УДК 519.85

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ МНОГОЭТАПНЫХ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

Ус С.А., Станина О.Д.
ГВУЗ «Национальный горный университет»

Розглянуто багатоетапну задачу розміщення виробництва. Запропоновано нові математичні моделі континуальної двохетапної задачі та підходи до їх розв’язування.

Рассмотрена многоєтапная задача размещения производства. Предложены новые математические модели континуальной двухэтапной задачи и подходы к их решению.

Multi-stage problem of locating production have been considered. The new mathematical models to continual two-stage problem and approaches to their solution was proposed.

Ключевые слова: многоэтапная задача размещения, оптимальное размещение производства

Введение

Значительное число работ в области исследования операций посвящено решению проблемы планировки и расположения объектов. Такие задачи широко распространены на практике, поскольку область, в которой производится размещение, может иметь различную структуру, а термин "объект" может трактоваться достаточно широко.

Все задачи размещения можно разбить на два больших класса: задачи размещения взаимосвязанных объектов и задачи размещения-распределения (задачи размещения предприятий). К первому классу относятся задачи с заранее заданной структурой связей между объектами: задача Вебера, квадратичная задача о назначениях и т.п. В задачах из второго класса отсутствуют связи между размещаемыми объектами-"поставщиками" и производится распределение фиксированных объектов-"клиентов" между ними: задачи о p-медиане и p-центре, простейшая задача размещения и др [2, 6].

Еще один класс образуют многоэтапные задачи размещения. В этих задачах предполагается, что существует несколько групп размещаемых объектов, каждая из которых имеет свое множество возможных мест размещения (в частном случае эти множества могут совпадать) и регламентированы связи между объектами, например задана определенная иерархия между объектами размещения. Данный класс задач является обобщением многоэтапных транспортно-производственных задач, которые последнее время достаточно активно исследуются.

Под многоэтапными производственно-транспортными задачами будем понимать задачи, отображающие последовательные процессы выпуска одного вида продукции, доставки его в пункты переработки в другую продукцию, производства этой продукции и доставки ее конечным потребителям (рис. 1).

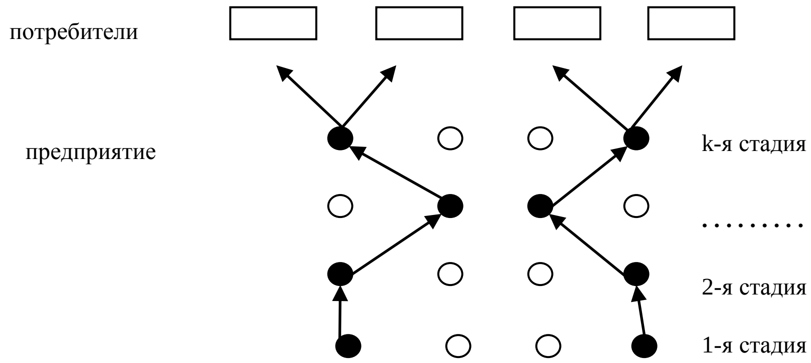

Рис.1 . Задача размещения на цепи

В самых простых постановках таких задач рассматриваются два продукта: “сырье” и “готовый продукт”. Возможно и большее число наименований: “сырье”, “полуфабрикат”, “готовый продукт”. Двухэтапные задачи размещения на цепи исследовались в работах [1, 7,8] .

Однако исследования континуальных многоэтапных задач практически не проводиться. При этом следует заметить, что существует целый ряд областей, где подобный вид задач имеет место быть. Примерами таких задач являются задачи размещения насосных и распределительных станций в зависимости от горизонта воды и места расположения потребителей, размещение рудников и обогатительных фабрик с учетом мощности залегания полезного ископаемого и расположения потребителей и др.

В данной работе предложены математические модели непрерывных двухэтапных задач размещения предприятий (задачи размещения-распредения) в случае когда поставщики и (или) потребители непрерывно заполняют данную область и множество возможных мест размещения предприятий одного или обоих этапов также континуально.

Отличие этой задачи от многоэтапной ЗР в том что предложенные модели позволяют определить не только места расположения предприятий каждого этапа, но и количество продукта, перевозимого от предприятий одного этапа к предприятиям другого этапа и потребителям, при этом связи между предприятиями не являются жестко определенным (отсутствуют наперед заданные цепочки производства). В задачах размещения как правило предполагается, что каждый пункт спроса конечной продукции и каждый пункт производства любого уровня получают продукцию только от одного производителя, при этом предприятие r-го уровня получает продукцию от предприятия $(r+1)$-го уровня, $1 \le r \le p-1$.

Двухэтапная задача размещения-распределения с континульным множеством возможных мест размещения предприятий I этапа

Рассмотрим двухэтапную задачу размещения предприятий при следующих предположениях:

– N предприятий первого этапа могут быть размещены в любой точке области Ω и получают ресурс от поставщиков непрерывно распределенных в ней;

– для предприятий второго этапа задано конечное число возможных мест размещения $J = \left\{\tau_1^{II}, \tau_2^{II}, \dots \tau_M^{II}\right\}$;

– затраты на размещение предприятий обоих этапов постоянны и не зависят от точки размещения;

– расположение потребителей конечного продукта известно.

Необходимо разместить предприятия первого и второго этапов, определить зоны их обслуживания и количество продукта, доставляемого от каждого предприятия первого этапа к предприятиям второго этапа и от предприятий второго этапа потребителям таким образом, чтобы суммарные расходы на доставку продукции были минимальны.

Схематически эту задачу можно изобразить как показано на рис.1.

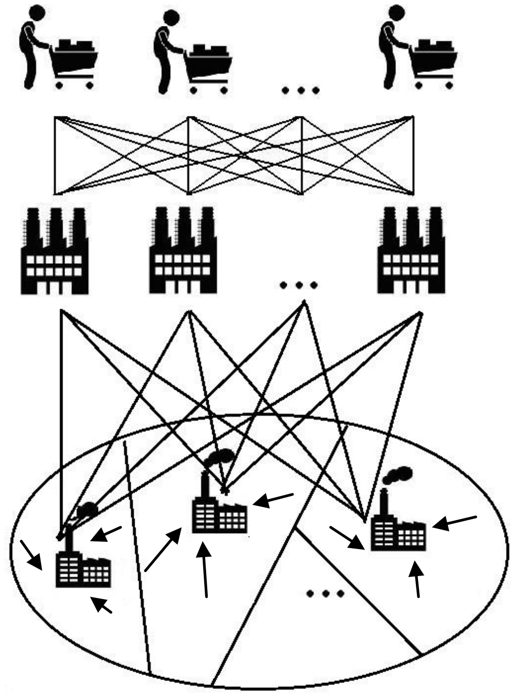

Рис.1 Схема двухэтапной континуальной задачи размещения

Поставленной задаче соответствует следующая математическая модель.

Задача I.

Минимизировать

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)dx+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}c_{ij}v_{ij}\lambda_j+\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{M}c_{jk}^{II}v_{jk}\lambda_j \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i}\rho(x)dx \ge b_i^I,\ i=1,2,\dots N, \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{M}v_{ij}^I\lambda_j \le b_i^I,\ i=1,2,\dots N, \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{N}v_{ij}^I \ge b_j^{II},\ j=1,2.\dots M, \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{M}v_{jk}^{II}\lambda_j \ge b_k,\ k=1,2,\dots K, \qquad (5)$$

$$\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i=\Omega, \qquad (6)$$

$$\Omega_i\bigcap\Omega_j=0,\ i\ne j,\quad i,j=1,2,\dots N, \qquad (7)$$

$$v_{jk}^{II}\ge 0,\ v_{ij}^I\ge 0,\ k=1,2,\dots K,\quad j=1,2.\dots M,\quad i=1,2,\dots N, \qquad (8)$$

$$\lambda_j\in\{0;1\}, \qquad (9)$$

$$\tau^I=\left(\tau_1^I,\tau_2^I\dots\tau_N^I\right),\ \tau^I\in\Omega^N \qquad (10)$$

Здесь b_i^r – мощность i-го предприятия r- го этапа, A^r – затраты на установку i-го предприятия r- го этапа, $\tau_i^r=\left(\tau_{i1}^r,\tau_{i2}^r\right)$ координаты i-го предприятия r-го этапа, $r=I,II$; $\tau_k=\left(\tau_1,\tau_2\right)$ – известные координаты потребителя k, b_k – спрос k-го потребителя; $c_i^I\left(x\right)=c\left(x,\tau_i^I\right)$ – стоимость доставки единицы сырья из точки $x\in\Omega$ к i-му предприятию I этапа; $c_{ij}=c\left(\tau_i^I,\tau_j^{II}\right)$ – стоимость доставки единицы сырья от i-го предприятия I этапа к j-му предприятию II этапа; $c_{jk}^{II}=c\left(\tau_j^{II},\tau_k\right)$ – стоимость доставки от j-го предприятия II этапа к k-му потребителю; $\rho(x)$ – количество ресурса в точке x области Ω; v_{ij}^I – объём продукции доставляемой от от i-го предприятия I этапа к j-му предприятию II этапа; v_{jk}^{II} – объём продукции доставляемой от j-го предприятия II этапа к k-му потребителю;

$$\lambda_j = \begin{cases} 1, \text{если в пункте } j \text{ размещается предприятие II-го этапа}, \\ 0, \text{иначе}. \end{cases}$$

Целевой функционал (1) описывает суммарные расходы на размещение предприятий, доставку сырья и готовой продукции, ограничения (2) означают требование того, что суммарные запасы ресурса в зоне обслуживания i-го предприятия I этапа не меньше производственной мощности этого предприятия; (3) количество продукта, вывезенного из i-го предприятия I этапа не больше производственной мощности этого предприятия; (4) количество продукта, доставленного j-му предприятию II этапа не меньше производственной мощности этого предприятия; (5) – спрос всех потребителей должен быть удовлетворен; ограничения (6), (7) означают требование, что каждый поставщик должен быть отнесен лишь к одному из предприятий I этапа.

Возможные подходы к решению этой задачи, основанные на применении метода ОРМ [3] были предложены в работах [4, 5, 9].

Подход 1.

Решение задачи проводится в два этапа. На первом этапе определяется некоторое множество N возможных мест размещения предприятий I этапа с учетом распределения ресурса, а затем решается задача размещения в дискретной постановке.

Задача первого этапа – это задача ОРМ, при ограничениях (2) , (6), (7), а именно:

Задача 1.1.

$$F(\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_N, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i)\rho(x)\,dx \to \min \quad (11)$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)\,dx \ge b_i^I, \quad i = \overline{1, N} \qquad (12)$$

$$\mathrm{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \; i \ne j, \quad i, j = 1, 2, \ldots N, \qquad (13)$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \qquad (14)$$

Задача второго этапа:

Задача 1.2.

$$\sum_{i \in M_1} A_i^I x_i + \sum_{j \in M_2} A_j^I \lambda_j + \sum_{i \in M_1} \sum_{j \in M_2} c_{ij} v_{ij} + \sum_{j \in M_2} \sum_{k=1}^{K} c_{jk} v_{kj} \to \min \qquad (15)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij} \lambda_j \le b_i^I x_i, \quad i = 1, 2, \ldots N, \qquad (16)$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij} x_i \ge b_j^{II} \lambda_j, \; j = 1, 2. \ldots M, \qquad (17)$$

$$\sum_{j=1}^{M} v_{jk} \lambda_j \ge b_k, \; k = 1, 2, \ldots K, \qquad (18)$$

$$v_{jk} \ge 0, \; v_{ij} \ge 0, \; k = 1, 2, \ldots K, \; j = 1, 2. \ldots M, \; i = 1, 2, \ldots N, \qquad (19)$$

$$\lambda_j \in \{0; 1\}, \qquad (20)$$

где множество M_1 – полученные на предыдущем этапе возможные места размещения предприятий I этапа.

Заметим, что задача 1.1. отличается от обычной задачи ОРМ [3]. В [3] рассматривались задачи с ограничениями в виде равенств и неравенств типа «$\le$», в данной же задаче ограничения типа «$\ge$». Однако если рассматривать задачу в случае, когда ограничения (12) представляют из себя строгие равенства, задача 1.1 будет задачей ОРМ с ограничениями-равенствами, метод решения которой дан [3]. Для решения задачи второго этапа был предложен комбинированный алгоритм, основанный на евристического алгоритме и методе потенциалов. Различное «качество» мест размещения предприятий предлагается учитвать с помощью весовых коэффициентов, введенных в целевую функцию.

Двухэтапная задача размещения- распределения с континульным множеством возможных мест размещения предприятий I и II этапа

Предположим, теперь, что предприятия обоих этапов могут быть размещены в любой точке области. Производство первого этапа получает ресурс от поставщиков непрерывно распределенных в этой области. Число потребителей конечно и их размещение в области известно. Затраты на размещение предприятий постоянны и не зависят от точки размещения. Необходимо разместить предприятия и определить количество продукта, доставляемого от каждого предприятия первого этапа к предприятиям второго этапа и от предприятий второго этапа потребителям таким образом, чтобы суммарные расходы на доставку продукции были минимальны.

В обозначениях предыдущего раздела математическая модель может быть записана в виде:

Задача II.

Минимизировать

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i(x,\tau_i^I)\rho(x)dx+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}c_{ij}^I v_{ij}^I+\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{M}c_{jk}^{II}v_{jk}^{II} \qquad (21)$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i}\rho(x)dx\ge b_i^I,\ i=1,2,\dots N, \qquad (22)$$

$$\sum_{j=1}^{M}v_{ij}^I\le b_i^I,\ i=1,2,\dots N, \qquad (23)$$

$$\sum_{i=1}^{N}v_{ij}^I\ge b_j^{II},\ j=1,2.\dots M, \qquad (24)$$

$$\sum_{j=1}^{M}v_{jk}^{II}\ge b_k,\ k=1,2,\dots K, \qquad (25)$$

$$\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i=\Omega, \qquad (26)$$

$$\Omega_i\bigcap\Omega_j=0,\ i\ne j,\quad i,j=1,2,\dots N, \qquad (27)$$

$$v_{jk}\ge 0,\ \ v_{ij}\ge 0,\ k=1,2,\dots K,\quad j=1,2.\dots M,\quad i=1,2,\dots N, \qquad (28)$$

$$\tau^I=\left(\tau_1^I,\tau_2^I\dots\tau_N^I\right),\ \tau^I\in\Omega^N \qquad (29)$$

$$\tau^{II}=\left(\tau_1^{II},\tau_2^{II}\dots\tau_N^{II}\right),\ \tau^{II}\in\Omega^N \qquad (30)$$

Для решения этой задачи можно использовать те же подходы, что и для задачи I. Отличие состоит в задаче размещения, получаемой на втором этапе.

Двухэтапная задача размещения- распределения с континульным множеством возможных мест размещения предприятий I и II этапа и потребителях, непрерывно размещенных в области

Наконец рассмотрим случай, когда предприятия обоих этапов могут быть размещены в любой точке области. Производство первого этапа получает ресурс от поставщиков непрерывно распределенных в этой области, а предприятия второго этапа транспортируют конечный продукт потребителям, которые непрерывно заполняют заданную область. Затраты на размещение предприятий постоянны и не зависят от точки размещения. Необходимо разместить предприятия в области и определить зоны влияния предприятий первого и второго этапов, а также количество продукта, доставляемого от каждого предприятия первого этапа к предприятиям второго этапа таким образом, чтобы суммарные расходы на доставку продукции были минимальны.

Тогда математическая модель может быть записана в виде:

Задача III.

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i^I} c_i(x,\tau_i^I)\rho^I(x)dx+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}c_{ij}^I\left(\tau_i^I,\tau_j^{II}\right)v_{ij}+\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega_j^{II}} c_j(x,\tau_j^I)\rho^{II}(x)dx\to\min \quad (31)$$

$$\int_{\Omega_i^I}\rho(x)dx\ge b_i^I,\ i=1,2,\ldots N, \quad (32)$$

$$\sum_{j=1}^{M}v_{ij}\le b_i^I,\ i=1,2,\ldots N, \quad (33)$$

$$\sum_{i=1}^{N}v_{ij}\ge b_j^{II},\ j=1,2.\ldots M, \quad (34)$$

$$\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i^I=\Omega, \quad (35)$$

$$\Omega_i^I\bigcap\Omega_{i'}^I=0,\ i\ne i',\quad i,i'=1,2,\ldots N, \quad (36)$$

$$\int_{\Omega_j^{II}}\rho(x)dx\le b_j^{II},\ i=1,2,\ldots N, \quad (37)$$

$$\bigcup_{j=1}^{M}\Omega_j^{II}=\Omega, \quad (38)$$

$$\Omega_j^{II}\bigcap\Omega_{j'}^{II}=0,\ j\ne j',\quad j,j'=1,2,\ldots M, \quad (39)$$

$$\tau^I=\left(\tau_1^I,\tau_2^I\ldots\tau_N^I\right),\ \tau^I\in\Omega^N,\ \ \tau^{II}=\left(\tau_1^{II},\tau_2^{II}\ldots\tau_N^{II}\right),\ \tau^{II}\in\Omega^N \quad (40)$$

где Ω – область, в которой размещаются предприятия; N, M – количество предприятий I и II этапа соответственно; $\tau_i^r=\left(\tau_{i1}^r,\tau_{i2}^r\right)$, Ω_i^r, b_i^r, – координаты, зона обслуживания и мощность i-го предприятия r-го этапа; $c_i^I=c\left(x,\tau_i^I\right)$ – стоимость доставки единицы сырья из точки $x\in\Omega$ к i-му предприятию I этапа; $c_{ij}=c\left(\tau_i^I,\tau_j^{II}\right)$ – стоимость доставки единицы продукции от i-го предприятия I этапа к j-му предприятию II этапа; $c_j^{II}=c\left(x,\tau_j^{II}\right)$ – стоимость доставки продукции от j-го предприятия II этапа к потребителю, расположенному в точке $x\in\Omega$; v_{ij} – объём продукции доставляемой от i-го предприятия I этапа к j-му предприятию II этапа; $\rho^I(x)$, $\rho^{II}(x)$ – количество ресурса и спрос потребителя в точке $x\in\Omega$ соответственно.

Здесь в общем случае $\tau^I\ne\tau^{II}$, хотя в частном случае равенство возможно.

Один из возможных подходов к решению этой задачи состоит в том, что последовательно решаются методом ОРМ задачи размещения предприятий I и II-го этапов, а затем на основе полученных данных решается классическая транспортная задача.

Рассмотрим частный случай последней задачи, когда предприятия первого и второго этапов размещаются в одной точке области ($\tau^I=\tau^{II}$) Тогда задача приобретает такой вид:

Задача 4.1.

Минимизировать функционал:

$$\sum_{i=1}^{N}A_i^I+\sum_{j=1}^{M}A_j^{II}+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i^I}c_i(x,\tau_i^I)\rho^I(x)dx+\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_j^{II}}c_j(x,\tau_j^I)\rho^{II}(x)dx\to\min \quad (41)$$

При ограничениях

$$\int_{\Omega_i^I}\rho(x)dx\ge b_i^I,\ i=1,2,\ldots N, \quad (42)$$

$$\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i^I=\Omega, \quad (43)$$

$$mes(\Omega_i^I \bigcap \Omega_{i'}^I) = 0\,,\; i \neq i',\quad i, i' = 1, 2, \ldots N\,, \tag{44}$$

$$\int\limits_{\Omega_j^{II}} \rho(x)dx \leq b_j^{II}\,,\; i = 1, 2, \ldots N\,, \tag{45}$$

$$\bigcup_{j=1}^{M} \Omega_j^{II} = \Omega\,, \tag{46}$$

$$mes(\Omega_j^{II} \bigcap \Omega_{j'}^{II}) = 0\,,\; j \neq j',\quad j, j' = 1, 2, \ldots N\,, \tag{47}$$

$$\tau^I = \left(\tau_1^I, \tau_2^I \ldots \tau_N^I\right),\; \tau^I \in \Omega^N,\quad \tau^{II} = \left(\tau_1^{II}, \tau_2^{II} \ldots \tau_N^{II}\right),\; \tau^{II} \in \Omega^N \tag{48}$$

Сформулированная задача представляет собой многопродуктовую, точнее двупродуктовую задачу разбиения с ограничениями, методы решения которой для случая когда все ограничения вида « = » или « ≤ » представлены в [3]

Заметим, что в случае если ограничения на мощность предприятий (2) – (5) (соответственно (22) – (25) для задачи II и (32) – (34) для задачи III) сформулированы как ограничения-равенства все подходы приводят к известным дискретным и непрерывным задачам разбиения множеств и размещения [2, 3, 6].

Библиографические ссылки

1. **Гимади Э. Х,** Эффективный алгоритм для решения многоэтапных задачи размещения на цепи // Дискретный анализ и исследование операций. ИМ СО РАН, Новосибирск. 1995. Том 2, с. 13-31
2. Исследование операций // В 2-х томах. Пер. с англ. Под редакцией Моудера Дж., Элмаграби С. М.: Мир, 1981. - 677 с
3. **Киселева Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография / Е.М. Киселева, Н.З. Шор – К.: Наукова Думка 2005. – 564 с.
4. **Ус С.А.** Алгоритм решения двухэтапной задачи размещения производства с предпочтениями / С.А. Ус, Станина О.Д. // Системнi технологiї. регiональний мiжвузiвський збiрник наукових праць.– випуск 2(91) Днiпропетровськ 2014 С.
5. **Ус С.А.** Про один пiдхiд до розв’язання задачi оптимального розмiщення збагачувального виробництва / С.А. Ус // «Iнформацiйнi технологiї та iнформацiйна безпека в наукi, технiцi та навчаннi «Iнфотех-2011». Матерiали мiжнародної науково-практичної конференцiї (Севастополь, 05–10 вересня 2011 р). С. 118 – 119.
6. Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies // Reza Zanjirani Farahani, Masoud Hekmatfar / Springer Dordrecht Heidelberg London New York, 2009.
7. **Fengqi You** and Ignacio E. Grossmann Mixed-Integer Nonlinear Programming Models and Algorithms for Large-Scale Supply Chain Design with Stochastic Inventory Management / *Ind. Eng. Chem. Res.* **2008,** 47,PP 7802–7817
8. **Turan Paksoy**, Eren Özceylan, Gerhard-Wilhelm Weber. A Multi-Objective Mixed Integer Programming Model For Multi Echelon Supply Chain Network Design and Optimization/
9. **Us S.A,** Stanina O.D Multi-stage problem of concentration plant location // 6th International Academic Conference of Young Scientists “Computer Science and Engineering 2013” (CSE-2013) / 4th International Youth Science Festival “Litteris et Artibus” November 21–23, 2013 Lviv Polytechnic National University