разбиения множества

Для численного решения задачи одновременного отыскания оптимальных узлов $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ и оптимальных коэффициентов p_1^*, \dots, p_N^* рассматриваемой квадратурной формулы (4.2.1) сведём эту задачу к задаче **A2** (см. п. 2.1.3) оптимального разбиения множества Ω на подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ с одновременным отысканием координат центров этих подмножеств, совпадающих с координатами оптимальных узлов квадратурной формулы. В то же время значения оптимальных коэффициентов будем вычислять как лебеговы меры подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, на которые разбивается множество Ω .

Напомним (см. п. 2.1.3), что оптимальное решение задачи **A2** достигается при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ на вектор-функции $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_i^*(x), \dots, \lambda_N^*(x))$, i -я компонента которой имеет вид:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_i) = \min_{k=1, \dots, N} c(x, \tau_k), \text{ тогда } x \in \Omega_i^*, \\ 0 & \text{в остальных случаях, тогда } x \notin \Omega_i^*; \end{cases} \quad (4.2.4)$$

и векторе $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$, являющегося оптимальным решением задачи

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, 2, \dots, N} c(x, \tau_i) dx \rightarrow \min, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega. \quad (4.2.5)$$

Как уже отмечалось в разделе 4.1, оптимальное решение задачи **A2**, определяемое для каждого фиксированного $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$ по формулам (4.2.4) вектор-функцией $\lambda_*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_N^*(x))$, оказывается разбиением Вороного. В рассматриваемом случае, когда c – квазиметрика, подмножества $\Omega_i(\tau^N)$, образующие разбиение Вороного, и их лебеговы меры $\mu(\Omega_i(\tau^N))$ определяются, вообще говоря, неоднозначно.

В работе [87] доказано, что квадратурная формула вида (4.2.1) с коэффициентами $p_i^*(\tau^N) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(\Omega_i(\tau^N))$, $i = 1, \dots, N$, оптимальна на классе F_c среди квадратурных формул с фиксированными узлами τ_1, \dots, τ_N , а гарантированный ею результат равен

$$\int_{\Omega} \min_{i=1, 2, \dots, N} c(x, \tau_i) dx \quad (\text{максимальная погрешность}) \\ \sup_{f \in F_c} \left| \int_{\Omega} f(x) dx - \sum_{i=1}^N p_i^*(\tau^N) f(\tau_i) \right|.$$

Кроме того, решение задачи отыскания оптимальных узлов квадратурной формулы сводится к отысканию в области Ω таких точек $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$, что

$$\int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i^*) dx = \min_{\tau^N \in \Omega^N} \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) dx,$$

и наилучший на классе F_c во множестве всех квадратурных формул результат равен

$$m_N \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\tau^N \in \Omega^N} \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) dx. \quad (4.2.6)$$

Сравнивая формулы (4.2.5) и (4.2.6), приходим к выводу, что, с одной сто-

роны, (p_*^N, τ_*^N) – это вектор оптимальных коэффициентов и оптимальных узлов квадратурной формулы (4.2.1), задающий наилучшую гарантированную точность m_N , с другой стороны, пара $(\lambda_*(\cdot), \tau_*^N)$ – задает оптимальное разбиение множества Ω на подмножества $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$ с оптимальными координатами центров подмножеств $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ и оптимальным значением функционала $G(\tau_*^N)$, равным m_N .

Отсюда следует, что решая оптимизационную задачу **A2** оптимального разбиения множества Ω на подмножества $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$ с отысканием координат центров этих подмножеств $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$, можно найти значения координат оптимальных узлов $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ и значения оптимальных коэффициентов $p_i^*(\tau_*^N) \stackrel{def}{=} \mu(\Omega_i^*(\tau_*^N))$, $i = 1, \dots, N$, квадратурной формулы (4.2.1).

4.2.2. Алгоритм отыскания узлов оптимальной квадратурной формулы

Для отыскания координат оптимальных узлов $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ квадратурной формулы (4.2.1) воспользуемся алгоритмом **2.1** решения задачи **A** (см. п.2.1.1) с учётом того, что задача **A2** (см. п. 2.1.3) является частным случаем задачи **A**.

Определим i -ю компоненту N -мерного вектора обобщенного градиента $g_G(\tau) = (g_G^1(\tau), \dots, g_G^N(\tau))$ функции $G(\tau)$ в точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ следующим образом:

$$g_G^i(\tau) = \int_{\Omega} g_c^i(x, \tau) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.2.7)$$

Здесь $g_c^i(x, \tau)$ – i -я компонента N -мерного вектора обобщенного градиента $g_c^i(x, \tau)$ функции $c(x, \tau_i)$ в точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$, где $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ при фиксированном x имеет вид:

$$g_c^i(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau) \\ \dots\dots\dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau) \end{pmatrix}.$$

Сформулируем алгоритм **4.1** отыскания координат узлов оптимальной квадратурной формулы (4.2.1).

Алгоритм 4.1

Область Ω заключаем в n -мерный параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаём начальное приближение $\tau = \tau^{(0)}$. Вычисляем значения $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (4.2.4) при $\tau = \tau^{(0)}$, значения $g_G(\tau)$ – по формуле (4.2.7) при $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\tau = \tau^{(0)}$, выбираем начальный пробный шаг g -алгоритма $h_0 > 0$, и находим:

$$\tau^1 = P_{\Pi} \left(\tau^0 - h_0 \frac{H_1 g_G(\tau^0)}{\sqrt{(H_1 g_G(\tau^0), g_G(\tau^0))}} \right),$$

P_{Π} – оператор проектирования на Π .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после $k, k = 1, 2, \dots$, шагов алгоритма получены определённые значения $\tau^{k-1}, \lambda^{k-1}(x)$ в узлах сетки. Опишем $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значения $\lambda^k(x)$ в узлах сетки по формулам (4.2.4) при $\tau = \tau^k$.
2. Находим значения $g_G(\tau)$ по формулам (4.2.7) при $\lambda(x) = \lambda^k(x)$, $\tau = \tau^k$.
3. Проводим $(k+1)$ -й шаг g -алгоритма в H -форме [101], итерационная формула которого имеет вид:

$$\tau^{k+1} = P_{\Pi} \left(\tau^k - h_k \frac{H_{k+1} g_G(\tau^k)}{\sqrt{(H_{k+1} g_G(\tau^k), g_G(\tau^k))}} \right).$$

4. Если условия

$$\| \tau^k - \tau^{k+1} \| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tag{4.2.8}$$

не выполняются, переходим к $(k+2)$ -му шагу алгоритма, в противном случае – переход к п. 5.

5. Полагаем $\lambda_*(x) = \lambda^l(x)$, $\tau_* = \tau^l$, где l – номер итерации, на которой

выполнилось условие (4.2.8).

б. Вычисляем оптимальное значение целевой функции по формуле

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \rho(x) dx, \quad \text{при } \tau = \tau_*.$$

Алгоритм 4.1 описан.

4.2.3. Алгоритмы отыскания коэффициентов оптимальной квадратурной формулы

В результате работы алгоритма 4.1 наряду с координатами оптимальных узлов $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ квадратурной формулы и значением наилучшей гарантированной точности m_N , равным $G(\tau_*^N)$ из (4.2.5), будет также найдено оптимальное разбиение множества Ω на подмножества $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$ в виде характеристической вектор-функции $\lambda_*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_N^*(x))$. Значения оптимальных коэффициентов $p_i^*(\tau_*^N)$, $i = 1, \dots, N$, квадратурной формулы (4.2.1) равны мерам соответствующих подмножеств $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$, определяемых алгоритмом 4.1.

Опишем схему алгоритма 4.2 вычисления оптимальных коэффициентов $p_i^*(\tau_*^N)$, $i = 1, 2, \dots, N$, как мер $\mu(\Omega_i^*(\tau_*^N))$ для случая, когда заранее неизвестна геометрическая форма границ между подмножествами Ω_i^* и Ω_j^* . Считаем при этом найденными алгоритмом 4.2 значения оптимальных узлов $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ квадратурной формулы, а также оптимальное разбиение множества Ω на подмножества $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$, представленное в виде характеристической вектор-функции $\lambda_*(\cdot)$.

Алгоритм 4.2 опишем для случая $\Omega \subset E_n$.

Алгоритм 4.2

Шаг 1. Множество $\Omega \subset E_n$ покрываем сеткой, составленной из n -мерных параллелепипедов. С этой целью зададим набор чисел M^1, M^2, \dots, M^n , каждое из которых характеризует количество точек разбиения по каждой из сторон n -мерного параллелепипеда. Находим узлы сетки

$$x_i^j = a^j + (i^j - 1) \cdot h^j, \quad (4.2.9)$$

где $h^j = \frac{b^j - a^j}{M^j}$ – шаг сетки, $i^j = \overline{1, M^j - 1}$, $j = \overline{1, n}$, $x_i^j \in \Omega$.

Шаг 2. В каждом узле сетки, построенной на шаге 1, $x_{i^1, \dots, i^n} = (x_{i^1}^{(1)}, \dots, x_{i^n}^{(n)})$, $i^1 = \overline{1, M^1 - 1}, \dots, i^n = \overline{1, M^n - 1}$, вычисляем значения характеристической функции по следующей формуле:

$$\lambda_k^*(x_{i^1, \dots, i^n}) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x_{i^1, \dots, i^n}, \tau_k^*) = \min_{q=1, \dots, N} c(x_{i^1, \dots, i^n}, \tau_q^*), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Шаг 3. Зададим вектор $S = (S_1, \dots, S_N) = \theta$, содержащий информацию о мерах полученных оптимальных подмножеств $\Omega_1^{*(1)}, \dots, \Omega_N^{*(n)}$. Здесь S_i хранит информацию о мере подмножества Ω_i^* с центром в точке τ_i^* .

Шаг 4. Рассмотрим для $\forall i^j = \overline{1, M^j - 1}$, $j = 1, \dots, n$ параллелепипед

$$[x_{i^1}^1, x_{(i+1)^1}^1] \times [x_{i^2}^2, x_{(i+1)^2}^2] \times \dots \times [x_{i^n}^n, x_{(i+1)^n}^n]. \quad (4.2.10)$$

Все вершины параллелепипеда (4.2.10) обозначим как A_{k^1, \dots, k^n} , $k^1 = i^1 \vee (i+1)^1, \dots, k^n = i^n \vee (i+1)^n$. Для всех полученных 2^n вершин найдем значения характеристической функции $\lambda(\cdot)$ по формулам из шага 2.

4.1. Если все 2^n значений характеристической функции $\lambda(\cdot)$ совпадают и равны некоторому числу p , то параллелепипед (4.2.10) целиком принадлежит множеству Ω_p . Найдём меру этого параллелепипеда и увеличим i -ю компоненту вектора S на эту величину: $S_i \leftarrow S_i + V_{i^1, i^2, \dots, i^n}$.

4.2. Если же среди 2^n значений характеристической функции есть различные, то:

– находим количество Q оптимальных подмножеств, которые частично находятся в данном параллелепипеде (4.2.10);

– находим оптимальные границы и точку пересечения всех подмножеств, которые входят в (4.2.10);

– имея информацию о всех гранях и вершинах частей оптимальных множеств, находим меры этих сложных фигур и относим их к соответствующим компонентам вектора $S = (S_1, \dots, S_N)$: $S_i \leftarrow S_i + V_i$, $i = \overline{1, Q}$.

Шаг 5. Если все параллелепипеды из пространства Ω рассмотрены, то

получим вектор $S = (S_1, \dots, S_N)$, содержащий значения мер оптимальных подмножеств, и алгоритм завершает свою работу. Иначе – переход на шаг 4.

Алгоритм 4.2 описан.

Описанный алгоритм 4.2 конкретизируем для случая $\Omega \subset E_2$.

Алгоритм 4.3

Шаг 1. Область $\Omega \subset E_2$ заключаем в прямоугольник $\{x_a \leq x \leq x_b, y_a \leq y \leq y_b\}$ и покрываем его сеткой. Задаем значения M^1, M^2 – число узлов сетки по оси абсцисс и ординат, соответственно, так что

$$x_i = x_a + (i-1)h^1, \quad y_j = y_a + (j-1)h^2, \quad (4.2.11)$$

где $h^1 = \frac{x_b - x_a}{M^1}$, $h^2 = \frac{y_b - y_a}{M^2}$, $i = \overline{1, M^1 - 1}$, $j = \overline{1, M^2 - 1}$ – шаг сетки по осям абсцисс и ординат соответственно.

Значения M^1, M^2 должны быть согласованы с задаваемой точностью приближенных вычислений.

Шаг 2. В каждом узле сетки (x_i, y_j) , $i = \overline{1, M^1 - 1}$, $j = \overline{1, M^2 - 1}$, полученном по формулам (4.2.11), вычислим значения характеристической функции по формуле

$$\lambda_k^*(x_{i^1, \dots, i^n}) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x_{i^1, \dots, i^n}, \tau_k^*) = \min_{q=1, \dots, N} c(x_{i^1, \dots, i^n}, \tau_q^*), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Шаг 3. Зададим вектор $S = (S_1, \dots, S_N)$ мер подмножеств $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$ в виде $S = (S_1, S_2, \dots, S_N) = (\underbrace{0, \dots, 0}_N)$, где S_i мера подмножества Ω_i^* с центром τ_i^* .

Шаг 4. Рассмотрим для $\forall i^j = \overline{1, M^j - 1}$, $j = 1, \dots, n$ прямоугольник

$$[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]. \quad (4.2.12)$$

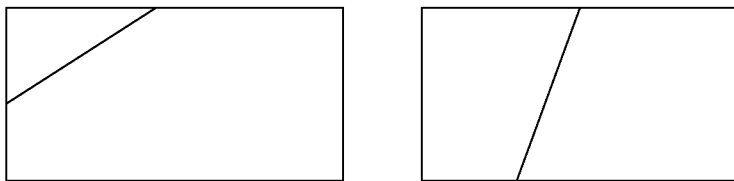
Обозначим вершины прямоугольника (4.2.12): $A_1 = (x_i, y_j)$, $A_2 = (x_i, y_{j+1})$, $A_3 = (x_{i+1}, y_{j+1})$, $A_4 = (x_{i+1}, y_j)$. Для полученных вершин найдем значения характеристической функции $\lambda(\cdot)$ по формулам из шага 2.

4.1. Если равенство $\lambda(A_1) = \lambda(A_2) = \lambda(A_3) = \lambda(A_4) = p$ выполняется

ся, то прямоугольник (4.2.12) целиком принадлежит множеству Ω_p . Находим меру этого прямоугольника (равную $h^1 \cdot h^2$) и полагаем $S_i \leftarrow S_i + h^1 \cdot h^2$. Если же равенство не выполняется – на шаг 4.2.

4.2. Находим число Q оптимальных подмножеств, которые частично находятся в прямоугольнике (4.2.12). Для этого находим число отличных друг от друга значений $\lambda(A_i)$; оптимальные границы и точку пересечения всех подмножеств, которые входят в состав рассматриваемого прямоугольника (4.2.12), находим с помощью следующей процедуры.

4.2.1. Пусть прямоугольник (4.2.12) содержит части лишь двух разных оптимальных подмножеств. Тогда рассматриваем случаи:



Все другие возможные случаи сводятся к этим двум принципиально разным случаям путем поворота рассматриваемого прямоугольника. В первом случае часть одного множества имеет вид треугольника, а во втором – четырехугольника. Другое множество представлено пятиугольником и четырехугольником соответственно.

Для нахождения мер этих фигур необходима информация об их вершинах. Ее можно получить с помощью известной уже информации о координатах вершин прямоугольника A_1, \dots, A_4 .

Зададим функцию $f(x, k, m) = c(x, \tau_k^*) - c(x, \tau_m^*)$, где k и m – номера подмножеств, которые частично принадлежат прямоугольнику (4.2.12). Очевидно, что в точках, принадлежащих границе между оптимальными множествами Ω_k^* и Ω_m^* , имеет место следующее равенство:

$$c(x, \tau_k^*) = c(x, \tau_m^*) \Rightarrow f(x, k, m) = 0.$$

Итак, отыскивать координаты вершин оптимальных подмножеств Ω_k^* и Ω_m^* , которые частично принадлежат прямоугольнику (4.2.12), будем следующим образом:

– выбираем сторону прямоугольника (4.2.12), на концах которой характе-

ристическая функция $\lambda(A_i)$ имеет разные значения, т. е. сторону, концы которой принадлежат разным оптимальным подмножествам. Обозначим эти точки через x_1 и x_2 ;

– зададим параметр ε ;

– делим выбранную сторону пополам: $\frac{x_1 + x_2}{2}$ и проверяем условие

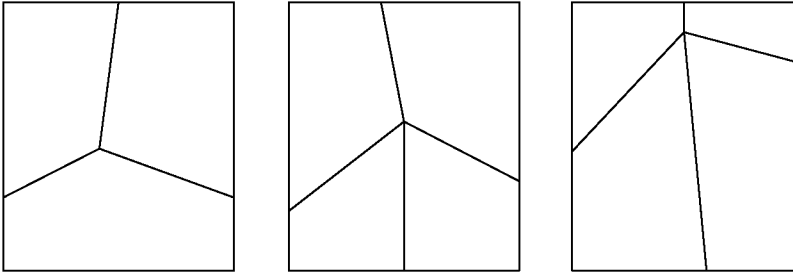
$f(x_1, k, m) \times f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, k, m\right) \leq 0$. Если это условие выполняется, то поиск

продолжаем на отрезке $\left[x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}\right]$, иначе – на отрезке $\left[\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right]$;

– процесс продолжаем до тех пор, пока не выполниться любое из трех условий: $f(x_1, k, m) = 0$ или $f(x_2, k, m) = 0$ или $\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$.

Таким образом, найдя все точки пересечения оптимальных границ со сторонами рассматриваемого прямоугольника (4.2.12), находим площади соответствующих частей, увеличиваем соответствующие компоненты вектора $S = (S_1, \dots, S_N)$ на полученную величину.

4.2.2. Пусть прямоугольник (4.2.12) включает в себя части трех или четырех оптимальных подмножеств вида:



Здесь необходима информация не только о координатах точек пересечения оптимальных границ со сторонами рассматриваемого прямоугольника, но и о координатах точки пересечения между оптимальными подмножествами, которые частично принадлежат прямоугольнику (4.2.12). Для определения точки пересечения оптимальных подмножеств, частично принадлежащих прямоугольнику (4.2.12), предлагается такая процедура. Произвольным образом выбираем сторону прямоугольника (4.2.12), содержащую точку пересечения с

оптимальной границей некоторого подмножества Ω_k^* , частично принадлежащего прямоугольнику (4.2.12); произвольно выбираем вершину этой стороны; соединяем ее с серединой противоположной стороны, до тех пор, пока не будет достигнуто пересечение с оптимальной границей: т. е. значения функции $\lambda(\cdot)$ в рассматриваемых точках – разные.

Таким образом, для оптимальной границы некоторого подмножества, частично принадлежащего прямоугольнику (4.2.12), получены две пары координат точек, которые ей принадлежат. Повторяем описанный процесс для определения хотя бы еще одной пары таких точек. После вычисления пар точек, принадлежащих оптимальным границам подмножеств, частично принадлежащих прямоугольнику (4.2.12), определяем координаты точки пересечения оптимальных границ между этими подмножествами. Находим все площади частей оптимальных подмножеств, которые размещаются в прямоугольнике (4.2.12), и увеличиваем соответствующие компоненты вектора $S = (S_1, \dots, S_N)$ на полученные значения мер подмножеств.

Шаг 5. Перебрав все прямоугольники множества Ω , получаем вектор $S = (S_1, \dots, S_N)$, который содержит значения мер оптимальных подмножеств $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$. Иначе – переходим на шаг 4.

Алгоритм **4.3** описан.

Исследование эффективности алгоритмов отыскания узлов и коэффициентов оптимальной квадратурной формулы для классов функций, определенных на Ω из E_n , $n = 1, 2, 3$, заданных квазиметриками (4.1.2) – (4.1.4), приведено в работе [мон 1]. Там же проводилось сравнение полученных результатов работы алгоритмов **4.1** – **4.3** с уже известными аналитическими решениями, т. е. когда задача построения оптимальных квадратур сводится к задаче оптимального покрытия [87]. Подтверждена достоверность алгоритмов **4.1** – **4.3** и их высокая эффективность.

Алгоритмы **4.1** – **4.3** также достаточно эффективно работают и для случаев, когда задача построения оптимальных квадратур не сводится к задаче оптимального покрытия, а решается задача оптимального разбиения, где центры подмножеств разбиения являются узлами квадратурной формулы. Значения гарантированной точности зависят от числа N разбиений множества Ω на подмножества. При его увеличении значение наилучшей гарантированной точности m_n уменьшается.

4.3. Поиск глобального минимума недифференцируемой функции с помощью метода оптимального разбиения множеств

Сформулируем задачу глобальной оптимизации, следуя [83].

Пусть $f(x)$ – действительная, многоэкстремальная, непрерывная функция, определенная в области Ω из n -мерного евклидова пространства E_n , число локальных минимумов которой конечно и не превосходит N .

Рассмотрим задачу отыскания точки $x^* \in \Omega$ (предполагается, что такая точка существует), в которой функция $f(x)$ достигает минимального значения на множестве $\Omega \subset E_n$, т. е.:

$$f(x^*) = \min_{x \in \Omega} f(x). \quad (4.3.1)$$

Если в области Ω существует единственная точка x^* , в некоторой окрестности $U(x^*)$ которой справедливо неравенство

$$f(x^*) \leq f(x), \quad x \in \Omega \cap U(x^*),$$

то функцию $f(x)$ называют *одноэкстремальной или унимодальной*.

В случае, когда в области определения Ω существует несколько точек τ_i^* , $1 \leq i \leq N$, каждая из которых имеет свою окрестность $U(\tau_i^*)$, такую, что

$$f(\tau_i^*) \leq f(x), \quad x \in \Omega \cap U(\tau_i^*), \quad (4.3.2)$$

функцию $f(x)$ называют *многоэкстремальной*.

При этом точки из (4.3.2) называют *точками локальных минимумов*, а точку τ^* – *точкой глобального минимума*.

Пусть в некоторой подобласти Ω_i , $1 \leq i \leq N$, области Ω функция $f(x)$ унимодальна (точку локального минимума функции $f(x)$ в подобласти Ω_i обозначим τ_i^*), и пусть

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega.$$

Тогда, применяя так называемые методы локального спуска, для любой начальной точки $\tau_i^0 \in \Omega_i$ можно найти соответствующую точку локального минимума $\tau_i^* \in \Omega_i$. В связи с этим говорят, что подобласть Ω_i является *обла-*

стью притяжения локального минимума τ_i^* . (Другими словами, областью притяжения локального минимума называют область, начиная из любой точки которой наискорейший спуск приводит в этот локальный минимум.)

Таким образом, задачу глобальной оптимизации (4.3.1) можно считать решенной, если известно разбиение области определения Ω на области притяжения Ω_i локальных минимумов τ_i^* , $1 \leq i \leq N$.

Однако, как известно, оценка разбиения области определения Ω на области притяжения Ω_i , $1 \leq i \leq N$, представляет собой сложную задачу.

Кроме того, в общем случае получение оценки для числа N областей притяжения является затруднительным.

Таким образом, разработка моделей (целевых функций) и методов, в которые были бы включены количество локальных минимумов и характеристики их областей притяжения, остается проблемой.

Рассматриваемый в данном разделе подход для решения задач глобальной оптимизации, основанный на применении теории оптимального разбиения множеств, преодолевает некоторые из названных трудностей.

С помощью методов оптимального разбиения множеств удастся не только находить все области притяжения локальных минимумов, но одновременно с областями притяжения отыскивать и координаты всех локальных минимумов, а затем из них выбирать глобальный. Кроме того, если заранее неизвестно фактическое число локальных минимумов, для реализации алгоритма достаточно задать ожидаемое число локальных минимумов. В процессе реализации алгоритма уточняется фактическое число локальных минимумов.

При этом класс функций, минимизируемых рассматриваемым методом, достаточно широк. Это класс недифференцируемых функций, допускающих применение локального метода негладкой оптимизации – g -алгоритма Шора, т. е. класс почти дифференцируемых функций.

Итак, в основе предлагаемого подхода к решению задачи глобальной оптимизации многоэкстремальной недифференцируемой функции, имеющей не более N локальных минимумов, лежит следующая идея. От задачи поиска точки глобального минимума функции $f(x)$ на Ω осуществляется переход к задаче отыскания оптимального разбиения допустимой области Ω на N зон притяжения $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$ локальных минимумов $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ с одновременным отысканием координат центров этих зон, совпадающих с соответствующими точками локальных минимумов исходной функции $f(x)$ на Ω .

В качестве критерия оптимальности разбиения области Ω на зоны при-

тяжения локальных минимумов выбирается минимум ошибки, допускаемой при отнесении точки x из зоны притяжения одного локального минимума к зоне притяжения другого.

Составной частью предлагаемого подхода является один из вариантов g -алгоритма Шора [103]. Он используется для решения задачи конечномерной недифференцируемой оптимизации, состоящей в отыскании координат локальных минимумов целевой функции.

4.3.1. Сведение задачи глобальной оптимизации к задаче оптимального разбиения множеств

Рассмотрим задачу отыскания точки $x^* = (x^{*(1)}, \dots, x^{*(n)})$, в которой функция $f(x)$ достигает минимального значения на $\Omega \subset E_n$, т. е.

$$f(x^*) = \min_{x \in \Omega} f(x), \quad (4.3.3)$$

где $f(x)$ – недифференцируемая функция на $\Omega \subset E_n$.

В качестве недифференцируемых функций $f(x)$ возьмем, следуя [25, 72, 103, 117], класс почти-дифференцируемых функций на $\Omega \subset E_n$.

Под почти-дифференцируемой функцией в [72, 103, 117] понимается непрерывная функция $f(x)$, определенная на E_n , если она локально-лишшицева, [25], и непрерывно-дифференцируема на множестве, где градиент существует, (см. также п. 1.3.3 главы 1).

Пусть в некоторой подобласти $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, N$, области Ω , функция $f(x)$ унимодальна (точку локального минимума функции $f(x)$ на Ω обозначим τ_i^*), и пусть

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i' \cap \Omega_k') = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (4.3.4)$$

Сведем задачу (4.3.3) поиска глобального минимума функции $f(x)$ на Ω к задаче **A2** (см. п. 2.1.3) оптимального разбиения множеств. Для этого необходимо выполнение следующих требований: а) оптимальное разбиение $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$ множества Ω задачи **A2** должно быть разбиением области определения Ω функции $f(x)$ на зоны притяжения ее локальных минимумов; б) оптимальные координаты центров $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ подмножеств $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$, соот-

ветственно, должны совпадать с координатами локальных минимумов функции $f(x)$ на Ω .

Для одновременного выполнения обоих описанных выше требований целью в задаче **A2** (см. п. 2.1.3) должна быть минимизация функционала суммарных потерь от неправильного разбиения области Ω на зоны притяжения $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$ и неправильного отыскания локальных минимумов $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ в каждой из этих зон, т. е. функционала

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) dx,$$

где функция $c(x, \tau_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, должна являться штрафом за ошибку, допускаемую при отнесении точки x из области притяжения одного локального минимума к области притяжения другого.

Рассмотрим функцию штрафа $c(x, \tau_i)$ в следующем виде:

$$c(x, \tau_i) = f(\tau_i) + S \cdot \sum_{j=1}^k \phi_j(u), \quad (4.3.5)$$

где S – достаточно большое положительное число; k – натуральное число, характеризующее число делений отрезка $[i, \tau_i]$;

$$\phi_j(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0 \\ 1, & u > 0 \end{cases}, \quad u = f\left(x + \frac{\tau_i - x}{k} j\right) - f\left(x + \frac{\tau_i - x}{k} (j-1)\right).$$

Как видно из рис. 4.16, если точка x находится в области притяжения i -го локального минимума, то $\phi_j(u) = 0$.

Если точка x принадлежит зоне притяжения $(i+1)$ -го локального минимума, а ее отнесли к зоне притяжения i -го локального минимума, то $u > 0$ и $\phi_j(u) = 1$. И чем дальше точка x отстоит от точки τ_i (при неправильном отнесении), тем значение штрафа $\sum_{i=1}^k \phi_i(u)$ больше.

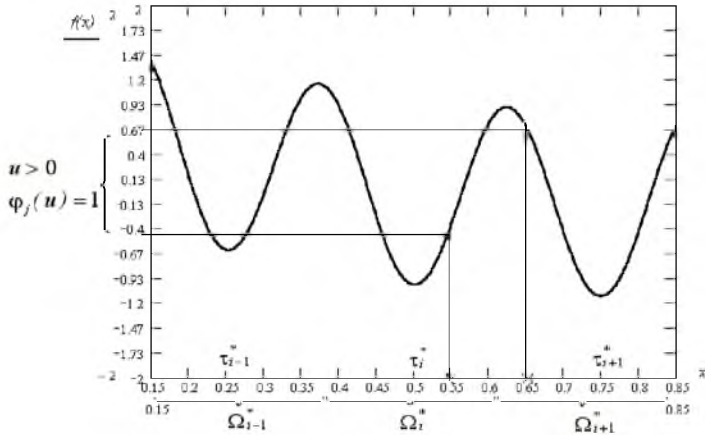


Рис. 4.16. График минимизируемой функции $f_9(x)$

На рис. 4.17 представлено разбиение области Ω на зоны притяжения $\Omega_{i-1}^0, \Omega_i^0, \Omega_{i+1}^0$, определяемое заданным начальным приближением для координат локальных минимумов $\tau_{i-1}^0 = 0, 2, \tau_i^0 = 0, 6, \tau_{i+1}^0 = 0, 65$ функции, изображенной на рис. 4.16., а также функции штрафа $c(x, \tau_{i-1}^0), c(x, \tau_i^0)$ и $c(x, \tau_{i+1}^0)$.

Заметим, что на рис. 4.17 сплошной линией изображен график функции $c(x, \tau_{i+1}^*)$; пунктирной линией — $c(x, \tau_{i-1}^*)$; штрихпунктирной линией — $c(x, \tau_i^*)$.

Характерной особенностью этого примера является унимодальность каждой из функций $c(x, \tau_{i-1}^0), c(x, \tau_i^0)$ и $c(x, \tau_{i+1}^0)$ в точках соответствующих зон притяжения $\Omega_{i-1}^0, \Omega_i^0, \Omega_{i+1}^0$.

На рис. 4.18 (для этой же функции из рис. 4.16) изображено оптимальное разбиение области Ω на зоны притяжения $\Omega_{i-1}^0, \Omega_i^0, \Omega_{i+1}^0$ локальных минимумов $\tau_{i-1}^0, \tau_i^0, \tau_{i+1}^0$. Как видно, функция $c(x, \tau_i^*)$ такова, что в точках зоны соответствующего локального минимума $\tau_i^* = 0, 5$ ее значение совпадает со значением функции в точке $x = 0, 5$, а вне этой зоны значение функции $c(x, \tau_i^*)$ резко возрастает (скорость возрастания определяется значениями параметра S из (4.3.5)). То же самое касается и функций $c(x, \tau_{i-1}^*), c(x, \tau_{i+1}^*)$.

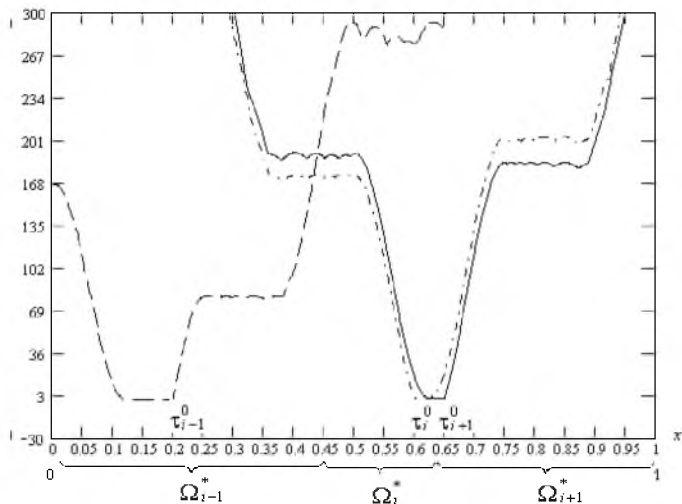


Рис. 4.17. Вид штрафных функций минимизируемой функции $f_0(x)$ на начальном решении при $N_{\text{озад}} = 3$

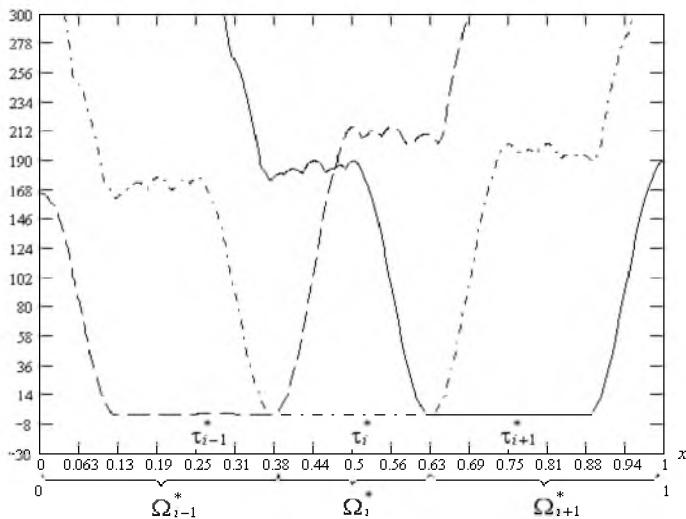


Рис. 4.18. Вид штрафных функций минимизируемой функции $f_0(x)$ на оптимальном решении при $N_{\text{факт}} = 3$

При изображении вида штрафных функций минимизируемой функции $f_9(x)$ на оптимальном решении на рис. 4.18 использовались следующие обозначения: сплошной линией изображена функция $c(x, \tau_{i+1}^*)$; пунктирной линией – $c(x, \tau_{i-1}^*)$; штрихпунктирной линией – $c(x, \tau_i^*)$.

Таким образом, от задачи (4.3.3) можно перейти к задаче отыскания координат локальных минимумов и их областей притяжения. Последняя, в свою очередь, сводится к задаче оптимального разбиения множества Ω на подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ с отысканием координат центров τ_1, \dots, τ_N этих подмножеств:

$$\min_{((\Omega_1, \dots, \Omega_N), (\tau_1, \dots, \tau_N))} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) dx \quad (4.3.6)$$

при условиях

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad (4.3.7)$$

$$mes(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (4.3.8)$$

где функции штрафа $c(x, \tau_i)$ имеют вид (4.3.5).

Согласно п.2.1.3 главы 2, оптимальное решение задачи (4.3.6) – (4.3.8) достигается при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ на вектор-функции $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_i^*(x), \dots, \lambda_N^*(x))$, i -я компонента которой имеет вид

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_i^*) = \min_{k=1, \dots, N} c(x, \tau_k^*), \text{ тогда } x \in \Omega_i^*, \\ 0 & \text{в остальных случаях, тогда } x \notin \Omega_i^*; \end{cases} \quad (4.3.9)$$

а в качестве вектора $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$, входящего в формулу (4.3.9), следует выбирать оптимальное решение следующей задачи:

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, 2, \dots, N} c(x, \tau_i) dx \rightarrow \min, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N. \quad (4.3.10)$$

4.3.2. Алгоритмы решения задачи глобальной оптимизации, сведенной к задаче оптимального разбиения

Для описания алгоритма решения задачи глобальной оптимизации (4.3.3), сведенной к задаче оптимального разбиения (4.3.6)–(4.3.8), основанного на алгоритме 2.1 (см.п.2.1.1), перепишем функцию $c(x, \tau_i)$ в более удобном для

дальнейшего виде, учитывая, что x, τ_i из (4.3.6)–(4.3.8) – это точки n -мерного евклидова пространства, т. е. $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$, $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$:

$$c(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(n)}) = f(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(n)}) + \\ + S \cdot \sum_{j=1}^k \max \left\{ \begin{array}{l} 0, f(x^{(1)} + \frac{\tau_1^{(1)} - x^{(1)}}{k} j, \dots, x^{(n)} + \frac{\tau_1^{(n)} - x^{(n)}}{k} j) - \\ - f(x^{(1)} + \frac{\tau_1^{(1)} - x^{(1)}}{k} (j-1), \dots, x^{(n)} + \frac{\tau_1^{(n)} - x^{(n)}}{k} (j-1)) \end{array} \right\}. \quad (4.3.11)$$

Для решения задачи (4.3.6) – (4.3.8), (4.3.11) с помощью методов ОРМ, оказалось конкретизировать обобщенный градиент $g_G(\tau)$ из (2.1.6) функции $G(\tau)$ из (4.3.10) в точке

$$\tau = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(p)}; \tau_1^{(n)}, \dots; \tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)})$$

(при $\rho(x) \equiv 1 \forall x \in \Omega$).

Напомним, что для выпуклой функции обобщенный градиент совпадает с субградиентом, в противном случае, в качестве обобщенного градиента выступает почти-градиент [72, 103]. В точке, где $f(x)$ дифференцируема, почти-градиент совпадает с градиентом. Для кусочно-гладких функций почти-градиент совпадает с градиентом к одному из примыкающих к данной точке кусков [72].

Таким образом, в большинстве случаев при решении практических задач вычисление обобщенных градиентов не вызывает особых трудностей.

i -я компонента вектора обобщенного градиента $g_G(\tau) = (g_G^{\tau_1}(\tau), \dots, g_G^{\tau_i}(\tau), \dots, g_G^{\tau_N}(\tau))$ функции

$$G(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(p)}; \tau_1^{(n)}, \dots; \tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) = \\ = \int_{\Omega} \min_{j=1, \dots, N} c(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(n)}) dx^{(1)}, \dots, dx^{(n)} \quad (4.3.12)$$

в точке $\tau = (\tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)})$ определяется следующим образом:

$$g_G^{\tau_i}(\tau) = g_G^{\tau_i}(\tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) = \\ = \int_{\Omega} g_c^{\tau_i}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) \lambda_i(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) dx^{(1)}, \dots, dx^{(n)}, \quad (4.3.13)$$

где $g_c^{\tau_i}(x, \tau)$ – i -я компонента N -мерного вектора обобщенного градиента функции $c(x, \tau)$ в точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$, где $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$, при фиксированном x имеет вид:

$$g_c^{\tau_i}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(n)}; \dots; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(p)}, \dots, \tau_i^{(n)}; \dots; \tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) =$$

$$= \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) \\ \dots \\ g_c^{\tau_i^{(p)}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) \\ \dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) \end{pmatrix}.$$

В свою очередь, p -я компонента $g_c^{\tau_i^{(p)}}(x, \tau)$ обобщенного вектора градиента функции $c(x, \tau_i)$ в точке $\tau = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)})$ при фиксированном $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(p)}, \dots, x^{(n)})$ определяется для каждого $i = 1, \dots, N$ и $p = 1, \dots, n$ по формулам

$$g_c^{\tau_i^{(p)}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(n)}; \dots; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(p)}, \dots, \tau_i^{(n)}; \dots; \tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) =$$

$$= g_f^{\tau_i^{(p)}}(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_i^{(p)}, \dots, \tau_N^{(n)}) +$$

$$+ S \cdot \begin{cases} 0, \text{ если } f(u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) - f(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \leq 0, \\ \sum_{j=1}^k (g_f^{u^{(p)}}(u^{(1)}, \dots, u^{(p)}, \dots, u^{(n)}) \frac{j}{k} - g_f^{v^{(p)}}(v^{(1)}, \dots, v^{(p)}, \dots, v^{(n)}) \frac{j-1}{k}), \text{ (4.3.14)} \\ \text{если } f(u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) - f(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) > 0, \end{cases}$$

где

$$u = (u^{(1)}, \dots, u^{(p)}, \dots, u^{(n)}) =$$

$$= (x^{(1)} + \frac{\tau_i^{(1)} - x^{(1)}}{k} j, \dots, x^{(p)} + \frac{\tau_i^{(p)} - x^{(p)}}{k} j, \dots, x^{(n)} + \frac{\tau_i^{(n)} - x^{(n)}}{k} j);$$

$$\begin{aligned}
 v &= (v^{(1)}, \dots, v^{(p)}, \dots, v^{(n)}) = \\
 &= (x^{(1)} + \frac{\tau_i^{(1)} - x^{(1)}}{k}(j-1), \dots, x^{(p)} + \frac{\tau_i^{(p)} - x^{(p)}}{k}(j-1), \dots, x^{(n)} + \frac{\tau_i^{(n)} - x^{(n)}}{k}(j-1)).
 \end{aligned}$$

Теперь опишем общую схему алгоритма решения задачи глобальной минимизации (4.3.3), сведенной к задаче оптимального разбиения (4.3.6)–(4.3.8), (4.3.11).

Алгоритм 4.4 (одновременного отыскания всех локальных минимумов функции и их зон притяжения для одномерного случая)

На предварительном этапе:

– задаем значения параметров M, N, K из (4.3.5), (4.3.11);

– отрезок $[a, b]$ покрываем одномерной сеткой $x_i = a + (i-1)H_x$, $i = \overline{1, M}$,

где H_x – шаг сетки, $H_x = \frac{b-a}{M-1}$;

– задаем начальные приближения $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$;

– вычисляем по формулам (4.3.9) в узлах сетки при $\tau = \tau^{(0)}$ значения вектор-функции $\lambda^{(0)}(x) = (\lambda_1^{(0)}(x), \dots, \lambda_N^{(0)}(x))$, характеризующей начальное разбиение отрезка $[a, b]$ на зоны притяжения $\Omega_1^0, \dots, \Omega_N^0$ локальных минимумов $\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)}$, (см. рис. 4.17);

– вычисляем по формулам (4.3.13), (4.3.14) значения вектора обобщенных градиентов $g_G(\tau) = (g_G^{\tau_1}(\tau), \dots, g_G^{\tau_N}(\tau))$ при $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\tau = \tau^{(0)}$, $n=1$;

– выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$ для г-алгоритма Шора.

Первый шаг алгоритма проводим по формуле

$$\tau^{(1)} = P_{[a, b]} \left(\tau^{(0)} - h_0 \frac{H_1 g_G(\tau_0)}{\sqrt{(H_1 g_G(\tau_0), g_G(\tau_0))}} \right),$$

где $P_{[a, b]}$ – оператор проектирования на $[a, b]$.

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после l ($l=1, 2, \dots$) шагов алгоритма получены определенные значения $\tau^{(l)}$ и $\lambda^{(l-1)}(x)$.

Опишем **($l+1$)-й шаг** алгоритма.

1. Вычисляем значения $\lambda^{(l)}(x)$ в узлах сетки по формулам (4.3.9) при $\tau = \tau^{(l)}$.

2. Вычисляем значения $g_G^{\tau_i}(\tau)$, $i = 1, \dots, N$ по формулам (4.3.13), (4.3.14) при $\lambda(x) = \lambda^{(l)}(x)$, $\tau = \tau^{(l)}$.

3. Для минимизации функции $G(\tau)$ из (4.3.12) по $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$ проводим $(l+1)$ -й шаг Γ -алгоритма Шора в Н-форме [81], краткая схема которого имеет вид (см. алгоритм 2.3):

$$\tau^{(l+1)} = P_{[a, b]} \left(\tau^{(l)} - h_l \frac{H_{l+1} g_G(\tau_l)}{\sqrt{(H_{l+1} g_G(\tau_l), g_G(\tau_l))}} \right).$$

4. Если условие

$$\|\tau^{(l)} - \tau^{(l+1)}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (4.3.15)$$

не выполняется – к $(l+2)$ -му шагу алгоритма, если выполняется – на п. 5.

5. Полагаем $\tau^* = \tau^{(l)}$, $\lambda^*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (4.3.15).

Таким образом, получен вектор координат локальных минимумов $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ и вектор-функция $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_N^*(x))$, характеризующая разбиение отрезка $[a, b]$ на зоны притяжения $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$ этих локальных минимумов (см. рис. 4.18).

6. Вычисляем значения функции $f(x)$ в точках локальных минимумов $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ и выбираем среди них точку глобального минимума $x^* : f(x^*) = \min \{f(\tau_1^*), \dots, f(\tau_N^*)\}$.

Алгоритм 4.4 описан.

Для описания алгоритма решения задачи глобальной оптимизации в случае двумерного пространства необходимо конкретизировать обобщенный градиент $g_G(\tau)$ из (4.3.13) (при $\rho(x) \equiv 1 \quad \forall x \in \Omega$) функции $G(\tau)$ из (4.3.12) в точке $\tau = (\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}; \dots; \tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}; \dots; \tau_N^{(1)}, \tau_N^{(2)})$.

Из (4.3.13) следует, что i -я компонента $2N$ -мерного вектора обобщенного градиента $g_G(\tau) = (g_G^{\tau_1^{(1)}}(\tau), g_G^{\tau_1^{(2)}}(\tau), \dots, g_G^{\tau_N^{(1)}}(\tau), g_G^{\tau_N^{(2)}}(\tau))$ функции

$$\begin{aligned}
G(\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}, \dots, \tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \dots, \tau_N^{(1)}, \tau_N^{(2)}) &= \\
= \iint_{\Omega} \min_{i=1,2,\dots,N} c(x^{(1)}, x^{(2)}; \tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) dx^{(1)}, dx^{(2)} & \quad (4.3.16)
\end{aligned}$$

в точке $\tau = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(2)})$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
g_G^{\tau_i^{(1)}}(\tau) &= \\
= \iint_{\Omega} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(2)}) \lambda_i(x^{(1)}, x^{(2)}) dx^{(1)}, dx^{(2)}, \quad i=1, \dots, N, & \quad (4.2.17)
\end{aligned}$$

где $g_c^{\tau_i^{(1)}}(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau)$ – i -я компонента $2N$ -мерного вектора обобщенного градиента $g_c(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau)$ функции $c(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$, $i=1, \dots, N$, в точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_1, \dots, \tau_N)$, где $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$ при фиксированном x имеет вид

$$\begin{aligned}
g_c^{\tau_i^{(1)}}(x^{(1)}, x^{(2)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(2)}) &= g_f^{\tau_i^{(1)}}(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(2)}) + \\
+ S \cdot \begin{cases} 0, & \text{если } f(u^{(1)}, u^{(2)}) - f(v^{(1)}, v^{(2)}) \leq 0, \\ \sum_{j=1}^k (g_f^{u^{(p)}}(u^{(1)}, u^{(2)}) \frac{j}{k} - g_f^{v^{(p)}}(v^{(1)}, v^{(2)}) \frac{j-1}{k}), & \\ \text{если } f(u^{(1)}, u^{(2)}) - f(v^{(1)}, v^{(2)}) > 0, \end{cases} & \quad (4.3.18)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
u &= (u^{(1)}, u^{(2)}) = (x^{(1)} + \frac{\tau_i^{(1)} - x^{(1)}}{k} j, x^{(2)} + \frac{\tau_i^{(2)} - x^{(2)}}{k} j); \\
v &= (v^{(1)}, v^{(2)}) = (x^{(1)} + \frac{\tau_i^{(1)} - x^{(1)}}{k} (j-1), x^{(2)} + \frac{\tau_i^{(2)} - x^{(2)}}{k} (j-1)).
\end{aligned}$$

Для $g_c^{\tau_i^{(2)}}(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau)$ – формулы аналогичны формулам (4.3.17), (4.3.18), только в (4.3.18) производится замена $g_f^{u^{(1)}}$, $g_f^{v^{(1)}}$ на $g_f^{u^{(2)}}$, $g_f^{v^{(2)}}$ соответственно.

В этом случае $\lambda_i(x^{(1)}, x^{(2)})$ – i -я компонента вектор-функции

$$\begin{aligned}
\lambda(x^{(1)}, x^{(2)}) &= (\lambda_1(x^{(1)}, x^{(2)}), \dots, \lambda_i(x^{(1)}, x^{(2)}), \dots, \lambda_N(x^{(1)}, x^{(2)})) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x^{(1)}, x^{(2)}) = 1, \\
0 &\leq \lambda_i(x^{(1)}, x^{(2)}) \leq 1, \quad i=1, \dots, N, \quad \text{по аналогии с (4.3.9) вычисляется по формуле}
\end{aligned}$$

$$\lambda_i^*(x^{(1)}, x^{(2)}) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_i^{(1)*}, \tau_i^{(2)*}) = \\ & \min_{k=1, \dots, N} c(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_k^{(1)*}, \tau_k^{(2)*}), \text{ тогда } (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega_i^*, \\ 0 & \text{в остальных случаях, тогда } (x^{(1)}, x^{(2)}) \notin \Omega_i^*. \end{cases} \quad (4.3.19)$$

Функция штрафа $c(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$, $i = 1, \dots, N$, принимается в виде

$$c(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) = f(\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) + S \cdot \sum_{j=1}^k \max \left\{ \begin{array}{l} 0, f(x^{(1)} + \frac{\tau_i^{(1)} - x^{(1)}}{k} j, x^{(2)} + \frac{\tau_i^{(2)} - x^{(2)}}{k} j) - \\ - f(x^{(1)} + \frac{\tau_i^{(1)} - x^{(1)}}{k} (j-1), x^{(2)} + \frac{\tau_i^{(2)} - x^{(2)}}{k} (j-1)) \end{array} \right\}. \quad (4.3.20)$$

Алгоритм 4.5 (одновременного отыскания всех локальных минимумов функции и их зон притяжения для двумерного случая)

Шаг 0. Выбираем значения для параметров $N, M, M1, K$. Область определения $[a, b] \times [c, d]$ покрываем двумерной сеткой $x_i^{(1)} = a + (i-1)H_{x^{(1)}}$, $i = 1, \dots, M$, $x_j^{(2)} = c + (j-1)H_{x^{(2)}}$, $j = 1, \dots, M1$, здесь $H_{x^{(1)}}$, $H_{x^{(2)}}$ – шаг сетки:

$H_{x^{(1)}} = \frac{b-a}{M-1}$; $H_{x^{(2)}} = \frac{d-c}{M1-1}$. Задаем в области определения Ω начальное

приближение $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)1}, \tau_1^{(0)2}, \dots, \tau_N^{(0)1}, \tau_N^{(0)2})$. Вычисляем при $\tau = \tau^{(0)}$ значения вектор-функции $\lambda^{(0)}(x^{(1)}, x^{(2)})$ в узлах сетки по формулам (4.3.19); по формулам (4.3.17), (4.3.18) вычисляем компоненты вектора обобщенного градиента

$$g_G(\tau) = (g_{G1}^{(1)}(\tau), g_{G1}^{(2)}(\tau), \dots, g_{GN}^{(1)}(\tau), g_{GN}^{(2)}(\tau))$$

при $\lambda(x^{(1)}, x^{(2)}) = \lambda^{(0)}(x^{(1)}, x^{(2)})$; выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$ для г-алгоритма Шора; $k = 0$.

Первый шаг алгоритма проводим по формуле

$$\tau^{(1)} = P_{[a, b] \times [c, d]} \left(\tau^{(0)} - h_0 \frac{H_1 g_G(\tau_0)}{\sqrt{(H_1 g_G(\tau_0), g_G(\tau_0))}} \right),$$

где $P_{[a, b] \times [c, d]}$ – оператор проектирования на $\Omega = [a, b] \times [c, d]$.

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после k , ($k = 1, 2, \dots$) шагов алгоритма получены определенные значения $\tau^{(k)}$ и $\lambda^{(k-1)}(x)$.

Опишем **(k+1)-й шаг** алгоритма.

1. Вычисляем значения $\lambda^{(k)}(x^{(1)}, x^{(2)})$ в узлах сетки по формулам (4.3.19) при $\tau = \tau^{(k)}$.

2. Вычисляем компоненты $g_G(\tau)$ при $\lambda(x^{(1)}, x^{(2)}) = \lambda^{(k)}(x^{(1)}, x^{(2)})$, $\tau = \tau^{(k)}$ по формулам (4.3.17), (4.3.18).

3. Для минимизации функции $G(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(2)})$ из (4.3.16) по $\tau \in \Omega^N$ проводим (k+1)-й шаг r-алгоритма Шора в H-форме [81], краткая схема которого имеет вид:

$$\tau^{(k+1)} = P_{[a,b] \times [c,d]} \left(\tau^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} g_G(\tau_k)}{\sqrt{(H_{k+1} g_G(\tau_k), g_G(\tau_k))}} \right),$$

где $P_{[a,b] \times [c,d]}$ – оператор проектирования на $\Omega = [a, b] \times [c, d]$. Пересчет матрицы H_{k+1} см. в главе 1.

4. Если условие

$$\|\tau^{(k)} - \tau^{(k+1)}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (4.3.21)$$

не выполняется – к шагу 1: полагаем $k = k + 1$, если выполняется – к шагу 5.

5. Полагаем $\lambda^*(x^{(1)}, x^{(2)}) = \lambda^{(t)}(x^{(1)}, x^{(2)})$, $\tau^* = \tau^{(t)}$, где t – номер итерации, на которой выполнилось условие (4.3.21).

Таким образом, мы получили вектор координат локальных минимумов $\tau^* = (\tau_1^{(1)*}, \dots, \tau_N^{(2)*})$ и значения $\lambda_1^*(x^{(1)}, x^{(2)}), \dots, \lambda_N^*(x^{(1)}, x^{(2)})$, характеризующие разбиение области определения $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ на зоны притяжения $\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*$ этих локальных минимумов.

4. Вычисляем значения функции $f(x^{(1)}, x^{(2)})$ в точках локальных минимумов $\tau^* = (\tau_1^{(1)*}, \tau_1^{(2)*}, \dots, \tau_i^{(1)*}, \tau_i^{(2)*}, \dots, \tau_N^{(1)*}, \tau_N^{(2)*})$ и выбираем среди них точку глобального минимума:

$$x^* = (x^{(1)*}, x^{(2)*}) = \min \{ f(\tau_1^{(1)*}, \tau_1^{(2)*}), \dots, f(\tau_i^{(1)*}, \tau_i^{(2)*}), \dots, f(\tau_N^{(1)*}, \tau_N^{(2)*}) \}.$$

Алгоритм 4.5 описан.

Описание алгоритма для многомерного случая принципиальных сложностей не представляет и отличается, в основном, лишь заменой одномерных интегралов многомерными и некоторой конкретизацией формул (4.3.5), (4.3.11) вычисления штрафных функций $c(x, \tau_i)$.

Замечание к алгоритму 4.4. Алгоритм 4.4 одномерной глобальной оптимизации основан на сведении задачи (4.3.3) к задаче (4.3.6)–(4.3.8), где в качестве функции $c(x, \tau_i)$ используется функция вида (4.3.5). При его практической реализации область определения $\Omega = [a, b]$ функции $f(x)$ покрывается сеткой для вычисления интегралов, входящих в задачу (4.3.6)–(4.3.8) и, кроме того, отрезок $[x, \tau_i]$ разбивается на k делений для вычисления функции $c(x, \tau_i)$, что значительно увеличивает число вычислений значений функции $f(x)$.

Предлагаемая ниже модификация штрафной функции обеспечивает уменьшение количества вычислений функции $f(x)$ за счет совмещения узлов сетки и точек делений отрезка $[x, \tau_i]$.

В этом случае функция штрафа имеет вид

$$c(x, \tau_i) = f(\tau_i) + S \cdot \sum_{j=1}^r \phi_j(u), \quad (4.3.22)$$

где S – достаточно большое положительное число;

$$r = \left\lceil \frac{\tau_i - x}{H_x} \right\rceil;$$

$$\phi_j(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0 \\ 1, & u > 0 \end{cases}, \quad u = f(x + H_x j) - f(x + H_x(j-1));$$

H_x – это шаг сетки, покрывающей область определения Ω минимизируемой функции $f(x)$.

Для тех случаев, когда каждое вычисление функции является дорогостоящим, или сложным, такой подход может быть оправдан. Хотя при этом описанный подход имеет как положительные стороны (уменьшение числа вычислений функции), так и некоторые отрицательные моменты (увеличение времени, затрачиваемого на решение задачи).

Вид функции штрафа (4.3.22) также затрагивает важный вопрос, возникающий в задачах глобальной оптимизации, о размере диаметра зон притяже-

ния локальных минимумов. Зная минимальное расстояние между ближайшими начальными приближениями для локальных минимумов, определяем шаг сетки, покрывающий область определения $\Omega = [a, b]$ целевой функции $f(x)$ по

формуле $H_x = \frac{b-a}{M-1}$, где M выбирается из условия: $M \geq \frac{b-a}{\min(\tau_i^0 - \tau_j^0)} + 1$.

Затем, задавая экспериментально радиус зоны притяжения локального минимума τ_i , например $2H_x$, осуществляем проверку выхода точки x из зоны притяжения локального минимума τ_i радиуса $2H_x$, т.е. $\tau_i - x > 2H_x$, используем функцию штрафа в виде (4.3.22), таким образом, регулируя размер зоны притяжения локальных минимумов.

4.3.3. Результаты исследования эффективности алгоритмов глобальной оптимизации

Оценка эффективности и исследование свойств описанных в разделе 4.3.2 алгоритмов проводились на одномерных, двумерных и трехмерных типовых тестовых задачах, взятых из Батищева (1981), Жилинскаса (1989), Жилинскаса и Шалтяниса (1989), Стронгина (1978), Сухарева (1981), Химмемблау (1975), Флудаса (2000) и многих.

Одномерный случай

- $f_1(x) = (x^2 - 1)^2$, $-2 \leq x \leq 2$;
- $f_2(x) = x \cdot \sin x$, $-7.85 \leq x \leq 7.85$;
- $f_3(x) = |x| + |x-1| - 1$, $-2 \leq x \leq 2$, выбрана авторами;
- $f_4(x) = \sin x + \sin(10x/3) + \ln x - 0.84x + 3$, $3 \leq x \leq 7.5$;
- $f_5(x) = 2 - \cos x - \cos(2x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$;
- $f_6(x) = \sin(1/x)$, $0.05 \leq x \leq 1$;
- $f_7(x) = (1-x)^2 \cdot (x+1)^4 \cdot (x-2)^3 \cdot x$, $-2 \leq x \leq 2$;
- $f_8(x) = \sin x + \sin(2x/3)$, $3.1 \leq x \leq 20.4$;
- $f_9(x) = 2(x-0.75)^2 + \sin(8\pi x - \pi/2) - 0.125$, $0 \leq x \leq 1, -2 \leq x \leq 2, -4 \leq x \leq 4$;
- $f_{10}(x) = -\sum_{i=1}^5 i \cdot \sin((i+1)x + i)$, $-10 \leq x \leq 10$;

- $f_{11}(x) = (x + \sin x) \times \exp(-x^2), \quad -10 \leq x \leq 10;$
- $f_{12}(x) = \sin(x), \quad 0 \leq x \leq 50, \quad 0 \leq x \leq 100, \quad 0 \leq x \leq 200;$
- $f_{13}(x) = |\sin x + \sin(\frac{10x}{3}) + \ln x - 0.84x + 3|, \quad 3 \leq x \leq 7.5.$

Двумерный случай:

- $f_{14}(x, y) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + y^2, \quad -3 \leq x \leq 1, \quad -2 \leq y \leq 2;$
- $f_{15}(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2, \quad -2 \leq x \leq 4, \quad -2 \leq y \leq 4;$
- $f_{16}(x, y) = -(1 + 8x - 7x^2 + \frac{7}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4) \cdot y^2 \cdot e^{-y},$
 $0 \leq x \leq 4, 2, \quad 0 \leq y \leq 6, 4.$
- $f_{17}(x, y) = a(y - bx^2 + cx - d)^2 + l(1 - f) \cos x + l, \quad -5 \leq x \leq 10, \quad 0 \leq y \leq 15,$
 $a = 1, \quad b = \frac{5,1}{4 \cdot 3,14159^2}, \quad c = \frac{5}{3,14159}, \quad d = 6, \quad l = 10, \quad f = \frac{1}{8 \cdot 3,14159};$
- $f_{18}(x, y) = \cos x \sin y - \frac{x}{y^2 + 1}, \quad -1 \leq x \leq 2, \quad -1 \leq y \leq 1.$

Трехмерный случай:

- $f_{19}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad x, y, z \in [-0.5; 0.5];$
- $f_{20}(x, y, z) = -e^{-3(x-0,3689)^2 - 10(y-0,117)^2 - 30(z-0,2673)^2} -$
 $-1, 2e^{-0,1(x-0,4699)^2 - 10(y-0,4387)^2 - 35(z-0,747)^2} -$
 $-3e^{-3(x-0,1091)^2 - 10(y-0,8732)^2 - 30(z-0,5547)^2} -$
 $-3, 2e^{-0,1(x-0,03815)^2 - 10(y-0,5743)^2 - 35(x-0,03815)^2},$
 $x, y, z \in [0; 1];$

Результаты численных экспериментов по применению алгоритмов **4.4-4.5** к минимизации функций $f_1(x), \dots, f_{20}(x)$ подробно описаны в работе [31].

Для реализации этих алгоритмов пользователем должны быть заданы следующие параметры:

▪ N – фактическое число локальных минимумов функции $f(x)$ на Ω , если оно известно пользователю. Если $N_{\text{факт}}$ неизвестно, то задается $N_{\text{ожд}}$ – ожидаемое пользователем количество локальных минимумов ($N_{\text{ожд}}$ – это начальная оценка количества локальных минимумов);

▪ M – количество узлов сетки, которой покрывается область Ω ;

▪ K – натуральное число дроблений отрезка $[x, \tau_i]$ при вычислении значений функции $c(x, \tau_i)$;

▪ $\tau^0 = (\tau_1^0, \dots, \tau_N^0)$ – начальные приближения для локальных минимумов функции $f(x)$ на Ω ;

▪ ε – точность вычисления координат локальных минимумов г-алгоритмом Шора.

Заметим, что параметр h_0 – начальный пробный шаг для г-алгоритма Н.З. Шора выбирается, как правило, равным 1. Для $\Omega = [a, b]$ длиной меньше либо равных 1 рекомендуется h_0 уменьшать.

Заметим также, что при реализации алгоритмов **4.4-4.5** еще один параметр может регулироваться пользователем. Это параметр S – штрафной коэффициент в выражении для функции $c(x, \tau_i)$. Рекомендуется выбирать значение S достаточно большим положительным числом, однако, соизмеримым со значениями функции $f(x)$ и другими параметрами. При выборе очень большого значения для S может произойти аварийный останов г-алгоритма из-за переполнения, а при выборе малого значения S не будет штрафоваться выход точки x из зоны притяжения «неправильного» локального минимума.

Параметры h_0 и S не внесены в список основных параметров алгоритма, так как они могут быть заданы в программе для ПЭВМ по умолчанию. В разработанном пакете прикладных программ по решению задач глобальной оптимизации предусмотрен их выбор в диалоговом режиме в случае аварийного останова г-алгоритма Шора.

Предложенные алгоритмы глобальной оптимизации были исследованы на большом числе тестовых одномерных, двумерных и трехмерных функций, выявлены их свойства, доказана эффективность их применения для решения задач глобальной оптимизации, даны рекомендации по выбору основных параметров алгоритмов, (см. мон. 1).

При надлежащем выборе основных параметров N, M, K алгоритмы **4.4, 4.5**

глобальной оптимизации, описанные в п. 4.3.2, для достаточно широкого класса недифференцируемых функций отыскивают одновременно все локальные минимумы, а значит и глобальный, и зоны их притяжения, а также фактическое число локальных минимумов $N_{\text{факт}}$.

Алгоритмы хорошо проявили себя на функциях с эффектом «плато».

Не обязательно знать фактическое количество локальных минимумов ($N_{\text{факт}}$). Достаточно выбрать $N_{\text{ожид}} > N_{\text{факт}}$, так как в этом случае алгоритмы все равно найдут все $N_{\text{факт}}$ локальных минимумов. Если все же оказалось, что $N_{\text{ожид}} < N_{\text{факт}}$, то некоторые локальные минимумы будут пропущены, остальные будут найдены правильно. В этом случае эксперимент следует повторить несколько раз, увеличивая значения $N_{\text{ожид}}$ до тех пор, пока не будет определено $N_{\text{факт}}$.

Начальные приближения для локальных минимумов τ_i^0 , $i = 1, \dots, N$, рекомендуется располагать равномерно в области определения минимизируемой функции, или, если нет априорной информации о значениях локальных минимумов, генерировать их с помощью датчика случайных чисел. Если же начальные приближения для τ_i^0 , $i = 1, \dots, N$, помещены в одну точку (это удобно при задании исходной информации), тогда, чтобы не пропустить некоторые локальные минимумы, следует регулировать значения параметров M и K .

Требуют дальнейшей коррекции рекомендации по выбору основных параметров алгоритмов M и K . Возможность уточнения этих параметров дает диалоговый режим пользователя с алгоритмами в ходе процесса решения задачи.

1. По результатам работы алгоритмов, описанных в п. 4.3.2, можно получить дополнительную информацию о расположении точек локального максимума (или седловых точек) исследуемой функции. Так, например, для функции $f_9(x)$, см. рис.4.16, точки, лежащие на границе зон притяжения $\Omega_{i=1}^*$ и Ω_i^* , а также $\Omega_{i=1}^*$ и Ω_i^* , являются точками локального максимума минимизируемой функции $f_9(x)$.

Алгоритм оптимального разбиения множества на подмножества с размещением центров этих подмножеств, описанный в п. 2.1.3 главы 2, позволяет также находить точки, лежащие на оптимальных границах между подмножествами Ω_j^* и Ω_i^* , [48].

4.4. Решение обобщенной задачи Неймана–Пирсона с использованием методов оптимального разбиения множеств

Многие задачи статистической теории принятия решений, в частности теории проверки статистических гипотез, сводятся к задачам оптимального разбиения выборочного пространства (исходов некоторого эксперимента) на конечное число взаимно непересекающихся подмножеств.

Одним из формальных подходов, приводящих к ясному пониманию проблем теории проверки гипотез, является теория, развитая Нейманом и Пирсоном [147, 148]. Эта теория раскрыла важные черты различных сложных проблем испытания статистических гипотез и привела к построению общих критериев в задачах различия (идентификации признаков, последовательного анализа, решающих функций и т.д.).

4.4.1. Проблема Неймана–Пирсона. Некоторые понятия и определения теории статистических гипотез

Рассмотрим ряд понятий и определений, относящихся к классическому подходу Неймана–Пирсона [148] в теории проверки статистических гипотез, следуя [67, 79], и приведем, не претендуя на полноту, краткий обзор некоторых результатов по решению проблемы Неймана–Пирсона.

Пусть Ω – выборочное пространство исходов некоторого эксперимента, а x – произвольный элемент пространства Ω . Пусть, далее, H_0 – гипотеза (называемая нулевой), которая определяет частично или полностью вероятностную меру на борелевском поле B множества Ω . Задача состоит в том, чтобы на основе наблюденного значения x решить, верна или нет гипотеза H_0 .

Гипотеза H_0 может быть простой, т. е. такой, которая полностью описывает вероятностное распределение случайной величины X . *Гипотеза H_0 может быть сложной*, т. е. такой, когда она представляет собой целый класс простых нулевых гипотез.

Какая бы процедура для испытания нулевой гипотезы ни применялась, т. е. каким бы образом мы ни делали вывод о том, принимать или отвергать H_0 , при решении, основанном на наблюдениях, могут быть совершены ошибки двух типов. *Ошибка первого рода* совершается в случае, если отвергается гипотеза H_0 , когда она верна, и *ошибка второго рода* совершается в случае, если принимается гипотеза H_0 , когда в действительности верна альтернативная гипотеза.

Построение (нерандомизированного) критерия состоит в разделении вы-

борочного пространства Ω на две области ω и $(\Omega - \omega)$ и решении отвергнуть H_0 , если наблюдаемое значение $x \in \omega$, и принять H_0 в противном случае. Область ω называется *критической областью*.

Рассмотрим теперь структуру рандомизированного критерия. При любом x такой критерий приводит к выбору между двумя решениями— принятием или отклонением гипотезы, и этот выбор осуществляется с зависящими от x вероятностями, которые будут обозначаться $\varphi(x)$ и $1 - \varphi(x)$ соответственно. Если X принимает значение x , то производится случайный эксперимент с двумя возможными исходами: R и \bar{R} , вероятности которых равны $\varphi(x)$ и $1 - \varphi(x)$. Если эксперимент заканчивается исходом R , то гипотеза отвергается, а в противном случае принимается. Рандомизированный критерий, таким образом, полностью характеризуется функцией φ — *критической функцией*, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ при всех x . Если φ принимает только значения 0 и 1, то мы возвращаемся к случаю нерандомизированного критерия. Множество точек, в которых $\varphi(x) = 1$, совпадает в этом случае с критической областью, так что для нерандомизированного критерия φ является характеристической функцией критической области.

Пусть H_0 — простая гипотеза. Тогда вероятность ошибки первого рода определяется значением вероятности

$$P\{\omega / H_0\} = \alpha, \quad (4.4.1)$$

число α называется уровнем значимости.

Вероятность ошибки второго рода при некоторой альтернативе $h \in H$, где H — класс альтернативных гипотез, равна

$$P\{\Omega - \omega / h\} = \beta(h). \quad (4.4.2)$$

Значение $1 - \beta(h)$ называется *мощностью критерия* при проверке простой нулевой гипотезы H_0 против альтернативы h .

Если гипотеза H_0 является сложной, но представляет собой некоторый класс простых нулевых гипотез, то уровень значимости определяется числом

$$\alpha = \sup_{h \in H_0} P(\omega / h).$$

Нейманом и Пирсоном [148] поставлена задача определения критической области ω таким образом, чтобы при заданном уровне значимости α ошибка второго рода была как можно меньше, другими словами, чтобы значение мощности критерия было как можно больше.

Формальная математическая постановка задачи Неймана–Пирсона для

случая рандомизированной процедуры принятия решения имеет вид:

– найти (построить) такую измеримую по некоторой мере, например, по мере Лебега, функцию $\varphi(x)$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, называемую критической, которая бы максимизировала значение мощности критерия, т. е.

$$\int_{\Omega} f_0(x)\varphi(x)dx \rightarrow \max, \quad (4.4.3)$$

при заданном уровне величины условной вероятности ошибки первого рода

$$\int_{\Omega} f_1(x)\varphi(x)dx = \alpha, \quad (4.4.4)$$

где f_0, f_1 – функции плотности распределения, определенные на выборочном пространстве.

Приведем здесь формулировку *обобщенной фундаментальной леммы Неймана–Пирсона* [145] для задачи, обобщающей задачу (4.4.3), (4.4.4), на случай нескольких ограничивающих условий типа (4.4.4), т.е. для задачи:

– найти критическую функцию $\varphi(x)$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, такую, что

$$\int_{\Omega} f_0(x)\varphi(x)dx \rightarrow \max \quad (4.4.5)$$

при условиях

$$\int_{\Omega} f_i(x)\varphi(x)dx = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.4.6)$$

следуя [85].

Лемма 4.1. Пусть f_0, f_1, \dots, f_m – действительные функции, определенные на эквивалентном пространстве E_n и интегрируемые по Лебегу на выборочном пространстве Ω , φ – функция на Ω , удовлетворяющая условию $0 \leq \varphi \leq 1$,

$$\int_{\Omega} f_i(x)\varphi(x)dx = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.4.7)$$

где $\alpha_i, i = 1, \dots, m$, – заданные числа. Пусть, далее, существует функция φ^* такая, что

а) выполняется условие (4.4.7),

$$\text{б) } \varphi^* = \begin{cases} 1, & \text{если } f_0 > \sum_{i=1}^m \xi_i f_i(x), \\ 0, & \text{если } f_0 \leq \sum_{i=1}^m \xi_i f_i(x). \end{cases} \quad (4.4.8)$$

Тогда

$$\int_{\Omega} f_0 \varphi^* dx \geq \int_{\Omega} f_0 \varphi dx.$$

Приведем еще одно обобщение фундаментальной леммы Неймана–Пирсона из [85] для задачи проверки многих статистических гипотез, но без ограничений типа (4.4.6).

Лемма 4.2. Пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ – разбиение пространства Ω на N взаимно непересекающихся областей. Пусть $\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}$ – разбиение того же пространства на N взаимно непересекающихся областей, таких, что

$$x \in \Omega_{*j} \Rightarrow f_i(x) \geq f_j(x), \quad j = 1, \dots, N.$$

Тогда

$$\int_{\Omega_1} f_1 dx + \dots + \int_{\Omega_N} f_N dx \geq \int_{\Omega_1} f_1 dx + \dots + \int_{\Omega_N} f_N dx.$$

Существование глобального оптимального решения задачи Неймана–Пирсона (4.4.3), (4.4.4) доказали Данцинг и Вальд в работе [127]. В этой работе даны также необходимые условия для того, чтобы критическая функция, максимизирующая интеграл (4.4.5) при ограничениях (4.4.6), удовлетворяла условиям (4.4.8).

Рао в работе [153] получил достаточные условия оптимальности для задачи, подобной (4.4.5), (4.4.6), но без ограничений.

В работе [126] доказаны теоремы о существовании глобального оптимального решения, а также о необходимых и достаточных условиях оптимальности решений для задачи типа (4.4.5), (4.4.6) с ограничениями в форме равенств, являющиеся расширением результатов Данцинга, Вальда [127] и Рао [153].

Трухаев, Хоменок [90] приводят обобщение фундаментальной леммы Неймана–Пирсона на случай нескольких ограничений в форме неравенств, т. е. для задачи

$$\int_0^a f_0(x) \varphi(x) dx \rightarrow \min$$

при условиях

$$0 \leq \varphi(x) \leq b,$$

$$\int_0^a f_i(x) \varphi(x) dx \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Для этой задачи в работе [90] получено оптимальное решение в виде

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } f_0(x) + \sum_{i=1}^N \xi_i^* f_i(x) < 0, \\ 0, & \text{если } f_0(x) + \sum_{i=1}^N \xi_i^* f_i(x) \geq 0, \end{cases} \quad (4.4.9)$$

при этом функция $\varphi^*(x)$ и постоянные числа ξ_i^* , $i = 1, \dots, N$, удовлетворяют операторному уравнению

$$\sum_{i=1}^N \xi_i^* \left[\int_0^a f_i(x) \varphi^*(x) dx - \alpha_i \right] = 0. \quad (4.4.10)$$

В работе Кука [67] рассматривается задача проверки многих статистических гипотез с несколькими ограничивающими условиями в форме неравенств. Строится критическая функция в виде, аналогичном (4.4.9), а для отыскания постоянных, типа множителей Лагранжа ξ_i из (4.4.9), получена дополнительная система операторных уравнений типа (4.4.10).

Заметим, что в тех обобщениях задачи Неймана–Пирсона, где критическая функция должна удовлетворять дополнительным ограничениям в форме равенств и (или) неравенств в выражении для оптимального решения, появляются множители ξ_i типа множителей Лагранжа, см. (4.4.8), (4.4.10). Для их отыскания необходимы дополнительные условия типа (4.4.10), которым эти константы должны удовлетворять.

Таким образом, в известной фундаментальной лемме Неймана–Пирсона и различных ее обобщений [67, 68, 79, 91, 126, 127, 134] устанавливается существование и структура оптимальной критической (решающей) функции или, иначе говоря, оптимального разбиения множества на непересекающиеся подмножества, а также доказываются необходимые и (или) достаточные условия оптимальности критической функции. Однако в тех обобщениях задачи Неймана–Пирсона, где критическая функция (оптимальное разбиение) должна удовлетворять дополнительным условиям в форме равенств и (или) неравенств, в выражении для оптимального решения появляются константы типа множителей Лагранжа, относительно которых либо доказывается, что они существуют [67, 79], либо, кроме того, указаны условия, которым эти константы должны удовлетворять. Отсутствие конструктивных алгоритмов отыскания этих констант затрудняет использование различных обобщений леммы Неймана–Пирсона при численном решении задачи теории проверки статистических гипотез и использовании результатов этой теории в других областях науки, например, в теории распознавания образов.

Далее предлагается метод, являющийся модификацией метода из пункта 2.3.1 главы 2, позволяющий для различных обобщений задачи Неймана-Пирсона получить оптимальное решение, а также определить константы, входящие в это решение, о которых шла речь выше, алгоритмическим путем. Предложенный метод применяется здесь к одному из обобщений задачи Неймана-Пирсона (см.[79, лемма 4 с.399]) на случай ограничений в форме неравенств.

4.4.2. Математическая постановка обобщенной задачи Неймана-Пирсона, описание метода ее решения

Приведем математическую постановку задачи Неймана-Пирсона из теории проверки многих статистических гипотез, обобщающую задачу Неймана-Пирсона, приведенную в [79] на случай наличия нескольких ограничивающих условий в форме неравенств.

Пусть Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу множество в n -мерном евклидовом пространстве E_n . Требуется найти (критическую) вектор-функцию $\varphi^*(x) = (\varphi_1^*(x), \dots, \varphi_N^*(x))$, являющуюся решением задачи

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N f_i(x) \varphi_i(x) dx \rightarrow \min, \tag{4.4.11}$$

при условиях

$$0 \leq \varphi_i(x) \leq 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N, \tag{4.4.12}$$

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega, \tag{4.4.13}$$

$$\int_{\Omega} f_i(x) \varphi_i(x) dx \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, N. \tag{4.4.14}$$

Интегралы в (4.4.11) – (4.4.14) понимаются в смысле Лебега.

Функции $f_i(x)$ – ограниченные, измеримые, определенные на Ω для всех $i = 1, \dots, N$; $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ – заданные вещественные числа, причем выполняется условие разрешимости задачи

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \geq \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} f_i(x) dx.$$

С учетом результатов из пункта 2.3.1 имеет место частный случай теоремы 2.11, являющийся аналогом леммы Нейма-Пирсона

Частный случай теоремы 2.11, п. 2.3.1. Для того чтобы возможное разбиение $(\Omega_{\alpha_1}, \dots, \Omega_{\alpha_j}, \dots, \Omega_{\alpha_N})$ являлось оптимальным для задачи (4.4.11)-(4.4.14)

необходимо и достаточно существования неотрицательных констант ξ_1, \dots, ξ_N таких, что

$$(1 + \xi_i) f_i(x) \leq (1 + \xi_k) f_k(x), \quad i \neq k, \quad (4.4.15)$$

п. в. для $x \in \Omega_{i_j}$, $i, k = 1, \dots, N$.

В отличие от [148, 127, 68, 79, 126, 90, 67], где устанавливаются условия, аналогичные (4.4.15), в данном пункте предлагается алгоритм отыскания констант ξ_1, \dots, ξ_N .

Далее, основываясь на результатах п. 2.3.1 главы 2, оптимальное решение задачи (4.4.11) – (4.4.14) можно записать для $i = 1, \dots, N$, и почти всех $x \in \Omega$ следующим образом:

$$\varphi_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (1 + \xi_i^*) f_i(x) = \min_{k=1, \dots, N} [(1 + \xi_k^*) f_k(x)], \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (4.4.16)$$

где в качестве константы ξ_i^*, \dots, ξ_N^* выбирается оптимальное решение задачи

$$G(\xi) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [(1 + \xi_i) f_i(x)] dx - \sum_{i=1}^N \xi_i \alpha_i \rightarrow \max \quad (4.4.17)$$

при условиях

$$\xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.4.18)$$

Для максимизации негладкой конечномерной целевой функции $G(\xi)$ при условиях (4.4.18) будем применять γ -алгоритм Шора.

4.4.3. Алгоритм решения обобщенной задачи Неймана-Пирсона с одновременным отысканием констант, входящих в оптимальное решение

Для формулировки алгоритма решения задачи, основанного на формулах (4.4.16)–(4.4.18) и являющегося адаптацией алгоритма 2.4 решение задачи (4.4.11)–(4.4.14) из п. 2.3.1 главы 2, перейдем к задаче безусловной максимизации по ξ с помощью введения в целевую функцию (4.4.17) негладкой штрафной функции множества $\{\xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N\}$. Найти

$$\max_{\xi \in E_N} P(\xi), \quad (4.4.19)$$

где

$$P(\xi) = G(\xi) - S \cdot \sum_{i=1}^N \max(0, -\xi_i).$$

Здесь ξ – достаточно большое положительное число (значительно боль-

пее максимального из множителей Лагранжа для функции (4.4.17)).

Определим i -ю компоненту N -мерного вектора обобщенного градиента

$$g_p(\xi) = (g_p^{g_1}(\xi), \dots, g_p^{g_N}(\xi))$$

функции (4.4.19) в точке $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ следующим образом:

$$g_p^{g_i}(\xi) = \int_{\Omega} f_i(x) \varphi_i(x) dx - \alpha_i + S \cdot \max(0, \text{sign}(-\xi_i)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.4.20)$$

Алгоритм 4.6 (решения задачи (4.4.11)–(4.4.14))

Область Ω заключаем в параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат. Если область Ω не параллелепипед, то для ее задания введем функцию $\rho(x)$, определенную на Π следующим образом:

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in \Omega, \\ 0 & \text{для } x \in \Pi \setminus \Omega, \end{cases}$$

и всюду в алгоритме функции $f_i(x)$ заменим произведением $f_i(x) \cdot \rho(x)$.

Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение $\xi = \xi^{(0)}$. Вычисляем значения $\varphi^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (4.4.15) при $\xi = \xi^{(0)}$. Вычисляем значения $g_p^g(\xi^{(0)})$ в узлах сетки по формулам (4.4.19) при $\varphi(x) = \varphi^{(0)}(x)$, $\xi = \xi^{(0)}$. Выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$ для г-алгоритма и находим

$$\xi^{(1)} = \xi^{(0)} + h_0 g_p^g(\xi^{(0)}).$$

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после $k, (k = 1, 2, \dots)$ шагов алгоритма получены определенные значения $\xi^{(k)}$ и $\varphi^{(k-1)}(x)$ в узлах сетки.

Опишем $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значения $\varphi^{(k)}(x)$ в узлах сетки по формулам (4.4.16) при $\xi = \xi^{(k)}$.

2. Вычисляем значения $g_p^g(\xi^{(k)})$ в узлах сетки по формулам (4.4.20) при $\varphi(x) = \varphi^{(k)}(x)$, $\xi = \xi^{(k)}$.

3. Проводим $(k+1)$ -й шаг г-алгоритма, краткая схема которого имеет вид

$$\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} + h_k B_{k+1}^* \tilde{g}_p^*,$$

где B_{k+1}^* – оператор отображения преобразованного пространства в основное пространство E_N , причем $B_0^* = I_N$, I_N – единичная матрица, $\tilde{g}_p^* = B_{k+1}^* g_p(\xi^{(k)})$; h_k – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия минимума по направлению. Формулы для пересчета матриц B_{k+1}^* см. алгоритм **A1**.

4. Если условие

$$\left\| \xi^{(k)} - \xi^{(k+1)} \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (4.4.21)$$

не выполняется, переходим к $(k+2)$ -му шагу алгоритма, если выполняются, то – переход к п. 5.

5. Полагаем $\varphi^*(x) = \varphi^{(l)}(x)$, $\xi^* = \xi^{(l)}$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (4.4.21).

Алгоритм **4.6** описан.

Замечание. Описанный выше метод легко применить и для других обобщений задачи Неймана-Пирсона. К примеру, пусть в задаче (4.4.11) – (4.4.14), кроме ограничений вида

$$\int_{\Omega} f_i(x) \varphi_i(x) dx \leq a_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

есть также ограничения вида

$$\int_{\Omega} \varphi_i(x) dx \leq b_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Тогда оптимальное решение $\varphi_i^*(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ и $i = 1, \dots, N$, имеет вид

$$\varphi_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (1 + \xi_i^*) f_i(x) + \psi_i^* = \min_{k=1, \dots, N} [(1 + \xi_k^*) f_k(x) + \psi_k^*], \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где в качестве констант $\xi_1^*, \dots, \xi_N^*, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ выбирается оптимальное решение конечномерной негладкой задачи

$$G(\xi_1^*, \dots, \xi_N^*, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [(1 + \xi_i) f_i(x) + \psi_i] dx - \sum_{i=1}^N (\xi_i^* a_i + \psi_i^* b_i) \rightarrow \max$$

при условиях

$$\xi_i^* \geq 0, \quad \psi_i^* \geq 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

4.5. Модельные нелинейные задачи оптимального разбиения множеств

4.5.1. Нелинейные однопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств с отысканием координат центров подмножеств

Описанный в п. 2.4.1 алгоритм **2.6** реализован для модельных бесконечномерных задач размещения в заданной области трех предприятий, производящих однородную продукцию для распределенного в этой области с заданной плотностью потребителя. Задачи решались при наличии ограничений на мощности предприятий в виде равенств и неравенств.

Модельная задача 4.1

Пусть потребитель некоторой однородной продукции непрерывно распределен в области $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10\}$. Продукцию могут выпускать три предприятия. Заданы начальные координаты расположения предприятий $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) = (0; 0)$, $i = \overline{1, 3}$. Для каждого i -го предприятия, $i = \overline{1, 3}$, задана функция

$$c(x, y, \tau_i) = \sqrt{(x - \tau_i^{(1)})^2 + (y - \tau_i^{(2)})^2},$$

описывающая стоимость транспортировки единицы продукции из i -го предприятия к потребителю с координатами (x, y) . Известен спрос $\rho(x, y)$ на продукцию для каждого пункта потребления с координатами (x, y) . Для простоты полагается $\rho(x, y) \equiv 1, \forall x \in \Omega$. Функции $\varphi_i(Y_i)$, описывающие зависимость стоимости производства продукции на i -м предприятии от его возможностей, имеют вид:

$$\varphi_i(Y_i) = Y_i^3, \quad i = 1, 2, 3,$$

где мощность Y_i i -го предприятия определяется по формуле:

$$Y_i = \iint_{\Omega_i} \rho(x, y) dx dy. \quad (4.5.1)$$

Множество потребителей Ω можно разбивать на зоны обслуживания Ω_i потребителей i -м пунктом производства так, чтобы

$$\bigcup_{i=1}^3 \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_k)_{i \neq k} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.5.2)$$

причем мощность i -го предприятия, $i = 1, 2, 3$, определяется суммарным спросом потребителей, принадлежащих Ω_i , $i = 1, 2, 3$, и не должна превышать заданных объемов:

$$0 \leq \int\int_{\Omega_i} \rho(x, y) dx dy \leq b_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.5.3)$$

$$b_1 = 90, \quad b_2 = 50, \quad b_3 = 35.$$

Требуется разбить множество потребителей Ω на зоны обслуживания их тремя предприятиями, т. е. на подмножества Ω_i , $i = 1, 2, 3$, и разместить эти предприятия в области Ω так, чтобы минимизировать функционал суммарных затрат на производство продукции и доставку ее к потребителю:

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \\ = \sum_{i=1}^3 \left[\varphi_i \left(\int\int_{\Omega_i} \rho(x, y) dx dy \right) + \int\int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x, y) dx dy \right] \quad (4.5.4)$$

при условиях (4.5.2) – (4.5.3).

Для решения сформулированной задачи с помощью описанного выше алгоритма область Ω покрывалась прямоугольной сеткой с узлами (i, j) , $i = 1, \dots, 21$, $j = 1, \dots, 21$.

В качестве начальных данных были выбраны начальные значения двойственных переменных: $\psi_i^{(0)} = 0$, $i = 1, 2, 3$; начальные значения мощностей $Y_1^{(0)} = 1$, $Y_2^{(0)} = 1$, $Y_3^{(0)} = 10$; начальные координаты расположения предприятий – $\tau_i^{(0)} = (0; 0)$, $i = 1, 2, 3$. Условием прекращения счета являлось выполнение неравенства:

$$\left\| \left(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right) - \left(Y^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)} \right) \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

где k – номер итерации алгоритма, на которой произошел останов, $\varepsilon = 10^{-5}$ – точность вычислений г-алгоритмом Шора.

Двойные интегралы, входящие в формулы (4.5.1) – (4.5.3), вычислялись с помощью кубатурной формулы трапеций.

В результате работы описанным выше алгоритмом за 106 итераций получены следующие результаты:

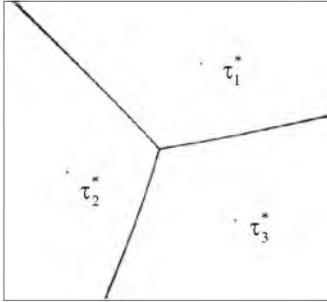


Рис. 4.18. Оптимальное разбиение множества потребителей Ω на зоны обслуживания каждым из трех предприятий с размещением центров подмножеств для модельной задачи 4.1

Модельная задача 4.2

Исходные данные те же, что и в модельной задаче 4.1, за исключением ограничений на мощности предприятий. Мощность первого предприятия должна быть равна заданному объему, а мощности второго и третьего предприятия не должны превышать заданных объемов:

$$Y_1 = 90, \quad 0 \leq Y_2 \leq 50, \quad 0 \leq Y_3 \leq 35.$$

В результате работы алгоритма за 461 итерацию с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ получены следующие результаты:

– оптимальное разбиение множества потребителей Ω на три зоны обслуживания каждым из трех предприятий соответственно, см. рис. 4.19;

– оптимальные координаты размещенных предприятий:

$$\tau_1^* = (5,00; 5,00),$$

$$\tau_2^* = (1,10; 8,92),$$

$$\tau_3^* = (8,98; 1,07);$$

– оптимальное разбиение множества потребителей Ω на зоны обслуживания $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ каждым из трех предприятий соответственно, см. рис. 4.18.

– оптимальные координаты размещенных предприятий:

$$\tau_1^* = (6,05; 7,91), \quad \tau_2^* = (1,94; 4,29),$$

$$\tau_3^* = (7,11; 2,68);$$

– оптимальные мощности каждого из предприятий:

$$Y_1^* = 33,33; \quad Y_2^* = 33,34; \quad Y_3^* = 33,33;$$

– минимальное значение прямого функционала (4.5.4): $F_* \approx 111\,363,8$;

– максимальное значение функционала двойственной задачи $G^* \approx 111\,348,5$.

– оптимальные мощности каждого из трех предприятий:

$$Y_1^* = 90,00; Y_2^* = 4,99; Y_3^* = 4,99;$$

– минимальное значение прямого функционала (4.5.4):

$$F_* \approx 729\,571,1;$$

– максимальное значение функционала двойственной задачи $G^* \approx 729\,585,9$.

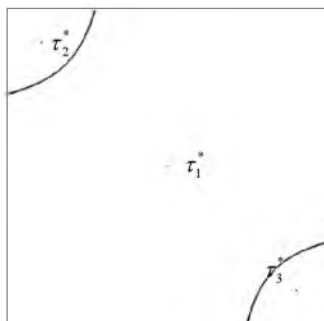


Рис. 4.19. Оптимальное решение модельной задачи 4.2

Модельная задача 4.3

Для сравнения с модельной задачей 4.2 решена задача с теми же данными, только при заданных заранее, фиксированных координатах предприятий:

$$\tau_1^{(0)} = (2; 2), \quad \tau_2^{(0)} = (3; 9), \quad \tau_3^{(0)} = (5; 7);$$

Получены следующие результаты за 136 итераций:

- оптимальное разбиение множества потребителей Ω на три зоны обслуживания каждым из трех предприятий соответственно, см. рис. 4.20;
- оптимальные мощности каждого из трех предприятий:

$$Y_1^* = 90,00;$$

$$Y_2^* = 5,00;$$

$$Y_3^* = 5,00;$$

– минимальное значение прямого функционала (4.5.4): $F_* \approx 729720,8$;

– максимальное значение функционала двойственной задачи $G^* \approx 729723,2$.

Как видно из результатов решений модельных задач **4.1 – 4.3**:

1) суммы оптимальных мощностей предприятий в каждой из задач равны суммарной мощности $S = 100$ (см. постановку задачи **A7**, условия разрешимости);

2) оптимальная мощность первого предприятия в модельных задачах **4.2 – 4.3** соответствует ограничению в форме равенства и равна ≈ 90 ;

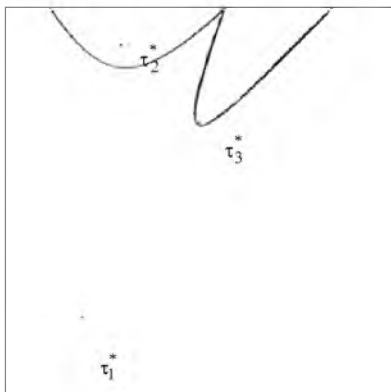


Рис. 4.20. Оптимальное разбиение множества потребителей Ω на зоны обслуживания каждым из трех предприятий без размещения центров подмножеств для модельной задачи 2.3

Замечание к пункту 4.5.1. По результатам многочисленных вычислительных экспериментов авторы пришли к выводу, что описанный алгоритм работает и для случая, когда $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, – ограниченные вогнутые функции своего аргумента. Для этого случая двойственная задача (2.4.5) приводится вместо вида (2.4.13) к следующему:

$$\max_{\psi \in \Lambda} \min_{\tau \in \Omega^M} \min_{Y \in U} \widetilde{G}_2(Y, \tau, \psi).$$

Численные эксперименты проводились, в частности, для таких ограниченных вогнутых на $[0; 100]$ функций $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, 3$:

– монотонно возрастающих на $[0; 100]$:

$$\varphi_i(Y_i) = Y_i^{1/2}; \quad \varphi_i(Y_i) = Y_i^{3/2};$$

– монотонно убывающей на $[0; 100]$:

$$\varphi_i(Y_i) = \cos\left(\frac{\pi \cdot Y_i}{200}\right).$$

3) оптимальное значение целевого функционала прямой задачи при оптимальном размещении предприятий (модельная задача 4.2) меньше (что естественно), чем в случае, когда координаты предприятий фиксированы (модельная задача 4.3).

Численные эксперименты проводились так же для следующих ограниченных, выпуклых на $[0; 100]$ функций $\varphi_i(Y_i)$, $i = 1, \dots, 3$:

– монотонно возрастающих на $[0; 100]$:

$$\varphi_i(Y_i) = Y_i^2; \quad \varphi_i(Y_i) = 0,5 \cdot Y_i^{3/2};$$

$$\varphi_i(Y_i) = e^{(0,1 \cdot Y_i)}; \quad \varphi_i(Y_i) = Y_i^4;$$

– монотонно убывающей на $[0; 100]$: $\varphi_i(Y_i) = (Y_i - 100)^2$.

4.5.2. Нелинейные многопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств с отысканием координат центров подмножеств

Приведенный в п. 2.4.2 алгоритм 2.7 реализован для модельных бесконечномерных задач размещения предприятий. В заданной области 9 предприятий производят продукцию 3 видов для размещенного в этой области с заданной плотностью потребителя, с ограничениями на мощность предприятий в виде равенств и неравенств. Следует заметить, что стоимость транспортировки единицы продукции к потребителю задается в виде евклидовой метрики, метрики Чебышева или манхэттенской, в зависимости от вида продукции. В *модельной задаче 4.4* функция спроса $\rho^j(x)$ на продукцию задается аналитически для каждого j -го, $j = 1, \dots, M$, вида продукции, а в *модельной задаче 2.5* равна единице в каждой точке $x \in \Omega$.

Модельная задача 4.4. Задано множество Ω потребителей продукции 3 видов, которая может производиться 9 пунктами производства. Граница области потребителей определена:

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10\}.$$

Стоимость транспортировки единицы продукции с i -го, $i = \overline{1, 9}$, предприятия к потребителю (x, y) для каждого j -го, $j = \overline{1, 3}$, вида продукции задается следующим образом:

$$c^j(x, y, \tau_i) = \begin{cases} \sqrt{(x - \tau_i^{(1)})^2 + (y - \tau_i^{(2)})^2}, & \text{если } j = 1, \\ \max(|x - \tau_i^{(1)}|, |y - \tau_i^{(2)}|), & \text{если } j = 2, \\ |x - \tau_i^{(1)}| + |y - \tau_i^{(2)}|, & \text{если } j = 3. \end{cases}$$

Спрос $\rho^j(x, y)$ на продукцию j -го вида распределен по области Ω с плотностью

$$\rho^j(x, y) = \frac{1}{\ln|(x - y)^j - 110.003|}, j = \overline{1, 3}.$$

Графическое изображение функции спроса для каждого из трех видов продукции представлено на рис. 4.21.

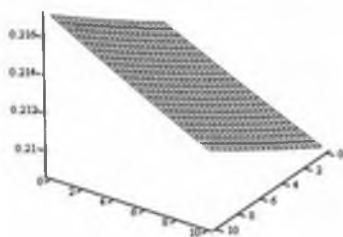
Функции $\varphi_i^j(Y_i^j)$, описывающие зависимость стоимости производства продукции j -го вида на i -м предприятии от его мощности Y_i^j , имеют вид:

$$\varphi_i^j(Y_i^j) = (Y_i^j)^2, i = \overline{1, 9},$$

где мощность Y_i^j i -го предприятия по производству j -го вида продукции определяется по формуле

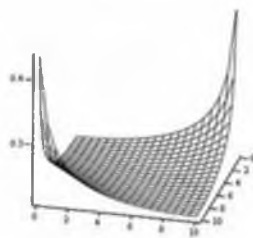
$$Y_i^j = \iint_{\Omega^j} \rho^j(x, y) dx dy .$$

$$\rho^1(x, y) = \frac{1}{\ln[(x - y) - 110.003]}$$



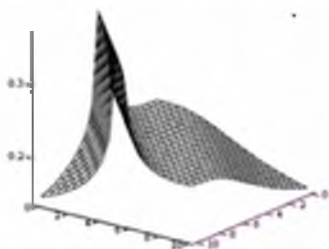
a

$$\rho^2(x, y) = \frac{1}{\ln[(x - y)^2 - 110.003]}$$



б

$$\rho^3(x, y) = \frac{1}{\ln[(x - y)^3 - 110.003]}$$



в

**Рис. 4.21. Графическое изображение функции спроса для каждого из 3 видов продукции:
a – для I вида продукции;
б – для II вида продукции;
в – для III вида продукции**

Мощность i -го, $i = \overline{1, 9}$, пункта производства по всем видам продукции определяется суммарным спросом потребителей, которые принадлежат Ω_j^j , $j = \overline{1, 3}$, и для пунктов производства с номерами 3, 6, 8 должна быть равна заданным объемам, а для пунктов производства с номерами 1, 2, 4, 5, 7, 9 не должна превышать заданных объемов:

$$0 \leq \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_j'} \rho^j(x, y) dx dy \leq b_i, \quad i = 1, 2, 4, 5, 7, 9,$$

$$b_{1,7} = 100, \quad b_2 = 86, \quad b_3 = 80, \quad b_5 = 17, \quad b_9 = 25,$$

$$\sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_j'} \rho^j(x, y) dx dy = b_i, \quad i = 3, 6, 8,$$

$$b_6 = 36, \quad b_8 = 5, \quad b_9 = 15.$$

Требуется разбить множество потребителей Ω на их зоны обслуживания Ω_j^i 9 предприятиями по каждому виду продукции при условии, что

$$\bigcup_{i=1}^9 \Omega_j^i = \Omega, \quad j = \overline{1, 3}, \quad \text{mes}(\Omega_j^i \cap \Omega_k^i) = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = \overline{1, 9}, \quad j = \overline{1, 3},$$

и разместить эти предприятия в области Ω так, чтобы минимизировать функционал суммарных затрат на производство продукции и доставку ее к потребителю:

$$\begin{aligned} F(\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_9^1; \Omega_1^2, \dots, \Omega_9^2; \Omega_1^3, \dots, \Omega_9^3\}, \{\tau_1, \dots, \tau_9\}) = \\ = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^9 \left[\varphi_j^i \left(\iint_{\Omega_j^i} \rho^j(x, y) dx dy \right) + \iint_{\Omega_j^i} c^j(x, \tau_i) \rho^j(x, y) dx dy \right]. \end{aligned}$$

Не исключается и тот случай, когда некоторые из подмножеств Ω_j^i , $i = \overline{1, 9}$, $j = \overline{1, 3}$, окажутся пустыми.

Множество Ω покрывалась сеткой с узлами (i, j) , $i = \overline{1, \dots, 21}$, $j = \overline{1, \dots, 21}$.

В качестве начальных значений двойственных переменных заданы $\psi_i^{(0)} = 0$, $i = \overline{1, 9}$; начальные значения мощностей предприятий:

$$Y_1^{(0)} = 10, \quad Y_2^{(0)} = 100, \quad Y_3^{(0)} = 10,$$

$$Y_4^{(0)} = 10, \quad Y_5^{(0)} = 100, \quad Y_6^{(0)} = 10,$$

$$Y_7^{(0)} = 10, \quad Y_8^{(0)} = 100, \quad Y_9^{(0)} = 10;$$

начальные координаты размещения предприятий $\tau_i^{(0)} = (0, 0)$, $i = \overline{1, 9}$.

Условием прекращения вычислений является выполнение неравенства:

$$\|(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - (Y^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)})\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

В результате работы алгоритма за 131 итерацию получены:

- оптимальное разбиение множества потребителей Ω на 9 зон обслуживания каждым из 9 предприятий по каждому из трех видов продукции, представленное на рис. 4.22;



Рис. 4.22. Оптимальное разбиение множества Ω на зоны обслуживания каждым из девяти предприятий с размещением их центров по трем видам продукции для модельной задачи 4.4:
а – для I вида продукции; б – для II вида продукции; в – для III-го вида продукции

- максимальное значение функционала двойственной задачи $G^* \approx 1\,754,92$;

- минимальное значение функционала прямой задачи $F_* \approx 1\,745,89$;

- оптимальные мощности каждого из девяти предприятий:

$$Y_1^* = 1.95, \quad Y_2^* = 0.54, \quad Y_3^* = 35.65,$$

$$Y_4^* = 1.73, \quad Y_5^* = 1.85, \quad Y_6^* = 4.96,$$

$$Y_7^* = 1.71, \quad Y_8^* = 14.98, \quad Y_9^* = 1.98;$$

- оптимальные координаты размещенных предприятий:

$$\begin{aligned} \tau_1^* &= (8.93; 3.07), & \tau_2^* &= (4.83; 6.60), & \tau_3^* &= (5.32; 4.61), \\ \tau_4^* &= (9.20; 6.42), & \tau_5^* &= (7.78; 0.79), & \tau_6^* &= (4.78; 1.99), \\ \tau_7^* &= (1.05; 0.97), & \tau_8^* &= (3.67; 7.53), & \tau_9^* &= (9.26; 9.07). \end{aligned}$$

Модельная задача 4.5. В постановке первой модельной задачи зададим функцию спроса $\rho^j(x, y) = 1, j = \overline{1, 3}$. При таких условиях после 227 итерации получим следующие результаты:

– оптимальное разбиение множества потребителей Ω на девять зон обслуживания каждым из девяти предприятий по трем видам продукции, представленное на рис. 4.23;



Рис. 4.23. Оптимальное разбиение множества Ω на зоны обслуживания каждым из девяти предприятий с размещением их центров по трем видам продукции для модельной задачи 2.5:
a – для I вида продукции; ***б*** – для II вида продукции; ***в*** – для III вида продукции

– максимальное значение функционала двойственной задачи $G^* \approx 13\,226,77$;

– минимальное значение функционала прямой задачи $F_* \approx 13\,226,41$;

– оптимальные мощности каждого из 9 предприятий:

$$Y_1^* = 50.89, Y_2^* = 49.57, Y_3^* = 35.87,$$

$$Y_4^* = 50.91, Y_5^* = 16.99, Y_6^* = 4.99,$$

$$Y_7^* = 50.77, Y_8^* = 14.89, Y_9^* = 24.97;$$

– оптимальные координаты размещенных предприятий:

$$\tau_1^* = (6.14; 2.55), \tau_2^* = (3.49; 3.62), \tau_3^* = (8.49; 2.98),$$

$$\tau_4^* = (6.37; 7.82), \tau_5^* = (9.09; 8.45), \tau_6^* = (9.49; 6.00),$$

$$\tau_7^* = (2.06; 7.98), \tau_8^* = (1.91; 4.61), \tau_9^* = (1.73; 1.75).$$

Анализируя приведенные результаты модельных задач **4.4** и **4.5**, можно заключить, что:

1) для каждой из задач выполняются условия разрешимости (2.4.29) задачи **A11**, т. е. общая оптимальная мощность девяти предприятий, полученная по алгоритму решения (для *модельной задачи 4.4* это 65,35, а для *модельной задачи 4.5* это 299,85), не превышает $S=464$ – суммы заданных ограничений на объемы мощностей предприятий;

2) полученные оптимальные мощности 3-го, 6-го и 8-го предприятия в каждой из задач отвечают ограничениям в виде равенств, т. е. равны заданным значениям, а именно $Y_3^* \approx 36$, $Y_6^* \approx 5$, $Y_8^* \approx 15$;

3) в *задаче 4.4*, для $\rho^j(x, y) \not\equiv 1$, $j = \overline{1, 3}$, некоторые из подмножеств, за счет вида функции $\rho^j(x, y)$, оказались пустыми, что не противоречит постановке исходной задачи. Так, например, на рисунке 4.22, *a* пустыми оказались подмножества с номерами 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9 и т. п.

4.5.3. Решение модельных динамических задач оптимального разбиения множеств

Анализ результатов вычислительных экспериментов по решению динамических задач оптимального разбиения множеств с интегральными ограничениями. Приведенный алгоритм **2.8** реализован в виде программного модуля, который включен в комплекс программ DOSPP, ориентированный на решение разнообразных динамических задач оптимального разбиения множеств. Представим здесь результаты решения некоторых тестовых примеров. Общими для экспериментов № 1 – № 4 были следующие параметры модели **A9**:

$$\Omega = [0,1] \times [0,1]; \quad \beta_0 = 1, \beta_1 = 1, \quad c(\tau, x, t) = \sqrt{(\tau_1 - x_1)^2 + (\tau_2 - x_2)^2}; \quad \tau_1 = (0.3, 0.3); \\ \tau_2 = (0.8, 0.2).$$

Для численного решения задач область Ω покрывалась сеткой с шагом $h_x = h_y = 0.025; h_t = 0.1; T = 2.5$.


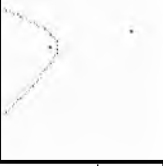
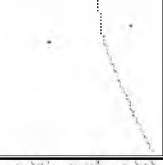
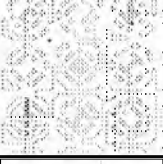
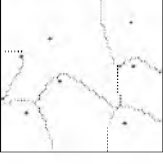
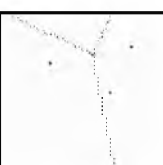
Другие параметры тестовых примеров и результаты разбиения множества, а также оптимальные значения целевых функционалов прямой и двойственной задач, приведены в табл. 4.2.

В тесте №1 правые части интегральных ограничений – достаточно большие числа – выбраны для того, чтобы получить очевидное оптимальное разбиение в виде диаграммы Вороного. Анализируя значения интегралов, которые были получены в левых частях ограничений при таких значениях компонент b_i , в тестах №2 и №3 правые части ограничений изменены так, чтобы разбиение изменилось «в соответствующую сторону», что можно проследить на приведенных диаграммах разбиений. В тесте №4 в качестве плотности в начальный момент времени выбрана синусоида, что характерным образом отразилось на виде оптимального разбиения. В тесте №6 функция плотности в начальный момент времени была выбрана отрицательной. В результате получено оптимальное разбиение квадрата в виде *диаграммы Вороного самой дальней точки*.

По результатам всех экспериментов видно, что значения прямого и двойственного функционалов на оптимальном решении с достаточной точностью совпадают, причем, как правило, выполняется основное соотношение двойственности ($I_1^* \geq \chi^*$). Кроме того, в каждом из примеров имеет место выполнение условия дополняющей нежесткости.

Таким образом, для динамической задачи оптимального разбиения множеств с интегральными ограничениями **A9** в случае, когда функции $c(x, \tau_i, t) \equiv c(x, \tau_i) f(t)$ для всех $i = \overline{1, N}$, разработан, обоснован и численно реализован метод решения, основанный на сведении этой задачи к задаче условной минимизации недифференцируемой функции конечного числа переменных. Эта редукция совершается путем последовательного применения принципа Лагранжа учета ограничений в задачах условной оптимизации и необходимых условий для семейства задач оптимального управления в форме принципа максимума Понтрягина. Общий случай задачи **A9**, при других зависимостях функций $c(x, \tau_i, t)$ от временной переменной, требует дополнительного исследования.

Таблица 4.2 Результаты вычислительных экспериментов по решению динамических задач ОРМ с интегральными фазовыми ограничениями

№ теста	Функция $\rho_0(x, y)$; вектор b	Характеристики оптимального решения задачи		
		Значения I_1 и χ	Двойственные переменные	Разбиение
1	$\rho_0(x, y) = 1$; $b_1 = 50; b_2 = 50$.	$\chi^* = 0.66760$ $I_1^* = 0.66824$	1.029E-05 2.621E-06	
2	$\rho_0(x, y) = 1$; $b_1 = 0.1$; $b_2 = 2.0$.	$\chi^* = 0.80912$ $I_1^* = 0.81043$	0.43418 2.737E-06	
3	$\rho_0(x, y) = 1$; $b_1 = 1.6$; $b_2 = 0.4$	$\chi^* = 0.67997$ $I_1^* = 0.67998$	1.208E-06 0.13187	
4	$\rho_0 = \sin(0.5xy) + 1$; $b_1 = 50; b_2 = 50$.	$\chi^* = 0.56505$ $I_1^* = 0.56523$	1.260E-06 2.467E-06	
5	$\rho_0(x, y) = 1$; $b_1 = 2.0; b_{2,5} = 0.3$; $b_{3,6} = 0.1; b_4 = 0.07$; $b_7 = 0.04$	$\chi^* = 0.51311$ $I_1^* = 0.51463$	8.255E-07 0.14314 0.35640 0.51850 0.21183 0.34527 0.18432	
6	$\rho_0(x, y) = -1$; $b_{1,2,3} = 50$	$\chi^* = -2.1901$ $I_1^* = -2.18996$	2.216E-06 9.467E-08 4.911E-07	

Результаты вычислительных экспериментов по решению динамических задач оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств. Общими для тестов № 1 – № 5 (см. табл. 4.3) являлись следующие параметры задачи **A10**: $\Omega = [0,1] \times [0,1]$; $\beta_0 = 1, \beta_1 = 1$; $T = 2.5$; $c_i(\tau_i, x, t) = \|x - \tau_i\|^2$, $\forall x \in \Omega$, где $\|\cdot\|$ – евклидова метрика, $\tau_i \in \Omega$, $i = \overline{1, N}$ – заранее неизвестны; $f(x, t) \equiv 0$. Для численного решения задач множество Ω покрывалось сеткой с шагом $h_x = h_y = 0.02$, шаг по временной переменной $h_t = 0.1$. Другие параметры задачи для соответствующих экспериментов, а также полученные оптимальные решения, представлены в таблице 4.3. Отметим только, что вычисление координат центров подмножеств и значений двойственных переменных осуществлялось с точностью $\varepsilon = 0.0001$.

Как видно из результатов вычислительных экспериментов № 1 и № 2, оптимальное размещение центров подмножеств зависит от начального приближения этих параметров. Но в обоих случаях получен локальный оптимум целевого функционала, что следует из результатов исследований свойств решений задач ОРМ, приведенных в работе [36]. В частности там показано, что в задаче оптимального разбиения множества с размещением центров подмножеств, в которой в качестве функции $c_i(\tau_i, x)$ выступает евклидова метрика, локальным оптимальным расположением двух центров подмножеств, образующих разбиение квадрата $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, являются концы диаметра окружности $C = \left\{ (x_1, x_2) : \sqrt{(x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2} = 0.25 \right\}$. Заметим, что в модельных задачах № 1 и № 2 интегральные ограничения пассивны, то есть фактически решаются динамические задачи ОРМ с размещением центров без ограничений на фазовую переменную.

В экспериментах № 3 и № 4 можно проследить, как ограничения на мощности подмножеств влияют на расположение центров подмножеств и на само разбиение. Подмножества, составляющих оптимальное разбиение в динамической задаче ОРМ, могут быть несвязными, о чем свидетельствуют результаты эксперимента № 5. Здесь форму границ между подмножествами существенно определяет функция начальных условий, которая в данном примере является периодической.

В отличие от предыдущих тестовых задач, в эксперименте № 6 функция стоимости $c(\tau, x, t)$ зависит явно от временной переменной:



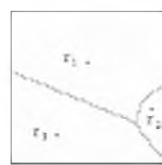



$c(\tau, x, t) = e^{0.3t} \sqrt{(\tau_1 - x_1)^2 + (\tau_2 - x_2)^2}$, что существенно отразилось и на значении целевого функционала, и на форме границ между подмножествами.

Анализируя полученные результаты, можно заметить, что почти во всех задачах с достаточной точностью выполняется соотношение двойственности ($I^* \geq \chi^*$) и условие дополняющей нежесткости.

Следует отметить, что в процессе реализации алгоритма при вычислении компонент вектора обобщенного градиента $(g_{\bar{\tau}}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}), g_{\bar{\xi}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}))$ применялись аналитические выражения этих компонент. Погрешность их вычисления состояла только из погрешности, допускаемой за счет приближенного нахождения значения определенных интегралов, входящих в указанные аналитические выражения. При реализации алгоритма компоненты вектора обобщенного градиента можно вычислять и приближенно, используя формулы численного дифференцирования. Но это может оказаться еще одним существенным фактором, влияющим на погрешность вычислений, и вызвать значительные расхождения результатов решения модельных задач, что было подтверждено экспериментально. Применение формул численного дифференцирования для приближенного вычисления частных производных целевой функции задачи конечномерной оптимизации, к которой сводится исходная задача ОРМ, существенно сказывается и на продолжительности процесса решения динамической задачи оптимального разбиения. Время вычислений при этом в несколько раз превышает время, за которое находится оптимальное решение задачи в случае, когда компоненты вектора обобщенного градиента вычисляются хотя и приближенно, но на основе аналитических их выражений.

Исследования алгоритмов решения динамических задач оптимального разбиения множеств, как с фиксированными центрами подмножеств, так и с их размещением, с интегральными ограничениями или без ограничений, проводились также с целью выявления зависимости оптимальных решений задач от количества точек, которые составляют дискретизацию разбиваемого множества. Оказалось, что размер сетки незначительно влияет на результаты расчетов значений функционалов, а также на оптимальное разбиение и координаты центров подмножеств, если границы между подмножествами неподвижны. При решении динамических задач оптимального разбиения множеств с движущимися границами между подмножествами плотность точек дискретизации разбиваемого множества влияет как на оптимальное разбиение, так и на оптимальное значение целевого функционала. Об этом свидетельствуют результаты, приведенные в [42], табл. 3.3 и 3.4.

Таблица 4.3 Результаты вычислительных экспериментов по решению динамических задач ОРМ с интегральными фазовыми ограничениями

№ теста	Функция $\rho_0(x, y)$; вектор b ; начальное приближение центров $\tau^{(0)}$	Характеристики оптимального решения задачи		
		Значения I_1 и χ	Координаты центров	Разбиение
1	$\rho_0(x, y) = 4$; $b_{1,2} = 50$ $\tau_1 = (0,0,0,25)$ $\tau_2 = (0,0,0,79)$	$\chi^* = 2.31560$ $I_1^* = 2.3159$	$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0.443 \\ 0.251 \end{pmatrix}$ $\tau_2 = \begin{pmatrix} 0.504 \\ 0.75 \end{pmatrix}$	
2	$\rho_0(x, y) = 1$; $b_{1,2} = 50$ $\tau_1^{(0)} = (0,3,0,3)$, $\tau_2^{(0)} = (0,8,0,2)$,	$\chi^* = 0.59771$ $I_1^* = 0.59820$	$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0.265 \\ 0.509 \end{pmatrix}$ $\tau_2 = \begin{pmatrix} 0.767 \\ 0.519 \end{pmatrix}$	
3	$\rho_0(x, y) = 3$; $b = (20; 0.7; 2.0)$ $\tau^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.3, 0.3 \\ 0.8, 0.2 \\ 0.0, 0.0 \end{pmatrix}$	$\chi^* = 1.8772$ $I_1^* = 1.8753$	$\tau_1 = (0.497, 0.335)$ $\tau_2 = (0.911, 0.641)$ $\tau_3 = (0.299, 0.811)$	
4	$\rho_0(x, y) = 3$; $b_1 = 0.6; b_3 = 0.4$ $b_{2,4} = 10$ $\tau^{(0)} = (0, 0) \forall i$	$\chi^* = 0.56505$ $I_1^* = 0.56523$	$\tau_1 = (0.178, 0.169)$ $\tau_2 = (0.704, 0.324)$ $\tau_3 = (0.844, 0.772)$ $\tau_4 = (0.295, 0.724)$	
5	$\rho_0 = \sin(0.5xy) + 1$; $b_{1,2} = 50$ $\tau_1^{(0)} = (0,3,0,3)$, $\tau_2^{(0)} = (0,8,0,2)$	$\chi^* = 0.49994$ $I_1^* = 0.50014$	$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0.197 \\ 0.523 \end{pmatrix}$ $\tau_2 = \begin{pmatrix} 0.876 \\ 0.432 \end{pmatrix}$	
6	$\rho_0(x, y) = 500$; $b = (300, 400)$ $\tau_1^{(0)} = (0,3,0,3)$, $\tau_2^{(0)} = (0,8,0,2)$,	$\chi^* = 82730.1$ $I_1^* = 80584.5$	$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0.238 \\ 0.374 \end{pmatrix}$ $\tau_2 = \begin{pmatrix} 0.550 \\ 0.733 \end{pmatrix}$	

4.6. Обратные задачи математической физики, сводящиеся к непрерывным задачам оптимального разбиения множеств

Как известно, одним из подходов к решению задач идентификации динамических систем является сведение ее к задаче оптимального управления и применение к решению последней, например, принципа максимума Понтрягина или методов динамического программирования. При формулировке задач оптимального управления сложными процессами и явлениями иногда трудно адекватно ввести управление и сконструировать удовлетворительную меру качества достижения комплекса разнообразных целей. Поэтому разработка специализированных методов решения обратных задач для дифференциальных уравнений с переключаемой правой частью, их алгоритмического и программного обеспечения является в настоящее время актуальным направлением научных исследований.

В данном разделе рассмотрены задачи стартового управления линейной пространственно-двумерной системой с квадратичными критериями качества как задачи восстановления разрывной функции начальных условий для параболической системы. Эти задачи характеризуется тем, что с помощью аппарата функций Грина они могут быть сведены к непрерывным нелинейным задачам оптимального разбиения (раздел 2.5). Построен и теоретически обоснован алгоритм решения этой задачи. Алгоритм обобщен на случай параметрической идентификации кусочно-непрерывной функции правой части дифференциального уравнения. Дана оценка погрешности, возникающей за счет приближенного вычисления функции Грина. Для сравнения сложности идентификации параболических систем с помощью описанного выше подхода, в параграфе 4.7 приведена задача оптимального управления с недифференцируемым функционалом, являющаяся математической моделью задачи восстановления разрывной функции начальных условий, для которой применен метод линеаризации Р.П. Федоренко.

4.6.1. Постановка задачи восстановления разрывных начальных условий для параболического уравнения

Пусть на некотором ограниченном измеримом по Лебегу множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ задан набор функций $\varphi_{0i}(x) \in L_2(\Omega)$, $i = \overline{1, N}$; $P_N(\Omega)$ – класс всех возможных разбиений множества Ω на N подмножеств.

Пусть состояние управляемого объекта описывается функцией $\varphi(x, t) \in W_2^{1,0}(\Omega \times [0, T])$, удовлетворяющей краевой задаче

$$\partial\varphi/\partial t = \Delta\varphi + f(x, t); \quad (4.6.1)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x; \bar{\omega}) = \varphi_{0i}(x) \quad (4.6.2)$$

$$\forall x \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad \bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in \hat{P}_N(\Omega);$$

$$\hat{P}_N(\Omega) = \left\{ \bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega) : \int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x) dx \leq b_i; \quad i = \overline{1, N} \right\}; \quad (4.6.3)$$

$$\varphi(x, t) = g(x, t) \quad \forall x \in \mathcal{A}\Omega, \quad t \in [0, T], \quad (4.6.4)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа; b_1, b_2, \dots, b_N – заданные числа;

$g(x, t) \in L_2(\mathcal{A}\Omega \times [0, T])$, $f(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ – заданные функции.

Каждое допустимое разбиение $\bar{\omega} \in P_N(\Omega)$ определяет начальную функцию $\varphi_0(\cdot, \bar{\omega})$ такую, что соответствующая ей краевая задача (4.6.1) – (4.6.4) имеет единственное обобщенное решение $\varphi(x, t) \in W_2^{1,0}(\Omega \times [0, T])$, где $W_2^{1,0}(\Omega \times [0, T])$ – пространство Соболева [27]. Условимся решение краевой задачи (4.6.1) – (4.6.4), соответствующее функции $\varphi_0(x; \bar{\omega})$, $\bar{\omega} \in \hat{P}_N(\Omega)$, обозначать $\varphi(x, t; \varphi_0(x, \bar{\omega}))$.

Требуется определить такое разбиение $\bar{\omega}^* \in \hat{P}_N(\Omega)$, для которого функция $\varphi_0(\cdot, \bar{\omega}^*)$ доставляла бы минимальное значение функционалу

$$V(\varphi_0(\cdot; \bar{\omega})) = \int_{\Omega} [\varphi(x, T) - Z(x)]^2 dx, \quad (4.6.5)$$

где $Z(\cdot) \in L_2(\Omega)$ – заданная функция, $T > 0$ – фиксированный момент времени.

Замечание 1. В [71] показано, что функция $\varphi(x, t)$, рассматриваемая как отображение отрезка $[0, T]$ в пространство $L_2(\Omega)$, является непрерывной по переменной t в том смысле, что функция $\zeta(x) = \|\varphi(x, t)\|_{L_2(\Omega)}$ непрерывна при $t \in [0, T]$, следовательно, интеграл в (4.6.5) существует.

Замечание 2. Интегральные ограничения в (4.6.3) могут быть заданы в более общем виде, например,

$$\int_{\Omega_i} \xi(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.6.6)$$

где $\xi(\cdot)$ – некоторая заданная функция пространства $L_2(\Omega)$. Эти ограничения могут учитывать, например, тот факт, что функция $\varphi_{0i}(x)$ может определять начальные условия в (4.6.2) лишь на ограниченной части множества Ω .

Таким образом, в сформулированной задаче восстановлению подлежит функция начальных условий, являющаяся кусочно-непрерывной на множестве Ω . Отличительными чертами сформулированной задачи являются, во-первых, то, что начальное состояние процесса, которым мы управляем, определяется разбиением $\bar{\omega}$ множества Ω ; во-вторых, наличие ограничений типа (4.6.3), в которых неизвестный параметр входит в пределы интегрирования.

Замечание 3. Условия существования оптимальных границ между подмножествами и их свойства в работе не исследуются. Некоторые сведения, касающиеся этих вопросов, приведены в [106].

Замечание 4. Задачи, имеющие математические модели, подобные (4.6.1) – (4.6.5), ставятся во многих областях науки и техники, таких как металлургия, энергетика, геология, почвоведение, экология, пищевая промышленность и т.д. В случае исследования процессов диффузии функция $\varphi(x, t)$ представляет собой концентрацию некоторого вещества; процессы фильтрации жидкости в пористых средах описываются скалярной функцией напора; если же имеем дело с распространением тепла, то функция $\varphi(x, t)$ представляет собой температуру в каждой точке заданного пространства и в каждый момент времени.

4.6.2. Сведение задачи управления к непрерывной задаче оптимального разбиения и исследование ее разрешимости

Решение краевой задачи (4.6.1) – (4.6.5), соответствующее каждому допустимому разбиению $\bar{\omega} \in \hat{P}_N(\Omega)$, запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, T, \varphi_0(x, \bar{\omega})) = & \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_0(x', \bar{\omega}) dx' + \int_0^T \int_{\Omega} G(x, x', T-t) f(x', t) dx' dt + \\ & + \int_0^T \int_{\partial \Omega} \frac{\partial G(x, x', T-t)}{\partial \mathbf{n}} g(x', t) dx' dt, \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

где $G(x, x', t)$ – функция Грина задачи (4.6.1) – (4.6.4), n – нормаль к границе $\mathcal{A}\Omega$.

Подставляя выражение для функции $\varphi(x, t; \varphi_0(x, \bar{\omega}))$ (4.6.7) в функционал (4.6.5) и учитывая тот факт, что набор подмножеств $\bar{\omega} = \{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}$ является элементом класса $P_N(\Omega)$, приходим к следующей задаче ОРМ: найти набор подмножеств $\bar{\omega}^* = \{\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_N^*\} \in \hat{P}_N(\Omega)$, на котором достигается минимальное значение функционала

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x') G(x, x', T) dx' + \bar{Z}(x) \right]^2 dx, \quad (4.6.8)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{Z}(x) = & -Z(x) + \int_0^T \int_{\Omega} G(x, x', T - \theta) f(x', \theta) dx' d\theta + \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{A}\Omega} \frac{\partial G(x, x', T - \theta)}{\partial n} g(x', \theta) dx' d\theta \end{aligned}$$

и выполнялись ограничения

$$\int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.6.9)$$

Утверждение 4.1. Если вектор правых частей неравенств в определении класса $\hat{P}_N(\Omega)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq \int_{\Omega} \bar{\varphi}_0(x) dx, \quad (4.6.10)$$

где $\bar{\varphi}_0(x) = \max_{i=\overline{1, N}} \varphi_{0i}(x)$, то множество допустимых решений задачи (4.6.1) – (4.6.5) не пусто.

Доказательство. Сложив ограничения-неравенства, определяющие структуру класса $\hat{P}_N(\Omega)$, получим

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i. \quad (4.6.11)$$

Оценим левую часть соотношения (4.6.11):

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x) dx \leq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \max_{i=1, N} \varphi_{0i}(x) dx = \int_{\Omega} \overline{\varphi_0}(x) dx . \quad (4.6.12)$$

Сопоставляя выражения (4.6.11) и (4.6.12), приходим к выводу, что если для вектора $b = (b_1, b_2, \dots, b_N)$ выполняется условие (4.6.10), то всегда найдется разбиение $\overline{\omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}$ множества Ω из класса $\hat{P}_N(\Omega)$. В этом случае класс $\hat{P}_N(\Omega)$ не пуст. Иначе может оказаться $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i \subset \Omega$, а это означает, что множество допустимых решений задачи (4.6.1) – (4.6.5) $\hat{P}_N(\Omega)$ пусто.

Замечание. В случае задания ограничений на набор подмножеств $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}$ в виде (4.6.6) условие (4.6.10) запишется в виде

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq \int_{\Omega} \xi(x) dx .$$

Следуя алгоритму решения задачи ОРМ, от задачи минимизации функционала (4.6.8), (4.6.9) переходим к эквивалентной задаче бесконечномерного программирования с булевыми переменными: найти вектор-функцию $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot))$, такую что

$$I(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') G(x, x', T) \lambda_i(x') dx' + \overline{Z}(x) \right\}^2 dx \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_1} , \quad (4.6.13)$$

где

$$\Lambda_1 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega; \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \right. \\ \left. \text{п.в. для } x \in \Omega; i = \overline{1, N}; \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = \overline{1, N} \right\} .$$

Наряду с задачей (4.6.13) будем рассматривать задачу

$$I(\lambda(\cdot)) \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_2} , \quad (4.6.14)$$

$$\Lambda_2 = \left\{ \lambda(x) \in \Lambda_0; \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = \overline{1, N} \right\} ,$$

$$\Lambda_0 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega; \right. \\ \left. 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega; i = \overline{1, N} \right\}$$

в предположении, что эта задача разрешима, и множество ее решений содержит все решения задачи (4.6.13). Условия, при которых это выполняется, будут приведены ниже.

Определение. Будем говорить, что задача (4.6.14) удовлетворяет *условию Слейтера*, если существует точка $\tilde{\lambda}(\cdot) \in \Lambda_0$, для которой

$$\int_{\Omega} \varphi_{0i}(x) \tilde{\lambda}_i(x) dx < b_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Лемма 4.1. Если в задаче (4.6.1) – (4.6.5) константы b_1, \dots, b_N удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^N b_i > S = \int_{\Omega} \bar{\varphi}_0(x) dx,$$

где $\bar{\varphi}_0(x) = \max_{i=1, N} \varphi_{0i}(x)$, то для задачи (4.6.14) выполняется условие Слейтера.

Доказательство. Для каждого $x \in \Omega$ рассмотрим вектор-функцию $\bar{\lambda}(x)$, i -ая компонента которой определяется по формуле

$$\bar{\lambda}_i(x) = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^N b_j}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Функция $\bar{\lambda}(x) \in \Lambda_0$, так как $0 \leq \bar{\lambda}_i(x) \leq 1$ для всех $i = \overline{1, N}$ и

$$\sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i(x) = \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{\sum_{j=1}^N b_j} = 1.$$

Пусть выполнено условие леммы, то есть $\sum_{i=1}^N b_i > \int_{\Omega} \bar{\varphi}_0(x) dx$. Тогда

$$\int_{\Omega} \varphi_{0i}(x) \bar{\lambda}_i(x) dx = \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x) \frac{b_i}{\sum_{j=1}^N b_j} dx \leq \frac{b_i}{\sum_{j=1}^N b_j} \int_{\Omega} \bar{\varphi}_0(x) dx < b_i, \quad i = \overline{1, N},$$

что и требовалось доказать.

4.6.3. Необходимые и достаточные условия оптимальности редуцированной задачи оптимального разбиения множеств

Основываясь на результатах п. 2.4.1, нетрудно показать, что функционал $I(\lambda(\cdot))$ является выпуклым по $\lambda(\cdot)$ на выпуклом замкнутом ограниченном множестве Λ_2 . Следовательно, задача (4.6.14) является задачей выпуклого программирования, и для нее справедлива теорема Куна-Таккера [13]. Согласно этой теореме решение задачи (4.6.14) сводится к поиску седловой точки следующего функционала Лагранжа:

$$\begin{aligned} h(\lambda(\cdot), \psi) &= I(\lambda(\cdot)) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' - b_i \right) = \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \left[\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \right]^2 + 2\bar{Z}(x) \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \right\} dx + \\ &\quad + \int_{\Omega} \bar{Z}^2(x) dx + \sum_{i=1}^N \psi_i \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i, \end{aligned}$$

где $\lambda(\cdot) \in \Lambda_0$; $\psi \in \Gamma = \left\{ \psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) : \psi_i \geq 0, i = \overline{1, N} \right\}$.

Задача, двойственная задаче (4.6.14) запишется в виде:

$$\underline{Q}(\psi) \rightarrow \max_{\psi \in \Gamma}, \quad (4.6.15)$$

$$\begin{aligned} \underline{Q}(\psi) &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} h(\lambda(\cdot), \psi) = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int_{\Omega} \bar{Z}^2(x) dx + \\ &\quad + \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\bar{Z}(x) \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \right\} dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \psi_i \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \}. \end{aligned}$$

Для решения внутренней задачи

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} h(\lambda(\cdot), \psi) \quad (4.6.16)$$

воспользуемся необходимым и достаточным условием оптимальности, которое дает следующая теорема [90].

Теорема 4.1. Для того, чтобы $\lambda^0(x) \in \Lambda_0$ была решением задачи (4.6.14) необходимо и достаточно, чтобы $\lambda^0(x)$ удовлетворяла условию

$$\min_{\lambda(x) \in \Lambda_0} \int_{\Omega} \left[H^\lambda(\lambda^0(x), \psi), \lambda(x) - \lambda^0(x) \right] dx = 0, \quad (4.6.17)$$

где $H^\lambda(\lambda(\cdot), \psi)$ – градиент функционала $h(\lambda(\cdot), \psi)$ по переменной $\lambda(\cdot)$, j -ая компонента которого вычисляется по формуле: $\forall \bar{x} \in \Omega$

$$H_j^\lambda(\lambda(\bar{x})) = 2\varphi_{0j}(\bar{x}) \times \left\{ \int_{\Omega} \bar{Z}(x) G(x, \bar{x}, T) dx + \frac{1}{2} \psi_j + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} G(x, x', T) G(x, \bar{x}, T) dx \right) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \right\}.$$

Далее, на основе условий оптимальности (4.6.17) получим операторное уравнение для оптимальной вектор-функции $\lambda^0(x')$, $x' \in \Omega$. По теореме 4.1, если $\lambda^0(x) \in \Lambda_0$ – решение задачи (4.6.14), то имеет место равенство

$$\min_{\lambda(x) \in \Lambda_0} \int_{\Omega} \left(H^\lambda(\lambda^0(x), \psi), \lambda(x) - \lambda^0(x) \right) dx = 0.$$

Определение. Будем говорить, что функционал $h(\lambda(\cdot), \psi)$ удовлетворяет **условию сильной регулярности**, если

$$H_j^\lambda(\lambda^0(x), \psi) \neq 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad x \in \Omega,$$

за исключением множества точек $x \in \Omega$ нулевой меры.

Это условие означает, что для оптимальной вектор-функции ни на одном множестве точек $x \in \Omega$ ненулевой меры не удовлетворяется ни одно из уравнений Эйлера $H_j^\lambda(\lambda^0(x), \psi) = 0$ для задачи минимизации по $\lambda(\cdot)$ функционала $h(\lambda(\cdot), \psi)$ без ограничений.

Запишем условие (4.6.17) в виде

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N H_i^\lambda(\lambda^0(x), \psi) \lambda_i(x) \right) dx = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N H_i^\lambda(\lambda^0(x), \psi) \lambda_i^0(x) \right) dx.$$

Вектор-функция $\lambda^*(x)$, удовлетворяющая этому равенству, такова, что почти для всех $x \in \Omega$ имеет место

$$H_i^\lambda(\lambda^0(x), \psi) \lambda_i^*(x) = \min_{0 \leq z_i \leq 1} H_i^\lambda(\lambda^0(x), \psi) z_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad x \in \Omega.$$

Отсюда получим, что при выполнении условия

$$\text{mes} \left\{ x \in \Omega : H_i^\lambda(\lambda(x), \psi) = H_j^\lambda(\lambda(x), \psi), \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N} \right\} = 0 \quad (4.6.18)$$

вектор-функция $\lambda^*(x)$ определяется очевидным образом: $\forall x \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } H_i^\lambda(\lambda^*(x), \psi) = \min_{j=1, N} H_j^\lambda(\lambda^*(x), \psi), \\ \forall \alpha \in [0, 1], & \text{если } H_i^\lambda(\lambda^*(x), \psi) = 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При выполнении условия сильной регулярности $H_i^\lambda(\lambda(\cdot), \psi) = 0$ лишь на множестве точек $x \in \Omega$ нулевой меры, следовательно, вектор-функция $\lambda^*(\cdot)$ определяется единственным образом по формуле $\forall x \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & H_i^\lambda(\lambda^0(x), \psi) = \min_{j=1, N} H_j^\lambda(\lambda^0(x), \psi), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.6.19)$$

Справедливы следующие теоремы [90].

Теорема 4.2. Для того, чтобы было выполнено условие оптимальности (4.6.17), необходимо при выполнении условий сильной регулярности и (4.6.18), чтобы $\lambda^0(x) = \lambda^*(x)$, где равенство двух вектор-функций понимается в смысле равенства нулю нормы разности этих вектор-функций, а вектор-функция $\lambda^*(x)$ определяется по формуле (4.6.19).

Теорема 4.3. Если условие оптимальности (4.6.17) является и достаточным, а также выполнены условия сильной регулярности и (4.6.18), то вектор-функция $\lambda^0(x) = \lambda^*(x)$, является оптимальной для задачи (4.6.14), где $\lambda^*(x)$ определяется по формуле (4.6.19).

Таким образом, из приведенных теорем следует, что решение задачи (4.6.14) для выпуклого функционала $h(\lambda(\cdot), \psi)$, удовлетворяющего условиям сильной регулярности и (4.6.18), может быть определено как решение операционного уравнения

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & H_i^\lambda(\lambda^*(x), \psi) = \min_{j=1, N} H_j^\lambda(\lambda^*(x), \psi), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad \text{для п.в. } x \in \Omega.$$

Подставим (формально) эту формулу в задачу (4.6.15). Полученный при этом функционал будем обозначать $Q_1(\lambda^*(\cdot), \psi)$:

$$\begin{aligned} Q_1(\lambda^*(\cdot), \psi) &= Q(\psi) + \int \min_{j=1, N} H_j^\lambda(\lambda^*(x), \psi) dx - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} H_i^\lambda(\lambda^*(x), \psi) \lambda_i^*(x) dx = \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \left[\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0_i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right]^2 + \right. \\ &+ 2\bar{Z}(x) \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0_i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \left. \right\} dx + \sum_{i=1}^N \psi_i \int_{\Omega} \varphi_{0_i}(x') \lambda_i^*(x') dx' - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ &+ \int_{\Omega} \bar{Z}^2(x) dx + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2\varphi_{0_j}(x'') \left[\int_{\Omega} \bar{Z}(x) G(x, x'', T) dx + \frac{1}{2} \psi_j + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} G(x, x', T) G(x, x'', T) dx \right) \varphi_{0_i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right] \right\} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} 2\varphi_{0_i}(x'') \left[\int_{\Omega} \bar{Z}(x) G(x, x'', T) dx + \frac{1}{2} \psi_i + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} G(x, x', T) G(x, x'', T) dx \right) \varphi_{0_i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right] \left. \right\} \lambda_i^*(x'') dx'' = \\ &= - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i - \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0_i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right]^2 dx + \int_{\Omega} \bar{Z}^2(x) dx + \\ &\quad + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ \varphi_{0_j}(x'') \left[\psi_j + 2 \int_{\Omega} \bar{Z}(x) G(x, x'', T) dx + \right. \right. \\ &\left. \left. + 2 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} G(x, x', T) G(x, x'', T) dx \right) \varphi_{0_i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right] \right\} dx''. \end{aligned}$$

Введем следующее обозначение:

$$Y(x) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx'. \quad (4.6.20)$$

Тогда имеет место равенство:

$$F_1(Y(\cdot), \psi) = Q_1(\lambda^*(\cdot), \psi) = - \int_{\Omega} Y^2(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int_{\Omega} \bar{Z}^2(x) dx + \\ + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} (Y(x) + \bar{Z}(x)) G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') dx + \psi_j \varphi_{0j}(x') \right\} dx'.$$

Теорема 4.4 [62]. При любых фиксированных $\psi \in \Gamma$, $\lambda(\cdot) \in \Lambda_0$, $Y(\cdot) \in L_2(\Omega)$ выполняется неравенство

$$F_1(Y(\cdot), \psi) \leq I(\lambda(\cdot)), \quad (4.6.21)$$

причем на оптимальной траектории $(\lambda^*(\cdot), \psi^*)$ достигается знак равенства:

$$F_1(Y(\cdot), \psi^*) = I(\lambda^*(\cdot)).$$

Доказательство.

Обозначим $\bar{Y}(x) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx'$.

Рассмотрим разность

$$F_1(Y(\cdot), \psi) - I(\lambda(\cdot)) = - \int_{\Omega} Y^2(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} Y(x) G(x, x'', T) dx + 2 \int_{\Omega} \bar{Z}(x) G(x, x'', T) dx + \psi_j \right\} \varphi_{0j}(x'') dx'' - \\ - \left\{ \int_{\Omega} \bar{Y}^2(x) dx + 2 \int_{\Omega} \bar{Z}(x) \bar{Y}(x) dx \right\} = - \int_{\Omega} (Y^2(x) + \bar{Y}^2(x)) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} [Y(x) + \bar{Z}(x)] G(x, x'', T) dx + \psi_j \right\} \varphi_{0j}(x'') \sum_{k=1}^N \lambda_k(x'') dx'' - \\ - \int_{\Omega} \int_{\Omega} 2 \bar{Z}(x) \sum_{i=1}^N G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' dx - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \psi_i \varphi_{0i}(x) \lambda_i(x) dx - \\ - 2 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{\Omega} Y(x) G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \psi_i \varphi_{0i}(x) \lambda_i(x) dx +$$

$$+2 \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega \times \Omega} Y(x) G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' dx.$$

Произведя некоторые преобразования и приведя подобные слагаемые, можно получить следующую оценку:

$$\begin{aligned} & F_1(Y(\cdot), \psi) - I(\lambda(\cdot)) = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left\{ \min_{j=1, N} \left[\left[2 \int_{\Omega} (Y(x) + \bar{Z}(x)) G(x, x', T) dx' + \psi_j \right] \varphi_{0j}(x') \right] - \right. \\ & \left. - \left[\left[2 \int_{\Omega} (Y(x) + \bar{Z}(x)) G(x, x', T) dx + \psi_i \right] \varphi_{0i}(x') \right] \right\} \lambda_i(x') dx' + \\ & + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' - b_i \right) - \int_{\Omega} (Y(x) - \bar{Y}(x))^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$F_1(Y(\cdot), \psi) \leq I(\lambda(\cdot)).$$

Далее, пусть $\lambda(\cdot) = \lambda^*(\cdot)$; $\psi = \psi^*$. Тогда $Y(\cdot) = \bar{Y}(\cdot)$, и значит:

- 1) $-\int_{\Omega} (Y(x) - \bar{Y}(x))^2 dx = 0$;
- 2) в силу того, что вектор λ^* является решением задачи (4.6.14),

$$\psi_i^* \left(\int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' - b_i \right) = 0;$$

- 3) справедлива формула (4.6.19).

И, таким образом, на оптимальном наборе $(\lambda^*(\cdot), \psi^*)$ в неравенстве (4.6.21) достигается знак равенства.

Из этой теоремы следует, что

$$F_1(Y(\cdot), \psi^*) = \max_{Y'(\cdot), \psi \in L_2(\Omega) \times \Gamma} F_1(Y'(\cdot), \psi),$$

и имеет место

Теорема 4.5 [62]. Решение задачи (4.6.13) может быть получено почти всюду для $x \in \Omega$ по формуле

$$\lambda_i^*(x') = \begin{cases} 1, & \text{если } \left[2 \int_{\Omega} (Y^*(x) + \bar{Z}(x)) G(x, x', T) dx + \psi_i^* \right] \varphi_{0i}(x') = \\ & = \min_{j=1, N} \left\{ \left[2 \int_{\Omega} (Y^*(x) + \bar{Z}(x)) G(x, x', T) dx + \psi_j^* \right] \varphi_{0j}(x') \right\} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (4.6.22)$$

где $Y^*(\cdot), \psi^*$ – решение задачи максимизации функционала $F_1(Y(\cdot), \psi)$ на множестве $L_2(\Omega) \times \Gamma$.

Следующая теорема определяет условия, при которых задачи (4.6.13) и (4.6.14) эквивалентны.

Теорема 4.6. Пусть выполнено условие леммы 4.1. Тогда если для функционала Лагранжа $h(\lambda(\cdot), \psi)$ задачи (4.6.14) выполняются условия сильной регулярности и (4.6.17), то множества оптимальных решений задач (4.6.13) и (4.6.14) совпадают.

Доказательство. Прежде всего, следует заметить, что задача (4.6.14) при условии выполнения леммы 4.1 разрешима, так как функционал $I(\lambda(\cdot))$ непрерывен и выпукл на ограниченном замкнутом выпуклом множестве Λ_2 . Множество Λ_2 содержит хотя бы одну крайнюю точку, а крайние точки симплекса, как уже отмечалось, являются характеристическими функциями некоторых подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, образующих разбиение множества Ω [36].

Пусть функционал $h(\lambda(\cdot), \psi)$ удовлетворяет условиям сильной регулярности и (4.6.18). Тогда согласно теоремам 4.1 – 4.3 решение $\lambda^*(\cdot)$ задачи (4.6.14) определяется единственным образом по формуле (4.6.19). Функция $\lambda^*(\cdot)$, очевидно, представляет собой крайнюю точку множества Λ_2 и, кроме того, является допустимой точкой для задачи (4.6.13).

Пусть $\bar{\lambda}(\cdot)$ – некоторое решение задачи (4.6.13). Тогда справедливо неравенство $I(\lambda^*(\cdot)) \geq I(\bar{\lambda}(\cdot))$. С другой стороны, так как $\lambda^*(\cdot)$ – решение задачи (4.6.14), а $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, то выполняется соотношение $I(\lambda^*(\cdot)) \leq I(\bar{\lambda}(\cdot))$. Следова-

тельно, $I(\lambda^*(\cdot)) = I(\bar{\lambda}(\cdot))$ и $\lambda^*(\cdot)$ – решение задачи (4.6.14). Таким образом, решения задач (4.6.13) и (4.6.14) совпадают.

4.6.4. Конечномерная аппроксимация задачи оптимального разбиения множеств и алгоритм ее решения

Сформулируем численный алгоритм решения задачи ОРМ (4.6.13), основанный на результатах теоремы 4.6. От задачи условной оптимизации с помощью введения в целевой функционал негладкой штрафной функции множества Γ перейдем к задаче безусловной оптимизации:

$$P(Y(\cdot), \psi) = F_1(Y(\cdot), \psi) - \sum_{i=1}^N S \max(0, (-\psi_i)) \rightarrow \max_{(Y(\cdot), \psi) \in L_2(\Omega) \times E^N}, \quad (4.6.23)$$

где S – достаточно большое число.

Задача (4.6.23) является задачей бесконечномерного программирования без ограничений. Построим ее конечномерный аналог.

Рассмотрим сеточную область γ – множество точек пересечения семейства прямых $\{x = lh_x, y = sh_y, t = rh_t, l = \overline{1, m}, s = \overline{1, m1}, r = \overline{1, m2}\}$, покрывающих множество $\Omega \times [0, T]$.

Используя конечномерные аппроксимации интегралов, участвующих в выражении функционала (4.6.23), получаем конечномерную задачу

$$\begin{aligned} \bar{P}(Y, \psi) = & - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m1} A_{jk} Y_{jk}^2 - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ & + \sum_{l=1}^m \sum_{s=1}^{m1} A_{ls} \min_{r=1, N} \left\{ 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m1} A_{jk} (Y_{jk} + I_1^{jk}) D_{ls}^{jk} + \psi_r \right\} \varphi_{0r}^{ls} + \sum_{i=1}^N S \max(0, (-\psi_i)). \end{aligned} \quad (4.6.24)$$

Здесь A_{jk} – коэффициенты кубатурной формулы, $Y_{jk} = Y(x_j, y_k)$;

$$\varphi_{0r}^{ls} = \varphi_{0r}(x_l, y_s); \quad D_{ls}^{jk} = G((x_l, y_s), (x_j, y_k), T); \quad I_1^{jk} = \bar{Z}(x_j, y_k),$$

причем для вычисления величин D_{ls}^{jk} , I_1^{jk} функция Грина $G(x, x', T)$ заменяется суммой конечного числа L слагаемых.

Аналогично получаем конечномерную аппроксимацию формулы (4.6.19)

$$\lambda_i^*(x_l, y_s) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left[2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_1} A_{jk} Y_{jk} D_{ls}^{jk} + \psi_i \right] \varphi_{0i}^{ls} = \\ & = \min_{r=1, N} \left[2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_1} A_{jk} (Y_{jk} + I_1^{jk}) D_{ls}^{jk} + \psi_r \right] \varphi_{0r}^{ls} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (4.6.25)$$

Задача максимизации функции (4.6.24) является конечномерной задачей математического программирования и заключается в отыскании $m \times m_1$ -мерного вектора $Y = \{Y_{jk}\}$ и N -мерного вектора сопряженных переменных $\psi = \{\psi_i\}$, доставляющих максимальное значение целевой функции \bar{P} . При большом числе разбиений m и m_1 решение этой задачи представляет вычислительную сложность.

Для решения задачи максимизации вогнутой недифференцируемой функции $\bar{P}(Y(\cdot), \psi)$ используется г-алгоритм Шора.

Таким образом, численный алгоритм решения задачи (4.6.13) с учетом изложенного принимает вид:

1. Область Ω покрываем прямоугольной $m \times m_1$ сеткой и задаем начальное приближение функции $Y(\cdot)$ в узлах сетки $Y_{kj}^{(0)}$, $k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m_1}$, и вектора двойственных переменных $\psi^{(0)} = (\psi_1^{(0)}, \dots, \psi_N^{(0)})$.

2. Вычисляем значение функции $\lambda_i^{(0)}(x)$, $i = \overline{1, N}$ в узлах сетки по формуле (4.6.25) при фиксированных значениях $\psi^{(0)}$, $Y^{(0)}$.

3. Вычисляем значение градиента $g_p = (g_p^Y, g_p^\psi)$ функции \bar{P} в точке $(Y_{kj}^{(0)}, \psi_i^{(0)})$, $k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m_1}$, $i = \overline{1, N}$ по формулам

$$g_p^{\psi_i} = -b_i + \sum_{(l,s) \in W_i} A_{ls} \varphi_{0i}^{ls} - \text{Smax}(0, -\text{sign}(\psi_i)), \quad (4.6.26)$$

$$\text{где } W_i = \left\{ (l, s), l = \overline{1, m}, s = \overline{1, m_1} : \min_{r=1, N} \left\{ 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_1} A_{jk} Y_{jk} D_{ls}^{jk} + \psi_r \right\} \varphi_{0r}^{ls} = \right. \\ \left. = \left\{ 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_1} A_{jk} (Y_{jk} + I_1^{jk}) D_{ls}^{jk} + \psi_i \right\} \varphi_{0i}^{ls} \right\};$$

$$g_P^{Y_{jk}} = 2A_{jk} \left(-Y_{jk} + \sum_{l=1}^m \sum_{s=1}^{m_1} D_{ls}^{jk} \varphi_{0i}^{ls} \right), \quad (4.6.27)$$

i - номер индекса (для каждой пары (l, s) свой), при котором достигается

$$\min_{r=1, \bar{N}} \left\{ 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_1} A_{jk} (Y_{jk} + I_1^{jk}) D_{ls}^{jk} + \psi_r \right\} \varphi_{0r}^{ls}.$$

4. Выбирая начальный шаг $h > 0$ r -алгоритма, находим

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} + h_0 g_P^{\psi}(Y^{(0)}, \psi^{(0)}), \quad Y^{(1)} = Y^{(0)} + h_0 g_P^Y(Y^{(0)}, \psi^{(0)}).$$

и переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после k шагов получены определенные значения $\varphi^{(k)}$, $\lambda^{(k-1)}(x)$, $Y^{(k)}(x)$ в узлах сетки.

5. $(k+1)$ -й шаг:

а) вычисляем $\lambda_i^{(k)}(x)$, $i = \overline{1, \bar{N}}$ по формуле (4.6.25);

б) вычисляем значение градиента $g_P(Y^{(k)}, \psi^{(k)})$ по формулам (4.6.26), (4.6.27) при $Y = Y^{(k)}$; $\psi = \psi^{(k)}$;

в) проводим $(k+1)$ -й шаг Γ -алгоритма для максимизации функции (4.6.25) по переменным $Y(\cdot)$, ψ , и определяем $\psi^{(k+1)}$, $Y^{(k+1)}$;

г) проверяем условие $|(Y^{(k)}, \psi^{(k)}) - (Y^{(k+1)}, \psi^{(k+1)})| \leq \varepsilon$ или $\|g_P(Y^{(k)}, \psi^{(k)})\| \leq \varepsilon$.

Если ни одно из этих условий не выполняется, то переходим к $(k+2)$ -му шагу алгоритма, иначе - к пункту д);

д) полагаем $\lambda_*(\cdot) = \lambda^{(l)}(\cdot)$, $\psi^* = \psi^{(l)}$, $Y(\cdot) = Y^{(l)}(\cdot)$, где l - номер итерации, на которой выполняется хотя бы один из указанных выше критериев окончания итерационного процесса. Вычисляем оптимальное значение конечномерной аппроксимации целевого функционала (4.6.13) и для контроля правильности результата - значение функционала (4.6.25) при $\lambda(\cdot) = \lambda_*(\cdot)$, $\psi = \psi^*$, $Y(\cdot) = Y^*(\cdot)$.

4.6.5. Сходимость и оценка погрешности конечномерной аппроксимации задачи

Численная реализация алгоритма решения задачи (4.6.13), основанного на теореме 4.5, предполагает аппроксимацию задачи

$$F_1(Y(\cdot), \psi) \rightarrow \max, \quad Y(\cdot) \in L_2(\Omega), \quad \psi \in \Gamma \quad (4.6.28)$$

задачей

$$\tilde{F}_1^L(Y(\cdot), \psi) \rightarrow \max, Y(\cdot) \in L_2(\Omega), \psi \in \Gamma, \quad (4.6.29)$$

в которой целевая функция $\tilde{F}_L(Y, \psi)$ отличается от $F_1(Y, \psi)$ тем, что в ней функция Грина заменена суммой конечного L числа слагаемых.

Пусть $G(x, x', T)$ – точное, а $\tilde{G}_L(x, x', T)$ – приближенное значения функции Грина, $Y^*(\cdot)$ и $\tilde{Y}_L(\cdot)$ – точные решения задач (4.6.28) и (4.6.29) соответственно, а $\lambda^*(\cdot)$ и $\tilde{\lambda}^L(\cdot)$ – отвечающие им значения вектор-функции $\lambda(\cdot)$. Рассмотрим вопрос о сходимости последовательности характеристических функций $\{\tilde{\lambda}^L(\cdot)\}$ к функции $\lambda^*(\cdot)$ при $L \rightarrow \infty$ для случая, когда множество $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq q\}$.

Прежде всего, покажем, что

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{Y}_L(x) = Y^*(x). \quad (4.6.30)$$

Лемма 4.2. Функционалы задач (4.6.29) при $L \rightarrow \infty$ сходятся к функционалу задачи (4.6.28) равномерно по всем $Y(\cdot) \in L_2(\Omega)$.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} & F_1(Y, \psi) - \tilde{F}_L(Y, \psi) = \\ &= \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} (Y(x) + \bar{Z}(x)) G(x, x', T) \varphi_{0j}(x') dx + \psi_j \varphi_{0j}(x') \right\} dx' - \\ & - \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x)) \tilde{G}_L(x, x', T) \varphi_{0j}(x') dx + \psi_j \varphi_{0j}(x') \right\} dx'. \end{aligned}$$

Используя оценки, полученные в работе [66], можно записать

$$\begin{aligned} & F_1(Y, \psi) - \tilde{F}_L(Y, \psi) = \\ &= \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x) + O(1/L^2)) (\tilde{G}_L(x, x', T) + O(e^{-L})) \varphi_{0j}(x') dx + \psi_j \varphi_{0j}(x') \right\} dx' - \\ & - \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x)) \tilde{G}_L(x, x', T) \varphi_{0j}(x') dx + \psi_j \varphi_{0j}(x') \right\} dx'. \end{aligned}$$

Предположим, что для каждого фиксированного $x' \in \Omega$ и для каждого $L = 1, 2, \dots$ минимум $\min_{j=1, N} \left\{ \left(2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x)) \tilde{G}_L(x, x', T) dx + \psi_j \right) \varphi_{0j}(x') \right\}$ достигается при $j=k$, а

$$\min_{j=1, N} \left\{ \left(2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x) + O(1/L^2)) (\tilde{G}_L(x, x', T) + O(e^{-L^2})) dx + \psi_j \right) \varphi_{0j}(x') \right\}$$

– при $j=l$. Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \left(2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x) + O(1/L^2)) (\tilde{G}_L(x, x', T) + O(e^{-L^2})) dx + \psi_l \right) \varphi_{0l}(x') \leq \\ & \leq \left(2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x) + O(1/L^2)) (\tilde{G}_L(x, x', T) + O(e^{-L^2})) dx + \psi_k \right) \varphi_{0k}(x') \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \left(2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x)) \tilde{G}_L(x, x', T) dx + \psi_l \right) \varphi_{0l}(x') - \\ & - \left(2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x)) \tilde{G}_L(x, x', T) dx + \psi_k \right) \varphi_{0k}(x') \leq \\ & \leq 2 [\varphi_{0k}(x') - \varphi_{0l}(x')] \int_{\Omega} (O(1/L^2) \tilde{G}_L(x, x', T) + O(e^{-L^2})) (Y(x) + \tilde{Z}(x)) dx. \end{aligned}$$

Так как интеграл в правой части последнего неравенства является величиной порядка $O(1/L^2)$, то найдется такое число L' , что для всех $L > L'$ разность

$$\begin{aligned} W = & \left(2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x)) \tilde{G}_L(x, x', T) dx + \psi_l \right) \varphi_{0l}(x') - \\ & - \left(2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x)) \tilde{G}_L(x, x', T) dx + \psi_k \right) \varphi_{0k}(x') \end{aligned}$$

будет меньше сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, а, следовательно, $k=l$ и, в силу произвольности выбора точки $x' \in \Omega$, можно заключить, что

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{F}_L(Y, \psi) = F_1(Y, \psi). \quad (4.6.31)$$

Лемма 4.3. Функционалы $F_1(Y, \psi)$ и $\tilde{F}_L(Y, \psi)$ являются вогнутыми по $Y(\cdot)$.

Доказательство. (см. в [62]).

Теперь, основываясь на леммах 4.2 и 4.3, можно показать, что имеет место формула (4.6.29). Так как $\tilde{Y}_L(\cdot)$ максимизирует функционал $\tilde{F}_L(Y, \psi)$, то выполняется соотношение

$$\tilde{F}_L(\tilde{Y}_L(x), \psi) \geq \tilde{F}_L(Y(x), \psi) \quad \forall Y(x) \in L_2(\Omega). \quad (4.6.32)$$

Переходя к пределу при $L \rightarrow \infty$ и учитывая (4.6.30), получим

$$F_1(\tilde{Y}(x), \psi) \geq F_1(Y(x), \psi) \quad \forall Y(x) \in L_2(\Omega), \quad \forall \psi \in \Gamma,$$

где $\tilde{Y}(x)$ – некоторый элемент пространства $L_2(\Omega)$. Покажем, что $\tilde{Y}(x) = Y^*(x)$. Предположим обратное. Тогда, согласно (4.6.32), должно выполняться неравенство

$$F_1(\tilde{Y}(x), \psi) \geq F_1(\alpha \tilde{Y}(x) + (1-\alpha)Y^*(x), \psi), \quad (4.6.33)$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$. Так как функционал $F_1(Y(x), \psi)$ вогнут по $Y(\cdot)$, то (4.6.33) можно переписать в виде

$$F_1(\tilde{Y}(x), \psi) \geq \alpha F_1(\tilde{Y}(x), \psi) + (1-\alpha)F_1(Y^*(x), \psi),$$

а это выполняется лишь в случае, когда $F_1(\tilde{Y}(x), \psi) = F_1(Y^*(x), \psi)$. Значит, $\tilde{Y}(x) \in S^* = \{Y^*(x) \in L_2(\Omega) : F_1(Y^*(x), \psi) \geq F_1(Y(x), \psi) \forall Y(x) \in L_2(\Omega)\}$.

Не теряя общности, можно считать $\tilde{Y}(x) = Y^*(x)$.

Покажем теперь, что $\forall x \in \Omega$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}^L(x) = \lambda^*(x). \quad (4.6.34)$$

Согласно формуле (4.6.20) и теореме 4.4 можно записать следующие соотношения между функциями $Y(\cdot)$ и $\lambda(\cdot)$:

$$Y^*(x) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx',$$

$$\tilde{Y}_L(x) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \tilde{G}_L(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \tilde{\lambda}_i^L(x') dx'.$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned}
Y^*(x) - \tilde{Y}_L(x) &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \left[G(x, x', T) \lambda_i^*(x') - \tilde{G}_L(x, x', T) \tilde{\lambda}_i^L(x') \right] dx' = \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \left[O(e^{-\gamma_i T}) \lambda_i^*(x') + \tilde{G}_L(x, x', T) \left(\lambda_i^*(x') - \tilde{\lambda}_i^L(x') \right) \right] dx'.
\end{aligned}$$

При $L \rightarrow \infty$, выражение в левой части, согласно (4.6.30), стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \left\{ O(e^{-\gamma_i T}) \lambda_i^*(x') + \tilde{G}_L(x, x', T) \left(\lambda_i^*(x') - \tilde{\lambda}_i^L(x') \right) \right\} dx' = 0,$$

а это возможно лишь в случае, когда для всех $x \in \Omega$ и для всех $i=1, 2, \dots, N$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (\lambda_i^*(x) - \tilde{\lambda}_i^L(x)) = 0,$$

так как $\varphi_{0i}(x)$, $\tilde{G}_L(x, x', T)$ – ограниченные, не равные тождественно нулю функции на Ω и $\Omega \times \Omega \times [0, T]$ соответственно, а $\lim_{L \rightarrow \infty} O(e^{-\gamma_i T}) = 0$.

Таким образом, доказана асимптотическая сходимость последовательности вектор-функций $\{\tilde{\lambda}_i^L(x)\}$ к искомой вектор-функции $\lambda_i^*(x)$ при $L \rightarrow \infty$.

Оценим теперь погрешность вычисления значения функционала $I(\cdot)$, возникающую за счет приближения функции Грина:

$$\begin{aligned}
I(\lambda(\cdot)) - \tilde{I}(\tilde{\lambda}(\cdot)) &= \int_{\Omega} \left[\left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') G(x, x', T) \lambda_i(x') dx' + \bar{Z}(x) \right\}^2 - \right. \\
&\quad \left. \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \tilde{G}_L(x, x', T) \tilde{\lambda}_i(x') dx' + \tilde{Z}(x) \right\}^2 \right] dx = \\
&= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \left[G(x, x', T) \lambda_i(x') + \tilde{G}_L(x, x', T) \tilde{\lambda}_i(x') \right] dx' + (\bar{Z}(x) + \tilde{Z}(x)) \right\} \times \\
&\quad \times \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \left[G(x, x', T) \lambda_i(x') - G(x, x', T) \tilde{\lambda}_i(x') \right] dx' + (\bar{Z}(x) - \tilde{Z}(x)) \right\} dx.
\end{aligned}$$

Покажем, что первый множитель в подынтегральном выражении, обозначим его через $W_1(x)$, при определенных условиях ограничен, а второй – $W_2(x)$ – стремится к нулю при $L \rightarrow \infty$.

Пусть $S = \max_{i=1, N} \max_{x \in \Omega} \varphi_{0i}(x)$; $M_z = \max_{x \in \Omega} Z(x)$; $M_f = \max_{x \in \Omega} \max_{t \in [0, T]} f(x, t)$;

$M_g = \max_{x \in \Omega} \max_{t \in [0, T]} g(x, t)$. Тогда, используя оценки, полученные в [66], можно

записать оценку для $W_1(x)$:

$$W_1(x) \leq 2M_z + \frac{16M_f p^2 q^2}{\pi^2(p^2 + q^2)} + \frac{8 - 4e^{-\pi^2 L^2(p^2 + q^2)T/(pq)^2}}{1 - e^{\pi^2 T(p^2 + q^2)/(pq)^2}} \left(S - \frac{M_f p^2 q^2}{\pi^2(p^2 + q^2)} \right) + \frac{32p^2 q^2}{\pi^3} \left(\frac{\pi^4}{36} - \frac{1}{e^{\left(\frac{\pi^2 + \pi^2}{p^2 + q^2}\right)T} - 1} \right) \leq A,$$

где $A = \text{const} < \infty$. Рассмотрим

$$W_2(x) = \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \left[G(x, x', T) \lambda_i(x') - G(x, x', T) \tilde{\lambda}_i(x') \right] dx' + \left(\bar{Z}(x) - \tilde{Z}(x) \right) \right\} \leq \leq S \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left\{ \frac{4}{pq} e^{-L^2 k^2 T} \lambda(x') + \frac{4 - 4e^{-L^2 k^2 T}}{1 - e^{k^2 T}} \left[\lambda_i(x') - \tilde{\lambda}_i(x') \right] \right\} dx' + (4M_f pq / k^2 + 16M_g / \pi^2)(1 - e^{-L^2 k^2 T}) / L^2,$$

где $k^2 = \pi^2(p^2 + q^2) / (pq)^2$.

Учитывая (4.6.34), можно подобрать такое число L'' , что для всех $L > L''$ и для всех $x \in \Omega$ будет справедливо неравенство

$$\left\| \lambda_i(x) - \tilde{\lambda}_i(x) \right\| \leq \varepsilon'',$$

где $\varepsilon'' > 0$ – сколь угодно малое число.

Пусть L' – число, начиная с которого

$$\left| 4Se^{-L^2 k^2 T} + (4M_f pq / k^2 + 16M_g / \pi^2)(1 - e^{-L^2 k^2 T}) / L^2 \right| \leq \varepsilon'.$$

Выбрав $L > \max\{L', L''\}$, величина $W_2(x)$, а следовательно, и величина

$\left| I(\lambda(\cdot)) - \tilde{I}(\tilde{\lambda}(\cdot)) \right|$ будут порядка $o(\varepsilon)$, где $\varepsilon = \max(\varepsilon', \varepsilon'')$. Тем самым показана

асимптотическая сходимость $\tilde{I}_L(\tilde{\lambda}(\cdot)) \rightarrow I(\lambda(\cdot))$ при $L \rightarrow \infty$.

4.7. Задачи идентификации разрывных правых частей параболического уравнения и начальных условий

Описанный выше метод легко обобщается на случай, когда идентификации подлежит, например, кусочно-непрерывная функция правой части дифференциального уравнения, или задача восстановления начальных условий, зависящих кроме разбиения еще и от некоторых параметров, подлежащих определению (так называемая параметрическая идентификация).

4.7.1. Задача идентификации функции распределенного источника

Рассмотрим следующую модельную задачу:

$$V(u(\cdot)) = \int_{\Omega} [\varphi(x, 1, u) - z(x)]^2 dx \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (4.7.1)$$

где $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$; $z(x) = \|x - x_0\|^2$, $x_0 = (2, 2)$, $\varphi = \varphi(x, t, u)$ – решение краевой задачи:

$$\partial \varphi / \partial t = \Delta \varphi + u(x) \exp(-t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, 1], \quad (4.7.2)$$

$$\varphi(x, 0) \equiv \varphi_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (4.7.3)$$

$$\varphi(x, t) \equiv 0 \quad (x, t) \in \mathcal{A}\Omega \times [0, 1]. \quad (4.7.4)$$

Ограничения на управление $u(\cdot)$ имеют вид:

$$U = \left\{ u(x) \in L_2(\Omega) : u(x) = u_i(x) \quad \forall x \in \Omega_i, \int_{\Omega_i} u(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N} \right\}, \quad (4.7.5)$$

где $(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega)$, $u_i(x) = \|x - \tau_i\|^2$, $\forall x \in \Omega$, $\tau_i \in \Omega$ – фиксированные точки, $i = \overline{1, N}$, $\|\cdot\|$ – евклидова метрика.

Применяя вышеизложенную методику решения задачи управления, сводящейся к непрерывной нелинейной задаче оптимального разбиения множеств, решение последней можно получить в такой форме: п.в. для $x' \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x') = \begin{cases} 1, & \text{если } \left[2 \int_{\Omega} (Y^*(x) + I_1(x)) H(x, x') dx + \psi_i^* \right] u_i(x') = \\ & = \min_{j=\overline{1, N}} \left\{ \left[2 \int_{\Omega} (Y^*(x) + I_1(x)) H(x, x') dx + \psi_j^* \right] u_j(x') \right\}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (4.7.6)$$

где, $H(x, x') = \int_0^1 G(x, x', T-t) e^{-t} dt$, $I_1(x) = 2 \int_{\Omega} G(x, x', T) dx' - z(x)$, а $Y^*(\cdot)$, ψ^* –

решение задачи максимизации

$$F_1(Y(\cdot), \psi) \rightarrow \max_{(Y(\cdot), \psi) \in L_2(\Omega) \times \Gamma},$$

$$F_1(Y(\cdot), \psi) = - \int_{\Omega} Y^2(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} (Y(x) + I_1(x)) H(x, x') u_j(x') dx + \psi_j u_j(x') \right\} dx'.$$

И таким образом, представленный в п. 4.7.4 алгоритм с небольшими изменениями может быть применен к решению задачи (4.7.1) – (4.7.5).

Для численного решения этой задачи область Ω покрывалась сеткой $m \times ml = 20 \times 20$. Двойные интегралы, входящие в формулы для определения функций $\lambda_i(\cdot)$, $i = \overline{1, N}$, значения функционала F_1 и его вектора-градиента в точке $(Y(\cdot), \psi)$ вычислялись с помощью кубатурной формулы трапеций по узлам сетки.

1. При решении задачи (4.7.1) – (4.7.5) со следующими входными данными: $N = 3$, $\tau_1 = (0, 4)$, $\tau_2 = (2, 2)$, $\tau_3 = (4, 0)$, $b = (40, 50, 30)$, $\psi^{(0)} = (1, 1, 1)$, $\varphi_0(x) = 0$; $u^{(0)}(x) = u_1(x) \quad \forall x \in \Omega$, $\varepsilon = 0.001$, за 25 итераций достигнуты оптимальные значения функционалов прямой и двойственной задач $I^* = 98.630$, $P^* = 98.6214$. Разбиение Ω , соответствующее оптимальному на этой области заданию функций $u_i(\cdot)$, $i = \overline{1, N}$, представлено на рис. 4.24. Вектор двойственных переменных $\psi^* = (0.0018, 0.00078, 0.0013)$. Для проверки выполнения условий (4.7.5) были вычислены значения интегралов в левых частях неравенств: $\int_{\Omega_1^*} u_1(x) dx = 2.11$, $\int_{\Omega_2^*} u_2(x) dx = 28.53$, $\int_{\Omega_3^*} u_3(x) dx = 2.11$.

Разница между оптимальными значениями функционалов прямой и двойственной задач в этом примере и ниже объясняется погрешностью вычислений (см. замечание п. 4.7.5).

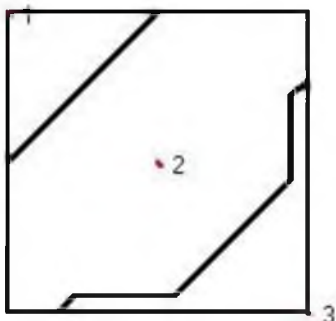


Рис. 4.24 Оптимальное разбиение Ω на 3 подмножества в задаче (4.7.1) – (4.7.5)

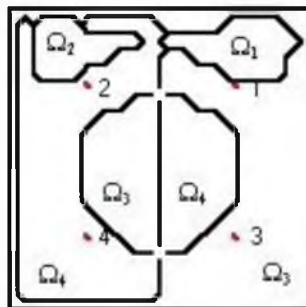


Рис. 4.25 Оптимальное разбиение Ω на 4 несвязных подмножества в задаче (4.7.1) – (4.7.5)

2. На рис. 4.25 представлено разбиение Ω , соответствующее оптимальному решению задачи (4.7.1) – (4.7.5) при следующих исходных данных: $N = 4$, $\varphi_0(x) = 2$, $\tau_1 = (3, 3)$, $\tau_3 = (3, 1)$, $\tau_2 = (1, 3)$, $\tau_4 = (1, 1)$, $\mathbf{b} = (1; 30; 0.8; 30)$; $u^{(0)}(x) = u_2(x) \forall x \in \Omega$, $\psi^{(0)} = (1, 1, 1, 1)$. Минимальное значение целевого функционала $I^* = 127.762$ было достигнуто за 15 итераций. При этом получены следующие значения двойственного функционала и вектора сопряженных переменных: $P^* = 127.732$, $\psi^* = (1.18; 0.000; 1.344; 0.000)$, а $\int_{\Omega_1^*} u_1(x) dx = 0.996$, $\int_{\Omega_2^*} u_2(x) dx = 5.93$, $\int_{\Omega_3^*} u_3(x) dx = 0.782$, $\int_{\Omega_4^*} u_4(x) dx = 8.32$.

4.7.2. Параметрическая идентификация кусочно-непрерывной функции начальных условий для параболического уравнения

Описанный в п. 4.7.4 алгоритм решения задач оптимального управления (стартового или распределенного), сводящихся к нелинейным задачам оптимального разбиения множеств, легко переносится на тот случай, когда функции, определяющие множество допустимых управлений U зависят от некоторых параметров, которые необходимо отыскать в процессе решения. Это так называемые задачи управления, сводящиеся к нелинейным задачам ОРМ с размещением “центров” подмножеств (см. гл. 2).

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим задачу стартового управления вида

$$V(u(\cdot; \bar{w}, \tau)) = \int_{\Omega} [\varphi(x, 1, u) - z(x)]^2 dx \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (4.7.7)$$

где $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$; $\varphi = \varphi(x, t, u)$ – решение краевой задачи

$$\partial \varphi / \partial t = \Delta \varphi + \exp(-t)((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, 1], \quad (4.7.8)$$

$$\varphi(x, 0) = u(x; \bar{w}, \tau) \quad \forall x \in \Omega, \quad (4.7.9)$$

$$\varphi(x, t) \equiv 0 \quad (x, t) \in \partial \Omega \times [0, 1]. \quad (4.7.10)$$

Ограничения на управление $u(\cdot)$ имеют вид

$$U = \left\{ u(x) \in L_2(\Omega) : u(x) = \|x - \tau_i\|^2 \quad \forall x \in \Omega_i, \right. \\ \left. \int_{\Omega} dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad \bar{w} \in P_2(\Omega) \right\}.$$

Пусть $z(x)$ – аналитическое решение краевой задачи (4.7.8) – (4.7.10) с функцией начальных условий вида $\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^N \|x - \beta_i\|^2 \lambda_i(x)$, где $N = 2$, $\beta_1 = (2, 1)$, $\beta_2 = (2, 3)$, а $\lambda_1(\cdot)$, $\lambda_2(\cdot)$ – характеристические функции подмножеств, составляющих разбиение квадрата Ω , представленное на рис. 4.26. Здесь и в следующем случае константы b_i , $i = \overline{1, N}$ выбирались таким образом, чтобы ограничения на площади подмножеств выполнялись как строгие неравенства.

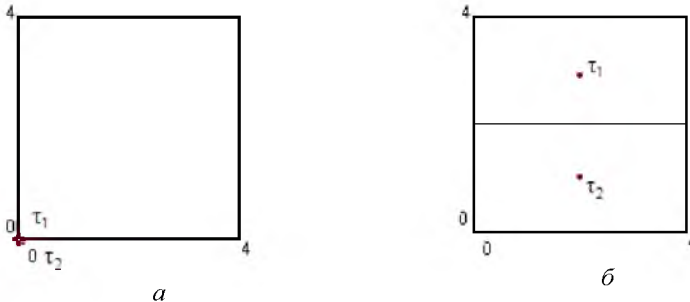


Рис. 4.26 Разбиение множества Ω на 2 подмножества в задаче ОРМ, к которой сводится задача параметрической идентификации (4.7.7) – (4.7.10): начальное приближение (а) и оптимальные значения (б) параметров τ_i

При решении задачи (4.7.7) – (4.7.10) с помощью модифицированного алгоритма п.4.7.4 (дополненного условием отыскания минимума по $\tau \in \Omega^2$), начиная с начального приближения $\Omega_1^{(0)} = \Omega; \Omega_2^{(0)} = \emptyset; \tau_i^{(0)} = (0, 0); i = \overline{1, N}$, получен с точностью $\varepsilon = 0.0001$ следующий результат: разбиение множества Ω , соответствующее оптимальной функции начальных условий $u(\cdot; \bar{\omega}, \tau)$, совпало с разбиением, представленным на рис. 4.26, б; значения координат центров подмножеств $\tau_1^* = (1, 999; 2, 725)$, $\tau_2^* = (2, 00; 1, 274)$; значения функционалов прямой и двойственной задач $I^* = 0.3045$, $P^* = 0.2807$. Как нетрудно заметить, значения координат точек τ_i с достаточной степенью точности совпадают с координатами точек β_i ; кроме того, значение функционала прямой задачи весьма удовлетворительное.

Решая эту же задачу (4.7.7) – (4.7.10) в случае, когда функция $z(x)$ является аналитическим решением краевой задачи (4.7.8) – (4.7.10) с функцией начальных условий вида

$$\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^N \|x - \beta_i\|^2 \lambda_i(x),$$

где $N = 4$, $\beta_1 = (1, 1)$, $\beta_2 = (1, 3)$, $\beta_3 = (3, 1)$, $\beta_4 = (3, 3)$, а $\lambda_i(\cdot)$ – характеристические функции подмножеств, составляющих разбиение квадрата Ω , представленное на рис. 4.27, а, исходя из начального приближения координат центров подмножеств $\tau_i = (0, 0)$, $\forall i$, вектора сопряженных переменных $\psi^{(0)} = (1, 1, 1, 1)$ и управления $u^{(0)}(x) = u_1(x) \quad \forall x \in \Omega$ за 60 итераций с точностью $\varepsilon = 0.0001$ достигнуто оптимальное значение функционала (4.7.7) $I^* = 0.413$. Значения двойственного функционала $P(Y(\cdot), \psi) : P^* = 0.327$. Для сравнения приведем значение функционала исходной задачи на нулевой итерации: $I^{(0)} = 26.24$. Разбиение множества Ω , соответствующее оптимальной функции $u^*(\cdot)$, изображено на рис. 4.27, б. При этом получены следующие оптимальные значения параметров (координат центров подмножеств): $\tau_1 = (2.89, 1.6)$, $\tau_2 = (2.29, 2.93)$, $\tau_3 = (1.224, 1.003)$, $\tau_4 = (0.39, 2.681)$.

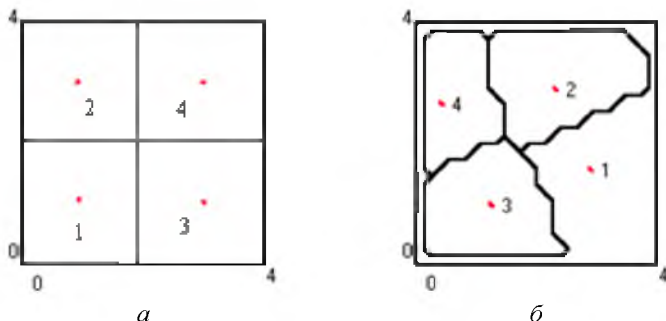


Рис. 4.27 Разбиение множества Ω на 4 подмножества в задаче ОРМ, к которой сводится задача параметрической идентификации (4.7.7) – (4.7.10): начальные (а) и оптимальные (б) значения параметров τ_i

4.8. Задача управления с недифференцируемым критерием качества как модель задачи идентификации разрывных начальных условий

Иногда математические постановки задач идентификации динамических систем задачи содержат функционал, недифференцируемый по Фреше, а имеющий лишь производные по направлениям в функциональном пространстве. Эта особенность делает решение таких задач очень сложным. В данном параграфе рассмотрена задача управления, сводящаяся к задаче оптимального разбиения без ограничений, в функционал которой входит функция $\|\cdot\|$. Сформулирован отличный от ранее рассмотренных метод решения задачи, аналогичный методу последовательной линеаризации Р.П. Федоренко, [96].

4.8.1. Постановка задачи управления и схема метода ее решения

Рассмотрим задачу стартового управления параболической системой вида

$$V(u(\cdot)) = \int_{\Omega} |\varphi(x, T; u(x)) - Z(x)| dx \rightarrow \min_{u(x) \in U} \quad (4.8.1)$$

$$\hat{\partial} \varphi / \partial t = \Delta \varphi + f(x, t); \quad (4.8.2)$$

$$\varphi(x, 0) = u(x); \quad u \in U; \quad (4.8.3)$$

$$\varphi(x, t) = g(x, t) \quad \forall x \in \mathcal{A}\Omega, \quad t \in [0, T], \quad (4.8.4)$$

$$U = \left\{ u(x; \bar{\omega}) = u_i(x) \text{ п.в. для } x \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad \bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega) \right\};$$

$u_i(\cdot)$, $i = \overline{1, N}$, – заданные функции из пространства $L_2(\Omega)$.

Введя в рассмотрение характеристические функции $\lambda_i(\cdot)$ подмножеств Ω_i , $i = \overline{1, N}$, функцию начальных условий можно представить в виде

$$\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^N u_i(x) \lambda_i(x). \quad (4.8.5)$$

Обозначим через $\varphi(x, t; \lambda(x))$ – решение краевой задачи (4.8.2) – (4.8.4), соответствующее функции начальных условий (4.8.5).

Рассмотрим задачу, эквивалентную (4.8.1) – (4.8.4):

$$I(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} (\varphi(x, T; \lambda(x)) - Z(x)) dx \rightarrow \min_{\lambda(x) \in \Lambda_1}. \quad (4.8.6)$$

В соответствии с методами решения непрерывных задач ОРМ, погружаем множество Λ_1 в симплекс Λ_0 и в дальнейшем будем решать задачу

$$I(\lambda(\cdot)) \rightarrow \min_{\lambda(x) \in \Lambda_0} \quad (4.8.7)$$

Для решения (4.8.7), (4.8.2) – (4.8.4) будем применять метод, аналогичный методу последовательной линеаризации Р.П. Федоренко, [96] решения задач оптимального управления системой с сосредоточенными параметрами. Этот метод является методом спуска в пространстве функций $\lambda(\cdot)$ и состоит в построении минимизирующей последовательности $\lambda^k(\cdot) \in \Lambda_0$.

Схема метода следующая.

0. Задается $\lambda^0(\cdot) \in \Lambda_0$, $k = 0$.

1. С функцией $u^k(\cdot) = \sum_{i=1}^N u_i(\cdot) \lambda_i^k(\cdot)$ решается краевая задача (4.8.2) – (4.8.4) и вычисляется значение функционала (4.8.7).

2. В окрестности невозмущенной траектории $\{\lambda^k(\cdot), \varphi(\cdot, \cdot)\}$ задача линеаризуется. Процесс линеаризации включает два этапа:

– вычисление функциональной производной, т.е. дифференциала Гато $D(\lambda^k(\cdot), \nu^k(\cdot)) = D(\lambda^k(\cdot), \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot))$; $\bar{\lambda}(\cdot) \in \Lambda_0$;

– построение малой окрестности $\delta\Lambda_0$ невозмущенной функции $\lambda^k(\cdot)$.

3. Формулируется и решается задача: найти приращение (возмущение) управляющей функции $\nu^k(\cdot) = \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)$ из условия

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} D(\lambda^0(\cdot), \lambda(\cdot) - \lambda^0(\cdot)) = D(\lambda^0(\cdot), \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^0(\cdot)). \quad (4.8.8)$$

Эта задача является линеаризацией решаемой задачи в окрестности невозмущенной траектории $\{\lambda^k(\cdot), \varphi(\cdot, \cdot)\}$. Решение задачи (4.34) позволяет осуществить основной шаг процесса - переход к следующему приближению

$$\lambda^{k+1}(\cdot) = \lambda^k(\cdot) + s(\bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)). \quad (4.8.9)$$

Параметр $s \in [0, 1]$ подбирается так, чтобы обеспечить условие релаксации:

$$I(\lambda^{k+1}(\cdot)) \leq I(\lambda^k(\cdot)). \quad (4.8.10)$$

Критериями окончания итерационного процесса построения минимизирующей последовательности управлений могут служить неравенства

$$\|\lambda^{k+1}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)\| \leq \varepsilon; \quad |I^{k+1} - I^k| \leq \varepsilon; \quad |D(\lambda^k(\cdot), \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot))| \leq \varepsilon. \quad (4.8.11)$$

4.8.2. Дифференциала Гато функционала вспомогательной задачи

Составной частью описанной схемы является вычисление дифференциала Гато функционала (4.8.6).

Функционал $I(\lambda(\cdot))$ называется *дифференцируемым в смысле Гато*, если для любой вектор-функции $\nu(\cdot)$ (из того же пространства, что и $\lambda(\cdot)$) имеет место формула

$$I(\lambda(\cdot) + s\nu(\cdot)) = I(\lambda(\cdot)) + sD(\lambda(\cdot), \nu(\cdot)) + o(s), \quad (4.8.12)$$

где s – любое малое неотрицательное число, $D(\lambda(\cdot), \nu(\cdot))$ – некоторый функционал, называемый производной функционала I в точке $\lambda(\cdot)$ по направлению $\nu(\cdot)$ (дифференциалом Гато).

Введем обозначение

$$\Omega^0 = \{x \in \Omega: \varphi(x, T; \lambda^0(x)) - Z(x) = 0\};$$

$$\Omega^{+(-)} = \{x \in \Omega: \varphi(x, T; \lambda^0(x)) - Z(x) > 0 (< 0)\}.$$

Под вариацией (приращением) функции $\lambda^{(0)}(\cdot) \in \Lambda_0$, будем понимать функцию $\nu(\cdot) = \lambda(\cdot) - \lambda^0(\cdot)$, где $\lambda(\cdot) \in \Lambda_0$.

Дадим приращение $\delta u(\cdot) = sv(\cdot)$ функции $\lambda^0(\cdot)$, где $s > 0$ - достаточно малый параметр. Этому приращению соответствует приращение фазовой траектории $\delta\varphi$, являющееся решением краевой задачи

$$\frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial t} = \Delta(\delta\varphi); \quad (4.8.13)$$

$$\delta\varphi(x, 0) = \sum_{i=1}^N u_i(x)sv_i(x); \quad (4.8.14)$$

$$\delta\varphi(x, t) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{A}\Omega; \quad t \in [0, T] \quad (4.8.15)$$

Рассмотрим значение

$$\begin{aligned} I(\lambda^0(\cdot) + \delta u(\cdot)) &= \int_{\Omega} \left| \varphi(x, T; \lambda^0(x)) - Z(x) + s\delta\varphi(x, T) + O(\|\delta u\|^2) \right| dx = \\ &= \int_{\Omega^0} |\delta\varphi(x, T)| dx + \int_{\Omega^+} \left\{ \varphi(x, T; \lambda^0(x)) - Z(x) + s\delta\varphi(x, T) \right\} dx - \\ &\quad - \int_{\Omega^-} \left\{ \varphi(x, T; \lambda^0(x)) - Z(x) + s\delta\varphi(x, T) \right\} dx + O(s). \end{aligned}$$

Сопоставляя это выражение с выражением (4.8.12), заключаем, что дифференциал Гато функционала $I(\lambda(\cdot))$ вычисляется по формуле

$$D(\lambda^0(\cdot), v(\cdot)) = \int_{\Omega^0} |\delta\varphi(x, T)| dx + \int_{\Omega^+} \delta\varphi(x, T) dx - \int_{\Omega^-} \delta\varphi(x, T) dx.$$

Используя уравнения в вариациях (4.8.13) – (4.8.15) и тождество Лагранжа, это выражение запишем в эквивалентном виде относительно приращения $v(\cdot)$

$$\begin{aligned} D(\lambda^0(\cdot), v(\cdot)) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \psi(x, 0)u_i(x)v_i(x) dx + \int_{\Omega^0} \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \psi(x, x', 0)u_i(x)v_i(x) dx \right| dx', \end{aligned} \quad (4.8.16)$$

где $\psi(x, t)$ – решение краевой задачи

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi = 0; \quad (4.8.17)$$

$$\psi(x, T) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Omega^+; \\ 0, & \text{если } x \in \Omega^0; \\ -1, & \text{если } x \in \Omega^-; \end{cases} \quad (4.8.18)$$

$$\psi(x, t) = 0 \quad x \in \partial\Omega; \quad t \in [0, T], \quad (4.8.19)$$

а $\psi(x, x', t)$ – решения задачи

$$\frac{\partial \psi(x, x', t)}{\partial t} + \Delta \psi(x, x', t) = 0; \quad \forall x \in \Omega, t \in [0, T], \quad (4.8.20)$$

$$\psi(x, x', T) = \delta(x - x'), \quad (4.8.21)$$

$$\psi(x, x', t) = 0 \quad x \in \partial\Omega; \quad t \in [0, T]. \quad (4.8.22)$$

Подчеркнем, что в случае, когда $mes\Omega^0 = 0$, функционал (4.8.7) дифференцируем по Фреше, и его производная вычисляется после решения краевой задачи (4.8.17) – (4.8.19) по формуле

$$\frac{\partial I(\lambda(\cdot))}{\partial \lambda_i(\cdot)} = \psi(\cdot, 0)u_i(\cdot).$$

4.8.3. Элементы вычислительной технологии

Область Ω покрывается равномерной сеткой с шагом h_x по переменной x , h_y - по переменной y .

$$\gamma = \left\{ (x_i, y_j) : x_i = x_0 + ih_x, y_j = y_0 + jh_y, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, ml} \right\}.$$

В качестве искомой функции $\lambda(\cdot)$ будет выступать кусочно-постоянная функция

$$\lambda(\bar{x}) = \lambda_{i+1/2, j+1/2}(\bar{x}), \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}; \quad y_j \leq y \leq y_{j+1}.$$

Вариации $\nu(\cdot)$ будем искать в том же классе.

Задается начальное приближение $\lambda^0(\cdot)$. Решаем краевую задачу (4.8.2) – (4.8.4). Интегрирование этой системы осуществляется подходящим стандартным методом. После интегрировании системы (4.8.2) – (4.8.4) запоминаются значения траектории $\varphi(\cdot, T)$ в конечный момент времени T в виде значений $\varphi_{ij} = \varphi(x_i, y_j, T)$.

Вычисление производной Гато функционала (4.8.7) в точке $\lambda^0(\cdot)$ требует интегрирования системы вида (4.8.20) – (4.8.21). При этом следует выделить множества индексов $M_\varepsilon^-, M_\varepsilon^+, M_\varepsilon^0$ следующим образом

$$(i, j) \in M_\varepsilon^-, \text{ если } \varphi_{ij} - Z(x_i, y_j) < -\varepsilon;$$

$$(i, j) \in M_\varepsilon^+, \text{ если } \varphi_{ij} - Z(x_i, y_j) > \varepsilon ;$$

$$(i, j) \in M_\varepsilon^0, \text{ если } |\varphi_{ij} - Z(x_i, y_j)| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Замечание. Выбор величины $\varepsilon > 0$ определяется следующими соображениями: ε должно быть по возможности меньше, так как трудность решения задачи связана с количеством индексов в множестве M_ε^0 . В то же время, ε не должно быть слишком малым: не следует допускать перехода за один шаг процесса какого-то индекса (i, j) из M_ε^- в M_ε^+ .

Записывается конечномерная аппроксимация задачи (4.8.8). Заменяя в выражении производной Габо интегралы интегральными суммами, получим следующую задачу для определения функции $\bar{\lambda}(\cdot)$:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^m \sum_{s=1}^{m1} \bar{A}_{ps} u_{ps}^i (\lambda_{ps}^i - \lambda_{ps}^{0i}) + \sum_{(i,j) \in M_\varepsilon^0} \left| \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^m \sum_{s=1}^{m1} A_{ps}^{ij} u_{ps}^i (\lambda_{ps}^i - \lambda_{ps}^{0i}) \right| \rightarrow \min_{\lambda},$$

при условиях

$$0 \leq \lambda_{ps}^i \leq 1, \quad i = \overline{1, N}; \quad \sum_{i=1}^N \lambda_{ps}^i = 1; \quad p = \overline{1, m}; \quad s = \overline{1, m1}.$$

Эта задача легко сводится к задаче линейного программирования [13], которая решается симплекс-методом. В результате получаем в каждой точке сетки γ значение вектор функции $\lambda^*(\cdot)$, являющейся решением задачи минимизации конечномерного аналога функционала (4.8.8) на симплексе Λ_0 . Это решение может содержать либо все целые компоненты (и тогда оно является также оптимальным целым решением задачи (4.8.7)), либо иметь несколько дробных значений, округление которых не представляет затруднений [12, 87]. Будем считать, что для каждой точки сетки γ большей компоненте вектора $\lambda^*(\cdot)$ соответствует значение этой компоненты вектора $\lambda^{**}(\cdot)$ равное 1, остальные компоненты $\lambda^{**}(\cdot)$ обнуляем.

Заметим, что при возрастании размерности задач, т. е. при увеличении количества узлов сетки γ , дробные значения появляются все чаще и обычные методы округления в большинстве случаев не приводят к оптимальному решению задачи (4.8.7). Во избежание описанной ситуации при решении задачи (4.8.7) можно воспользоваться методом ветвей и границ в сочетании с методом отсечения плоскостей.

4.8.4. Решение тестовых задач с недифференцируемым функционалом

Для апробации метода, разработанного в п. 4.8.2, был решен ряд тестовых задач. Результаты решения некоторых из них приведены ниже.

Тестовая задача 1: найти такое разбиение $\bar{\omega}^*$ квадрата $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 4\}$ на $N = 5$ подмножеств, при котором

$$V(\varphi_0(\cdot, \bar{\omega})) = \int_{\Omega} (\varphi(x, 1; \varphi_0(x, \bar{\omega})) - Z(x)) dx \rightarrow \min_{\varphi_0(\cdot, \bar{\omega}) \in \Phi}, \quad (4.8.23)$$

где $\varphi(x, t; \varphi_0(x, \bar{\omega}))$ – решение задачи

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \Delta \varphi(x, t) + 7e^{-t} \left((x-2)^2 + (y-2)^2 \right); \quad (4.8.24)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x, \bar{\omega}), \quad \varphi_0(x, \bar{\omega}) \in U, \quad (4.8.25)$$

$$\varphi(x, t) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathcal{A}\Omega, t \in [0, T]. \quad (4.8.26)$$

$$U = \{ \varphi(x) = \varphi_{0_i}(x) \quad \forall x \in \Omega_i, i = \overline{1, N}; (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega) \}.$$

В случае, когда функция $Z(x) \equiv 0$ на всей области Ω , а функции $\varphi_{0_i}(x)$, определяющие множество допустимых управлений, задавались следующим образом:

$$\varphi_{0_i}(x) = \max \left[(x_1 - \tau_{1i}), (x_2 - \tau_{2i}) \right], \quad i = \overline{1, 5}, \quad (4.8.27)$$

где $\tau_4 = (0, 0)$, $\tau_2 = (2, 2)$, $\tau_1 = (0, 4)$, $\tau_3 = (4, 0)$, $\tau_5 = (4, 4)$, оптимальное разбиение квадрата Ω получено на четвертой итерации в виде, изображенном на рис. 4.28.

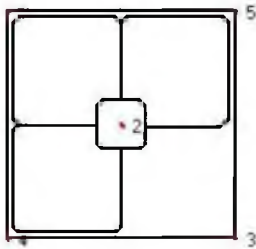


Рис. 4.28 Решение задачи (4.8.23) – (4.8.27)

Таблица 4.4

ите-рация	I ($0 \leq \lambda \leq 1$)	I ($\lambda = 0 \vee 1$)	число точек в Ω_0
1	60.71	60.71	0
2	31.2249	31.2249	0
3	30.6585	31.2249	0
4	30.6574	30.6574	4
5	30.618	30.6574	4

Для численного решения этой задачи область Ω покрывалась сеткой $m \times m_1 = 20 \times 20$. Двойные интегралы, входящие в формулы для определения

функций λ_i , $i = \overline{1, N}$, значения функционалов исходной задачи и соответствующей вспомогательной непрерывной задачи оптимизации на симплексе, а также ее дифференциала Гато вычислялись с помощью кубатурной формулы трапеций по узлам сетки. Начальное разбиение квадрата было задано следующим образом: $\Omega_1 = \Omega$, $\Omega_i = \emptyset, i = \overline{2, 4}$. Информация о значении функционалов задач исходной и соответствующей непрерывной задачи минимизации на симплексе, о количестве узлов сетки, входящих в множество M_ε^0 (напомним, что это множество всех точек из Ω , для которых $|\varphi(x, T) - Z(x)| \leq \varepsilon$), содержится в табл. 4.4. При этом $\varepsilon = 0.025$. Следует отметить, что в силу равенства нулю функции $Z(x)$ и неотрицательности значений $\varphi(x, T)$, полученное на последней итерации разбиение квадрата действительно является оптимальным.

Тестовая задача 2. Для того чтобы убедиться в правильности работы алгоритма, рассматривалась также задача стартового управления вида

$$V(u(\cdot; \bar{w}, \tau)) = \int_{\Omega} [\varphi(x, 1, u) - z(x)]^2 dx \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (4.8.28)$$

где $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$; $\varphi = \varphi(x, t, u)$ – решение задачи

$$\partial \varphi / \partial t = \Delta \varphi + \exp(-t)((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, 1], \quad (4.8.29)$$

$$\varphi(x, 0) = u(x; \bar{w}, \tau) \quad \forall x \in \Omega, \quad (4.8.30)$$

$$\varphi(x, t) \equiv 0 \quad (x, t) \in \mathcal{A} \Omega \times [0, 1]. \quad (4.8.31)$$

Ограничения на управление $u(\cdot)$ имеют вид

$$U = \left\{ u(x) \in L_2(\Omega) : u(x) = \|x - \tau_i\|^2 \quad \forall x \in \Omega_i, \quad \bar{w} \in P_2(\Omega) \right\}.$$

В качестве функции $z(x)$ выступало аналитическое решение краевой задачи (4.8.29) – (4.8.31) с функцией начальных условий вида

$$\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^N \varphi_{0i}(x) \lambda_i(x), \quad \text{где } N = 2, \quad \varphi_{01}(x) = 7 \|x - \beta_1\|^2, \quad \varphi_{02}(x) = 2 \|x - \beta_2\|^2,$$

$\beta_1 = (3, 2)$, $\beta_2 = (1, 2)$, а в качестве $\lambda_i(\cdot)$ выступали характеристические функции подмножеств, составляющих разбиение квадрата Ω , представленное на рис. 4.29 (пунктир).

Начальное разбиение множества: $\Omega_1^{(0)} = \Omega$, $\Omega_2^{(0)} = \emptyset$. Погрешность, допускаемая при определении множества M_ε^0 , равна $\varepsilon=0.01$; погрешность выполнения критерия окончания итерационного процесса равна $\varepsilon_1=0.0001$.

Оптимальное разбиение, полученное на 7-ой итерации, изображено на рис. 4.29 (сплошная линия). Заметим, что в точности желаемое разбиение (изображенное на рис. 4.29 пунктиром), получить сложно. Это обусловлено, во-первых, погрешностью вычисления решения краевой задачи (4.8.24) – (4.8.26), функционалов исходной и вспомогательной задач; во-вторых, погрешностью, допускаемой при определении множества M_ε^0 (см. п. 4.8.3). Значение же функционала исходной задачи, как можно наблюдать, от итерации к итерации уменьшается, что говорит о правильности работы алгоритма.

При решении этой же задачи с исходной информацией в виде: $N = 3$, $\varphi_{0i}(x) = \|x - \tau_i\|^2$, $\tau_1 = (1,1)$, $\tau_2 = (2,3)$, $\tau_3 = (3,1)$; $Z(x)$ – решение краевой задачи, $u(x) = \sum_{i=1}^3 \|x - \tau_i\|^2 \lambda_i(x)$, $\lambda_i(\cdot)$ – характеристические функции подмножеств, составляющих разбиение квадрата Ω , представленное на рис. 4.25 пунктиром, на седьмой итерации получено оптимальное разбиение множества, изображенное на рис. 4.29 сплошной линией. Значение функционала исходной задачи уменьшилось с 44.621 до 1.75. Подробная информация о процессе построения минимизирующей последовательности содержится в таблице 4.5.

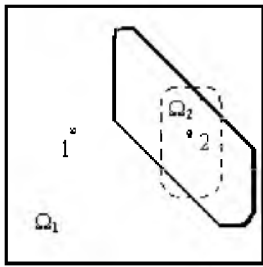


Рис 4.29 Решение задачи (4.8.28) – (4.8.31) при $N = 2$

Таблица 4.5

итерация	I ($0 \leq \lambda \leq 1$)	$I(\lambda=0 \vee 1)$	число точек в Ω_0
1	10.29	10.29	0
2	3.67	3.67	0
3	0.88	3.67	42
4	0.6827	3.61	60
5	0.6512	2.83	56
6	0.6113	0.6113	43
7	0.1816	0.6113	125

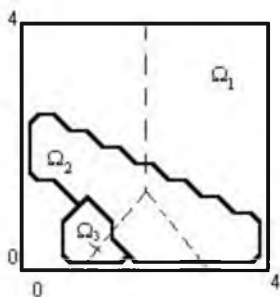


Рис 4.25 Решение задачи (4.8.28) – (4.8.31) при $N = 3$

Таблица 4.6

ите-ра-ция	$I (0 \leq \lambda \leq 1)$	$I (\lambda = 0 \vee 1)$	число точек в Ω_0
1	10.45	10.45	0
2	3.8976	3.8976	0
3	3.2783	3.2839	3
4	0.6996	0.7104	2
5	0.4158	0.7104	80
6	0.3831	0.7104	98
7	0.3831	0.7104	117

Таким образом, метод, описанный в п. 4.8.2, позволяет строить минимизирующую последовательность управлений для задачи управления с недифференцируемым функционалом вида (4.8.1) – (4.8.6).

4.9. Решение некоторых задач идентификации динамических систем методами оптимального разбиения множеств

4.9.1. Задача идентификации многозонной модели динамики

В различных областях науки и техники для того, чтобы познать закономерности функционирования некоторого объекта или природного явления проводятся эксперименты самого разного характера [4, 5, 11, 26]. Цель эксперимента – выявление главных закономерностей явления или процесса и формирования на их основе некоторой математической модели. Часто на практике встречаются ситуации, когда объект исследования или принципиально недоступен, или проведения экспериментов значительно дорого. Тогда основным методом исследований выступает математическое моделирование. С точки зрения соотношения «причины – следствия» все задачи математического моделирования можно разбить на два больших класса – прямые (известны причины, найти следствия) и обратные (известные следствия, выявить причины). В данном разделе речь идет о методах и алгоритмах решения некоторых обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, которые в своей математической постановке могут быть сведены к динамическим задач опти-

мального разбиения множеств. Такие задачи возникают при реконструкции нелинейных систем. Как отмечено в [69, 73], многие энергоемкие объекты, такие как электрические печи, функционируют в широком интервале температур и не могут быть представлены линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Часто это обусловлено изменением теплофизических свойств материалов при изменении температуры, наличием запаздывания, изменением объема загрузки и другими факторами. Динамические режимы такого рода объектов достаточно точно можно описать, последовательно используя несколько линейных дифференциальных уравнений. Для этого весь температурный режим (диапазон) разбивается на несколько стадий или зон таким образом, чтобы в пределах одной стадии динамика с достаточной точностью описывалась бы одним (векторным) линейным дифференциальным уравнением. Задача идентификации таких систем заключается в поиске не только коэффициентов функций правых частей дифференциальных уравнений, но и границ между зонами функционирования.

Общая модель динамики в случае выделения N зон представляет собой совокупность N систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1 \cdot x(t) + B_1 \cdot u(t), \quad y(t) \in \Omega_1; \\ &\dots \\ \dot{x}(t) &= A_N \cdot x(t) + B_N \cdot u(t), \quad y(t) \in \Omega_N, \end{aligned} \tag{4.9.1}$$

где $x(t)$ – вектор фазовых координат; $u(t)$ – вектор параметров управления; $A_j, B_j, j = \overline{1, N}$, матрицы параметров системы; $y(t)$ – выходная (наблюдаемая) переменная, обычно это одна из фазовых координат, принимающая значения из некоторого допустимого множества Ω ; подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, составляющие разбиение множества Ω , определяют N возможных зон функционирования системы. Так, например, если $y = x_1$, то $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ – разбиение на N подмножеств множества Ω возможных значений первой фазовой координаты системы.

В общем случае в (4.9.1) вектор фазовых переменных на разных стадиях может иметь различную размерность. Если же размерности векторов x и u для всех стадий (зон) одинакова, то система уравнений может быть представлена одним дифференциальным уравнением с разрывной правой частью:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_1 \cdot x(t) + B_1 \cdot u(t), & y(t) \in \Omega_1; \\ \dots & \\ A_N \cdot x(t) + B_N \cdot u(t), & y(t) \in \Omega_N. \end{cases} \quad (4.9.2)$$

Рассмотрим один класс обратных задач для систем типа (4.9.2), в которых идентификации подлежит правая часть дифференциального уравнения, являющаяся кусочно-непрерывной функцией в своей области определения.

Постановка задачи идентификации многозонной динамической системы

Пусть состояние некоторого объекта характеризуется двумя фазовыми координатами (x_1, x_2) , изменение которых со временем описывается задачей Коши для системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью:

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad (4.9.3)$$

$$\dot{x}_2 = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + f_i(t, b^i), \quad x_1 \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, N};$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}. \quad (4.9.4)$$

Здесь $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ – множества значений первой фазовой координаты системы, которые определяют возможные зоны функционирования системы, причем границы между зонами считаются неизвестными; $a_j^i, b^i, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, 2}$, – параметры, которые могут быть заданы, а могут подлежать определению; $f_i(t, b^i), i = \overline{1, N}$, – известные непрерывные по переменной t функции; x_{10}, x_{20} – известны заранее.

Прямая задача для системы (4.9.3) состоит в отыскании решения задачи Коши (4.9.3), (4.9.4) по известным границам между зонами $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ и заданным значениям параметров $a_1^i, a_2^i, b^i, i = \overline{1, N}$.

Под **идентификацией системы** будем понимать уточнение модели объекта или процесса (4.9.3) по экспериментальным данным, т.е. определение неизвестных границ между зонами функционирования $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, и параметров $a_1^i, a_2^i, b^i, i = \overline{1, N}$ (если они не заданы) по условиям (4.9.4) и апостериорной информации о значениях первой фазовой координаты в некоторые моменты времени t_k :

$$x_1(t_k) = \tilde{x}_1(t_k), k = \overline{1, K}. \quad (4.9.5)$$

Сформулированная задача идентификации динамических систем относится к классу обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений [26]. Теория обратных задач для дифференциальных уравнений в последнее время интенсивно развивается, что обусловлено в значительной мере необходимостью разработки математических методов решения широкого класса важных прикладных задач, связанных с обработкой и интерпретацией наблюдений. Сегодня сформировался ряд направлений, обусловленных как разнообразными сферами применений, так и типами математических постановок обратных задач. Число научных публикаций по теории обратных задач и ее приложений очень велико. Многие из полученных результатов нашли свое отражение в монографиях, где рассмотрены и общие вопросы, и специальные разделы, посвященные конкретным направлениям исследований.

Далее для решения задач идентификации сложных многостадийных процессов опишем методы, разработанные на основе синтеза основных положений теории непрерывных задач ОРМ и теории обратных задач для систем с сосредоточенными параметрами [42, 58, 65, 142].

Формулировка задачи идентификации в терминах теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств

Пусть известны результаты измерений входных и выходных переменных объекта, динамика которого описывается задачей Коши (4.9.3), (4.9.4), а также задано количество N зон его функционирования $\Omega_1, \dots, \Omega_N$. Введем следующие обозначения:

– $P_N(\Omega)$ класс всех возможных разбиений множества Ω на N подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$:

$$P_N(\Omega) = \{\bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N}\};$$

– $\tau_i = (a_1^i, a_2^i, b^i)$, $i = \overline{1, N}$, – параметры функций правых частей системы (4.9.3), которые условимся далее называть «центрами» подмножеств Ω_i ;

– $x(\cdot; \bar{\omega}, \tau)$ – решение задачи Коши (4.9.3), (4.9.4), соответствующее набору параметров $(\bar{\omega}, \tau) \in P_N(\Omega) \times R^{3N}$.

Необходимо определить разбиение $\bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega)$ и неизвестные координаты «центров» $\tau_i, i = \overline{1, N}$ подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, при которых разница между экспериментальными (4.9.5) и расчетными данными достигала бы минимального значения, то есть достигал минимального значения некоторый критерий качества:

$$I(x(\cdot; \bar{\omega}, \tau)) \rightarrow \min_{(\bar{\omega}, \tau) \in P_N(\Omega) \times R^{3N}}. \quad (4.9.6)$$

Функционал задачи (4.9.6) может быть задан различными способами, например:

$$I_1(x(\cdot; \bar{\omega}, \tau)) = \int_0^T \sum_{k=1}^K (\dot{x}_2(t; \bar{\omega}, \tau) - \dot{\tilde{x}}_2(t))^2 \delta(t - t_k) dt, \quad (4.9.7)$$

где $\dot{\tilde{x}}_2(t)$ – приближенные значения производной фазовой координаты $x_2(\cdot)$, вычисленные по результатам наблюдений переменной $x_1(\cdot)$ с помощью операции численного дифференцирования; или

$$I_2(x(\cdot; \bar{\omega}, \tau)) = \int_0^T \sum_{k=1}^K \left(\beta_0 (x_1(t; \bar{\omega}, \tau) - \tilde{x}_1(t))^2 + \beta_1 (x_2(t; \bar{\omega}, \tau) - \tilde{x}_2(t))^2 \right) \delta(t - t_k) dt, \quad (4.9.8)$$

где $x_1(\cdot; \bar{\omega}, \tau)$, $x_2(\cdot; \bar{\omega}, \tau)$ – решение задачи Коши (4.9.3), (4.9.4) восстанавливаемой системы, $\tilde{x}_1(t)$ – значения наблюдаемой фазовой переменной, $\tilde{x}_2(t)$ – приближенные значения фазовой координаты $x_2(\cdot)$, вычисленные по результатам наблюдений первой фазовой координаты $x_1(t)$ с помощью операции численного дифференцирования; $\beta_0 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$ – параметры, задающие приоритет слагаемого в функционале (4.9.8).

Приведем два подхода к решению задачи идентификации многозонной системы (4.9.3). Один из них базируется на численном дифференцировании наблюдаемого временного ряда и восстановлении производной второй фазовой координаты в классе кусочно-непрерывных функций, т.е. на решении задачи (4.9.6) с критерием (4.9.7). Другой подход основан на решении задачи (4.9.6) с критерием (4.9.8).

Подход 1. Решение задачи определения правой части уравнения (4.9.3) по известным результатам наблюдений сводится к применению операции численного дифференцирования для нахождения по наблюдаемым значениям фазовой

переменной $\tilde{x}_1(t)$ приближенного значения ее второй производной $\dot{\tilde{x}}_2(t)$ и аппроксимации последней кусочно-непрерывной функцией из класса

$$\Phi \equiv \left\{ \varphi : \varphi(t, x; \bar{\omega}) = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + f_i(t; b^i) \text{ п.в. для } x \in \Omega_i, i = \overline{1, N}, \bar{\omega} \in P_N(\Omega) \right\}$$

Введем в рассмотрение характеристические функции $\lambda_i(\cdot)$ подмножеств $\Omega_i, i = \overline{1, N}$. Пусть

$$\Lambda_0 = \left\{ \lambda(x_1) = (\lambda_1(x_1), \dots, \lambda_N(x_1)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x_1) = 1; \lambda_i(x_1) = 0 \vee 1 \text{ п.в. для } x_1 \in \Omega; i = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

Тогда от задачи минимизации функционала (4.9.7) при условиях (4.9.3), (4.9.4) можно перейти к следующей эквивалентной задаче бесконечномерного программирования:

$$\bar{I}(\lambda(\cdot), \tau) = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^N f_i(t, \tilde{x}(t); \tau_i) \lambda_i(\tilde{x}_1(t)) - \dot{\tilde{x}}_2(t) \right)^2 dt \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Lambda_0 \times R^{3N}}, \quad (4.9.9)$$

при условиях

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^N (a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + f_i(t; b^i)) \lambda_i(x_1); \end{cases} \quad (4.9.10)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad (4.9.11)$$

где $f_i(t, x; \tau_i) = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + f_i(t; b^i), i = \overline{1, N}$.

Оптимальное решение задачи (4.9.9)–(4.9.11) определяется следующим образом: для каждого $\tilde{x}_1(t) \in \Omega_i^*$

$$\lambda_i^*(\tilde{x}_1(t)) = \begin{cases} 1, & \text{если } |f_i(t, \tilde{x}; \tau_i^*) - \dot{\tilde{x}}_2(t)| = \min_{k=1, N} |f_k(t, \tilde{x}; \tau_k^*) - \dot{\tilde{x}}_2(t)|; \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad i = \overline{1, N};$$

где в качестве параметров $\tau_i^* = (a_1^i, a_2^i, b^i), i = \overline{1, N}$ выбирается оптимальное решение задачи

$$G(\tau_1, \dots, \tau_N) = \int_0^T \min_{i=1, N} (f_i(t, \tilde{x}(t); \tau_i) - \dot{\tilde{x}}_2(t))^2 dt \rightarrow \min_{\tau \in R^{3N}}. \quad (4.9.12)$$

Задача (4.9.12) относится к классу задач конечномерной недифференцируемой оптимизации, для решения которой дальше будем применять г-алгоритм Шора.

Следует отметить, что одновременно с отысканием границ между зонами динамической системы, могут быть найдены моменты времени перехода состояния системы из i -ой в j -тую зону. Эти моменты могут быть определены в процессе решения нелинейного уравнения $|f_i(t, \tilde{x}, \tau_i^*) - \dot{\hat{x}}_2(t)| = |f_j(t, \tilde{x}, \tau_j^*) - \dot{\hat{x}}_2(t)|$.

Подход 1 оказывается конструктивным в том смысле, что численный алгоритм решения исходной задачи идентификации «многозонной» динамической системы по данным наблюдений воспроизводит описанную схему.

Замечание. При решении задачи поиска лишь границ переключения зон функционирования динамической системы отпадает необходимость решать задачу конечномерной оптимизации (4.9.12).

Результаты идентификации «многозонный» модели с помощью подхода 1

Определение границ между зонами. Исследование работы предложенного алгоритма сначала проводились на примере задачи идентификации кусочно-непрерывной функции правой части одного дифференциального уравнения, то есть когда динамическая система описывалась следующим образом:

$$\dot{x} = f_k(t, x), x \in \Omega_k, (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega); \quad (4.9.13)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (4.9.14)$$

Результат разбиения области значений фазовой координаты на 10 зон, в случае, когда все зоны идентифицируются, графически представлен на рис. 4.30. Здесь, как и далее на рис. 4.31 – 4.4, на оси абсцисс фиксируется время, по оси ординат – значение фазовой координаты. На рис. 4.31 приведено разбиение фазовой области, полученное в условиях, когда система (4.9.13) имеет скользкий режим.

На рис. 4.32, 4.33 в пространстве фазовых переменных (x_1, x_2) представлено графическое изображение границ между зонами функционирования следующей системы:

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = \begin{cases} -1, & x_2 > qx_1; \\ 1, & x_2 < qx_1; \end{cases} \quad (4.9.15)$$

при $q = 0.8$ и $q = -0.1$ соответственно. Эти границы восстановлены по целой серии наблюдений.

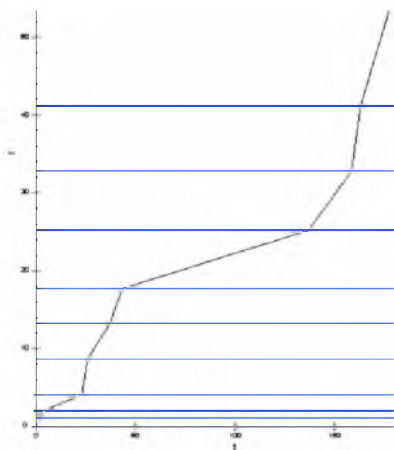


Рис. 4.30 Разбиение множества значений первой фазовой координаты при $f_k(t, x) = a_k, k = 1..10$

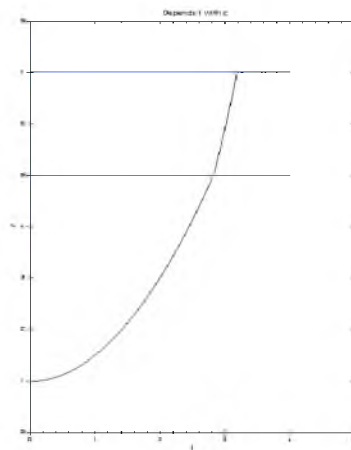


Рис. 4.31 Разбиение на зоны функционирования системы (4.9.13). Наличие скользящего режима

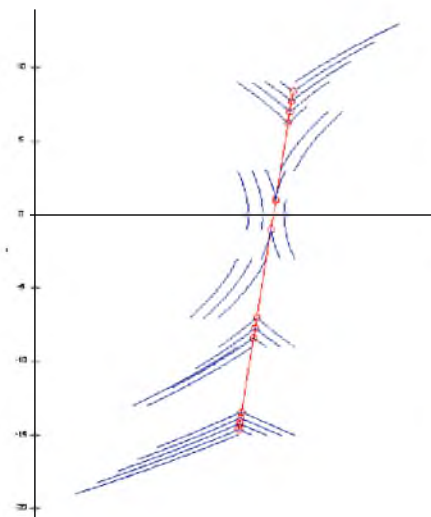


Рис. 4.32 Линия переключения зон в системе (4.9.15): $q = 0.8$

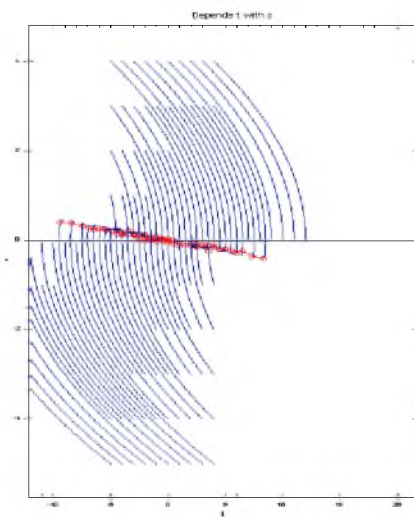


Рис. 4.331 Линия переключения зон в системе (4.9.15): $q = -0.1$

На рис. 4.34 приведен результат восстановления разрывной по фазовой переменной правой части дифференциального уравнения вида

$$\dot{x} = f_k(t, x), x \in \Omega_k, (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega). \quad (4.9.16)$$

в котором функции правых частей – линейны по каждой из своих переменных: $f_k = a_{0k}x_1 + a_{1k}x_2 + b_k \times t$, $i = \overline{1, N}$, при различном количестве точек наблюдения. Было обнаружено, что увеличение количества наблюдений в несколько раз, даже на порядок при удачном выборе начальных приближений параметров $\tau_i = (a'_1, a'_2, b')$, $i = \overline{1, N}$ не влияет существенно на качество реконструкции.

Другие примеры восстановления функции правых частей системы (4.9.16) с помощью подхода 1 будут представлены в сравнении с результатами применения подхода 2, к изложению которого переходим.

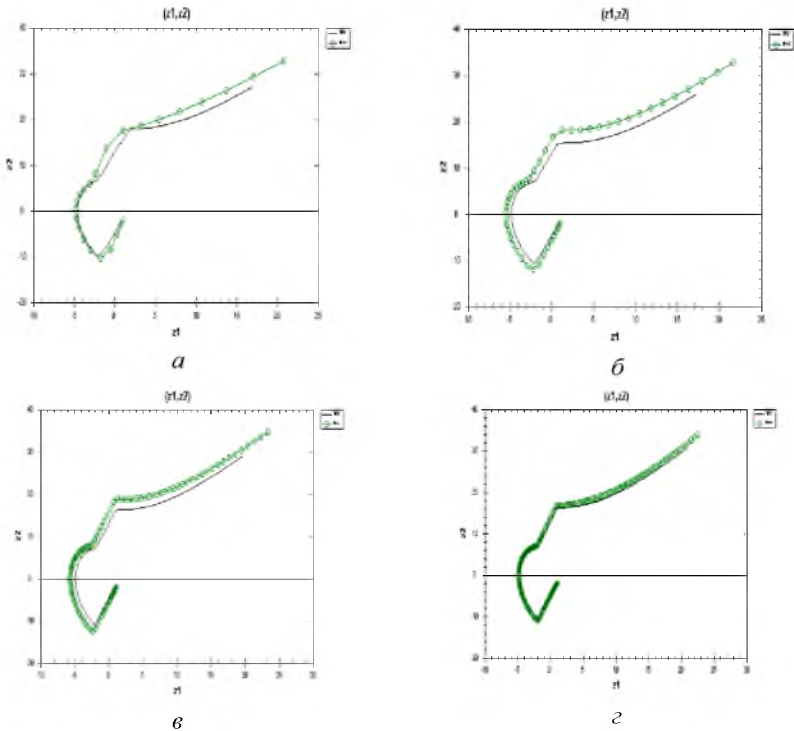


Рис. 4.34 Идентификация 3-зонной системы (3.1.16) по результатам N наблюдений: $N = 25$ (а); $N = 50$ (б); $N = 100$ (в); $N = 300$ (г)

Подход 2. Опишем подход к идентификации динамической системы (4.9.3) по данным наблюдений (4.9.5), основанный на решении задачи минимизации функционала (4.9.8).

Запишем задачу минимизации функционала $I_2(x(\cdot; \bar{\omega}, \tau))$ при условиях (4.9.3), (4.9.4) в терминах теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств: найти вектор-функцию $\lambda(\cdot) \in \Lambda_0$ и вектор $\tau \in R^{2N}$, при которых функционал

$$\begin{aligned} \bar{I}_2(\lambda(\cdot), \tau) = \\ = \int_0^T \left(\beta_0(x_1(\lambda(x_1), \tau; t) - \tilde{x}_1(t))^2 + \beta_1(x_2(\lambda(x_1), \tau; t) - \tilde{x}_2(t))^2 \right) \sum_{k=1}^K \delta(t - t_k) dt \end{aligned}$$

достигал бы своего минимального значения, и выполнялись условия (4.9.10), (4.9.11).

Коротко задачу можно записать в следующем виде:

$$\bar{I}_2(\lambda(\cdot), \tau) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Lambda_0 \times R^{2N}} \quad (4.9.17)$$

В основе первого алгоритма лежит следующая идея. Перепишем задачу (4.9.17) в виде:

$$I_3(\tau) \rightarrow \min_{\tau \in R^{2N}}, \quad (4.9.18)$$

где

$$I_3(\tau) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} \bar{I}_2(\lambda(\cdot), \tau). \quad (4.9.19)$$

Для решения задачи минимизации функции (4.9.18) воспользуемся методом обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении двух последовательных обобщенных градиента – г-алгоритм Шора. При этом решение внутренней задачи (4.9.19) – поиск вектор-функцию $\lambda(\cdot) \in \Lambda_0$ – будем осуществлять на каждом шаге численного интегрирования системы (4.9.10), (4.9.11). Далее представим итерационный алгоритм решения задачи идентификации системы (4.9.3), основанный на описанном выше подходе.

Алгоритм 4.1-И

Инициализация. Задаем $k=0$, $\tau_i^k = (a_1^{ik}, a_2^{ik}, b^{ik})$, $i = \overline{1, N}$, $\varepsilon > 0$; $H_0 = E$ – единичная матрица размерности $(3N \times 3N)$. Вычисляем (в случае $\beta_1 \neq 0$) $\tilde{x}_2(t) = \tilde{x}_1(t)$ в точках $t = t_k$, $k = \overline{1, K}$ с помощью формул численного дифференцирования; задаем произвольно значения характеристических функций $\lambda_i^k(x_{10})$, $i = \overline{1, N}$.

1. Решаем задачу Коши (4.9.10) – (4.9.11) одним из методов Рунге-Кутты. При этом на каждом шаге численного интегрирования системы (4.9.10) находим значения характеристических функций подмножеств

$$\lambda_i^k(x_1(t)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \int_0^t \sum_{k:t_k \leq t} \left(\beta_0 (x_1^i(t) - \tilde{x}_1(t))^2 + \beta_1 (x_2^i(t) - \tilde{x}_2(t))^2 \right) \delta(t - t_k) dt = \\ \min_{p=\overline{1, N}} \int_0^t \sum_{k:t_k \leq t} \left(\beta_0 (x_1^p(t) - \tilde{x}_1(t))^2 + \beta_1 (x_2^p(t) - \tilde{x}_2(t))^2 \right) \delta(t - t_k) dt; \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad i = \overline{1, N}.$$

2. Вычисляем обобщенный градиент γ^k функции $\bar{I}^2(\lambda, \tau)$ по переменным $\tau_i^k = (a_1^{ik}, a_2^{ik}, b^{ik})$, $i = \overline{1, N}$ при $\lambda = \lambda^k$.

3. Осуществляем k -тую итерацию г-алгоритма Шора по формуле

$$\tau^{(k+1)} = \tau^{(k)} - h_k \frac{H_k \gamma^k}{\sqrt{(H_k \gamma^k, \gamma^k)}},$$

где H_k – матрица растяжения пространства в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов с коэффициентом α (его целесообразно брать равным 3), которая пересчитывается по формуле

$$H_{k+1} = H_k + (1/\alpha^2 - 1) \frac{H_k \zeta^k (\zeta^k)^T H_k}{(H_k \zeta^k, \zeta^k)}; \quad \zeta^k = \gamma^k - \gamma^{k-1}.$$

Если из-за округлений счета H_{k+1} перестает быть положительно определенной, заменяем ее единичной матрицей.

Шаговый множитель $h_k \geq 0$ выбирается из условия минимума целевой функции в направлении $d = -H_{k+1} \gamma^k$.

4. Если выполняется одно из условий

$$\|\tau^{k+1} - \tau^k\| \leq \varepsilon; \quad \|\gamma^k\| \leq \varepsilon; \quad \left| \bar{I}_2(\lambda^{k+1}, \tau^{k+1}) - \bar{I}_2(\lambda^k, \tau^k) \right| \leq \varepsilon, \quad (4.9.20)$$

то конец алгоритма. В качестве оптимального решения задачи (4.9.17), (4.9.10), (4.9.11) выбираем пару (λ^l, τ^l) , где l – номер итерации, на которой выполнилось одно из условий (4.9.20). Иначе $k := k + 1$ и переходим на п. 1.

Конец алгоритма **4.1-И**.

Замечание. Для того чтобы вычислить обобщенный градиент функции $\bar{I}_2(\lambda^k, \tau)$, необходимо наряду с задачей Коши (п.1 алгоритма 3.1) дополнительно решить $3N$ задач Коши при возмущенных компонентах вектора параметров τ .

Результаты идентификации «многозонной» модели динамики. Сравнение двух подходов

Вначале для выяснения принципиальной возможности идентификации «многозонных» динамических систем с помощью предложенных подходов были рассмотрены задачи восстановления кусочно-линейной правой части для **одного** уравнения: $\dot{x} = a_{0k}x + a_{1k}t + a_{2k}, x \in \Omega_k, (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega)$. Исследование проводилось в направлении выявления влияния исходных данных (количества точек наблюдений, начальных значений параметров восстанавливаемых функций) на качество реконструкции динамической системы. Анализ результатов таких вычислительных экспериментов позволил сделать следующие выводы.

1. Увеличение количества наблюдений в несколько раз влияет, хоть и не существенно, на качество реконструкции. Большее влияние на качество реконструкции системы оказывает выбор начальных приближений параметров $\tau_i = (a_1^i, a_2^i, b^i), i = \overline{1, N}$.

Опишем подробно для примера результаты идентификации трехзонной динамической системы вида (4.9.13) с линейными функциями правой части уравнения в каждой из зон функционирования системы: $f_1 = 1.5x_1 - x_2 + t$, $f_2 = -x_1 - 4x_2 - 3 \times t$, $f_3 = -3x_1 + 2x_2 + t$ с точками переключения $x_1 = \sigma_1 = 1$, $x_1 = \sigma_2 = 2$. Данная система имеет скользящий режим на участке $1 \leq x_1 \leq 2$, причем фазовой траектории удастся выйти с этого режима (см. рис. 4.35 а). На рис. 4.35 б, в, г представлены фазовые траектории системы, полученные в результате ее идентификации с помощью описанных выше подходов (траектории,

полученные с помощью первого подхода обозначены кружками, а подходом 2 – треугольниками) при количестве точек наблюдений $K = 100$, $K = 20$, $K = 50$ соответственно. Начальные приближения параметров τ_i , $i = \overline{1, N}$ генерировались каждый раз случайным образом.

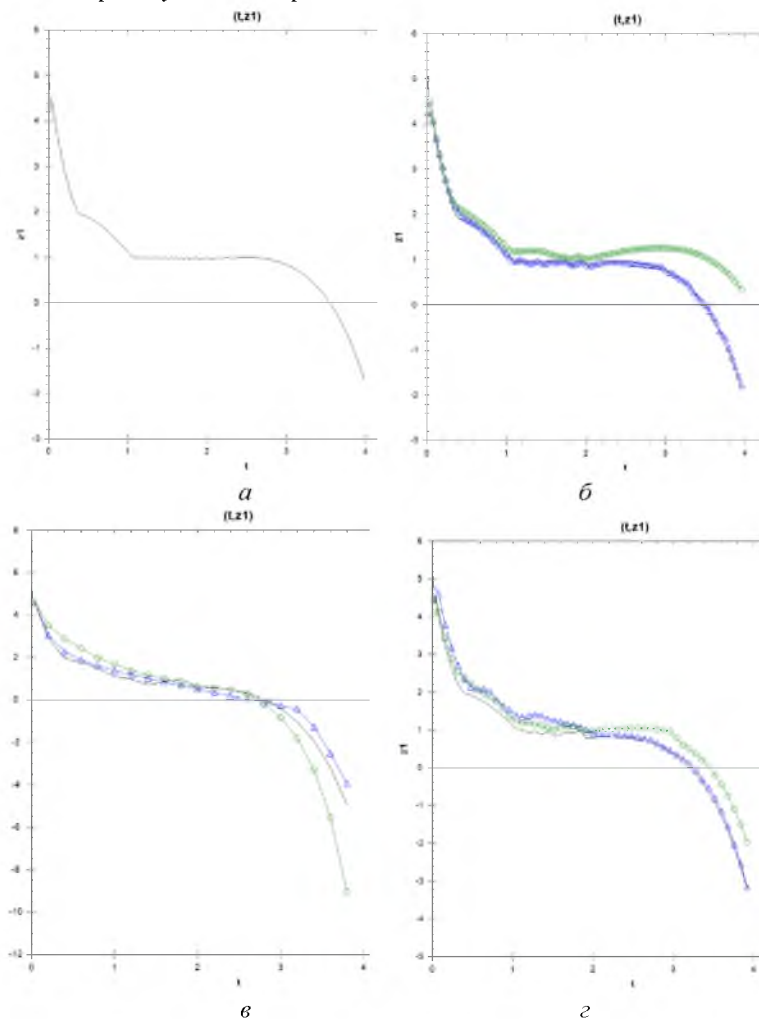


Рис. 4.35 Идентификации трехзонной динамической системы по K точкам наблюдений: фазовая траектория (а); $K = 100$ (б); $K = 20$ (в); $K = 50$ (г)

2. Задача идентификации характеризуется неединственностью решения, в том смысле, что восстанавливаемые параметры системы могут принимать «далекие» от точных значений, хотя при этом фазовые траектории реконструируются с приемлемой точностью. Так, фазовые траектории, представленные на рис. 4.35 б отвечают следующим найденным параметрам функций правых частей уравнения (4.9.13): $a_1^1 = 0.5, a_2^1 = -0.56, b^1 = -1.86; a_1^2 = -2.62, a_2^2 = 0.71, b^2 = 0.88; a_1^3 = 1.65, a_2^3 = -0.93, b^3 = 0.63$ (подход 1); $a_1^1 = -2.93, a_2^1 = -0.29, b^1 = 3.19; a_1^2 = 1.04, a_2^2 = 8.11, b^2 = -35.41; a_1^3 = -17.54, a_2^3 = -20.40, b^3 = 52.91$ (подход 2).

При идентификации системы (4.9.13), например, по $K = 50$ точкам наблюдений получены другие значения этих параметров: $a_1^1 = 1.64, a_2^1 = -0.94, b^1 = 0.66; a_1^2 = -3.15, a_2^2 = -1.28, b^2 = 3.18; a_1^3 = -0.72, a_2^3 = 0.39, b^3 = -0.34$ (подход 1); $a_1^1 = 1.95, a_2^1 = 1.18, b^1 = -5.68; a_1^2 = -3.48, a_2^2 = -0.58, b^2 = 4.42; a_1^3 = 1.66, a_2^3 = -0.38, b^3 = -1.42$ (подход 2).

При различных начальных приближениях восстанавливаемых параметров можно получить различные их «оптимальные» значения, хотя на качество восстановления фазовой траектории это может не повлиять. На рис. 4.36 а, б представлены результаты идентификации трехзонной динамической системы (4.9.16) с кусочно-линейной функцией правой части: $f_1 = -4x_1 + x_2 + t, f_2 = 0/3x_1 + 2x_2 + 3t, f_3 = -3x_1 - 3x_2 + t$ с точками переключения $x_1 = \sigma_1 = 2, x_1 = \sigma_2 = 3$, при различных начальных приближениях параметров $\tau_i, i = \overline{1, N}$, генерируемых, как уже отмечалось, случайным образом.

В [42] приведены результаты других вычислительных экспериментов восстановления разрывной по фазовой переменной правой части системы **двух** дифференциальных уравнений (4.9.3) с помощью двух предложенных подходов. Проведенный сравнительный их анализ позволил сделать такие заключения:

а) решение задачи идентификации не обладает свойством единственности, т.е. значения параметров могут существенно отличаться, но при этом аппроксимация правой части осуществляется с удовлетворительной точностью. Этот факт не противоречит свойствам обратных задач;

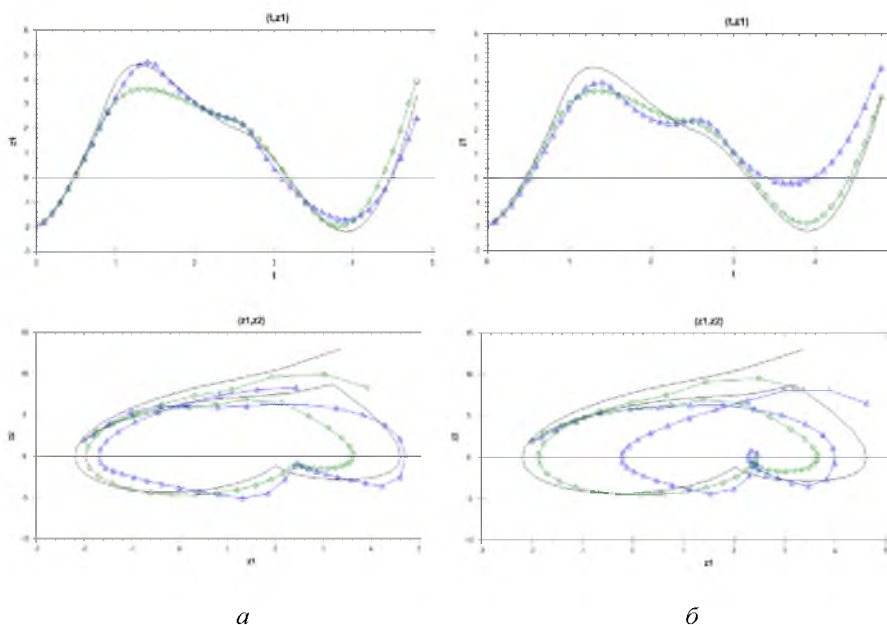


Рис. 4.36 Идентификация трехзонной системы (4.9.16) при различных начальных приближениях искомых параметров (а), (б): *сверху* – наблюдаемая переменная, *снизу* – фазовая траектория

б) границы между зонами функционирования системы идентифицируются с помощью и одного, и другого подхода достаточно хорошо при условии удачного выбора начального приближения параметров $\tau_i = (a'_1, a'_2, b')$, $i = \overline{1, N}$. Это объясняется тем, что и в одном, и в другом случае для решения поставленных задач оптимизации применяются методы недифференцируемой оптимизации, сходящиеся, в общем случае, к локальному минимуму;

в) при увеличении количества наблюдений качество реконструкции динамической системы с помощью подхода, основанного на численном дифференцировании, улучшается, что не всегда справедливо для подхода, основанного на решении задачи минимизации функционала (4.9.8).

Вычислительные эксперименты показали, что процесс восстановления кусочно-непрерывной по фазовым переменным функции правой части системы (4.9.3) на основе решения задачи минимизации функционала (4.9.7), обладает рядом особенностей:

– если в наборе наблюдений присутствуют точки переключения, то качество идентификации системы существенно зависит от того, содержит ли выборка наблюдений точки из разных зон функционирования;

– качество реконструкции динамической системы в случае восстановления неизвестных координат центров подмножеств $\tau_i, i = \overline{1, N}$, зависит от выбора начальных приближений этих параметров;

– задача характеризуется неединственностью решения, которая преодолевается путем сужения множества, на котором ищутся неизвестные параметры $\tau_i, i = \overline{1, N}$.

Кроме того, основной проблемой, возникающей при реализации метода, является то, что задача дифференцирования функции, заданной приближенно, в равномерной метрике является некорректной. Одним из подходов к решению указанной проблемы является учет погрешности задания функции при выборе шага сетки. Регуляризованная процедура численного дифференцирования может быть получена на основе различных подходов [89]. В основе одного из методов, например, лежит традиционная аппроксимация дифференциального оператора конечноразностным оператором. При этом шаг сетки должен быть согласован с погрешностью входных данных. Так, например, в случае, когда значение самой функции может быть вычислено в любой точке и с любым шагом с точностью δ , определение производной с заданной точностью ε возможно, если выбрать шаг $h(\delta) = c\delta^q$, где c и q – положительные константы, $q < 1$ [26].

Задача численного дифференцирования также может быть решена в рамках идеологии обращения интегральных операторов типа Вольтерра на основе равенства $\int_0^t x'(t)dt = x(t) - x(0)$, численное обращение которых возможно с использованием регуляризованных алгоритмов, например метода А. Н. Тихонова [89].

**Сведение задачи идентификации многозонной модели динамики
к последовательности задач оптимального управления**

Далее приведем метод реконструкции систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переключаемыми правыми частями, основанный на сведении задачи идентификации многозонной модели динамики к последовательности задач оптимального управления, для решения которых применяются необходимые условия оптимальности в форму принципа максимума Понтрягина. Предложим соответствующий итерационный алгоритм решения задачи идентификации многозонной модели динамики.

В обобщение рассмотренной выше задачи, будем считать, что наблюдаемой величиной является переменная z , а измеренные в момент t_k ее значения обозначим $\tilde{z}(t_k) = \bar{z}_k, k = \overline{1, K}$. Тогда модель измерений можно представить в следующем виде:

$$\tilde{z}(t_k) = \gamma_1 x_1(t_k) + \gamma_2 x_2(t_k) + \xi_k, \quad k = \overline{1, K}, t_k \in [0, T], \quad (4.9.21)$$

где $\xi_k, k = \overline{1, K}$, – случайные погрешности измерений, а $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$.

Итак, необходимо по известным значениям $\bar{z}_k, k = \overline{1, K}$, на промежутке \bar{T} и при условиях (4.9.4) определить границы между зонами $(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N)$ в системе (4.9.3).

Метод решения задачи идентификации границ между зонами функционирования системы. Математическая модель задачи идентификации динамической многозонной системы (4.9.3) записывается следующим образом:

$$I(x(\cdot; \bar{\omega})) \rightarrow \min_{\bar{\omega} \in P_N(\Omega)}, \quad (4.9.22)$$

где

$$I(x(\cdot; \bar{\omega})) = \int_0^T (\gamma_1 x_1(t; \bar{\omega}) + \gamma_2 x_2(t; \bar{\omega}) - \tilde{z}(t))^2 \sum_{k=1}^K \delta(t - t_k) dt,$$

$\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака;

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \phi(t, x; \bar{\omega}), \phi \in \Phi, \end{cases} \quad (4.9.23)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad (4.9.24)$$

$$\Phi = \left\{ \phi : \phi(t, x; \bar{\omega}) = \phi_i(t, x; \tau_i) \text{ м.в. для } x \in \Omega_i, \tau_i \in R^3, i = \overline{1, N}, \bar{\omega} \in P_N(\Omega) \right\}.$$

Согласно методике решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств, от задачи минимизации функционала $I(x(\cdot; \bar{w}))$ осуществляем переход к эквивалентной задаче: найти вектор-функцию $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)) \in \Lambda_0$, при которой

$$I^1(x(\cdot; \lambda(\cdot))) \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0}, \quad (4.9.25)$$

где

$$I^1(x(\cdot; \lambda(\cdot))) = \int_0^T (\gamma_1 x_1(t; \lambda(x_1)) + \gamma_2 x_2(t; \lambda(x_1)) - \tilde{z}(t))^2 \sum_{k=1}^K \delta(t - t_k) dt, \quad (4.9.26)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^N \phi_i(t, x; \tau_i) \lambda_i(x_1), \end{cases} \quad (4.9.27)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}.$$

Поскольку первая координата фазовой переменной является функцией времени, вектор-функция $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)) \in \Lambda_0$ также фактически зависит от временной переменной, обозначаемой следующим образом: $\lambda(x_1(t)) = (\lambda_1(x_1(t)), \dots, \lambda_N(x_1(t)))$. Введем в рассмотрение вектор-функцию $\hat{\lambda}(t) = (\hat{\lambda}_1(t), \dots, \hat{\lambda}_N(t))$, такую что $\hat{\lambda}(t) = \lambda(x_1(t))$. Таким образом, в отличие от вектор-функции λ , компоненты которой определены на множестве Ω , координаты вектор-функции $\hat{\lambda}(t)$ являются функциями времени и определены на интервале $t \in [t_0, T]$, $t_0 = 0$, то есть: $\hat{\lambda}(\cdot) \in \hat{\Lambda}$,

$$\hat{\Lambda} = \left\{ \hat{\lambda}(t) = (\hat{\lambda}_1(t), \dots, \hat{\lambda}_N(t)) : \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_i(t) = 1; \right. \\ \left. \hat{\lambda}_i(t) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}, \text{ п.в. для } t \in [0, T] \right\}$$

Таким образом, на задачу (4.9.25) – (4.9.27) можно смотреть как на задачу оптимального управления динамической системой, в которой управляющей функцией является вектор функция $\hat{\lambda}(t)$. Представим такую задачу оптимального управления на промежутке $t \in [t_0, t_K]$ последовательным набором следующих K задач:

$$I_k(x(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)) \rightarrow \min, \hat{\lambda}(\cdot) \in \hat{\Lambda}, k = \overline{1, K}, \quad (4.9.28)$$

$$I_k(x(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)) = \left(\gamma_1 x_1(t_k; \hat{\lambda}(\cdot)) + \gamma_2 x_2(t_k; \hat{\lambda}(\cdot)) - \tilde{z}(t_k) \right)^2, \quad (4.9.29)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^N \phi_i(t, x, \tau_i) \hat{\lambda}_i(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \end{cases}$$

$$x_1(t_{k-1}) = \bar{x}_1(t_{k-1}), \quad x_2(t_{k-1}) = \bar{x}_2(t_{k-1}), \quad (4.9.30)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \quad k = \overline{1, K},$$

где $\bar{x}_1(t_{k-1})$ и $\bar{x}_2(t_{k-1})$, $k = \overline{1, K}$, – значения первой и второй фазовой координаты в момент времени $t = t_{k-1}$, которые либо совпадают с $\tilde{x}_1(t_{k-1})$ и $\tilde{x}_2(t_{k-1})$ соответственно в случае, когда наблюдаются обе фазовые переменные, или вычислены в результате решения предыдущей $(k-1)$ -й задачи.

Приведем необходимые условия оптимальности для каждой из задач (4.9.28) – (4.9.30). Для этого, по аналогии с методикой решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств, погрузим множество $\hat{\Lambda}$ в симплекс $\bar{\Lambda} = \left\{ \lambda = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) = 1; 0 \leq \lambda_i(t) \leq 1, i = \overline{1, N}, \text{ п.в. для } t \in [0, T] \right\}$

и рассмотрим задачу:

$$I_k(x(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)) \rightarrow \min, \hat{\lambda}(\cdot) \in \bar{\Lambda}, k = \overline{1, K}, \quad (4.9.31)$$

при условиях (4.9.29), (4.9.30). Правомерность перехода от задачи (4.9.28) – (4.9.30) к задаче (4.9.29) – (4.9.31) будет обоснована ниже.

Пусть $((x_1, x_2), \hat{\lambda})$ – допустимый процесс в задаче (4.9.28) – (4.9.30). Очевидно, этот процесс будет также допустимым для задачи (4.9.29) – (4.9.31). Дадим приращение $\Delta \hat{\lambda}(\cdot)$ функции управления такое, чтоб выполнялись условия:

$$\hat{\lambda}(t) + \Delta \hat{\lambda}(t) \in \bar{\Lambda}, \quad \sum_{i=1}^N (\hat{\lambda}_i(t) + \Delta \hat{\lambda}_i(t)) = 1 \quad \forall t \in [0, T].$$

Это означает, что $\Delta \hat{\lambda} \in \hat{\Lambda}_\Delta$, где

$$\hat{\Lambda}_\Delta = \left\{ \lambda = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) = 0; -1 \leq \lambda_i(t) \leq 1, i = \overline{1, N}, \forall t \in [0, T] \right\}.$$

Приращение $\Delta \hat{\lambda}(\cdot)$ вызывает приращения фазовых переменных $\Delta x_1, \Delta x_2$, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2, \\ \Delta \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^N (a_{1i} x_1 + a_{2i} x_2 + f_i(b^i, t)) \Delta \hat{\lambda}_i + \sum_{i=1}^N (a_{1i} \Delta x_1 + a_{2i} \Delta x_2) \hat{\lambda}_i. \end{cases} \quad (4.9.32)$$

Начальные условия для $\Delta x_1, \Delta x_2$ записываются таким образом:

$$\Delta x_1(t_{k-1}) = 0, \Delta x_2(t_{k-1}) = 0. \quad (4.9.33)$$

Линеаризованный функционал задачи (4.9.29) – (4.9.31) имеет следующий вид:

$$I_k(x + \Delta x, \hat{\lambda} + \Delta \hat{\lambda}) = I_k(x, \hat{\lambda}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} p_2 \sum_{i=1}^N (a_{1i} x_1 + a_{2i} x_2 + f_i(b^i, t)) \Delta \hat{\lambda}_i dt,$$

где вектор $p(t) = (p_1(t), p_2(t))$ соответствует следующим условиям:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -p_2 \sum_{i=1}^n a_{1i} \hat{\lambda}_i, \\ \dot{p}_2 = -p_1 - p_2 \sum_{i=1}^n a_{2i} \hat{\lambda}_i; \end{cases} \quad (4.9.34)$$

$$\begin{aligned} p_1(t_k) &= -2\gamma_1 \left(\gamma_1 x_1(t_k; \hat{\lambda}) + \gamma_2 x_2(t_k; \hat{\lambda}) - \bar{z}(t_k) \right), \\ p_2(t_k) &= -2\gamma_2 \left(\gamma_1 x_1(t_k; \hat{\lambda}) + \gamma_2 x_2(t_k; \hat{\lambda}) - \bar{z}(t_k) \right). \end{aligned} \quad (4.9.35)$$

Для того, чтобы допустимый процесс $\left((x_1, x_2), \hat{\lambda} \right)$ был оптимальным в задаче (4.9.29) – (4.9.31), **необходимо** чтобы для всех допустимых приращений $\Delta \hat{\lambda} \in \hat{\Lambda}_\Delta$ выполнялось неравенство:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} p_2 \sum_{i=1}^N (a_{1i} x_1(t) + a_{2i} x_2(t) + f_i(b^i, t)) \Delta \hat{\lambda}_i(t) dt \geq 0, \quad (4.9.36)$$

где x_1, x_2 удовлетворяют задаче Коши (4.9.29), (4.9.30) при $\lambda(\cdot) = \hat{\lambda}(\cdot)$; а $p_2(\cdot)$ удовлетворяет условиям задачи (4.9.34), (4.9.35) при соответствующих функциях $\left((x_1, x_2), \hat{\lambda} \right)$.

Пусть $\left((x_1, x_2), \hat{\lambda} \right)$ – произвольный допустимый процесс в задаче (4.9.28) – (4.9.30), являющийся допустимым также для задачи (4.9.29) – (4.9.31). Поль-

зуясь условием (4.9.36), построим направление спуска в этой точке $\left((x_1, x_2), \hat{\lambda}\right)$, если оно существует. Для этого рассмотрим следующую задачу:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} p_2(t) \sum_{i=1}^N (a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + f_i(b^i, t)) \Delta \hat{\lambda}_i(t) dt \rightarrow \min_{\Delta \hat{\lambda} \in \Lambda_{\Delta}}, \quad (4.9.37)$$

где $p_2(\cdot)$ удовлетворяет условиям задачи (4.9.34), (4.9.35) при соответствующих функциях $\left((x_1, x_2), \hat{\lambda}\right)$. Минимальное значение интеграла в (4.9.37) достигается в точке $\Delta \hat{\lambda}_*(\cdot)$, в которой почти всюду для $t \in [t_{k-1}, t_k]$ выполняется равенство:

$$\begin{aligned} p_2(t) \sum_{i=1}^N (a_{1i}x_1(t) + a_{2i}x_2(t) + f_i(b^i, t)) \Delta \hat{\lambda}_{*i}(t) = \\ = \min_{\Delta \hat{\lambda}(t) \in \Lambda_{\hat{\lambda}(t)}} p_2(t) \sum_{i=1}^N (a_{1i}x_1(t) + a_{2i}x_2(t) + f_i(b^i, t)) \Delta \hat{\lambda}_i(t), \end{aligned}$$

где

$$\Lambda_{\hat{\lambda}} = \left\{ \Delta \lambda = (\Delta \lambda_1, \dots, \Delta \lambda_N) : \sum_{i=1}^N \Delta \lambda_i = 0; 0 \leq \hat{\lambda}_i + \Delta \lambda_i \leq 1, i = \overline{1, N} \right\}.$$

Очевидно, допустимое приращение $\Delta \hat{\lambda}_i$ координаты $\hat{\lambda}_i$ должно удовлетворять следующим условиям:

$$\text{если } \hat{\lambda}_i = 1, \text{ то } \Delta \hat{\lambda}_i \in [-1, 0]; \text{ если } \hat{\lambda}_i = 0, \text{ то } \Delta \hat{\lambda}_i \in [0, 1]; \sum_{i=1}^N \Delta \hat{\lambda}_i = 0.$$

Фактически, почти в каждый момент времени $t \in [t_{k-1}, t_k]$ имеем дело с задачей линейного программирования с одним условием на параллелепипеде. Запишем ее в следующем виде:

$$p_2(t) \sum_{i=1}^N \varphi_i(x, t, \tau_i) \Delta \hat{\lambda}_{*i}(t) = \min_{\Delta \hat{\lambda}(t) \in \Lambda_{\hat{\lambda}(t)}} p_2(t) \sum_{i=1}^N \varphi_i(x, t, \tau_i) \Delta \hat{\lambda}_i(t). \quad (4.9.38)$$

Напомним, что в случае оптимальности вектор-функции $\hat{\lambda}(\cdot)$ для задачи (4.9.28) – (4.9.30), почти всюду для $t \in [t_{k-1}, t_k]$ выполняется условие

$$p_2(t) \sum_{i=1}^N \varphi_i(x, t, \tau_i) \Delta \hat{\lambda}_i(t) \geq 0 \quad \forall \Delta \hat{\lambda} \in \Lambda_{\hat{\lambda}}.$$

Зафиксируем произвольный момент времени $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Пусть в векторе $\hat{\lambda}(t)$ компоненты $\lambda_m(t) = 1$, $\lambda_i(t) = 0$, $i = \overline{1, N}$, $i \neq m$. Далее момент времени t и знак « $\hat{}$ » будем опускать. Рассмотрим задачу

$$p_2 \varphi_1 \Delta \lambda_1 + p_2 \varphi_2 \Delta \lambda_2 + \dots + p_2 \varphi_N \Delta \lambda_N \rightarrow \min \quad (4.9.39)$$

при условиях

$$\Delta \lambda_1 + \Delta \lambda_2 + \dots + \Delta \lambda_N = 0, \quad (4.9.40)$$

$$\Delta \lambda_m \in [-1, 0], \quad \Delta \lambda_i \in [0, 1], \quad i = \overline{1, N}, i \neq m. \quad (4.9.41)$$

Введем $\Delta \bar{\lambda}_m = -\Delta \lambda_m$, $\Delta \bar{\lambda}_m \in [0, 1]$ и, учитывая условие (4.9.40), исключим переменную

$$\Delta \bar{\lambda}_m = \Delta \lambda_1 + \dots + \Delta \lambda_{m-1} + \Delta \lambda_{m+1} + \dots + \Delta \lambda_N \quad (4.9.42)$$

из целевой функции. Тогда задача (4.9.39) – (4.9.41) запишется в следующем виде:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^N (p_2 \varphi_i - p_2 \varphi_m) \Delta \lambda_i \rightarrow \min_{\substack{0 \leq \Delta \lambda_i \leq 1, \\ i = \overline{1, N}}} \quad (4.9.43)$$

при условиях (4.9.42).

Если для всех $i = \overline{1, N}$, $i \neq m$ и почти всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$ выполняется неравенство: $p_2 \varphi_i - p_2 \varphi_m \geq 0$, то минимальное значение целевой функции в (4.9.43) достигается при $\Delta \lambda_i = 0$, $i = \overline{1, N}$, $i \neq m$, и можно сделать вывод об оптимальности вектора $\hat{\lambda}(t)$ в задаче (4.9.29) – (4.9.31), в силу произвольности выбора момента времени $t \in [t_{k-1}, t_k]$.

Если же при некотором $t \in [t_{k-1}, t_k]$ существуют такие индексы k , что выполняется неравенство $p_2 \varphi_k - p_2 \varphi_m < 0$, то целевая функция в (4.9.43) может быть уменьшена за счет увеличения соответствующих переменных $\Delta \lambda_k$. С учетом того, что базис опорного решения задачи (4.9.43), (4.9.42) составляет только один вектор условий, имеем возможность в векторе $\Delta \lambda$ увеличить до единицы лишь одну переменную. Пусть

$$p_2 (\varphi_s - \varphi_m) = \min_{k: p_2 (\varphi_k - \varphi_m) < 0} p_2 (\varphi_k - \varphi_m).$$

Тогда оптимальным решением задачи (4.9.43) будет вектор $\Delta \lambda_{*s}(t) = 1$; $\Delta \lambda_{*m}(t) = -1$, $\Delta \lambda_{*i}(t) = 0$, $i = \overline{1, N}$, $i \neq s, m$. Соответственно, в задаче (4.9.29) – (4.9.31) можно осуществить переход от вектор-функции $\hat{\lambda}(\cdot)$ к другой допустимой вектор-функции $\lambda_*(\cdot)$, в которой $\lambda_{*s}(t) = 1$, $\lambda_{*i}(t) = 0$, $i = \overline{1, N}$, $i \neq s$, и которая обеспечивает релаксационность процесса построения решения этой задачи. Учитывая, что точка $\lambda_*(\cdot)$ является крайней точкой симплекса $\overline{\Lambda}$, и $\hat{\Lambda} \subset \overline{\Lambda}$, то справедливым будет утверждение, что полученное таким образом решение задачи (4.9.29) – (4.9.31) будет оптимальным решением и для задачи (4.9.28) – (4.9.30).

С учетом приведенных выше соображений представим итерационный алгоритм, с помощью которого решается каждая задача (4.9.22) – (4.9.24).

Алгоритм 4.2-И

Инициализация. Задаем $k = 1$ (решается первая задача), $\tau_i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, b^i)$, $i = \overline{1, N}$, $\varepsilon > 0$; шаг h численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (4.9.29), (4.9.30).

1. Задаем номер итерации $q := 0$.

Если $k = 1$, то задаем начальные условия $x_1(t_0) = x_{10}$, $x_2(t_0) = x_{20}$. Если же $k > 1$, то в качестве начальных условий для фазовых переменных $x_1(t_{k-1})$, $x_2(t_{k-1})$ выбираются значения этих переменных в момент времени t_{k-1} , полученные в результате решения предыдущей задачи. Задаем также начальное приближение значений характеристических функций: $\lambda_i^{(0)}(t) \forall t \in [t_{k-1}, t_k]$.

Пусть в результате q итераций получены значения $\lambda_i^{(q)}(t)$, $i = \overline{1, N}$. Опишем q -тую итерацию.

2. В каждой точке t сетки временного интервала $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ вычисляем значения функций $x_1^{(q)}(t)$, $x_2^{(q)}(t)$, решая слева направо при помощи метода Рунге-Кутты задачу Коши (4.9.29), (4.9.30) при $\lambda = \lambda^q$. Вычисляем значения функций $p_1(t)$, $p_2(t)$, решая справа налево при помощи метода Рунге-Кутты задачу Коши (4.9.34), (4.9.35) при $\lambda = \lambda^q$, $x = x^q$.

3. Проверяем выполнение условий стационарности процесса:

$$\forall t \in [t_{k-1}, t_k] \quad p_2 \varphi_i - p_2 \varphi_m \geq 0 \quad \forall i \neq m \quad (4.9.44)$$

где m – номер единичной компоненты вектора λ .

Если для некоторого момента времени $\bar{t} \in [t_{k-1}, t_k]$ существует такой индекс i , что $p_2 \varphi_i - p_2 \varphi_m < 0$, то среди них выбираем индекс k , соответствующий наименьшему отрицательному значению этой разницы, и полагаем $\lambda_k(\bar{t}) = 1, \lambda_m(\bar{t}) = 0$. Переход на шаг 4.

Если $\forall t \in [t_{k-1}, t_k]$ текущее значение $\lambda(t)$ такое, что $\forall i \neq m$ выполняются условия стационарности процесса (4.9.44), то $\lambda(t)$ будет оптимальным (условно стационарным) на отрезке $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Переход на шаг 5.

4. $q := q + 1$. Переходим на шаг 2.

5. $k := k + 1$.

Если $k \leq K$, то переходим на шаг 1, иначе – на шаг 6.

6. Восстанавливаем оптимальное разбиение множества Ω по известным значениям характеристических функций $\lambda_i(t), i = \overline{1, N}$ и значениям первой фазовой координаты системы в соответствующие моменты времени. Вычисляем значение целевого функционала задачи (4.9.22) – (4.9.24).

Конец алгоритма **4.2-И**.

Анализ результатов вычислительных экспериментов

Представим результаты расчетов, выполненных для некоторых модельных обратных задач. Для получения исходных данных при помощи метода Рунге – Кутты 4-го порядка решалась прямая задача Коши (4.9.3) – (4.9.4) с известными границами между зонами функционирования системы. Далее, задав количество точек измерения K , и, выбирая из полученного численного решения задачи значение фазовых переменных (наблюдаемые величины) в этих K точках, формировалась последовательность обратных задач вида (4.9.28) – (4.9.30).

Реконструкция вида разрывных по фазовой переменной правых частей дифференциальных уравнений проводилась для динамических систем с разным количеством зон функционирования. Так, на рис. 4.37, *a* изображены фазовые траектории системы (4.9.3) (смоделированная и восстановленная), где переключение правой части дифференциального уравнения в (4.9.3) из функции

$\phi_1 = 10x_1 - 0.2x_2 + 3t$ на функцию $\phi_2 = -2x_1 - 2x_2 + 0.1t$, а далее на $\phi_3 = 1x_1 - 2x_2 - t$ происходят соответственно в точках $x_1 = \sigma_1 = 10$, $x_1 = \sigma_2 = 15$. При начальных условиях $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = -3$, $T = 1$ и по значениям фазовых координат в $K = 20$ точках наблюдений получены следующие восстановленные границы между зонами функционирования: $\sigma_1 = 10.453$, $\sigma_2 = 14.902$. Интегрирование системы (4.9.3) здесь и далее происходило с шагом $h = 0.01$. На рисунке 4.37 б представлены фазовые траектории системы, имеющей четыре зоны функционирования, границы между которыми определяются следующими значениями первой фазовой переменной: $\sigma_1 = -2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 5$. Исходные данные задачи такие:

$$\phi_1 = -0.5x_2 + 0.1t, \quad \phi_2 = 0.6x_1 - 0.2x_2 + 0.3t, \quad \phi_3 = -0.29x_1 + 0.4x_2 + 0.8t, \\ \phi_4 = 0.4x_1 - 0.2x_2 + 0.19t, \quad x_1(0) = -4, \quad x_2(0) = 1, \quad T = 8, \quad K = 100.$$

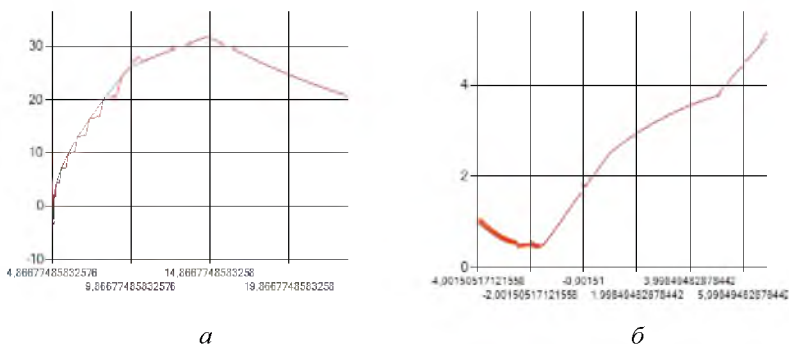


Рис. 4.37 Фазовые траектории динамических систем, реконструированные с помощью итерационного алгоритма

Интересным оказался случай восстановления системы (4.9.3) с двумя зонами функционирования, которым соответствуют функции правой части $\phi_1 = 0.7t$; $\phi_2 = -0.6t$ с границей $x_1 = 0$. За рассматриваемый промежуток времени переключение происходило несколько раз.

На рис. 4.38 представлены фазовые траектории этой двухзонной динамической системы. Результат на рис. 4.38 а соответствует следующим начальным условиям: $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 0$, $T = 8$, $K = 50$. Все четыре точки переключения были восстановлены. При этом получены следующие значения искомой

границы между зонами функционирования системы: $\sigma_1 = -0.023$, $\sigma_2 = -0.229$, $\sigma_3 = -0.102$, $\sigma_4 = -0.004$. На рис. 4.38 б изображены фазовые траектории системы, полученные при таких начальных условиях: $x_{10} = -2$, $x_{20} = 0$, $T = 10$, $K = 100$. Переключение правой части (пять раз) в результате решения обратной задачи было выполнено при таких значениях первой фазовой координаты: $\sigma_1 = -0.173$, $\sigma_2 = 0.06$, $\sigma_3 = 0.143$, $\sigma_4 = -0.118$, $\sigma_5 = 0.097$.

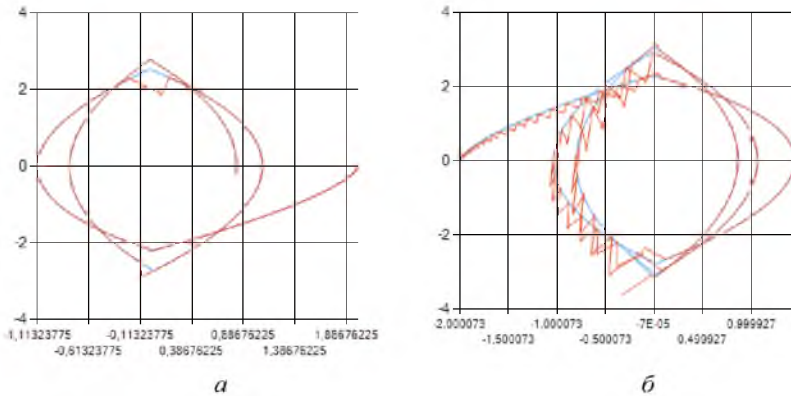


Рис. 4.38 Фазовые траектории двузонной динамической системы

Приведенные и другие примеры решения задач восстановления границ между зонами функционирования динамических систем вида (4.9.3) свидетельствуют о том, что качество реконструкции динамической системы зависит от следующих параметров: количества точек наблюдений, параметров $\tau_i = (a_{1i}, a_{2i}, b_i)$, определяющих функцию справа в дифференциальном уравнении, величины временного интервала \bar{T} , соотношения коэффициентов γ_1, γ_2 , а также шага интегрирования системы (4.9.3).

Представленный алгоритм нетрудно обобщить на случай нефиксированных наборов параметров $\tau_i = (a_{1i}, a_{2i}, b_i)$, определяющих правую часть дифференциального уравнения.

Таким образом, для решения задачи идентификации динамической системы, которая описывается системой дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, предложены три подхода. Первый основан на числен-

ном дифференцировании наблюдаемого временного ряда и восстановлении старшей производной в классе кусочно-непрерывных функций. Второй – на решении задачи минимизации среднеквадратического отклонения восстанавливаемых фазовых переменных от соответствующих значений экспериментальных данных. Третий базируется на представлении задачи идентификации в виде совокупности задач оптимального управления и применении к ним необходимых условий оптимальности. Все три подхода предусматривают формулировку задачи идентификации в терминах теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств и применения методов ОРМ для их решения. Ключевой частью алгоритмов решения полученных задач при этом выступает г-алгоритм Н.З. Шора минимизации недифференцируемой многомерной функции.

4.10. Размещение конечного числа источников в непрерывной среде с целью максимизации минимального совокупного эффекта действия этих источников

В данном параграфе продемонстрирована возможность применения г-алгоритма к решению задач оптимизации, возникающих при планировании лучевой терапии.

Лучевая терапия занимает важное место в лечении злокачественных новообразований, кроме того, она является ценной методикой в лечении ряда неопухолевых заболеваний. До 70% больных раком проходят лучевую терапию в качестве самостоятельного метода или в качестве компонента комбинированного лечения (в сочетании с хирургией, химиотерапией) [120, 132].

Лучевая терапия является способом терапевтического воздействия на онкологические заболевания, который при обоснованном выборе величины доз позволяет увеличить продолжительность и качество жизни пациентов. В некоторых случаях такое лечение позволяет избежать травматичного оперативного вмешательства. При этом эффективность методов лучевой терапии в значительной мере зависит от технического, математического, программного и организационно-методического обеспечения врачей-радиологов.

Трудности при выборе схемы лучевой терапии и проблемы ее корректировки решаются на основе клинического опыта конкретного врача-радиолога. Однако интересующие врача параметры лучевой терапии, как правило, не могут быть измерены непосредственно в процессе лечения, и необходимая информация может быть получена лишь в результате построения и реализации соответствующих математических моделей. Существует многолетний опыт

работы целых коллективов, анализ и обобщение которого с помощью математических методов позволили бы усовершенствовать и создавать новые более эффективные схемы радиационного облучения, что облегчило бы врачу-радиологу принятие оптимального решения при назначении лечения.

Перспективным направлением радиационной онкологии является оптимизация пространственно-временных условий подведения дозы, научно обоснованный выбор режимов фракционирования дозы. В современной лучевой терапии много различных видов ионизирующего излучения, которые отличаются по биологическому действию, проникаемости и распределения энергии в пучке излучения, используемым противоопухолевым агентам. При проведении терапии радиоактивное излучение должно подаваться к опухоли строго в определенных дозах, фракций, временных интервалах и в определенных местах. Область воздействия должна включать в себя не только первичную опухоль, но также зоны субклинического распространения опухоли в окружающих нормальных тканях, в том числе лимфатических узлах. Математическое моделирование выступает одним основным методом установления количественных характеристик, определяющих планирование и проведение лучевой терапии опухолей.

Некоторые математические аспекты проблемы оптимизации лучевой терапии обсуждаются в [123 –125, 152]. Как отмечено в [123], математическая постановка задачи лучевой терапии состоит из пары задач – прямой и обратной. Обратная задача состоит в определении внешних пучков излучения, вместе со своими местами расположения, профилями и интенсивностями, которые обеспечат заданное распределение дозы в пределах облучаемого объекта. Значительное количество существующих математических моделей разработаны для анализа изменений объема опухоли, расчет оптимальных доз радиации и т.п.

В отличие от вышеперечисленных работ, которые касаются вопросов, связанных с оптимизацией интенсивности излучения, здесь изучим геометрический аспект обратной задачи.

Постановка задачи оптимального планирования лучевой терапии

Как и в работе [60], рассмотрим задачу оптимального планирования лучевой терапии злокачественных новообразований как задачу оптимального размещения и поля действия конечного числа источников в непрерывной среде. В этой задаче нужно разместить заданное количество источников облучения в пораженной ткани таким образом, чтобы совокупный эффект действия источников был как можно более однородным.

При внутритканевой лучевой терапии для достижения полного терапевтического эффекта (безрецидивного излечения опухолевого заболевания) необходимо так разместить источники радиоактивного облучения в опухоли, чтобы дозовое поле было как можно более однородным. Это связано с тем, что в области низких уровней облучения (в области локальных минимумов поля действия) возможен рецидив заболевания, а в области высоких доз могут возникать лучевые некрозы, которые тяжело излечиваются.

Итак, рассматриваемую задачу будем интерпретировать в следующем контексте: в качестве «поля обслуживания» выступает пораженный участок тела человека, все клетки которого являются «клиентами», а «пунктами обслуживания» выступают источники облучения, которые размещаются внутри пораженного участка и создают терапевтическое радиационное поле, подавляющее центры поражения. Причем будем считать, что поражение в разных точках рассматриваемого участка кожи может быть разным. Задача заключается в размещении заданного количества источников облучения так, чтобы дозовая поле (совокупный эффект действия источников) было как можно более однородным.

Некоторые модели подобных задач и подходы к их решению представлены в [129, 141].

Построение математических моделей

Пусть Ω – ограниченное множество в евклидовом пространстве E_n . Несмотря на то, что представленная ниже модель задачи размещения сформулирована для произвольного конечного значения n , учитывая предметную интерпретацию, будем рассматривать случай, когда $n = 2$.

В отличие от [60], где множество Ω считается однородным, то есть предполагается, что все клетки одинаково поражены болезнью, будем предполагать, что в области существуют так называемые «центры поражения», то есть точки, в которых болезнь зарождается и наиболее ярко выражена. Обозначим эти центры через $\theta_i = (\theta_i^1, \theta_i^2, \dots, \theta_i^n) \in \Omega, i = \overline{1, M}$.

Также будем предполагать, что болезнь от каждого центра может распространяться на некоторую окрестность соседних точек, и чем дальше находится клетка от центра, тем меньше степень ее поражения.

Пусть влияние каждого центра на поражение клетки в точке $x \in \Omega$ описывается функцией:

$$\rho_i(\|x - \theta_i\|) = B_i \exp(-\beta_i \|x - \theta_i\|^2), i = \overline{1, M} \quad (4.10.1)$$

где B_i – максимальная степень поражения клеток в окрестности i -го центра, β_i – параметр функции, который показывает, насколько «широкой» является способность i -го центра к разрастанию и распространению на соседние клетки, $\|\cdot\|$ – евклидова метрика.

Тогда совокупная степень поражения $P(\theta, x)$ в точке $x \in \Omega$ зависит от влияния всех существующих центров болезни и выражается формулой:

$$P(\theta, x) = \sum_{i=1}^M \rho_i (\|x - \theta_i\|). \quad (4.10.2)$$

Далее при решении задачи размещения будем учитывать степень поражения в каждой точке области.

На рис. 4.39, 4.40 приведены поверхности, являющиеся геометрическим представлением функции (4.10.2), определенной в двумерной области $\Omega = \{-2.5 \leq x \leq 2.5; -1.5 \leq y \leq 1.5\}$ при следующих значениях параметров: $N = 2$; $B_1 = 20, \beta_1 = 0.2$; $B_2 = 18, \beta_2 = 0.18$ (рис. 4.39) и $N = 3$; $B_1 = 20, \beta_1 = 0.2$; $B_2 = 18, \beta_2 = 0.08$; $B_3 = 18, \beta_3 = 0.16$ (рис. 4.40).

Обозначим через $\tau_i = (\tau_i^1, \tau_i^2, \dots, \tau_i^n) \in \Omega, i = \overline{1, N}$, источники влияния на среду (источники излучения). Пусть влияние источника в точке $x \in \Omega$ описывается функцией:

$$d_i(r_i) = d_i(\|x - \tau_i\|), i = \overline{1, N}, \quad (4.10.3)$$

Совокупный эффект действия всех источников $\tau_i, i = \overline{1, N}$ в точке $x \in \Omega$ образует поле обслуживания $D(\tau, x)$, которое определяется по следующей формуле:

$$D(\tau, x) = \sum_{i=1}^N d_i(\|x - \tau_i\|), \quad (4.10.4)$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова метрика.

Будем предполагать, что чем большей является степень поражения болезнью точки рассматриваемой области, тем ближе к этой точке должны быть расположены источники влияния на них, то есть тем большим должно быть дозное поле в окрестности этой точки.

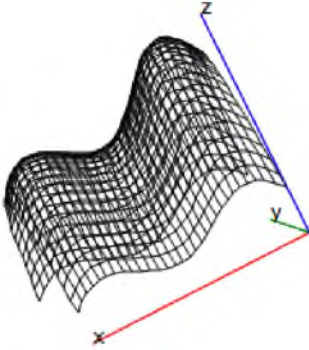


Рис. 4.39. Плотность пораженных клеток в области с двумя центрами поражения

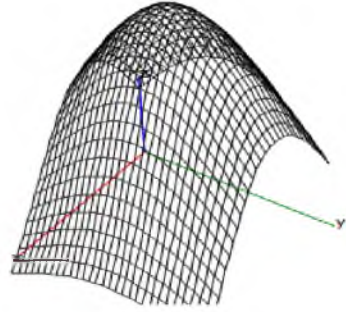


Рис. 4.40. Плотность пораженных клеток в области с тремя центрами поражения

Действие всех источников на точку x пораженной области будем описывать следующим образом:

$$DP(\tau, x) = \frac{1}{P(\theta, x)} \sum_{i=1}^N d_i (\|x - \tau_i\|). \quad (4.10.4)$$

Задача состоит в размещении источников $\tau_i, i = \overline{1, N}$, в области Ω (и в ее окрестности) так, чтобы максимизировать минимальный уровень поля действия $DP(\tau, x)$ в рассматриваемой области (в предположении недопустимости «слипания» источников), что математически может быть формализовано так:

$$\min_{x \in \Omega} DP(\tau, x) \rightarrow \max_{\tau \in \Omega^N}. \quad (4.10.5)$$

Заметим, что целевая функция задачи оптимизации размещения и поля действия источников в непрерывной среде, представленная в [60], является частным случаем задачи (4.10.5), когда $P(\theta, x) = 1 \forall x \in \Omega$.

Также, в отличие от математической модели, предложенной в [60], где в качестве функции влияния одного источника выступает степенная функция

вида $d_i (\|x - \tau_i\|) = \frac{1}{\|x - \tau_i\|^\gamma}$ ($\gamma = 2$), здесь рассматривается такая функция:

$$d_i (\|x - \tau_i\|) = Q \exp(-\alpha \|x - \tau_i\|^2), \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.10.6)$$

где Q – максимальная интенсивность источника, α – параметр функции, который определяет «ширину» влияния соответствующего источника. Не умаляя общности, будем предполагать, что все источники излучения одинаковы, то есть имеют одну и ту же интенсивность и «широту» влияния. На рис. 4.41, 4.42 изображены поверхности функций (4.10.4) совместного влияния заданного числа источников, размещенных в области $\Omega = \{-2.5 \leq x \leq 2.5; -1.5 \leq y \leq 1.5\}$ при условии, что влияние каждого из них описывается формулой (4.10.6).

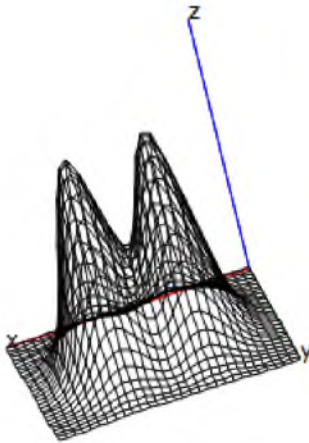


Рис. 4.41. Дозовое поле, образованное двумя источниками:
 $Q = 100, \alpha = 5$

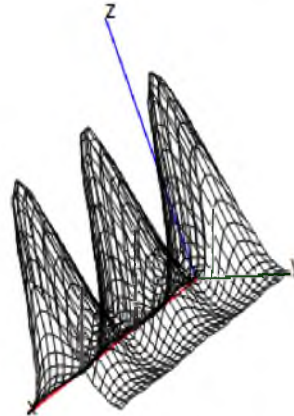


Рис. 4.42. Дозовое поле, образованное тремя источниками:
 $Q = 100, \alpha = 5$

Выбор вида функций влияния источников основан на следующих соображениях. Степенные функции вида $d_i(\|x - \tau_i\|) = \frac{1}{\|x - \tau_i\|^\gamma}$, $\gamma > 0$, удовлетворяющие условию $d_i(+0) = \infty$, обладают «неприятной» с вычислительной точки зрения особенностью, обуславливая необходимость «выкалывания» точек $x = \tau_i$ при вычислении значения функции (4.10.4) и ее производных при реализации тех или иных алгоритмов решения задачи. Такой выбор функций влияния затрудняет или делает невозможным применение к решению данной задачи численных методов максимизации, которые хорошо зарекомендовали себя даже при решении задач недифференцируемой оптимизации, и сходимость кото-

рых теоретически обоснована. Функции вида (4.10.6) лишены указанного недостатка. Аналогичные соображения были приняты во внимание при выборе вида функций поражения (4.10.1). Предполагается, что параметры функций влияния источников и функций поражения могут быть определены экспериментально.

Методы решения

Для решения данной задачи были применены два метода: приближенный эвристический алгоритм, предложенный в [60], и метод обобщенного градиентного спуска (в данном случае подъема) с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных значений градиента (τ -алгоритм Шора).

Идея приближенного алгоритма Клеппера базируется на предположении, что оптимальное размещение источников достигается тогда и только тогда, когда все локальные минимумы совокупного поля действия равны между собой, такое размещение существует и является единственным (с точностью до нумерации источников). Для численного решения задачи сначала производится дискретизация области.

Следующие эвристики лежат в основе итеративного алгоритма Клеппера [60]. Если при некотором размещении источников $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ функция (4.10.4) достигает своего глобального минимума в точке $x = z$, и τ_j является ближайшим (или одним из ближайших) к точке z источником, то, смещая τ_j в направлении точки z (по радиальному направлению $\bar{\tau}_j \bar{z}$) на некоторое достаточно малое расстояние l , можно заведомо увеличить значение минимума (4.10.4). На каждом шаге алгоритма все источники сдвигаются на определенную величину $l > 0$ в направлении к точкам глобальных минимумов функции (4.10.4), постепенно уменьшая шаг сдвига по определенному правилу ($l := ql, 0 < q < 1$). Итерационный процесс завершается, если или все локальные минимумы сетки с некоторой точностью $\varepsilon > 0$ являются глобальными, или шаг смещения становится меньше, чем заданный минимальный шаг.

Далее представим алгоритм решения задачи (4.10.5), в основе которого лежит метод обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных субградиентов.

Алгоритм

Инициализация. Задаем количество источников N и их начальные координаты $\tau^{(0)} \in \Omega$. Область покрываем регулярной сеткой. Далее сеточную область будем обозначать $\bar{\Omega}$.

Вычисляем по заданным начальным координатам источников величину целевой функции $I(\tau^{(0)}) = \min_{x \in \bar{\Omega}} DP(\tau^{(0)}, x)$ по формуле (4.10.4). С помощью конечно-разностных формул вычисляем компоненты вектора субградиента $g(\tau^{(0)})$ целевой функции I в точке $\tau^{(0)}$.

Выбираем начальный пробный шаг τ -алгоритма ($h_0 > 0$).

Первый шаг.

Вычисляем $\tau^{(1)}$ по формуле:

$$\tau^{(1)} = \tau^{(0)} + h_0 g(\tau^{(0)}).$$

Переходим ко второму шагу.

Предположим, что в результате работы алгоритма после $m = 1, 2, 3, \dots$ шагов найдены следующие координаты источников: $\tau^{(m)} = (\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)})$. Опишем $(m+1)$ -й шаг алгоритма.

$(m+1)$ -й шаг.

1. Для набора центров $\tau^{(m)} = (\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)})$ вычисляем значение функции $I(\tau^{(m)}) = \min_{x \in \bar{\Omega}} DP(\tau^{(m)}, x)$ по формуле (4.10.4).
2. Вычисляем приближенно значения всех компонент вектора субградиента $g(\tau^{(m)})$ целевой функции I при $\tau = \tau^{(m)}$.
3. Проводим $(m+1)$ -й шаг τ -алгоритма в Н-форме, итерационная формула которого имеет вид:

$$\tau^{(m+1)} = \tau^{(m)} + h_m \frac{H_{m+1} g(\tau^{(m)})}{\sqrt{H_{m+1} g(\tau^{(m)}), g(\tau^{(m)})}},$$

где H_{m+1} – матрица растяжения пространства с коэффициентом σ (его целесообразно задавать равным 3) в направлении разности двух последовательных субградиентов, которая пересчитывается по формуле:

$$H_{m+1} = H_m + \left(\frac{1}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{H_m \xi_m \xi_m^T H_m}{(H_m \xi_m, \xi_m)},$$

где $H_0 = E$, $\xi_m = g(\tau^{(m)}) - g(\tau^{(m-1)})$.

Если в результате округлений при вычислениях матрица H_{m+1} перестает быть положительно определенной, то она заменяется единичной матрицей соответствующей размерности.

Шаг h_m выбираем из условия:

$$\max_{h>0} DP \left(\tau^{(m)} + h \frac{H_{m+1} g(\tau^{(m)})}{\sqrt{H_{m+1} g(\tau^{(m)})}, g(\tau^{(m)})} \right).$$

4. Если условие

$$\|\tau^{(m+1)} - \tau^{(m)}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (4.10.7)$$

не выполняется, то совершаем переход на $(m+2)$ -й шаг алгоритма, иначе – переход на шаг 5.

5. *Окончание итерационного процесса.* Наилучшим размещением источников считаем $\tau^* = \tau^{(k)}$, где k – номер итерации, на которой выполнилось условие (4.10.7).

Конец алгоритма.

Результаты вычислительных экспериментов

Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов на примере области поражения, имеющей форму эллипса. Рассмотрим вначале случай равномерного «спроса» на дозу влияния в области поражения, то есть примем степень поражения каждой клетки одинаковой и равной единице. На рис. 4.43, 4.44 и 4.45 приведены примеры работы описанных выше алгоритмов для 3, 4 и 6 источников излучения соответственно. Звездочкой отмечены источники, составляющих оптимальное решение задачи, найденное с помощью g -алгоритма, а эллипсом – оптимальное размещение источников, полученное с помощью приближенного алгоритма Клеппера. Отметим, что здесь и в следующих примерах начальное приближение центров, а также погрешность, которая допускается при нахождении координат источников, одни и те же для обоих алгоритмов. В указанных примерах, а также в приведенных ниже, предполагается, что источники излучения являются идентичными и их функции влияния задаются формулой (4.10.6), где $Q_i = 100$, $\sigma_i = 2$, $i = \overline{1, N}$. Параметры алгоритма Клеппера: $l = 0.8$, $q = 0.9$, $l_{\min} = 0.015$, $\varepsilon = 0.01$, $h_x = h_y = 0.05$. Параметры g -алгоритма: $h_0 = 1$, $\sigma = 3$, $\varepsilon = 0.001$, $h_x = h_y = 0.05$.

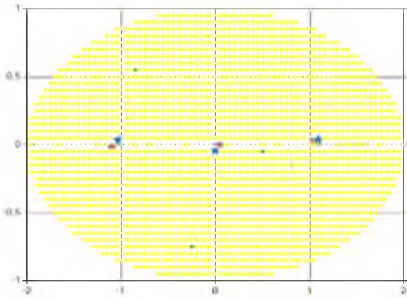


Рис. 4.43. Оптимальное размещение трех источников в области с равномерным «спросом»

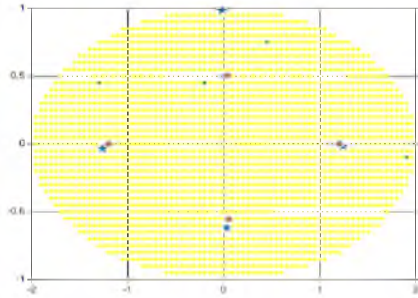


Рис. 4.44. Оптимальное размещение четырех источников в области с равномерным «спросом»

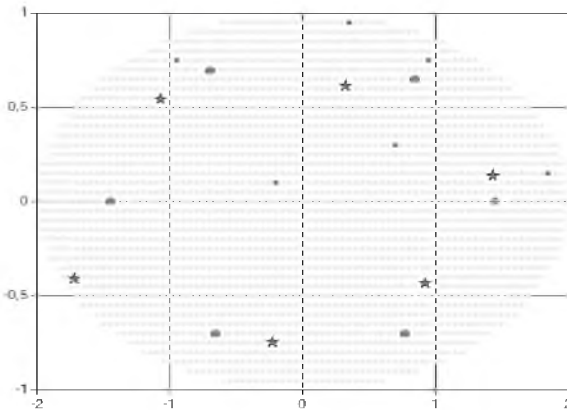


Рис. 4.45. Оптимальное размещение шести источников в области с равномерным «спросом»

В таблице 4.7 для сравнения приведены лучшие значения целевых функций для задач с равномерным "спросом" на дозу излучения, полученные двумя алгоритмами. Как можно видеть на рис. 4.43 – 4.45, в силу того, что область, в которой размещаются источники, симметрична и "однородна" (в том смысле, что "спрос" на дозы облучения является одинаковым для всех точек области), оптимальное размещение радиационных источников часто симметрично (этот факт отмечен и в [60]). Тем не менее, как показано на рис. 4.44, 4.45, алгоритм позволяет найти оптимальное решение, которое не обладает свойством симметрии, но вместе с тем, обеспечивает размещение источников с лучшим (в соответствии с критерием (4.10.5)) дозовым полем (см таблицу 4.7).

Таблица 4.7

Результаты работы алгоритмов для области с равномерным «спросом»

Количество источников	Оптимальное значение целевой функции, полученное с помощью	
	γ -алгоритма	алгоритма Клеппера
2	21.03	21.05
3	51.52	49.871
4	91.269	89.023
5	123.245	97.055
6	171.46	157.63

Сравнивая результаты, приведенные в табл. 4.7, можно сделать вывод, что в области с равномерным "спросом" на дозовое поле оба алгоритма дают почти одинаковые результаты. Но при увеличении числа источников, γ -алгоритм позволяет отыскать такое их расположение, при котором достигается более высокое значение целевой функции. Кроме того, γ -алгоритм значительно быстрее, чем алгоритм Клеппера. На рис. 4.46, б, 4.47 и 4.48 приведены размещения 5, 4 и 5 соответственно источников излучения в невыпуклых областях с «неравномерным» спросом на дозовое поле, также найденные вышеописанными алгоритмами. Чем темнее цвет точки, тем большей является степень повреждения тканей в ней и, соответственно, выше "спрос" на дозу облучения. Для сравнения, на рис. 4.46, а представлено оптимальное расположение источников в области с единичным "спросом" для всего региона.

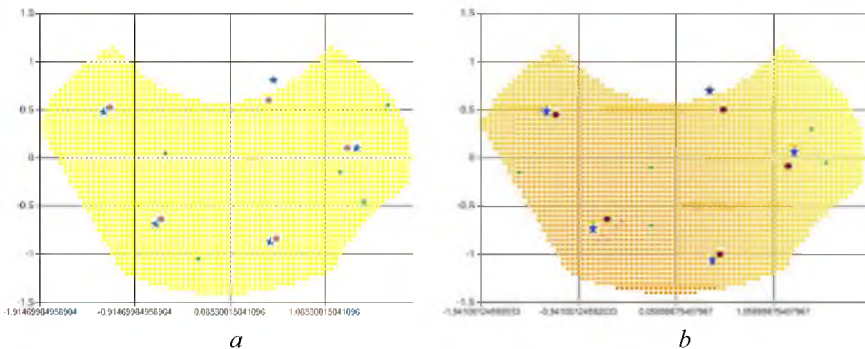


Рис. 4.46. Оптимальное размещение 5 источников в области с равномерным (а) и неравномерным (б) «спросом»

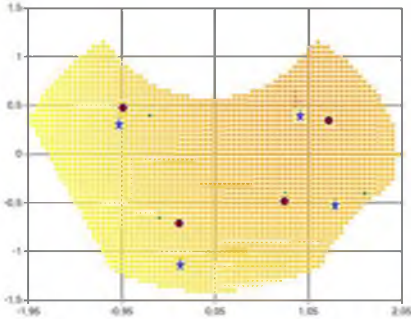


Рис. 4.47. Оптимальное размещение 4 источников в области с неравномерным спросом

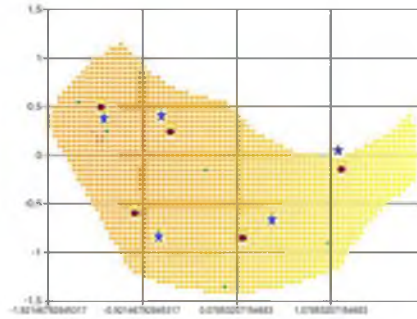


Рис. 4.48. Оптимальное размещение 5 источников в области с неравномерным спросом

Наилучшие значения целевых функций, полученные с помощью алгоритма Клепшера и γ -алгоритма, приведены в табл. 4.8.

Таблица 4.8

Результаты работы алгоритмов для области с неравномерным «спросом»

Номер теста	Рисунок с оптимальным размещением источников	Оптимальное значение целевой функции (γ -алгоритм)	Оптимальное значение целевой функции (алгоритм Клепшера)
1	Рис. 4.46 a	120.627	99.529
2	Рис. 4.46 b	1.085	0.867
3	Рис. 4.47	0.638	0.562
4	Рис. 4.48	1.159	0.998

В таблице 4.8 приведены минимумы взвешенной максимальной общей дозы излучения – величина дозового поля в точке, разделенная на уровень поражения ткани в этой точке. Это объясняет отличие в сотни раз значений функции теста 1 от остальных.

Вычислительные эксперименты позволили сделать несколько выводов:

1) измельчение пространственной сетки для обоих алгоритмов значительно увеличивает время, в течение которого может быть найдено оптимальное решение задачи размещения источников;

2) оба алгоритма чувствительны к выбору начального приближения координат размещаемых источников излучения, и могут привести только к локальному решению задачи;

3) если область, в которой размещаются источники, обладает свойством симметрии и однородности, оптимальное расположение источников может также быть симметричным.

Результаты работы алгоритма, основанного на субградиентном методе, зависят также от размера шага для численного дифференцирования в оценке компонент обобщенного градиента. Для того чтобы избавиться от этого недостатка, можно создать версию алгоритма с элементами теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств, а именно, в расчете компонент обобщенного градиента целевой функции (4.10.4) использовать диаграммы Вороного, построенные с использованием методов ОРМ (см. параграф 4.1).

Выводы к главе 4

Представлены различные приложения методов и алгоритмов оптимального разбиения множеств к решению различных задач теории и практики.

Продемонстрирована работа алгоритма **2.1** и его частных случаев для построения классической диаграммы Вороного и ее различных модификаций. Показана возможность генерирования новых, неизвестных ранее, обобщений диаграмм Вороного.

Из широкого круга теоретических задач, сводящихся к непрерывным задачам ОРМ, здесь выделены и изучены задачи построения оптимальных квадратур, поиска глобального минимума функции, обобщенная задача Неймана-Пирсона, модельные нелинейные и динамические задачи оптимального разбиения множеств. Также рассмотрены некоторые обратные задачи для параболических систем, практическими приложениями которых являются задачи идентификации параметров процессов теплопроводности и диффузии. Представлены задачи идентификации многозонных динамических систем, которые могут описывать работу энергоемких технических систем

Предложенная математическая модель оптимизации местоположения и поля действия конечного числа источников излучения в контексте лучевой терапии в дальнейшем может быть обобщена на случай, когда определению подлежат не только координаты источников излучения, но и другие параметры, такие как, продолжительность, форма, интенсивность излучения и т.п. Данная модель может быть также обобщена на случай учета динамики процесса облучения, присоединив к ней дифференциальное уравнение, описывающее изменение объема опухоли (раковых клеток) во время лучевой терапии. В этом случае могут быть полезными методы решения динамических задач оптимального разбиения множеств [42, 50, 53, 54].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлены непрерывные задачи оптимального разбиения множеств. Будучи по своей природе задачами бесконечномерного математического программирования, они в процессе решения, сводятся определенным образом, к вспомогательным конечномерным негладким оптимизационным задачам или к задачам максимина, тем самым выступая источником, порождающим задачи недифференцируемой оптимизации. В этой связи ядром алгоритмического аппарата решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств являются методы обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных субградиентов – γ -алгоритм Шора и различные его модификации.

Теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств является активно развивающимся направлением современной теории оптимизации. За пределами данной монографии осталась, например, такая большая ее ветвь, как задачи оптимального разбиения множеств в условиях неопределенности [55 – 57]. Для снятия неопределенности в таких задачах может применяться математический аппарат стохастического бесконечномерного математического программирования (если часть исходной информации имеет вероятностный характер) или аппараты нечётких множеств и нечёткой логики (если параметры, входящие в описание моделей, являются нечёткими, неточными, недостоверными и т. д.).

Центральным этапом в математическом обосновании описанных методов ОРМ является формулирование необходимых условий оптимальности, на которых основывается разработка численных алгоритмов решения задач ОРМ. В каждом из рассмотренных типов задач ОРМ такие условия получены с использованием своего теоретического аппарата, в зависимости от специфики данной конкретной задачи. В настоящее время ведутся исследования, направленные на создание единой теоретической базы для построения общих необходимых и достаточных условий оптимальности для широкого класса задач ОРМ, на основе аппарата теории функций множеств.

Спектр практических приложений теории и методов оптимального разбиения множеств также широк и не ограничивается лишь теми задачами, которые рассмотрены в данной монографии. Актуальным направлением научных исследований, связанных с развитием и приложениями моделей и методов оптимального разбиения множеств, является идентификация многозонных динамических систем, а также системный анализ и идентификация многокомпонентных распределенных систем [58, 65, 80, 142]. Поскольку такие задачи от-

носятся к классу обратных задач для динамических систем, при разработки алгоритмов их решения возникают вопросы, связанные с корректностью математической постановки, с устойчивостью вычислительных процессов и др.

В настоящее время ведутся активные исследования по вопросам применения методов ОРМ для решения задач распознавания образов, сегментации изображений, классификации и кластеризации, задач размещения объектов инфраструктуры в условиях неопределенности и др.

Созданная теория и алгоритмический аппарат могут быть применены для решения практических задач медицинской диагностики, территориального планирования сфер обслуживания, геологического прогнозирования; задач охраны окружающей среды. Примером последней является задача обеспечения экологической безопасности при размещении отстойников радиоактивных отходов атомных электростанций с учетом экологической структуры региона. К непрерывным задачам оптимального разбиения или покрытия множеств сводятся задачи размещения предприятий, станций скорой помощи, базовых станций сотовой связи, нефтяных скважин; бесконечномерные транспортные задачи и задачи размещения предприятий; задачи проектирования сетей из искусственных спутников земли для контроля диапазона круговых орбит; развития агропромышленного комплекса и многие другие.

Все вышесказанное является еще одним подтверждением значительности творческого наследия Н.З. Шора и его учеников, связанного с разработкой эффективных методов недифференцируемой оптимизации и их применением к различным многоэкстремальным задачам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимова И. Я. Взвешенные разбиения Вороного / И.Я. Акимова, А.П. Акимов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1988. – № 3. – С. 186 – 190
2. Акимова И. Я. Задача оптимального размещения и обобщения одной теоремы Фейеша Тота // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1982. – № 2. – С. 224 – 228.
3. Акимова И. Я. Применение диаграмм Вороного в комбинаторных задачах. (Обзор) // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1984. – № 2. – С. 102 – 109.
4. Алифанов О. М. Идентификация математических моделей сложного теплообмена / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, А. В. Ненарокомов // М: Изд. МАИ, 1999. – 252 с.
5. Алифанов О. М. Обратные задачи как методологическая основа идентификации тепловых математических моделей // Тр. IV Междунар. форума по теплообмену. – Минск, 22–26 мая 2000. – Т. 3. – С. 3–13.
6. Антошкин А.А. Математическая модель задачи покрытия выпуклой многоугольной области кругами с учетом погрешностей исходных данных / А. А. Антошкин, Т. Е. Романова // Пробл. Машиностроения. – 2002. – 5, №1. – С.55 – 60.
7. Астраков С.Н. Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяженных объектов / С. Н. Астраков, А. И. Ерзин // Вычислительные технологии, 2012. – Т. 17, № 1. – С. 26 – 34.
8. Астраков С.Н. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами / С. Н. Астраков, А. И. Ерзин, В. В. Залобовский // Дискретный анализ и исследование операций, 2009. – Т. 16, № 3. – С. 3 – 19.
9. Бабков В. Ю., Вознюк М. А. , Михайлов П. А. Сети мобильной связи. Частотно-территориальное планирование. 2-е издание. ISBN : 5-93517-263-1. – М.: Горячая Линия – Телеком, 2007. - 226 с.
10. Береснев А.В. Алгоритм локализации абонентской нагрузки в пространстве и времени в сотовых системах подвижной радиосвязи стандарта GSM. //Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. Журнал радиоэлектроники. 2002, № 11.
11. Бессонов А. Н. Методы и средства идентификации динамических объектов / А. Н. Бессонов, Ю. В. Загашвили, А. С. Маркелов // Л.: Энергоатомиздат, 1989. Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 472 с.

12. Браун Р. Исследование операций. В 2 т. / Браун Р., Мюзон Р., Фламгольц Э. и др. // М.: Мир, 1981.
13. Брусов В. С. Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости / В. С. Брусов, С. А. Пивяский // Журн. Вычисл. математики и мат. физики. – 1971. – 11, № 2. – С. 304–312.
14. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
15. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.
16. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
17. Вершик А.М. Несколько замечаний о бесконечномерных задачах линейного программирования // УМФ. - 1970. - Т. 25. - № 5. - С. 117-124.
18. Вишневецкий В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. – М.: Техносфера, 2003.
19. Вороной Г.Ф. Собр.соч. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. – Т.2.
20. Галенко С.В. Использование гибридных алгоритмов для решения задач оптимального расположения базовых станций при проектировании беспроводных сетей передачи данных//Институт проблем передачи информации РАН:<http://www.masters.donntu.edu.ua/2007/kita/bukiy/library/13.htm>
21. Галиев Ш. И. Оптимизация многократного покрытия ограниченного множества кругами / Ш. И. Галиев, М. А. Карпова. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2010. – Т. 50, № 4. – С. 757–769.
22. Галиев Ш.И. Направления убывания для минимаксиминных задач / Ш. И. Галиев // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1994. – Т. 34. – № 3. – С. 323–343.
23. Гольштейн Е.Г. Задачи линейного программирования транспортного типа / Д.Б. Юдин // М.: Наука, 1969. - 324 с.
24. Горячко Е.А. Математическое моделирование в задачах оптимального размещения базовых станций при проектировании сетей беспроводной связи / Горячко Е.А., Ус С.А. // Науковий вісник НГУ 2008, № 5, стор.6-9.
25. Демьянов В. Ф. Недифференцируемая оптимизация / В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
26. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач: Учеб. Пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.

27. Егоров А. И. Математические методы оптимизации процессов теплопроводности и диффузии / А. И. Егоров, Р. Р. Рафатов // Ф.: Илим. – 1990. – 336 с.
28. Еремин И.И. Стандартные итерационные процессы для негладких задач выпуклого программирования // Сб. "Methods of Mathematical Programming". Варшава. – 1981. – 18 с.
29. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит, 1976. – 240 с.
30. Журбенко Н.Г. Построение семейства методов сопряженных направлений на основе использования оператора растяжения пространства // Теория и приложения методов оптимизации. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 1998. – С. 12–18.
31. Жилинскас А.Г. Поиск оптимума: компьютер расширяет возможности / Жилинскас А.Г., Шалтянис В.Р. – М.: Наука, 1989. – 128 с.
32. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
33. Кадочнікова Я.Є. Методи та алгоритми розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин з обмеженнями: автореф. дис...к.ф. – м.н.: 01.05.01. – Д., 2010 – 19 с.
34. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
35. Киселева Е. М. Алгоритм решения нелинейной непрерывной многопродуктовой задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств / Е. М. Киселева, В. А. Строева // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 1. – С. 40–53.
36. Киселева Е. М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: монография / Е. М. Киселева, Н. З. Шор. – К.: Наукова думка, 2005. – 564 с.
37. Киселева Е. М. Решение непрерывной нелинейной задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств для случая выпуклого функционала / Е.М. Киселева, М.С. Дунайчук // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 2. – С. 134–152
38. Киселева Е. М. Конструктивные алгоритмы решения непрерывных задач многократного покрытия / Киселева Е. М., Коряшкина Л. С., Михалева А. А. // Системные технологии, 2014. – С. 3 – 14.
39. Киселева Е.М. Алгоритм решения задачи оптимального разбиения с ограничениями // Кибернетика. – 1983. – № 1. – С. 115 – 120.

40. Киселева Е.М. Исследование алгоритма решения одного класса непрерывных задач разбиения / Е. М. Киселева, Н. З. Шор // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – №1. – С. 84 – 96.
41. Киселева Е.М. Математические методы и алгоритмы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств и их приложения: Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.01.09 / Днепропетровский гос. ун-т. – Дн-ск, 1991. – 383 с.
42. Киселева Е.М. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи: монография / Е. М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К.: Наукова думка, 2013. – 606 с.
43. Коряшкина Л. С. Применение методов оптимального разбиения множеств к непрерывным задачам многократного покрытия / Коряшкина Л. С., Михалева А. А., Навоенко В.И. // Питання прикладної математики і математичного моделювання. Збірн. Наук. Праць. – 2014. – С. 141 – 154.
44. Киселева Е.М. Непрерывная задача многократного шарового покрытия с ограничениями и метод ее решения / Киселева Е.М., Коряшкина Л.С., Михалева А. А. // Системні технології. Дніпропетровськ. – 2015. – №1. – С. 165 – 179.
45. Киселева Е.М. Решение непрерывной однопродуктовой задачи оптимального разбиения с дополнительными ограничениями / Е. М. Киселева, Я. Е. Кадочникова // Проблемы управления и информатики. – 2009. – №4. – С. 47 – 61.
46. Киселева Е.М. Решение непрерывных задач оптимального покрытия шарами с использованием теории оптимального разбиения множеств / Е. М. Киселева, Л. И. Лозовская, Е. В. Тимошенко // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 98–117
47. Киселева Е.М. Решение обобщенной задачи Неймана-Пирсона с использованием методов оптимального разбиения множеств // ЖВМ и МФ, Т. 31. – 1992. – № 1. – С. 26 – 32.
48. Киселева Е.М. Решение одной задачи оптимального разбиения с размещением центров тяжести подмножеств // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1989. – Т. 29. – № 25. – С. 709 – 722.
49. Киселева Е.М., Гордиенко Л.И. Об оценках погрешности в алгоритмах оптимального разбиения // Решение прикладных задач математической физики и дискретной математики. - Днепропетровск: ДГУ, 1976. – С. 255 – 261.

50. Киселева Е.М. О решении и свойствах простейшей динамической задачи оптимального разбиения множеств / Киселева Е.М., Коряшкина Л.С. // Проблемы управления и информатики. – 2013 – № 3 – С. 102 – 112
51. Киселева Е.М. Теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств как универсальный математический аппарат построения диаграммы Вороного и ее обобщений. Часть 1. Теоретические основы / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 51. – № 3. – С. 3 – 15 с.
52. Киселева Е.М. Теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств как универсальный математический аппарат построения диаграммы Вороного и ее обобщений. Часть 2. Алгоритмы построения диаграмм Вороного на основе теории оптимального разбиения множеств / Киселева Е.М., Коряшкина Л.С. // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 51. – № 4. – С. 3 – 14.
53. Киселева Е.М. О решении динамической задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств / Киселева Е.М., Коряшкина Л.С., Шевченко Т.А. // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 6. – С. 29 – 40.
54. Киселева Е.М. О динамической задаче оптимального разбиения множеств с интегральными ограничениями / Киселева Е.М., Коряшкина Л.С., Шевченко Т.А. // Проблемы управления и информатики. – 2013. – №4. – С. 33 – 44
55. Киселева Е.М. О решении непрерывной стохастической задачи оптимального разбиения множеств с восстановлением функционала / Киселева Е.М., Кузнецов К.А. // Проблемы управления и информатики, 1997. – № 6. – С. 81 – 88.
56. Киселева Е.М. Приближенный метод решения одной непрерывной задачи оптимального разбиения в условиях риска / Киселева Е.М., Лозовская Л.И. // Деп. В РГАСНТИ 17.03.94. – № 8550417.
57. Киселева Е.М. Решение задачи оптимального разбиения множеств с нечеткими ограничениями / Киселева Е.М., Ус С.А. // Вопр. прикл. матем. и матем. моделирования. – Дн-ск, ДГУ. – 1991. – С. 18 – 22.
58. Кисельова О. М. Ідентифікація динамічної системи з декількома режимами функціонування / О. М. Кисельова, Л. С. Коряшкіна, О. В. Правдивий // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2011. – С. 141 – 150.
59. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Мир, 1973. – 472 с.

60. Клеппер Л.Я. Оптимизация поля действия конечного числа источников в непрерывной среде // Экономика и математические методы. – 2009. – № 2. – С. 113 – 119.
61. Коряшкіна Л. С. Чисельний алгоритм розв'язання неперервної динамічної задачі оптимального розбиття множин з квадратичним функціоналом / Коряшкіна Л. С., Череватенко А.П., Зайченко О.В. // Питання прикладної математики і математичного моделювання. Збірн. наук. праць. Дніпропетровськ, 2014. – С. 155 – 166.
62. Коряшкіна Л. С. Методы оптимального разбиения множеств для некоторых задач управления с квадратичным функционалом // Проблемы управления и информатики. – 1997. – №5. – С. 39–49.
63. Коряшкіна Л. С. Решение одной задачи управления параболической системой // Проблемы управления и информатики. – 1998. – №2. – С.94 – 101.
64. Коряшкіна Л. С. Об алгоритмах решения задачи оптимизации размещения и поля действия конечного числа источников в непрерывной среде / Коряшкіна Л. С., Блосс О. Б., Гранкина Н. // Питання прикладної математики і математичного моделювання. Збірн. Наук. Праць. Дніпропетровськ., 2014. – С. 10 – 21.
65. Коряшкіна Л.С. Задача параметричної ідентифікації багатозонних динамічних систем / Коряшкіна Л.С., Череватенко А.П. // Системные технологии. – 2015. – № 4 (99). – С. 88 – 101.
66. Коряшкіна Л. С. Методи оптимального розбиття множин у керуванні розподіленими системами: автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.05.01. – Д., 2000. – 18 с.
67. Кук Ю. В. Об одном обобщении леммы Неймана–Пирсона в теории распознавания сигналов // Кибернетика.–1978.–№ 5 – С. 79–82.
68. Леман Е. Л. Проверка статистических гипотез. – М.: Наука, 1964. – 498 с.
69. Матвейкин В. Г. Теоретические основы энергосберегающего управления динамическими режимами установок производственно – технического назначения: монография. / В. Г. Матвейкин, Д. Ю. Муромцев – М.: "Издательство Машиностроение – 1", 2007. – 128 с.
70. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы: Пер. С фр. И предисловие А.И. Штерна. -М.: Наука. Гл. Ред. физ. - мат. лит., 1990. – 488 с.
71. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – 2-е изд. перераб. и дополн. – М.: Наука, Главная редакция физико – математической литературы, 1983. – 424 с.

72. Михалевиц В.С. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. Модели, методы, алгоритмы / Михалевиц В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. // – М.: Наука, – 1986. – 264 с.
73. Муромцев Ю.Л. Моделирование и оптимизация технических систем при изменении состояний функционирования. / Ю.Л. Муромцев, Л.Н. Ляпин, О.В. Попова. – Воронеж: ВГУ, 1992. – 164 с.
74. Пиявский С. А. Об оптимизации сетей. – Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1968. – № 1. – С. 68–80.
75. Поляк Б.Т. Один общий метод решения экстремальных задач. – Докл. АН СССР, 1967, **174**, №1. – С.33–36.
76. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
77. Препарата Ф. Вычислительная геометрия: Введение. Под редакцией Ю. М. Банковского / Ф. Препарата, М. Шеймос – М.: Мир, 1989. – 478 с.
78. Программно-технический комплекс мониторинга и верификации покрытия сетей широкополосного беспроводного доступа // А.Ю.Савинков, Ю.Н.Прибытков, М.А.Кириченко
79. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применение. – М.: Наука, 1968. – 548 с.
80. Сергиенко И. В. Применение методов оптимального разбиения множеств для решения геометрических обратных задач теплопроводности. / И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека, Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина – Материалы 3-й международной конференции Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии. – Кишинэу, 19 – 23 марта 2012 г. – С. 459–467.
81. Сергиенко И.В. О трех научных идеях Н.З.Шора / Сергиенко И.В., Стецок П.И. // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 1. – С.4–22.
82. Скоков В.А. Замечания к методам минимизации, использующим операцию растяжения пространства // Кибернетика, 1974. – № 4. – С. 115 – 117
83. Стронгин Р. Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. – М.: Наука. – 1978. – 240 с..
84. Соломон Д.И. Дробное программирование и недифференцируемая оптимизация. – Кишинэу, «Эврика». – 2014. – 488 с.
85. Стерлин М.Д. Управление теплофизическими процессами: новые модели и алгоритмы. - СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского гос. техн. ун-та, 1997. - 118 с.

86. Стецок П.И. Методы эллипсоидов и г-алгоритмы. – Кишинэу, «Эврика». – 2014. – 488 с.
87. Сухарев А. Г. Минимаксные алгоритмы в задачах целочисленного анализа. – М.: Наука, 1989. – 364 с.
88. Терехов С. В. Моделирование тепловых и кинетических свойств реальных систем. – Донецк: «Вебер», 2007. – 306 с.
89. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач. / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин– М.: Наука, 1979. – 288 с.
90. Трухаев Р. Н. Теория неклассических вариационных задач / Р. Н. Трухаев, В. В. Хоменюк. – Л.: ЛГУ, 1971. – 168 с.
91. Трухаев Р. Н. Модели принятия решений в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1981. – 257 с.
92. Ус С. А. Решение одного класса бесконечномерных задач оптимизации: автореф. дис. канд. физ. – мат. наук: 01.01.09. – Д., 1992. – 16 с.
93. Ус С. А. Решение задачи оптимального размещения базовых станций при проектировании сетей беспроводной связи / С. А. Ус, Е. А. Горячко // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ : ДНУ, 2009. – С. 359 – 363.
94. Ус С. А. Определение оптимального размещения источников света в производственном помещении / С.А. Ус , В.П. Яценко // Науковий вісник НГУ. – 2009. – № 6. – С. 73 – 76.
95. Ус С.А., І. Репич. Дослідження застосування методу оптимального розбиття множин у задачах розпізнавання образів Питання прикладної математики і математичного моделювання Дніпропетровськ, видавництво ДНУ, 2008. – С. 280 – 286.
96. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М. Наука. – 1978. – 488 с.
97. Федоров В. В. Численные методы максимина. – М.: Наука, 1979. – 280 с.
98. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 225 с.
99. Фридман Р. Уравнения с частными производными параболического типа. - М.: Мир. - 1968. - 427 с.
100. Шор Н. З. Использование методов негладкой оптимизации в задачах стохастического программирования / Н. З. Шор, Т. А. Бардадым, Н. Г. Журбенко, А. П. Лиховид, П. И. Стецок // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – №5. – С. 33–47.

101. Шор Н. З. Использование модификации γ – алгоритма для нахождения минимума полиномиальных функций / Н. З. Шор, П. И. Стецок // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 4. – С. 28–49.
102. Шор Н. З. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация / Н.З. Шор, С.И. Степенко. – К.: Наукова думка, 1989. – 208 с.
103. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение. – К.: Наук. думка, 1979. – 200 с.
104. Шор Н.З. Монотонные модификации γ -алгоритмов и их приложения // Кибернетика и систем. анализ. – 2002. – N 6. – С. 74–95.
105. Шор Н.З. Развитие алгоритмов недифференцируемой оптимизации и их приложения / Шор Н.З., Журбенко Н.Г., Лиховид А.П., Стецок П.И. // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 4. – С. 80-94
106. Экланд И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы: Пер. С англ. / И. Экланд, Р. Темам – М.: Мир, 1979. – 399 с.
107. Юдин Д.Б. Задачи и методы стохастического программирования. – М.: Советское радио, 1979. – 392 с.
108. Юдин Д.Б., Немировский А.С. Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач / Юдин Д.Б., Немировский А.С. // Экономика и мат. методы. – 1976. – Вып.2. – С. 357–359.
109. Alfred H. Thiessen. Precipitation averages for large areas. Monthly Weather Review. – 1911. – 39(7). – P. 1082–1084.
110. Atamtürk A., Nemhauser G.L., Savelsbergh M.W.P. A Combined Lagrangian, Linear Programming and Implication Heuristic for Large-Scale Set Partitioning Problems // Journal of Heuristics. - V. 1. - 1995. - P. 247-259.
111. Aurenhammer Franz. Voronoi Diagrams: A Survey of a Fundamental Geometric Data Structure / Aurenhammer Franz, Klein Rolf. // ACM Computing Surveys 23(3) (1991). – P. 345 – 405.
112. Bachem A., Grotscchel M., Korte B. (eds). Mathematical Programming: The State of Art, Bonn, 1982. – Springer-Verlag. 1983. – 655 p.
113. Bakolas E. The Zermelo – Voronoi Diagram: a Dynamic Partition Problem. / E. Bakolas, P. Tsiotras // Automatica. –2010. – V. 46, Issue 12. – P. 2059 – 2067
114. Balas E. Set partitioning: a survey / E. Balas, M.W. Padberg // Comb. Optimiz. Lect. summer Sch. Comb. Optimiz. urbano, 1977. Chichester e.a. 1979. – P. 151– 210.

115. Baldacci R., Christofides N., Mingozzi A. An exact algorithm for the vehicle routing problem based on a set partitioning formulation with additional cuts. *Mathematical Programming*. – 2008. – Vol. 115. – № 2. – P. 351 – 385.
116. Baldacci R., Hadjiconstantinou E., Maniezzo V., Mingozzi A. A new method for solving capacitated location problem based on a set partitioning approach. *Computers and Operations Research*. – 2002. – Vol. 29. – P. 365 – 386.
117. Balinski M.L., Wolfe P. (eds). *Nondifferentiable optimization*. *Math. Programming Study*, 3. – North-Holland, Amsterdam, 1975. – 178 p.
118. Balzer Michael. Capacity – Constrained Voronoi Diagrams in Continuous Spaces. / Balzer Michael // *The International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering*. – 2009. – 10 p.
119. Beasley J.E. An algorithm for set covering problem // *Europ. J. Oper. Res.* - V. 31. - 1987. - P. 85-93.
120. Bomford C.K., Kunkler I.K. (2002) *Walter and Miller's Textbook of Radiotherapy: Radiation Physics, Therapy and Oncology*. 6th Ed. Churchill Livingstone/Elsevier Science Ltd., Edinburgh: 687 p.
121. Bollabas B. The optimal arrangement of producers // *J. London Math. Soc.* – 1973. – V. 6. – № 4. – P. 605 – 613.
122. Brimberg J., Hansen P., Mladenovic N., Salhi S. A Survey of Solution Methods for the Continuous Location-Allocation Problem. *International Journal of Operation Research*, 2008. – Vol. 5.– № 1. – P. 1 – 12.
123. Censor Y. *Mathematical Aspects of Radiation Therapy Treatment Planning: Continuous Inversion Versus Full Discretization and Optimization Versus Feasibility* // *Computational Radiology and Imaging: Therapy and Diagnosis, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, 1999. – Vol. 110, Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1999. – P. 101 – 112.
124. Y. Censor and J. Unkelbach. From analytic inversion to contemporary IMRT optimization: Radiation therapy planning revisited from a mathematical perspective // *Physica Medica: European Journal of Medical Physics*, 2012. – Vol. 28. – P. 109 – 118.
125. Christoph Börgers. The Radiation therapy planning problem // *Computational Radiology and Imaging. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, 1999. – Vol 110. – P. 1 – 16.
126. Corley H. W. A partitioning problem with applications in regional design / H. W. Corley, S. D. Roberts. – *Operat. Res.* – 1972. – 20, N 5. – P. 1010–1019.
127. Danzig G. On the fundamental lemma of Neyman and Pearson / G. Danzig, A. Wald // *Ann. Math. Stat.* – 1951. – 22. – P. 87–93.

128. Drezner Z., Hamacher. H. Facility Location: Application and Theory. Berlin: Springer. – 2001.
129. Farahani R. Z. Facility location. Concepts, models, algorithms and case studies. Springer – Verlag. / R.Z. Farahani , M. Hekmatfar (eds.). – Berlin, Heidelberg. – 2009. – 530 p.
130. Freidman M. On the analysis and solution of certain geographical optimal covering problems // *Comput. and Oper. Res.* - 1976. - V.3. - № 4. - P. 283 – 294.
131. Garfinkel R. S. The set partioting problem: set covering with Equality Constaints / M. L. Fisher, P. Kedia // *Oper. Res.* – 1969. – 17. – P. 848–856.
132. Hansen E, Roach M. Handbook of Evidence-Based Radiation Oncology. – 2010. – 2nd ed. Springer, New York. – 786 pp
133. Harche F., Thompson G.L. The Column Subtraction Algorithm: An Exact Method for Solving Weighted Set Covering, Parking and Set Partitioning Problems // *Computers and Operations Research.* - V. 21. - 1994. - P. 689-705.
134. Hugo Ledoux. Gold Modelling Three – dimensional Geoscientific Fields with the Voronoi Diagram and its Dual International Journal of Geographical Information Science / Hugo Ledoux, Christopher M. // vol. 22(5):547 – 574.
135. Jandl H. A continuous Set Covering Problemas a Quasidifferentiable Optimization Problem / H. Jandl, K. Wieder. – *Optimization* 19. – (1988)6. – P. 781–802.
136. Jooyandeh Mohammadreza, Mohades Ali, Mirzakhah Maryam. Uncertain Voronoi Diagram // *Information Processing Letters (Elsevier)* 109 (13), 2009. – P. 709 – 712.
137. Juel H., Love R. A localization property for facility-location problems with arbitrary norms// *Nav. Res. Log.* - 1988. - V.35. - №2. - P.203-207.
138. Kikuo Fujita. Voronoi diagram based cumulative approximation for engineering optimization / Kikuo Fujita, Noriyasu Hirokawa and Tomoya Tachikawa. // Department of Computer-Controlled Mechanical Systems, Graduate School of Engineering, Osaka University, Suita, Osaka 565-0871, Japan, AIAA – 2000 – 4919, pp. 1 – 11 (2000).
139. Kiseleva E.M. On Continuous Problems of the Optimal Partitioning of Sets with Non – Differentiable Functional / E.M. Kiseleva, L.S. Koryashkina // *Abstracts of U.S. – Ukrainian Workshop “Recent Advances in Non – Differentiable optimization”* – Kyiv, 2000. – P. 20.

140. Klein, R., Concrete and Abstract Voronoi Diagrams, Lect. Notes in Comput. Sci. – 400. – 167 p.
141. Klepper L.Ya. Formation of Optimum Dose Fields in Contact Radiation Therapy of Malignant Tumors. Biomedical Engineering. – 2003. – Vol. 37. – № 2. P. 111 – 117.
142. Koriashkina L.S., Pravdivy A., Cherevatenko A.P. One way to solve problems of multi-zone dynamics models identification. – Power Engineering, Control & Information Technologies in Geotechnical Systems – CRC Press/ Balkema - Taylor & Francis Group. – 2015. – P. 153 – 160
143. Laver M. Endogenous birth and death of political parties in dynamic party competition, in: Seth A., Prescott T., Bryson J. (eds). / M. Laver, E. Sergenti, M. Schilperoord // Modelling natural action selection. Cambridge: Cambridge Univ. Press. – 2010. – 584 p., Ch. 21
144. Lee D.T. Generalization of voronoi diagrams in the plane / D.T. Lee and Robert L. (Scot) Drysdale // SIAM J. Comput., 10: 73–87, 1981.
145. Mifflin R. Semismooth and semiconvex functions in constrained optimization // SIAM J. Control and Optimization. – 1977. – V. 15. – №6. – P. 959–972.
146. Mifflin R. An algorithm for constrained optimization with semismooth functions // RR-77-3, II ASA. – Laxenburg, Austria. – 1977.
147. Neyman J. Contributions to the theory of testing statistical hypotheses 1. Unbiased oritical regions of type A and A-1 / J. Neyman, E. S. Pearson // Stat. Res. Men. – 1936. – 1. – P. 1–37
148. Neyman J. On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses / J. Neyman, E. S. Pearson // Philos. Trans. Roy. Soc. – 1933. – Ser. A. – **231**. – P. 289–337.
149. Nishida T. Stable marker – particle method for the Voronoi diagram in a flow field / T. Nishida, K. Sugihara, and M. Kimura // Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 202, no. 2. – 2007. – P. 377 – 391.
150. Okabe A. Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams / A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, and S. N. Chiu // West Sussex, England: John Wiley and Sons Ltd, second ed., 2000.
151. Pinter J., Pesti G. Set partition by globally optimized cluster seed point // Europ. J. Oper. Res. - V. 51. - 1991. - P.127-135.
152. Raphael C. (1992) Mathematical modelling of objectives in radiation therapy treatment planning // Phys Med Biol., Vol. 37, no 6: 1293 – 1311.

153. Rao C. R. *Advanced Statistical Methods in Biometric Research*. – Wiley: New York, 1952.
154. Tarnai T. Covering a square by equal circles / T. Tarnai, Zs. Gaspar // *Elem. Math.* 1995. – V. 50. – P. 167–170.
155. Trubin Stanislav I. *Information Space Mapping with Adaptive Multiplicatively Weighted Voronoi Diagrams* // Thesis (M.S.) – Oregon State University. – 2007.
156. Walfish J., H. L. Bertoni, “A Theoretical Model of UHF Propagation in Urban Environments”, *IEEE Transactions on antennas and propagation*. Vol. 36. No.12, December 1988.
157. Yoshiaki Ohsawa. A geometrical solution for quadratic bicriteria location models. *European Journal of Operational Research* 114 (1999) – P. 380 – 388.