

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»



Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина, С.А. Ус

**ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ
В ЗАДАЧАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ, АНАЛИЗА
И ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМ**

Монография

Днепропетровск
НГУ
2015

УДК 519.8:681.5.015:
ББК 22.18:32.97
К44

*Рекомендовано до видання вченою радою
Державного вищого навчального закладу
«Національний гірничий університет»
(протокол № 2 від 09.02.2015).*

Рецензенти:

Н.А. Гук, д-р фіз.-мат. наук, проф.;
Н.В. Семенова, д-р фіз.-мат. наук, проф.;
С.В. Яковлев, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Киселева Е.М.

К44 Теория оптимального разбиения множеств в задачах распознавания образов, анализа и идентификации систем / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина, С.А. Ус / М-во образования и науки Украины; Нац. горн. ун-т. – Д. : НГУ, 2015. – 270 с.

ISBN 978-966-350-575-6

Изложены основные положения математической теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств n -мерного евклидова пространства, которые относятся к неклассическим задачам бесконечномерного математического программирования. Рассмотрены линейные, нелинейные модели, а также задачи, решаемые в условиях неопределенности. Особое внимание уделено практическим приложениям, среди которых можно выделить задачи принятия решений и распознавания образов, идентификации динамических систем.

Для специалистов в области вычислительной и прикладной математики, научных работников, аспирантов и студентов, интересующихся современными проблемами теории оптимизации, в том числе недифференцируемой, математическим моделированием, проблемами территориального планирования, оптимального размещения объектов различной природы в заданной области, другими задачами, связанными с разбиением множества произвольной структуры или формы на подмножества.

Викладено основні положення математичної теорії неперервних задач оптимального розбиття множин n -вимірному евклідовому простору, які належать до некласических задач нескінченновимірному математичного програмування. Розглянуто лінійні, нелінійні моделі, а також задачі, розв'язувані в умовах невизначеності. Особливу увагу приділено практичним застосуванням, серед яких можна виділити задачі прийняття рішень і розпізнавання образів, ідентифікації динамічних систем.

Для фахівців у сфері обчислювальної та прикладної математики, науковців, аспірантів і студентів, які цікавляться сучасними проблемами теорії оптимізації, у тому числі недиференційовної, математичним моделюванням, проблемами територіального планування, оптимального розміщення об'єктів різної природи в заданому регіоні, іншими задачами, пов'язаними із розбиттям множин довільної структури або форми на підмножини.

УДК 519.8:681.5.01
ББК 22.18:32/97

ISBN 978-966-350-575-6

О.М. Кисельова, Л.С. Коряшкіна,
С.А. Ус, 2015
Державний ВНЗ «НГУ», 2015

Оглавление

Предисловие.....	6
Глава 1. Модели, методы и алгоритмы решения непрерывных линейных и нелинейных задач оптимального разбиения множеств.....	10
1.1. Непрерывные линейные задачи оптимального разбиения множеств n -мерного евклидова пространства E_n на подмножества.....	10
1.1.1. Непрерывные линейные однопродуктовые задачи оптимального разбиения множества из пространства E_n без ограничений.....	10
1.1.2. Непрерывные линейные однопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств из пространства E_n при ограничениях.....	13
1.1.3. Непрерывные линейные многопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств.....	16
1.2. Методы и алгоритмы решения непрерывных линейных задач оптимального разбиения множеств из пространства E_n на подмножества при ограничениях.....	20
1.2.1. Линейная многопродуктовая задача оптимального разбиения множеств при ограничениях с заданным положением центров подмножеств.....	21
1.2.2. Линейная многопродуктовая задача оптимального разбиения множеств при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров подмножеств.....	34
1.2.3. Линейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множеств при ограничениях с заданным положением центров подмножеств.....	44
1.2.4. Линейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множества при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров подмножеств.....	51
1.3. Непрерывные нелинейные задачи оптимального разбиения множества.....	56
1.3.1. Нелинейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств при выпуклом целевом функционале.....	57
1.3.2. Обоснование метода решения задачи.....	61
1.3.3. Алгоритм решения задачи.....	70
1.4. Общая постановка непрерывных задач оптимального разбиения множеств n -мерного евклидова пространства E_n на подмножества. Классификация задач.....	75
Глава 2. Непрерывные задачи оптимального разбиения множества в условиях неполной информации об исходных данных.....	80
2.1. Неопределенность в задачах принятия решений.....	80
2.2. Основные понятия теории нечетких множеств.....	83
2.3. Математическая постановка и методы решения задач оптимального нечеткого разбиения множества из пространства E_n на его подмножества.....	91
2.4. Непрерывные линейные однопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств из пространства E_n при нечетких данных.....	104

2.5. Задачи оптимального разбиения множеств при неполной информации в целевом функционале	109
2.5.1. Задача ОРМ с множественнозначным целевым функционалом	109
2.5.2. Задача оптимального разбиения множества с интервальным целевым функционалом.....	118
Глава 3. Решение задач теории и практики методами оптимального разбиения множеств	126
3.1. Применение метода оптимального разбиения множеств в задачах исследования критериев принятия решений	126
3.1.1. Постановка задачи синтеза оптимальных решений	126
3.1.2. Применение метода ОРМ для построения байесовых множеств	128
3.1.3. Применение метода ОРМ для построения множеств, соответствующих другим критериям.....	133
3.1.4. Вычислительный эксперимент и анализ полученных результатов.....	138
3.2. Решение обобщенной задачи Неймана – Пирсона с использованием методов оптимального разбиения множеств.....	140
3.3. Применение метода оптимального разбиения множеств к задачам распознавания образов.....	144
3.3.1. Практическое значение проблемы распознавания. Основные определения и обозначения	144
3.3.2. Исследование возможности применения метода оптимального разбиения множеств к решению задач распознавания образов	145
3.3.3. Вычислительный эксперимент и анализ алгоритма	157
Глава 4. Методы оптимального разбиения множеств в задачах идентификации динамических систем.....	170
4.1. Решение задач идентификации многозонных моделей динамики методами оптимального разбиения множеств	170
4.1.1. Постановка задачи идентификации многозонной динамической системы	170
4.1.2. Формулировка задачи идентификации с применением элементов теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств	173
4.1.3. Два подхода к решению задачи идентификации многозонной системы	174
4.1.4. Результаты идентификации многозонной модели динамики. Сравнение двух подходов	181
4.1.5. Сведение задачи идентификации многозонной модели динамики к последовательности задач оптимального управления	186
4.2. Обратные задачи математической физики, сводящиеся к непрерывным задачам оптимального разбиения множеств	197
4.2.1. Постановка задачи восстановления разрывных функций начальных условий для параболического уравнения.....	198
4.2.2. Сведение задачи управления к непрерывной задаче оптимального разбиения и определение ее разрешимости	200

4.2.3. Необходимые и достаточные условия оптимальности в редуцированной задаче разбиения множеств	203
4.2.4. Конечномерная аппроксимация задачи оптимального разбиения множеств и алгоритм ее решения.....	211
4.2.5. Сходимость и оценка погрешности конечномерной аппроксимации задачи.....	214
4.3. Примеры решения задач идентификации разрывной правой части параболического уравнения и начальных условий	220
4.3.1. Задача идентификации функции распределенного источника ..	220
4.3.2. Параметрическая идентификация кусочно-непрерывной функции начальных условий для параболического уравнения.....	223
4.4. Задача управления с недифференцируемым критерием качества как модель задачи идентификации разрывных начальных условий	226
4.4.1. Постановка задачи управления и схема ее решения	226
4.4.2. Дифференциал Гато функционала вспомогательной задачи	228
4.4.3. Элементы вычислительной технологии	230
4.4.4. Решение тестовых задач с недифференцируемым функционалом	232
Глава 5. Решение некоторых задач размещения промышленных объектов методами оптимального разбиения множеств	236
5.1. Задача формирования экологической структуры вокруг промышленных объектов.....	237
5.2. Задача одновременного планирования строительства промышленных объектов и экологически значимых зон	244
5.3. Результаты решения тестовых задач.....	251
Заключение.....	258
Список литературы	260

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сегодня уже сложно представить решение какой-либо значимой задачи без использования информационных технологий, вычислительной техники и специальных методов принятия решений. Планирование и управление в сфере производства не может основываться только на опыте и интуиции руководителя. Качественные решения требуют обработки огромного объема информации в течение короткого времени, что не под силу человеку, а последствия принятых при этом неправильных решений приводят к большим потерям: экономическим, социальным, экологическим и пр. Исходя из этого, все явственней становится необходимость использования специальных способов и средств, в основе которых – хорошо разработанные и строго обоснованные математические методы.

Теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств (ОРМ) представляет собой активно развивающееся направление современного бесконечномерного математического программирования. Интерес к непрерывным моделям оптимального разбиения множеств вызван, прежде всего, тем, что к указанным моделям в математической постановке сводятся теоретические и практические задачи оптимизации достаточно широкого класса. Кроме того, модели непрерывных задач оптимального разбиения множеств являются источником, порождающим негладкие задачи [20, 27, 118].

Впервые, по-видимому, бесконечномерный аналог транспортной задачи, так называемой задачи о перемещении масс, был рассмотрен Л.В. Канторовичем в статье [29], где предложен и обоснован метод потенциалов, где критерием является минимальное перемещение масс. Исследования непрерывных задач оптимального разбиения множеств в научной литературе появились во второй половине XX века [7, 31, 35, 124 – 127, 130 – 132]. Они возникли как бесконечномерные обобщения оптимизационных задач производственно-транспортного планирования. Более подробный обзор научных публикаций по этой теме можно найти в работах [42, 59]. Основы математической теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств n -мерного евклидова пространства на подмножества заложены в статьях [30 – 33, 56, 57,

58]. Рассматриваемые задачи относятся к неклассическим задачам бесконечномерного математического программирования с булевыми переменными. В монографии [59] аккумулированы результаты многолетних исследований, проводимых в рамках научной школы под руководством члена-корреспондента НАН Украины, доктора физико-математических наук, профессора, заслуженного деятеля науки и техники Украины Е. М. Киселевой. Упомянутое издание полно отражает теоретические сведения о моделях и методах решения линейных непрерывных задач оптимального разбиения множеств. Также оно содержит обширную библиографию и широкий спектр практических приложений задач ОРМ и родственных им задач оптимального покрытия, геометрического проектирования, классификации и кластеризации.

В работе [42] подробно изучены нелинейные и динамические модели непрерывных задач оптимального разбиения множеств; продемонстрирована возможность применения математического и алгоритмического аппарата теории ОРМ к построению диаграмм Вороного и их различных вариаций, к решению задач оптимального шарового покрытия, а также к поиску глобального минимума в задачах многомерной оптимизации и др.

В исследованиях [45] особое внимание уделено применению метода ОРМ к решению различных задач теории и практики, в том числе к задачам поиска оптимальных квадратур и к некоторым задачам математической физики, а также разработаны новые направления реализации моделей и алгоритмов решения задач оптимального шарового покрытия.

Изложенный в настоящей книге теоретический материал представляет собой дальнейшее развитие теории ОРМ в плане приложений ее результатов к решению различных оптимизационных задач теории и практики. Особое внимание уделено ее применению в теориях принятия решений и распознавания образов, а также к решению задач размещения объектов инфраструктуры в условиях неопределенности, размещения индустриальных объектов и формирования вокруг них экологической структуры, идентификации многозонных динамических систем, восстановления функции начальных условий или функции распределенного источника в системах, описываемых уравнениями параболического типа.

Вводная глава монографии содержит краткое описание ряда математических моделей непрерывных задач оптимального

разбиения множеств, их классификацию, а также используемые в данной работе алгоритмы решения линейных и нелинейных однопродуктовых и многопродуктовых непрерывных задач ОРМ, в которых положение центров подмножеств или задано, или оно ранее не известно. Решение этих задач основано на едином подходе. Его идея состоит в том, что исходные задачи ОРМ, математически сформулированные как бесконечномерные задачи оптимизации, сводятся через функционал Лагранжа к вспомогательным конечномерным негладким задачам максимизации либо негладким задачам максимина. Причем для их численного решения применяются современные эффективные методы недифференцируемой оптимизации, а именно, различные модификации r -алгоритма Н. З. Шора [118 – 121]. Особенностью такого подхода к решению линейных задач ОРМ является тот факт, что решение исходных бесконечномерных задач оптимизации удается получить аналитически в явном виде, при этом в аналитическое выражение могут входить параметры, отыскиваемые как оптимальное решение вышеназванных вспомогательных конечномерных задач оптимизации с негладкими целевыми функциями. В случае применения нелинейных моделей решение исходной задачи получено в виде операторного уравнения. Полное описание и точное математическое обоснование методов решения упомянутых задач можно найти в монографии [59].

Вторая глава книги посвящена описанию методов решения задач оптимального разбиения множеств в условиях неопределенности. Данная работа является продолжением исследований, описанных в литературе [39, 40, 50, 52, 59, 73, 102 – 104], в частности, здесь сформулированы математические модели и подходы к решению задач ОРМ, имеющих неопределенность в целевом функционале. Кроме того, предложены алгоритмы их решения, в основе которых алгоритмы решения классических задач ОРМ, описанные в первой главе книги.

В третьей главе авторы описывают практические приложения теории ОРМ к актуальным задачам теории и практики. Приведено теоретическое обоснование возможности применения методов ОРМ для математического обеспечения статического процесса принятия решений в условиях неопределенности и распознавания образов; сформулированы, исследованы и проанализированы основанные на них алгоритмы, а также показаны результаты решения практических

задач принятия решений в условиях неопределенности и задач распознавания образов [53, 54, 101].

Предметом рассмотрения в четвертой главе являются задачи идентификации многозонных динамических систем, которые описываются системой линейных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Кроме того, здесь представлены некоторые обратные задачи математической физики, в частности, задачи восстановления разрывной функции начальных условий или функции распределенного источника для параболических систем [65, 66, 68, 71].

Пятая глава книги посвящена решению методами оптимального разбиения множеств некоторых задач размещения промышленных объектов, включая задачи формирования экологической структуры вокруг промышленных объектов и выделения экологически значимых зон [67, 68, 71].

Использованная в настоящем издании программная реализация различных вариантов r -алгоритма разработана специалистами Института кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины под руководством академика НАН Украины, доктора физико-математических наук, профессора Н. З. Шора.

Монография написана по результатам совместных исследований, проводимых авторами в Национальном горном университете и Днепропетровском национальном университете имени Олеся Гончара.

Авторы надеются, что материал книги будет интересен и полезен, прежде всего, молодым ученым, аспирантам, научным работникам, которые занимаются исследованиями в области бесконечномерного математического программирования, а также специалистам, в практической деятельности которых возникают проблемы принятия решений, территориального планирования, распознавания образов, оптимального размещения объектов различной природы в заданном регионе и другие задачи, связанные с разбиением континуальных множеств на подмножества.

ГЛАВА 1
МОДЕЛИ, МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ
НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

1.1. НЕПРЕРЫВНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ
ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ
n-МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА E_n
НА ПОДМНОЖЕСТВА

1.1.1. Непрерывные линейные однопродуктовые задачи оптимального разбиения множества из пространства E_n без ограничений

Сформулируем сначала самую простую непрерывную линейную задачу оптимального разбиения множеств (ОРМ), а именно, однопродуктовую задачу ОРМ без ограничений с заданными координатами некоторых, характерных для каждого подмножества, точек, назовем их "центрами" подмножеств [59].

Пусть Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу множество в n -мерном евклидовом пространстве E_n .

Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ множества $\Omega \subset E_n$ назовем **возможным разбиением множества Ω** на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, если

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N,$$

где $\text{mes}(\cdot)$ означает меру Лебега.

Обозначим класс всех возможных разбиений множества Ω на непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ через Σ_{Ω}^N , а именно:

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j; i, j = 1, \dots, N \right\}.$$

Введем следующий функционал:

$$F(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx,$$

где $c(x, \tau_i)$ – действительные, ограниченные, определенные на декартовом произведении $\Omega \times \Omega$ функции, измеримые по x при любом фиксированном аргументе $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$, для всех значений $i = 1, \dots, N$; $\rho(x)$ – ограниченная, измеримая, неотрицательная на множестве Ω функция; a_1, a_2, \dots, a_N – заданные неотрицательные числа.

Здесь и в дальнейшем при формулировке задач используем интегралы Лебега. Будем считать, что мера множества граничных точек $\Omega_i, i = 1, \dots, N$, равна нулю.

Тогда под **непрерывной линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества Ω из пространства E_n на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые) без ограничений с заданными координатами центров τ_1, \dots, τ_N подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ соответственно** будем понимать следующую задачу:

Задача А1. Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \sum_{\Omega}^N} F(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}),$$

где

$$F(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx;$$

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega, \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N;$$

$$\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega; a_1, a_2, \dots, a_N \text{ – заданные неотрицательные числа.}$$

Разбиение $\{\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*\}$, являющееся решением задачи **А1**, назовем **оптимальным**.

На рис. 1.1 изображено разбиение множества $\Omega \subset E_2$ на три подмножества $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ с центрами τ_1, τ_2, τ_3 этих подмножеств соответственно.

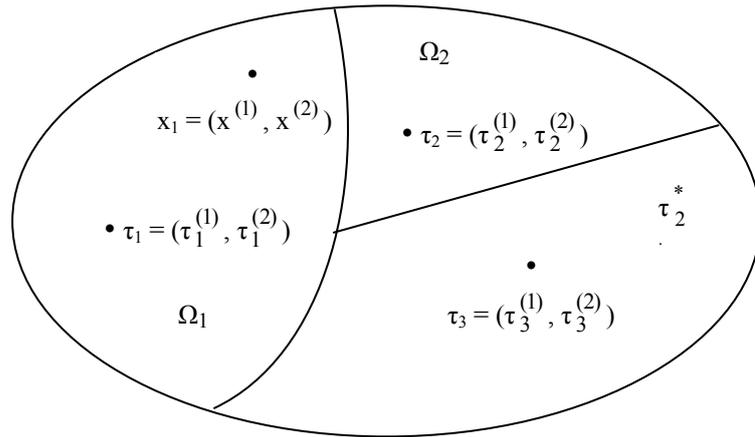


Рис. 1.1. Разбиение множества Ω на три подмножества

Введем характеристическую функцию подмножества Ω_i , то есть

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N,$$

и перепишем задачу **A1** в таком виде:

Задача В1. Найти

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_1} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx,$$

где

$$\Gamma_1 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_N(x)) : \right. \\ \left. \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ почти всюду (п. в.) для } x \in \Omega; \right. \\ \left. \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N \right\},$$

$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ – заданный вектор из Ω^N .

Под непрерывной линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества Ω из пространства E_n на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые) без ограничений с отысканием координат центров τ_1, \dots, τ_N подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ соответственно будем понимать следующую задачу:

Задача А2. Найти

$$\min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx;$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N;$$

где $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$.

Перепишем задачу **А2** относительно характеристических функций $\lambda_i(x)$ подмножеств Ω_i , $i = 1, \dots, N$, в следующем виде:

Задача В2. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_1 \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx,$$

где

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_N(x))\};$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega, \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N\};$$

$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ – заданный вектор из Ω^N .

1.1.2. Непрерывные линейные однопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств из пространства E_n при ограничениях

Под непрерывной линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества Ω из пространства E_n на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с заданными координатами центров τ_1, \dots, τ_N подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ соответственно будем понимать следующую задачу:

Задача А3. Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}} = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx$$

при таких условиях:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p;$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N;$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N;$$

где $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$, $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$, b_1, \dots, b_N – заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи, а именно:

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Перепишем задачу **A3** относительно характеристических функций $\lambda_i(x)$ подмножеств Ω_i , $i = 1, \dots, N$, в следующем виде:

Задача В3. Найти

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx,$$

где

$$\Gamma_2 = \left\{ \lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_1; \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p; \right.$$

$$\left. \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N \right\};$$

$$\Gamma_1 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega; \right.$$

$$\left. \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N \right\};$$

$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ – заданный вектор из Ω^N .

Под непрерывной линейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества Ω из пространства E_n на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров τ_1, \dots, τ_N этих подмножеств соответственно будем понимать следующую задачу:

Задача А4. Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx$$

при условиях, что

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p;$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N;$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; $a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ – заданные неотрицательные числа, причем выполняются следующие условия разрешимости задачи:

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Перепишем задачу **А4** относительно характеристических функций $\lambda_i(x)$ подмножеств Ω_i , $i = 1, \dots, N$, в следующем виде:

Задача В4. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx,$$

где $\Gamma_2 = \{\lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_1; \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p;$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N\};$$

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega;$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N\};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

1.1.3. Непрерывные линейные многопродуктовые задачи оптимального разбиения множеств

В данном разделе приведем математические постановки так называемых "многопродуктовых" задач оптимального разбиения, являющихся обобщением задач из раздела 1.1.1, на случай, когда (например, с применением терминологии бесконечномерной задачи размещения) каждый i -й производитель с координатой τ_i , $i = 1, \dots, N$, выпускает продукцию нескольких видов.

Пусть Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу множество n -мерного евклидова пространства E_n .

Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1, \Omega_1^2, \dots, \Omega_N^2, \dots, \Omega_1^j, \dots, \Omega_N^j, \dots, \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M$ множества Ω назовем возможным разбиением множества $\Omega \in E_n$ на N подмножеств относительно M продуктов, если

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i^j = \Omega, \quad j = 1, \dots, M, \quad \text{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0;$$

$$i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M,$$

причем $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$, $i = 1, \dots, N$, – общий центр для подмножеств $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$, принадлежащий множеству Ω .

На рис. 1.2 изображено возможное разбиение множества $\Omega \in E_2$ на три подмножества $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ относительно каждого из двух продуктов ($M = 2$). Сплошной линией обозначена граница, соответствующая разбиению по 1-му продукту, пунктирной линией – соответствующая разбиению по 2-му продукту, τ_i – общий центр подмножеств Ω_i^1, Ω_i^2 , $i = 1, 2, 3$.

Обозначим совокупность всех возможных разбиений множества Ω на N подмножеств относительно M продуктов через \sum_{Ω}^{NM} , т. е.

$$\sum_{\Omega}^{NM} = \left(\left\{ \Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M \right\} : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i^j = \Omega, \text{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \right.$$

$$\left. i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M \right).$$

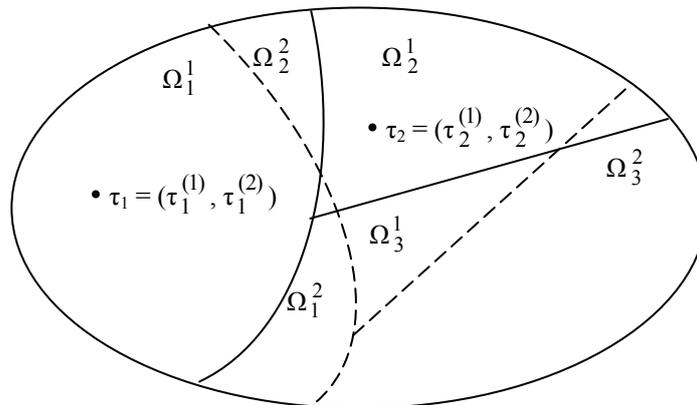


Рис. 1.2. Возможное разбиение двухпродуктовой задачи на три подмножества: сплошные линии – граница, соответствующая разбиению относительно 1-го продукта; пунктирные линии – граница, соответствующая разбиению по 2-му продукту;

τ_i – общий центр подмножеств $\Omega_i^1, \Omega_i^2, i = 1, 2, 3$

Под непрерывной линейной многопродуктовой задачей оптимального разбиения множества $\Omega \subset E_n$ на его подмножества $\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M$ (среди которых могут быть пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с заданным положением центров подмножеств будем понимать следующую задачу:

Задача А5. Найти

$$\min_{\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M\}} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i^j} (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) dx$$

при таких условиях:

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p;$$

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N;$$

$$\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M\} \in \sum_{\Omega}^{NM},$$

где $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$; $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$.

Здесь функции $c^j(x, \tau_i)$ – действительные, ограниченные, определенные на декартовом произведении $\Omega \times \Omega$, измеримые по x при любом фиксированном $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ для всех значений $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$; функции $\rho_j(x)$ – ограниченные, измеримые на Ω для всех значений $j = 1, \dots, M$; $a_1^1, a_2^1, \dots, a_N^M$, b_1, b_2, \dots, b_N – заданные неотрицательные числа, причем выполняются следующие условия разрешимости задачи:

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Точка $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$, соответствующая подмножеству Ω_i^j , одна и та же для всех значений $j = 1, \dots, M$, является общим центром подмножеств $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$.

Будем считать, что мера множества граничных точек Ω_i^j , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, равна нулю.

Введём характеристическую функцию подмножества Ω_i^j , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, то есть

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i^j, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i^j. \end{cases}$$

Перепишем задачу **A5** относительно характеристических функций $\lambda_i^j(x)$ подмножеств Ω_i^j , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, в следующем виде:

Задача B5. Найти

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_4} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx,$$

где $\Gamma_4 = \{ \lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_3; \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p;$

$$\left. \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N \right\};$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \lambda_1^2(x), \dots, \lambda_N^M(x)) : \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) &= 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, M; \\ \lambda_i^j(x) &= 0 \vee 1 \text{ для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M \end{aligned} \right\};$$

$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ – заданный вектор из Ω^N .

Под непрерывной линейной многопродуктовой задачей оптимального разбиения множества $\Omega \subset E_n$ на его подмножества $\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M$ (среди них могут быть пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров подмножеств будем понимать следующую задачу.

Задача А6. Найти

$$\min_{\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i^j} (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) dx,$$

при таких условиях:

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p;$$

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N;$$

$$\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M\} \in \Sigma_{\Omega}^{NM}, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $a_1^1, \dots, a_N^M, b_1, b_2, \dots, b_N$ – заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи, то есть

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Перепишем задачу **A6** относительно характеристических функций $\lambda_i^j(x)$ подмножеств Ω_i^j , $i=1, \dots, N$, $j=1, \dots, M$, в следующем виде:

Задача B6. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_4 \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx,$$

где

$$\Gamma_4 = \left\{ \lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_3; \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, i=1, \dots, p; \right.$$

$$\left. \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, i=p+1, \dots, N \right\};$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \lambda_1^2(x), \dots, \lambda_N^M(x)) : \right.$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega, j=1, \dots, M$$

$$\left. \lambda_i^j(x) = 0 \vee 1 \text{ для } x \in \Omega, i=1, \dots, N, j=1, \dots, M \right\};$$

$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ – заданный вектор из Ω^N .

*1.2. МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ
НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ ИЗ
ПРОСТРАНСТВА E_n НА ПОДМНОЖЕСТВА ПРИ
ОГРАНИЧЕНИЯХ*

Все методы решения непрерывных линейных задач оптимального разбиения множеств, рассматриваемые в настоящем разделе, основаны на едином подходе. Он предусматривает, что исходные задачи ОРМ, являющиеся бесконечномерными задачами оптимизации, при помощи функционала Лагранжа сводятся к вспомогательным конечномерным негладким задачам максимизации либо негладким задачам максимина. Причем для численного решения последних применяются современные эффективные методы

недифференцируемой оптимизации – различные модификации r -алгоритма Н.З. Шора. Особенностью применения такого подхода к линейным задачам ОРМ является тот факт, что решение исходных бесконечномерных оптимизационных задач удается получить в явном виде, причем в аналитическое выражение могут входить параметры, являющиеся оптимальными решениями упомянутых вспомогательных конечномерных задач оптимизации с негладкими целевыми функциями.

Опишем сначала метод и алгоритм решения непрерывной линейной многопродуктовой задачи **A5** оптимального разбиения множеств при ограничениях в форме равенств и неравенств с заданным положением центров подмножеств. Затем сформулируем алгоритм решения задачи **A6** с отысканием координат центров подмножеств, которая является обобщением задачи **A5**. Алгоритмы решения для всех частных случаев задачи **A6**, т. е. для линейных однопродуктовых задач ОРМ как с фиксированными центрами подмножеств, так и с неизвестными заранее координатами этих центров; как с ограничениями, так и без ограничений, построенные на основе алгоритма решения задачи **A6**, рассмотрим в разделах 1.2.3 и 1.2.4.

*1.2.1. Линейная многопродуктовая задача оптимального разбиения
множеств при ограничениях с заданным положением центров
подмножеств*

Непрерывную линейную многопродуктовую задачу оптимального разбиения множества $\Omega \subset E_n$ на его подмножества $\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M$ (среди них могут быть пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с заданным положением центров подмножеств рассмотрим в виде задачи **B5 (см. раздел 1.1.3), удобной для дальнейших исследований.**

Задача B5. Найти

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_4} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx,$$

где множество Γ_4 имеет следующий вид:

$$\Gamma_4 = \left\{ \lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_3; \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p; \right.$$

$$\left. \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, i = p + 1, \dots, N \right\};$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \lambda_1^2(x), \dots, \lambda_N^M(x)) : \right.$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M;$$

$$\lambda_i^j(x) = 0 \vee 1 \text{ для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M \left. \right\},$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) - \text{заданный вектор из } \Omega^N.$$

Здесь функции $c^j(x, \tau_i)$ – действительные, ограниченные, определенные на декартовом произведении $\Omega \times \Omega$, измеримые по x при любом фиксированном аргументе $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ для всех значений $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$; функции $\rho_j(x)$ – ограниченные, измеримые на множестве Ω для всех значений $j = 1, \dots, M$, $a_1^1, a_2^1, \dots, a_N^M, b_1, b_2, \dots, b_N$ – заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи, то есть

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, 0 < b_i \leq S, i = 1, \dots, N.$$

Точка $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$, соответствующая подмножеству Ω_i^j , одна и та же для всех значений $j = 1, \dots, M$, является общим центром подмножеств $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$.

Будем считать, что мера множества граничных точек Ω_i^j , $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$, равна нулю.

Характеристическая функция $\lambda_i^j(x)$ подмножества Ω_i^j , $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$, имеет такой вид:

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i^j; \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i^j. \end{cases}$$

От задачи **В5** бесконечномерного математического программирования с булевыми значениями переменных $\lambda_i^j(\cdot)$, $i=1, \dots, N$, $j=1, \dots, M$, перейдем к соответствующей задаче со значениями $\lambda_i^j(\cdot)$, $i=1, \dots, N$, $j=1, \dots, M$, из отрезка $[0; 1]$, т. е. рассмотрим такую задачу:

Задача В5.1. Найти вектор-функцию $\lambda_*(\cdot) = \{\lambda_{*1}^1(\cdot), \dots, \lambda_{*N}^M(\cdot)\}$, такую, что

$$I(\lambda_*(\cdot)) = \min_{\lambda \in \Gamma_6} I(\lambda(\cdot));$$

$$\Gamma_6 = \left\{ \lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_5; \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p; \right.$$

$$\left. \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N \right\}.$$

Здесь

$$I(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx;$$

$$\Gamma_5 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \lambda_1^2(x), \dots, \lambda_N^M(x)) : \right.$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, M$$

$$\left. 0 \leq \lambda_i^j(x) \leq 1 \text{ для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M \right\};$$

Как следует из выводов работы [59], Γ_6 – ограниченное, замкнутое, выпуклое множество гильбертова пространства $L_2^{MN}(\Omega)$, с такой нормой:

$$\|\lambda(\cdot)\| = \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [\lambda_i^j(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

Согласно [15], $L_2^{MN}(\Omega)$ рефлексивно.

При каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ функционал $I(\lambda(\cdot))$ линеен, непрерывен по аргументу $\lambda(\cdot)$ на множестве Γ_6 .

Имеют место три следующие утверждения, доказательства которых приведены в литературе [59]:

Утверждение 1.1. При каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ ограниченное, замкнутое, выпуклое множество Γ_6 гильбертова пространства $L_2^{MN}(\Omega)$ слабо компактно и (согласно теореме Крейна – Мильмана) содержит по крайней мере одну крайнюю точку.

Утверждение 1.2. Среди множества точек Γ_6^* , в которых линейный по аргументу $\lambda(\cdot)$ функционал $I(\lambda(\cdot))$ достигает при фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ минимального значения на множестве Γ_6 , найдется хотя бы одна крайняя точка множества Γ_6 .

Утверждение 1.3. Крайние точки множества Γ_6 представляют собой характеристические функции некоторых подмножеств Ω_i^j , образующих разбиение множества Ω при каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$.

Отметим, что задача **B5.1** имеет решение. Действительно, Γ_6 – ограниченное, замкнутое, выпуклое множество гильбертова пространства $L_2^{MN}(\Omega)$, а функционал $I(\lambda(\cdot))$ линейный (а значит, выпуклый) и непрерывный по своему аргументу на множестве Γ_6 , тогда согласно обобщенной теореме Вейерштрасса [15] выпуклый непрерывный функционал $I(\lambda(\cdot))$ на замкнутом, ограниченном, выпуклом множестве Γ_6 гильбертова пространства $L_2^{MN}(\Omega)$ достигает своей нижней грани.

Заметим также, что, как следует из утверждения 1.2, среди множества оптимальных решений задачи **B5.1**, т. е. среди множества

точек Γ_6^* , в которых линейный по переменной $\lambda(\cdot)$ функционал $I(\lambda(\cdot))$ достигает минимального значения на множестве Γ_6 , найдется хотя бы одна крайняя точка этого множества. Согласно утверждению 1.3, крайние точки множества Γ_6 представляют собой характеристические функции подмножеств Ω_i^j , образующих разбиение множества Ω . Это означает, что среди множества оптимальных решений задачи **B5.1** содержатся оптимальные решения задачи **B5**.

Ввиду вышеизложенного, задача **B5** сводится к задаче **B5.1**.

Описание метода решения задачи A5. Под функционалом Лагранжа для задачи **B5.1** будем понимать следующий функционал:

$$h(\lambda, \Psi) = I(\lambda(\cdot)) + \sum_{i=1}^N \Psi_i \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i \right), \quad (1.1)$$

где $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N)$ – N -мерный вектор вещественных чисел, у которого компоненты $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p$ произвольны по знаку, а $\Psi_{p+1}, \Psi_{p+2}, \dots, \Psi_N$ – неотрицательны; $\lambda(x) \in \Gamma_5$.

Пару $(\lambda_*(\cdot), \Psi^*)$ назовем седловой точкой функционала (1.1) на множестве $\Gamma_5 \times \Lambda$, где

$$\Lambda = \{ \Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N) \in E_N : \Psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N \},$$

если $h(\lambda_*, \Psi) \leq h(\lambda_*, \Psi^*) \leq h(\lambda, \Psi^*)$ для всех $\lambda \in \Gamma_5, \Psi \in \Lambda$, или

$$h(\lambda_*, \Psi^*) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_5} \sup_{\Psi \in \Lambda} h(\lambda(\cdot), \Psi) = \max_{\Psi \in \Lambda} \inf_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_5} h(\lambda(\cdot), \Psi).$$

Введем такие функционалы:

$$\chi(\lambda(\cdot)) = \sup_{\Psi \in \Lambda} h(\lambda(\cdot), \Psi), \quad \lambda \in \Gamma_5;$$

$$G(\Psi) = \inf_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_5} h(\lambda(\cdot), \Psi), \quad \Psi \in \Lambda.$$

Рассмотрим следующие задачи:

$$\chi(\lambda) \rightarrow \min, \lambda \in \Gamma_5. \quad (1.2)$$

$$G(\Psi) \rightarrow \max, \Psi \in \Lambda. \quad (1.3)$$

Задачу (1.2) назовем прямой, задачу (1.3) – двойственной к (1.2).

Исследования [33, 59] показали, что решение пары двойственных задач (1.2), а значит **В5.1**, и (1.3) (каждая из них разрешима) эквивалентно отысканию седловой точки функционала Лагранжа (1.1) на множестве $\Gamma \times \Lambda$.

Чтобы найти седловую точку функционала Лагранжа (1.1), конкретизируем двойственную задачу (1.3). Для этого, подставляя в выражение такого вида:

$$G(\Psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_5} h(\lambda(\cdot), \Psi), \Psi \in \Lambda,$$

функционал $h(\lambda(\cdot), \Psi)$ из (1.1), получаем следующий результат:

$$G(\Psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_5} h(\lambda(\cdot), \Psi) = -\sum_{i=1}^N \Psi_i b_i + \\ + \min_{\Omega} \int \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ \left[c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i \right] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) \right\} dx, \Psi \in \Lambda. \quad (1.4)$$

Убедимся, что минимальное значение функционала $h(\lambda(\cdot), \Psi)$, определяемого по формуле (1.4), для каждого вектора $\Psi \in \Lambda$ достигается на вектор-функции $\lambda_*(x) = \left\{ \lambda_{*1}^1(x), \dots, \lambda_{*1}^j(x), \dots, \lambda_{*N}^M(x) \right\}$, i -я компонента которой

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k, \\ & i \neq k, \text{ п. в. для } x \in \Omega, k = 1, \dots, N. \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.5)$$

Для этого рассмотрим следующую задачу:

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ \left[c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i \right] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) \right\} dx \rightarrow \min, \Psi \in \Lambda,$$

при условиях, что

$$0 \leq \lambda_i^j(x) \leq 1 \quad x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M;$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, M.$$

Составим функционал Лагранжа для этой задачи, включая в него такое ограничение: $\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1$, тогда

$$\begin{aligned} L(\lambda(\cdot), \Psi_0(\cdot)) &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ \left[c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i \right] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) \right\} + \\ &\quad + \sum_{j=1}^M \Psi_0^j(x) \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) - 1 \right) dx = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ \left[\left(c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i \right) \rho^j(x) + \Psi_0^j(x) \right] \lambda_i^j(x) \right\} dx - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \Psi_0^j(x) dx, \end{aligned}$$

при том, что $0 \leq \lambda_i^j(x) \leq 1$, $x \in \Omega$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, $\Psi_0^j(x) \in L_2(\Omega)$, $j = 1, \dots, M$.

Так как функционал $L(\lambda, \Psi_0)$ линейный сепарабельный по аргументу λ на допустимом множестве, которое может быть представлено декартовым произведением такого вида:

$$\left\{ 0 \leq \lambda_1^1 \leq 1 \right\} \times \dots \times \left\{ 0 \leq \lambda_i^j \leq 1 \right\} \times \dots \times \left\{ 0 \leq \lambda_N^M \leq 1 \right\},$$

то выполняется следующее равенство:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \min_{\substack{0 \leq \lambda_i^j \leq 1, \\ i=1, \dots, N, \\ j=1, \dots, M}} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ \left[\left(c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i \right) \rho^j(x) + \Psi_0^j(x) \right] \lambda_i^j(x) \right\} dx = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \min_{\substack{0 \leq \lambda_i^j \leq 1, \\ i=1, \dots, N, \\ j=1, \dots, M}} \left\{ \left[\left(c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i \right) \rho^j(x) + \Psi_0^j(x) \right] \lambda_i^j(x) \right\} dx. \quad (1.6) \end{aligned}$$

Отсюда уже очевидно, что в формуле (1.5) минимальное значение i, j -го выражения, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, стоящего в фигурных скобках, для каждой функции $\Psi_0^j(x) \in L_2(\Omega)$ достигается когда $\lambda_i^j(x) = \lambda_{*i}^j(x)$, где

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i) \rho^j(x) + \Psi_0^j(x) \leq 0; \\ 0, & \text{если } (c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i) \rho^j(x) + \Psi_0^j(x) > 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Учитывая, что формула (1.7) получена для всех значений $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, то очевидно, что каждая точка x из множества Ω должна принадлежать тому из его подмножеств, для которых соответствующая сумма $(c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i) \rho^j(x) + \Psi_0^j(x)$ будет наименьшей, т. е. $x \in \Omega_{*i}^j$, если

$$\begin{aligned} (c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i) \rho^j(x) + \Psi_0^j(x) &= \\ &= \min_{k=1, \dots, N} \left\{ (c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k) \rho^j(x) + \Psi_0^j(x) \right\}, \end{aligned}$$

$j = 1, \dots, M$ или (запишем по-другому)

$$\begin{aligned} (c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i) \rho^j(x) + \Psi_0^j(x) &\leq (c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k) \rho^j(x) + \Psi_0^j(x), \\ k &= 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Исключая из предыдущего неравенства функцию $\Psi_0^j(x)$, перепишем условие (1.7) (пока еще не окончательно) для $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, и, принимая во внимание, что $\rho^j(x) \geq 0$ для $x \in \Omega$, в таком виде:

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.8)$$

Пусть теперь точка x принадлежит оптимальной границе подмножеств Ω_{*i}^j и Ω_{*k}^j , $i \neq k$. Поскольку точка x в то же время принадлежит подмножеству Ω_{*i}^j , то

$$c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k.$$

С другой стороны, $x \in \Omega_{*k}^j$, а значит,

$$c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i \geq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k.$$

Отсюда $c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i = c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k$ в точках оптимальной границы подмножеств Ω_{*i}^j и Ω_{*k}^j .

Таким образом, в формуле (1.8) знак равенства может иметь место и в случаях, когда $i \neq k$, но, как предполагалось, лебегова мера таких точек равна нулю. Стало быть, можно записать, что $c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k$ для $k = 1, \dots, N$, и $i \neq k$ для всех точек $x \in \Omega$, кроме множества точек меры нуль (т. е. точек границы подмножеств Ω_{*i}^j и Ω_{*k}^j) или более кратко: $i \neq k$ почти всюду для $x \in \Omega$. Итак, выражение для определения компоненты $\lambda_{*i}^j(x)$ из условия (1.8) можно теперь представить в таком виде:

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k, \\ & k = 1, \dots, N, i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, \text{ тогда } x \in \Omega_{*i}^j; \\ 0, & \text{в остальных случаях, тогда } x \in \Omega \setminus \Omega_{*i}^j, \end{cases}$$

т. е. получили формулу (1.5).

Подставляя в функцию (1.4), вместо переменной $\lambda_{*i}^j(x)$, выражение из формулы (1.5), получаем

$$G(\Psi) = -\sum_{i=1}^N \Psi_i b_i + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \min_{k=1,2,\dots,N} [c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k] \rho^j(x) dx. \quad (1.9)$$

Из оптимального решения (1.5) [в предположении, что выполняются условия: $\rho^j(x) \geq 0$ для $x \in \Omega$, $j = 1, \dots, M$] следует теорема 1.1.

Теорема 1.1. Если возможное разбиение $(\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1, \dots, \Omega_1^j, \dots, \Omega_N^j, \dots, \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M)$ является оптимальным для задачи **A5**, то существуют действительные константы $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p, \Psi_{p+1}, \Psi_2, \dots, \Psi_N$ (причем $\Psi_{p+1}, \Psi_2, \dots, \Psi_N$ неотрицательны), для которых выполняются следующие условия:

$$c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k, \quad i \neq k, \quad (1.10)$$

п. в. для $x \in \Omega_{*i}^j$, $i, k \neq 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$.

Замечание к теореме 1.1. Ввиду линейности функционала $I(\lambda(\cdot))$ необходимое условие (1.10) является также достаточным условием оптимальности для задачи **A5**.

Следствие из теоремы 1.1. Для точек x , принадлежащих оптимальной границе подмножеств Ω_{*i}^j и Ω_{*k}^j , в неравенстве (1.10) достигается знак равенства.

Итогом всех вышеприведенных рассуждений является следующая теорема:

Теорема 1.2. Седловая точка $(\lambda_*(\cdot), \Psi^*)$ [в ней первая компонента $\lambda_*(\cdot)$ является оптимальным решением задачи **B5**] функционала (1.1) на множестве $\Gamma \times \Lambda$ определяется для всех значений $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, и почти всех точек $x \in \Omega$ следующим образом:

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Omega_{*i}^j, \\ 0, & \text{если } x \in \Omega \setminus \Omega_{*i}^j, \end{cases}$$

где

$$\Omega_{*i}^j = \left\{ x \in \Omega : c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i = \min_{k=1,2,\dots,N} [c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k] \right\},$$

$$i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, M \},$$

в качестве $\Psi_1^*, \Psi_2^*, \dots, \Psi_N^*$ выбирается оптимальное решение двойственной задачи (1.3), приведенной к такому виду:

$$G(\Psi) = \int \sum_{j=1}^M \min_{k=1,2,\dots,N} [c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k] \rho^j(x) dx -$$

$$- \sum_{i=1}^N \Psi_i b_i \rightarrow \max, \quad (1.11)$$

при условиях, что

$$\Psi_i \geq 0, \quad i = p + 1, \dots, N. \quad (1.12)$$

Алгоритм решения задачи А5. Для решения задачи (1.11), (1.12) условной максимизации вогнутой недифференцируемой функции $G(\Psi)$ будем использовать метод обобщенного градиентного подъема с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов (r -алгоритм) [118].

От задачи (1.11), (1.12) перейдем к задаче безусловной максимизации с помощью введения в целевую функцию (1.11) негладкой штрафной функции множества $\{\Psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}$, то есть

$$P(\Psi) = G(\Psi) - S \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\Psi_i) \rightarrow \max, \Psi \in E_N, \quad (1.13)$$

где S – достаточно большое положительное число, значительно больше максимального из множителей Лагранжа для функции (1.11).

Определим i -ю компоненту вектора обобщенного градиента $g_P(\Psi) = (g_P^{\Psi_1}(\Psi), g_P^{\Psi_2}(\Psi), \dots, g_P^{\Psi_N}(\Psi))$ функции (1.13) в точке $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N)$ следующим образом:

$$g_P^{\Psi_i}(\Psi) = \int \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i, \quad i = 1, \dots, p; \quad (1.14)$$

$$g_P^{\Psi_i}(\Psi) = \int \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i + S \max\{0, \text{sign}(-\Psi_i)\}, \quad (1.15)$$

$$i = p+1, \dots, N;$$

где

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i \leq \min_{k=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k], \\ & i \neq j \text{ п. в. для } x \in \Omega, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.16)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

Опишем алгоритм решения задачи **А5** на координатной сетке.

Алгоритм 1.1

Область Ω заключаем в параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем, что $\rho^j(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$, $j = 1, \dots, M$. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение $\Psi = \Psi^0$. Вычисляем значения вектор-функции $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (1.16) при том, что $\Psi = \Psi^0$.

Вычисляем значение $g_P^\Psi(\Psi^0)$ по узлам сетки используя формулы (1.14) и (1.15) при условии, что $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\Psi = \Psi^{(0)}$; выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$ r -алгоритма, откуда

$$\Psi^{(1)} = \Psi^{(0)} + h_0 g_P^\Psi(\Psi^{(0)}).$$

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после реализации k , $k = 1, 2, \dots$, шагов алгоритма получены определенные значения переменных $\Psi^{(k)}$, $\lambda^{(k-1)}(x)$ в узлах сетки. Опишем $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значение вектор-функции $\lambda^{(k)}(x)$ в узлах сетки по формулам (1.16) при том, что $\Psi = \Psi^{(k)}$.

2. Вычисляем значение компонент вектор-градиента $g_P^\Psi(\Psi)$ по формулам (1.14), (1.15) при том, что $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$, $\Psi = \Psi^{(k)}$.

3. Осуществляем $(k+1)$ -й шаг r -алгоритма для максимизации функции (1.13) по переменной Ψ на пространстве E_N , краткая схема которого имеет такой вид:

$$\Psi^{(k+1)} = \Psi^{(k)} + h_k B_{k+1}^\Psi \tilde{g}_P^\Psi,$$

где B_{k+1}^Ψ – оператор отображения преобразованного пространства в основное пространство E_N , пересчет которого производится по следующим формулам: $B_0^\Psi = I_N$ (единичная матрица);

$$B_{k+1}^\Psi = B_k^\Psi R_\alpha \left(\frac{r_k}{\|r_k\|} \right); \quad r_k = g_P^\Psi(\Psi^{(k)}) - g_P^\Psi(\Psi^{(k-1)}),$$

здесь $R_\alpha(\zeta)$ – оператор растяжения пространства в направлении ζ с коэффициентом растяжения α , матричная форма которого имеет следующий вид:

$$R_\alpha(\zeta) = I_N + (\alpha - 1)\zeta\zeta^T;$$

$\tilde{g}_P^\Psi = B_{k+1}^* g_P^\Psi(\Psi^{(k)})$; h_k – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия минимума по направлению.

4. Если такое условие:

$$\|\Psi^{(k)} - \Psi^{(k+1)}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.17)$$

не выполняется, то переходим к реализации $(k+2)$ -го шага алгоритма, если выполняется – то к п. 5.

5. Полагаем, что $\Psi^* = \Psi^{(l)}$, $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (1.17).

6. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала по формуле (1.9) при $\Psi = \Psi^*$, и для контроля правильности счета – по следующей формуле:

$$I(\lambda_*(x)) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx. \quad (1.18)$$

Алгоритм описан.

Сделаем несколько замечаний к алгоритму 1.1.

Замечание 1. В результате работы алгоритма оптимальное разбиение в задаче **A5** относительно каждого продукта j , $j = 1, \dots, M$, получается в виде значений характеристических функций $\lambda_i^j(x)$ каждого из подмножеств Ω_i^j , $i = 1, \dots, N$, вычисленных в точках x , которые являются узлами прямоугольной сетки, покрывающей параллелепипед Π , где содержится область Ω .

Замечание 2. Из теоремы 1.1 и следствия из неё вытекает, что для каждого фиксированного вектора $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$, и каждого индекса $j = 1, \dots, M$, гиперповерхность, разделяющая подмножества Ω_i^j и Ω_k^j , $i, k = 1, 2, \dots, N$, $i \neq k$, определяется неявным уравнением такого вида:

$$F_{ik}^j(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.19)$$

где

$$F_{ik}^j(x) = c^j(x, \tau_i) - c^j(x, \tau_k) + (a_i^j - a_k^j) + (\psi_i - \psi_k). \quad (1.20)$$

Очевидно, что форма и свойства разделяющей гиперповерхности (1.20) определяются свойствами функций $c^j(x, \tau_i)$. В некоторых простых случаях удаётся аналитически решить уравнение (1.19), (1.20) и в явном виде найти аналитическое представление разделяющей гиперповерхности.

Для тех случаев, когда в явном виде не удастся получить аналитическое выражение, определяющее оптимальную разделяющую гиперповерхность (1.19), (1.20), предложены численные методы отыскания точек, принадлежащих оптимальным разделяющим гиперповерхностям [59].

1.2.2. Линейная многопродуктовая задача оптимального разбиения множеств при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров подмножеств

Под непрерывной линейной многопродуктовой задачей оптимального разбиения множества из n -мерного евклидова пространства E_n на подмножества с отысканием координат центров (с размещением центров) подмножеств при ограничениях в форме равенств и неравенств будем понимать задачу А6, сформулированную в разделе 1.1.3. Перепишем ее формулировку в виде задачи В6, удобной для дальнейших исследований.

Задача В6. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_4 \times \Omega^N} I(\lambda(x), \tau),$$

где

$$\Gamma_4 = \left\{ \lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_3; \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \right. \\ \left. \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N \right\};$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \lambda_1^2(x), \dots, \lambda_N^M(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \right. \\ \left. j = 1, \dots, M ; \lambda_i^j(x) = 0 \vee 1 \text{ для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M \right\};$$

$$I(\lambda(x), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx.$$

Функции $c^j(x, \tau_i)$ – действительные, ограниченные, определенные на декартовом произведении $\Omega \times \Omega$, измеримые по аргументу x при любом фиксированном векторе $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n)$ из Ω , для всех значений $i = 1, \dots, N$; функции $\rho^j(x)$ – действительные, ограниченные, измеримые и неотрицательные на множестве Ω для всех значений $j = 1, \dots, M$; $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n)$ – заданная точка множества Ω , одна и та же для всех значений $j = 1, \dots, M$, называемая общим центром подмножеств $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$, которая необязательно принадлежит каждому из подмножеств $\Omega_i^1, \dots, \Omega_i^M$; $a_1^1, \dots, a_N^1, \dots, a_1^M, \dots, a_N^M, b_1, \dots, b_N$ – заданные неотрицательные числа, причем

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Задача **В6** является задачей бесконечномерного математического программирования с булевыми переменными $\lambda(\cdot)$.

Рассмотрим следующую задачу:

Задача В6.1. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_4 \times \Omega^N} I(\lambda(x), \tau),$$

где

$$\Gamma_6 = \left\{ \lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_5; \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p; \right. \\ \left. \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N \right\}.$$

Здесь

$$\Gamma_5 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \lambda_1^2(x), \dots, \lambda_N^M(x)) : \right. \\ \left. \sum_{i=1}^N \lambda_i^j(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, M ; \right. \\ \left. 0 \leq \lambda_i^j(x) \leq 1 \text{ } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M \right\}.$$

Очевидно, что

$$I(\lambda_*(x), \tau_*) = \min_{\tau \in \Omega^N} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_6} I(\lambda(\cdot), \tau). \quad (1.21)$$

По данным исследований [58, 59], при каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ внутренняя задача (1.21) линейна по аргументу $\lambda(\cdot)$ на множестве Γ_6 и глобально разрешима. Кроме того, при каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ во множестве оптимальных решений задачи **В6.1** содержатся оптимальные решения задачи **В6**.

Описание метода решения задачи А6. Введем функционал Лагранжа для задачи **В6.1** следующим образом:

$$h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi) = I(\lambda(\cdot), \tau) + \sum_{i=1}^N \Psi_i \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i \right) = \\ = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - \sum_{i=1}^N \Psi_i b_i, \quad (1.22)$$

где $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N)$ – N -мерный вектор вещественных чисел, у которого компоненты $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p$ произвольны по знаку, а $\Psi_{p+1}, \Psi_2, \dots, \Psi_N$ – неотрицательны; $\lambda(x) \in \Gamma_5$ для $x \in \Omega$; $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$.

Пару элементов $(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \Psi^*)$ назовем седловой точкой функционала (1.22) на множестве $\{\Gamma_5 \times \Omega^N\} \times \Lambda$,

где

$$\Lambda = \{ \Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N) \in E_N : \Psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N \},$$

если

$$h(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \Psi) \leq h(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \Psi^*) \leq h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi^*)$$

для всех $\lambda \in \Gamma_5$, $\Psi \in \Lambda$, или

$$\begin{aligned} h(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \Psi^*) &= \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_5 \times \Omega^N} \max_{\Psi \in \Lambda} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi) = \\ &= \max_{\Psi \in \Lambda} \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_5 \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi). \end{aligned}$$

Перейдем к решению задачи:

$$h(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \Psi^*) = \max_{\Psi \in \Lambda} \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_5 \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi).$$

Обозначим, что

$$G(\Psi) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_5 \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi), \quad \Psi \in \Lambda.$$

Задача, двойственная к задаче **В6.1**, имеет такой вид:

$$G(\Psi) \rightarrow \max, \quad \Psi \in \Lambda. \quad (1.23)$$

От задачи отыскания $\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_5 \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi)$ можно перейти к следующей задаче:

$$\min_{\tau \in \Omega^N} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_5} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi) \quad \text{при } \Psi \in \Lambda. \quad (1.24)$$

Введем в задаче (1.24) следующие обозначения:

$$G_1(\tau, \Psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_5} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi). \quad (1.25)$$

Подставляя в функцию (1.25) функционал $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi)$ из формулы (1.22), получаем такой результат:

$$\begin{aligned} G_1(\tau, \Psi) &= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_5} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi) = -\sum_{i=1}^N \Psi_i b_i + \\ &+ \min_{\substack{0 \leq \lambda_i^j \leq 1, \sum_{i=1}^N \lambda_i^j = 1 \\ i=1, \dots, N, j=1, \dots, M}} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i) \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx, \quad (1.26) \\ &\tau \in \Omega^N, \quad \Psi \in \Lambda. \end{aligned}$$

Согласно результатам исследований [59] минимальное значение по аргументу λ функционала $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \Psi)$ в (1.26) достигается для каждого набора переменных $\tau \in \Omega^N$ и $\Psi \in \Lambda$, если

$$\left(\lambda_1^1(x), \dots, \lambda_1^j(x), \dots, \lambda_N^M(x)\right) = \left(\lambda_{*1}^1(x), \dots, \lambda_{*1}^j(x), \dots, \lambda_{*N}^M(x)\right),$$

где

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Omega = \left\{x \in \Omega : c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i \leq \right. \\ & \left. \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k, \right. \\ & i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, k = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.27)$$

и функция $G_1(\tau, \Psi)$ принимает такой вид:

$$G_1(\tau, \Psi) = -\sum_{i=1}^N \Psi_i b_i + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \min_{k=1, \dots, N} (c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k) \rho^j(x) dx. \quad (1.28)$$

Из вида оптимального решения (1.27) задачи (1.26) для каждого фиксированного вектора $\tau \in \Omega^N$ (в предположении, что выполняются условия $\rho^j(x) \geq 0$ п. в. для $x \in \Omega$, $j = 1, \dots, M$) следует теорема 1.3.

Теорема 1.3. Для того, чтобы возможное разбиение $(\Omega_{*1}^1, \dots, \Omega_{*i}^j, \dots, \Omega_{*N}^M)$ являлось оптимальным в задаче **A6**, необходимо и достаточно существование действительных констант $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p, \Psi_{p+1}, \dots, \Psi_N$ (среди них $\Psi_{p+1}, \dots, \Psi_N$ неотрицательны), которые имеют такие свойства:

$$c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \Psi_i \leq c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k, \quad (1.29)$$

$$i \neq k, \text{ п. в. для } x \in \Omega_{*i}^j, i, k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M.$$

Следствие из теоремы 1.3. Для точек x , принадлежащих оптимальной границе подмножеств Ω_{*i}^j и Ω_{*k}^j , в неравенстве (1.29) достигается знак равенства.

Сформулируем теорему, подводящую итог вышеизложенным рассуждениям.

Теорема 1.4. Седловая точка $(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \Psi^*)$ функционала (1.22) на множестве $\{\Gamma_5 \times \Omega^N\} \times \Lambda$, где первая компонента $\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}$ является оптимальным решением задачи **В6.1**, определяется для всех значений $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, и для почти всех точек $x \in \Omega$ следующим образом:

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Omega_{*i}^j \text{ и } x \notin \Omega_{*q}^j, \quad q \leq i, \\ 0, & \text{если } x \notin \Omega_{*i}^j, \end{cases}$$

где

$$\Omega_{*i}^j = \{x \in \Omega : c^j(x, \tau_{*i}) + a_i^j + \Psi_i^* = \min_{k=1,2,\dots,N} [c^j(x, \tau_{*k}) + a_k^j + \Psi_k^*]\},$$

$i \neq k$ п. в. для $x \in \Omega$, $j = 1, \dots, M$.

Причем в качестве параметров $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$, $\Psi_1^*, \dots, \Psi_N^*$ выбирается оптимальное решение двойственной задачи (1.23), приведенной к такому виду:

$$G(\Psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \Psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \left\{ -\sum_{i=1}^N \Psi_i b_i + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \min_{k=1,\dots,N} (c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \Psi_k) \rho^j(x) dx \right\} \rightarrow \max, \quad (1.30)$$

при условиях:

$$\Psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N. \quad (1.31)$$

Алгоритм решения задачи А6. Прежде чем сформулировать алгоритм решения задачи **В6**, основанный на теореме 1.4, остановимся на некоторых свойствах задачи (1.30), (1.31).

Очевидно, что относительно аргумента Ψ функция $G_1(\tau, \Psi)$, описываемая выражением (1.28), является выпуклой и недифференцируемой на таком множестве:

$$\Lambda = \{\Psi \in E_n : \Psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N\}.$$

При каждом фиксированном векторе $\Psi \in \Lambda$ функция $G_1(\tau, \Psi)$ по переменной τ на множестве Ω^N обладает свойствами, которые

установлены в литературе [59] для задачи ОРМ без ограничений с отысканием координат центров подмножеств. То есть, вообще говоря, функция $G_1(\tau, \Psi)$ из (1.28) при каждом фиксированном векторе $\Psi \in \Lambda$ является по аргументу $\tau \in \Omega^N$ многоэкстремальной.

Однако в некоторых частных случаях [59] задача отыскания $\min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \Psi)$ при каждом фиксированном векторе $\Psi \in \Lambda$, одноэкстремальна.

Чтобы найти решение задачи (1.30), (1.31), будем использовать близкий к r -алгоритму Н. З. Шора алгоритм обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных обобщенных псевдоградиентов. Для этого от задачи (1.30), (1.31) перейдем к задаче безусловной максимизации по переменной Ψ с помощью введения в целевую функцию (1.28) негладкой штрафной функции множества $\{\Psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}$, то есть

$$\max_{\Psi \in E_N} \min_{\tau \in \Omega^N} P(\tau, \Psi), \quad (1.32)$$

где

$$P(\tau, \Psi) = G_1(\tau, \Psi) - S \sum_{i=p+1}^N \max\{0; -\Psi_i\}.$$

Здесь S – достаточно большое положительное число, значительно больше максимального из множителей Лагранжа для функции (1.28). О возможности перехода от задачи (1.30), (1.31) к (1.32) см. в литературе [59].

Определим i -ю компоненту $2N$ -мерного вектора обобщенного псевдоградиента:

$$\begin{aligned} g_P(\tau, \Psi) &= \left(-g_p^\Psi(\tau, \Psi), g_p^\tau(\tau, \Psi) \right) = \\ &= \left(-g_p^{\Psi_1}(\tau, \Psi), \dots, -g_p^{\Psi_N}(\tau, \Psi), g_p^{\tau_1}(\tau, \Psi), \dots, g_p^{\tau_N}(\tau, \Psi) \right), \end{aligned}$$

функции (1.32) в точке: $(\tau, \Psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \Psi_1, \dots, \Psi_N)$, следующим образом:

$$g_P^{\Psi_i}(\tau, \Psi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i, & i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx - b_i + S \cdot \max[0, \text{sign}(-\Psi_i)], & \\ & i = p + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1.33)$$

$$g_P^{\tau}(\tau, \Psi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) g_{c^j}^{\tau_i}(\tau, x) \lambda_i^j(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.34)$$

где $g_{c^j}^{\tau_i}(\tau, x)$ – i -я компонента N -мерного вектора обобщенного градиента $g_{c^j}^{\tau}(\tau, x)$ функции $c^j(x, \tau_i)$, $j = 1, \dots, M$, в точке $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$;

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i = \min_{k=1, \dots, N} [c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k^*], \\ & i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.35)$$

Опишем алгоритм решения задачи **А6** для случая, когда область Ω представляет собой параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат.

Алгоритм 1.2. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение: $(\tau, \Psi) = (\tau^{(0)}, \Psi^{(0)})$.

Вычисляем значения вектор-функции $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (1.35) при том, что $\Psi = \Psi^{(0)}$, $\tau = \tau^{(0)}$. Вычисляем значения вектора обобщенного псевдоградиента $(-g_P^{\Psi}(\tau^{(0)}, \Psi^{(0)})$,

$g_P^{\tau}(\tau^{(0)}, \Psi^{(0)})$) в узлах сетки по формулам (1.33), (1.34) при таких

условиях: $\Psi = \Psi^{(0)}$, $\tau = \tau^{(0)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$. Выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$ r -алгоритма, и тогда

$$\begin{aligned}\tau^{(1)} &= P_{\Pi} \left(\tau^{(0)} - h_0 g_P^\tau \left(\tau^{(0)}, \Psi^{(0)} \right) \right), \\ \Psi^{(1)} &= \Psi^{(0)} - h_0 g_P^\Psi \left(\tau^{(0)}, \Psi^{(0)} \right),\end{aligned}$$

где P_{Π} – оператор проектирования точек на параллелепипеде Π .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после осуществления k ($k=1,2,\dots$) шагов алгоритма получены определенные значения переменных $\Psi^{(k)}$, $\tau^{(k)}$ и вектор-функции $\lambda^{(k)}(x)$ в узлах сетки.

Опишем $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значения вектор-функции $\lambda^{(k)}(x)$ в узлах сетки по формулам (1.35), при том, что $\tau = \tau^{(k)}$, $\Psi = \Psi^{(k)}$.

2. Определяем значения компонент обобщенного псевдоградиента $g_P \left(\tau^{(k)}, \Psi^{(k)} \right)$ по формулам (1.33), (1.34) при том, что $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$, $\tau = \tau^{(k)}$, $\Psi = \Psi^{(k)}$.

3. Выполняем $(k+1)$ -й шаг r -алгоритма обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, близкого к r -алгоритму [118], краткая схема которого имеет такой вид:

$$\begin{aligned}\tau^{(k+1)} &= P_{\Pi} \left(\tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^\tau \tilde{g}_P^\tau \right), \\ \Psi^{(k+1)} &= \Psi^{(k)} - h_k B_{k+1}^\Psi \tilde{g}_P^\Psi,\end{aligned}$$

где B_{k+1}^τ , B_{k+1}^Ψ – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство E_N , пересчет которых производится по следующим формулам: $B_0^\Psi = I_N$, $B_0^\tau = I_{nN}$; I_N , I_{nN} – единичные матрицы соответствующих размеров;

$$\begin{aligned}B_{k+1}^\Psi &= B_k^\Psi R_\alpha \left(\frac{r_k}{\|r_k\|} \right), r_k = g_P^\Psi \left(\tau^{(k)}, \Psi^{(k)} \right) - g_P^\Psi \left(\tau^{(k-1)}, \Psi^{(k-1)} \right); \\ B_{k+1}^\tau &= B_k^\tau R_\alpha \left(\frac{\bar{r}_k}{\|\bar{r}_k\|} \right), \bar{r}_k = g_P^\tau \left(\tau^{(k)}, \Psi^{(k)} \right) - g_P^\tau \left(\tau^{(k-1)}, \Psi^{(k-1)} \right),\end{aligned}$$

где $R_\alpha(\zeta)$ – оператор растяжения пространства в направлении ζ с коэффициентом растяжения α , матричная форма которого имеет следующий вид:

$$R_\alpha(\zeta) = I + (\alpha - 1)\zeta\zeta^T;$$

$\tilde{g}_P = B_{k+1}^* g_P(\tau^{(k)}, \Psi^{(k)})$; h_k – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия минимума по направлению.

4. Если условие:

$$\left\| \left(\tau^{(k)}, \Psi^{(k)} \right) - \left(\tau^{(k+1)}, \Psi^{(k+1)} \right) \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.36)$$

не выполняется, то переходим к выполнению $(k+2)$ -го шага алгоритма, если выполняется, то к п. 5.

5. Полагаем, что $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, $\tau_* = \tau^{(l)}$, $\Psi^* = \Psi^{(l)}$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (1.36).

6. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала по формуле (1.28) при том, что $\tau = \tau_*$, $\Psi = \Psi^*$, и для контроля правильности счета по следующей формуле:

$$I(\lambda_*(x), \tau_*) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (c^j(x, \tau_{*i}) + a_i^j) \rho^j(x) \lambda_{*i}^j(x) dx. \quad (1.37)$$

Алгоритм 1.2 описан.

Замечание. В результате применения алгоритма оптимальное разбиение для задачи **А6** получается в виде значений характеристических функций $\lambda_i^j(x)$ каждого из подмножеств Ω_i^j , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, вычисленных в точках x , которые являются узлами прямоугольной сетки, покрывающей параллелепипед Π , содержащий область Ω .

1.2.3. Линейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множеств при ограничениях с заданным положением центров подмножеств

Рассмотрим непрерывную линейную однопродуктовую задачу АЗ оптимального разбиения множества из n -мерного евклидова пространства E_n на подмножества с заданным положением центров подмножеств при ограничениях в форме равенств и неравенств, сформулированную в разделе 1.1. Перепишем ее формулировку в виде задачи ВЗ, удобной для дальнейших исследований.

Задача ВЗ. Найти

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2} I(\lambda(x)),$$

где

$$\Gamma_2 = \left\{ \lambda(\cdot) : \lambda(x) \in \Gamma_1, \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p; \right. \\ \left. \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N \right\};$$

$$\Gamma_1 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \right. \\ \left. \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N \right\};$$

Функции $c(x, \tau_i)$ – действительные, ограниченные, определенные на декартовом произведении $\Omega \times \Omega$, измеримые по аргументу x при любом фиксированном аргументе $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n)$, из множества Ω для всех $i = 1, \dots, N$; функции $\rho(x)$ – действительные, ограниченные, измеримые и неотрицательные на множестве Ω ; $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n)$ – заданная фиксированная точка подмножества Ω_i , $i = 1, \dots, N$; $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ – заданные неотрицательные числа, причем

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, 0 < b_i \leq S, i = 1, \dots, N;$$

$$I(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx.$$

Погружаем задачу **В3** с булевыми переменными $\lambda(\cdot)$ в соответствующую задачу, переменные $\lambda(\cdot)$ которой являются непрерывными, т. е. рассмотрим такую задачу:

Задача В3.1. Найти

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_8} I(\lambda(\cdot)),$$

где

$$\Gamma_8 = \left\{ \lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_7; \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho(x) \lambda_j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \right. \\ \left. \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho(x) \lambda_j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N \right\}.$$

Здесь $\Gamma_7 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \lambda_1^2(x), \dots, \lambda_N^M(x)) :$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega; 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, \quad x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N \}.$$

Задача **В3.1** имеет решение.

Действительно, поскольку Γ_8 – ограниченное, замкнутое, выпуклое множество гильбертова пространства $L_2^N(\Omega)$, а функционал $I(\lambda(\cdot))$ линейный (а значит выпуклый) и непрерывный по аргументу $\lambda(\cdot)$ на множестве Γ_8 , то с учетом обобщенной теоремы Вейерштрасса, выпуклый непрерывный функционал $I(\lambda(\cdot))$ на замкнутом, ограниченном, выпуклом множестве Γ гильбертова пространства $L_2^N(\Omega)$ достигает своей нижней грани.

Так же, как и в аналогичной многопродуктовой задаче ОРМ, среди множества оптимальных решений задачи **В3.1**, т. е. среди множества точек Γ_8^* , в которых линейный по аргументу $\lambda(\cdot)$ функционал $I(\lambda(\cdot))$ достигает на множестве Γ_8 минимального значения, найдется хотя бы одна крайняя точка этого множества. Но крайние точки множества Γ_8 представляют собой

характеристические функции подмножеств Ω_i , образующих разбиение множества Ω . Отсюда следует, что среди множества оптимальных решений задачи **В3.1** содержатся оптимальные решения задачи **В3**.

Рассматриваемая здесь задача является частным случаем многопродуктовой задачи ОРМ **A5** при ограничениях с известными координатами центров подмножеств, метод решения которой описан в разделе 1.2.1.

Согласно результатам исследований [59], решение задачи **В3** эквивалентно отысканию седловой точки функционала Лагранжа.

Введем функционал Лагранжа для задачи **В3** следующим образом:

$$h(\lambda(\cdot), \Psi) = I(\lambda(\cdot)) + \sum_{i=1}^N \Psi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i \right), \quad (1.38)$$

где $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N)$ – N -мерный вектор вещественных чисел, у которого компоненты $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p$ произвольны по знаку; $\Psi_{p+1}, \dots, \Psi_N$ – неотрицательны; $\lambda(x) \in \Gamma$ для $x \in \Omega$.

Пару $(\lambda_*(\cdot), \Psi^*)$ назовем седловой точкой функционала (1.38) на множестве $\Gamma_7 \times \Lambda$, где

$$\Lambda = \{ \Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N) \in E_N : \Psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N \},$$

если

$$h(\lambda_*(\cdot), \Psi) \leq h(\lambda_*(\cdot), \Psi^*) \leq h(\lambda(\cdot), \Psi^*),$$

для всех $\lambda \in \Gamma_7$, $\Psi \in \Lambda$, или

$$h(\lambda_*(\cdot), \Psi^*) = \min_{\lambda \in \Gamma_7} \sup_{\Psi \in \Lambda} h(\lambda(\cdot), \Psi) = \max_{\Psi \in \Lambda} \inf_{\lambda \in \Gamma_7} h(\lambda(\cdot), \Psi^*).$$

Обозначим, что

$$G(\Psi) = \inf_{\lambda \in \Gamma_7} h(\lambda(\cdot), \Psi), \quad \Psi \in \Lambda. \quad (1.39)$$

Задача, двойственная к задаче **В3.1**, имеет следующий вид:

$$G(\Psi) \rightarrow \max, \quad \Psi \in \Lambda. \quad (1.40)$$

Для отыскания седловой точки функционала Лагранжа (1.38) конкретизируем двойственную задачу (1.40). Подставляя в запись (1.39) выражение (1.38) для функционала $h(\lambda(\cdot), \Psi)$, получаем следующий вид функции:

$$G(\Psi) = \min_{\lambda \in \Gamma_7} h(\lambda(\cdot), \Psi) = \\ = \min_{\lambda \in \Gamma_7} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{i=1}^N \Psi_i b_i, \quad \Psi \in \Lambda. \quad (1.41)$$

Минимальное значение функционала $h(\lambda(\cdot), \Psi)$ из формулы (1.41) для каждого вектора $\Psi \in \Lambda$ достигается на вектор-функции $\lambda_*(x) = (\lambda_{*1}(x), \dots, \lambda_{*N}(x))$, i -я компонента которой имеет такой вид:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_i) + a_i + \Psi_i \leq c(x, \tau_k) + a_k + \Psi_k, \\ & i \neq k, \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad k = 1, \dots, N, \text{ тогда } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях, тогда } x \in \Omega \setminus \Omega_{*i}. \end{cases} \quad (1.42)$$

$i = 1, \dots, N.$

Подставляя в функцию (1.41) вместо $\lambda_i(x)$ выражение (1.42) и учитывая, что $\lambda_{*i}(x)$ удовлетворяет условию: $\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1$, п. в. для $x \in \Omega$, получаем такую запись двойственного функционала:

$$G(\Psi) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \min_{k=1, \dots, N} (c(x, \tau_k) + a_k + \Psi_k) \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \Psi_i b_i. \quad (1.43)$$

Из вида оптимального решения (1.42) и в предположении, что выполняются условия $\rho(x) \geq 0$ для $x \in \Omega$, следует такая теорема:

Теорема 1.5. Для того, чтобы возможное разбиение $(\Omega_{*1}, \Omega_{*2}, \dots, \Omega_{*N})$ являлось оптимальным для задачи **A3**, необходимо и достаточно существование действительных констант $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p, \Psi_{p+1}, \dots, \Psi_N$ (среди которых $\Psi_{p+1}, \dots, \Psi_N$ неотрицательны) при таких условиях:

$$c(x, \tau_i) + a_i + \Psi_i \leq c(x, \tau_k) + a_k + \Psi_k, \quad (1.44)$$

$i \neq k$, п. в. для $x \in \Omega_{*i}$, $i, k = 1, \dots, N$.

Следствие из теоремы 1.5. Для точек x , принадлежащих оптимальной границе подмножеств Ω_{*i} и Ω_{*k} , в неравенстве (1.44), достигается знак равенства.

Сформулируем теорему, определяющую решение задачи отыскания седловой точки функционала (1.38).

Теорема 1.6. Седловая точка $(\lambda_*(\cdot), \Psi^*)$ (где первая компонента $\lambda_*(\cdot)$ является оптимальным решением задачи **В3**) функционала Лагранжа (1.38) на множестве $\Gamma_7 \times \Lambda$, определяется для всех значений $i = 1, \dots, N$ и почти всех точек $x \in \Omega$ следующим образом:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.45)$$

где

$$\Omega_{*i} = \left\{ x \in \Omega : c(x, \tau_i) + a_i + \Psi_i^* = \min_{k=1,2,\dots,N} (c(x, \tau_k) + a_k + \Psi_k^*) \right\};$$

$$i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega \};$$

параметры $\Psi_1^*, \dots, \Psi_N^*$ – оптимальное решение двойственной задачи (1.40), приведенной к такому виду:

$$G(\Psi) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \min_{k=1,\dots,N} (c(x, \tau_k) + a_k + \Psi_k) \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \Psi_i b_i \rightarrow \max, \quad (1.46)$$

при условиях, что

$$\Psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N. \quad (1.47)$$

Чтобы решить задачу (1.46), (1.47), применим r -алгоритм, для чего от нее перейдем к задаче безусловной максимизации путем введения в целевую функцию (1.46) негладкой штрафной функции множества $\{\Psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}$, а именно:

$$P(\Psi) = G(\Psi) - S \sum_{i=p+1}^N \max \{0; -\Psi_i\} \rightarrow \max, \quad \Psi \in E_N, \quad (1.48)$$

где S – достаточно большое положительное число, значительно больше максимального из множителей Лагранжа для функции (1.46).

Определим i -ю компоненту вектора обобщенного градиента $g_p(\Psi) = (g_p^{\Psi_1}(\Psi), \dots, g_p^{\Psi_N}(\Psi))$ функции (1.48) в точке $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_N)$ следующим образом:

$$g_p^{\Psi_i}(\psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i, \quad i = 1, \dots, p; \quad (1.49)$$

$$g_p^{\Psi_i}(\tau, \Psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + S \cdot \max[0, \text{sign}(-\Psi_i)], \quad (1.50)$$

$$i = p + 1, \dots, N;$$

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_i) + a_i + \Psi_i \leq c(x, \tau_k) + a_k + \Psi_k, \\ & i \neq k, \text{ п. в. для } x \in \Omega, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.51)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

Опишем алгоритм решения задачи **A3**.

Алгоритм 1.3

Область Ω заключаем в параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем, что $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение: $\Psi = \Psi^{(0)}$. Вычисляем значения вектор-функции $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (1.45) при том, что $\Psi = \Psi^{(0)}$. Вычисляем значение обобщенного градиента $g_p^{\Psi}(\Psi)$ по узлам сетки, применяя формулы (1.49) и (1.50) в предположении, что $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\Psi = \Psi^{(0)}$, выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$ r -алгоритма и вычисляем: $\Psi^{(1)} = \Psi^{(0)} - h_0 g_p^{\Psi}(\Psi^{(0)})$.

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после выполнения k ($k=1,2,\dots$) шагов алгоритма получены определенные значения переменных $\Psi^{(k)}$, $\lambda^{(k-1)}(x)$ в узлах сетки.

Опишем $(k+1)$ -й шаг:

1. Вычисляем значение вектор-функции $\lambda^{(k)}(x)$ в узлах сетки по формулам (1.51) при том, что $\Psi = \Psi^{(k)}$.

2. Вычисляем значение обобщенного градиента $g_p^\Psi(\Psi)$ по формулам (1.49), (1.50) при условии, что $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$, $\Psi = \Psi^{(k)}$.

3. Осуществляем $(k+1)$ -й шаг г-алгоритма для максимизации функции (1.48) относительно переменной Ψ на пространстве E_N , краткая схема которого имеет такой вид:

$$\Psi^{(k+1)} = \Psi^{(k)} + h_k B_{k+1}^\Psi \tilde{g}_p^\Psi,$$

где B_{k+1}^Ψ – оператор отображения преобразованного пространства в основное пространство E_N , пересчет которого производится по следующим формулам: $B_0^\Psi = I_N$ (единичная матрица);

$$B_{k+1}^\Psi = B_k^\Psi R_\alpha \left(\frac{r_k}{\|r_k\|} \right); r_k = g_P^\Psi(\Psi^{(k)}) - g_P^\Psi(\Psi^{(k-1)}),$$

где $R_\alpha(\zeta)$ – оператор растяжения пространства в направлении ζ с коэффициентом растяжения α , матричная форма которого имеет такой вид:

$$R_\alpha(\zeta) = I_N + (\alpha - 1)\zeta\zeta^T;$$

$\tilde{g}_p^\Psi = B_{k+1}^* g_P^\Psi(\Psi^{(k)})$; h_k – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия минимума по направлению.

4. Если условие:

$$\|\Psi^{(k)} - \Psi^{(k+1)}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.52)$$

не выполняется, то переходим к $(k+2)$ -му шагу алгоритма, если выполняется – к п. 5.

5. Полагаем, что $\Psi^* = \Psi^{(l)}$, $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (1.52).

6. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала по формуле (1.46), если $\Psi = \Psi^*$, и для контроля правильности счета – по следующей формуле:

$$I(\lambda_*(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx. \quad (1.53)$$

Алгоритм описан.

Замечание к алгоритму 1.3. Оптимальное разбиение, полученное при помощи алгоритма 1.3 на координатной сетке, можно уточнять, применяя алгоритмы, предложенные в литературе [59].

1.2.4. Линейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множества при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров подмножеств

Математическая формулировка линейной однопродуктовой задачи А4 оптимального разбиения множеств при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров подмножеств приведена в разделе 1.1.2. Перепишем ее в виде задачи **В4**, удобной для дальнейших исследований.

Задача В4. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau)$$

где $\Gamma_2 = \left\{ \lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_1; \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p; \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N \right\};$

$$\Gamma_1 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega; \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N \right\};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Функции $c(x, \tau_i)$ – ограниченные, определенные на декартовом произведении $\Omega \times \Omega$, измеримые по аргументу x при любом фиксированном аргументе $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n)$ из множества Ω для всех $i = 1, \dots, N$; координаты центра τ_i , $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n)$, $i = 1, \dots, N$, неизвестны; $\rho(x)$ – ограниченные, измеримые, неотрицательные на множестве Ω функции; a_1, \dots, a_N , b_1, \dots, b_N – заданные неотрицательные числа, причем

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx.$$

Задача **В4** является частным случаем многопродуктовой задачи **А6** оптимального разбиения множеств при ограничениях с отысканием координат центров подмножеств, метод решения которой приведен в разделе 1.2.2. А значит, как следует из полученных результатов, оптимальное решение задачи **В4** для почти всех $x \in \Omega$ имеет такой вид:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Omega_{*i} \text{ и } x \notin \Omega_{*l}, \quad l < i, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.54)$$

где

$$\Omega_{*i} = \left\{ x \in \Omega : c(x, \tau_i) + a_i + \Psi_i^* = \min_{k=1,2,\dots,N} (c(x, \tau_k) + a_k + \Psi_k^*), \right. \\ \left. i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega \right\},$$

в качестве $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$, $\Psi_1^*, \dots, \Psi_N^*$ выбирается оптимальное решение задачи:

$$G(\Psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \Psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \left\{ - \sum_{i=1}^N \Psi_i b_i + \right. \\ \left. + \int_{\Omega} \min_{k=1,\dots,N} (c(x, \tau_k) + a_k + \Psi_k) \rho(x) dx \right\} \rightarrow \max, \quad (1.55)$$

при таких условиях:

$$\Psi_i \geq 0, \quad i = p + 1, \dots, N, \quad (1.56)$$

где

$$G_1(\tau, \Psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \left\{ -\sum_{i=1}^N \Psi_i b_i + \int_{\Omega} \min_{k=1, \dots, N} (c(x, \tau_k) + a_k + \Psi_k) \rho(x) dx \right\}. \quad (1.57)$$

Для решения задачи (1.55), (1.56) применим алгоритм псевдоградиентов с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов, близкий к r -алгоритму. С этой целью перейдем от задачи (1.55), (1.56) к задаче безусловной максимизации по аргументу Ψ при помощи введения в целевую функцию (1.57) негладкой штрафной функции множества $\{\Psi_i \geq 0, i = p + 1, \dots, N\}$.

Найти

$$\max_{\Psi \in E_N} \min_{\tau \in \Omega^N} P(\tau, \Psi), \quad (1.58)$$

где

$$P(\tau, \Psi) = G_1(\tau, \Psi) - S \sum_{i=p+1}^N \max\{0; -\Psi_i\}.$$

Здесь S – достаточно большое положительное число, значительно больше максимального из множителей Лагранжа для функции (1.57).

Определим i -ю, $i = 1, \dots, N$, компоненту $2N$ -мерного вектора обобщенного псевдоградиента

$$g_P(\tau, \Psi) = \left(-g_p^\Psi(\tau, \Psi), g_p^\tau(\tau, \Psi) \right) = \\ = \left(-g_p^{\Psi_1}(\tau, \Psi), \dots, -g_p^{\Psi_N}(\tau, \Psi), g_p^{\tau_1}(\tau, \Psi), \dots, g_p^{\tau_N}(\tau, \Psi) \right),$$

функции (1.58) в точке $(\tau, \Psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \Psi_1, \dots, \Psi_N)$, следующим образом:

$$g_P^{\Psi_i}(\tau, \Psi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i, & i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + S \max(0, \text{sign}(-\Psi_i)), & i = p + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1.59)$$

$$g_P^{\tau_i}(\tau, \Psi) = \int_{\Omega} \rho(x) g_c^{\tau_i}(\tau, x) \lambda_i(x) dx, \quad i=1, \dots, N, \quad (1.60)$$

где $g_c^{\tau_i}(\tau, x)$ – i -я компонента N -мерного вектора обобщенного градиента $g_c^{\tau}(\tau, x)$ функции $c(x, \tau_i)$ в точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$;

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_i) + a_i + \Psi_i = \min_{k=1, \dots, N} [c(x, \tau_k) + a_k + \Psi_k^*], \\ & i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.61)$$

Опишем алгоритм решения задачи **В4** в предположении, что область Ω представляет собой параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат.

Алгоритм 1.4. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение $(\tau, \Psi) = (\tau^{(0)}, \Psi^{(0)})$.

Вычисляем значения вектор-функции $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (1.61) при том, что $\Psi = \Psi^{(0)}$, $\tau = \tau^{(0)}$. Вычисляем значение обобщенного псевдоградиента $(-g_P^{\Psi}(\tau^{(0)}, \Psi^{(0)}), g_P^{\tau}(\tau^{(0)}, \Psi^{(0)}))$ в узлах сетки по формулам (1.59) и (1.60), если $\Psi = \Psi^{(0)}$, $\tau = \tau^{(0)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$ r -алгоритма и вычисляем первое приближение искомых параметров, то есть

$$\begin{aligned} \tau^{(1)} &= P_{\Pi} \left(\tau^{(0)} - h_0 g_P^{\tau}(\tau^{(0)}, \Psi^{(0)}) \right), \\ \Psi^{(1)} &= \Psi^{(0)} - h_0 g_P^{\Psi}(\tau^{(0)}, \Psi^{(0)}) \end{aligned}$$

где P_{Π} – оператор проектирования на параллелепипед Π .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после выполнения k ($k = 1, 2, \dots$) шагов алгоритма получены определенные значения переменных $\Psi^{(k)}$, $\tau^{(k)}$ и вектор-функций $\lambda^{(k-1)}(x)$ в узлах сетки.

Опишем $(k + 1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значение вектор-функции $\lambda^{(k)}(x)$ в узлах сетки по формулам (1.61), когда $\tau = \tau^{(k)}$, $\Psi = \Psi^{(k)}$.

2. Вычисляем значение обобщенного псевдоградиента $g_P(\tau^{(k)}, \Psi^{(k)})$ по формулам (1.59), (1.60), если $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$, $\tau = \tau^{(k)}$, $\Psi = \Psi^{(k)}$.

3. Осуществляем $(k + 1)$ -й шаг алгоритма обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, краткая схема которого имеет такой вид:

$$\begin{aligned}\tau^{(k+1)} &= P_{\Pi} \left(\tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\tau} \tilde{g}_P^{\tau} \right); \\ \Psi^{(k+1)} &= \Psi^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\Psi} \tilde{g}_P^{\Psi},\end{aligned}$$

где B_{k+1}^{τ} , B_{k+1}^{Ψ} – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство E_N , пересчет которых производится по следующим формулам: $B_0^{\Psi} = I_N$, $B_0^{\tau} = I_{2N}$; I_N , I_{2N} – единичные матрицы;

$$\begin{aligned}B_{k+1}^{\Psi} &= B_k^{\Psi} R_{\alpha} \left(\frac{r_k}{\|r_k\|} \right), r_k = g_P^{\Psi}(\tau^{(k)}, \Psi^{(k)}) - g_P^{\Psi}(\tau^{(k-1)}, \Psi^{(k-1)}); \\ B_{k+1}^{\tau} &= B_k^{\tau} R_{\alpha} \left(\frac{\bar{r}_k}{\|\bar{r}_k\|} \right), \bar{r}_k = g_P^{\tau}(\tau^{(k)}, \Psi^{(k)}) - g_P^{\tau}(\tau^{(k-1)}, \Psi^{(k-1)}),\end{aligned}$$

где $R_{\alpha}(\zeta)$ – оператор растяжения пространства в направлении ζ с коэффициентом растяжения α , матричная форма которого имеет такой вид:

$$R_{\alpha}(\zeta) = I_N + (\alpha - 1)\zeta\zeta^T;$$

вектор $\tilde{g}_P = B_{k+1}^* g_P(\tau^{(k)}, \Psi^{(k)})$; h_k – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия минимума по направлению.

4. Если условие

$$\left\| \left(\tau^{(k)}, \Psi^{(k)} \right) - \left(\tau^{(k+1)}, \Psi^{(k+1)} \right) \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.62)$$

не выполняется, то переходим к $(k+2)$ -му шагу алгоритма, если выполняется – к п. 5.

5. Полагаем, что $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, $\tau_* = \tau^{(l)}$, $\Psi^* = \Psi^{(l)}$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (1.62).

6. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала по формуле (1.57) при условии, что $\tau = \tau_*$, $\Psi = \Psi^*$, и для контроля правильности счета – по следующей формуле:

$$I(\lambda_*(x), \tau_*) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_{*i}) + a_i) \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx. \quad (1.63)$$

Алгоритм описан.

Замечание к алгоритму 1.4. Оптимальное разбиение, полученное при помощи алгоритма 1.4 на координатной сетке, можно уточнять, применяя алгоритмы, описанные в литературе [59].

1.3. НЕПРЕРЫВНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА

В отличие от рассмотренных выше линейных задач ОРМ, для которых оптимальное решение исходной бесконечномерной задачи удастся найти в явном виде, в нелинейном случае отыскание оптимального решения исходной бесконечномерной задачи сводится к поиску решения некоторого вспомогательного операторного уравнения с параметрами.

Данный раздел содержит теоретическое обоснование методов решения нелинейных однопродуктовых задач ОРМ с неизвестным заранее расположением центров подмножеств, координаты которых отыскиваются в процессе решения исходной задачи [37, 42, 49].

На основе предложенных методов разработаны алгоритмы, составной частью которых является модификация r -алгоритма Н. З. Шора. Результаты реализации разработанных алгоритмов для решения некоторых модельных задач можно найти в литературе [37, 42, 49, 55].

1.3.1. Нелинейная однопродуктовая задача оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств при выпуклом целевом функционале

Приведём математическую постановку **непрерывной нелинейной однопродуктовой задачи оптимального разбиения множества Ω из пространства E_n на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (среди них могут быть и пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров τ_1, \dots, τ_N этих подмножеств соответственно.**

Задача А7

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i \left(\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \right) + \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx \right]$$

при таких условиях:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p;$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N;$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$.

Здесь функции $c(x, \tau_i)$ – действительные, ограниченные, определенные на декартовом произведении $\Omega \times \Omega$, измеримые по x при любом фиксированном аргументе $\tau_i = (\tau_i^1, \dots, \tau_i^n)$, из множества Ω для всех значений $i = 1, \dots, N$; $\rho(x)$ – ограниченная, измеримая, неотрицательная на множестве Ω функция; $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, – действительные, ограниченные, выпуклые, дважды непрерывно дифференцируемые функции своего аргумента; b_1, \dots, b_N – заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи, а именно:

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N,$$

Перепишем задачу **A7** относительно характеристических функций $\lambda_i(x)$ подмножеств Ω_i , $i = 1, \dots, N$, следующим образом:

Задача В7. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

где $\Gamma_2 = \{\lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_1; \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p;$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = p + 1, \dots, N\}; \tau \in \Omega^N;$$

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1, i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega\}.$$

Здесь

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) + \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx \right]. \quad (1.64)$$

От задачи **В7** с булевыми значениями переменных $\lambda_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, перейдём к соответствующей задаче со значениями $\lambda_i(\cdot)$ из отрезка $[0; 1]$, т. е. рассмотрим такую задачу:

Задача В7.1. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_8 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

где

$$\Gamma_8 = \{\lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_7; \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p;$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = p + 1, \dots, N\}.$$

$$\Gamma_7 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega,$$

$$0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N\};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Как доказано исследованиями [59], Γ_8 – ограниченное, замкнутое, выпуклое множество гильбертова пространства $L_2^N(\Omega)$ с нормой

$$\|\lambda(\cdot)\| = \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [\lambda_i(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

Тогда, согласно литературным данным [15], множество Γ_8 слабо компактно в гильбертовом пространстве $L_2^N(\Omega)$.

Очевидно, что

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \min_{(\lambda, \tau) \in \Gamma_8 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau) = \min_{\tau \in \Omega^N} \left(\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_8} I(\lambda(\cdot), \tau) \right). \quad (1.65)$$

Изучим сначала свойства функционала $I(\lambda(\cdot), \tau)$ из условия (1.64).

Обозначив, что $f_i(\lambda_i(\cdot)) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx$, перепишем функционал (1.64) в таком виде:

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i(f_i(\lambda_i(\cdot))) + \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx \right]. \quad (1.66)$$

Имеет место следующее утверждение:

Утверждение 1.4. Если $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, – выпуклые функции своего аргумента, то при каждом фиксированном аргументе $\tau \in \Omega^N$ функционал $I(\lambda(\cdot), \tau)$ из условия (1.66) будет выпуклым по аргументу $\lambda(\cdot)$ на пространстве $L_2^N(\Omega)$.

Доказательство

Из выпуклости функций $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, в области определения линейности функционалов $f_i(\lambda_i(\cdot)) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx$, $i = 1, \dots, N$, на пространстве $L_2(\Omega)$ и с учетом свойств сложных функций следует, что функционалы $\varphi_i(f_i(\lambda_i(\cdot)))$, $i = 1, \dots, N$, тоже будут выпуклы по функции $\lambda_i(\cdot)$ на пространстве $L_2(\Omega)$.

Пусть $\lambda^1(x), \lambda^2(x) \in L_2^N(\Omega)$ п. в. для $x \in \Omega$. Рассмотрим $\lambda^\alpha(x) = \alpha\lambda^1(x) + (1-\alpha)\lambda^2(x)$ п. в. для $x \in \Omega$, $\alpha \in [0, 1]$. Очевидно, что $\lambda^\alpha(\cdot) \in L_2^N(\Omega)$. Для функционала $I(\lambda^\alpha(\cdot), \tau)$ при фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$

$$\begin{aligned} I(\lambda^\alpha(\cdot), \tau) &= \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i \left(f_i(\lambda_i^\alpha(\cdot)) \right) + \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i^\alpha(x) dx \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i \left(f_i \left(\alpha \lambda_i^1(\cdot) + (1-\alpha) \lambda_i^2(\cdot) \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \left(\alpha \lambda_i^1(x) + (1-\alpha) \lambda_i^2(x) \right) dx \right] \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left[\alpha \varphi_i \left(f_i(\lambda_i^1(\cdot)) \right) + (1-\alpha) \varphi_i \left(f_i(\lambda_i^2(\cdot)) \right) + \alpha \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i^1(x) dx + \right. \\ &\quad \left. + (1-\alpha) \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i^2(x) dx \right] = \\ &= \alpha \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i \left(f_i(\lambda_i^1(\cdot)) \right) + \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i^1(x) dx \right] + \\ &\quad + (1-\alpha) \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i \left(f_i(\lambda_i^2(\cdot)) \right) + \int_{\Omega} c(x, \tau_i) \rho(x) \lambda_i^2(x) dx \right] = \\ &= \alpha \cdot I(\lambda^1(\cdot), \tau) + (1-\alpha) \cdot I(\lambda^2(\cdot), \tau). \end{aligned}$$

Утверждение 1.4 доказано.

Замечание. Из выпуклости функционала $I(\lambda(\cdot), \tau)$ по аргументу $\lambda(\cdot)$ на пространстве $L_2^N(\Omega)$ следует его непрерывность по аргументу $\lambda(\cdot)$ на $L_2^N(\Omega)$, [37].

Теорема 1.7. Внутренняя задача из выражения (1.65) имеет решение при каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$.

Доказательство. Действительно, из обобщенной теоремы Вейерштрасса [15] следует, что непрерывный выпуклый по аргументу $\lambda(\cdot)$ функционал $I(\lambda(\cdot), \tau)$ из (1.65), определенный на гильбертовом пространстве $L_2^N(\Omega)$, достигает при каждом фиксированном векторе

$\tau \in \Omega^N$ своего минимума по функции $\lambda(\cdot)$ на любом выпуклом, замкнутом, ограниченном множестве (в нашем случае на множестве Γ_8).

Теорема 1.7 доказана.

Таким образом, как следует из утверждения 2.1 и теоремы 2.1, при каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ внутренняя задача из выражения (1.65) глобально разрешима относительно вектор-функции $\lambda(\cdot)$ на множестве Γ_8 .

Замечание. Условия теоремы 1.7 могут быть ослаблены, т. к. не только выпуклые непрерывные функционалы будут достигать на множестве Γ_8 своей нижней грани. Таким же свойством обладают непрерывные (слабо полунепрерывные) снизу функционалы.

Действительно, как уже отмечалось выше, ограниченное, замкнутое, выпуклое множество в гильбертовом пространстве $L_2^N(\Omega)$ слабо компактно. По обобщенной теореме Вейерштрасса [15] полунепрерывный (слабо полунепрерывный) снизу по вектор-функции $\lambda(\cdot)$ функционал $I(\lambda(\cdot), \tau)$ на слабо компактном множестве Γ_8 гильбертова пространства $L_2^N(\Omega)$ ограничен снизу и достигает на этом множестве своей нижней грани по вектор-функции $\lambda(\cdot)$ при каждом фиксированном аргументе $\tau \in \Omega^N$.

1.3.2. Обоснование метода решения задачи

Введем для задачи **B7.1** функционал Лагранжа следующим образом:

$$\begin{aligned} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi) &= I(\lambda(\cdot), \tau) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left[\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\psi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) + \int_{\Omega} (c(x, \tau_i) + \psi_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx \right] - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i, \quad (1.67) \end{aligned}$$

где $\psi = (\psi_1 \dots \psi_N)$ – N -мерный вектор вещественных чисел, у которого компоненты $\psi_1 \dots \psi_p$ произвольны по знаку, а $\psi_{p+1} \dots \psi_N$ – неотрицательны; $\lambda(x) \in \Gamma_7$ для $x \in \Omega$; $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$.

Пару элементов $(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi^*)$ назовем седловой точкой функционала (1.67) на множестве $\{\Gamma_7 \times \Omega^N\} \times \Lambda$, где

$$\Lambda = \{\psi = (\psi_1 \dots \psi_N) \in E_N : \psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\},$$

если

$$h(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi) \leq h(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi^*) \leq h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi^*)$$

$$\text{для всех } \lambda(x) \in \Gamma_7, \tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda,$$

или

$$\begin{aligned} & h(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi^*) = \\ & = \max_{\psi \in \Lambda} \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_7 \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_7 \times \Omega^N} \max_{\psi \in \Lambda} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi). \end{aligned}$$

Не останавливаясь пока на исследовании вопроса о существовании седловой точки, перейдем к решению следующей задачи:

$$\max_{\psi \in \Lambda} \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_7 \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi).$$

Обозначим, что

$$G(\psi) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_7 \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi), \psi \in \Lambda.$$

Задача, двойственная к задаче **B7.1**, имеет такой вид:

$$G(\psi) \rightarrow \max, \psi \in \Lambda. \quad (1.68)$$

Для отыскания $\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_7 \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$ перейдем к следующей задаче:

$$\min_{\tau \in \Omega^N} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_7} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi), \text{ если } \psi \in \Lambda. \quad (1.69)$$

Утверждение 1.5. При каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном значении $\psi \in \Lambda$ функционал $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$ из задачи (1.69), определяемый по формуле (1.67), будет выпуклым по вектор-функции $\lambda(\cdot)$ на пространстве $L_2^N(\Omega)$, если $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, – выпуклые функции своего аргумента.

Доказательство утверждения 1.5 аналогично доказательству утверждения 1.4.

Утверждение 1.6. По аналогии с теоремой 1.7 легко доказать, что при каждом фиксированном аргументе $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном векторе $\psi \in \Lambda$ минимум по вектор-функции $\lambda(\cdot)$ функционала $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$ достигается на симплексе Γ_7 .

Таким образом, внутренняя задача в условии (1.69) глобально разрешима относительно вектор-функции $\lambda(\cdot)$ на множестве Γ_7 .

Обозначим в задаче (1.69), что

$$G_1(\tau, \psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_7} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi), \quad \tau \in \Omega^N, \quad \psi \in \Lambda. \quad (1.70)$$

То есть, далее вместо двойственной задачи (1.68), учитывая условия (1.69), (1.70), перейдем к решению следующей задачи:

$$\max_{\psi \in \Lambda} \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi).$$

Для этого сначала конкретизируем выражение $G_1(\tau, \psi)$ из обозначения (1.70).

Подставив в задачу (1.70) функционал $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$ из выражения (1.67), получим такой вид функции:

$$G_1(\tau, \psi) = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_7} \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) + \int_{\Omega} (c(x, \tau_i) + \psi_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx \right], \quad (1.71)$$

$$\tau \in \Omega^N, \quad \psi \in \Lambda.$$

Обозначим в (1.71), что

$$\Phi_i(\lambda_i(\cdot), \tau_i, \psi_i) = \varphi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) + \int_{\Omega} (c(x, \tau_i) + \psi_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx,$$

и рассмотрим такую задачу:

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_7} \Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi), \quad \tau \in \Omega^N, \quad \psi \in \Lambda,$$

где

$$\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(\lambda_i(\cdot), \tau_i, \psi_i). \quad (1.72)$$

Очевидно, что при каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном векторе $\psi \in \Lambda$ для функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ из задачи (1.72) имеют место утверждения, аналогичные утверждениям 1.5 и 1.6, т. е. здесь функционал $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ будет выпуклым по вектор-функции $\lambda(\cdot)$ на всем пространстве $L_2^N(\Omega)$, если $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, – выпуклые функции своего аргумента, и его минимум по вектор-функции $\lambda(\cdot)$ функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ достигается на множестве Γ_7 .

Обозначим через $\text{sgrad}_\lambda \Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ субградиент по аргументу $\lambda(\cdot)$ выпуклого по вектор-функции $\lambda(\cdot)$ при каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном векторе $\psi \in \Lambda$ функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$.

Можно показать, что $\text{sgrad}_\lambda \Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ при каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном векторе $\psi \in \Lambda$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{sgrad}_\lambda \Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi) = \\ = \left(\Phi'_{\lambda_1}(\lambda_1(\cdot), \tau_1, \psi_1), \dots, \Phi'_{\lambda_i}(\lambda_i(\cdot), \tau_i, \psi_i), \dots, \Phi'_{\lambda_N}(\lambda_N(\cdot), \tau_N, \psi_N) \right), \end{aligned}$$

где для всех $i = 1, \dots, N$

$$\Phi'_{\lambda_i}(\lambda_i(\cdot), \tau_i, \psi_i) = \varphi'_{iY_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) \rho(x) + (c(x, \tau_i) + \psi_i) \rho(x),$$

здесь

$$Y_i = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx. \quad (1.73)$$

Согласно исследованиям [96], при каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном векторе $\psi \in \Lambda$ необходимое и достаточное условие минимума по вектор-функции $\lambda(\cdot)$ выпуклого относительно нее функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ на симплексе Γ_7 имеет такой вид:

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_7} \int_{\Omega} \left(\text{sgrad}_\lambda \Phi(\lambda^*(\cdot), \tau, \psi), (\lambda(x) - \lambda^*(x)) \right) dx = 0.$$

Перепишем полученное равенство следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\text{sgrad}_{\lambda} \Phi \left(\lambda^* (\cdot), \tau, \psi \right), \lambda^* (x) \right) dx = \\ & = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_7} \int_{\Omega} \left(\text{sgrad}_{\lambda} \Phi \left(\lambda^* (\cdot), \tau, \psi \right), \lambda(x) \right) dx. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Предположим, что при каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном векторе $\psi \in \Lambda$ для функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ из задачи (1.72) по переменной $\lambda(\cdot)$ выполняется условие, которое мы назовем, следуя литературным данным [96], условием сильной регулярности, если

$$\Phi'_{\lambda_i} \left(\lambda_i^* (\cdot), \tau_i, \psi_i \right) = \Phi'_{iY_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^* (x) dx \right) \rho(x) + (c(x, \tau_i) + \psi_i) \rho(x) \neq 0,$$

$i = 1, \dots, N$, за исключением множества точек $x \in \Omega$ нулевой меры, или, в другой записи,

$$\text{mes} \left\{ x \in \Omega : \left(c(x, \tau_i) + \psi_i + \Phi'_{iY_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^* (x) dx \right) \right) \rho(x) = 0 \right\} = 0, \quad (1.75)$$

где Y_i , $i = 1, \dots, N$, определяются по формуле (1.73).

Условие сильной регулярности означает, что для оптимальной вектор-функции $\lambda^*(x)$ ни на одном множестве точек $x \in \Omega$ ненулевой меры не удовлетворяется ни одно из уравнений Эйлера:

$$\Phi'_{\lambda_i} \left(\lambda_i^* (\cdot), \tau_i, \psi_i \right) = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

для задачи минимизации без ограничений функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$. определяемого выражением (1.72).

Как следует из материалов исследований [59, 96], в случае выполнения условия сильной регулярности (1.75) вектор-функция $\lambda^*(x)$, обеспечивающая минимум линейному функционалу из правой части формулы (1.74), определяется при каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном векторе $\psi \in \Lambda$ очевидным образом из следующего операторного уравнения:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \left(c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx \right) \right) \rho(x) > 0, \\ 1, & \text{если } \left(c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx \right) \right) \rho(x) < 0, \quad i = 1, \dots, N, \\ [0, 1], & \text{если } \left(c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx \right) \right) \rho(x) = 0, \end{cases}$$

или с учетом условия (1.75) и того, что мера множества граничных точек подмножеств Ω_i , $i = 1, \dots, N$, равна нулю, получаем такой вид оптимальной вектор-функции:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx \right) \leq \\ & \leq c(x, \tau_k) + \psi_k + \varphi'_{kY_k} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_k^*(x) dx \right), \\ & i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega \text{ (другими словами,} \\ & i = k \text{ только на множестве меры ноль,} \\ & \text{т. е. в точках границы между} \\ & \text{подмножествами } \Omega_i \text{ и } \Omega_k) \text{ } i, k = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.76)$$

С применением обозначений (1.73), прибавляя и вычитая под знаком суммы в формуле (1.71) выражение $\varphi'_{iY_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right)$, перепишем функцию $G_1(\tau, \psi)$ из (1.71) в таком виде:

$$G_1(\tau, \psi) = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma'} \sum_{i=1}^N \left[\left(\varphi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) - \varphi'_{iY_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) \right) \cdot \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx + \int_{\Omega} \left(c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) \right) \rho(x) \lambda_i(x) dx \right] \quad (1.77)$$

$$\tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda.$$

Подставляя выражение для определения вектор-функции $\lambda_i^*(x)$ из условия (1.76) в ту часть формулы (1.77), которая линейно зависит от аргумента $\lambda(\cdot)$ и оставляя пока переменной величину Y_i , $i = 1, \dots, N$, связанную с $\lambda(\cdot)$ зависимостью (1.73), получаем (с учетом ограничений задачи В7.1) выражение, определяющее функцию $G_1(\tau, \psi)$, в следующем виде:

$$G_2(Y, \tau, \psi) = -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \sum_{i=1}^N \left[\left(\varphi_i(Y_i) - \varphi'_{iY_i}(Y_i) \cdot Y_i \right) + \int_{\Omega} \min_{k=1, N} \left(c(x, \tau_k) + \psi_k + \varphi'_{kY_k}(Y_k) \right) \rho(x) dx \right], \quad (1.78)$$

$$\tau \in \Omega^N, \psi \in \Lambda, Y \in U = \left\{ Y = (Y_1, \dots, Y_N) \in E_N : 0 \leq Y_i \leq b_i, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Таким образом, конкретизируя выражение для функции $G_1(\tau, \psi)$ из задачи (1.70), двойственную задачу (1.68) можно записать таким образом:

$$\max_{\psi \in \Lambda} \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in U} G_2(Y, \tau, \psi). \quad (1.79)$$

Прежде, чем сформулировать алгоритм решения задачи (1.79), остановимся на некоторых свойствах функции $G_2(Y, \tau, \psi)$, определяемой по формуле (1.78), описанных в литературе [97, 42].

При каждом фиксированном векторе $\psi \in \Lambda$ и каждом фиксированном векторе $Y \in U$, функция $G_2(Y, \tau, \psi)$ из выражения (1.78) является по аргументу $\tau \in \Omega^N$, вообще говоря, недифференцируемой и многоэкстремальной. Однако в некоторых частных случаях (см. [37, 42]), вводя на множестве $\Omega \subset E_n$ определенные отношения порядка между координатами точек τ_1, \dots, τ_N можно тем самым множество Ω^N представить в виде объединения таких выпуклых подмножеств, каждое из которых будет определяться своим отношением порядка между координатами точек τ_1, \dots, τ_N и на каждом из таких выпуклых подмножеств множества Ω^N функция $G_2(Y, \tau, \psi)$ из выражения (1.78) будет выпуклой по переменной τ и достигать по ней локального минимума. К тому же, значения функции $G_2(Y, \tau, \psi)$ при каждом фиксированном векторе

$\psi \in \Lambda$ и каждом фиксированном векторе $Y \in U$ в этих точках локальных минимумов будут совпадать. Следовательно, в этом случае задача отыскания $\min_{\tau \in \Omega^N} G_2(Y, \tau, \psi)$ при каждом фиксированном векторе $\psi \in \Lambda$ и каждом фиксированном векторе $Y \in U$ будет одноэкстремальной.

При каждом фиксированном аргументе $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном аргументе $\psi \in \Lambda$ функция $G_2(Y, \tau, \psi)$ из условия (1.78) по переменной Y будет вогнутой на выпуклом множестве U , если $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$ являются выпуклыми функциями своего аргумента [97].

И, наконец, при каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном аргументе $Y \in U$ функция $G_2(Y, \tau, \psi)$ из выражения (1.78) по переменной ψ будет вогнутой недифференцируемой на множестве Λ .

Учитывая вышеизложенное и применяя полученные в литературе [59] результаты к аналогичной непрерывной линейной однопродуктовой задаче оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств **В7.1**, можно сделать вывод, что для нее справедлива теорема Куна – Таккера в двойственной форме, т. е. $I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = G(\psi^*)$, где $(\lambda_*(\cdot), \tau_*)$ – оптимальное решение задачи **В7.1**, ψ^* – оптимальное решение двойственной задачи (1.79), причем максимум в этой задаче достигается.

Сформулируем теорему, подводящую итог вышеизложенным рассуждениям и обуславливающую переход от бесконечномерной задачи **В7.1** к поиску седловой точки функционала (1.67) посредством решения негладкой конечномерной задачи (1.79), к которой сведена двойственная задача (1.68).

Теорема 1.8. Пусть

1) $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, – выпуклые, дважды непрерывно дифференцируемые функции своего аргумента;

2) при каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном векторе $\psi \in \Lambda$ имеет место условие сильной регулярности (1.75), то есть

$$\text{mes} \left\{ x \in \Omega : \left(c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i} \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx \right) \right) \rho(x) = 0 \right\} = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

**Модели, методы и алгоритмы решения непрерывных линейных
и нелинейных задач оптимального разбиения множеств**

тогда седловая точка $(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi^*)$, где первая компонента $\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}$ является оптимальным решением задачи В7.1, функционала Лагранжа (1.67) на множестве $\{\Gamma \times T_{\langle \tau_1, \dots, \tau_N \rangle}^j\} \times \Lambda$ (здесь $T_{\langle \tau_1, \dots, \tau_N \rangle}^j$ – выпуклые подмножества множества Ω^N , определяемые своим отношением порядка между координатами точек τ_1, \dots, τ_N , на которых функция $G_2(Y, \tau, \psi)$ определяемая по формуле (1.78) выпукла, и объединение которых составляет множество Ω^N) определяется для всех значений $i = 1, \dots, N$ и почти всех точек $x \in \Omega$ следующим образом:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \in \Omega_{*i} \text{ и } x \notin \Omega_{*q}, q \leq i, \\ 0 & \text{если } x \notin \Omega_{*i}, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{*i} &= \left\{ x \in \Omega : c(x, \tau_i^*) + \psi_i^* + \phi'_{iY_i}(Y_i^*) = \right. \\ &= \left. \min_{k=1, \dots, N} \left(c(x, \tau_k^*) + \psi_k^* + \phi'_{kY_k}(Y_k^*) \right), i \neq k \text{ п. в. для } x \in \Omega \right\}, \end{aligned}$$

здесь параметры Y_1^*, \dots, Y_N^* , $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$, $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ – оптимальное решение двойственной задачи (1.68), приведенной к такому виду:

$$\begin{aligned} G(\psi) &= \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in U} G_2(Y, \tau, \psi) = \\ &= \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in U} \left\{ - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \cdot \sum_{i=1}^N \left[\left(\phi_i(Y_i) - \phi'_{iY_i}(Y_i) \cdot Y_i \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\Omega} \min_{k=1, N} \left(c(x, \tau_k) + \psi_k + \phi'_{kY_k}(Y_k) \right) \rho(x) dx \right] \right\} \rightarrow \max, \end{aligned}$$

при следующих условиях:

$$\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N.$$

Утверждение 1.7. В случае выполнения условия сильной регулярности (1.75) множества оптимальных решений задач **В7** и **В7.1** совпадают.

Доказательство утверждения 1.7 основано на справедливости сформулированных ниже трёх утверждений 1.8 – 1.10.

Утверждение 1.8. При каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном векторе $\psi \in \Lambda$ ограниченное, замкнутое, выпуклое множество Γ_7 гильбертова пространства $L_2^N(\Omega)$ является слабо компактным и (согласно теореме Крейна – Мильмана) содержит по крайней мере одну крайнюю точку.

Утверждение 1.9. Среди множества точек, в которых линейный относительно аргумента $\lambda(\cdot)$ функционал

$$R(\lambda(\cdot), \tau, \psi) = \int_{\Omega} \left(\text{sgrad}_{\lambda} \Phi \left(\lambda^*(\cdot), \tau, \psi \right), \lambda(x) \right) dx, \quad (1.80)$$

достигает при каждом фиксированном аргументе $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном аргументе $\psi \in \Lambda$ минимума по вектор-функции $\lambda(\cdot)$ на множестве Γ_7 , найдется хотя бы одна крайняя точка этого множества.

Утверждение 1.10. Крайние точки симплекса Γ_7 представляют собой характеристические функции некоторых подмножеств Ω_i , образующих при каждом фиксированном векторе $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном векторе $\psi \in \Lambda$ разбиение множества Ω .

Таким образом, множества оптимальных решений задач **B7** и **B7.1** совпадают.

1.3.3. Алгоритм решения задачи

Приведем здесь алгоритм решения задачи **A7**, основанный на теореме 1.8.

Для отыскания оптимального решения задачи (1.79) будем использовать эвристический алгоритм обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, близкий к r -алгоритму Шора.

Для этого от задачи (1.79) путем введения в целевую функцию (1.78) негладких штрафных функций множеств $\{\psi_i \geq 0, i = p + 1, \dots, N\}$, $\{Y_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}$, $\{Y_i \leq b_i, i = 1, \dots, N\}$ перейдем к следующей задаче:

найти

$$\max_{\psi \in E^N} \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in E^N} P(Y, \tau, \psi), \quad (1.81)$$

где
$$P(Y, \tau, \psi) = G_2(Y, \tau, \psi) - S_1 \cdot \sum_{i=1}^N \max\{0, -\psi_i\} - S_2 \cdot \sum_{i=1}^N \max\{0, Y_i\} - S_3 \cdot \sum_{i=1}^N \max\{0, Y_i - b_i\}. \quad (1.82)$$

Здесь S_1, S_2, S_3 – достаточно большие положительные числа, их значения существенно превышают максимальные из множителей Лагранжа для функции (1.78).

О возможности перехода от задачи (1.79) к задаче (1.81), (1.82) см. в литературе [96, 113, 118].

Определим i -ю компоненту $3N$ -мерного вектора обобщенного псевдоградиента, то есть

$$g(Y, \tau, \psi) = \left(g_P^Y(Y, \tau, \psi), g_P^\tau(Y, \tau, \psi), g_P^\psi(Y, \tau, \psi) \right) = \left(\begin{array}{l} -g_p^{Y_1}(Y, \tau, \psi), \dots, -g_p^{Y_N}(Y, \tau, \psi); \\ g_p^{\tau_1}(Y, \tau, \psi), \dots, g_p^{\tau_N}(Y, \tau, \psi); -g_p^{\psi_1}(Y, \tau, \psi), \dots, -g_p^{\psi_N}(Y, \tau, \psi) \end{array} \right)$$

функции (1.82) в точке $(Y, \tau, \psi) = (Y_1, \dots, Y_N; \tau_1, \dots, \tau_N; \psi_1, \dots, \psi_N)$, следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_p^{Y_i}(Y, \tau, \psi) = -\varphi''_{iY_i Y_i}(Y_i) \cdot Y_i + S_2 \max[0, \text{sign}(-Y_i)] - \\ \quad - S_3 \max[0, \text{sign}(Y_i - b_i)], \\ \text{если } i \neq k, \text{ где } k : \left[c(x, \tau_k) + \psi_k + \varphi'_{kY_k}(Y_k) \right] = \\ \quad = \min_{l=1, N} \left[c(x, \tau_l) + \psi_l + \varphi'_{lY_l}(Y_l) \right], \\ g_p^{Y_k}(Y, \tau, \psi) = -\varphi''_{kY_k Y_k}(Y_k) \cdot Y_k + \varphi''_{kY_k Y_k}(Y_k) \cdot \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_k(x) dx + \\ \quad + S_2 \max[0, \text{sign}(-Y_k)] - S_3 \max[0, \text{sign}(Y_k - b_k)]; \\ \quad \quad \quad i = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (1.83)$$

$$g_p^{\tau_i}(Y, \tau, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \cdot g_c^{\tau_i}(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.84)$$

где $g_c^{\tau_i}(x, \tau_i)$ – i -я компонента N -мерного вектора обобщенного градиента $g_c^{\tau_i}(x, \tau_i)$ функции $c(x, \tau_i)$ в точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$, при фиксированном значении x , имеющая такой вид:

$$g_c^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau) \\ \text{-----} \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau) \end{pmatrix};$$

$$g_p^{\Psi_i}(Y, \tau, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + S_1 \max[0, \text{sign}(-\psi_i)], \quad (1.85)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

В формулах (1.83) – (1.85) характеристическая функция $\lambda_i(x)$, $i = 1, \dots, N$, определяется следующим образом:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & c(x, \tau_i) + \psi_i + \phi'_{iY_i}(Y_i) = \\ & = \min_{k=1, N} [c(x, \tau_k) + \psi_k + \phi'_{kY_k}(Y_k)], \\ & i \neq k \quad \text{п. в. для } x \in \Omega, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.86)$$

Опишем алгоритм решения задачи **A7** в случае, когда Ω является n -мерным параллелепипедом Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат.

Алгоритм 1.5

Предварительный этап. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение $(Y, \tau, \psi) = (Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)})$. Вычисляем значение $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (1.86), при этом $Y = Y^{(0)}$, $\tau = \tau^{(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$. Вычисляем значение обобщенного псевдоградиента:

$$g_p^Y(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}), g_p^{\tau}(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)}), g_p^{\psi}(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)})$$

в узлах сетки по формулам (1.83) – (1.85), если $Y = Y^{(0)}$, $\tau = \tau^{(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$. Выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$ r -алгоритма Шора.

Первый шаг алгоритма проводим, используя такие формулы:

$$\begin{aligned} Y^{(1)} &= Y^{(0)} - h_0 g_p^Y \left(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)} \right), \\ \tau^{(1)} &= P_{\Pi} \left(\tau^{(0)} - h_0 g_p^\tau \left(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)} \right) \right), \\ \psi^{(1)} &= \psi^{(0)} - h_0 g_p^\psi \left(Y^{(0)}, \tau^{(0)}, \psi^{(0)} \right), \end{aligned}$$

где P_{Π} – оператор проектирования на параллелепипед Π .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после выполнения $k, k = 1, 2, \dots$, шагов алгоритма получены определенные значения переменных $Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$ в узлах сетки.

Опишем **($k+1$)-й шаг** алгоритма.

1. Вычисляем значения вектор-функции $\lambda^{(k)}(x)$ в узлах сетки по формулам (1.86) при $Y = Y^{(k)}, \tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}$.

2. Вычисляем градиент $g_p(Y, \tau, \psi)$ по формулам (1.83) – (1.85) при $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x), Y = Y^{(k)}, \tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}$.

3. Выполняем $(k+1)$ -й шаг r -алгоритма обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, близкого к r -алгоритму Шора в H -форме [118, 121], итерационная формула которого имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Y^{(k+1)} &= Y^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} g_p^Y \left(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right)}{\sqrt{\left(H_{k+1} g_p^Y \left(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right), g_p^Y \left(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right) \right)}}, \\ \tau^{(k+1)} &= P_{\Pi} \left(\tau^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} g_p^\tau \left(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right)}{\sqrt{\left(H_{k+1} g_p^\tau \left(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right), g_p^\tau \left(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right) \right)} \right), \\ \psi^{(k+1)} &= \psi^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} g_p^\psi \left(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right)}{\sqrt{\left(H_{k+1} g_p^\psi \left(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right), g_p^\psi \left(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right) \right)}}, \end{aligned}$$

где H_{k+1} – матрица растяжения пространства с коэффициентом α (его целесообразно брать равным 3) в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, имеющая такой вид:

$$H_{k+1} = H_k + \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \frac{H_k \Delta_k \Delta_k^T H_k}{(H_k \Delta_k, \Delta_k)},$$

$$\Delta_k = g_p^T \left(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right) - g_p^T \left(Y^{(k-1)}, \tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)} \right),$$

здесь T – одна из переменных Y , τ или ψ .

Если из-за округлений счета матрица H_{k+1} перестает быть положительно определенной, заменяем ее единичной матрицей.

Шаговый множитель h_k выбираем из условия минимума разности

$$[G_2(Y^{(k)}, \tau^{(k-1)}, \Psi^{(k)}) - G_2(Y^{(k-1)}, \tau^{(k)}, \Psi^{(k-1)})],$$

по направлению антипсевдоградиента $-g(Y, \tau, \Psi)$ в преобразованном пространстве.

4. Если условие

$$\left\| \left(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right) - \left(Y^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)} \right) \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.87)$$

не выполняется, то переходим к $(k+2)$ -му шагу алгоритма, в противном случае – к п. 5.

5. Полагаем, что $Y_* = Y^{(l)}$, $\tau_* = \tau^{(l)}$, $\psi_* = \psi^{(l)}$, $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (1.87).

6. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала по формуле (1.82), при этом $Y = Y^*$, $\tau = \tau^*$, $\psi = \psi^*$ и для контроля правильности счета – по формуле:

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \sum_{i=1}^N \left[\varphi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx \right) + \int_{\Omega} c(x, \tau_{*i}) \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx \right].$$

Алгоритм 1.5 описан.

Модели, методы и алгоритмы решения многопродуктовых нелинейных задач ОРМ представлены в литературе [42].

*1.4. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА НЕПРЕРЫВНЫХ
ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ
МНОЖЕСТВ n -МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА
ПРОСТРАНСТВА E_n НА ПОДМНОЖЕСТВА.
КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ*

В данном разделе, руководствуясь исследованиями [38, 42], рассмотрим наиболее общую постановку непрерывной задачи оптимального разбиения множества и сформулируем основные принципы (признаки) классификации таких задач.

Пусть Ω – непрерывное, ограниченное, измеримое по Лебегу множество из n -мерного евклидова пространства E_n , (Ω, Σ, μ) – измеримое пространство, Σ -алгебра множества Ω , μ – мера Лебега.

Разбиением множества $\Omega \subset E_n$ на N подмножеств назовём систему его подмножеств $(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N)$, для которой выполняются три условия:

- 1) $\Omega \subseteq \Omega, \forall i = \overline{1, N}$;
- 2) $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega$;
- 3) $\mu(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N}$.

Обозначим через \mathfrak{R}_Ω^N пространство всех возможных разбиений множества Ω на N подмножеств, то есть

$$\mathfrak{R}_\Omega^N = \left\{ \bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \mu(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N} \right\}.$$

При этом разбиения, отличающиеся лишь множествами нулевой меры, будем считать равными элементами пространства \mathfrak{R}_Ω^N .

Очевидно, что $\mathfrak{R}_\Omega^N \subset \Sigma^N$.

Для элементов пространства $\Sigma^N = \underbrace{\Sigma \times \Sigma \times \dots \times \Sigma}_N$, декартова произведения N алгебр множества Ω , а значит и для элементов \mathfrak{R}_Ω^N , введём следующую метрику:

$$\rho(\{(\Omega_1, \dots, \Omega_N)\}, \{(\bar{\Omega}_1, \dots, \bar{\Omega}_N)\}) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \mu^2(\Omega_i \Delta \bar{\Omega}_i)},$$

где под обозначением $\Omega_i \Delta \bar{\Omega}_i$ понимается симметрическая разность множеств.

Метрическое пространство, построенное на базе множества $\mathfrak{R}_\Omega^N \subset \Sigma^N$, ограничено, плотное в себе, хаусдорфово, замкнутое [38, 40].

Постановка задачи ОРМ

Пусть $F^j, G_1^j, \dots, G_m^j : \mathfrak{R}_\Omega^N \rightarrow R^1, j = 1, \dots, M$ – псевдонерывные функции разбиения;

$$F(\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) = \sum_{j=1}^M F^j(\Omega_1^j, \dots, \Omega_N^j);$$

$$G_i(\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) = \sum_{j=1}^M G_i^j(\Omega_1^j, \dots, \Omega_N^j), i = 1, \dots, m.$$

Требуется найти такой набор подмножеств:

$$(\Omega_1^{1*}, \dots, \Omega_N^{1*}; \dots; \Omega_1^{M*}, \dots, \Omega_N^{M*}) \in (\mathfrak{R}_\Omega^N)^M,$$

при котором функция разбиения F достигает своего минимального значения и выполняются следующие условия:

$$G_i(\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) \leq 0, i = 1, \dots, p,$$

$$G_i(\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) = 0, i = p + 1, \dots, m,$$

Введем такие обозначения:

$$(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) = (\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \Omega_1^2, \dots, \Omega_N^2; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M) \in (\mathfrak{R}_\Omega^N)^M;$$

$$U = \{(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) \in (\mathfrak{R}_\Omega^N)^M : G_i(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) \leq 0, i = \overline{1, p}; \\ G_i(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) = 0, i = \overline{p + 1, m}\}.$$

Тогда коротко задачу оптимального разбиения множеств можно записать так:

$$F(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) \rightarrow \min_{(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}, \dots, \bar{\omega}^{(M)}) \in U}. \quad (1.88)$$

Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств классифицируют по различным признакам. Ниже приводим эти классификации.

По значению параметра M принято различать:

однопродуктовые задачи ОРМ: $M = 1$;

многопродуктовые задачи ОРМ: $M \geq 2$.

По способу задания функций разбиения F^j, G_1^j, \dots, G_m^j :

$\mathfrak{R}_\Omega^N \rightarrow \mathbb{R}^1, j = \overline{1, m}$, задачи ОРМ делятся таким образом:

– *линейные непрерывные задачи оптимального разбиения множеств*: в которых все указанные функции линейны относительно величин $\int_{\Omega_i} \xi(x) dx, i = \overline{1, N}$, где $\xi(\cdot)$ – некоторая определенная на

множестве Ω функция;

– *нелинейные непрерывные задачи оптимального разбиения множеств*, где хотя бы одна из указанных функций нелинейна относительно величины $\int_{\Omega_i} \xi(x) dx, i = \overline{1, N}$.

По характеру параметров, входящих в функции $F^j, G_1^j, \dots, G_m^j : \mathfrak{R}_\Omega^N \rightarrow \mathbb{R}^1, j = \overline{1, m}$, различают детерминированные и стохастические задачи оптимального разбиения множеств. Задача ОРМ называется *детерминированной*, если все параметры, входящие в целевую функцию и ограничения, являются детерминированными, и *стохастической*, если хотя бы один параметр является случайным. Кроме того, выделяют класс *задач оптимального разбиения множеств в условиях неполной информации об исходных данных* (такие задачи будут рассмотрены в следующей главе).

С учетом полноты и определенности исходной информации о параметрах, используемых в формулировке, выделяют также задачи однозначного (четкого) и нечеткого разбиения. Если входные данные хорошо структурированы, то задача оптимального разбиения носит четкий характер. В случае, когда исходные данные плохо или слабо структурированы, требование нахождения однозначного (четкого) разбиения элементов множества Ω из пространства E_n может оказаться достаточно грубым и жестким. Чтобы его ослабить, можно ввести в рассмотрение нечеткие подмножества $\Omega_i, i = \overline{1, N}$, множества Ω и соответствующие им функции принадлежности, принимающие значения из отрезка $[0; 1]$, и сформулировать нечеткую задачу ОРМ. Она будет состоять в том, чтобы найти такое нечеткое разбиение множества Ω на его нечеткие

подмножества, которое в некотором смысле минимизирует некоторый целевой функционал. Напомним, что определение нечеткого разбиения четкого множества Ω введено в работе [59].

По наличию в задаче входных характеристик, изменяющихся во времени, выделяют:

- *статические задачи ОРМ*, в которых все параметры не зависят от времени;
- *динамические задачи ОРМ*, где хотя бы одна из входных характеристик зависит от времени, и в структуре задачи есть дифференциальное уравнение, описывающее динамику этой характеристики.

В зависимости от наличия ограничений на разбиения различают такие задачи ОРМ:

- *без ограничений*; $U \equiv (\mathcal{R}_{\Omega}^N)^M$;
- *с ограничениями в форме равенств и неравенств*; $U \subset (\mathcal{R}_{\Omega}^N)^M$.

Схема классификации задач оптимального разбиения множеств приведена на рис. 1.3.

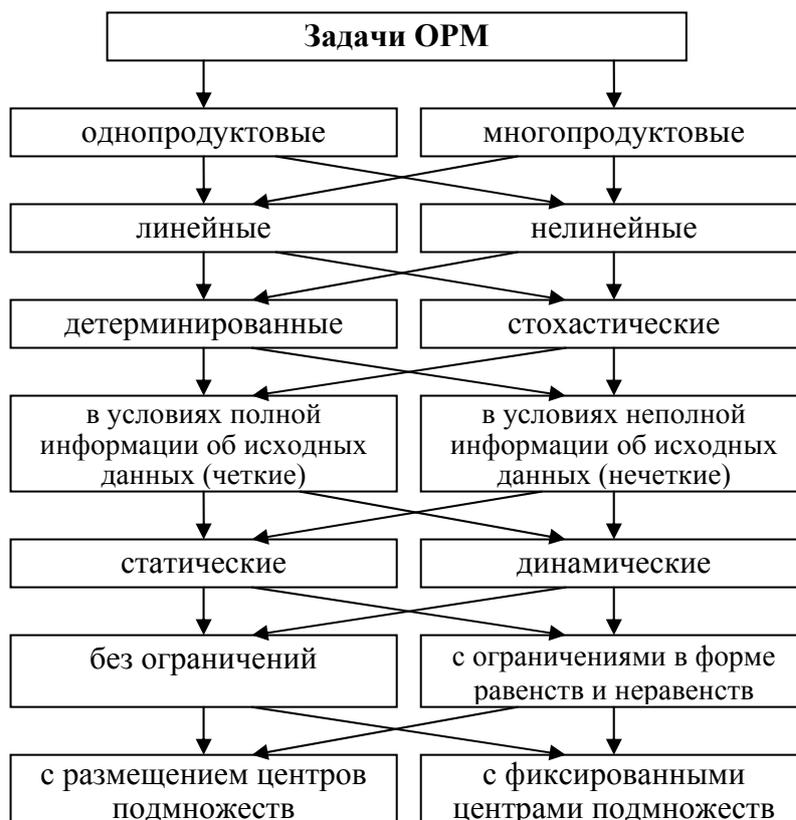


Рис. 1.3. Схема классификации задач ОРМ

Как правило, в задачах оптимального разбиения множеств с подмножествами $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, составляющими разбиение

Модели, методы и алгоритмы решения непрерывных линейных и нелинейных задач оптимального разбиения множеств

множества Ω , связаны параметры $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ – так называемые «центры» этих подмножеств. Если эти параметры заранее известны, то задачи ОРМ называются *задачами оптимального разбиения с заданными координатами центров подмножеств*. Если же указанные параметры подлежат определению, наряду с разбиением, то такие задачи ОРМ называются *задачами оптимального разбиения множества с размещением центров подмножеств (или с отысканием координат центров подмножеств)*.

Заметим, что математические модели непрерывных задач оптимального разбиения множеств, вытекающих из конкретных практических приложений, могут одновременно принадлежать нескольким классам задач ОРМ [42, 59].

ГЛАВА 2

НЕПРЕРЫВНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ ОБ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

2.1. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Сформулированные в предыдущей главе модели оптимального разбиения множеств были строго математически формализованы. Это так называемые детерминированные задачи бесконечномерного математического программирования. Однако реальным ситуациям, для которых создаются модели оптимального разбиения множеств, чаще всего присуща некоторая степень неопределенности, и качество принятых решений в таких оптимизационных задачах прямо зависит от того, насколько полно учтены все неопределенные факторы, существенно влияющие на последствия принятых решений.

Неопределенность в принятии решений обусловлена недостаточной надежностью и количеством информации, на основе которой осуществляется выбор решения. Существуют различные виды неопределенности. Следуя, в основном, литературным данным [14, 74, 95] и не претендуя на полноту, приведем наиболее часто встречающиеся виды неопределенности: 1) принципиальная, например, в известных ситуациях квантовой механики; 2) генерированная общим количеством объектов или элементов, включенных в ситуацию, например, если их число больше, чем 10^9 ; 3) порожденная слишком высокой или недоступной платой за определенность; 4) вызванная недостатком исходной и текущей информации о происходящих процессах (противоречивость, неопределенность, неточность, нечеткость, неоднозначность и др.) или ее недостоверностью в силу технических, социальных и других причин; 5) связанная с ограничениями в ситуации принятия решений (например, по времени и на элементы пространства параметров, характеризующих факторы принятия решений); 6) обусловленная поведением среды или противника, влияющего на процесс принятия решения; 7) возникающая из-за недостатка опыта лица, принимающего решение, и знания им факторов, которые воздействуют на процесс.

Непрерывные задачи оптимального разбиения множества в условиях неполной информации об исходных данных

Таким образом, в процессах принятия решений наблюдаем ряд ситуаций, где существует та или иная степень неопределенности, причем они требуют для своего описания такого математического аппарата, который бы априори включал в себя возможность появления неопределенности и тем или иным методом позволял учесть эту неопределенность.

Исторически первым [95] в изучении неопределенности был аппарат теории вероятностей, в соответствии с которым неопределенность ситуации описывается некоторой нормированной мерой, характеризующей возможность появления наперед заданных случайных исходов (элементов или подмножеств некоторого множества).

К естественному продолжению вероятностных методов описания неопределенных ситуаций можно отнести теорию игр и теорию статистических решений. В теории игр неопределенность порождается конфликтом и антагонистическими интересами игроков, связанных между собой теми или иными правилами ведения игры. Согласно ж теории статистических решений в качестве одного из игроков выбирается пассивная среда или "природа", поведение которой характеризуется заданными законами распределения вероятностей. В принципе эти теории можно считать крайними случаями проявления различных степеней градации неопределенности.

Оптимизационные задачи разбиения множеств в условиях неопределенности исходной информации рассматриваются с точки зрения теории бесконечномерного математического программирования при условии неопределенности или неполной информации об исходных данных. В свою очередь, модели и методы решения задач бесконечномерного математического программирования при наличии неполной информации о параметрах условий задачи являются предметом развивающейся дисциплины – стохастического бесконечномерного математического программирования. Причем [113], если известны те или иные вероятностно-статистические параметры условий задачи, то говорят о **принятии решений в условиях риска**. В случаях, когда нет оснований для каких-либо суждений о статистических особенностях явлений, способных изменить предполагаемые значения параметров условий задачи, говорят о **принятии решений в условиях неопределенности**.

Задачи оптимального разбиения множеств в условиях неполной информации об исходных данных включают так называемые стохастические задачи ОРМ и нечёткие задачи ОРМ. Задачи первого типа более интересны, чем детерминированные, с точки зрения практических приложений в смысле адекватности реальным процессам. К ним относятся например, задачи размещения предприятий, обеспечивающих удовлетворение непрерывно распределенного спроса на продукцию, в случае, когда последний, также, как и стоимость транспортировки продукции, зависит от случайных факторов. Для учета влияния неопределенности в этих задачах применяется метод, использующий лишь некоторые субъективные вероятностные характеристики параметров задачи. В таких случаях говорят о задачах стохастического бесконечномерного математического программирования. Методы решения стохастических задач ОРМ рассмотрены в монографии [59].

Класс так называемых нечётких задач оптимального разбиения множеств связан с необходимостью учета факторов неопределенности, которые не имеют вероятностно-статистической природы. Это задачи ОРМ, где либо отдельные параметры, входящие в описание модели, являются нечеткими, неточными, недоопределенными; либо имеется недостоверное математическое описание некоторых зависимостей в модели (например, функций спроса и стоимости транспортировки единицы продукции в бесконечномерных транспортных задачах); или нечетко сформулированы сами критерии и (или) системы ограничений; либо на модель оптимизации влияют внешние неконтролируемые возмущения различного рода и т. д. Для "снятия" неопределенности в таких задачах (т. е., чтобы формализовать неопределенную информацию) применяется аппарат теории нечетких множеств, который базируется на понятии нечеткого множества, введенного Л. А. Заде [24], а также аппарат нечеткой логики.

Именно эти задачи рассматриваются в данном разделе.

*2.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ
НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ*

Прежде чем приступить к математической постановке нечетких задач ОРМ, изложим некоторые понятия нечеткой математики, используемые в настоящей работе, опираясь главным образом на литературные источники [72, 74, 82, 84].

Пусть $X = \{x\}$ – универсальное множество, т. е. полное множество, охватывающее всю проблемную область.

Нечетким множеством \tilde{A} на множестве X называется совокупность пар вида $(x, \mu_{\tilde{A}}(x))$, где $x \in X$, $\mu_{\tilde{A}}(x): X \rightarrow [0;1]$, то есть

$$\tilde{A} = (x, \mu_{\tilde{A}}(x)),$$

$\mu_{\tilde{A}}(x): X \rightarrow [0;1]$ – *функция принадлежности нечеткого множества \tilde{A} , ее значение $\mu_{\tilde{A}}(x)$ для конкретного элемента $x \in X$ называется степенью принадлежности этого элемента нечеткому множеству \tilde{A} .*

Если множество $[0;1]$ заменить на $\{0;1\}$, то функция принадлежности будет представлять собой характеристическую функцию обыкновенного (не нечеткого множества). То есть, обычные множества составляют подкласс нечетких множеств.

Нечеткое множество \tilde{A} называется *пустым*, если его функция принадлежности равна нулю на всем множестве X , а именно:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, \quad \forall x \in X.$$

Универсальное множество X описывается функцией принадлежности такого вида:

$$\mu_X(x) = 1, \quad \forall x \in X.$$

Носителем нечеткого множества \tilde{A} (обозначается $\text{supp } \tilde{A}$) с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ называется множество (в обычном смысле) такого вида:

$$\text{supp } \tilde{A} = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

Нечеткое множество \tilde{A} называется *нормальным*, если $\sup \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$. В противном случае нечеткое множество называется *субнормальным*.

Величина $h_{\tilde{A}} = \sup \mu_{\tilde{A}}(x)$, называется *высотой нечеткого множества \tilde{A}* .

В дальнейшем изложении, если ясно, что речь идет о нечетких множествах, знак « \sim » будет опущен, чтобы не загромождать запись; если же в рассмотрении присутствуют как четкие так и нечеткие объекты, нечеткость будем обозначать, используя « \sim ».

Пусть A и B – нечеткие множества в универсальном множестве X . Говорят, что нечеткое множество A *включает в себя (доминирует)* нечеткое множество B (т. е. $A \subseteq B$), если $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, $\forall x \in X$.

Множества A и B *эквивалентны*, т. е. $A = B$, если $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, $\forall x \in X$.

Если $A \subseteq B$, то и $\text{supp } A \subseteq \text{supp } B$.

Множеством уровня α (α -срезом) нечеткого множества \tilde{A} в множестве X называется (четкое) множество $A_\alpha \subseteq X$, которое отвечает такому условию:

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad \forall \alpha \in [0;1].$$

Множество $A^+ = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$, называется *ядром нечеткого множества \tilde{A}* .

Интеграл от функции $f : X \rightarrow R$ на нечетком множестве $\tilde{A} \subset X$ по мере p определяется следующим образом:

$$\int_{\tilde{A}} f(x) dp = \int_X f(x) \mu_{\tilde{A}}(x) dp, \quad (2.1)$$

здесь интеграл в правой части является интегралом Лебега по обычному множеству.

Границами нечеткого множества A называются такие элементы универсального множества X , для которых значения функции принадлежности отличны от 0 и 1. Другими словами, границы нечеткого множества $A = \{(x, \mu_A(x))\}$, включают те и только те элементы $x \in X$, для которых $0 < \mu_A(x) < 1$.

Непрерывные задачи оптимального разбиения множества в условиях неполной информации об исходных данных

Элементы $x \in \tilde{A}$, для которых $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0,5$, называются *точками перехода* нечеткого множества \tilde{A} .

Ближайшим четким множеством к нечеткому множеству \tilde{A} (обозначается $\underline{\tilde{A}}$) называется множество (в обычном смысле), характеристическая функция которого определена следующим выражением:

$$\lambda_{\underline{\tilde{A}}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) < 0,5, \\ 1, & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) > 0,5, \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) = 0,5. \end{cases}$$

Объединением нечетких множеств A и B в универсальном множестве X называется нечеткое множество $A \cup B$. Для $A \cup B$ существует несколько вариантов задания функций принадлежности. Наиболее распространенными являются следующие:

$$\mu_{A \cup B}^1(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \forall x \in X,$$

$$\mu_{A \cup B}^2(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad \forall x \in X,$$

$$\mu_{A \cup B}^3(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}, \quad \forall x \in X.$$

Объединением нечетких множеств A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, в универсальном множестве X называется нечеткое множество $\bigcup_{i=1}^n A_i$, функция принадлежности которого определена следующим образом:

$$\mu_{\bigcup_{i=1}^n A_i}^1(x) = \max\{\mu_{A_1}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)\}, \quad \forall x \in X.$$

Если $\{A_y\}$ – конечное или бесконечное семейство нечетких множеств с функциями принадлежности $\mu_{A_y}(x)$, где $y \in Y$ – параметр семейства, то объединением $C = \bigcup_y A_y$ множеств этого семейства является нечеткое множество с функцией принадлежности такого вида:

$$\mu_C(x) = \sup_{y \in Y} \mu_{A_y}(x), \quad \forall x \in X.$$

Пересечением нечетких множеств A и B в универсальном множестве X называется нечеткое множество $A \cap B$. Для $A \cap B$ также существуют несколько способов задания функций принадлежности. Наиболее распространенными являются такие:

$$\begin{aligned}\mu_{A \cap B}^1(x) &= \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \forall x \in X, \\ \mu_{A \cap B}^2(x) &= \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad \forall x \in X, \\ \mu_{A \cap B}^3(x) &= \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}, \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$

Пересечением нечетких множеств A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, в универсальном множестве X называется нечеткое множество $\bigcap_{i=1}^n A_i$, функцию принадлежности которого можно определить одним из двух способов, а именно:

$$\mu_{\bigcap_{i=1}^n A_i}^1(x) = \min\{\mu_{A_1}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)\}, \quad \forall x \in X,$$

либо

$$\mu_{\bigcup_{i=1}^n A_i}^1(x) = \mu_{A_1}(x) \cdot \mu_{A_2}(x) \cdot \dots \cdot \mu_{A_n}(x) = \prod_{i=1}^n \mu_{A_i}(x), \quad \forall x \in X.$$

Если $\{A_y\}$ – бесконечное или конечное семейство нечетких множеств с функциями принадлежности $\mu_{A_y}(x)$, где $y \in Y$ – параметр семейства, то пересечением $C = \bigcap_y A_y$ множеств этого семейства является нечеткое множество с функцией принадлежности такого вида:

$$\mu_C(x) = \inf_{y \in Y} \mu_{A_y}(x), \quad \forall x \in X.$$

Для носителей нечетких множеств A и B имеют место следующие свойства:

$$\begin{aligned}\text{supp}(A \cup B) &= (\text{supp } A) \cup (\text{supp } B), \\ \text{supp}(A \cap B) &= (\text{supp } A) \cap (\text{supp } B).\end{aligned}$$

Непрерывные задачи оптимального разбиения множества в условиях неполной информации об исходных данных

Дополнением нечеткого множества A называется нечеткое множество \bar{A} , функция принадлежности которого

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in X.$$

Очевидно, будет верным утверждение: $A = \bar{\bar{A}}$. Однако, в отличие от обычных (четких) множеств, вообще говоря, $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$ (выполнение этого свойства зависит от способа задания операции пересечения).

Разность множеств A и B в универсальном множестве X определяется как нечеткое множество $A \setminus B$ с функцией принадлежности следующего вида:

$$\mu_{A \setminus B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) - \mu_B(x), & \text{если } \mu_A(x) \geq \mu_B(x), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

или $\mu_{A \setminus B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) - \mu_B(x)\}$.

Следует заметить, что операция разности двух нечетких множеств не является коммутативной, т. е. в общем случае $A \setminus B \neq B \setminus A$.

По аналогии с обычными множествами иногда бывает полезной операция *симметрической разности* двух нечетких множеств A и B ($A \Delta B$), а именно:

$$\mu_{A \Delta B}(x) = |\mu_A(x) - \mu_B(x)|, \quad \forall x \in X.$$

При этом оказывается справедливым следующее утверждение:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Для операций объединения и пересечения, заданных первым способом, имеют место такие свойства:

$$\left. \begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A \end{aligned} \right\} \text{ коммутативность;}$$

$$\left. \begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap B \cap C \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \end{aligned} \right\} \text{ ассоциативность;}$$

$$\left. \begin{aligned} (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \end{aligned} \right\} \text{ дистрибутивность;}$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned} \right\} \text{законы де Моргана.}$$

Декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ нечетких множеств A_i в универсальном множестве X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, определяется как нечеткое множество A в декартовом произведении $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, с функцией принадлежности такого вида:

$$\mu_A(x) = \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n) \},$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X.$$

Выпуклой комбинацией нечетких множеств A_1, A_2, \dots, A_n в универсальном множестве X называется нечеткое множество A , функция принадлежности которого

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i \mu_i(x), \quad x \in X,$$

где $\beta_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$.

Разложением нечеткого множества по множествам уровня называется его представление в таком виде:

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} \alpha A_\alpha,$$

где $\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = \alpha \mu_{A_\alpha}(x)$,

а произведение множества A_α на число $\alpha \in [0;1]$ – представляет собой множество, функция принадлежности которого определяется следующим образом:

$$\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = \alpha \mu_{A_\alpha}(x), \quad x \in X,$$

что эквивалентно такому выражению:

$$\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in A_\alpha, \\ 0, & x \notin A_\alpha. \end{cases}$$

Возведение нечеткого множества A в степень $\alpha > 0$, означает нечеткое множество с такой функцией принадлежности:

$$\mu_{A^\alpha}(x) = (\mu_A(x))^\alpha, \quad x \in X, \quad \alpha \geq 0.$$

Непрерывные задачи оптимального разбиения множества в условиях неполной информации об исходных данных

Операции *концентрирования* (CON) и *растяжения* (DIL) нечеткого множества A определяются следующим образом:

$$\text{CON } A = A^2, \quad \text{DIL } A = A^{0,5},$$

где

$$\mu_{A^2}(x) = \mu^2(x), \quad \mu_{A^{0,5}}(x) = \mu^{0,5}(x), \quad x \in X.$$

При этом операция концентрирования соответствует ситуации, когда поступает дополнительная информация, а растяжение описывает потерю информации.

Принцип обобщения. Был предложен Л. Заде [24] (см. также [84]). В его основе лежит определение образа нечеткого множества при обычном (т. е. четком) отображении. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ – заданное отображение и пусть \tilde{A} – некоторое нечеткое подмножество множества X с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$. В соответствии с принципом обобщения образ нечеткого множества \tilde{A} при отображении φ определяется как нечеткое подмножество множества Y , представляющее собой совокупность пар такого вида:

$$(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) = (\varphi(x), \mu_{\tilde{A}}(x)), \quad x \in X, \quad (2.2)$$

где $\mu_{\tilde{B}}(y): Y \rightarrow [0; 1]$ – функция принадлежности образа. Нетрудно понять, что функцию принадлежности $\mu_{\tilde{B}}(y)$ можно записать следующим образом:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x), \quad y \in Y, \quad (2.3)$$

где множество $\varphi^{-1}(y)$ – прообраз элемента y при отображении φ , для любого фиксированного вектора $y \in Y$, причем,

$$\varphi^{-1}(y) = \{x \mid x \in X, \varphi(x) = y\},$$

т. е. представляет собой множество всех элементов $x \in X$, образом каждого из которых при отображении φ является элемент y .

Применим теперь принцип обобщения в форме пар (2.2) для расширения области нечеткого отображения [84]. В его основе лежит сформулированное ниже определение образа нечеткого множества при нечетком отображении.

Определение. Образом нечеткого множества \tilde{A} в X при нечетком отображении $\mu_\varphi : X \times Y \rightarrow [0;1]$ называется нечеткое множество \tilde{B} с функцией принадлежности такого вида:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \sup_{x \in X} \min \{ \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_\varphi(x, y) \}. \quad (2.4)$$

Легко заметить, что в основе этого определения образа – максимумное произведение (композиция) нечетких отношений $\mu_{\tilde{A}}$ и μ_φ .

Можно легко убедиться, что в частном случае, когда μ_φ – обычное (четкое) отображение $\varphi : X \rightarrow Y$, т. е. $\mu_\varphi(x, y) = 1$, при этом $y = \varphi(x)$ и $\mu_\varphi(x, y) = 0$ для остальных пар (x, y) , определение дает такой результат:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x), \quad (2.5)$$

что соответствует лежащему в основе принципа обобщения Заде определению образа при обычном отображении.

Во многих случаях заданное нечеткое отображение μ_φ может зависеть от n переменных, т. е.

$$\mu_\varphi : X \times Y \rightarrow [0;1],$$

где $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ – декартово произведение соответствующих множеств.

Пусть во множестве X задано нечеткое подмножество μ_A . В общем случае его функция принадлежности имеет следующий вид:

$$\mu_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min \{ \mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \dots, \mu_n(x_n), v(x_1, x_2, \dots, x_n) \}, \quad (2.6)$$

где $\mu_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$; v – заданные нечеткие подмножества соответствующих множеств X_i , $i = 1, \dots, n$ и X .

Применив в этом случае принцип обобщения в форме функции (2.4), получим следующее выражение для функции принадлежности образа нечеткого множества:

$$\mu_B(y) = \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in X} \min \{ \mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n), v(x_1, \dots, x_n), \mu_\varphi(x_1, \dots, x_n, y) \}.$$

При преобразованиях аналитических моделей, когда в качестве их параметров используются нечеткие числа (т. е. нечеткие

Непрерывные задачи оптимального разбиения множества в условиях неполной информации об исходных данных

подмножества числовой оси), удобно использовать *принцип обобщения в изложенном ниже виде*.

Пусть задана функция n переменных $y = f(x_1, \dots, x_n)$, аргументы x_i – суть нечеткие числа \tilde{x}_i с носителями $\text{supp } \tilde{x}_i = [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$, $i = 1, \dots, n$, тогда нечеткое число $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$, определяется следующим образом:

$$\mu_{\tilde{y}}(y^*) = \sup_{f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = y^*} \min \left\{ \mu_{\tilde{x}_1}(x_1^*), \mu_{\tilde{x}_2}(x_2^*), \dots, \mu_{\tilde{x}_n}(x_n^*) \right\},$$
$$x_i^* \in \text{supp } \tilde{x}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь $\mu_{\tilde{y}}(y^*)$ – степень принадлежности элемента y^* нечеткому числу \tilde{y} , $\mu_{\tilde{x}_i}(x_i^*)$ – степень принадлежности элемента x_i^* нечеткому числу \tilde{x}_i , носитель которого $\text{supp } \tilde{x}_i = [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$.

2.3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО НЕЧЕТКОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА ИЗ ПРОСТРАНСТВА E_n НА ЕГО ПОДМНОЖЕСТВА

Нечеткие задачи ОРМ условно можно разделить на два класса. К первому отнесем те из них, в которых полученное разбиение является нечетким, отсюда их название – задачи оптимального *нечеткого разбиения*, исходные данные при этом четко определены. Такие задачи рассматривались в научной литературе [50 – 52, 59, 73]. Ко второму классу относятся задачи, в которых нечеткими являются исходные данные [102 – 104]. При этом полученное решение может быть как четким, так и нечетким.

Рассмотрим сначала задачи первого типа.

Как уже отмечалось, требование найти однозначное (четкое) разбиение элементов множества Ω из пространства E_n может оказаться достаточно грубым и жестким во время решения задач с плохо или слабо структурированной исходной информацией, где неопределенность имеет нечетко-возможностную природу. Ослабить это требование возможно за счет ввода в рассмотрение нечетких

подмножеств $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, N$, множества Ω и соответствующих им функций принадлежности, принимающих значение из отрезка $[0; 1]$.

В этом случае одним из вариантов нечеткой задачи ОРМ становится задача нахождения такого нечеткого разбиения множества Ω на его нечеткие подмножества, которое в некотором смысле "минимизирует" целевой функционал. Эта задача будет сведена к определению степеней принадлежности элементов множества Ω искомым нечетким подмножествам $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, которые в совокупности обуславливают нечеткое разбиение (нечеткое покрытие) множества Ω .

Для формальной (математической) постановки нечетких задач оптимального разбиения необходимо ввести ряд дополнительных понятий.

Определение 2.1. *Нечетким разбиением четкого множества Ω из пространства E_n , где Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу, выпуклое множество, назовем систему нечетких подмножеств $\mathfrak{R}(\Omega) = \{\Omega_i, i = \overline{1, N}\}$, для которых выполняются следующие три условия:*

$$1) \Omega_i \subseteq \Omega \quad \forall i = \overline{1, N},$$

$$\text{где } \Omega = (\Omega, \mu_\Omega(x)), \quad \mu_\Omega(x) = 1, x \in \Omega;$$

$$2) \sum_{k=1}^N \mu_{\Omega_k}(x) = \mu_\Omega(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega;$$

$$3) h_C < 1, \quad C = \Omega_i \cap \Omega_k, \quad \forall i \neq k, i, k = \overline{1, N},$$

где $h_C = \sup_{x \in \Omega} \mu_C(x)$ – высота нечеткого множества $C = \Omega_i \cap \Omega_j$,

$\forall \Omega_i, \Omega_j \in \Omega, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N$, а $\mu_C(x)$ – функция принадлежности: $\mu_C(x) : \Omega \rightarrow [0; 1]$.

В дальнейшем для упрощения записи используем такое обозначение: $\mu_{\Omega_i}(x) \equiv \mu_i(x)$. Проанализируем данное определение.

Лемма 3.1. В определении 2.1 условие 3 является следствием условий 1 и 2.

Доказательство. Пусть для некоторой системы нечетких множеств $\mathfrak{R}(\Omega) = \{\Omega_i : \Omega_i \subseteq \Omega \quad \forall i = \overline{1, N}\}$, выполняется следующее условие:

$$\sum_{k=1}^N \mu_{\Omega_k}(x) = \mu_{\Omega}(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.7)$$

Убедимся, что для этой системы выполнены такие условия:
 $h_C < 1, C = \Omega_i \cap \Omega_k, \forall i \neq k, i, k = \overline{1, N}$.

Исходя из определения высоты нечеткого множества, а также свойств функции принадлежности,

$$h_C = \sup_{x \in \Omega} (\mu_C(x)) \leq 1.$$

Предположим обратное:
пусть

$$\exists i, k: i \neq k: h_C = 1, C = \Omega_i \cap \Omega_k.$$

Допустим далее, что $h_C = \sup_{x \in \Omega} (\mu_C(x)) = \max_{x \in \Omega} (\mu_C(x))$. Обозначим через \bar{x} точку, в которой достигается последний максимум, то есть $h_C = \mu_C(\bar{x}) = 1$.

Поскольку $C = \Omega_i \cap \Omega_k$, то $\mu_C(\bar{x}) = \min\{\mu_i(\bar{x}), \mu_k(\bar{x})\} = 1$. Исходя из того, что $\mu_i(\bar{x}) \leq 1, \mu_k(\bar{x}) \leq 1$, а также учитывая условия 1, приходим к выводу, что $\mu_i(\bar{x}) = 1, \mu_k(\bar{x}) = 1$.

Запишем сумму (2.7) для точки $\bar{x} \in X$, а именно:

$$\mu_1(\bar{x}) + \dots + \mu_i(\bar{x}) + \dots + \mu_k(\bar{x}) + \dots + \mu_N(\bar{x}) \geq 2,$$

что противоречит равенству (2.7).

Лемма доказана.

В соответствии с леммой определение 1.1 эквивалентно сформулированному ниже определению.

Определение 3.2. *Нечетким разбиением четкого множества Ω из пространства E_n , где Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу, выпуклое множество, назовем систему нечетких подмножеств: $\mathfrak{R}(\Omega) = \{\Omega_i : \Omega_i \subseteq \Omega \quad \forall i = \overline{1, N}\}$, где $\Omega = (\Omega, \mu_{\Omega}(x)), \mu_{\Omega}(x) = 1, x \in \Omega$, для которых выполняется такое условие:*

$$\sum_{k=1}^N \mu_{\Omega_k}(x) = \mu_{\Omega}(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega.$$

Отметим, что в терминах бесконечномерной транспортной задачи сформулированное выше условие может пониматься следующим образом: удовлетворение нужд каждого потребителя в полной мере и без излишков должно происходить за счет одного или нескольких производителей. Последнее отличает нечеткую постановку задачи от четкой, когда нужды потребителя должны быть удовлетворены за счет одного производителя.

Нечетким покрытием множества Ω из E_n назовем совокупность нечетких подмножеств множества Ω , если

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega.$$

Обозначим класс всех возможных нечетких разбиений множества Ω на N нечетких подмножеств через \mathfrak{R}_Ω^N , т. е.

$$\mathfrak{R}_\Omega^N = \left\{ (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N) : \sum_{k=1}^N \mu_k(x) = \mu_\Omega(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega \right\} \quad (2.8)$$

Заметим, что класс четких возможных разбиений Σ_Ω^N из п. 1.1.1 является подклассом класса нечетких разбиений \mathfrak{R}_Ω^N .

Перейдем к описанию формальных постановок нечетких задач ОРМ.

Введем на множестве возможных нечетких разбиений \mathfrak{R}_Ω^N целевой функционал $F : \mathfrak{R}_\Omega^N \rightarrow R^1$ в таком виде:

$$F(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx,$$

где, как и в четкой задаче **A1**, функции $c(x, \tau_i)$ – заданные, действительные, ограниченные, определенные на декартовом произведении $\Omega \times \Omega$, измеримые по x при любом фиксированном векторе $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ из Ω для всех значений $i = 1, \dots, N$; $\rho(x)$ – заданная, ограниченная, измеримая на множестве Ω функция; a_1, a_2, \dots, a_N – заданные неотрицательные числа, интеграл по нечеткому множеству Ω_i понимается согласно определению (2.1) как

$$\int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx = \int_{\Omega} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \mu_i(x) dx.$$

Непрерывные задачи оптимального разбиения множества в условиях неполной информации об исходных данных

В отличие от четкой задачи **A1**, здесь, во-первых, Ω_i , $i=1,2,\dots,N$ – нечеткие подмножества множества Ω с заданными координатами типичных представителей (или центров) τ_i , причем каждый центр τ_i принадлежит Ω ; во-вторых, мера множества граничных точек Ω_i , $i=1,2,\dots,N$, не обязательно равна нулю.

Тогда *нечетким аналогом* задачи **A1** будет сформулированная ниже задача.

Задача $\tilde{A1}$. Найти такое нечеткое разбиение множества Ω на N нечетких подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ (среди них могут быть и пустые), которое минимизирует функционал

$$F(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx,$$

и при этом удовлетворены следующие условия:

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \sup_{x \in \Omega} \mu_{\Omega_i \cap \Omega_j}(x) < 1, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\} \in \mathfrak{R}_{\Omega}^N.$$

Заметим, что элемент множества \mathfrak{R}_{Ω}^N допустимых альтернатив – нечеткое разбиение $\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}$ – это совокупность нечетких подмножеств Ω_i , $i=1,2,\dots,N$, составленных из точек, принадлежащих множеству Ω . Как известно, каждое нечеткое множество Ω_i (представляющее собой совокупность точек x из Ω и соответствующих им степеней принадлежности) определяется своей функцией принадлежности $\mu_{\Omega_i}(x)$, т. е. $\mu_{\Omega_i} : \Omega \rightarrow [0;1]$, при этом если функция $\mu_{\Omega_i}(x) = 1$ для $x \in \Omega$, то это значит, что элемент x из множества Ω определенно принадлежит нечеткому множеству Ω_i , соответствуя значению характеристической функции $\lambda_{\Omega_i}(x) = 1$, и принадлежности точки x к ядру Ω_i^+ нечеткого множества Ω_i . Когда функция $\mu_{\Omega_i}(x) = 0$, это значит, что элемент x определенно не принадлежит нечеткому множеству Ω_i , соответствуя значению

характеристической функции $\lambda_{\Omega_i}(x) = 0$. Если $0 < \mu_{\Omega_i}(x) < 1$, то это свидетельствует о принадлежности элемента x нечеткому множеству Ω_i со степенью $\mu_{\Omega_i}(x)$, причем точки x , для которых $0 < \mu_{\Omega_i}(x) < 1$, будут составлять границу *нечеткого подмножества* Ω_i .

Таким образом, для того, чтобы иметь возможность идентифицировать нечеткое разбиение $\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}$ множества Ω , надо знать для каждой точки x из Ω степень ее принадлежности к каждому из подмножеств Ω_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

Из всего сказанного выше следует, что нечеткое разбиение $\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}$ полностью определяется своей вектор-функцией принадлежности такого вида:

$$\mu(x) = (\mu_{\Omega_1}(x), \mu_{\Omega_2}(x), \dots, \mu_{\Omega_N}(x)), \quad x \in \Omega.$$

Также известно, что характеристическая функция $\lambda_{\Omega_i}(\cdot)$ обычного четкого множества Ω_i является частным случаем функции принадлежности $\mu_{\Omega_i}(\cdot)$. Тогда нечеткое множество Ω_i можно рассматривать как обобщение понятия "обычного множества" Ω_i , а, в свою очередь, четкое множество Ω_i – как частный случай (сужение) соответствующего понятия «нечеткое множество» $\tilde{\Omega}_i$.

Далее перепишем задачу $\tilde{\mathbf{A1}}$ относительно функций принадлежности $\mu_{\Omega_i}(\cdot)$ как расширение задачи $\mathbf{B1}$ на нечеткий случай (нечеткий аналог задачи $\mathbf{B1}$).

Задача $\tilde{\mathbf{B1}}$. Нечеткого разбиения множества Ω без ограничений с фиксированными центрами подмножеств.

Найти вектор-функцию

$$\mu^*(x) = (\mu_{\Omega_1}(x), \mu_{\Omega_2}(x), \dots, \mu_{\Omega_N}(x)) \in Y,$$

для которой

$$I(\mu^*(\cdot)) = \widetilde{\min}_{\mu(\cdot) \in Y} I(\mu(\cdot)),$$

где

$$I(\mu(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) (\mu_{\Omega_i}(x))^m dx;$$

**Непрерывные задачи оптимального разбиения множества в условиях
неполной информации об исходных данных**

$$Y = \left\{ \mu(x) = (\mu_{\Omega_1}(x), \mu_{\Omega_2}(x), \dots, \mu_{\Omega_N}(x)) : \sum_{i=1}^N \mu_{\Omega_i}(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega, \right. \\ \left. 0 \leq \mu_{\Omega_i}(x) \leq 1, i = 1, \dots, N, x \in \Omega \right\}, \quad (2.9)$$

где $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ – заданный вектор из Ω^N ; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; a_1, \dots, a_N – заданные неотрицательные числа; m – параметр, называемый экспоненциальным весом [72].

Здесь под обозначением "min" понимается, что вектор-функция $\mu^*(x)$ в некотором смысле "минимизирует" целевой функционал $I(\mu(\cdot))$. В дальнейшем мы подробнее остановимся на смысле этого обозначения.

Требование выполнения равенства в условии (2.9) вызвано тем обстоятельством, что искомое нечеткое разбиение должно "покрывать" обычное четкое разбиение $\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}$, являющееся в то же время элементом нечеткого множества допустимых решений, для которого значения функций принадлежности каждого из элементов равны единице.

Заметим, что если необходимо исключить появление пустых подмножеств в искомом нечетком разбиении, то к ограничениям задачи **В1** следует добавить такое условие:

$$\int_{\Omega} \mu_{\Omega_i}(x) dx > 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Заметим также, что в задаче **В1** при помощи условия, что

$$\sum_{i=1}^N \mu_{\Omega_i}(x) = 1, \quad x \in \Omega,$$

учитывается тот факт, что $\sup_{x \in \Omega} \mu_{\Omega_i}(x) < 1$ и поэтому **В1** – это задача нечеткого разбиения, если же не требовать выполнения условия: $\sup_{x \in \Omega} \mu_{\Omega_i \cap \Omega_j}(x) < 1$, то мы приходим к задаче *нечеткого покрытия*.

Аналогично изложенному выше можно расширить постановки задач **В2**, **В3**, **В4**, **В5**, **В6**. Сформулируем некоторые из них.

Задача $\tilde{\mathbf{B}}2$. Нечеткого разбиения множества Ω без ограничений с отысканием координат центров подмножеств.

Найти

$$\min_{(\mu(\cdot), \tau) \in \Upsilon \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) (\mu_{\Omega_i}(x))^m dx,$$

где

$$\Upsilon = \left\{ \mu(x) = (\mu_{\Omega_1}(x), \mu_{\Omega_2}(x), \dots, \mu_{\Omega_N}(x)) : \sum_{i=1}^N \mu_{\Omega_i}(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega, \right. \\ \left. 0 \leq \mu_{\Omega_i}(x) \leq 1, i = 1, \dots, N, x \in \Omega \right\},$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Задача $\tilde{\mathbf{B}}4$. Нечеткого разбиения множества Ω при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров подмножеств.

Найти

$$\min_{(\mu(\cdot), \tau) \in \Upsilon_1 \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) (\mu_{\Omega_i}(x))^m dx,$$

где

$$\Upsilon_1 = \left\{ \mu(x) = (\mu_{\Omega_1}(x), \mu_{\Omega_2}(x), \dots, \mu_{\Omega_N}(x)) : \mu(x) \in \Upsilon, x \in \Omega; \right. \\ \left. \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, i = 1, \dots, N \right\};$$

$$\Upsilon = \left\{ \mu(x) = (\mu_{\Omega_1}(x), \mu_{\Omega_2}(x), \dots, \mu_{\Omega_N}(x)) : \sum_{i=1}^N \mu_{\Omega_i}(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega, \right. \\ \left. 0 \leq \mu_{\Omega_i}(x) \leq 1, i = 1, \dots, N, x \in \Omega \right\};$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Если в задаче $\tilde{\mathbf{B}}4$ будем считать τ заданным вектором из множества Ω^N , то придем к задаче $\tilde{\mathbf{B}}3$, являющейся расширением на нечеткий случай соответствующей четкой задачи $\mathbf{B}3$.

Еще один класс нечетких задач ОРМ, соответствующий типу II по классификации изложенной в литературе [84], возникает, если в исходной четкой задаче ОРМ "смягчить" функциональные ограничения, т. е. допустить возможность их нарушения в той или

**Непрерывные задачи оптимального разбиения множества в условиях
неполной информации об исходных данных**

иной степени. Кроме того, вместо минимизации целевого функционала, можно стремиться к достижению некоторого заданного его значения, причем различным отклонениям значения $F(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\})$ от данной величины следует приписывать ту или иную степень допустимости (например, чем больше отклонение, тем меньше степень его допустимости).

Далее формулируем задачу ОРМ с заданными центрами подмножеств при нечетких ограничениях в форме неравенств.

Задача А9. Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N} F(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}),$$

при условиях, что

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \lesssim b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.10)$$

где

$$F(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c_i(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx, \quad (2.11)$$

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ \Omega_1, \dots, \Omega_N : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j; i, j = 1, \dots, N \right\}, \quad (2.12)$$

$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega; \quad \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega; \quad a_1, \dots, a_N, \quad b_1, \dots, b_N$ – заданные положительные числа.

Здесь остаются справедливыми все условия, при которых была сформулирована задача **А3**, а символ \sim в ограничении (2.10) означает нечеткое выполнение соответствующих неравенств.

Рассмотрим один из возможных подходов к формализации и использованию нечеткой информации в задаче **А9**.

Пусть заданы пороговые значения d_1, \dots, d_N , при которых выполнение условий: $\int_{\Omega_i} \rho(x) dx - b_i > d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$, говорит о

сильном нарушении соответствующих неравенств: $\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i,$

$i = 1, 2, \dots, N$. Тогда функции принадлежности, описывающие нечеткие множества ограничений, можно ввести для всех индексов $i = 1, 2, \dots, N$ в следующем виде:

$$\mu_{G_i}(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \begin{cases} 0, & \int_{\Omega_i} \rho(x) dx - b_i \geq d_i, \\ v_i(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, d_i), & 0 < \int_{\Omega_i} \rho(x) dx - b_i < d_i, \\ 1, & \int_{\Omega_i} \rho(x) dx - b_i \leq d_i. \end{cases} \quad (2.13)$$

где v_i – некоторые функции принадлежности, они описывают степень выполнения соответствующих неравенств с точки зрения ЛПР; G_i – нечеткие множества, порожденные условиями (2.10).

Очевидно, что условия (2.10) эквивалентны таким:

$$\mu_{G_i}(\Omega_1, \dots, \Omega_N) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.14)$$

Один из предлагаемых подходов к решению задачи **A9** [51, 52, 73] состоит в том, что задачу минимизации функционала на нечетком множестве заменяют задачей минимизации этого функционала на некотором множестве уровня исходного нечеткого множества. Заметим, что любое нечеткое множество представимо в виде разложения по своим множествам уровня $\alpha \in [0; 1]$, и в общем случае их число бесконечно. Однако на практике ЛПР достаточно рассмотреть разложение по конечному числу множеств уровня $\alpha_i \in [0; 1]$, $i = 1, 2, \dots, s$, выбрав значения α_i с некоторым шагом.

Для решения задачи **A9** необходимо найти разбиение, принадлежащее нечеткому множеству допустимых разбиений с возможно большей степенью принадлежности, при котором функционал (2.11) будет иметь минимальное значение. Стало быть, условия (2.14) можно заменить следующим образом:

$$\mu_{G_i}(\Omega_1, \dots, \Omega_N) > \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.15)$$

а условия (2.10) заменить такими:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.16)$$

причем d_i , $i = 1, 2, \dots, N$, выбраны таким образом, чтобы при выполнении i -го условия из неравенства (2.16) обеспечивалось выполнение i -го условия из (2.15), что означает замену нечеткого

**Непрерывные задачи оптимального разбиения множества в условиях
неполной информации об исходных данных**

множества с функцией принадлежности $\mu_{G_i}(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ его множеством уровня ε .

В этом случае задачу **A9** можно переформулировать.

Задача A'9. Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N} F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N)$$

при таких условиях:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N;$$

где $\Sigma_{\Omega}^N = \{\Omega_1, \dots, \Omega_N : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j; i, j = 1, \dots, N\}$;

$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega; \quad \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega; \quad a_1, \dots, a_N, \quad b_1, \dots, b_N$ – заданные положительные числа, причем выполняются следующие условия разрешимости задачи:

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Задача **A'9** является четкой задачей ОРМ (см. задачу **A3**). Ее решение будет принадлежать множеству допустимых разбиений, степень принадлежности которой

$$\mu(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \min_{i=1, 2, \dots, N} \mu_{G_i}(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \geq \varepsilon.$$

Перебирая все возможные значения параметра $\varepsilon > 0$ и решая соответствующие четкие задачи, мы можем получить полное описание нечеткого решения задачи **A9**.

Теперь вместо минимизации заданного функционала (2.11) будем стремиться к достижению заданного значения z_0 этого функционала как достаточному для выполнения цели. Тогда для задачи **A9** условие достижения заданного значения z_0 можно записать в таком виде:

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \lesseqgtr z_0, \quad (2.17)$$

где волнистая линия свидетельствует о нечеткости соответствующего неравенства.

Введем пороговое значение числа a , при котором условие

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) > z_0 + a,$$

что означает сильное нарушение такого неравенства:

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \leq z_0.$$

Тогда функцию принадлежности для нечеткого функционала цели можно определить следующим образом:

$$\mu_F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \begin{cases} 0, & F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) > z_0 + a, \\ \mu(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, a), & z_0 < F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \leq z_0 + a, \\ 1, & F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \leq z_0. \end{cases} \quad (2.18)$$

где $\mu(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, a)$ – функция принадлежности, описывающая степень выполнения соответствующего неравенства с точки зрения ЛПР; F – нечеткое множество, порожденное нечетким функционалом цели.

В результате задача (2.17) достижения заданного значения z_0 при условиях (2.10) и (2.12) будет сформулирована в виде задачи достижения нечетко определенной цели, к которой применим подход Белмана – Заде [95].

Согласно этому подходу нечетким решением задачи достижения нечеткой цели будет пересечение нечетких множеств цели (2.13) и ограничений (2.18), т. е. функция принадлежности решения $\mu(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N)$ имеет такой вид:

$$\mu(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \min \left\{ \mu_F(\Omega_1, \dots, \Omega_N), \mu_{G_1}(\Omega_1, \dots, \Omega_N), \dots, \mu_{G_N}(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \right\}.$$

Определенное таким образом решение можно рассматривать как нечетко сформулированную инструкцию, выполнение которой обеспечивает достижение нечетко поставленной цели. При этом остается неопределенность, связанная с выбором альтернативы.

Один из наиболее распространенных способов решения этой проблемы – выбор альтернативы, которая имеет максимальную степень принадлежности к нечеткому решению, то есть

$$\begin{aligned} & \max_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N} \mu(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \\ & \max_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N} \min \left\{ \mu_F(\Omega_1, \dots, \Omega_N), \mu_{G_1}(\Omega_1, \dots, \Omega_N), \dots, \mu_{G_N}(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \right\}. \end{aligned}$$

Такие альтернативы называют *максимизирующими решениями* [84].

Еще один вариант нечеткой постановки задач ОРМ может возникнуть, если в четкой (жесткой) модели ОРМ невозможно (или сложно) учесть в явном виде влияние некоторых реальных факторов (нестатистической неопределенности). К таким факторам, например, можно причислить колебания цен на бензин, стихийные природные явления, от которых зависит стоимость перевозки единицы продукции в бесконечномерной задаче размещения, или нестабильность политической обстановки, вызывающая изменение спроса потребителей на товары и услуги и т. п.

Сформулируем одну из таких задач ОРМ с нечетко описанными параметрами целевого функционала и (или) функций, определяющих ограничения, как более адекватную реальности, чем обычная четкая задача ОРМ.

Задача А10 (с нечетко описанными параметрами в целевом функционале и в ограничениях). Найти

$$\widetilde{\min}_{\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_\Omega^N} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i, \theta_i)) \rho(x, \theta_0) dx,$$

при условиях, что

$$\int_{\Omega_i} \rho(x, \theta_0) dx \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$\Sigma_\Omega^N = \left\{ \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j; i, j = 1, \dots, N \right\};$$

$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega; \quad \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega; \quad b_1, \dots, b_N$ – заданные положительные числа, которые отвечают условиям разрешимости задачи.

Здесь функции $c(x, \tau_i, \theta_i)$ – ограниченные, определенные на декартовом произведении $\Omega \times \Omega \times R^1$, измеримые по x на множестве Ω при любых фиксированных значениях $\tau_i \in \Omega$ и $\theta_i \in R^1$; $\rho(x, \theta_0)$ – неотрицательная, ограниченная, измеримая по x на множестве Ω функция при любом фиксированном значении θ_0 из R^1 ; $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N$ – параметры, значения которых описаны нечетко в форме нечетких подмножеств универсального множества R^1 , имеющие такой вид:

$$\theta_i = \{\theta_i, \mu(\theta_i)\}, \theta_i \in R^1, \mu: R^1 \rightarrow [0;1], \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Обозначение " $\widetilde{\min}$ " понимается как осуществление рационального выбора разбиения $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$, которое в некотором смысле "минимизирует" заданный целевой функционал.

Замечание. Определяя решение нечеткой задачи ОРМ, необходимо обратить внимание на тот факт, что если ЛПР не приемлет нечеткого описания решения, то под "минимизацией" целевого функционала следует понимать рациональный выбор конкретной альтернативы или множества альтернатив. Рациональность при этом состоит в том, что при выборе конкретной альтернативы ЛПР должно исходить из необходимости компромисса между желанием получить по возможности меньшее значение целевого функционала и стремлением выбрать как можно более доступную альтернативу (т. е. большее значение функции принадлежности нечеткого множества допустимых альтернатив).

2.4. НЕПРЕРЫВНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОПРОДУКТОВЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ ИЗ ПРОСТРАНСТВА E_n ПРИ НЕЧЕТКИХ ДАННЫХ

В настоящем параграфе рассмотрены математические модели нечетких задач ОРМ второго типа, где нечеткими являются исходные данные.

Сформулируем сначала бесконечномерную задачу размещения, общая постановка которой приведена в литературе [59].

Пусть потребитель некоторой однородной продукции распределен в области Ω . Конечное число N производителей, расположенных в изолированных точках $\tau_i, i = \overline{1, N}$ области Ω , образуют систему точек $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$, причем координаты некоторых из них (или даже всех) могут быть заранее неизвестны. При этом известна величина спроса $\rho(x)$ на продукцию в каждой точке области Ω , а также стоимость доставки продукции $c_i(x, \tau_i), i = \overline{1, N}$, из пункта производства τ_i в пункт потребления x . Предполагаем, что

прибыль производителя зависит только от транспортных расходов, а объем продукции выпускаемой i -м производителем, определяется суммарным спросом обслуживаемых потребителей и не должен превышать заданных объемов b_i , $i = \overline{1, N}$. Необходимо разбить область Ω на зоны обслуживания каждым из производителей, т. е. на подмножества $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, так, чтобы суммарные затраты на доставку продукции были минимальными.

В реальных задачах точно определить спрос, иначе говоря задать его количественную оценку, часто невозможно, но при этом реально оценить его как «высокий», «низкий» и т. д. Таким образом, в каждой точке области мы можем задать некоторое качественное значение, которое удобно описывать с помощью нечетких множеств. Функция спроса при этом будет определена в виде некоторого нечеткого отображения множества Ω на множество $R^+ = [0; +\infty)$. Другими словами, на множестве Ω будет задано нечеткое отображение ρ с функцией принадлежности $\mu_\rho(x, r): \Omega \times R^+ \rightarrow [0; 1]$. Каждому потребителю x из множества Ω в этом случае ставится в соответствие некоторое нечеткое множество на подпространстве R^+ , описывающее спрос на продукцию. Точнее, для каждого фиксированного аргумента x' соответствующее ему нечеткое значение функции ρ будет описываться функцией принадлежности $\mu_\rho(x', r)$.

Аналогично, функцию стоимости также можно определить как нечеткое отображение множества Ω^2 в подпространство R^+ , функция принадлежности которого $\mu_c(x, \tau_i, r): \Omega \times \Omega \times R^+ \rightarrow [0; 1]$. Нечеткое значение функции для каждого фиксированного аргумента x' и τ_i будет нечетким множеством на подпространстве R^+ с функцией принадлежности $\mu_c(x', \tau_i, r)$.

Кроме того, значения потенциала производителей b_i , $i = \overline{1, N}$, также могут быть заданы нечетко, в виде нечетких множеств.

Следовательно, можно сформулировать такие задачи оптимального разбиения множеств при нечетких исходных данных:

Задача D1. Оптимального разбиения при нечетких исходных данных с фиксированными центрами подмножеств без ограничений.

Пусть Ω – замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E_n . Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, центры которых $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ заданы, так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx$$

достигал минимального значения при следующих ограничениях:

$$\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N};$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega.$$

Здесь $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, – нечеткие отображения множества Ω^2 в подпространство R^+ с функцией принадлежности $\mu_c(x, \tau_i, r) : \Omega \times \Omega \times R^+ \rightarrow [0; 1]$; $\rho(x)$ – нечеткое отображение с функцией принадлежности $\mu_\rho(x, r) : \Omega \times R^+ \rightarrow [0; 1]$.

Задача D2 оптимального разбиения при нечетких исходных данных с размещением центров подмножеств без ограничений.

Пусть Ω – замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E_n . Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ и разместить центры подмножеств $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ в области Ω так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx,$$

достигал минимального значения при следующих ограничениях:

$$\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N},$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega.$$

Здесь отображения $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, $\rho(x)$ описываются также, как и в задаче D1.

Задача D3. Оптимального разбиения при нечетких исходных данных с фиксированными центрами подмножеств и ограничениями на мощность подмножеств.

Непрерывные задачи оптимального разбиения множества в условиях неполной информации об исходных данных

Пусть Ω – замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E_n . Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, центры которых $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ заданы так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx,$$

достигал минимального значения при следующих ограничениях:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N},$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega.$$

Здесь $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, – нечеткие отображения множества Ω^2 в пространство R^+ с функцией принадлежности $\mu_c(x, \tau_i, r) : \Omega \times \Omega \times R^+ \rightarrow [0; 1]$; $\rho(x)$ – нечеткое отображение с функцией принадлежности $\mu_\rho(x, r) : \Omega \times R^+ \rightarrow [0; 1]$; b_i , $i = \overline{1, N}$ заданные действительные положительные числа, которые отвечают такому условию разрешимости задачи:

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq S, \quad S = \int_{\Omega} \rho(x) dx.$$

Задача D4. Оптимального разбиения при нечетких исходных данных с размещением центров подмножеств и ограничениями на мощность подмножеств.

Пусть Ω – замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E_n . Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ и разместить центры подмножеств $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ в области Ω так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx,$$

достигал минимального значения при таких ограничениях:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N};$$

$$\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N};$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega.$$

Здесь функции $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, и $\rho(x)$, а также параметры b_i , $i = \overline{1, N}$, определяются как и в предыдущей задаче.

Учитывая возможную нечеткость в задании значений параметров b_i , $i = \overline{1, N}$, получим задачу следующего вида:

Задача D5. Оптимального разбиения при нечетких исходных данных с размещением центров подмножеств и с ограничениями на мощность подмножеств.

Пусть Ω – замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E_n . Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ и разместить центры подмножеств $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ в области Ω так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx,$$

достигал минимального значения при следующих ограничениях:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq \tilde{b}_i, \quad i = \overline{1, N};$$

$$\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N};$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega.$$

Здесь $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, – нечеткие отображения множества Ω^2 в пространство R^+ с функцией принадлежности $\mu_c(x, \tau_i, r): \Omega \times \Omega \times R^+ \rightarrow [0; 1]$; $\rho(x)$ – нечеткое отображение с функцией принадлежности $\mu_\rho(x, r): \Omega \times R^+ \rightarrow [0; 1]$; \tilde{b}_i , $i = \overline{1, N}$ – заданные нечеткие числа, которые отвечают условию разрешимости задачи.

Интегралы в каждой постановке задачи отображают суммирование по всем точкам x из множества Ω и в зависимости от выбранного метода решения рассматриваются как интегралы Лебега либо как нечеткие интегралы.

Предложенные модели сформулированы для случая, когда должно быть получено четкое решение задачи в виде обычного разбиения множества Ω , их можно обобщить на класс нечетких разбиений (см. раздел 2.3).

2.5. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ В ЦЕЛЕВОМ ФУНКЦИОНАЛЕ

Рассмотрим теперь задачи ОРМ, в которых неточно задан целевой функционал, а именно, неизвестно точное описание функции стоимости [103, 104, 108, 109, 139]. В данном разделе предложены математические модели и подходы к решению таких задач.

2.5.1. Задача ОРМ с множественнозначным целевым функционалом

Постановка задачи. Пусть потребитель некоторой однородной продукции распределен в области Ω . Конечное число N производителей, расположенных в изолированных точках τ_i , $i = \overline{1, N}$, области Ω , образуют систему точек $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$, причем координаты некоторых из них (или даже всех) могут быть заранее не известны. Известна величина спроса $\rho(x)$ на продукцию в каждой точке области Ω , а также множество возможных значений стоимости доставки продукции: $c_i(x, \tau_i) = \{c_i^1(x, \tau_i); c_i^2(x, \tau_i); \dots; c_i^{M_i}(x, \tau_i)\}$, $i = \overline{1, N}$, из пункта производства τ_i в пункт потребления x . Предполагается, что прибыль производителя зависит только от величины транспортных расходов. Возможности i -го производителя обусловлены суммарным спросом обслуживаемых потребителей и не должны превышать заданных объемов выпуска продукции b_i , $i = \overline{1, N}$. Необходимо разбить область Ω на зоны обслуживания каждым из производителей, т. е. на подмножества $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, так,

чтобы суммарные затраты на доставку продукции были минимальными.

Особенность этой задачи состоит в том, что стоимость доставки продукции не задана однозначно, а представлена некоторым множеством возможных значений, и до момента принятия решения неизвестно, какое из них примет функция. Сформулируем математическую модель, соответствующую этой задаче.

Пусть Ω – замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E_n . Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ и разместить центры подмножеств $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ в области Ω так, чтобы функционал

$$F(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx, \quad (2.19)$$

достигал минимального значения при таких ограничениях:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad (2.20)$$

$$\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N}; \quad (2.21)$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega. \quad (2.22)$$

Здесь $c_i(x, \tau_i) = \{c_i^1(x, \tau_i); c_i^2(x, \tau_i); \dots; c_i^{M_i}(x, \tau_i)\}$, $i = \overline{1, N}$, –

множество возможных функций стоимости; $\rho(x)$ – действительная неотрицательная интегрируемая функция, заданная на множестве Ω ; b_i , $i = \overline{1, N}$ – заданные действительные положительные числа, удовлетворяющие условию разрешимости задачи, то есть

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq S, \quad S = \int_{\Omega} \rho(x) dx.$$

Описание метода решения. Существует несколько подходов к решению сформулированной задачи, которая относится к бесконечномерному программированию с множественнозначной функцией стоимости.

Очевидно, что здесь речь не идет о минимизации в обычном смысле, поскольку значением функционала также будет не число, а

Непрерывные задачи оптимального разбиения множества в условиях неполной информации об исходных данных

некоторое множество чисел, и поэтому нужно оговорить, что будем понимать под решением задачи.

Обозначим по аналогии с литературными данными [59] через $P(\Omega; \tau^N)$ – множество всех возможных разбиений задачи (2.19) – (2.22), соответствующих набору произвольных, но фиксированных центров $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, то есть

$$P(\Omega; \tau^N) = \left\{ (\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}; \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) : \begin{aligned} &\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N}; \\ &\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega; \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, i = \overline{1, N} \end{aligned} \right\},$$

и через $W(\tau^N) = (\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}; \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) \in P(\Omega; \tau^N)$, – некоторое возможное разбиение множества Ω , отвечающее фиксированному набору центров τ^N .

Под решением задачи минимизации функционала (2.19) при условиях (2.20) – (2.22) и заданном векторе τ^N будем понимать одну из следующих его интерпретаций:

1) Совокупность $P^*(\Omega; \tau^N)$ возможных разбиений множества Ω , удовлетворяющих таким условиям:

$$P^*(\Omega; \tau^N) = \left\{ W(\tau^N) \mid \exists W'(\tau^N), F(W(\tau^N)) \leq F(W'(\tau^N)) \text{ для всех} \right.$$

$$\left. c_i^j(x, \tau_i) \in D \text{ и } \exists l: F(W(\tau^N)) < F(W'(\tau^N)) \text{ для всех } c_i^l(x, \tau_i) \in D \right\},$$

где D – множество всех возможных значений функций $c_i^j(x, \tau_i)$.

Такое определение решения задачи (2.19) – (2.22) исходит из ее интерпретации как задачи многокритериальной оптимизации и соответствует множеству Парето-оптимальных решений.

2) Разбиение множества Ω на подмножества, которое обеспечивает оптимальное в некотором смысле значение функционалу (2.19). Оптимальность будем понимать как отыскание одного из эффективных решений многокритериальной задачи и (или) достижение функционалом некоторого значения, отвечающего определенным требованиям и которое будет не хуже других решений с точки зрения предпочтений, индуцированных условиями задачи и требованиями ЛПР.

3) Некоторое нечеткое разбиение множества Ω на подмножества (см. определение 2.1 пункта 2.3).

Далее рассмотрим подходы к решению задачи (2.19) – (2.22), обеспечивающие решение типа 2.

Иначе говоря, *решением задачи оптимального разбиения* с множественнозначной функцией стоимости будем считать разбиение, которое обеспечивает оптимальное (в указанном выше смысле) значение целевому функционалу (2.19).

Учитывая, что функция стоимости $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, для каждой фиксированной пары аргументов x и τ_i представляет собой некоторый набор значений, то данную формулировку можно интерпретировать как задачу многокритериальной оптимизации, в которой множество критериев формируется как совокупность функционалов, полученных путем подстановки в исходный функционал одного из возможных наборов функций стоимости, либо как задача выбора (если предполагать, что среди всего множества функций стоимости актуальным будет лишь один его элемент).

Одним из подходов к решению является сведение исходной задачи с множественнозначной целевой функцией к обычной задаче математического программирования путем преобразования исходного множества целевых функций в единственную компромиссную целевую функцию. Наиболее простым способом такого преобразования является выбор одного представителя из всего множества целевых функций. Очевидно, что методы такого выбора могут быть различны в зависимости от имеющейся исходной информации.

Прежде всего, заметим, что в условиях полной неопределенности, т. е. когда ЛПР ничего не известно о возможных предпочтениях на множестве значений стоимости, то можно выбирать любое из них, например,

– Минимальное значение:

$$c_i(x, \tau_i) = \min_j c_i^j(x, \tau_i), \quad j = \overline{1, M_i}, \quad i = \overline{1, N}, \quad x \in \Omega. \quad (2.23)$$

Такой выбор соответствует «оптимистической позиции», поскольку в расчете принимают минимальную цену.

– Максимальное значение:

$$c_i(x, \tau_i) = \max_j c_i^j(x, \tau_i), \quad j = \overline{1, M_i}, \quad i = \overline{1, N}, \quad x \in \Omega. \quad (2.24)$$

Непрерывные задачи оптимального разбиения множества в условиях неполной информации об исходных данных

Здесь имеет место «пессимистическая позиция», при которой ожидаемой считается максимальная цена для всех пунктов производства;

– Любое (случайное) из возможных значений стоимости.

Однако такой подход имеет существенный недостаток. Выбирая одно из возможных значений функции стоимости, мы тем самым отказываемся от всех других значений, т. е. не учитываем множественность исходных данных.

Предположим, что ЛПР обладает некоторой информацией о возможных состояниях среды и о соответствующих им функциях стоимости. Например:

состояние среды	функция стоимости			
θ_1	$c_1^1(x, \tau_i)$	$c_2^1(x, \tau_i)$	\dots	$c_N^1(x, \tau_i)$
θ_2	$c_1^2(x, \tau_i)$	$c_2^2(x, \tau_i)$	\dots	$c_N^2(x, \tau_i)$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
θ_M	$c_1^M(x, \tau_i)$	$c_2^M(x, \tau_i)$	\dots	$c_N^M(x, \tau_i)$

Тогда, некоторым образом учесть все множество функций стоимости позволяет выбор компромиссной функции на основе принципа недостаточного основания, который формулируется таким образом: если нет основания считать какое-либо состояние среды более вероятным, чем любое другое, то их априорные вероятности нужно считать равными. Иначе говоря, в качестве компромиссной функции выбирают среднее арифметическое всех возможных функций, то есть

$$c_i(x, \tau_i) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M c_i^j(x, \tau_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad x \in \Omega. \quad (2.25)$$

Другой вариант в этой ситуации – выбор компромиссной функции в соответствии с критерием Гурвица, а именно:

$$c_i(x, \tau_i) = \alpha_i \min_{\theta_j} c_i^j(x, \tau_i) + (1 - \alpha_i) \max_{\theta_j} c_i^j(x, \tau_i), \quad (2.26)$$

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad x \in \Omega.$$

Коэффициенты α_i , $i = \overline{1, N}$, позволяют учитывать при выборе уровень оптимизма-пессимизма, соответствующий убежденности ЛПР.

Если ЛПР обладает информацией относительно вероятностей ситуаций принятия решений, то можно использовать подход, основанный на критериях первой информационной ситуации [95], например:

– выбор в качестве возможной функции стоимости ее математического ожидания, то есть

$$c_i(x, \tau_i) = \sum_{j=1}^M p_j c_i^j(x, \tau_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad x \in \Omega, \quad (2.27)$$

– выбор значения, соответствующего наиболее вероятному состоянию среды, а именно:

$$c_i(x, \tau_i) = c_i^{j^*}(x, \tau_i), \quad \text{где } p_{j^*} = \max_{\theta_j} p_j \quad i = \overline{1, N}, \quad x \in \Omega. \quad (2.28)$$

Возможно использования и других критериев принятия решений [95].

В частности, если ЛПР не известны априорные вероятности состояний среды, но известно отношение порядка, заданное на этих состояниях, то возможно использование критериев третьей информационной ситуации, например, оценок Фишборна [95].

После того, как выбраны компромиссные функции стоимости, исходная задача с множественнозначной функцией стоимости преобразуется в стандартную задачу ОРМ (см. задачу А4, метод и алгоритм решения которой описан в п. 1.2.4).

Сформулируем алгоритм решения задачи (2.19) – (2.22), основанный на методе ОРМ.

Алгоритм 2.1

1. Учитывая имеющуюся информацию относительно ситуации принятия решения, выбираем один из критериев (2.23) – (2.28).

2. Используя выбранный критерий, преобразуем исходное множество целевых функций в единственную компромиссную функцию. Тем самым исходная множественнозначная задача сведена к задаче А4.

3. Решаем полученную задачу оптимального разбиения множеств, используя алгоритм 1.4. (см. п.1.2.4).

Алгоритм описан.

**Непрерывные задачи оптимального разбиения множества в условиях
неполной информации об исходных данных**

Модельная задача и анализ полученных результатов.

Потребители некоторой однородной продукции, производимой тремя предприятиями, непрерывно распределены в области $\Omega = \{(x,y) \in R^2 | 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10\}$. Заданы такие начальные координаты расположения предприятий: $\tau_i = (\tau_i^x, \tau_i^y) = (0,0), i = 1,2,3$. Известна величина спроса $\rho(x,y)$ на продукцию в каждой точке (x,y) области Ω , с целью упрощения полагаем, что $\rho(x,y) = 1$ для всех точек $(x,y) \in \Omega$; а также множество возможных значений стоимости доставки продукции $c_i(x, \tau_i) = \{c_i^j(x, \tau_i)\}, i = \overline{1,3}$, – из пункта производства τ_i в пункт потребления x , с учетом состояния среды $\theta_j, j = \overline{1,5}$: $c_i^j(x, \tau_i) = \gamma_i^j \sqrt{\alpha_i^j (x - \tau_i^x)^2 + \beta_i^j (y - \tau_i^y)^2}$. Значения коэффициентов $\alpha_i^j, \beta_i^j, \gamma_i^j$ представлены в табл. 2.1.

Предполагается, что величина прибыли производителя зависит только от транспортных расходов.

Возможности i -го производителя определяются суммарным спросом обслуживаемых потребителей и не должны превышать заданных объемов выпуска продукции: $b_1 = 25, b_2 = 60, b_3 = 50$.

Необходимо разбить область Ω на зоны обслуживания каждым из производителей, т. е. на подмножества $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, так, чтобы суммарные затраты на доставку продукции были минимальными.

Таблица 2.1

Значения коэффициентов функции стоимости $\alpha_i^j, \beta_i^j, \gamma_i^j$

Состояние среды, θ_j	Предприятие 1			Предприятие 2			Предприятие 3		
	α_1^j	β_1^j	γ_1^j	α_2^j	β_2^j	γ_2^j	α_3^j	β_3^j	γ_3^j
θ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
θ_2	0,5	1	1	1	1	2	1	1	2
θ_3	1	1,5	2	0,5	0,5	0,5	1	1	1
θ_4	0,5	1	2	1,5	3	2	2	3	1
θ_5	1	1	1	2	2	1	1	1	4

Используя критерий Гурвица с константой 0,7, получили результаты, представленные на рис. 2.1.

Здесь координаты центров

$$\tau_1: (7,9098; 5,1205);$$

$$\tau_2: (3,1354; 2,1786);$$

$$\tau_3: (2,9033; 7,3819).$$

Оптимальные значения объемов выпуска продукции $b_1 = 19,94$; $b_2 = 38,25$; $b_3 = 41,75$.

Значение функционала $F = 177,8932$.

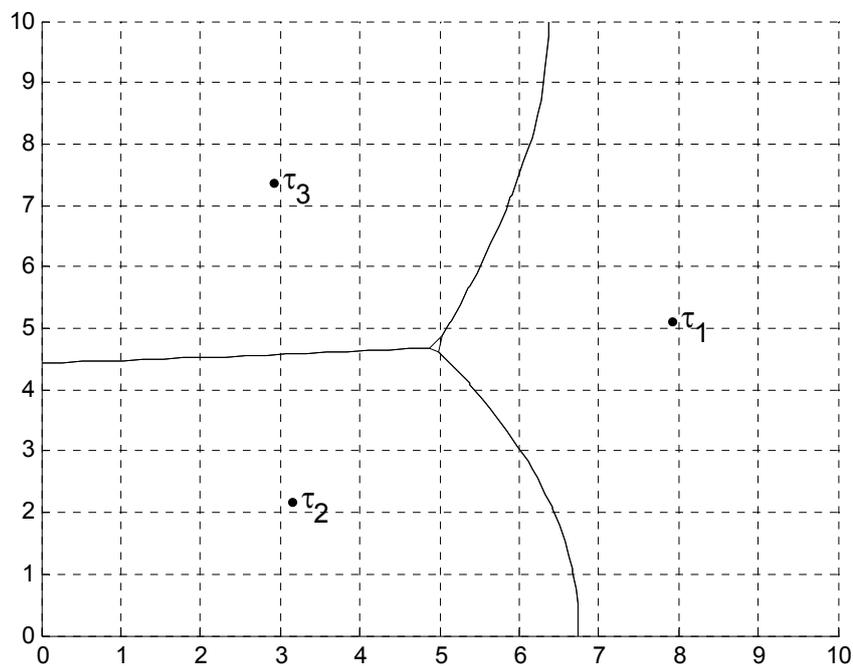


Рис. 2.1. Оптимальное решение задачи ОРМ с многозначной функцией стоимости при использовании критерия Гурвица ($\lambda = 0,7$)

При выборе значений критерия Байеса (2.27) для определения компромиссной функции был получен результат, отраженный на рис. 2.2. Здесь координаты центров

$$\tau_1: (-31,1355; 15,742);$$

$$\tau_2: (2,5073; 4,9982);$$

$$\tau_3: (7,5006; 4,9995).$$

Непрерывные задачи оптимального разбиения множества в условиях неполной информации об исходных данных

Оптимальные значения потенциала производителей

$$b_1 = 0, b_2 = 50, b_3 = 50;$$

значение функционала $F = 269,01960077$.

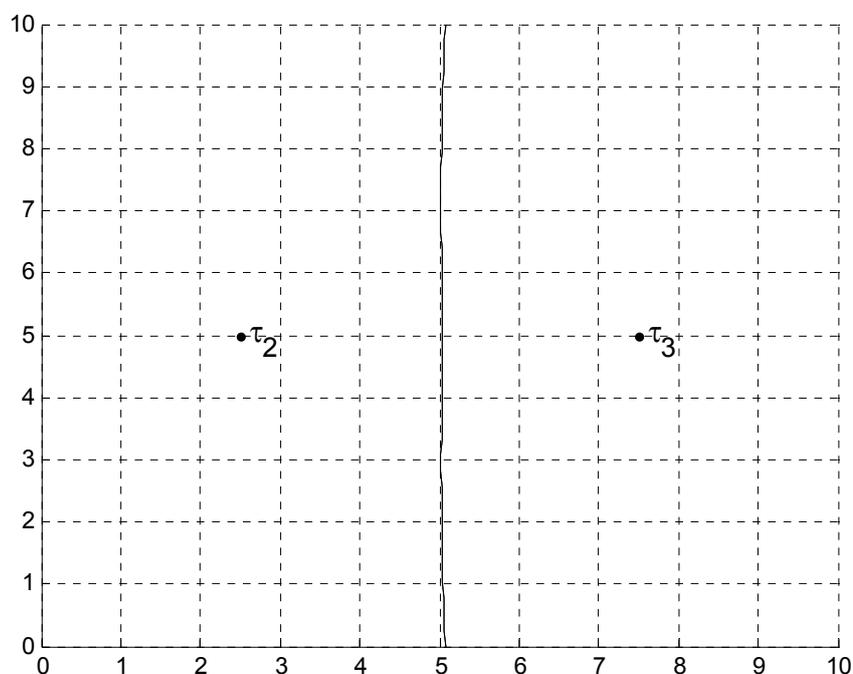


Рис. 2.2. Оптимальное решение задачи ОРМ с множественнозначной функцией стоимости при использовании критерия Байеса

Выводы. Использование различных критериев для перехода от множественнозначной задачи к скалярной дает различные компромиссные функции стоимости и, соответственно, различные решения исходной задачи. Стало быть, возникает дополнительная задача проверки эффективности полученных решений.

Обобщением рассмотренной задачи будут бесконечномерные задачи размещения в нечетких условиях, математические модели которых были сформулированы в разделе 2.4 этой главы.

2.5.2. Задача оптимального разбиения множества с интервальным целевым функционалом

Постановка задачи. Обобщим рассмотренную в предыдущем пункте задачу на случай, когда значения стоимости транспортировки, а соответственно, и целевого функционала заданы в виде некоторого интервала на числовой оси [108, 109].

Задача А. Пусть Ω – замкнутое, ограниченное, измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E_n . Необходимо разбить множество Ω на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ и разместить центры этих подмножеств $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ в области множества Ω так, чтобы функционал

$$F(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx, \quad (2.29)$$

достигал минимального значения и выполнялись следующие условия:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad (2.30)$$

$$\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N}; \quad (2.31)$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega. \quad (2.32)$$

Здесь $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$ – действительные, ограниченные, определенные на множестве Ω интервальные функции, т. е. для каждого значения x задан интервал $[c_i^L(x, \tau_i); c_i^R(x, \tau_i)]$, описывающий значение функции $c_i(x, \tau_i)$ в точке x ; $\rho(x)$ – действительная, неотрицательная интегрируемая функция, определенная на множестве Ω ; b_i , $i = \overline{1, N}$ заданные действительные положительные числа, удовлетворяющие условию разрешимости задачи, то есть

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq S, \quad S = \int_{\Omega} \rho(x) dx. \quad (2.33)$$

Поскольку функции, входящие в целевой функционал, являются интервальными, то интервальным будет и значение функционала.

Следовательно, говорить об оптимизации в обычном смысле не представляется возможным.

Под **оптимальным решением задачи** (2.29) – (2.32) будем понимать то, которое является эффективным для задачи многокритериальной оптимизации или соответствует некоторым дополнительным условиям и не хуже других с точки зрения предпочтений, индуцированных условиями задачи, и лицом, принимающим решение.

Описание методов решения задачи и численные алгоритмы. Для решения сформулированной задачи предложены алгоритмы, основанные на ее редукции к обычной задаче ОРМ или задаче ОРМ с дополнительными ограничениями.

Подход 1 базируется на предположении, что можно разбить исходный интервал значений функции $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, на определенное количество частичных интервалов, в каждом из которых следует зафиксировать одно значение и использовать его для дальнейших расчетов. Таким образом, интервальные значения функции заменяются некоторым набором ее возможных значений $\{c_i^1(x, \tau_i); c_i^2(x, \tau_i); \dots; c_i^{M_i}(x, \tau_i)\}$, вследствие чего выходная интервальная задача приводится к виду задачи ОРМ с множественнозначным целевым функционалом, методы решения которой рассматривались в предыдущем разделе.

Сформулируем алгоритм решения задачи (2.29) – (2.32).

Алгоритм 2.2

1. Разбиваем исходный интервал значений функции $c_i(x, \tau_i)$ на M_i частичных интервалов $i = \overline{1, N}$.

2. В каждом частичном интервале выбираем одного представителя и фиксируем соответствующее значение функции, результатом чего будет множество возможных значений функции $\{c_i^1(x, \tau_i); c_i^2(x, \tau_i); \dots; c_i^{M_i}(x, \tau_i)\}$.

3. Применяем один из критериев принятия решений [95] и получаем компромиссную функцию $\hat{c}_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$. Тем самым исходная задача сведена к задаче **A4**.

4. Используя алгоритм 1.4 (см. п. 1.2.4), решаем эту задачу.

Алгоритм описан.

Заметим, что применение этого алгоритма имеет следующие особенности:

- следствием использования разных критериев являются различные задачи, поэтому, проводя свертку, их необходимо выбирать обоснованно, учитывая имеющуюся исходную информацию;
- разбиение на частичные интервалы (т. е. их длина и количество) зависит от вида функции $c_i(x, \tau_i)$ и условий задачи (например, возможности оценить значения функции);
- необходимо дополнительно исследовать полученное решение на эффективность.

Подход 2 предусматривает редукцию исходной интервальной задачи к задаче ОРМ с дополнительными ограничениями. Рассмотрим его подробнее.

На первом этапе необходимо решить исходную задачу **A**, заменив интервальные функции $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, их крайними значениями (концами интервалов $[c_i^L(x, \tau_i); c_i^R(x, \tau_i)]$). Таким образом формулируем две задачи.

Одну с минимальными значениями функций $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$.

Задача A^L . Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} F_L \left(\left\{ \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N \right\}, \left\{ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N \right\} \right)$$

при таких условиях:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, p;$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N;$$

$$\left\{ \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N \right\} \in \sum_{\Omega}^N, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где

$$F_L \left(\left\{ \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N \right\}, \left\{ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N \right\} \right) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i^L(x, \tau_i) \rho(x) dx, \quad (2.34)$$

**Непрерывные задачи оптимального разбиения множества в условиях
неполной информации об исходных данных**

$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; b_1, \dots, b_N – заданные неотрицательные числа, причем выполняются следующие условия разрешимости задачи:

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Вторая задача включает максимальные значения функций $c_i(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$:

Задача A^R . Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} F_R \left(\left\{ \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N \right\}, \left\{ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N \right\} \right)$$

с учетом таких условий:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, p;$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N;$$

$$\left\{ \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N \right\} \in \sum_{\Omega}^N, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где

$$F_R \left(\left\{ \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N \right\}, \left\{ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N \right\} \right) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i^R(x, \tau_i) \rho(x) dx, \quad (2.35)$$

$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; b_1, \dots, b_N – заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи, а именно:

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Очевидно, что сформулированные задачи являются непрерывными линейными задачами ОРМ с размещением центров подмножеств при ограничениях (задача $A4$), метод решения которых описан п. 1.2.4.

Рассмотрим также двукритериальную задачу ОРМ.

Задача АМ1. Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} F_L \left(\left\{ \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N \right\}, \left\{ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N \right\} \right);$$

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} F_R \left(\left\{ \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N \right\}, \left\{ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N \right\} \right)$$

при таких условиях:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, p;$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N;$$

$$\left\{ \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N \right\} \in \sum_{\Omega}^N, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; b_1, \dots, b_N – заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи, а именно:

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Чтобы определить компромиссное решение исходной задачи **A**, используем следующую процедуру [25]:

1. Найдем оптимальные решения задач **A^L** и **A^R** как обычных задач ОРМ.

2. Обозначим через $W_L^* = \left(\left\{ \Omega_1^L, \Omega_2^L, \dots, \Omega_N^L \right\}; \left\{ \tau_1^L, \tau_2^L, \dots, \tau_N^L \right\} \right)$, и $W_R^* = \left(\left\{ \Omega_1^R, \Omega_2^R, \dots, \Omega_N^R \right\}; \left\{ \tau_1^R, \tau_2^R, \dots, \tau_N^R \right\} \right)$, оптимальные решения задач **A^L** и **A^R** соответственно; а через

$$F_L^* = F_L(W_L^*) = F_L \left(\left\{ \Omega_1^L, \Omega_2^L, \dots, \Omega_N^L \right\}; \left\{ \tau_1^L, \tau_2^L, \dots, \tau_N^L \right\} \right), \quad (2.36)$$

и

$$F_R^* = F_R(W_R^*) = F_R \left(\left\{ \Omega_1^R, \Omega_2^R, \dots, \Omega_N^R \right\}; \left\{ \tau_1^R, \tau_2^R, \dots, \tau_N^R \right\} \right), \quad (2.37)$$

соответствующие им значения целевого функционала.

Кроме того, введем такие обозначения: $l_1 = F_L(W_R^*)$ и $l_2 = F_R(W_L^*)$.

3. Предполагаем, что ЛПР желает принять решение, имеющее следующие свойства:

$$F_L\left(\left\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\right\}, \left\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\right\}\right) \leq l_1; \quad (2.38)$$

$$F_R\left(\left(\left\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\right\}, \left\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\right\}\right)\right) \leq l_2. \quad (2.39)$$

Это предположение сужает множество допустимых решений и позволяет ЛПР выразить свои цели более точно, введя функции принадлежности, отражающие степень его удовлетворения достигнутыми значениями целевой функции.

4. Для удобства зададим функции принадлежности цели в таком виде:

$$f_1(W) = \begin{cases} \frac{l_1 - F_L(W)}{l_1 - F_L^*}, & \text{если } F_L(W) \leq l_1, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (2.40)$$

$$f_2(W) = \begin{cases} \frac{l_2 - F_R(W)}{l_2 - F_R^*}, & \text{если } F_R(W) \leq l_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2.41)$$

где $W = \left(\left\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\right\}; \left\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\right\}\right)$ – допустимое решение задачи ОРМ.

Выбор такого типа функций не предполагает учета дополнительной информации, которой может обладать ЛПР, но если такая информация имеется, ее также можно включить в модель.

5. Формулируем задачу многокритериальной оптимизации

$$\max_W \begin{bmatrix} f_1(W) \\ f_2(W) \end{bmatrix}$$

при следующих условиях:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\} \in \sum_{\Omega}^N, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$$

где $f_1(W)$, $f_2(W)$ определены согласно (2.40), (2.41);

$$W = \left(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}; \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\} \right), \quad x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega;$$

$\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; b_1, \dots, b_N – заданные неотрицательные числа, причем выполняются такие условия разрешимости задачи:

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Очевидно, что эта задача имеет то же решение, что и задача **АМ1**, так как преобразование от четких целевых функций $F_L(W)$, $F_R(W)$ к нечетким $f_1(W)$, $f_2(W)$ является линейным и строго возрастающим на области допустимых решений (ОДР).

Учитывая предположения (2.38) и (2.39), изменим формулировку многокритериальной задачи.

Задача АМ2. Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} F_L \left(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\} \right);$$

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} F_R \left(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\} \right)$$

при условиях, что

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, p;$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N;$$

$$\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\} \in \sum_{\Omega}^N, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N;$$

$$F_R \left(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\} \right) \leq l_1;$$

$$F_L\left(\left\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\right\}, \left\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\right\}\right) \leq l_2,$$

где функционалы $F_L(W)$, $F_R(W)$ определяются по формулам (2.34), (2.35); $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; b_1, \dots, b_N – заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи, то есть

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Таким образом, исходная задача с интервальным целевым функционалом сведена к двукритериальной задаче ОРМ с дополнительными ограничениями. Справедливым будет следующее утверждение:

Утверждение 2.1. Множество допустимых решений задачи АМ2 не является пустым.

Действительно, по крайней мере разбиения W_R^* и W_L^* являются допустимыми решениями задачи АМ2.

Замечание. Величину $\mu(W) = \min\{f_1(W), f_2(W)\}$, где функции $f_1(W)$, $f_2(W)$ определяют по формулам (2.40), (2.41), можно интерпретировать как степень удовлетворения ЛПР полученным решением.

Методы решения многокритериальных задач были рассмотрены в источниках [36, 86], а задач ОРМ с дополнительными ограничениями находим в работах [28, 41, 59].

ГЛАВА 3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ МЕТОДАМИ
ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ3.1. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОПТИМАЛЬНОГО
РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ В ЗАДАЧАХ
ИССЛЕДОВАНИЯ КРИТЕРИЕВ ПРИНЯТИЯ
РЕШЕНИЙ

3.1.1. Постановка задачи синтеза оптимальных решений

Согласно исследованиям [95] под ситуацией принятия решений понимают тройку $\{\Phi, \Theta, F\}$, где $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ – множество допустимых решений органа управления; $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ – множество состояний среды S , которая может находиться в одном из состояний $\theta_j \in \Theta$; $F = \{f_{jk}\}$ – оценочный функционал, определенный на декартовом произведении $\Theta \times \Phi$ и принимающий значения из пространства R^1 , при этом $f_{jk} = f(\theta_j, \varphi_k)$.

Под информационной ситуацией I будем понимать некоторую степень градации неопределенности выбора средой S своих состояний из множества Θ .

Критерием принятия решений K назовем алгоритм, который определяет для каждой ситуации принятия решений $\{\Phi, \Theta, F\}$ и информационной ситуации I единственное оптимальное решение $\varphi_0 \in \Phi$ либо множество таких решений $\bar{\Phi} \subset \Phi$, которые называют эквивалентными по данному критерию.

Предположим, что орган принятия решений располагает информацией об априорном распределении вероятности

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n); \quad p_j = P\{\Theta = \theta_j\}; \quad \sum_{j=1}^n p_j = 1, \quad \text{на элементах } \theta_j \in \Theta$$

состояний среды S . На практике эти данные могут быть получены путем обработки статистического материала, аналитическими

**Решение задач теории и практики методами оптимального
разбиения множеств**

методами теории вероятности на основе принятых гипотез и допущений либо экспертными методами. Полученные любым из этих способов оценки являются приближенными и поэтому актуальность приобретает исследование возможностей синтеза оптимальных решений по априорному распределению вероятности.

Пусть имеется ситуация принятия решений $\{\Phi, \Theta, F\}$, описанная такой матрицей:

$$\begin{array}{cccc} & \varphi_1 & \dots & \varphi_m \\ \theta_1 & f_{11} & \dots & f_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_n & f_{n1} & \dots & f_{nm} \end{array}$$

причем для множества состояний среды $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$, известно возможное распределение вероятности: $p = (p_1, \dots, p_n)$, и выбран критерий K принятия решений.

Рассмотрим $(n-1)$ -мерный симплекс:

$$P_{n-1} = \left\{ (p_1, \dots, p_{n-1}) : 0 \leq p_j \leq 1, j = 1, \dots, n-1, \sum_{i=1}^{n-1} p_j \leq 1 \right\}, \quad (3.1)$$

являющийся проекцией плоского множества:

$$\Delta_n = \left\{ p = (p_1, \dots, p_n) : 0 \leq p_j \leq 1, j = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n p_j = 1 \right\}$$

на $(n-1)$ -мерное пространство значений \bar{p} первых $(n-1)$ -х компонент вектора априорного распределения $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Сущность задачи синтеза заключается в разбиении симплекса P_{n-1} на множества $S_{\varphi_k} \subset P_{n-1}$, $k = 1, \dots, m$, обладающие такими свойствами:

1. $S_{\varphi_i} \cap S_{\varphi_k} = \emptyset$, $i \neq k$, $i, k = 1, 2, \dots, m$.
2. $\bigcup_{i=1}^m S_{\varphi_i} = P_{n-1}$.

3. Для элемента $p \in S_{\varphi_k}$, $k = 1, \dots, m$, оптимальным, согласно выбранному критерию, будет решение φ_k .

В случае использования в принятии решений критерия Байеса, множества $S_{\varphi_1}, S_{\varphi_2}, \dots, S_{\varphi_m}$ называются байесовыми.

Располагая информацией о множествах $S_{\varphi_1}, S_{\varphi_2}, \dots, S_{\varphi_m}$, соответствующих выбранному критерию, орган управления может сравнительно просто принимать оптимальные с позиции этого критерия решения, даже при неточном знании априорных распределений вероятности состояний среды $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Однако проблема нахождения самих множеств является достаточно сложной математической задачей разбиения $(n-1)$ -мерного симплекса на множества S_{φ_k} , $k = 1, 2, \dots, n$, особенно, когда $n \geq 4$. В монографии [95] была рассмотрена задача построения байесовых множеств и предложены геометрический и функциональный методы ее решения. Однако геометрический метод можно применять лишь в случае, когда ситуация принятия решений характеризуется не более чем тремя состояниями среды, а функциональный метод является довольно громоздким, стало быть его применение также вызывает определенные сложности.

Идея применения метода ОРМ к решению задачи синтеза оптимальных решений основана на том, что при надлежащем выборе целевого функционала ее можно интерпретировать как задачу оптимального разбиения симплекса P_{n-1} на его подмножества $S_{\varphi_1}, S_{\varphi_2}, \dots, S_{\varphi_m}$.

3.1.2. Применение метода ОРМ для построения байесовых множеств

Рассмотрим одну из наиболее распространенных информационных ситуаций, описывающих «поведение» среды S , свойственное большинству практических задач, а именно, принятие решений в условиях риска. Предположим, что задана тройка $\{\Phi, \Theta, F\}$ и орган управления располагает информацией об априорном распределении

вероятности $p = (p_1, \dots, p_n)$, $p_j = P\{\Theta = \theta_j\}$, $\sum_{j=1}^n p_j = 1$, на элементах $\theta_j \in \Theta$ состояний среды S .

Одним из основных критериев принятия решений, применяемых в этом случае, является критерий Байеса, в соответствии с которым оптимальным считают решение $\varphi_{k_0} \in \Phi$ (либо множество таких решений), при котором математическое ожидание оценочного функционала на нем достигает наибольшего возможного значения, а именно:

$$B^+(p, \varphi_{k_0}) = \max_{\varphi_k \in \Phi} B^+(p, \varphi_k) = \max_{\varphi_k \in \Phi} \left[\sum_{i=1}^n f_{ik}^+ p_i \right] = \sum_{i=1}^n f_{ik_0}^+ p_i. \quad (3.2)$$

Индекс «+» отражает тот факт, что оценочный функционал имеет положительный ингредиент, т. е. нуждается в максимизации (например, он описывает прибыль, эффективность и пр.).

Согласно исследованиям [95], сущность задачи синтеза заключается в разбиении симплекса P_{n-1} на множества $S_{\varphi_k} \subset P_{n-1}$, $k = 1, \dots, m$, отвечающие таким условиям:

$$S_{\varphi_i} \cap S_{\varphi_k} = \emptyset, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, m; \quad \bigcup_{i=1}^m S_{\varphi_i} = P_{n-1},$$

причем оптимальным по критерию Байеса для $p \subset S_{\varphi_k}$, $k = 1, \dots, m$ будет решение φ_k , т. е. если $p \subset S_{\varphi_k}$, то

$$B^+(p, \varphi_k) = \max_{\varphi_j \in \Phi} B^+(p, \varphi_j). \quad (3.3)$$

Сформулируем задачу построения байесовых множеств в виде однопродуктовой задачи ОРМ без ограничений [99].

Задача К1. Разбить $(n-1)$ -мерный симплекс:

$$P_{n-1} = \left\{ (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) : 0 \leq p_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n-1; \sum_{j=1}^{n-1} p_j \leq 1 \right\},$$

на измеримые по Лебегу подмножества $S_{\varphi_1}, S_{\varphi_2}, \dots, S_{\varphi_m}$ так, чтобы

$$S_{\varphi_i} \cap S_{\varphi_k} = \emptyset, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, m; \quad (3.4)$$

$$\bigcup_{i=1}^m S_{\varphi_i} = P_{n-1}, \quad (3.5)$$

и функционал

$$F(S_{\varphi_1}, \dots, S_{\varphi_m}) = \sum_{k=1}^m \int_{S_{\varphi_k}} \sum_{i=1}^{n-1} ((f_{ik} - f_{nk}) p_i + f_{nk}) \rho(p) dp, \quad (3.6)$$

достигал максимального значения.

Здесь $\rho(p)$ – действительная, неотрицательная, интегрируемая функция.

Разбиение $S_{\varphi_1}, S_{\varphi_2}, \dots, S_{\varphi_m}$, являющееся решением задачи **K1**, назовем оптимальным.

Очевидно, что в этой формулировке мы получили задачу ОРМ с фиксированными центрами подмножеств без ограничений (задача **A1**).

Введем характеристическую функцию подмножества S_{φ_k} , то есть

$$\lambda_k^*(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \in S_{\varphi_k}, \\ 0, & \text{если } p \in S \setminus S_{\varphi_k}, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

и перепишем задачу **K1** в таком виде:

Задача K1.1. Найти вектор-функцию $\lambda^*(\cdot) = (\lambda_1^*(\cdot), \dots, \lambda_m^*(\cdot))$, отвечающую таким условиям:

$$I(\lambda^*(\cdot)) = \max_{\lambda^*(\cdot) \in \Gamma_1} I(\lambda^*(\cdot)),$$

где
$$I(\lambda(\cdot)) = \int_{P_{n-1}} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{n-1} ((f_{ik} - f_{nk}) p_i + f_{nk}) \rho(p) \lambda_k(p) dp;$$

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(p) = (\lambda_1(p), \dots, \lambda_m(p)) : \sum_{k=1}^m \lambda_k(p) = 1, \text{ п. в. для } p \in P_{n-1}, \\ \lambda_k(p) = 0 \vee 1, \text{ для } p \in P_{n-1}, k = 1, \dots, m \}.$$

Заметим, что $F(S_{\varphi_1}, \dots, S_{\varphi_m}) = I(\lambda(\cdot))$.

Используя метод ОРМ, описанный в главе 1, решение поставленной задачи получаем в таком виде:

$$\lambda_k^*(p) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n-1} ((f_{ik} - f_{nk}) p_i + f_{nk}) \geq \\ & \geq \sum_{i=1}^{n-1} ((f_{ij} - f_{nj}) p_i + f_{nj}), \quad j = \overline{1, m}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (3.7)$$

где $\lambda_1^*(p), \dots, \lambda_m^*(p)$ характеристические функции подмножеств $S_{\varphi_1}^*, \dots, S_{\varphi_m}^*$, образующих оптимальное разбиение симплекса P_{n-1} .

Имеют место следующие утверждения:

Утверждение 3.1. Граница между множествами $S_{\varphi_i}^*$ и $S_{\varphi_j}^*$ представляет собой гиперплоскость.

Действительно, пусть некоторая точка p принадлежит границе $\Gamma_{\varphi_i \varphi_j}$ подмножеств S_{φ_i} и S_{φ_j} . Тогда из следствия о необходимом и достаточном условии оптимальности в задачах ОРМ (теорема 1.5, п. 1.1.4 или [59]) делаем вывод, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} ((f_{ki} - f_{ni}) p_k + f_{ni}) = \sum_{k=1}^{n-1} ((f_{kj} - f_{nj}) p_k + f_{nj})$$

или

$$\sum_{k=1}^{n-1} (f_{ki} - f_{kj} - f_{ni} + f_{nj}) p_k = f_{nj} - f_{ni}.$$

Тем самым утверждение доказано.

Утверждение 3.2. Подмножества $S_{\varphi_1}^*, \dots, S_{\varphi_m}^*$ образуют байесовы множества решений.

Действительно, решение φ^* оптимально по критерию Байеса, если выполняются такие соотношения:

$$B^+(p, \varphi^*) = \max_{\varphi_k \in \Phi} B^+(p, \varphi_k) = \max_{\varphi_k \in \Phi} \left[\sum_{i=1}^n f_{ik}^+ p_i \right].$$

Пусть разбиение $S_{\varphi_1}^*, \dots, S_{\varphi_m}^*$ является оптимальным решением задачи **K1**. Рассмотрим произвольное множество $S_{\varphi_i}^*$ и точку $(p_1, \dots, p_{n-1}) \in S_{\varphi_i}^*$. Согласно необходимому и достаточному условию оптимальности разбиения (см. теорему 1.5, п. 1.1.4 или [59]), имеет место следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{n-1} ((f_{ki} - f_{ni}) p_k + f_{ni}) \geq \sum_{k=1}^{n-1} ((f_{kj} - f_{nj}) p_k + f_{nj}), \quad \forall j = \overline{1, m}. \quad (3.8)$$

Из условия: $\sum_{k=1}^n p_k = 1$, вытекает, что $p_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k$, тогда выражение (3.8) можно записать в таком виде:

$$\sum_{k=1}^n f_{ki} p_k \geq \sum_{k=1}^{n-1} f_{kj} p_k, \quad \forall j = \overline{1, m}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n f_{ki} p_k = \max_{j=1, m} \left[\sum_{k=1}^n f_{kj}^+ p_k \right] = B^+(p, \varphi^*),$$

и решение φ^* является оптимальным по критерию Байеса для априорного распределения вероятности $(p_1, \dots, p_{n-1}) \in S_{\varphi_i}^*$.

Сформулируем алгоритм решения задачи **K1**, основанный на методе ОРМ.

Алгоритм 3.1

1. Множество P_{n-1} погружаем в параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой. Задаем функцию $\rho(p)$ в узлах сетки по такому правилу:

$$\rho(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \in P_{n-1}, \\ 0, & \text{если } p \notin P_{n-1}. \end{cases}$$

2. Вычисляем значения $\lambda_k^*(p)$, $k = \overline{1, m}$, в узлах сетки по формуле (3.7).

3. Если $\lambda_k^*(p) = 1$, точку p относим к множеству $S_{\varphi_k}^*$. В противном случае – нет.

4. Рассчитываем значения целевой функции $F(S_{\varphi_1}, \dots, S_{\varphi_m})$ в узле p .

Алгоритм 3.1 описан.

3.1.3. Применение метода ОРМ для построения множеств, соответствующих другим критериям

Рассмотрим теперь задачу построения множеств решений $S_{\varphi_k} \subset P_{n-1}$, $k = 1, \dots, m$ для критерия такого вида [98]:

$$K(p, \varphi_k) = (1 - \alpha) \left(B^+(p, \varphi_k) \right) - \alpha \sigma^2(p, \varphi_k), \quad (3.9)$$

где $B^+(p, \varphi_k) = \sum_{i=1}^n f_{ik} p_i$ – байесово значение оценочного функционала для решения φ_k , которое соответствует априорному распределению

вероятности $p = (p_1, \dots, p_n)$;

$\sigma^2(p, \varphi_k) = \sum_{i=1}^n \left(f_{ik} - B^+(p, \varphi_k) \right)^2 p_i$ – дисперсия значений оценочного функционала, соответствующих решению φ_k ;

α – параметр, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Упомянутый критерий является комбинированным, а точнее сверткой критериев Байеса и минимума дисперсии. Параметр α позволяет в той или иной степени отдавать предпочтение одному из них, и таким образом учитывать преимущества обоих критериев. Когда $\alpha = 0$ этот критерий совпадает с критерием Байеса, а если $\alpha = 1$, то с критерием минимума дисперсии.

Сформулируем задачу построения множеств решений по комбинированному критерию как задачу ОРМ.

Задача К2. Разбить $(n-1)$ -мерный симплекс

$$P_{n-1} = \left\{ (p_1, \dots, p_{n-1}) : 0 \leq p_j \leq 1, j = 1, \dots, n-1, \sum_{i=1}^{n-1} p_j \leq 1 \right\},$$

на его подмножества $S_{\varphi_1}, S_{\varphi_2}, \dots, S_{\varphi_m}$ так, чтобы

$$S_{\varphi_i} \cap S_{\varphi_k} = \emptyset, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, m;$$

$$\bigcup_{i=1}^m S_{\varphi_i} = P_{n-1},$$

и функционал

$$F(S_{\varphi_1}, \dots, S_{\varphi_m}) = \sum_{k=1}^m \int_{S_{\varphi_k}} c_k(p) \rho(p) dp, \quad (3.10)$$

достигал максимального значения.

Здесь

$$c_k(p) = (1 - \alpha) \left(\sum_{i=1}^{n-1} ((f_{ik} - f_{nk}) p_i + f_{nk}) \right) - \\ - \alpha \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik}^2 - f_{nk}^2) p_i - \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i \right)^2 - 2f_{nk} \sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i \right), \quad (3.11)$$

где $\rho(p)$ – действительная, неотрицательная, интегрируемая функция.

Разбиение $S_{\varphi_1}, S_{\varphi_2}, \dots, S_{\varphi_m}$, являющееся решением задачи **K2**, назовем оптимальным.

Очевидно, что мы рассматриваем задачу ОРМ с фиксированными центрами подмножеств без ограничений (задача **A1**).

Введем характеристические функции подмножеств S_{φ_k} , $k = 1, \dots, m$;

$$\lambda_k^*(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \in S_{\varphi_k}, \\ 0, & \text{если } p \in S \setminus S_{\varphi_k}, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

и перепишем задачу **K2** в таком виде:

Задача K2.1. Найти вектор-функцию $\lambda^*(\cdot) = (\lambda_1^*(\cdot), \dots, \lambda_m^*(\cdot))$, такую, что

$$I(\lambda^*(\cdot)) = \max_{\lambda^*(\cdot) \in \Gamma_1} I(\lambda^*(\cdot)),$$

где

$$I(\lambda(\cdot)) = \int_{P_{n-1}} \sum_{k=1}^m \left[(1 - \alpha) \left(\sum_{i=1}^{n-1} ((f_{ik} - f_{nk}) p_i + f_{nk}) \right) - \right. \\ \left. - \alpha \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik}^2 - f_{nk}^2) p_i - \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i \right)^2 - 2f_{nk} \sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i \right) \right] \lambda_k(p) dp,$$

**Решение задач теории и практики методами оптимального
разбиения множеств**

$$\Gamma_1 = \left\{ \lambda(p) = (\lambda_1(p), \dots, \lambda_m(p)) : \sum_{k=1}^m \lambda_k(p) = 1, \text{ п. в. для } p \in P_{n-1}, \right. \\ \left. \lambda_k(p) = 0 \vee 1, \text{ для } p \in P_{n-1}, k = 1, \dots, m \right\}.$$

Заметим, что $F(S_{\varphi_1}, \dots, S_{\varphi_m}) = I(\lambda(\cdot))$.

Используя метод оптимального разбиения множеств, решение поставленной задачи получаем в таком виде:

$$\lambda_k^*(p) = \begin{cases} 1, & (1-\alpha)(B_k) - \alpha(\sigma_k^2) \geq \\ & \geq (1-\alpha)(B_j) - \alpha(\sigma_j^2), \forall j = \overline{1, m}; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (3.12)$$

где $\lambda_1^*(p), \dots, \lambda_m^*(p)$ характеристические функции подмножеств $S_{\varphi_1}^*, \dots, S_{\varphi_m}^*$, образующих оптимальное разбиение симплекса P_{n-1} ;

$$B_k = \sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i + f_{nk}; \quad k = \overline{1, m},$$

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik}^2 - f_{nk}^2) p_i - \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i \right)^2 - 2f_{nk} \sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i.$$

Здесь будет справедливым следующее утверждение:

Утверждение 3.3. Подмножества $S_{\varphi_1}^*, \dots, S_{\varphi_m}^*$, являющиеся оптимальным решением задачи **K2**, образуют множества решений, соответствующих комбинированному критерию (3.9).

Доказательство

Пусть разбиение $S_{\varphi_1}^*, \dots, S_{\varphi_m}^*$ – решение задачи **K2**. Рассмотрим произвольное подмножество $S_{\varphi_k}^*$ и точку $p = (p_1, \dots, p_n) \in S_{\varphi_k}^*$. Согласно необходимому и достаточному условию оптимальности (см. теорему 1.5, п.1.1.4), будет справедливым такое неравенство:

$$c_k(p) \geq c_j(p), \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.13)$$

Учитывая, что $p_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k$, преобразуем выражение (3.11),

описывающее $c_k(p)$, а именно:

$$\begin{aligned}
 c_k(p) &= (1 - \alpha) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i + f_{nk} \right) - \\
 &- \alpha \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik}^2 - f_{nk}^2) p_i - \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i \right)^2 - 2f_{nk} \sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i \right) = \\
 &= (1 - \alpha) \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i f_{ik} + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i\right) f_{nk} \right) - \\
 &- \alpha \left(\sum_{i=1}^{n-1} f_{ik}^2 p_i - \sum_{i=1}^{n-1} f_{nk}^2 p_i + f_{nk}^2 - f_{nk}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i \right)^2 - \right. \\
 &- \left. 2f_{nk} \sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i \right) = (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n p_i f_{ik} - \alpha \left(\sum_{i=1}^n f_{ik}^2 p_i - f_{nk}^2 - \right. \\
 &- \left. \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i \right)^2 - 2f_{nk} \sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i \right) = \\
 &= (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n p_i f_{ik} - \alpha \left(\sum_{i=1}^n f_{ik}^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_i + f_{nk} \right)^2 \right) = \\
 &= (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n p_i f_{ik} - \alpha \left(\sum_{i=1}^n f_{ik}^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^n f_{ik} p_i \right)^2 \right) = \\
 &= (1 - \alpha) B^+(p, \varphi_k) - \alpha \sigma^2(p, \varphi_k).
 \end{aligned}$$

Тогда из неравенства (3.13) вытекает, что

$$(1 - \alpha) B^+(p, \varphi_k) - \alpha \sigma^2(p, \varphi_k) \geq (1 - \alpha) B^+(p, \varphi_j) - \alpha \sigma^2(p, \varphi_j), \quad \forall j = \overline{1, m}.$$

Таким образом,

$$(1 - \alpha) B^+(p, \varphi_k) - \alpha \sigma^2(p, \varphi_k) = \max_{\varphi_j \in \Phi} (1 - \alpha) B^+(p, \varphi_j) - \alpha \sigma^2(p, \varphi_j),$$

**Решение задач теории и практики методами оптимального
разбиения множеств**

т. е. $K(p, \varphi_k) = \max_{\varphi_j \in \Phi} K(p, \varphi_j)$.

А это означает, что решение φ_k является оптимальным по комбинированному критерию (3.9) для априорного распределения вероятности $p = (p_1, \dots, p_n) \in S_{\varphi_k}^*$.

И наоборот, если решение φ_k является оптимальным по комбинированному критерию для распределения $p = p_0$, то выполняется такое условие:

$$K(p_0, \varphi_k^*) = \max_{\varphi_k \in \Phi} K(p_0, \varphi_k) = \max_{\varphi_k \in \Phi} \left[(1 - \alpha) \left(\sum_{i=1}^n p_i f_{ik} \right) - \alpha \left(\sum_{i=1}^n (f_{ik} - \sum_{i=1}^n f_{ik} p_i)^2 p_i \right) \right],$$

т. е.

$$(1 - \alpha) \left(\sum_{i=1}^n p_{0i} f_{ik} \right) - \alpha \left(\sum_{i=1}^n (f_{ik} - \sum_{i=1}^n f_{ik} p_{0i})^2 p_{0i} \right) \geq (1 - \alpha) \left(\sum_{k=1}^n p_{0i} f_{ij} \right) - \alpha \left(\sum_{i=1}^n (f_{ij} - \sum_{i=1}^n f_{ij} p_{0i})^2 p_{0i} \right), \quad \forall j = \overline{1, m}.$$

Учитывая, что $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, и преобразовывая соответствующие

выражения, получаем такой результат $\forall j = \overline{1, m}$:

$$(1 - \alpha) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_{0i} + f_{nk} \right) - \alpha \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik}^2 - f_{nk}^2) p_{0i} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_{0i} \right)^2 - 2 f_{nk} \sum_{i=1}^{n-1} (f_{ik} - f_{nk}) p_{0i} \right) \geq (1 - \alpha) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ij} - f_{nj}) p_{0i} + f_{nj} \right) - \alpha \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ij}^2 - f_{nj}^2) p_{0i} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f_{ij} - f_{nj}) p_{0i} \right)^2 - 2 f_{nj} \sum_{i=1}^{n-1} (f_{ij} - f_{nj}) p_{0i} \right),$$

и согласно выражению (3.12) $p_0 \in S_{\varphi_k}$.

Стало быть, подмножества $S_{\varphi_1}^*, \dots, S_{\varphi_m}^*$ образуют множества решений по комбинированному критерию.

Утверждение доказано.

Сформулируем алгоритм решения задачи **К2**, основанный на методе ОРМ.

Алгоритм 3.2

1. Множество P_{n-1} погружаем в параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой. Задаем функцию $\rho(p)$ в узлах сетки по такому правилу:

$$\rho(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \in P_{n-1}, \\ 0, & \text{если } p \notin P_{n-1}. \end{cases}$$

2. Вычисляем значения $\lambda_k^*(p)$, $k = \overline{1, m}$, в узлах сетки по формуле (3.12).

3. Если $\lambda_k^*(p) = 1$, точку p относим к множеству $S_{\varphi_k}^*$.

4. Рассчитываем значения целевой функции $F(S_{\varphi_1}, \dots, S_{\varphi_m})$ в узле p .

3.1.4. Вычислительный эксперимент и анализ полученных результатов

Рассмотрим модельную задачу. Пусть ситуация принятия решений описана такой матрицей:

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
θ_1	4,05	3,29	2,93	0,99
θ_2	3,79	4,12	4,05	4,19
θ_3	3,23	3,54	4,75	5,95

Необходимо построить множества решений по комбинированному критерию (3.9).

Множества решений, полученные с помощью алгоритма 3.2 для значений $\alpha = 0; 1; 0,3; 0,7$, показаны на рис. 3.1 а, б, в, г соответственно. Заметим, что при $\alpha = 0$, этот критерий совпадает с

Решение задач теории и практики методами оптимального разбиения множеств

критерием Байеса (соответствующие множества показаны на рис. 3.1, а), когда $\alpha = 1$, то с критерием минимума дисперсии (см. рис. 3.1, б).

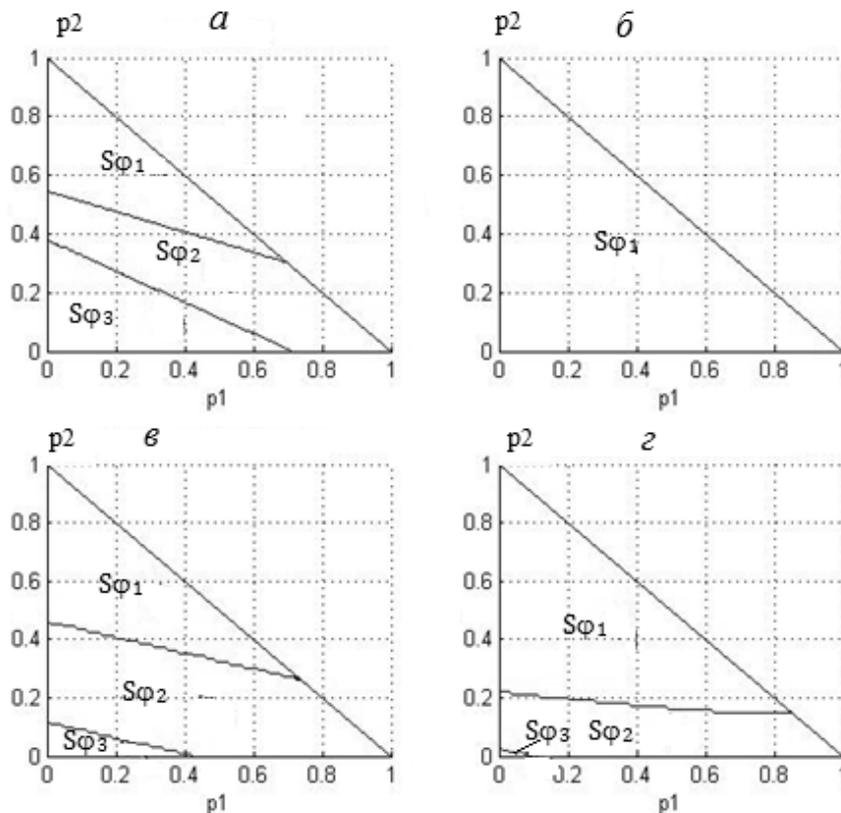


Рис. 3.1. Множества решений по комбинированному критерию, полученные с помощью алгоритма 3.2

Анализируя полученные результаты решения данной модельной задачи, можно сделать вывод о том, что в случае использования критерия минимума дисперсии ($\alpha = 1$), при любом априорном распределении вероятности оптимальным будет решение φ_1 ; решение φ_4 не используется ни при каком значении параметра α и его можно исключить из рассмотрения. Использование других решений зависит от априорного распределения вероятности и от уровня α учета критерия.

Теоретические исследования и результаты ряда численных экспериментов показывают, что алгоритмы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств могут быть применены для решения задач синтеза оптимальных решений. Заметим, что приведенный выше алгоритм может быть использован и в случае, когда множество состояний среды содержит более трех элементов. В свою очередь, построение множеств решений позволяет определить

оптимальное решение, даже если априорное распределение вероятности известно неточно, При этом, по крайней мере, есть шанс оценить возможную ошибку в определении априорной вероятности и ее влияние на качество принятого решения.

*3.2. РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ
НЕЙМАНА – ПИРСОНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ
МНОЖЕСТВ*

В данном пункте предлагается метод, позволяющий получить оптимальное решение для различных обобщений задачи Неймана – Пирсона, а также определить константы, входящие в это решение, алгоритмическим путем. Предложенный метод применяется здесь к одному из обобщений задачи Неймана – Пирсона на случай наличия ограничений в форме неравенств [34].

Приведем математическую постановку обобщенной задачи Неймана – Пирсона, возникающей в теории проверки многих статистических гипотез с несколькими ограничениями в форме неравенств.

Математическая постановка задачи. Пусть Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу множество в n -мерном евклидовом пространстве E_n . Требуется найти вектор-функцию $\varphi^*(x) = (\varphi_1^*(x), \dots, \varphi_N^*(x))$, являющуюся решением такой задачи:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N f_i(x) \varphi_i(x) dx \rightarrow \min, \quad (3.14)$$

при следующих условиях:

$$0 \leq \varphi_i(x) \leq 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N; \quad (3.15)$$

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \quad (3.16)$$

$$\int_{\Omega} f_i(x) \varphi_i(x) dx \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.17)$$

**Решение задач теории и практики методами оптимального
разбиения множеств**

Функции $f_i(x)$ – ограниченные, измеримые, определенные на множестве Ω для всех значений $i = 1, \dots, N$; $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ – заданные вещественные числа, причем выполняется такое условие разрешимости задачи:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \geq \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} f_i(x) dx.$$

Заметим, что задача (3.14) – (3.17) является обобщением задачи, рассмотренной в литературе [94], на случай наличия ограничений вида (3.17) [59].

С учетом результатов, полученных в главе 1, оптимальное решение задачи (3.14) – (3.17) можно записать для всех значений $i = 1, \dots, N$ и почти всех точек $x \in \Omega$ следующим образом:

$$\varphi_i^* = \begin{cases} 1, & \text{если } c_i(x) + \xi_i^* c_i(x) = \min_{k=1, \dots, N} [c_k(x) + \xi_k^* c_k(x)]; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (3.18)$$

где в качестве константы ξ_1^*, \dots, ξ_N^* выбирается оптимальное решение такой задачи:

$$G(\xi) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c_i(x) + \xi_i^* c_i(x)] dx - \sum_{i=1}^N \xi_i^* \alpha_i \rightarrow \max, \quad (3.19)$$

при следующих условиях:

$$\xi_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.20)$$

Для максимизации негладкой конечномерной целевой функции $G(\xi)$ при условиях (3.20) будем применять r -алгоритм Н. З. Шора.

Для формулировки алгоритма решения задачи (3.14) – (3.17), основанного на методе (3.18) – (3.20), перейдем к задаче безусловной максимизации по переменной ξ с помощью введения в целевую функцию (3.19) негладкой штрафной функции множества $\{\xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}$.

Найти

$$\max_{\xi \in E_N} P(\xi), \quad (3.21)$$

где

$$P(\xi) = G(\xi) - S \sum_{i=1}^N \max\{0, \xi_i\}.$$

Здесь S – достаточно большое положительное число, значительно больше максимального из множителей Лагранжа для функции (3.19). Определим i -ю компоненту N -мерного вектора обобщенного градиента $g_p(\xi) = (g_p^{\xi_1}(\xi), g_p^{\xi_2}(\xi), \dots, g_p^{\xi_N}(\xi))$, функции (3.21) в точке $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, следующим образом:

$$g_p^{\xi_i}(\xi) = \int_{\Omega} f_i(x) \varphi_i(x) dx - \alpha_i + S \max\{0; \text{sign}(-\xi_i)\}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.22)$$

Алгоритм 3.3 решения задачи (3.14) – (3.17)

Область Ω заключаем в параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат. Если область Ω не является параллелепипедом, то для ее задания введем функцию $\rho(x)$, определенную на нем следующим образом:

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in \Omega, \\ 0 & \text{для } x \in \Pi \setminus \Omega, \end{cases}$$

и всюду в алгоритме заменим функции $f_i(x)$ произведением $f_i(x)\rho(x)$.

Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение $\xi = \xi^{(0)}$. Вычисляем значения функции $\varphi_0(x)$ в узлах сетки по формулам (3.18) при условии, что $\xi = \xi^{(0)}$. Вычисляем значения обобщенного градиента $g_p^{\xi}(\xi_0)$ в узлах сетки по формулам (3.22) при $\varphi(x) = \varphi_0(x)$, $\xi = \xi^{(0)}$. Выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$, для r -алгоритма и тогда

$$\xi^{(1)} = \xi^{(0)} + h_0 g_p^{\xi}(\xi_0).$$

Переходим ко второму шагу.

**Решение задач теории и практики методами оптимального
разбиения множеств**

Пусть в результате вычислений после реализации k ($k = 1, 2, \dots$) шагов алгоритма получены определенные значения переменной $\xi^{(k)}$ и $\varphi^{(k-1)}(x)$ в узлах сетки.

Опишем $(k + 1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значения функции $\varphi^{(k)}(x)$ в узлах сетки по формулам (3.18) при том, что $\xi = \xi^{(k)}$.

2. Вычисляем значения обобщенного градиента $g_p^\xi(\xi^{(k)})$ в узлах сетки по формулам (3.22), если $\varphi(x) = \varphi^{(k)}(x)$, $\xi = \xi^{(k)}$.

3. Выполняем $(k+1)$ -й шаг r -алгоритма, краткая схема которого имеет такой вид:

$$\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} + h_k B_{k+1}^\xi \tilde{g}_p^\xi,$$

где B_{k+1}^ξ – оператор отображения преобразованного пространства в основное пространство E_N , причем $B_0^\xi = I_N$; I_N – единичная матрица, $\tilde{g}_p^\xi = B_{k+1}^* \tilde{g}_p(\xi)$; h_k – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия минимума функции по указанному направлению. Формулы для пересчета матрицы B_{k+1}^ξ см. в разделе 1.2.

4. Если условие

$$\left\| \xi^{(k)} - \xi^{(k+1)} \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.23)$$

не выполняется, то переходим к $(k + 2)$ -му шагу алгоритма, если выполняются, то к п. 5.

5. Полагаем, что $\varphi^*(x) = \varphi^{(l)}(x)$, $\xi^* = \xi^{(l)}$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (3.23).

Алгоритм 3.3 описан.

3.3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ К ЗАДАЧАМ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

3.3.1. Практическое значение проблемы распознавания. Основные определения и обозначения

Под распознаванием образов (РО) сегодня понимается широкий круг задач и направлений исследования, связанных с моделированием способности человека и живых организмов принимать решения на основе анализа многих факторов и ситуаций. С такими задачами человек сталкивается постоянно с момента своего появления на свет и часто решает их неосознанно, автоматически. Эта способность человеческого мозга долгое время считалась исключительной и присущей только ему, однако исследование процессов распознавания и классификации как части функции живых организмов, а также успехи информационных технологий позволили моделировать процессы распознавания и создавать системы, способные решать такие задачи. При этом выяснилось, что теория РО охватывает более широкий круг задач, чем предполагалось вначале. Оказалось, что распознавание объектов, явлений или процессов лежит в основе многих задач современной техники и естествознания. Например, кроме классических задач упомянутой тематики, были выделены те, в которых путем распознавания нужно выяснить, в какой области из конечного их числа будут находиться некоторые процессы через определенный промежуток времени. Это, в частности, задачи технической и медицинской диагностики, геологического прогнозирования, определения свойств химических соединений, распознавания свойств динамических и статических объектов в сложной фоновой обстановке, а также при наличии активных и пассивных помех, прогнозирования урожая, обнаружения лесных пожаров, управления производственными процессами. Другими словами, это вопросы диагностики, идентификации, классификации, районирования, сортировки и анализа данных.

Сегодня можно выделить два основных направления в развитии теории распознавания образов. Это изучение и моделирование способности живых организмов к распознаванию образов и создание методов и систем, предназначенных для решения отдельных

прикладных задач. В настоящем разделе изучается возможность применения методов ОРМ к различным задачам РО.

Напомним необходимые понятия и определения теории распознавания образов.

Изображением называют информацию об изучаемых объектах, в качестве которых могут фигурировать зрительные и слуховые образы, сигналы, явления, процессы.

Образ или *класс* – это множество изображений, имеющих некоторое общее свойство.

Распознать изображение – значит указать, к какому классу (образу) оно относится.

Под *задачей распознавания образов*, согласно исследованиям [14], мы будем понимать целесообразное разбиение некоторой совокупности данных объектов на классы. Объекты, вошедшие в одну группу, должны обладать какими-либо объективно общими свойствами; в то время как объекты, принадлежащие различным классам, должны существенно отличаться друг от друга.

Принято выделять задачи обучения распознаванию образов и задачи самообучения (обучения без учителя). В первом случае обучающая последовательность содержит указания о принадлежности изображений к определенному классу (образу), во втором – такая информация отсутствует.

3.3.2. Исследование возможности применения метода оптимального разбиения множеств к решению задач распознавания образов

Рассматривая задачу распознавания образов, предположим, что исследуемые изображения можно описать как набор N признаков, каждый из которых принимает значения из некоторого дискретного или непрерывного множества. Тогда каждое изображение может быть представлено в виде точки n -мерного пространства, координаты которой соответствуют значениям признаков, характеризующих это изображение. Такое пространство называется признаковым пространством.

Если теперь в этом пространстве ввести каким-либо образом понятие расстояния (евклидова, Махаланобиса и др.), то изображения, находящиеся на небольшом расстоянии друг от друга, можно считать подобными и относить их к одному классу, в то время

как изображения, разделенные большими расстояниями – считать различными и относить к разным классам.

Каждый образ (класс) с учетом таких предположений представляется некоторым множеством в n -мерном признаковом пространстве.

Иногда предусматривается выполнение гипотезы компактности [14], т. е. соответствие следующим предположениям:

1) всегда возможен такой плавный переход от одного изображения к другому внутри данного образа, при котором все промежуточные этапы будут его изображениями и, наоборот, нельзя плавно перейти от изображений одного образа к изображениям другого без того, чтобы не возникли изображения неопределенной принадлежности;

2) малая деформация изображений в любом направлении не приводит к выходу за пределы данного образа.

Идея применения методов ОРМ к решению задач распознавания базируется на том, что после выделения пространства признаков *задача о разделении изображений на классы фактически сводится к разбиению множества, содержащего все изображения, на подмножества, соответствующие различным классам (образам)* [11].

Задачу обучения (самообучения) можно считать решенной, если удастся сформулировать алгоритм, при помощи которого по обучающей последовательности можно найти оптимальные в некотором смысле центры и границы классов в пространстве признаков или, иначе говоря, разбить все множество изображений на N классов некоторым оптимальным способом [14].

Таким образом, мы можем рассматривать распознавание образов как задачу оптимального разбиения множества Ω (которое содержит все изображения) n -мерного пространства признаков на его подмножества Ω_i , $i = 1, 2, \dots, N$, каждое из которых соответствует некоторому образу (классу), а именно, получаем следующую задачу [53].

Задача А. Пусть $\Omega \subset E_n$. Необходимо разбить множество Ω на N непересекающихся подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega;$$

$$\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N},$$

и функционал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx,$$

достигал минимального значения.

Тут функция $c(x, \tau_i)$ означает потери вследствие того, что элемент x отнесен к классу Ω_i с центром τ_i , а функционал $F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\})$ означает суммарные потери из-за неправильной классификации.

Задачи распознавания образов могут быть сформулированы по-разному, с учетом взаимного расположения образов в пространстве признаков, вида исходных данных, а также известной априорной информации. Согласно этому будут сформулированы и различные задачи ОРМ.

Рассмотрим эти задачи, а также их особенности, соблюдая классификацию из литературных источников [14, 82].

Детерминированная задача распознавания образов. Предположим, что границы образов в пространстве признаков постоянны, образы не пересекаются между собой и каждая точка пространства признаков всегда принадлежит только одному определенному образу. В этом случае для каждого элемента обучающей последовательности должен быть точно указан класс, к которому он принадлежит, и если какое-то изображение встречается в этой последовательности несколько раз, то при каждом его показе сообщается один и тот же класс принадлежности.

Задача обучения РО имеет целью определить, руководствуясь обучающей последовательностью, границы образов в пространстве признаков.

Задача распознавания предусматривает классификацию предлагаемого изображения соответственно множеству в n -мерном пространстве признаков, которое содержит точку, представляющую это изображение.

Постановка задачи. Пусть образы в пространстве признаков не пересекаются, а также известна достаточно представительная обучающая выборка изображений $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, принадлежащих к различным образам, и точно известно, к какому образу каждое

изображение x_i обучающей выборки принадлежит. Необходимо определить границы классов в пространстве признаков.

Запишем математическую формулировку этой задачи в виде задачи ОРМ.

Задача 3.1. Пусть Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу множество в n -мерном евклидовом пространстве E_n . Требуется найти подмножества $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, N$, множества Ω , удовлетворяющие таким условиям:

$$\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N},$$

$$\bigcup_{i=1}^n \Omega_i = \Omega,$$

и чтобы функционал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i(x) dx, ,$$

достигал минимального значения.

Функция $c_i(x)$ здесь означает потери вследствие того, что элемент x отнесен к классу Ω_i , а функционал $F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\})$ описывает суммарные потери при классификации.

Мы сформулировали задачу ОРМ без ограничений с фиксированными центрами подмножеств (задачу **A1**), оптимальное решение которой имеет такой вид:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } c_i(x) = \min_{k=1, N} c_k(x); \\ 0 \text{ в остальных случаях,} & i = \overline{1, N}, \end{cases}$$

где $\lambda_i(x), i = \overline{1, N}$ – характеристические функции подмножеств $\Omega_i, i = \overline{1, N}$ соответственно.

Для решения этой задачи методом ОРМ можно применить приведенный ниже алгоритм.

Алгоритм 3.4

1. В пространстве признаков выделяем множество Ω , содержащее все образы в классе $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, N$.

2. Полагаем, что

Решение задач теории и практики методами оптимального разбиения множеств

$$c_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_j \in \Omega_i, \\ 1, & \text{если } x_j \notin \Omega_i. \end{cases}$$

где x_j – элемент обучающей выборки; Ω_i , $i = 1, 2, \dots, N$ – образы.

3. Каким-либо способом восстанавливаем функцию $c_i(x)$ для всех элементов $x \in \Omega$, так чтобы она была измерима.

4. Для каждого объекта x экзаменационной выборки вычисляем характеристические функции образов Ω_i , $i = \overline{1, N}$ по такой формуле:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c_i(x) = \min_{k=1, N} c_k(x), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \quad i = \overline{1, N}. \end{cases}$$

5. Относим изображение x к i -му классу, если $\lambda_i(x) = 1$.

Алгоритм описан.

Очевидно, что на элементах обучающей последовательности обеспечивается нулевая ошибка распознавания.

Сравнение с методом эталонов. Предложенный метод решения, также как и метод эталонов, позволяет построить решающее правило когда многомерные распределения образов неизвестны, а объем учебной выборки недостаточен для получения оценок распределений.

Основное отличие его от метода эталонов состоит в том, что функцию принадлежности образа, а, соответственно, и границы образов можно найти, минуя определение функций принадлежности реализаций.

Поскольку метод оптимального разбиения множеств позволяет получить решение задачи в явном виде, то основная вычислительная сложность вызвана необходимостью восстановить значения функций потерь $c_i(x)$, $i = 1, N$ по их значениям на обучающей выборке.

Кроме того, границы между образами определяются в этом случае как геометрическое место точек, удовлетворяющих равенство: $c_i(x) = c_j(x)$, тем самым обеспечивается нулевая мера пересечения образов.

Сравнение с методом потенциальных функций. Применение метода потенциальных функций к детерминированной задаче распознавания образов основано на предположении о том, что в пространстве признаков существует такая система функций

$\varphi_i(x), i = 1, 2, \dots, N$, что искомую разделяющую функцию f можно представить в виде разложения

$$f(x) = \sum_{i=1}^N c_i^* \varphi_i(x),$$

коэффициенты которого удовлетворяют следующему условию: существует числовая последовательность $\{\lambda_i\}, i = 1, 2, \dots, N$ где суммы

$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2$ и $\sum_{i=1}^{\infty} (c_i^* / \lambda_i)^2$ конечны. Тем самым ограничивается вид

искомой разделяющей функции.

При использовании метода ОРМ никаких ограничений на вид разделяющей функции нет, для множеств Ω_i и $\Omega_j, i \neq j$, она, согласно исследованиям [59] определяется в таком виде: $f(x) = c_i(x) - c_j(x)$.

Статистическая задача распознавания образов.

Предположим, что границы классов в пространстве признаков хотя и постоянны, но пересекаются. Некоторые точки принадлежат сразу к нескольким классам, и различие состоит только в вероятности этой возможности. Известна обучающая последовательность изображений. При этом, показ одного и того же элемента возможен с сообщением о его принадлежности к разным классам. Предполагается также, что каждый их классов соответствует какому-либо вероятностному распределению. Иначе говоря, принадлежность элементов обучающей последовательности к классам известна с некоторой вероятностью.

Задача обучения распознаванию образов состоит в том, чтобы руководствуясь обучающей последовательностью построить оптимальные в некотором смысле разделяющие поверхности, которые обеспечивают классификацию.

Значения признаков в этом случае можно рассматривать как случайные переменные, а соответствующие образам множества пространства признаков можно считать плотностью распределения изображений.

Постановка задачи. Пусть некоторое множество включает в себя N подмножеств, которые называют классами. Каждое такое подмножество состоит из отдельных элементов, соответствующих изображениям, а каждому изображению соответствует свое описание $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, где x_i – признаки. В пространстве признаков

**Решение задач теории и практики методами оптимального
разбиения множеств**

множества могут пересекаться. Необходимо построить оптимальный в некотором смысле алгоритм, позволяющий по описанию изображения указать образ (или подмножество), которому принадлежит это изображение.

Далее сформулируем соответствующую задачу ОРМ.

Задача 3.2. Пусть Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу множество в n -мерном евклидовом пространстве E_n . Найти такое разбиение $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ множества Ω на его подмножества, и определить центры $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ этих подмножеств, с тем чтобы выполнялись следующие ограничения:

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega,$$

$$\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j$$

и функционал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx, \quad ,$$

достигал минимального значения.

Здесь функция $c_i(x, \tau_i)$ означает потери от того, что элемент x отнесен к классу Ω_i с центром τ_i , $i = 1, 2, \dots, N$; $\rho(x)$ – совместное распределение вероятности.

Очевидно, мы сформулировали задачу ОРМ с отысканием центров подмножеств без ограничений (задача **A2**). Ее решение получено в таком виде:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c_i(x, \tau_i^*) = \min_{j=1, 2, \dots, N} c_j(x, \tau_j^*); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.24)$$

где $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ – оптимальное решение задачи минимизации функционала

$$G(\tau_1, \dots, \tau_N) = \int_{\Omega} \min_{i=1, 2, \dots, N} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx;$$

$\lambda_i^*(x)$ – характеристическая функция образа (класса) Ω_i с центром τ_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

Приведем здесь алгоритм решения статистической задачи РО, основанный на методе ОРМ при использовании одного из вариантов метода обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов (r -алгоритм), ориентированный в общем случае на отыскание локальных минимумов недифференцируемой многоэкстремальной целевой функции.

Алгоритм 3.5

1. Используя обучающую последовательность определяем $p(\Omega_i)$ – вероятность появления элемента класса Ω_i , $i = 1, 2, \dots, N$ и $p(x/\Omega_i)$ – вероятность при условии наличия i -го класса.

2. Вычисляем совместное распределение вероятности по такой формуле:

$$p(x) = \sum_{i=1}^N p(\Omega_i) p(x/\Omega_i).$$

3. Применяя алгоритм 1.4 оптимального разбиения множеств, разбиваем область Ω на непересекающиеся классы $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ и находим центры подмножеств $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$, а именно, решаем задачу 3.2.

4. Для каждого объекта экзаменационной выборки определяем характеристические функции образов $\lambda_i^*(x)$ по формуле (3.24).

5. Относим изображение x к классу Ω_i , если $\lambda_i^*(x) = 1$.

Алгоритм описан.

Задачи самообучения. Рассмотрим ситуацию, когда обучающая последовательность не содержит указаний о принадлежности ее элементов к классам (образам). Заметим, что в этом случае задачи можно также исследовать в детерминированной и статистической постановках. Это зависит от имеющейся априорной информации.

Постановка задачи самообучения (общая постановка этой задачи содержится в источниках [115, 116]). Пусть на множестве X задана функция плотности вероятности $p(x)$. Необходимо разбить множество X на заданное количество непересекающихся классов X_1, X_2, \dots, X_N так, чтобы минимизировать следующее выражение:

$$R = \sum_{k=1, N} p(k) \int_{X_n} \int_{X_k} S(x, y) p(x/k) p(y/k) d\lambda(x) d\lambda(y),$$

где $p(k)$ – вероятность k -го класса, $p(x/k)$ – условная плотность вероятности в случае наличия k -го класса, $S(x, y)$ – функция затрат, обозначающая потери от того, что элементы x и y отнесены к одному классу.

Рассмотрим частный случай этой задачи [117], когда X – некоторое множество n -мерного евклидова пространства, а в качестве функции потерь $S(x, y)$ взят квадрат расстояния между элементами x и y , и мера является мерой Лебега, тогда

$$R = 2 \sum_{i=1}^N \int_{X_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx,$$

где τ_i – средний элемент множества X_i ; $\rho(x)$ – совместная плотность распределения вероятностей в признаковом пространстве X .

Далее сформулируем соответствующую задачу ОРМ с размещением центров тяжести подмножеств без ограничений (задача А2) в следующей постановке [54]:

Задача 3.3. Разбить множество $\Omega \subset E_n$ на его подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ и разместить центры тяжести этих подмножеств $\tau_i, i = \overline{1, N}$, в множестве Ω так, чтобы

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad (3.25)$$

$$\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j, \quad (3.26)$$

и при этом функционал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx, \quad (3.27)$$

достигал минимального значения.

Здесь $c_i(x, \tau_i)$ – действительные, ограниченные, измеримые на множестве Ω функции, обозначающие потери от того, что элемент x отнесен к классу Ω_i с центром $\tau_i, i = 1, 2, \dots, N, \rho(x)$ – неотрицательная, действительная, измеримая функция – совместная плотность распределения вероятности.

Решение этой задачи имеет такой вид:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c_i(x, \tau_i^*) = \min_{k=1, N} c_k(x, \tau_k^*); \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (3.28)$$

где в качестве центров $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$ выбирается оптимальное решение задачи минимизации функционала, то есть

$$G(\tau_1, \dots, \tau_N) = \int_{\Omega} \min_{i=1, 2, \dots, N} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx,$$

Здесь $\lambda_i^*(x)$ – характеристическая функция образа (класса) подмножества Ω_i с центром τ_i^* , $i = 1, 2, \dots, N$.

Сформулируем алгоритм решения задачи.

Алгоритм 3.6

1. Используя обучающую последовательность, восстанавливаем функцию плотности распределения $\rho(x)$ (см. примеры ниже).

2. Применяя алгоритм 1.4 оптимального разбиения множеств, разбиваем область Ω на непересекающиеся классы $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ и находим центры подмножеств $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$, а именно, решаем задачу ОРМ в постановке (3.25) – (3.27).

3. Получаем решение задачи в виде соотношения (3.28), где $\lambda_i^*(x)$ – характеристическая функция образа (класса) Ω_i с центром τ_i^* , $i = 1, 2, \dots, N$.

5. Для каждого объекта выборки вычисляем функцию $\lambda_i^*(x)$ по формуле (3.28).

6. Относим изображение x к классу Ω_i , если $\lambda_i^*(x) = 1$.

Алгоритм описан.

Замечание. В рассмотренном методе обучающая последовательность служит только для построения распределения вероятности $\rho(x)$. Лишь после того, как накоплены достаточно полные сведения об этом распределении, можно приступить к решению задачи распознавания.

Распознавание нечетких образов. Использование нечетких множеств в распознавании образов включает в себя три основные возможности:

Решение задач теории и практики методами оптимального разбиения множеств

1) *нечеткие метки*, указывающие, что принадлежность элементов обучающей последовательности к какому-либо множеству, может быть нечеткой, то есть предполагается принадлежность каждого элемента сразу к нескольким классам;

2) *нечеткие признаки*, заданные не конкретными значениями, а нечеткими множествами;

3) *нечеткие классификации*, используемые для получения гибкого исчерпывающего описания реально существующей классификации объектов.

Постановка задачи. Пусть задано некоторое множество Ω объектов, подлежащих классификации, а также известно нечеткое отношение, которое определяет различия между элементами этого множества. Необходимо разбить множество Ω на N нечетких классов так, чтобы объекты, содержащиеся в одном классе, были более похожи, чем объекты, находящиеся в разных классах.

Решение этой задачи может быть реализовано в виде оптимального нечеткого разбиения множеств (задача $\tilde{A}2$) согласно приведенной ниже постановке.

Задача 3.4. Разбить множество $\Omega \subset E_n$ на N нечетких подмножеств так, чтобы выполнялись такие условия:

$$\begin{aligned} \text{mes}(\Omega_i^+ \cap \Omega_j^+) &= 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j, \quad ; \\ \bigcup_i^N \Omega_i &= \Omega, \end{aligned}$$

и функционал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx,$$

достигал минимального значения.

Тут операции объединения и пересечения понимаются как операции на нечетких множествах; $\int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i) \rho(x) dx$ – интеграл по

нечеткому множеству (2.1); $c_i(x, \tau_i)$ – действительная, измеримая по x , выпуклая по переменной τ_i на множестве Ω_i функция, определяющая нечеткое отношение различия, заданное на множестве Ω , $\rho(x)$ – неотрицательная, действительная, измеримая функция.

Решение этой задачи, согласно исследованиям [52] может иметь такой вид:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c_i(x, \tau_i^*)\rho(x) - \Psi_0^*(x) < 0; \\ 0, & \text{если } c_i(x, \tau_i^*)\rho(x) - \Psi_0^*(x) > 0; \\ \alpha(x) \in [0,1], & \text{если } c_i(x, \tau_i^*)\rho(x) - \Psi_0^*(x) = 0, \end{cases}$$

$$\Psi_0^*(x) = \frac{1}{2}(c_i(x) + \min_{k=1, N} c_k(x)), \quad c_i(x) = \min_{j=1, N} c_j(x),$$

тут $\lambda_i^*(x)$ – функция принадлежности нечеткого множества (образа) Ω_i^* , $i = \overline{1, N}$, значение функции $\alpha(x)$ определяется каким-либо способом или остается неопределенным, а точки $x \in \Omega$, для которых $c_i(x, \tau_i^*)\rho(x) - \Psi_0^*(x) = 0$, классифицируются как область отказа от распознавания.

Особенности применения метода ОРМ к различным задачам распознавания образов. С учетом вышесказанного и результатов, полученных при исследовании различных задач ОРМ [59, 42], можно выделить такие преимущества использования методов ОРМ в задачах распознавания образов:

- позволяет для довольно большого числа образов (300 и более, что зависит только от возможности ЭВМ) и любой размерности пространства эффективно находить разделяющие гиперповерхности, как в аналитическом виде так и численно, при этом задачи распознавания образов решаются без каких-либо предположений о виде разделяющей поверхности;

- дает возможность построить решающее правило, когда многомерное распределение образов неизвестно, а объем выборки недостаточен для получения оценки распределения;

- в решении детерминированных задач обеспечивается непересекаемость образов по мере.

К числу сложностей, возникающих при использовании метода ОРМ, можно отнести необходимость восстановления плотности вероятности $\rho(x)$, поскольку система решает задачу после накопления достаточного количества сведений об этом распределении, а для точного восстановления плотности вероятности при большой размерности пространства признаков число элементов обучающей последовательности должно быть очень большим.

3.3.3. Вычислительный эксперимент и анализ алгоритма

Чтобы исследовать применение метода ОРМ к задачам распознавания образов, рассмотрим задачу классификации реальных объектов таких двух областей:

- распознавание видов цветов;
- распознавание больных диабетом (медицинская диагностика).

Поскольку для использования метода ОРМ необходимо знать совместную плотность распределения вероятности, рассмотрим кратко методы ее восстановления.

Методы восстановления условного распределения в многомерном признаковом пространстве. Известны несколько различных непараметрических методов оценки функций плотности распределения: гистограммы, метод Ван Райзена, ядерные оценки Парзена, использование рядов Фурье и т. д. Эксперименты с различными техниками оценивания [1, 13, 21, 80, 81] показали, что ядерные оценки Парзена – Розенблатта лучше всего подходят для решения задач восстановления функций совместного распределения признаков.

Они имеют такой вид:

$$f_n(x) = \frac{1}{\eta_n(h_n, x)} \sum_{1 \leq i \leq n} K\left(\frac{d(x_i, x)}{h_n}\right),$$

где $K: R_+^1 \rightarrow R^1$ – так называемая ядерная функция; $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ – выборка, по которой оценивается плотность распределения; $d(x_i, x)$ – показатель различия (метрика, расстояние, мера близости) между элементом выборки x_i и точкой x , в которой оценивается плотность; последовательность показателей размытости $h_n \rightarrow 0$ и $nh_n \rightarrow \infty$ когда $n \rightarrow \infty$, а $\eta_n(h_n, x)$ – множитель, обеспечивающий выполнение условия нормировки, причем интеграл по всему пространству от непараметрической оценки плотности $f_n(x)$ по мере μ должен быть равен 1.

В прикладных работах нередко встречаются объекты нечисловой природы (векторы разнотипных данных). При этом каждый реальный объект описывается вектором, часть координат которого – это значения количественных признаков, а часть –

качественных (номинальных и порядковых). Для описания пространств разнотипных признаков, т. е. декартовых произведений непрерывных и дискретных пространств, возможны различные постановки. Пусть, например, число градаций качественных признаков остается постоянным. Тогда непараметрическая оценка плотности сводится к произведению двух величин: частоты попадания в точку пространства качественных признаков и классической оценки типа Парзена – Розенблатта в пространстве количественных переменных. В общем случае, расстояние $d(x, y)$ можно, например, рассматривать как сумму трех расстояний. А точнее, евклидоваго расстояния d_1 между количественными факторами, расстояния d_2 между номинальными признаками ($d_2(x, y) = 0$, если $x = y$, и $d_2(x, y) = 1$, если $x \neq y$) и расстояния d_3 между порядковыми переменными, например если, например, x и y – номера градаций, то $d_3(x, y) = |x - y|$ [83].

Таким образом, были выбраны непараметрические модели оценки плотности Розенблатта – Парзена, которые имеют следующий вид:

$$\rho_n(x) = \frac{1}{n\lambda_n} \sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{x - x_i}{\lambda_n}\right), \quad (3.29)$$

где $x_i, i = 1, \dots, n$, – выборка наблюдений одномерной непрерывной случайной величины; λ_n – параметр размытости; $\varphi(u)$ – колоколоподобная ядерная функция, удовлетворяющая условиям регулярности, то есть

$$\begin{aligned} \varphi(u) = \varphi(-u); 0 \leq \varphi(u) \leq \infty; \int \varphi(u) du = 1; \\ \int u^2 \varphi(u) du = 1; \int u^m \varphi(u) du < \infty; 0 \leq m < \infty. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Асимптотические свойства оценки (3.30), такие как несмещенность, сходимость по вероятности к плотности $f(x)$, подробно исследованы в литературных источниках [21, 80, 81]. Там показано, что среднеквадратическая ошибка аппроксимации оценки (3.30), определенная таким соотношением:

$$J = M \left\{ \int [f(x) - \rho_n(x)]^2 dx \right\} = M \left\{ \|f(x) - \rho_n(x)\|^2 \right\}, \quad (3.31)$$

существенно зависит от выбора параметра λ_n и в меньшей степени от вида ядерной функции $\varphi(u)$.

Решение задач теории и практики методами оптимального разбиения множеств

Имеется несколько вариантов ядерных функций. Наиболее популярные из них приведены в табл. 3.1.

Авторы монографии использовали ядерную функцию плотности стандартного нормального закона [21], то есть

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Таблица 3.1

Распространенные виды ядерных функций

Название ядра	$\varphi(u)$
1. Универсальное	$\frac{1}{2} I(u \leq 1)$
2. Треугольное	$(1 - u) I(u \leq 1)$
3. Епанечникова	$\frac{3}{4}(1 - u^2) I(u \leq 1)$
4. Квадратичное	$\frac{15}{16}(1 - u^2)^2 I(u \leq 1)$
5. Гаусса	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}u^2)$
6. Косинусоидальное	$\frac{\pi}{4} \cos(\frac{\pi}{2}u) I(u \leq 1)$

Выбор показателя размытости также влияет на вид непараметрических оценок функции плотности. Причем всегда существует проблема определения значения этого параметра, оптимального в некотором смысле. Если исходить из условия минимума среднеквадратичной ошибки аппроксимации (3.31), то оптимальная оценка параметра размытости принимает такой вид [21]:

$$\lambda^* = \left[\frac{\|\varphi\|^2}{n \|f^n\|^2} \right]^{1/5}. \quad (3.32)$$

Недостатком данной оценки (3.32) является то, что для ее определения необходимо знать плотность истинного закона распределения случайной величины, который, вообще говоря, не известен.

При этом, если $n \rightarrow \infty$, то параметр размытости (3.32) стремится к $n^{-1/5}$. Вследствие этого иногда предлагают выбирать число $\tilde{\lambda}'_n = n^{-1/5}$.

Вообще говоря, выбор значения параметра (или параметров) размытости может осуществляться разными методами, на основании различных критериев оптимальности, например, с использованием разнообразных мер близости эмпирической функции распределения и ее непараметрической оценки. Однако в этом случае теряются преимущества непараметрических оценок относительно параметрических моделей.

Решение задачи распознавания классов цветов методом оптимального разбиения множеств. Для реализации алгоритма распознавания были использованы известные тестовые данные о трех видах (классах) цветов ирисов: Iris Setosa, Iris Versicolour и Iris Virginica [см. ресурс <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets.html>]. Каждый цветок (объект) характеризуется четырьмя признаками, измеряемыми в см; длина чашелистика; ширина чашелистика; длина лепестка; ширина лепестка.

Все признаки объекта описываются положительными действительными числами. Выборка включала 150 изображений (по 50 объектов каждого класса).

Прежде, чем применять алгоритм, рассмотрим приведенные ниже графики (см. рис. 3.2), которые отражают распределение двух классов ирисов: Iris Sentosa и Iris Versicolour по одной из характеристик, а именно – по длине лепестка.

Очевидно, что классы в пространстве признаков хорошо разделены, поэтому следует ожидать хороших результатов при распознавании.

Для наглядности рассмотрим сначала задачу в двумерном пространстве, а в качестве характеристик возьмем ширину чашелистика и ширину лепестка [107].

Решение задач теории и практики методами оптимального разбиения множеств

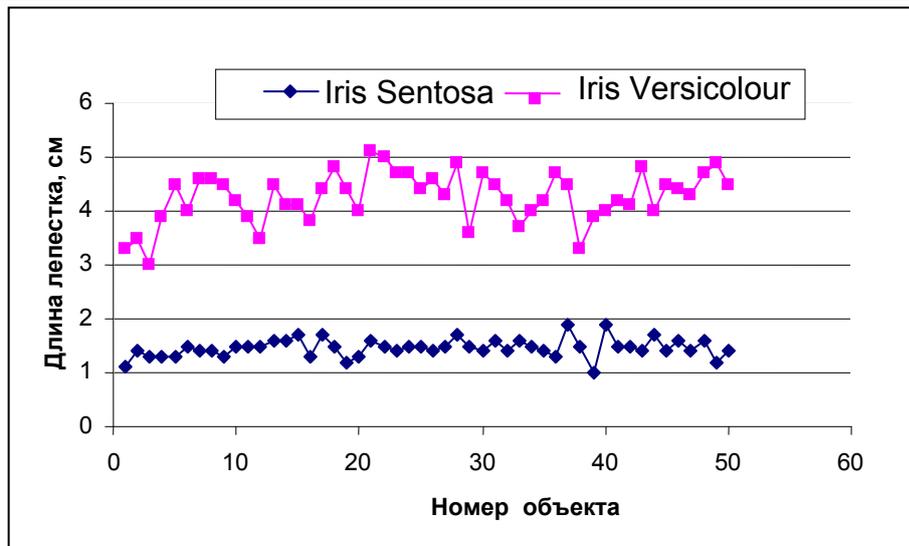


Рис. 3.2. Графики распределения двух классов ирисов (Iris Sentosa и Iris Versicolour) по признаку «длина лепестка»

Проанализируем расположение образов в выбранном пространстве признаков. На рис. 3.3 показано, как распределяются объекты (цветы) трех классов в этом пространстве. Нетрудно заметить, что классы достаточно хорошо разделены и компактно расположены в пространстве признаков.

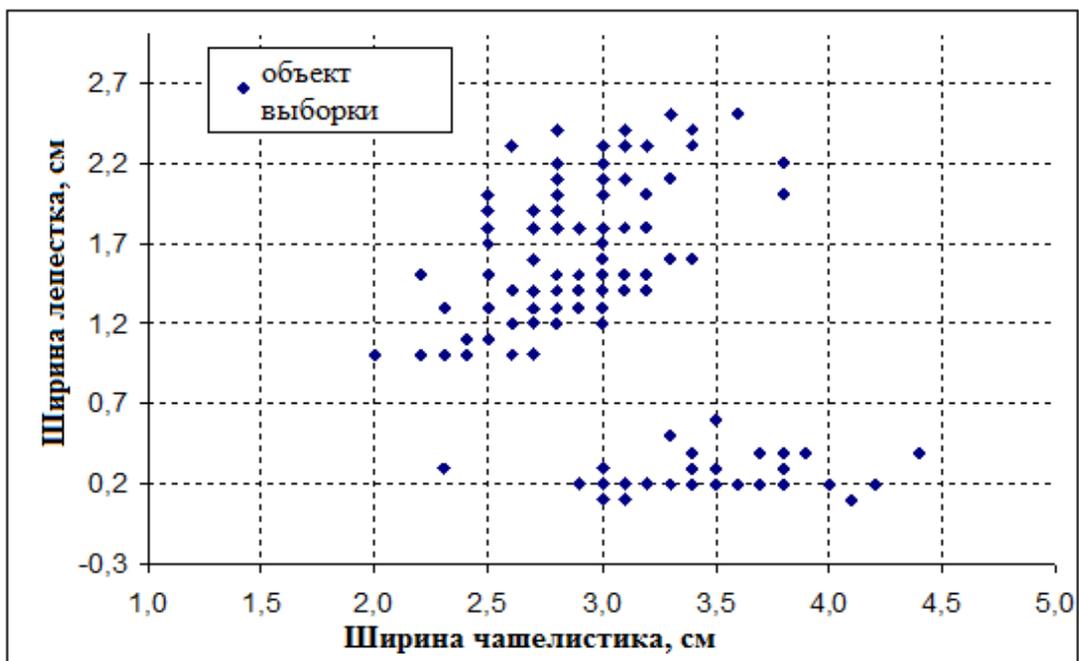


Рис. 3.3. Графическая интерпретация классов цветов в двумерном признаковом пространстве

В соответствии с описанным алгоритмом сначала необходимо восстановить плотность распределения вероятности. С этой целью был применен метод ядра. Графическая интерпретация полученных значений плотности распределения показано на рис. 3.4.

Заметим, что характеристики признаков объектов имеют различную размерность, поэтому входные данные были нормированы и приведены к масштабу от 0 до 1 для расчета расстояния в многомерном признаковом пространстве.

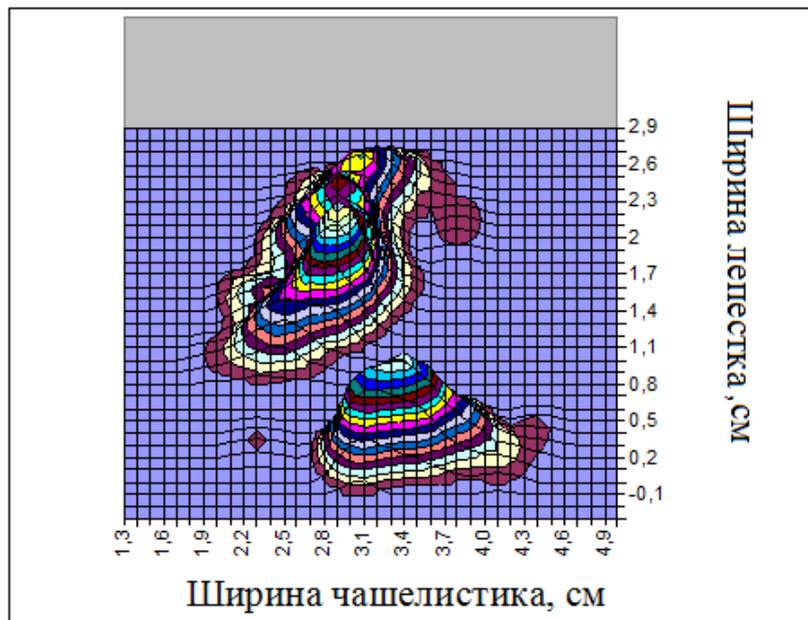


Рис. 3.4. Графическое представление плотности распределения вероятности двух классов ирисов в двумерном признаковом пространстве

Исходные данные были случайным образом разделены на обучающую последовательность, т. е. на множество объектов, используемых при поиске оптимальных центров подмножеств (100 объектов), и экзаменационную (50 объектов) для контроля достоверности распознавания. В качестве начального приближения, как рекомендовано в литературе [59], были приняты первые объекты таких классов: $tay1 = (3,0; 0,1)$; $tay2 = (2,4; 1)$, $tay3 = (2,5; 1,7)$.

В результате применения алгоритма ОРМ область, содержащая все изображения, была разбита на непересекающиеся классы: Iris Setosa, Iris Versicolour и Iris Virginica, а также определены такие центры подмножеств (эталоны для каждого класса): $tay1 = (3,4427; 0,2516)$, $tay2 = (2,5133; 1,1440)$, $tay3 = (2,9993; 1,9962)$.

Результаты поиска оптимальных центров подмножеств представлены на рис. 3.5. Здесь знаком \times отмечены начальные

Решение задач теории и практики методами оптимального разбиения множеств

координаты центров подмножеств, кружками – полученные оптимальные центры.

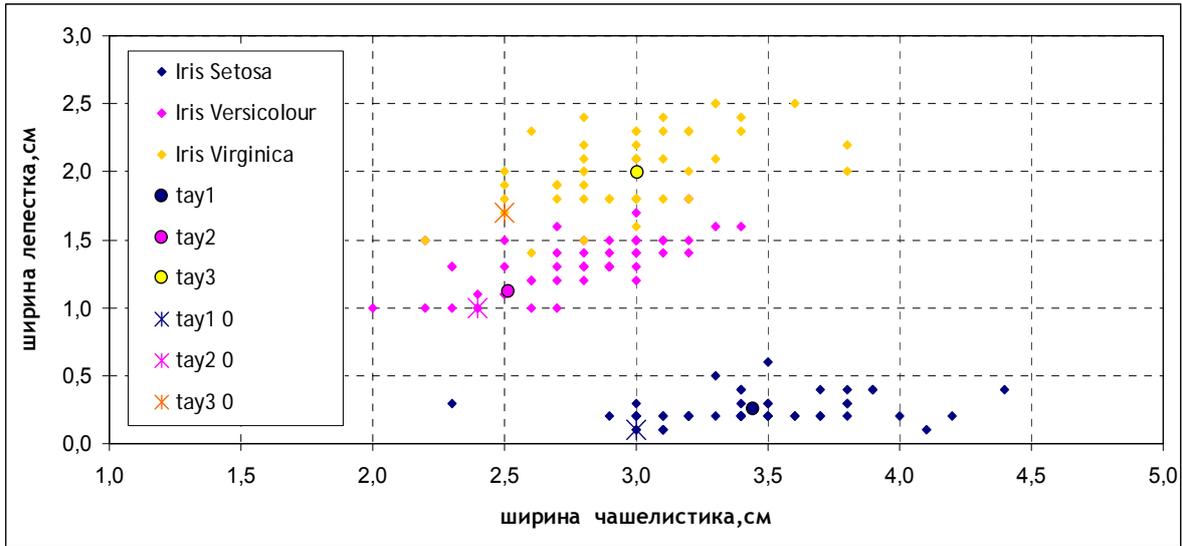


Рис. 3.5. Оптимальное размещение центров подмножеств в двумерном признаковом пространстве

Как показывают данные рис. 3.5, классы ирисов хорошо разделимы в пространстве признаков.

В результате применения алгоритма ОРМ получено оптимальное разбиение множества всех ирисов на классы, показанное на рис. 3.6.

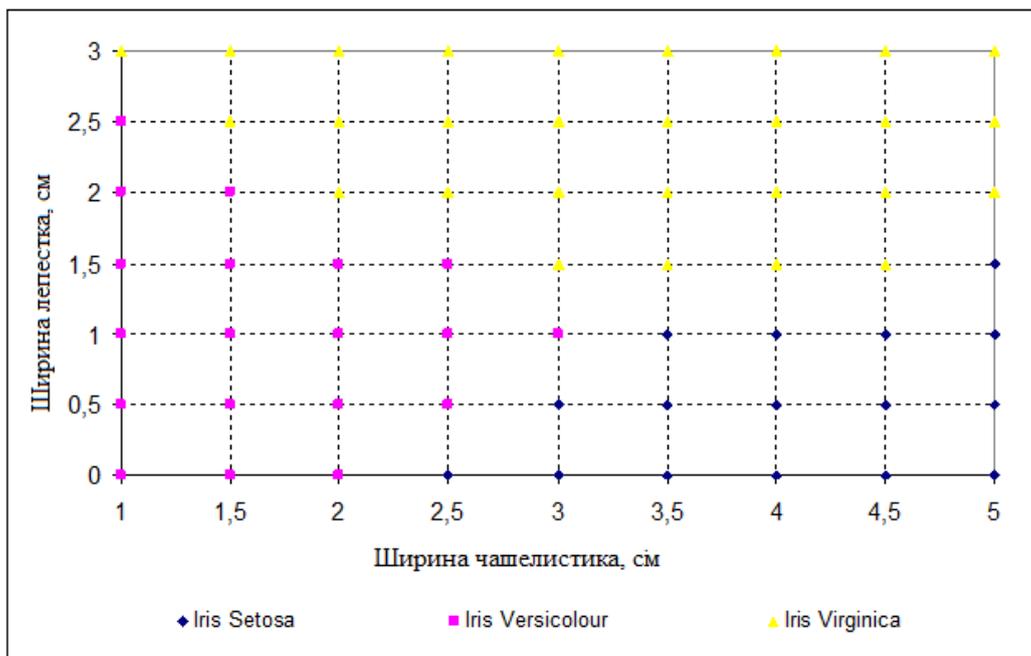


Рис. 3.6. Оптимальное разбиение множества ирисов в двумерном признаковом пространстве

В табл. 3.2 представлены результаты работы алгоритма ОРМ по распознаванию классов ирисов с учетом четырех признаков.

Таблица 3.2

Результаты применения алгоритма ОРМ к распознаванию классов ирисов (четыре признака)

Количество шагов r -алгоритма	45
Координаты начальных центров подмножеств	$\tau_1^0(4, 3; 3; 1, 1; 0, 1)$ $\tau_2^0(4, 9; 2; 4; 3, 3; 1)$ $\tau_3^0(4, 9; 2, 5; 4, 5; 1, 7)$
Координаты оптимальных центров подмножеств	$\tau_1^*(5, 074; 3, 449; 1, 5; 0, 272)$ $\tau_2^*(5, 689; 2, 668; 4, 192; 1, 285)$ $\tau_3^*(6, 515; 2, 993; 5, 277; 1, 885)$

В табл. 3.3 сведены результаты использования алгоритма ОРМ в распознавании классов ирисов и применения с той же целью метода потенциальных функций, описанного в источнике [2]:

Таблица 3.3

Сводные результаты распознавания ирисов (четыре признака)

Количество классов	3	Метод потенциальных функций	Метод ОРМ
Количество характеристик	4		
Объем обучающей последовательности	100		
Объем экзаменационной последовательности	50		
Количество ошибок распознавания		0	4
Вероятность правильного распознавания, %		100	92

Далее сравнив результаты использования двух методов, сможем определить возможные причины расхождения результатов.

Решение задачи медицинской диагностики. Исследуем теперь возможности применения предложенного авторами алгоритма в медицинской диагностике.

Решение задач теории и практики методами оптимального разбиения множеств

С этой целью метод ОРМ был использован для распознавания больных диабетом. Исходными данными была информация о больных, полученная из электронного ресурса <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets.html>. Объем последовательности составил 750 изображений, количество образов два (больной диабетом или нет), число признаков – восемь, а именно: количество беременностей; концентрация в плазме крови пациентов глюкозы при испытании ее допустимого уровня; артериальное диастолическое давление (mm Hg); толщина кожной складки трицепса (мм); 2-часовая сыворотка инсулина (mu U / ml); индекс массы тела [масса, кг / (рост, м)²]; дрифтер "родословная функция"; возраст (лет). Полные характеристики объектов приведены в ресурсе <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets.html>.

Необходимо разделить множество людей на два подмножества: больные диабетом и здоровые.

Рассмотрим сначала особенности этой задачи. На рис. 3.7 представлено распределение множества объектов в зависимости от двух характеристик: артериального диастолического давления и концентрации глюкозы в плазме крови. Легко видеть, что образы плохо разделяются в пространстве признаков. Некоторые признаки разделяются лишь в среднем (см. рис. 3.8).

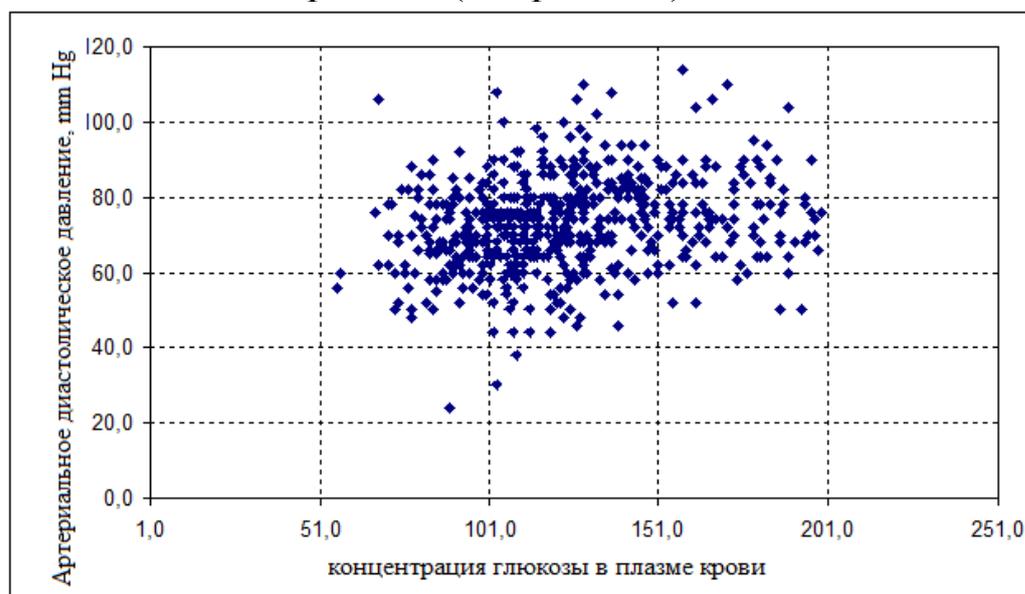


Рис. 3.7. Графическая интерпретация множеств больных и здоровых людей в двумерном признаковом пространстве

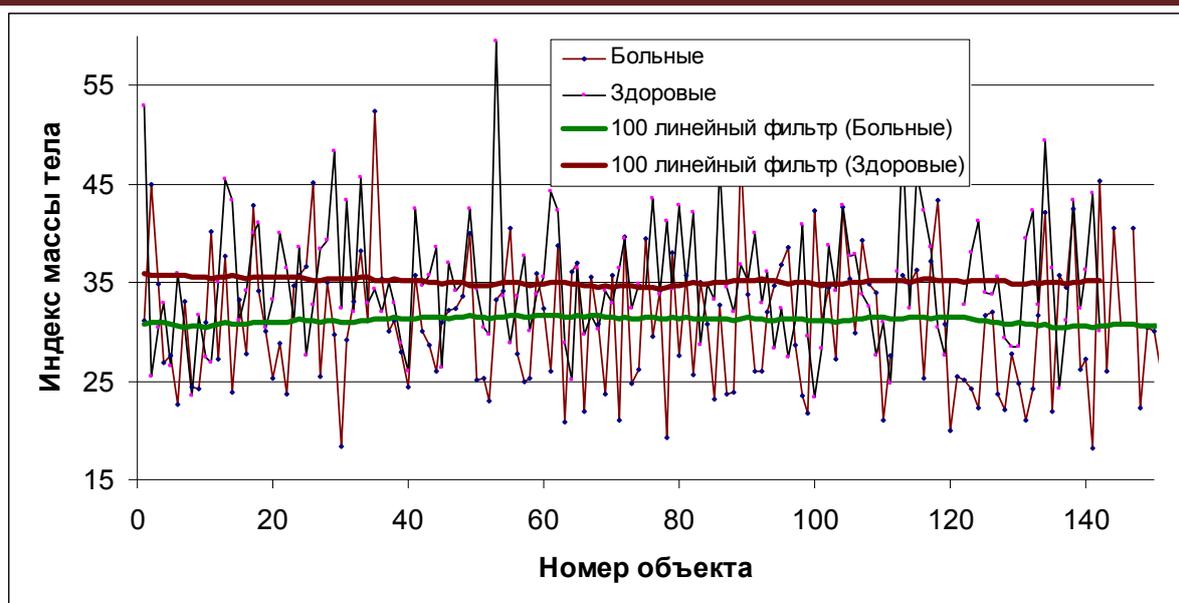


Рис. 3.8. График распределения отдельного признака индекса массы больных диабетом и здоровых людей

Заметим, что по данным рис. 3.7, 3.8 практически невозможно визуально различить два класса людей, т. е. выделить подмножества больных и здоровых людей из исходного множества.

Учитывая особенности применения метода ОРМ к решению задач с размещением центров подмножеств [59], необходимо сделать привязку к классам, поскольку если брать в качестве начальных приближений первые объекты выборки, то исходное множество будет разделено, но в этом случае появляется опасность перепутать классы объектов. Чтобы этого не случилось, необходимо в качестве начального приближения для центров классов выбрать значения характеристик, соответствующие каждому из них, например, усредненные.

При использовании алгоритма ОРМ в двумерном признаковом пространстве при таких начальных приближениях центров классов: $tay1 = (110; 70)$; $tay2 = (140; 76)$, было получено разбиение на два класса объектов, показанное на рис. 3.9, соответствующее таким оптимальным координатам центров классов: $tay1 = (99,97; 74,97)$; $tay2 = (136,95; 73,22)$.

Решение задач теории и практики методами оптимального разбиения множеств

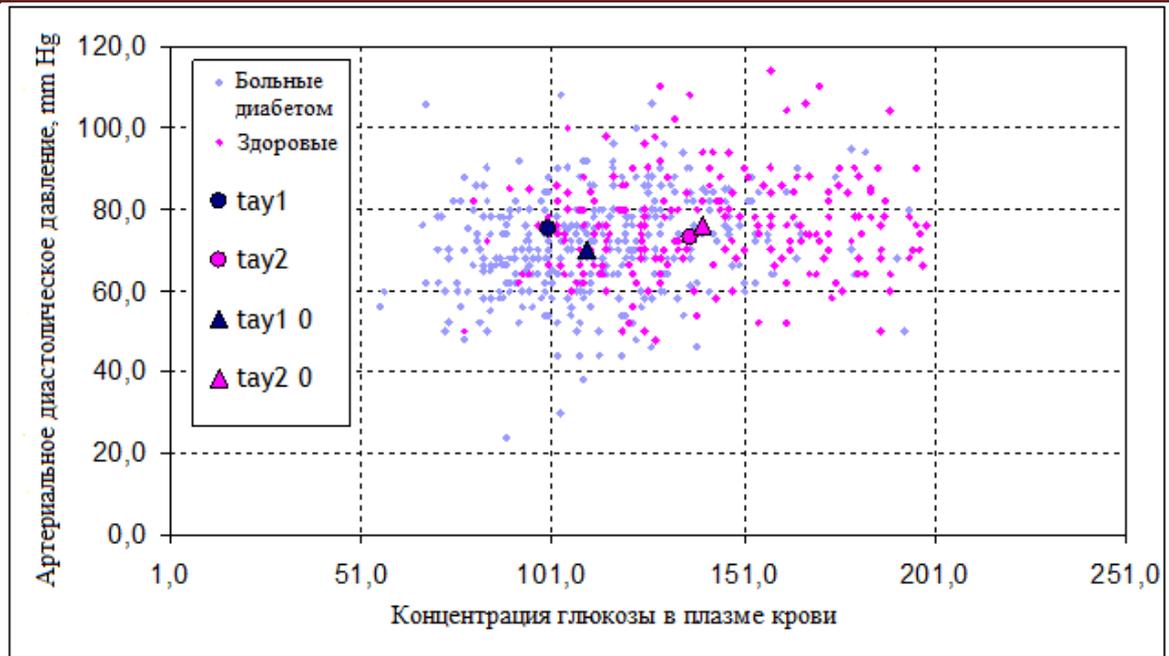


Рис. 3.9. Результаты поиска оптимальных центров подмножеств в двумерном признаковом пространстве

Теперь проведем распознавание больных диабетом по пяти признакам, характеризующим пациента. При этом были оставлены те признаки, по которым имелись полные данные, а именно:

- количество беременностей;
- концентрация в плазме крови глюкозы при испытании допуска ее уровня;
- индекс массы тела $[\text{масса, кг}/(\text{рост, м})^2]$;
- дрефтер "родословная функция";
- возраст (лет).

Выходные данные были разделены на учебную последовательность, то есть множество объектов (605), используемое при поиске оптимальных центров подмножеств, и экзаменационную (146 объектов), применяемую для контроля достоверности распознавания.

Результаты использования алгоритма ОРМ для решения задачи медицинской диагностики по пяти характеристикам представлены в табл. 3.4. Обобщенные сведения по использованию алгоритма ОРМ и метода потенциальных функций приведены в табл. 3.5.

Таблица 3.4

Результаты использования алгоритма ОРМ для решения задачи медицинской диагностики (5 признаков)

Количество шагов r -алгоритма	44
Координаты начальных центров подмножеств	$\tau_1^0(0; 102; 25,1; 0,078; 21)$ $\tau_2^0(1; 173; 36,8; 0,088; 38)$
Координаты оптимальных центров подмножеств	$\tau_1^*(1,314; 115,4; 32,32; 0,458; 26,41)$ $\tau_2^*(5,113; 126,4; 32,01; 0,415; 36,83)$

Таблица 3.5

Обобщенные результаты распознавания больных диабетом

Количество классов	2	Метод потенциальных функций	Метод ОРМ
Количество характеристик	5		
Объем обучающей последовательности	605		
Объем экзаменационной последовательности	146		
Количество ошибок		30	53
Вероятность правильного распознавания, %		80	63,7

По результатам выполненных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Практическая реализация метода ОРМ показала, что его можно применять для решения задач распознавания образов, особенно в том случае, когда признаки классов имеют хорошее пространственное разделение, т. е. если образы, соответствующие различным классам, разнесены достаточно далеко друг от друга. Если же образы в пространстве признаков перекрываются, то приходится обращаться к более специализированным и приспособленным для отдельных задач методам распознавания.

2. Поскольку в методе ОРМ учтено расстояние между образами в многомерном признаковом пространстве, где могут иметь место признаки различной размерности, то необходимо выполнять нормирование исходных данных. В данном исследовании было реализовано нормирование характеристик объектов от 0 до 1.

3. Рекомендовано в качестве начальных приближений центров подмножеств выбирать среднее значение характеристик каждого класса объектов, например, применять метод медиан, иначе возникает риск перепутать классы, поскольку в методе ОРМ предусмотрено разбиение множества на классы с точностью до обозначений. Этот факт является существенным, например, при решении задачи распознавания образов в медицинской диагностике.

4. Проведенный сравнительный анализ результатов решения задач распознавания образов методом ОРМ и методом потенциальных функций показывает, что последний дает более высокую вероятность распознавания, чем первый (в распознавании ирисов этот показатель составил 100 и 92 %; больных диабетом – 80 и 63,7 % соответственно). Некоторое объяснение таких результатов кроется в том, что метод потенциальных функций использовался для решения задачи обучения распознаванию образов, а метод ОРМ был применен к решению более сложной задачи самообучения, когда обучающая последовательность не содержала информации о принадлежности объектов к классам, а использовалась только для восстановления плотности вероятности.

ГЛАВА 4

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

4.1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ МНОГОЗОННЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ МЕТОДАМИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

4.1.1. Постановка задачи идентификации многозонной динамической системы

Многие процессы в механике, электротехнике и в других областях науки и техники характеризуются тем, что правая часть каждого из дифференциальных уравнений, описывающих их динамику, может быть разрывной по причине изменения текущего состояния системы. Стандартный пример такого процесса – механическая система с наличием сухого трения, где сила сопротивления может принимать одно из двух противоположных по знаку значений в зависимости от направления движения. Энергоемкие объекты, например электрические печи, функционируют в широком интервале температур, в связи с чем изменяются их теплофизические свойства, наблюдается запаздывание в работе, может быть разным объем загрузки и т. п. Динамические режимы такого рода объектов достаточно точно можно описать, используя последовательно несколько линейных дифференциальных уравнений [76, 79]. Для этого весь температурный режим (диапазон изменения показателя) разбивается на несколько стадий или зон таким образом, чтобы в пределах одной стадии динамика с достаточной точностью описывалась бы одним (векторным) линейным дифференциальным уравнением. Задача идентификации этих систем заключается в поиске не только вектора коэффициентов правой части такого дифференциального уравнения, но и в определении границ между зонами функционирования.

Общая модель динамики системы, в которой выделено N зон, представляет собой совокупность N систем обыкновенных дифференциальных уравнений, то есть

$$\dot{x}(t) = A_1 \cdot x(t) + B_1 \cdot u(t), \quad y(t) \in \Omega_1; \\ \dots \tag{4.1}$$

$$\dot{x}(t) = A_N \cdot x(t) + B_N \cdot u(t), \quad y(t) \in \Omega_N,$$

где $x(t)$ – вектор фазовых координат; $u(t)$ – вектор параметров управления; $A_j, B_j, j = \overline{1, N}$, – матрицы параметров системы; $y(t)$ – выходная (наблюдаемая) переменная, обычно это одна из фазовых координат, принимающая значения из некоторого допустимого множества Ω ; подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ – составляющие разбиения множества Ω , которые определяют N возможных зон функционирования системы.

Так, если $y = x_1$, то $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ – разбиение на N подмножеств множества Ω возможных значений первой фазовой координаты системы.

В общем случае в системе (4.1) вектор фазовых переменных на разных стадиях может иметь различную размерность. Если же размерности векторов x и u для всех стадий (зон) одинакова, то эта система может быть представлена одним дифференциальным уравнением с разрывной правой частью, а именно:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_1 \cdot x(t) + B_1 \cdot u(t), & y(t) \in \Omega_1; \\ \dots \\ A_N \cdot x(t) + B_N \cdot u(t), & y(t) \in \Omega_N. \end{cases} \tag{4.2}$$

Рассмотрим класс обратных задач, формулируемых для систем типа (4.2), в которых идентификации подлежит правая часть дифференциального уравнения, являющаяся кусочно-непрерывной функцией в своей области определения [114].

Постановка задачи. Пусть состояние некоторого объекта характеризуется двумя фазовыми координатами (x_1, x_2) , изменение которых со временем описывается задачей Коши, формулируемой для системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, то есть

$$\dot{x}_1 = x_2; \tag{4.3}$$

$$\dot{x}_2 = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + f_i(t; b^i), \quad x_1 \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, N};$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}. \tag{4.4}$$

Здесь $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ – множества значений первой фазовой координаты системы, которые определяют возможные зоны функционирования системы, причем границы между зонами считаются неизвестными; $a_j^i, b^i, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, 2}$, – параметры, которые могут быть заданы, а могут подлежать определению; $f_i(t; b^i), i = \overline{1, N}$, – известные непрерывные по переменной t функции; x_{10}, x_{20} – параметры, известные заранее.

Прямая задача, формулируемая для системы (4.3), состоит в отыскании решения задачи Коши (4.3), (4.4), когда известны границы между зонами $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ и заданы значения параметров $a_1^i, a_2^i, b^i, i = \overline{1, N}$.

Под *идентификацией системы* будем понимать уточнение модели объекта или процесса (4.3) с использованием экспериментальных данных. Т. е. это задача определения в системе (4.3) неизвестных границ между зонами функционирования $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ и параметров $a_1^i, a_2^i, b^i, i = \overline{1, N}$ (если они не заданы), с учетом условия (4.4) и апостериорной информации о значениях первой фазовой координаты в некоторые моменты времени t_k такого вида:

$$x_1(t_k) = \tilde{x}_1(t_k), k = \overline{1, K}. \quad (4.5)$$

Рассматриваемая задача идентификации динамических систем относится к классу обратных задач, формулируемых для обыкновенных дифференциальных уравнений [20]. Эта теория в последнее время интенсивно развивается, что обусловлено, прежде всего, необходимостью разработки математических методов решения широкого класса важных прикладных задач, связанных с обработкой и интерпретацией различных наблюдений. Сегодня сформировались научные направления, охватывающие как разнообразные сферы применения, так и типы математических постановок обратных задач. Число научных публикаций по теории обратных задач и ее приложений очень велико. Многие из полученных результатов нашли свое отражение в научных монографиях [4, 5, 10, 16, 18, 20, 89], где рассмотрены и общие вопросы, и специальные разделы, посвященные конкретным направлениям исследований.

Решение задач идентификации сложных многостадийных процессов требует более подробного рассмотрения методов, разработанных с применением основных положений теории непрерывных задач ОРМ и теории обратных задач, формулируемых для систем с сосредоточенными параметрами [48, 71, 135]. Эти вопросы освещены в следующих пунктах монографии.

*4.1.2. Формулировка задачи идентификации с применением
элементов теории непрерывных задач оптимального разбиения
множеств*

Пусть известны результаты измерений входных и выходных переменных параметров объекта, динамика которого описывается задачей Коши (4.3), (4.4), а также задано количество N зон его функционирования $\Omega_1, \dots, \Omega_N$. Введем следующие обозначения:

– $P_N(\Omega)$ класс всех возможных разбиений множества Ω на N подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$:

$$P_N(\Omega) = \{ \bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N} \};$$

– $\tau_i = (a_1^i, a_2^i, b^i)$, $i = \overline{1, N}$, – параметры функций правых частей системы (4.3), которые условимся далее называть «центрами» подмножеств Ω_i ;

– $x(\cdot; \bar{\omega}, \tau)$ – решение задачи Коши (4.3), (4.4), соответствующее набору параметров $(\bar{\omega}, \tau) \in P_N(\Omega) \times R^{3N}$.

Необходимо определить разбиение $\bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega)$, и неизвестные координаты «центров» τ_i , $i = \overline{1, N}$, подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, при которых разница между экспериментальными [см. выражение (4.5)] и расчетными данными достигала бы минимального значения, то есть такому значению был бы равен некоторый критерий качества, а именно:

$$I(x(\cdot; \bar{\omega}, \tau)) \rightarrow \min_{(\bar{\omega}, \tau) \in P_N(\Omega) \times R^{3N}}. \quad (4.6)$$

Функционал задачи (4.6) может быть задан различными способами, например, один из них:

$$I_1(x(\cdot; \bar{\omega}, \tau)) = \int_0^T \sum_{k=1}^K \left(\dot{x}_2(t; \bar{\omega}, \tau) - \dot{\tilde{x}}_2(t) \right)^2 \delta(t - t_k) dt, \quad (4.7)$$

где $\dot{\tilde{x}}_2(t)$ – приближенные значения производной фазовой координаты $x_2(\cdot)$, вычисленные по результатам наблюдений переменной $x_1(\cdot)$ с помощью операции численного дифференцирования.

Другой способ задания функционала качества идентификации

$$I_2(x(\cdot; \bar{\omega}, \tau)) = \int_0^T \sum_{k=1}^K \left(\beta_0 (x_1(t; \bar{\omega}, \tau) - \tilde{x}_1(t))^2 + \beta_1 (x_2(t; \bar{\omega}, \tau) - \tilde{x}_2(t))^2 \right) \delta(t - t_k) dt, \quad (4.8)$$

где $x_1(\cdot; \bar{\omega}, \tau)$, $x_2(\cdot; \bar{\omega}, \tau)$ – решение задачи Коши (4.3), (4.4), сформулированной для восстанавливаемой системы; $\tilde{x}_1(t)$ – значения наблюдаемой фазовой переменной; $\tilde{x}_2(t)$ – приближенные значения фазовой координаты $x_2(\cdot)$, вычисленные по результатам наблюдений первой фазовой координаты $x_1(t)$ с помощью операции численного дифференцирования; $\beta_0 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$ – параметры, задающие приоритет слагаемого в функционале (4.8).

4.1.3. Два подхода к решению задачи идентификации многозонной системы

Рассмотрим возможные подходы к решению задачи идентификации многозонной системы (4.3). Один из них базируется на численном дифференцировании наблюдаемого временного ряда и восстановлении производной второй фазовой координаты в классе кусочно-непрерывных функций, т. е. на решении задачи (4.6) с учетом критерия (4.7). Второй подход предусматривает решение задачи (4.6) с функционалом качества идентификации (4.8).

Подход 1. Решение задачи определения правой части уравнения (4.3) с использованием известных результатов наблюдений сводится к применению операции численного дифференцирования для нахождения по наблюдаемым значениям фазовой переменной $\tilde{x}_1(t)$ приближенного значения ее второй производной $\dot{\tilde{x}}_2(t)$ и

аппроксимации последней при помощи кусочно-непрерывной функции из такого класса функций:

$$\Phi \equiv \left\{ \varphi: \varphi_i(t, x; \bar{\omega}) = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + f_i(t; b^i) \text{ п.в. для } x \in \Omega_i, i = \overline{1, N}, \bar{\omega} \in P_N(\Omega) \right\}.$$

Далее вводим характеристические функции $\lambda_i(\cdot)$ подмножеств $\Omega_i, i = \overline{1, N}$. Пусть

$$\Lambda_0 = \left\{ \lambda(x_1) = (\lambda_1(x_1), \dots, \lambda_N(x_1)): \sum_{i=1}^N \lambda_i(x_1) = 1 \text{ п.в. для } x_1 \in \Omega; \right. \\ \left. \lambda_i(x_1) = 0 \vee 1, \quad \forall x_1 \in \Omega; i = \overline{1, N} \right\}.$$

Тогда от задачи минимизации функционала (4.7) с учетом условий (4.3), (4.4) можно перейти к следующей эквивалентной задаче бесконечномерного программирования, а именно:

$$\bar{I}(\lambda(\cdot), \tau) = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^N \varphi_i(t, \tilde{x}(t); \tau_i) \lambda_i(\tilde{x}_1(t)) - \dot{\tilde{x}}_2(t) \right)^2 dt \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Lambda_0 \times R^{3N}}, \quad (4.9)$$

при таких условиях:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^N \left(a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + f_i(t; b^i) \right) \lambda_i(x_1); \end{cases} \quad (4.10)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad (4.11)$$

где $\varphi_i(t, x; \tau_i) = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + f_i(t; b^i), i = \overline{1, N}$. Далее введем такие обозначения: $\tau_i = (a_1^i, a_2^i, b^i), i = \overline{1, N}, \tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$.

Оптимальное решение задачи (4.9) – (4.11) определяется следующим образом: для каждого элемента $\tilde{x}_1(t) \in \Omega_i^*$

$$\lambda_i^*(\tilde{x}_1(t)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left| \varphi_i(t, \tilde{x}; \tau_i^*) - \dot{\tilde{x}}_2(t) \right| = \min_{k=1, N} \left| \varphi_k(t, \tilde{x}; \tau_k^*) - \dot{\tilde{x}}_2(t) \right|; \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad i = \overline{1, N};$$

где в качестве параметров $\tau_i^* = (a_1^{*i}, a_2^{*i}, b^{*i}), i = \overline{1, N}$, выбирается оптимальное решение такой задачи:

$$G(\tau) = \int_0^T \min_{i=1, N} \left(\varphi_i(t, \tilde{x}(t); \tau_i) - \dot{\tilde{x}}_2(t) \right)^2 dt \rightarrow \min_{\tau \in R^{3N}}. \quad (4.12)$$

Последняя относится к классу задач конечномерной недифференцируемой оптимизации и для ее решения дальше будем применять r -алгоритм Н.З. Шора.

Следует отметить, что одновременно с отысканием границ между зонами динамической системы могут быть найдены моменты времени перехода состояния системы из i -й в j -ю зону. Эти моменты могут быть определены в процессе решения такого нелинейного уравнения: $|\varphi_i(t, \tilde{x}; \tau_i^*) - \dot{\tilde{x}}_2(t)| = |\varphi_j(t, \tilde{x}; \tau_j^*) - \dot{\tilde{x}}_2(t)|$.

Подход 1 оказывается конструктивным в том смысле, что численный алгоритм решения исходной задачи идентификации многозонной динамической системы по данным наблюдений воспроизводит описанную схему.

Замечание. При решении задачи, предусматривающей только поиск границ переключения зон функционирования динамической системы, отпадает необходимость решать задачу конечномерной оптимизации (4.12).

Результаты идентификации многозонной модели с помощью подхода 1. Определение границ между зонами. Исследование работы предложенного авторами алгоритма сначала проводили на примере задачи идентификации кусочно-непрерывной функции правой части одного дифференциального уравнения, то есть когда динамическая система описывалась следующим образом:

$$\dot{x} = \varphi_i(t, x), x \in \Omega_i, (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega), i = \overline{1, N}; \quad (4.13)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (4.14)$$

Графическая интерпретация результата разбиения области значений фазовой координаты на 10 зон, в случае, когда каждая из них идентифицируется, представлена на рис. 4.1. Здесь, как и далее на рис. 4.2 – 4.5, на оси абсцисс фиксируется время, а на оси ординат – значение фазовой координаты. Разбиение фазовой области, отражающее условия, когда система (4.13) функционирует при скользящем режиме управления, показано на рис. 4.2.

На рис. 4.3, 4.4 в пространстве фазовых переменных (x_1, x_2) показана графическая форма границ между зонами функционирования следующей системы:

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = \begin{cases} -1, & x_2 > qx_1; \\ 1, & x_2 < qx_1; \end{cases} \quad (4.15)$$

при том, что $q = 0,8$ и $q = -0,1$ соответственно. Эти границы восстановлены после серии наблюдений.

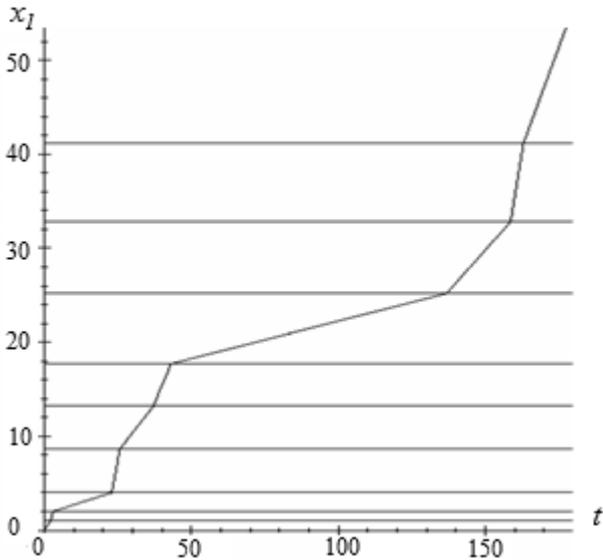


Рис. 4.1. Разбиение множества значений фазовой переменной, когда $\varphi_i(t, x) = a^i, i = \overline{1,10}$

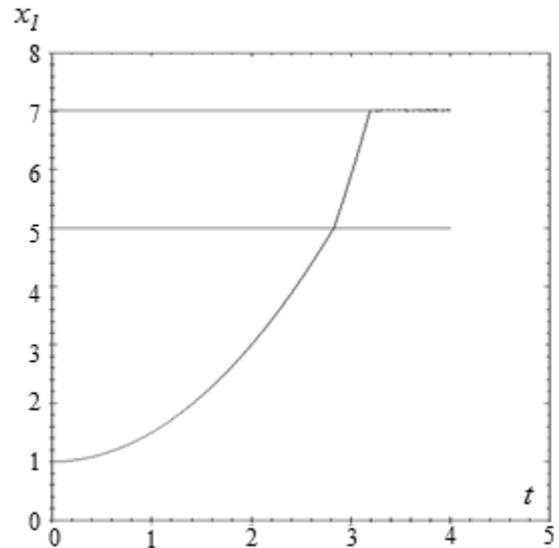


Рис. 4.2. Разбиение множества значений фазовой переменной на зоны функционирования системы (4.13) при скользящем режиме управления

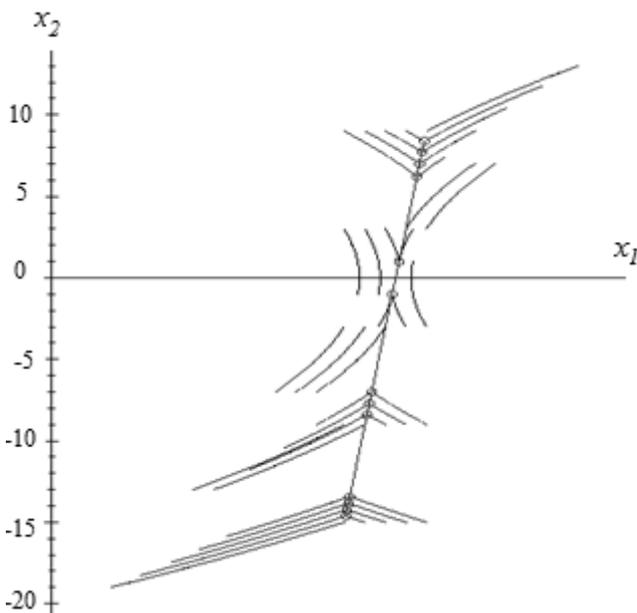


Рис. 4.3. Линия переключения зон в системе (4.15), когда $q = 0,8$

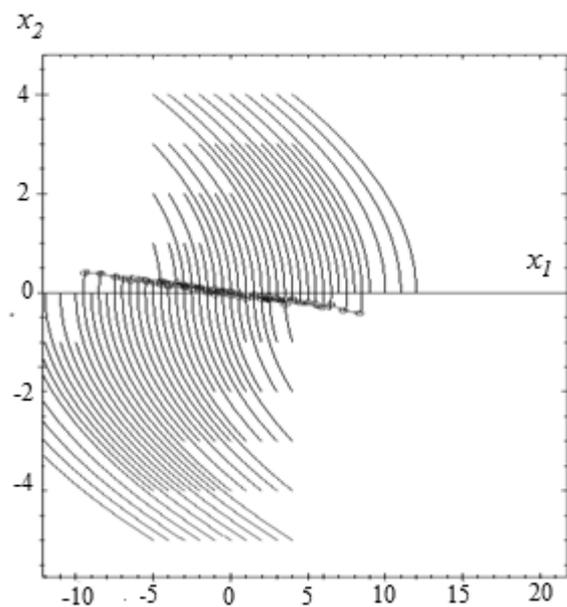


Рис. 4.4.1 Линия переключения зон в системе (4.15), если $q = -0,1$

На рис. 4.5 отражен результат восстановления разрывной по фазовой переменной правой части дифференциального уравнения такого вида:

$$\ddot{x} = \varphi_i(t, x), x \in \Omega_i, i = \overline{1, N}, (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega), \quad (4.16)$$

в котором функции правых частей линейны по каждой из своих переменных: $\varphi_i(t, x; \tau_i) = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + b^i t, i = \overline{1, N}$, при различном количестве точек наблюдения. Было обнаружено, что увеличение количества наблюдений в несколько раз, даже на порядок при удачном выборе начальных приближений параметров $\tau_i = (a_1^i, a_2^i, b^i), i = \overline{1, N}$, существенно не влияет на качество восстановления.

Другие примеры использования подхода 1 для восстановления функции правых частей системы (4.16) будут рассмотрены в сравнении с результатами применения подхода 2, изложенного далее.

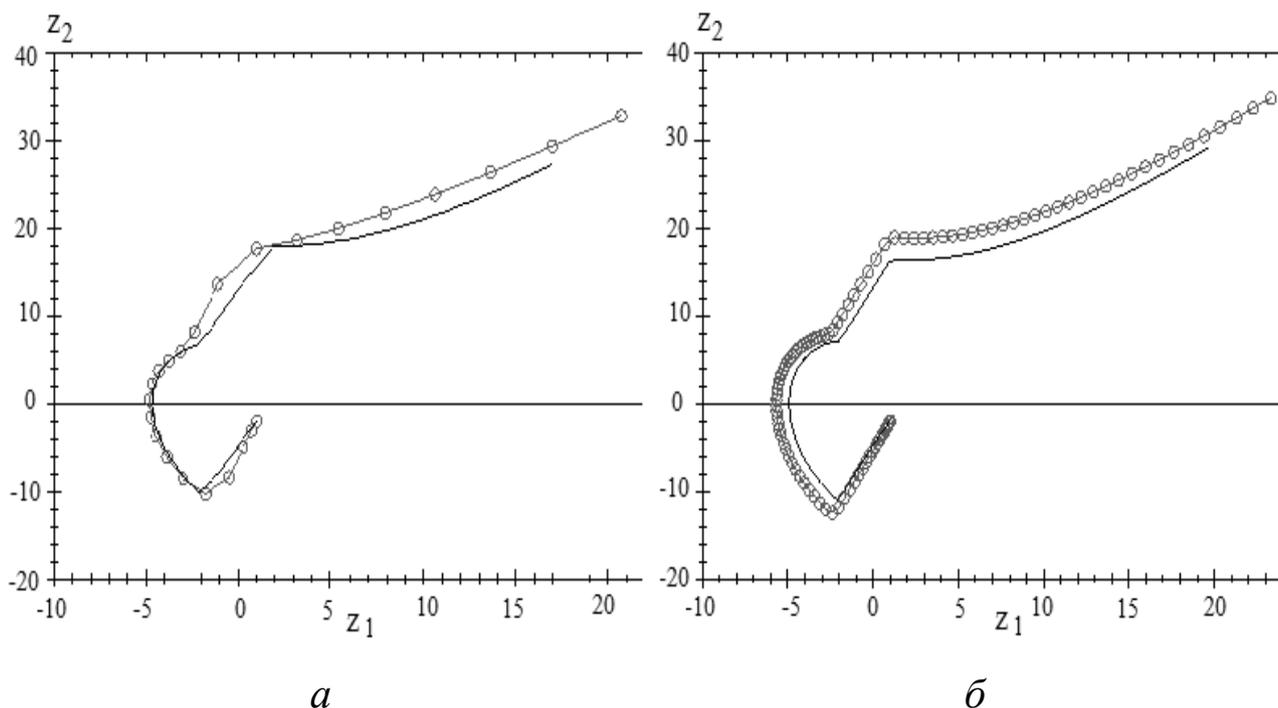


Рис. 4.5. Результаты идентификации трехзонной динамической системы (4.16) по выборке из N наблюдений: $N = 25$ (а);" $N = 100$ (б)

Подход 2. Здесь идентификация динамической системы (4.3) предусматривает решение задачи минимизации функционала (4.8) при использовании данных наблюдений (4.5).

Запишем задачу минимизации функционала $I_2(x(\cdot; \bar{\omega}, \tau))$ с учетом условий (4.3), (4.4), применяя терминологию теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств: найти вектор-функцию $\lambda(\cdot) \in \Lambda_0$ и вектор $\tau \in R^{3N}$, при которых функционал

$$\bar{I}_2(\lambda(\cdot), \tau) = \int_0^T \left(\beta_0 (x_1(\lambda(x_1), \tau; t) - \tilde{x}_1(t))^2 + \beta_1 (x_2(\lambda(x_1), \tau; t) - \tilde{x}_2(t))^2 \right) \sum_{k=1}^K \delta(t - t_k) dt,$$

достигал бы своего минимального значения и выполнялись условия (4.10), (4.11).

Коротко эту задачу можно записать в следующем виде:

$$\bar{I}_2(\lambda(\cdot), \tau) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Lambda_0 \times R^{3N}}. \quad (4.17)$$

Далее сформулируем идею приведенного ниже алгоритма. Перепишем задачу (4.17) в таком виде:

$$I_3(\tau) \rightarrow \min_{\tau \in R^{3N}}, \quad (4.18)$$

где

$$I_3(\tau) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} \bar{I}_2(\lambda(\cdot), \tau). \quad (4.19)$$

Для решения задачи минимизации функции (4.18) воспользуемся методом обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении двух последовательных обобщенных градиентов, то есть r -алгоритм Шора. При этом решение внутренней задачи (4.19) – поиск вектор-функции $\lambda(\cdot) \in \Lambda_0$ – будем осуществлять, выполняя каждый шаг численного интегрирования системы (4.10), (4.11). Составим итерационный алгоритм решения задачи идентификации системы (4.3), реализующий описанный подход.

Алгоритм 4.1

Инициализация. Задаем исходные значения параметров: $m = 0$, $\tau_i^m = (a_1^{im}, a_2^{im}, b^{im})$, $i = \overline{1, N}$, $\varepsilon > 0$; $H_0 = E$, – единичная матрица размерности $(3N \times 3N)$. Вычисляем (при условии, что $\beta_1 \neq 0$) приближенные значения производной первой фазовой координаты $\tilde{x}_2(t) = \dot{\tilde{x}}_1(t)$ в точках $t = t_k$, $k = \overline{1, K}$, воспользовавшись формулами

численного дифференцирования; предусматриваем произвольные значения характеристических функций $\lambda_i^m(x_{10}), i = \overline{1, N}$.

1. Решаем задачу Коши (4.10) – (4.11) одним из методов Рунге – Кутты. При этом, реализуя каждый шаг численного интегрирования системы (4.10), находим значения характеристических функций подмножеств по следующей формуле:

$$\lambda_i^m(x_1(t)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \int_0^t \sum_{k: t_k \leq t} \left(\beta_0 (x_1^{im}(t) - \tilde{x}_1(t))^2 + \beta_1 (x_2^{im}(t) - \tilde{x}_2(t))^2 \right) \delta(t - t_k) dt = \\ \min_{p=1, N} \int_0^t \sum_{k: t_k \leq t} \left(\beta_0 (x_1^{pm}(t) - \tilde{x}_1(t))^2 + \beta_1 (x_2^{pm}(t) - \tilde{x}_2(t))^2 \right) \delta(t - t_k) dt; \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad i = \overline{1, N}.$$

2. Вычисляем обобщенный градиент γ^m функции $\bar{I}^2(\lambda, \tau)$ по переменным $\tau_i^m = (a_1^{im}, a_2^{im}, b^{im}), i = \overline{1, N}$, когда $\lambda = \lambda^m(x_{10})$.

3. Осуществляем m -ю итерацию r -алгоритма Шора по такой формуле:

$$\tau^{(m+1)} = \tau^{(m)} - h_m \frac{H_m \gamma^m}{\sqrt{(H_m \gamma^m, \gamma^m)}},$$

где H_m – матрица растяжения пространства в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов с коэффициентом α (его целесообразно брать равным 3), которая пересчитывается согласно такой формуле:

$$H_{m+1} = H_m + (1/\alpha^2 - 1) \frac{H_m \zeta^m (\zeta^m)^T H_m}{(H_m \zeta^m, \zeta^m)}; \quad \zeta^m = \gamma^m - \gamma^{m-1}.$$

Если из-за округлений счета матрица H_{m+1} перестает быть положительно определенной, заменяем ее единичной матрицей.

Шаговый множитель $h_m \geq 0$, выбирается из условия минимума целевой функции в направлении $d = -H_{m+1} \gamma^m$.

4. Если выполняется одно из таких условий:

$$\|\tau^{m+1} - \tau^m\| \leq \varepsilon; \quad \|\gamma^m\| \leq \varepsilon; \quad \left| \bar{I}_2(\lambda^{m+1}, \tau^{m+1}) - \bar{I}_2(\lambda^m, \tau^m) \right| \leq \varepsilon, \quad (4.20)$$

то алгоритм завершен. Оптимальным решением задачи (4.17), (4.10), (4.11) считаем пару (λ^l, τ^l) , где l – номер итерации, на которой выполнилось одно из условий (4.20). Иначе полагаем, что $m := m + 1$ и переходим к реализации п. 1.

Замечание. Для того, чтобы вычислить обобщенный градиент функции $\bar{I}_2(\lambda, \tau)$, необходимо наряду с задачей Коши (п. 1 алгоритма 4.1) дополнительно решить $3N$ задач Коши при использовании возмущенных компонент вектора параметров τ .

4.1.4. Результаты идентификации многозонной модели динамики. Сравнение двух подходов

Вначале для выяснения принципиальной возможности идентификации многозонных динамических систем с помощью предложенных подходов были рассмотрены задачи восстановления кусочно-линейной правой части **одного** уравнения такого вида: $\dot{x} = a_1^i x + a_2^i t + b^i$, $x \in \Omega_i$, $i = \overline{1, N}$, $(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega)$. Направление исследования касалось оценки влияния исходных данных (количества точек наблюдений, начальных значений параметров восстанавливаемых функций) на качество реконструкции динамической системы. Анализ результатов таких вычислительных экспериментов позволил сделать некоторые выводы.

1. Увеличение количества наблюдений в несколько раз, но не столь существенно, влияет на качество реконструкции. Более важным здесь оказался выбор начальных приближений параметров $\tau_i = (a_1^i, a_2^i, b^i)$, $i = \overline{1, N}$.

Для примера рассмотрим подробно результаты идентификации трехзонной динамической системы (4.13), (4.14), где функции в правой части дифференциального уравнения для описания каждой из зон ее функционирования имеют следующий вид: $f_1 = 1,5x_1 - x_2 + t$, $f_2 = -x_1 - 4x_2 - 3t$, $f_3 = -3x_1 + 2x_2 + t$. Значения фазовой координаты, при которых происходит смена зон функционирования таковы: $x_1 = \sigma_1 = 1$, $x_1 = \sigma_2 = 2$. Система характерна скользящим режимом работы на участке $1 \leq x_1 \leq 2$, причем фазовой траектории удается выйти из этого режима (см. рис. 4.6, а). На рис. 4.6 б изображены

фазовые траектории системы, построенные по результатам ее идентификации при помощи

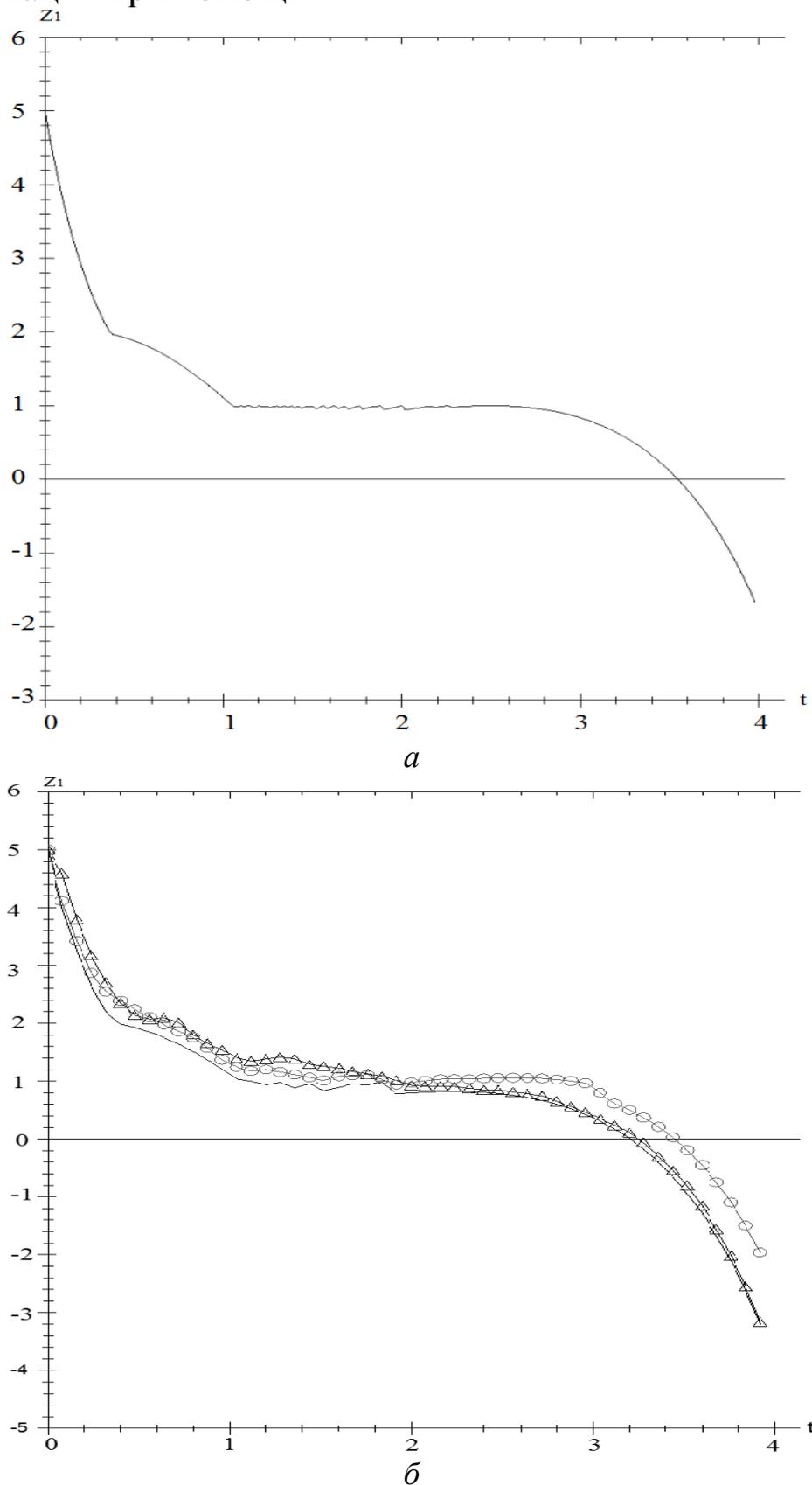


Рис. 4.6. Траектории, отражающие результаты идентификации трехзонной динамической системы в зависимости от числа K точек наблюдений: фазовая траектория (а); $K = 50$ (б)

описанных выше подходов (кружками обозначены линии, соответствующие применению первого подхода, а треугольниками – второго), при количестве точек наблюдений $K = 50$. Начальные приближения значений параметров τ_i , $i = \overline{1, N}$, генерировались каждый раз случайным образом.

2. Задача идентификации характеризуется неединственностью решения в том смысле, что восстанавливаемые параметры системы могут принимать «далекие» от точных значения, хотя при этом фазовые траектории реконструируются с приемлемой точностью. Так, фазовые траектории, представленные на рис. 4.6 б, отвечают следующим найденным параметрам функций правых частей уравнения (4.13): $a_1^1 = 0,5$; $a_2^1 = -0,56$; $b^1 = -1,86$; $a_1^2 = -2,62$; $a_2^2 = 0,71$; $b^2 = 0,88$; $a_1^3 = 1,65$; $a_2^3 = -0,93$; $b^3 = 0,63$ (подход 1); $a_1^1 = -2,93$; $a_2^1 = -0,29$; $b^1 = 3,19$; $a_1^2 = 1,04$; $a_2^2 = 8,11$; $b^2 = -35,41$; $a_1^3 = -17,54$; $a_2^3 = -20,40$; $b^3 = 52,91$ (подход 2).

При идентификации системы (4.13), например, когда количество точек наблюдений $K = 50$, получены другие значения этих параметров: $a_1^1 = 1,64$; $a_2^1 = -0,94$; $b^1 = 0,66$; $a_1^2 = -3,15$; $a_2^2 = -1,28$; $b^2 = 3,18$; $a_1^3 = -0,72$; $a_2^3 = 0,39$; $b^3 = -0,34$ (подход 1); $a_1^1 = 1,95$; $a_2^1 = 1,18$; $b^1 = -5,68$; $a_1^2 = -3,48$; $a_2^2 = -0,58$; $b^2 = 4,42$; $a_1^3 = 1,66$; $a_2^3 = -0,38$; $b^3 = -1,42$ (подход 2).

3. При выборе различных начальных приближений восстанавливаемых параметров можно получить их разные «оптимальные» значения, хотя на качество самого восстановления фазовой траектории это может не повлиять. На рис. 4.7 представлены результаты идентификации трехзонной динамической системы (4.16), содержащей в правой части кусочно-линейную функцию, а именно: $f_1 = -4x_1 + x_2 + t$; $f_2 = 0.3x_1 + 2x_2 + 3t$; $f_3 = -3x_1 - 3x_2 + t$ с точками переключения $x_1 = \sigma_1 = 2$, $x_1 = \sigma_2 = 3$, при произвольном начальном приближении параметров τ_i , $i = \overline{1, N}$, генерируемых, как уже отмечалось, случайным образом.

В научной литературе [42] содержатся результаты других вычислительных экспериментов, проводимых по восстановлению разрывной по фазовой переменной правой части системы двух

дифференциальных уравнений (4.3) при помощи двух рассмотренных выше подходов. Проведенный сравнительный их анализ позволил сделать такие выводы:

а) Решение задачи идентификации не обладает свойством единственности, т. е. значения параметров могут существенно отличаться, но при этом аппроксимация правой части системы имеет удовлетворительную точность. Этот факт не противоречит свойствам обратных задач.

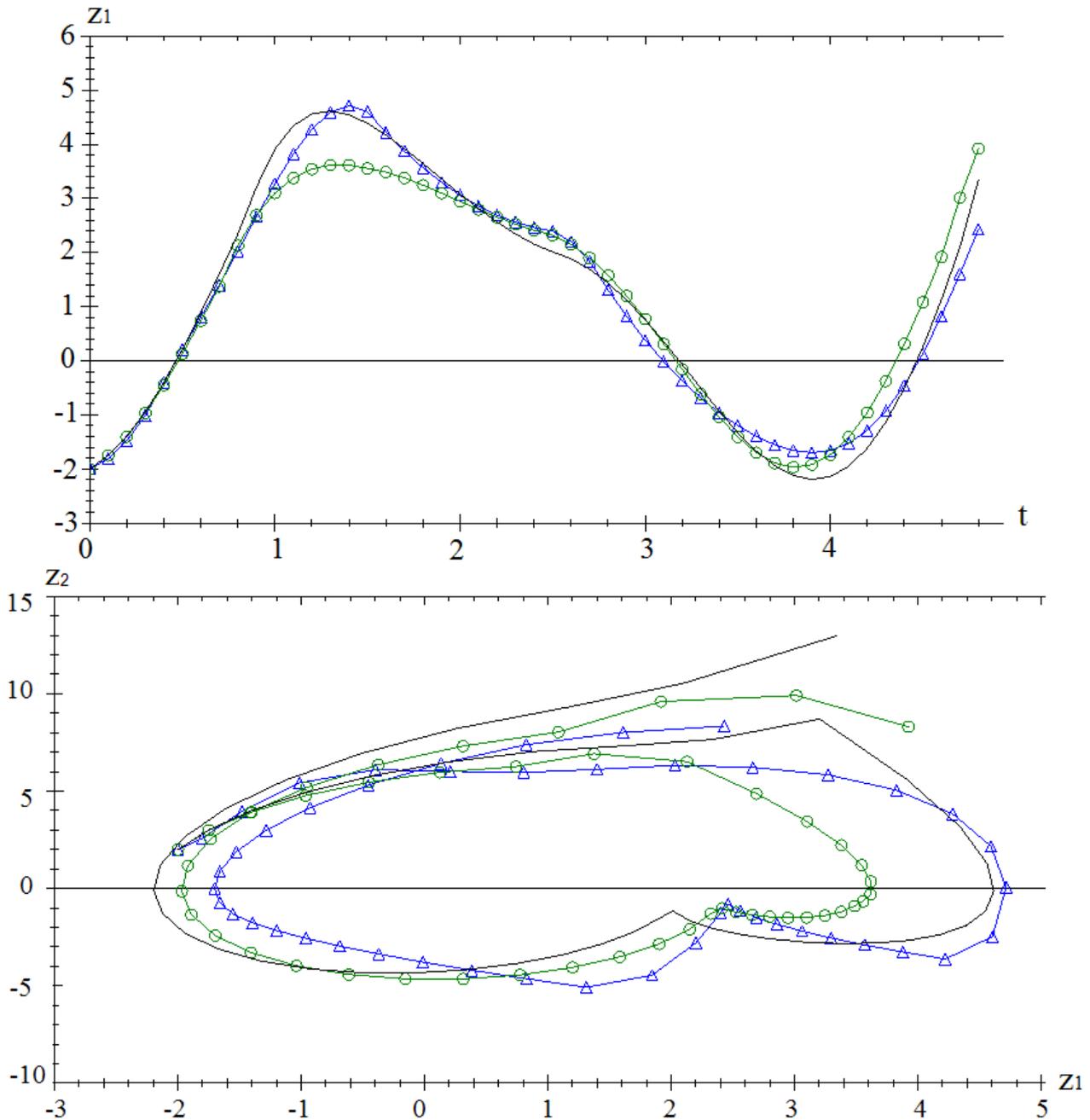


Рис. 4.7. Результаты идентификации трехзонной системы (4.16) при различных начальных приближениях искомых параметров: верхний график характеризует наблюдаемую переменную, нижний отображает фазовую траекторию

б) Границы между зонами функционирования системы идентифицируются путем применения и одного, и другого подхода достаточно хорошо при условии удачного выбора начального приближения параметров $\tau_i = (a_1^i, a_2^i, b^i), i = \overline{1, N}$. Это объясняется тем, что в обоих случаях для решения поставленных задач применяются методы недифференцируемой оптимизации, сходящиеся, в общем случае, к локальному минимуму.

в) При увеличении количества наблюдений качество реконструкции динамической системы с помощью подхода, основанного на численном дифференцировании, повышается, что не всегда справедливо для применения с той же целью подхода, предусматривающего решение задачи минимизации критерия (4.8).

Отметим некорректность задачи минимизации функционала (4.7) и определим способы ее преодоления. Вычислительные эксперименты показали, что процесс восстановления кусочно-непрерывной по фазовым переменным функции правой части системы (4.3) на основе решения задачи минимизации функционала (4.7) обладает рядом особенностей, а именно:

– если в наборе наблюдений присутствуют точки переключения, то качество идентификации системы существенно зависит от наличия в выборке наблюдений точек из разных зон функционирования;

– качество реконструкции динамической системы в случае восстановления неизвестных координат центров подмножеств $\tau_i, i = \overline{1, N}$, зависит от выбора начальных приближений этих параметров;

– задача характеризуется неединственностью решения, которую можно преодолеть путем сужения множества допустимых значений неизвестных параметров $\tau_i, i = \overline{1, N}$.

Кроме всего прочего, при реализации метода возникает проблема некорректности задачи дифференцирования функции, заданной приближенно в условиях равномерной метрики. Одним из путей решения указанной проблемы является учет погрешности задания функции при выборе шага сетки. Регуляризованная процедура численного дифференцирования функции может быть реализована на основе различных подходов [19, 23, 94]. В основе одного из них, например, лежит традиционная аппроксимация дифференциального оператора при помощи конечно-разностного

оператора. При этом величина шага сетки должна быть согласована с погрешностью входных данных. Например, если значение самой функции может быть вычислено в любой точке некоторого интервала и при любом шаге с точностью δ , то определение производной заданной точности ε возможно, если выбрать шаг $h(\delta) = c\delta^q$, где c и q – положительные константы, $q < 1$ [19].

Задача численного дифференцирования может быть решена и в рамках идеи обращения интегральных операторов типа Вольтерра на

основе такого равенства: $\int_0^t x'(t)dt = x(t) - x(0)$. Их численное обращение

возможно при использовании регуляризированных алгоритмов, например, метода А. Н. Тихонова [94].

4.1.5. Сведение задачи идентификации многозонной модели динамики к последовательности задач оптимального управления

Далее рассмотрим метод реконструкции систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переключаемыми правыми частями, основанный на сведении задачи идентификации многозонной модели динамики к последовательности задач оптимального управления, для решения которых применяются необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина [3, 6, 77, 87]. Предложим соответствующий итерационный алгоритм решения задачи идентификации многозонной модели динамики.

Обобщая рассмотренную выше задачу, будем считать, что наблюдаемой величиной является переменная z , а измеренные в момент t_k ее значения запишем в таком виде: $\tilde{z}(t_k) = \tilde{z}_k, k = \overline{1, K}$. Тогда модель измерений можно представить следующим образом:

$$\tilde{z}(t_k) = \gamma_1 x_1(t_k) + \gamma_2 x_2(t_k) + \xi_k, k = \overline{1, K}, t_k \in [0, T], \quad (4.21)$$

где $\xi_k, k = \overline{1, K}$, – случайные погрешности измерений.

Итак, необходимо по известным значениям переменной $\tilde{z}_k, k = \overline{1, K}$, на промежутке \bar{T} и при выполнении условий (4.4) определить границы между зонами $(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N)$ в системе (4.3).

Метод решения задачи идентификации границ между зонами функционирования системы. Математическая модель задачи идентификации динамической многозонной системы (4.3) записывается следующим образом:

$$I(x(\cdot; \bar{\omega})) \rightarrow \min_{\bar{\omega} \in P_N(\Omega)}, \quad (4.22)$$

где $I(x(\cdot; \bar{\omega})) = \int_0^T (\gamma_1 x_1(t; \bar{\omega}) + \gamma_2 x_2(t; \bar{\omega}) - \tilde{z}(t))^2 \sum_{k=1}^K \delta(t - t_k) dt$;

$\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака;

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \varphi(t, x; \bar{\omega}), \varphi \in \Phi, \end{cases} \quad (4.23)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}; \quad (4.24)$$

$$\Phi = \left\{ \varphi : \varphi(t, x; \bar{\omega}) = \varphi_i(t, x) \text{ п.в. для } x \in \Omega_i, i = \overline{1, N}, \bar{\omega} \in P_N(\Omega) \right\}.$$

Применяя методику решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств, от задачи минимизации функционала $I(x(\cdot; \bar{\omega}))$ осуществляем переход к эквивалентной задаче поиска вектор-функции $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)) \in \Lambda_0$, отвечающей такому условию:

$$I^1(x(\cdot; \lambda(\cdot))) \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0}, \quad (4.25)$$

где $I^1(x(\cdot; \lambda(\cdot))) = \int_0^T (\gamma_1 x_1(t; \lambda(x_1)) + \gamma_2 x_2(t; \lambda(x_1)) - \tilde{z}(t))^2 \sum_{k=1}^K \delta(t - t_k) dt$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^N \varphi_i(t, x; \tau_i) \lambda_i(x_1), \end{cases} \quad (4.26)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}. \quad (4.27)$$

Поскольку первая координата фазовой переменной является функцией времени, то вектор-функция $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)) \in \Lambda_0$, также фактически зависит от временной переменной, обозначаемой следующим образом: $\lambda(x_1(t)) = (\lambda_1(x_1(t)), \dots, \lambda_N(x_1(t)))$. Далее вводим вектор-функцию $\hat{\lambda}(t) = (\hat{\lambda}_1(t), \dots, \hat{\lambda}_N(t))$, отвечающую такому условию: $\hat{\lambda}(t) = \lambda(x_1(t))$. Стало быть, в отличие от вектор-функции λ , компоненты которой определены на множестве Ω , координаты

вектор-функции $\hat{\lambda}(t)$ являются функциями времени и определены на интервале $t \in [t_0, T]$, то есть $\hat{\lambda}(\cdot) \in \hat{\Lambda}$, тогда

$$\hat{\Lambda} = \left\{ \hat{\lambda}(t) = \left(\hat{\lambda}_1(t), \dots, \hat{\lambda}_N(t) \right) : \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_i(t) = 1 \text{ п. в. для } t \in [0; T]; \right. \\ \left. \hat{\lambda}_i(t) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}, \text{ для } \forall t \in [0; T] \right\}.$$

Таким образом, на задачу (4.25) – (4.27) можно смотреть как на задачу оптимального управления динамической системой, в которой вектор-функция $\hat{\lambda}(t)$ является управляющей. Представим такую задачу оптимального управления на промежутке $t \in [t_0, t_K]$ в виде последовательного набора K таких задач:

$$I_k(x(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)) \rightarrow \min, \hat{\lambda}(\cdot) \in \hat{\Lambda}, k = \overline{1, K}; \quad (4.28)$$

$$I_k(x(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)) = \left(\gamma_1 x_1(t_k; \hat{\lambda}(\cdot)) + \gamma_2 x_2(t_k; \hat{\lambda}(\cdot)) - \tilde{z}(t_k) \right)^2;$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^N \varphi_i(t, x) \hat{\lambda}_i(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_k]; \end{cases} \quad (4.29)$$

$$x_1(t_{k-1}) = \bar{x}_1(t_{k-1}), \quad x_2(t_{k-1}) = \bar{x}_2(t_{k-1});$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (4.30)$$

где $\bar{x}_1(t_{k-1})$ и $\bar{x}_2(t_{k-1})$, $k = \overline{1, K}$, – значения первой и второй фазовой координаты в момент времени $t = t_{k-1}$, которые либо совпадают со значениями $\tilde{x}_1(t_{k-1})$ и $\tilde{x}_2(t_{k-1})$ соответственно в случае наблюдения за обеими фазовыми переменными, либо вычислены путем решения предыдущей $(k-1)$ -й задачи.

Определим необходимые условия оптимальности для каждой из задач (4.28) – (4.30). В связи с этим по аналогии к методике решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств, введем в рассмотрение симплекс

$$\bar{\Lambda} = \left\{ \lambda = \left(\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t) \right) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) = 1 \text{ п. в. для } t \in [0; T]; \right. \\ \left. 0 \leq \lambda_i(t) \leq 1, i = \overline{1, N}, \text{ для } t \in [0; T] \right\},$$

и рассмотрим следующую задачу:

$$I_k(x(\cdot), \hat{\lambda}(\cdot)) \rightarrow \min, \hat{\lambda}(\cdot) \in \bar{\Lambda}, k = \overline{1, K}, \quad (4.31)$$

с учетом условий (4.29), (4.30). Правомерность перехода от задачи (4.28) – (4.30) к задаче (4.29) – (4.31) будет обоснована ниже.

Пусть $((x_1, x_2), \hat{\lambda})$ – допустимый управляемый процесс в задаче (4.28) – (4.30). Очевидно, этот процесс будет также допустимым для задачи (4.29) – (4.31). Выберем приращение $\Delta \hat{\lambda}(\cdot)$ функции управления таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\hat{\lambda}(t) + \Delta \hat{\lambda}(t) \in \bar{\Lambda}, \sum_{i=1}^N (\hat{\lambda}_i(t) + \Delta \hat{\lambda}_i(t)) = 1 \quad \forall t \in [0, T].$$

Это означает, что $\Delta \hat{\lambda} \in \hat{\Lambda}_\Delta$, причем

$$\hat{\Lambda}_\Delta = \left\{ \lambda = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) = 0; -1 \leq \lambda_i(t) \leq 1, i = \overline{1, N}; \forall t \in [0; T] \right\}.$$

Приращение $\Delta \hat{\lambda}(\cdot)$ в свою очередь вызывает приращения фазовых переменных $\Delta x_1, \Delta x_2$, которые удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2, \\ \Delta \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^N (a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + f_i(t; b^i)) \Delta \hat{\lambda}_i + \sum_{i=1}^N (a_1^i \Delta x_1 + a_2^i \Delta x_2) \hat{\lambda}_i. \end{cases} \quad (4.32)$$

Начальные условия для приращений $\Delta x_1, \Delta x_2$ записываются таким образом:

$$\Delta x_1(t_{k-1}) = 0, \Delta x_2(t_{k-1}) = 0. \quad (4.33)$$

Линеаризованный функционал задачи (4.29) – (4.31) имеет следующий вид:

$$I_k(x + \Delta x, \hat{\lambda} + \Delta \hat{\lambda}) = I_k(x, \hat{\lambda}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} p_2 \sum_{i=1}^N (a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + f_i(t; b^i)) \Delta \hat{\lambda}_i dt,$$

где вектор $p(t) = (p_1(t), p_2(t))$, соответствует таким условиям:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -p_2 \sum_{i=1}^n a_1^i \hat{\lambda}_i, \\ \dot{p}_2 = -p_1 - p_2 \sum_{i=1}^n a_2^i \hat{\lambda}_i; \end{cases} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} p_1(t_k) &= -2\gamma_1 \left(\gamma_1 x_1(t_k; \hat{\lambda}) + \gamma_2 x_2(t_k; \hat{\lambda}) - \tilde{z}(t_k) \right); \\ p_2(t_k) &= -2\gamma_2 \left(\gamma_1 x_1(t_k; \hat{\lambda}) + \gamma_2 x_2(t_k; \hat{\lambda}) - \tilde{z}(t_k) \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Оптимальность допустимого процесса в задаче (4.29) – (4.31) возможна, если для всех допустимых приращений $\Delta \hat{\lambda} \in \hat{\Lambda}_\Delta$ выполняется такое неравенство:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} p_2 \sum_{i=1}^N (a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + f_i(t; b^i)) \Delta \hat{\lambda}_i(t) dt \geq 0, \quad (4.36)$$

здесь переменные x_1, x_2 удовлетворяют условиям задачи Коши (4.29), (4.30), если $\lambda(\cdot) = \hat{\lambda}(\cdot)$; а $p_2(\cdot)$ – условиям задачи (4.34), (4.35) при соответствующих значениях функций $((x_1, x_2), \hat{\lambda})$.

Пусть $((x_1, x_2), \hat{\lambda})$ – произвольный допустимый процесс в задаче (4.28) – (4.30) является допустимым также для задачи (4.29) – (4.31). Пользуясь условием (4.36), построим направление спуска в этой точке $((x_1, x_2), \hat{\lambda})$, если оно существует. Для этого рассмотрим следующую задачу:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} p_2 \sum_{i=1}^N (a_1^i x_1(t) + a_2^i x_2(t) + f_i(t; b^i)) \Delta \hat{\lambda}_i(t) dt \geq 0, \rightarrow \min_{\Delta \hat{\lambda} \in \hat{\Lambda}_\Delta}, \quad (4.37)$$

где функция $p_2(\cdot)$ удовлетворяет условиям задачи (4.34), (4.35) при соответствующих значениях функций $((x_1, x_2), \hat{\lambda})$. Минимальное значение интеграла в задаче (4.37) достигается в точке $\Delta \hat{\lambda}_*(\cdot)$, где почти всюду для параметра $t \in [t_{k-1}, t_k]$ выполняется такое равенство:

$$\begin{aligned} p_2(t) \sum_{i=1}^N (a_1^i x_1(t) + a_2^i x_2(t) + f_i(t; b^i)) \Delta \hat{\lambda}_{*i}(t) = \\ = \min_{\Delta \hat{\lambda}(t) \in \Lambda_{\hat{\lambda}}} p_2(t) \sum_{i=1}^N (a_1^i x_1(t) + a_2^i x_2(t) + f_i(t; b^i)) \Delta \hat{\lambda}_i(t), \end{aligned}$$

где

$$\Lambda_{\hat{\lambda}} = \left\{ \Delta\lambda = (\Delta\lambda_1, \dots, \Delta\lambda_N) : \sum_{i=1}^N \Delta\lambda_i = 0; 0 \leq \hat{\lambda}_i + \Delta\lambda_i \leq 1, i = \overline{1, N} \right\}.$$

Очевидно, допустимое приращение $\Delta\hat{\lambda}_i$ координаты $\hat{\lambda}_i$ должно отвечать следующим условиям:

$$\text{если } \hat{\lambda}_i = 1, \text{ то } \Delta\hat{\lambda}_i \in [-1, 0]; \text{ если } \hat{\lambda}_i = 0, \text{ то } \Delta\hat{\lambda}_i \in [0, 1]; \sum_{i=1}^N \Delta\hat{\lambda}_i = 0.$$

Фактически, почти в каждый момент времени $t \in [t_{k-1}, t_k]$ приходится решать такую задачу линейного программирования:

$$p_2(t) \sum_{i=1}^N \varphi_i(x, t) \Delta\hat{\lambda}_{*i}(t) = \min_{\Delta\hat{\lambda}(t) \in \Lambda_{\hat{\lambda}}} p_2(t) \sum_{i=1}^N \varphi_i(x, t) \Delta\hat{\lambda}_i(t). \quad (4.38)$$

Напомним, что если в задаче (4.29) – (4.31) вектор-функция $\hat{\lambda}(\cdot)$ оптимальна, то почти всюду для параметра $t \in [t_{k-1}, t_k]$ выполняется такое условие:

$$p_2(t) \sum_{i=1}^N \varphi_i(x, t) \Delta\hat{\lambda}_i(t) \geq 0 \quad \forall \Delta\hat{\lambda} \in \Lambda_{\hat{\lambda}}.$$

Зафиксируем произвольный момент времени $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Пусть в векторе $\hat{\lambda}(t)$ компоненты $\lambda_m(t) = 1, \lambda_i(t) = 0, i = \overline{1, N}, i \neq m$. Далее момент времени t и знак « $\hat{\lambda}$ » будем опускать. Рассмотрим следующую задачу:

$$p_2\varphi_1\Delta\lambda_1 + p_2\varphi_2\Delta\lambda_2 + \dots + p_2\varphi_N\Delta\lambda_N \rightarrow \min \quad (4.39)$$

при выполнении таких условий:

$$\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2 + \dots + \Delta\lambda_N = 0, \quad (4.40)$$

$$\Delta\lambda_m \in [-1, 0], \Delta\lambda_i \in [0, 1], i = \overline{1, N}, i \neq m. \quad (4.41)$$

Введем следующее обозначение: $\Delta\bar{\lambda}_m = -\Delta\lambda_m, \Delta\bar{\lambda}_m \in [0, 1]$ и, учитывая условие (4.40), исключим переменную

$$\Delta\bar{\lambda}_m = \Delta\lambda_1 + \dots + \Delta\lambda_{m-1} + \Delta\lambda_{m+1} + \dots + \Delta\lambda_N, \quad (4.42)$$

из целевой функции. Тогда задача (4.39) – (4.41) запишется в следующем виде:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^N (p_2\varphi_i - p_2\varphi_m) \Delta\lambda_i \rightarrow \min_{\substack{0 \leq \Delta\lambda_i \leq 1, \\ i=1, N}} \quad (4.43)$$

при наличии условий (4.42).

Если для всех значений $i = \overline{1, N}, i \neq m$, и почти всех значений $t \in [t_{k-1}, t_k]$ выполняется такое неравенство: $p_2 \varphi_i - p_2 \varphi_m \geq 0$, то минимальное значение целевой функции в задаче (4.43) достигается, если $\Delta \lambda_i = 0, i = \overline{1, N}, i \neq m$, и можно сделать вывод об оптимальности вектора $\hat{\lambda}(t)$ в задаче (4.29) – (4.31) ввиду произвольности выбора момента времени $t \in [t_{k-1}, t_k]$.

Если же при некотором значении момента времени $t \in [t_{k-1}, t_k]$ существуют такие значения индексов k , что выполняется неравенство $p_2 \varphi_k - p_2 \varphi_m < 0$, то целевая функция в (4.43) может быть уменьшена за счет увеличения соответствующих переменных $\Delta \lambda_k$. С учетом того, что базис опорного решения задачи (4.43), (4.42) содержит только один вектор условий, имеем возможность в векторе $\Delta \lambda$ увеличить до единицы лишь одну переменную. Пусть

$$p_2(\varphi_s - \varphi_m) = \min_{k: p_2(\varphi_k - \varphi_m) < 0} p_2(\varphi_k - \varphi_m).$$

Тогда оптимальным решением задачи (4.43) будет вектор $\Delta \lambda_{*s}(t) = 1; \Delta \lambda_{*m}(t) = -1, \Delta \lambda_{*i}(t) = 0, i = \overline{1, N}, i \neq s, m$. Соответственно, в задаче (4.29) – (4.31) можно осуществить переход от вектор-функции $\hat{\lambda}(\cdot)$ к другой допустимой вектор-функции $\lambda_*(\cdot)$, в которой $\lambda_{*s}(t) = 1, \lambda_{*i}(t) = 0, i = \overline{1, N}, i \neq s$ и которая обеспечивает релаксационный характер процесса поиска решения этой задачи. Здесь точка $\lambda_*(\cdot)$ является крайней в симплексе $\bar{\Lambda}$, и $\hat{\Lambda} \subset \bar{\Lambda}$, поэтому можно утверждать, что найденное таким образом решение задачи (4.29) – (4.31) будет оптимальным и для задачи (4.28) – (4.30).

Принимая во внимание приведенные выше соображения, представим итерационный алгоритм, с помощью которого можно решить набор задач (4.22) – (4.24).

Алгоритм 4.2

Инициализация. Пусть $k = 1$ (решается первая задача), $\tau_i = (a_1^i, a_2^i, b^i), i = \overline{1, N}, \varepsilon > 0; h$ – шаг численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (4.29), (4.30).

1. Задаем номер итерации $q := 0$.

Если $k = 1$, то выбираем такие начальные условия: $x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}$. Если же $k > 1$, то в качестве начальных

условий для фазовых переменных $x_1(t_{k-1}), x_2(t_{k-1})$ выбираются значения этих переменных в момент времени t_{k-1} , полученные после решения предыдущей задачи. Задаем также начальное приближение значений характеристических функций: $\lambda_i^{(0)}(t) \forall t \in [t_{k-1}, t_k]$.

Пусть в результате проведения q итераций получены значения переменных $\lambda_i^{(q)}(t), i = \overline{1, N}$. Опишем q -ю итерацию.

2. В каждой точке t сетки временного интервала $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ вычисляем значения функций $x_1^{(q)}(t), x_2^{(q)}(t)$, решая слева направо при помощи метода Рунге – Кутта задачу Коши (4.29), (4.30), когда $\lambda = \lambda^q$. Определяем значения функций $p_1(t), p_2(t)$, решая справа налево при помощи метода Рунге – Кутта задачу Коши (4.34), (4.35), если $\lambda = \lambda^q, x = x^q$.

3. Проверяем выполнение условий стационарности процесса $\forall t \in [t_{k-1}, t_k]$, то есть

$$p_2\varphi_i - p_2\varphi_m \geq 0 \quad \forall i \neq m, \quad (4.44)$$

где m – номер единичной компоненты вектора λ .

Если при некотором значении $\bar{t} \in [t_{k-1}, t_k]$ существует хотя бы один такой индекс i , для которого имеет место следующее неравенство: $p_2\varphi_i - p_2\varphi_m < 0$, то среди значений индексов выбираем индекс l соответствующий наименьшему отрицательному значению указанной разности, и полагаем, что $\lambda_l(\bar{t}) = 1, \lambda_m(\bar{t}) = 0$. Далее переходим к выполнению шага 4.

Если для любого момента времени $t \in [t_{k-1}, t_k]$ текущее значение вектор-функции $\lambda(t)$ обеспечивает выполнение условия стационарности процесса (4.44), то вектор-функция $\lambda(t)$ будет оптимальной (условно стационарной) на отрезке $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Переходим к выполнению шага 5.

4. $q := q + 1$. Переходим к шагу 2.

5. $k := k + 1$.

Если $k \leq K$, то переходим к шагу 1, в другом случае – к шагу 6.

6. Восстанавливаем оптимальное разбиение множества Ω по известным значениям характеристических функций $\lambda_i(t), i = \overline{1, N}$, и

значениям первой фазовой координаты системы в соответствующие моменты времени. Вычисляем значение целевого функционала задачи (4.22) – (4.24).

Алгоритм завершен.

Анализ результатов вычислительных экспериментов.

Представим результаты расчетов, выполненных при решении некоторых тестовых обратных задач. Для получения исходных данных с помощью метода Рунге – Кутта 4-го порядка решали прямую задачу Коши (4.3) – (4.4) с известными границами между зонами функционирования системы. Далее, задав количество точек измерения K , и, выбирая из полученного численного решения задачи значение фазовых переменных (наблюдаемые величины) в этих K точках, формировали последовательность обратных задач (4.28) – (4.30).

Реконструкцию вида разрывных по фазовой переменной правых частей дифференциальных уравнений проводилась применительно к динамическим системам с разным количеством зон функционирования. Так, на рис. 4.8, а изображены фазовые траектории системы (4.3) (смоделированной и восстановленной), где переключение правой части дифференциального уравнения в системе (4.3) с функции $\varphi_1 = 10x_1 - 0,2x_2 + 3t$, на функцию $\varphi_2 = -2x_1 - 2x_2 + 0,1t$, а далее на $\varphi_3 = 1x_1 - 2x_2 - t$, происходят в таких точках: $x_1 = \sigma_1 = 10$, $x_1 = \sigma_2 = 15$ соответственно с учетом следующих начальных условий: $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = -3$, $T = 1$. Используя информацию о значении первой фазовой координаты в $K = 20$ моментах времени получены такие восстановленные границы между зонами функционирования: $\sigma_1 = 10,453$, $\sigma_2 = 14,902$. Здесь и далее шаг интегрирования системы (4.3) $h = 0,01$. На рисунке 4.8, б представлены фазовые траектории системы, имеющей четыре зоны функционирования, границы между которыми определяются следующими значениями первой фазовой переменной: $\sigma_1 = -2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 5$. Исходные данные задачи таковы:

$$\varphi_1 = -0,5x_2 + 0,1t, \quad \varphi_2 = 0,6x_1 - 0,2x_2 + 0,3t, \quad \varphi_3 = -0,29x_1 + 0,4x_2 + 0,8t, \\ \varphi_4 = 0,4x_1 - 0,2x_2 + 0,19t, \quad x_1(0) = -4; \quad x_2(0) = 1; \quad T = 8, \quad K = 100.$$

Интересным оказался случай восстановления системы (4.3) с двумя зонами функционирования, которым соответствуют такие функции правой части: $\varphi_1 = 0,7t$; $\varphi_2 = -0,6t$, граница между которыми $x_1 = 0$. За рассматриваемый промежуток времени переключение функций происходило несколько раз.

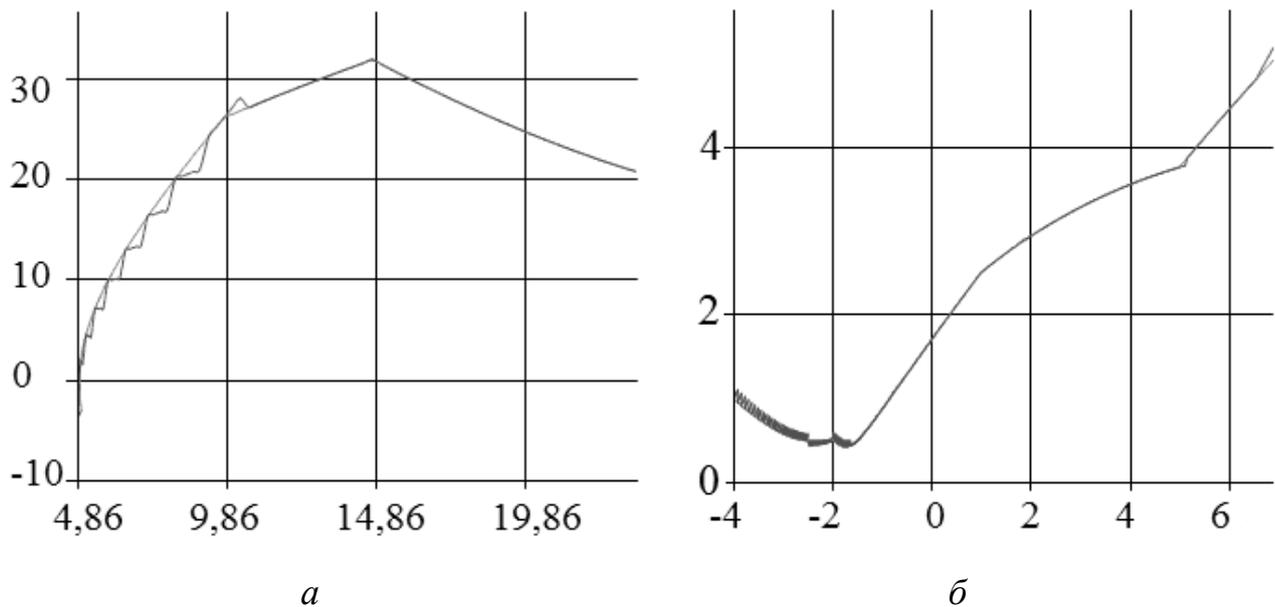


Рис. 4.8. Фазовые траектории динамических систем, реконструированных при помощи итерационного алгоритма

На рис. 4.9 изображены фазовые траектории этой же двузонной динамической системы, причем на рис. 4.9, а результат получен при таких начальных условиях: $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 0$; $T = 8$; $K = 50$. Здесь были восстановлены все четыре точки переключения. При этом получены следующие значения искомой границы между зонами функционирования системы: $\sigma_1 = -0,023$; $\sigma_2 = -0,229$; $\sigma_3 = -0,102$; $\sigma_4 = -0,004$. На рис. 4.9, б построены фазовые траектории системы, соответствующие таким начальным условиям: $x_1(0) = -2$; $x_2(0) = 0$; $T = 10$; $K = 100$.

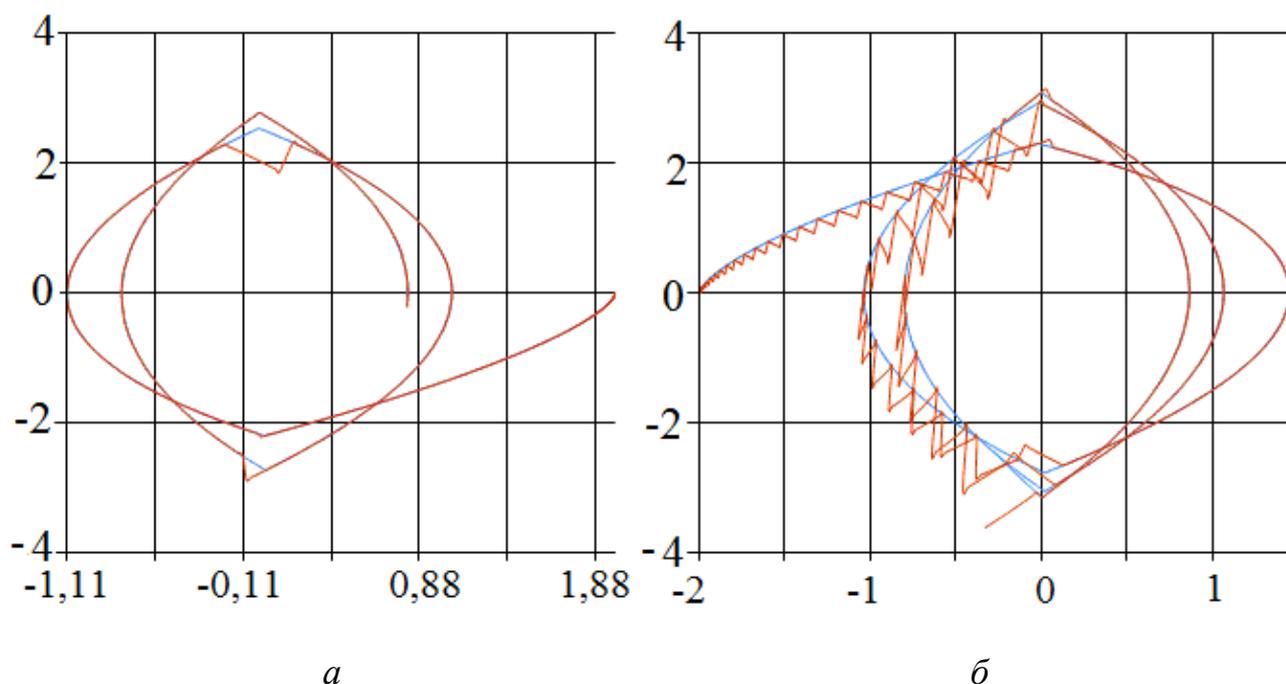


Рис. 4.9. Фазовые траектории двузонной динамической системы

Пятикратное переключение правой части системы в результате решения обратной задачи было выполнено с учетом таких значений первой фазовой координаты: $\sigma_1 = -0,173$; $\sigma_2 = 0,06$; $\sigma_3 = 0,143$; $\sigma_4 = -0,118$; $\sigma_5 = 0,097$.

Рассмотрение других примеров решения задач восстановления границ между зонами функционирования динамических систем типа (4.3) свидетельствует о том, что качество реконструкции каждой из них зависит от ряда условий, в частности от количества точек наблюдений, параметров $\tau_i = (a_1^i, a_2^i, b^i)$, $i = \overline{1, N}$, которые определяют функцию в правой части дифференциального уравнения, от величины временного интервала \bar{T} , соотношения коэффициентов γ_1, γ_2 , а также от шага интегрирования системы (4.3).

Представленный алгоритм нетрудно применить в случае, когда набор параметров $\tau_i = (a_1^i, a_2^i, b^i)$, $i = \overline{1, N}$, является нефиксированным.

Таким образом, для решения задачи идентификации динамической системы, которая описывается системой дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, предложены три подхода. Первый основан на численном дифференцировании наблюдаемого временного ряда и на восстановлении старшей производной в классе кусочно-непрерывных

функций. Второй сводит задачу идентификации к решению задачи минимизации среднеквадратического отклонения восстанавливаемых фазовых переменных от соответствующих значений экспериментальных данных. Третий базируется на представлении задачи идентификации в виде совокупности задач оптимального управления и применении к ним необходимых условий оптимальности. Все три подхода предусматривают формулировку задачи идентификации с использованием терминологии теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств с применением методов ОРМ для их решения. Если в задаче идентификации многозонной модели динамического процесса определению подлежат не только границы между зонами функционирования объекта, но еще и некоторые параметры, то ключевой частью метода решения сформулированных при этом задач выступает r -алгоритм Шора, реализующий минимизацию недифференцируемой многомерной функции.

4.2. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, СВОДЯЩИЕСЯ К НЕПРЕРЫВНЫМ ЗАДАЧАМ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Как известно, одним из подходов к решению задач идентификации динамических систем является их сведение к задачам оптимального управления и применение к решению последних, например, принципа максимума Понтрягина или методов динамического программирования [10, 18, 19]. При формулировке задач оптимального управления сложными процессами и явлениями иногда трудно адекватно ввести параметры управления и определить удовлетворительную меру качества в достижении комплекса разнообразных целей.

В настоящее время к весьма актуальным направлениям научных исследований принадлежит разработка специализированных методов решения обратных задач, формулируемых для дифференциальных уравнений, которые содержат переключаемую правую часть, создание их алгоритмического и программного обеспечения.

В данном разделе рассмотрены задачи стартового управления линейной пространственно-двумерной системой с квадратичным и недифференцируемым критериями качества как задачи восстановления разрывной функции начальных условий для параболической системы [65, 66, 68]. Эти задачи характеризуется тем, что с помощью аппарата функций Грина они могут быть сведены к нелинейным непрерывным задачам оптимального разбиения. Для их решения авторами был разработан и теоретически обоснован алгоритм. Его приспособили и к задачам параметрической идентификации кусочно-непрерывной функции правой части дифференциального уравнения. При этом была оценена погрешность, возникающая вследствие приближенного вычисления функции Грина.

4.2.1. Постановка задачи восстановления разрывных функций начальных условий для параболического уравнения

Пусть на некотором ограниченном измеримом по Лебегу множестве $\Omega \subset R^2$, имеющем кусочно-гладкую границу $\partial\Omega$, задан набор функций $\varphi_{0i}(x) \in L_2(\Omega)$, $i = \overline{1, N}$; $P_N(\Omega)$ – класс всех возможных разбиений множества Ω на N подмножеств.

Состояние управляемого объекта описывается функцией $\varphi(x, t) \in W_2^{1,0}(\Omega \times [0, T])$, удовлетворяющей такой краевой задаче:

$$\partial\varphi/\partial t = \Delta\varphi + f(x, t); \quad (4.45)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x; \bar{\omega}) = \varphi_{0i}(x) \quad \forall x \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad \bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in \hat{P}_N(\Omega); \quad (4.46)$$

$$\hat{P}_N(\Omega) = \left\{ \bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega) : \int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x) dx \leq b_i; \quad i = \overline{1, N} \right\}; \quad (4.47)$$

$$\varphi(x, t) = g(x, t) \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \quad (4.48)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа; b_1, b_2, \dots, b_N – заданные числа;

$g(x, t) \in L_2(\partial\Omega \times [0, T])$, $f(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ – заданные функции.

Каждое допустимое разбиение множества $\bar{\omega} \in P_N(\Omega)$ определяет начальную функцию $\varphi_0(\cdot, \bar{\omega})$ таким образом, что соответствующая ей

краевая задача (4.45) – (4.48) имеет единственное обобщенное решение $\varphi(x, t) \in W_2^{1,0}(\Omega \times [0, T])$, где $W_2^{1,0}(\Omega \times [0, T])$ – пространство Соболева [22]. Условимся решение краевой задачи (4.45) – (4.48), соответствующее функции $\varphi_0(x; \bar{\omega})$, $\bar{\omega} \in \hat{P}_N(\Omega)$, обозначать через $\varphi(x, t; \varphi_0(x, \bar{\omega}))$.

Требуется определить такое разбиение $\bar{\omega}^* \in \hat{P}_N(\Omega)$, для которого функция $\varphi_0(\cdot; \bar{\omega}^*)$ доставляла бы минимальное значение функционалу, то есть

$$V(\varphi_0(\cdot; \bar{\omega})) = \int_{\Omega} [\varphi(x, T) - Z(x)]^2 dx, \quad (4.49)$$

где $Z(\cdot) \in L_2(\Omega)$ – заданная функция, $T > 0$ – фиксированный момент времени.

Таким образом, в сформулированной задаче восстановлению подлежит функция начальных условий $\varphi_0(x, \bar{\omega})$, о которой известно, что она может совпадать с одной из заданных функций $\varphi_{0i}(x) \in L_2(\Omega)$, $i = \overline{1, N}$ на некотором подмножестве множества Ω .

Замечание 1. В научной литературе [78] отмечено, что функция $\varphi(x, t)$, рассматриваемая как отображение отрезка $[0, T]$ в пространство $L_2(\Omega)$, является непрерывной по переменной t в том смысле, что функция $\zeta(x) = \|\varphi(x, t)\|_{L_2(\Omega)}$ непрерывна, когда $t \in [0, T]$, следовательно, интеграл в функционале (4.49) существует.

Замечание 2. Интегральные ограничения в уравнении (4.47) могут быть заданы более обобщенно, например,

$$\int_{\Omega_i} \xi(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.50)$$

где $\xi(\cdot)$ – некоторая заданная функция пространства $L_2(\Omega)$.

Эти ограничения, например, могут означать то, что функция $\varphi_{0i}(x)$ определяет начальные условия в уравнении (4.46) лишь на некотором участке множества Ω .

Сформулированная задача отличается, во-первых, тем, что начальное состояние управляемого процесса определяется через разбиение $\bar{\omega}$ множества Ω ; во-вторых, здесь имеют место

ограничения типа (4.47), которые содержат неизвестный параметр в пределах интегрирования.

Замечание 3. Условия существования оптимальных границ между подмножествами и их свойства в работе не исследуются. Некоторые сведения, касающиеся этих вопросов, содержатся в литературе [122].

Замечание 4. Задачи, описываемые математическими моделями, подобными задаче (4.45) – (4.49), находят применение во многих областях науки и техники, таких как металлургия, энергетика, геология, почвоведение, экология, пищевая промышленность и т. д. Так, при потребности управлять процессами диффузии функция $\varphi(x, t)$ представляет собой концентрацию некоторого вещества; а процессы фильтрации жидкости в пористых средах описываются скалярной функцией напора; если же имеем дело с распространением тепла, то функция $\varphi(x, t)$ фиксирует температуру в любой точке заданного пространства и в каждый момент времени.

4.2.2. Сведение задачи управления к непрерывной задаче оптимального разбиения и определение ее разрешимости

Решение краевой задачи (4.45) – (4.49), соответствующее каждому допустимому разбиению $\bar{\omega} \in \hat{P}_N(\Omega)$, запишем в таком виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x, T, \varphi_0(x, \bar{\omega})) = & \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_0(x'; \bar{\omega}) dx' + \int_0^T \int_{\Omega} G(x, x', T-t) f(x', t) dx' dt + \\ & + \int_0^T \int_{\partial \Omega} \frac{\partial G(x, x', T-t)}{\partial n} g(x', t) dx' dt, \end{aligned} \quad (4.51)$$

где $G(x, x', t)$ – функция Грина в задаче (4.45) – (4.48), n – нормаль к границе $\partial \Omega$.

Подставляя выражение (4.51) для функции $\varphi(x, t; \varphi_0(x, \bar{\omega}))$ в функционал (4.49) и учитывая тот факт, что набор подмножеств $\bar{\omega} = \{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}$ является элементом класса $P_N(\Omega)$, приходим к формулировке следующей задачи ОРМ: найти набор подмножеств $\bar{\omega}^* = \{\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_N^*\} \in \hat{P}_N(\Omega)$, на котором достигается минимальное значение такого функционала:

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x') G(x, x', T) dx' + \bar{Z}(x) \right]^2 dx, \quad (4.52)$$

где

$$\bar{Z}(x) = -Z(x) + \int_0^T \int_{\Omega} G(x, x', T - \theta) f(x', \theta) dx' d\theta + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial G(x, x', T - \theta)}{\partial n} g(x', \theta) dx' d\theta,$$

и выполняются следующие ограничения:

$$\int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x) dx \leq b_i, \quad i = 1, \overline{N}. \quad (4.53)$$

Утверждение 4.1. Если вектор правых частей неравенств в определении класса разбиений $\hat{P}_N(\Omega)$ удовлетворяет такому условию:

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq \int_{\Omega} \overline{\varphi_0}(x) dx, \quad (4.54)$$

где $\overline{\varphi_0}(x) = \max_{i=1, \overline{N}} \varphi_{0i}(x)$, то множество допустимых решений задачи (4.45) – (4.49) не пустое.

Доказательство. Сложив ограничения-неравенства, определяющие структуру класса разбиений $\hat{P}_N(\Omega)$, получим следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i. \quad (4.55)$$

Оценим левую часть соотношения (4.55), то есть

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \varphi_{0i}(x) dx \leq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \max_{i=1, \overline{N}} \varphi_{0i}(x) dx = \int_{\Omega} \overline{\varphi_0}(x) dx. \quad (4.56)$$

Сопоставляя выражения (4.55) и (4.56), приходим к выводу, что если для вектора $b = (b_1, b_2, \dots, b_N)$, выполняется условие (4.54), то всегда найдется разбиение $\bar{\omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}$, множества Ω из класса разбиений $\hat{P}_N(\Omega)$. В этом случае класс $\hat{P}_N(\Omega)$ не пустой.

Иначе может оказаться, что $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i \subset \Omega$, а это означает, что множество допустимых решений задачи (4.45) – (4.49) $\hat{P}_N(\Omega)$ пустое.

Замечание. В случае, если заданы ограничения на набор подмножеств $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}$ в обобщенном виде (4.50), то условие (4.54) запишется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq \int_{\Omega} \xi(x) dx.$$

Следуя алгоритму решения задачи ОРМ, от задачи минимизации функционала (4.52), (4.53) переходим к эквивалентной задаче бесконечномерного программирования, содержащей булевы переменные, а именно: найти вектор-функцию $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot))$, которая отвечает такому условию:

$$I(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') G(x, x', T) \lambda_i(x') dx' + \bar{Z}(x) \right\}^2 dx \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_1}, \quad (4.57)$$

где

$$\Lambda_1 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega; \lambda_i(x) = 0 \vee 1, \right. \\ \left. \text{для } x \in \Omega, i = \overline{1, N}; \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Наряду с задачей (4.57), будем рассматривать следующую:

$$I(\lambda(\cdot)) \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_2}; \quad (4.58)$$

$$\Lambda_2 = \left\{ \lambda(x) \in \Lambda_0; \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = \overline{1, N} \right\};$$

$$\Lambda_0 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega; \right. \\ \left. 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N \right\},$$

в предположении, что она разрешима, к тому же множество ее решений содержит все решения задачи (4.57). Условия, при которых это возможно, будут рассмотрены ниже.

Определение. Будем говорить, что задача (4.58) удовлетворяет *условию Слейтера*, если существует точка $\tilde{\lambda}(\cdot) \in \Lambda_0$, для которой

$$\int_{\Omega} \varphi_{0i}(x) \tilde{\lambda}_i(x) dx < b_i, i = \overline{1, N}.$$

Лемма 4.1. Если в задаче (4.45) – (4.49) константы b_1, \dots, b_N удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_{i=1}^N b_i > S = \int_{\Omega} \bar{\varphi}_0(x) dx,$$

где $\bar{\varphi}_0(x) = \max_{i=1, N} \varphi_{0i}(x)$, то для задачи (4.58) выполняется условие Слейтера.

Доказательство. Для каждого элемента $x \in \Omega$ рассмотрим вектор-функцию $\bar{\lambda}(x)$, i -я компонента которой определяется по такой формуле:

$$\bar{\lambda}_i(x) = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^N b_j}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Функция $\bar{\lambda}(x) \in \Lambda_0$, так как $0 \leq \bar{\lambda}_i(x) \leq 1$ для всех значений $i = \overline{1, N}$ и

$$\sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i(x) = \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{\sum_{j=1}^N b_j} = 1.$$

Пусть выполнено условие леммы, то есть $\sum_{i=1}^N b_i > \int_{\Omega} \bar{\varphi}_0(x) dx$. Тогда

$$\int_{\Omega} \varphi_{0i}(x) \bar{\lambda}_i(x) dx = \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x) \frac{b_i}{\sum_{j=1}^N b_j} dx \leq \frac{b_i}{\sum_{j=1}^N b_j} \int_{\Omega} \bar{\varphi}_0(x) dx < b_i, \quad i = \overline{1, N},$$

что и требовалось доказать.

4.2.3. Необходимые и достаточные условия оптимальности в редуцированной задаче разбиения множеств

Нетрудно показать, что функционал $I(\lambda(\cdot))$ является выпуклым относительно своего аргумента $\lambda(\cdot)$ на выпуклом замкнутом ограниченном множестве Λ_2 , следовательно, задача (4.58) является

задачей выпуклого программирования и для нее справедлива теорема Куна – Таккера [15, 96]. Согласно этой теореме решение задачи (4.58) сводится к поиску седловой точки следующего функционала Лагранжа:

$$h(\lambda(\cdot), \psi) = I(\lambda(\cdot)) + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' - b_i \right) =$$

$$= \int_{\Omega} \left\{ \left[\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \right]^2 + 2\bar{Z}(x) \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \right\} dx +$$

$$+ \int_{\Omega} \bar{Z}^2(x) dx + \sum_{i=1}^N \psi_i \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i,$$

где $\lambda(\cdot) \in \Lambda_0$; $\psi \in \Gamma = \{ \psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) : \psi_i \geq 0, i = \overline{1, N} \}$.

Задача, двойственная задаче (4.58), запишется в таком виде:

$$Q(\psi) \rightarrow \max_{\psi \in \Gamma}; \quad (4.59)$$

$$Q(\psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} h(\lambda(\cdot), \psi) = - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int_{\Omega} \bar{Z}^2(x) dx +$$

$$+ \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \right]^2 + \right.$$

$$\left. + 2\bar{Z}(x) \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \right\} dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \psi_i \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' \Big\}.$$

Для решения внутренней задачи

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} h(\lambda(\cdot), \psi) \quad (4.60)$$

воспользуемся критерием оптимальности, который определяет приведенная ниже теорема [96].

Теорема 4.1. Для того, чтобы функция $\lambda^0(x) \in \Lambda_0$ была решением задачи (4.58), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла такому условию

$$\min_{\lambda(x) \in \Lambda_0} \int_{\Omega} \left[H^{\lambda}(\lambda^0(x), \psi), \lambda(x) - \lambda^0(x) \right] dx = 0, \quad (4.61)$$

где $H^\lambda(\lambda(\cdot), \psi)$ – градиент функционала $h(\lambda(\cdot), \psi)$ по переменной $\lambda(\cdot)$, j -ая компонента которого $\forall \bar{x} \in \Omega$ вычисляется по такой формуле:

$$H_j^\lambda(\lambda(\bar{x})) = 2\varphi_{0j}(\bar{x}) \times \left\{ \int_{\Omega} \bar{Z}(x)G(x, \bar{x}, T)dx + \frac{1}{2}\psi_j + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} G(x, x', T)G(x, \bar{x}, T)dx \right) \varphi_{0i}(x')\lambda_i(x')dx' \right\}.$$

Далее, воспользовавшись условием оптимальности (4.61), получим операторное уравнение для определения оптимальной вектор-функции $\lambda^0(x')$, $x' \in \Omega$. Согласно теореме 4.1, если функция $\lambda^0(x) \in \Lambda_0$ – это решение задачи (4.58), то имеет место такое равенство:

$$\min_{\lambda(x) \in \Lambda_0} \int_{\Omega} \left(H^\lambda(\lambda^0(x), \psi), \lambda(x) - \lambda^0(x) \right) dx = 0.$$

Определение. Будем считать, что функционал $h(\lambda(\cdot), \psi)$ удовлетворяет **условию сильной регулярности**, если

$$H_j^\lambda(\lambda^0(x), \psi) \neq 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad x \in \Omega,$$

за исключением множества точек $x \in \Omega$ нулевой меры.

Это условие означает, что для оптимальной вектор-функции ни на одном множестве точек $x \in \Omega$ ненулевой меры не будет удовлетворено ни одно из уравнений Эйлера $H_j^\lambda(\lambda^0(x), \psi) = 0$, для задачи минимизации по переменной $\lambda(\cdot)$ функционала $h(\lambda(\cdot), \psi)$ без ограничений.

Запишем условие (4.61) в таком виде:

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N H_i^\lambda(\lambda^0(x), \psi) \lambda_i(x) \right) dx = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N H_i^\lambda(\lambda^0(x), \psi) \lambda_i^0(x) \right) dx.$$

Вектор-функция $\lambda^*(x)$, удовлетворяющая этому равенству, такова, что почти для всех точек $x \in \Omega$ справедливо следующее соотношение:

$$H_i^\lambda(\lambda^0(x), \psi) \lambda_i^*(x) = \min_{0 \leq z_i \leq 1} H_i^\lambda(\lambda^0(x), \psi) z_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad x \in \Omega.$$

Отсюда делаем вывод, что при выполнении такого условия:

$$\text{mes} \left\{ x \in \Omega : H_i^\lambda(\lambda(x), \psi) = H_j^\lambda(\lambda(x), \psi), \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N} \right\} = 0, \quad (4.62)$$

вектор-функция $\lambda^*(x)$ определяется $\forall x \in \Omega$ очевидным образом, как

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } H_i^\lambda(\lambda^*(x), \psi) = \min_{j=1, N} H_j^\lambda(\lambda^*(x), \psi), \\ \forall \alpha \in [0, 1], & \text{если } H_i^\lambda(\lambda^*(x), \psi) = 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При выполнении условия сильной регулярности компоненты вектора-градиента равны нулю [$H_i^\lambda(\lambda(\cdot), \psi) = 0$] лишь на множестве точек $x \in \Omega$ нулевой меры, следовательно, вектор-функция $\lambda^*(\cdot)$ определяется $\forall x \in \Omega$ единственным способом по такой формуле:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } H_i^\lambda(\lambda^0(x), \psi) = \min_{j=1, N} H_j^\lambda(\lambda^0(x), \psi), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.63)$$

В связи с этим справедливы приведенные ниже теоремы [96].

Теорема 4.2. Пусть для задачи (4.58) имеют место условие сильной регулярности и условие (4.62), тогда для того, чтобы было выполнено условие оптимальности (4.61), необходимо, чтобы $\lambda^0(x) = \lambda^*(x)$, где вектор-функция $\lambda^*(x)$ определяется по формуле (4.63), а равенство двух вектор-функций понимается в смысле равенства нулю нормы разности этих вектор-функций.

Теорема 4.3. Если условие оптимальности (4.61) является достаточным, а также выполнены условия сильной регулярности и условия (4.62), то вектор-функция $\lambda^0(x) = \lambda^*(x)$, будет оптимальной для задачи (4.58), причем $\lambda^*(x)$ определяется по формуле (4.63).

Таким образом, из сформулированных теорем следует, что решение задачи (4.58) оптимизации выпуклого функционала $h(\lambda(\cdot), \psi)$, удовлетворяющего условиям сильной регулярности и условию (4.62), может быть найдено из следующего операторного уравнения:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } H_i^\lambda(\lambda^*(x), \psi) = \min_{j=1, N} H_j^\lambda(\lambda^*(x), \psi), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad \text{для п. в. } x \in \Omega.$$

Подставим эту формулу в задачу (4.59). Полученный при этом функционал будем обозначать через $Q_1(\lambda^*(\cdot), \psi)$, теперь

$$\begin{aligned} Q_1(\lambda^*(\cdot), \psi) &= Q(\psi) + \int \min_{j=1, N} H_j^\lambda(\lambda^*(x), \psi) dx - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} H_i^\lambda(\lambda^*(x), \psi) \lambda_i^*(x) dx = \\ &= \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right]^2 + \\ &+ 2\bar{Z}(x) \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \Big\} dx + \sum_{i=1}^N \psi_i \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ &+ \int_{\Omega} \bar{Z}^2(x) dx + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2\varphi_{0j}(x'') \left\{ \int_{\Omega} \bar{Z}(x) G(x, x'', T) dx + \frac{1}{2} \psi_j + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} G(x, x', T) G(x, x'', T) dx \right) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right\} \right\} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} 2\varphi_{0i}(x'') \left\{ \int_{\Omega} \bar{Z}(x) G(x, x'', T) dx + \frac{1}{2} \psi_i + \right. \\ &\left. \left. + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} G(x, x', T) G(x, x'', T) dx \right) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right\} \lambda_i^*(x'') dx'' = \\ &= - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i - \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right]^2 dx + \int_{\Omega} \bar{Z}^2(x) dx + \\ &\quad + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ \varphi_{0j}(x'') \left[\psi_j + 2 \int_{\Omega} \bar{Z}(x) G(x, x'', T) dx + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} G(x, x', T) G(x, x'', T) dx \right) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' \right] \right\} dx''. \end{aligned}$$

Введем такое обозначение:

$$Y(x) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx'. \quad (4.64)$$

Тогда

$$F_1(Y(\cdot), \psi) = Q_1(\lambda^*(\cdot), \psi) = - \int_{\Omega} Y^2(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \int_{\Omega} \bar{Z}^2(x) dx + \\ + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} (Y(x) + \bar{Z}(x)) G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') dx + \psi_j \varphi_{0j}(x') \right\} dx'.$$

Теорема 4.4. При любых фиксированных значениях аргументов $\psi \in \Gamma$, $\lambda(\cdot) \in \Lambda_0$, $Y(\cdot) \in L_2(\Omega)$ выполняется такое неравенство:

$$F_1(Y(\cdot), \psi) \leq I(\lambda(\cdot)), \quad (4.65)$$

причем на оптимальной паре $(\lambda^*(\cdot), \psi^*)$ достигается знак равенства, то есть

$$F_1(Y(\cdot), \psi^*) = I(\lambda^*(\cdot)).$$

Доказательство

Введем следующее обозначение:

$$\bar{Y}(x) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx'.$$

Рассмотрим такую разность:

$$F_1(Y(\cdot), \psi) - I(\lambda(\cdot)) = - \int_{\Omega} Y^2(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} Y(x) G(x, x'', T) dx + 2 \int_{\Omega} \bar{Z}(x) G(x, x'', T) dx + \psi_j \right\} \varphi_{0j}(x'') dx'' - \\ - \left\{ \int_{\Omega} \bar{Y}^2(x) dx + 2 \int_{\Omega} \bar{Z}(x) \bar{Y}(x) dx \right\} = - \int_{\Omega} (Y^2(x) + \bar{Y}^2(x)) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} [Y(x) + \bar{Z}(x)] G(x, x'', T) dx + \psi_j \right\} \varphi_{0j}(x'') \sum_{k=1}^N \lambda_k(x'') dx'' - \\ - \int_{\Omega} \int_{\Omega} 2 \bar{Z}(x) \sum_{i=1}^N G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' dx - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \psi_i \varphi_{0i}(x) \lambda_i(x) dx -$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{\Omega} Y(x) G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \psi_i \varphi_{0i}(x) \lambda_i(x) dx + \\
 & + 2 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{\Omega} Y(x) G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' dx.
 \end{aligned}$$

После некоторых преобразований можно получить такую оценку:

$$\begin{aligned}
 & F_1(Y(\cdot), \psi) - I(\lambda(\cdot)) = \\
 & = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left\{ \min_{j=1, N} \left\{ \left[2 \int_{\Omega} (Y(x) + \bar{Z}(x)) G(x, x', T) dx' + \psi_j \right] \varphi_{0j}(x') \right\} - \right. \\
 & \left. - \left\{ \left[2 \int_{\Omega} (Y(x) + \bar{Z}(x)) G(x, x', T) dx + \psi_i \right] \varphi_{0i}(x') \right\} \right\} \lambda_i(x') dx' + \\
 & + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \lambda_i(x') dx' - b_i \right) - \int_{\Omega} (Y(x) - \bar{Y}(x))^2 dx \leq 0.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$F_1(Y(\cdot), \psi) \leq I(\lambda(\cdot)).$$

Далее, пусть $\lambda(\cdot) = \lambda^*(\cdot)$; $\psi = \psi^*$, тогда $Y(\cdot) = \bar{Y}(\cdot)$, откуда делаем такие выводы:

$$1) \quad - \int_{\Omega} (Y(x) - \bar{Y}(x))^2 dx = 0.$$

2) В связи с тем, что вектор ψ^* является решением задачи (4.58),

$$\psi_i^* \left(\int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx' - b_i \right) = 0.$$

3) Справедлива формула (4.63).

Стало быть, на оптимальной паре $(\lambda^*(\cdot), \psi^*)$ в неравенстве (4.65) достигается знак равенства.

Из этой теоремы следует, что

$$F_1(Y(\cdot), \psi^*) = \max_{Y'(\cdot), \psi \in L_2(\Omega) \times \Gamma} F_1(Y'(\cdot), \psi).$$

При этом имеет место рассмотренная ниже теорема.

Теорема 4.5. Решение задачи (4.57) может быть найдено почти всюду для точек $x \in \Omega$ по следующей формуле:

$$\lambda_i^*(x') = \begin{cases} 1, & \text{если } \left[2 \int_{\Omega} (Y^*(x) + \bar{Z}(x)) G(x, x', T) dx + \psi_i^* \right] \varphi_{0i}(x') = \\ = \min_{j=1, N} \left\{ \left[2 \int_{\Omega} (Y^*(x) + \bar{Z}(x)) G(x, x', T) dx + \psi_j^* \right] \varphi_{0j}(x') \right\} & (4.66) \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

где $Y^*(\cdot), \psi^*$ – решение задачи максимизации функционала $F_1(Y(\cdot), \psi)$ на множестве $L_2(\Omega) \times \Gamma$.

Следующая теорема определяет условия, при которых задачи (4.57) и (4.58) эквивалентны.

Теорема 4.6. Пусть выполнено условие леммы 4.1. Тогда если для функционала Лагранжа $h(\lambda(\cdot), \psi)$ в задаче (4.58) выполняются условия сильной регулярности и условие (4.61), то множества оптимальных решений задач (4.57) и (4.58) совпадают.

Доказательство. Прежде всего, следует заметить, что задача (4.58) при условии выполнения леммы 4.1 разрешима, так как функционал $I(\lambda(\cdot))$ является непрерывным и выпуклым на ограниченном замкнутом выпуклом множестве Λ_2 . Множество Λ_2 содержит хотя бы одну крайнюю точку, а крайние точки симплекса, как уже отмечалось, являются характеристическими функциями некоторых подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, образующих разбиение множества Ω [59].

Пусть функционал $h(\lambda(\cdot), \psi)$ удовлетворяет условиям сильной регулярности и условию (4.62). Тогда согласно теоремам 4.1 – 4.3 решение $\lambda^*(\cdot)$ задачи (4.58) определяется как единственное согласно формуле (4.63). Функция $\lambda^*(\cdot)$, очевидно, представляет собой

крайнюю точку множества Λ_2 и кроме того, является допустимой точкой для задачи (4.57).

Пусть $\bar{\lambda}(\cdot)$ – некоторое решение задачи (4.57). Следовательно, справедливо неравенство: $I(\lambda^*(\cdot)) \geq I(\bar{\lambda}(\cdot))$. С другой стороны, поскольку вектор-функция $\lambda^*(\cdot)$ является решением задачи (4.58), а $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, то выполняется соотношение: $I(\lambda^*(\cdot)) \leq I(\bar{\lambda}(\cdot))$. Таким образом, $I(\lambda^*(\cdot)) = I(\bar{\lambda}(\cdot))$, и $\lambda^*(\cdot)$ – решение задачи (4.58). Стало быть, решения задач (4.57) и (4.58) совпадают.

4.2.4. Конечномерная аппроксимация задачи оптимального разбиения множеств и алгоритм ее решения

Сформулируем численный алгоритм решения задачи ОРМ (4.57), основанный на результатах теоремы 4.5. От задачи условной оптимизации с помощью введения в целевой функционал негладкой штрафной функции множества Γ перейдем к задаче безусловной оптимизации, то есть

$$P(Y(\cdot), \psi) = F_1(Y(\cdot), \psi) - \sum_{i=1}^N S \max(0, (-\psi_i)) \rightarrow \max_{(Y(\cdot), \psi) \in L_2(\Omega) \times E^N}, \quad (4.67)$$

где S – достаточно большое число.

Итак, мы сформулировали задачу бесконечномерного программирования без ограничений. Построим ее конечномерный аналог.

Рассмотрим сеточную область γ как множество точек пересечения семейства прямых

$$\left\{ x = lh_x; y = sh_y; t = rh_t; l = \overline{1, m}; s = \overline{1, m1}; r = \overline{1, m2} \right\},$$

покрывающих множество $\Omega \times [0, T]$.

Используя конечномерные аппроксимации интегралов, участвующих в выражении функционала (4.67), получаем следующую конечномерную задачу:

$$\begin{aligned} \bar{P}(Y, \psi) = & -\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m1} A_{jk} Y_{jk}^2 - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ & + \sum_{l=1}^m \sum_{s=1}^{m1} A_{ls} \min_{r=1, N} \left\{ 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m1} A_{jk} (Y_{jk} + I_1^{jk}) D_{ls}^{jk} + \psi_r \right\} \varphi_{0r}^{ls} + \sum_{i=1}^N \text{Smax}(0, (-\psi_i)). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Здесь A_{jk} – коэффициенты кубатурной формулы: $Y_{jk} = Y(x_j, y_k)$;

$$\varphi_{0r}^{ls} = \varphi_{0r}(x_l, y_s); \quad D_{ls}^{jk} = G((x_l, y_s), (x_j, y_k), T); \quad I_1^{jk} = \bar{Z}(x_j, y_k),$$

причем для вычисления величин D_{ls}^{jk} , I_1^{jk} функция Грина $G(x, x', T)$ заменяется суммой конечного числа L слагаемых.

Аналогично получаем конечномерную аппроксимацию формулы (4.63), а именно:

$$\lambda_i^*(x_l, y_s) = \begin{cases} 1, & \text{если} \left[2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m1} A_{jk} Y_{jk} D_{ls}^{jk} + \psi_i \right] \varphi_{0i}^{ls} = \\ & = \min_{r=1, N} \left[2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m1} A_{jk} (Y_{jk} + I_1^{jk}) D_{ls}^{jk} + \psi_r \right] \varphi_{0r}^{ls}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.69)$$

Задача максимизации функции (4.68) является конечномерной задачей математического программирования и заключается в отыскании $m \times m1$ -мерного вектора $Y = \{Y_{jk}\}$, и N -мерного вектора сопряженных переменных $\psi = \{\psi_i\}$, доставляющих максимальное значение целевой функции \bar{P} . При большом числе разбиений m и $m1$ решение этой задачи сопряжено с вычислительной сложностью.

Для решения задачи максимизации функции $\bar{P}(Y(\cdot), \psi)$ используется r -алгоритм Шора.

Таким образом, численный алгоритм решения задачи (4.57) с учетом изложенного принимает такой вид:

1. Область Ω покрываем прямоугольной $m \times m1$ сеткой и задаем начальное приближение функции $Y(\cdot)$ в узлах сетки $Y_{kj}^{(0)}$, $k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m1}$, и вектора двойственных переменных $\psi^{(0)} = (\psi_1^{(0)}, \dots, \psi_N^{(0)})$.

2. Определяем значение функции $\lambda_i^{(0)}(x)$, $i = \overline{1, N}$, в узлах сетки по формуле (4.69) при фиксированных значениях переменных $\psi^{(0)}$, $Y^{(0)}$.

3. Вычисляем значение градиента $g_P = (g_P^Y, g_P^\psi)$ функции \bar{P} в точке $(Y_{kj}^{(0)}, \psi_I^{(0)})$, $k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m1}$, $i = \overline{1, N}$, по таким формулам:

$$g_P^{\psi_i} = -b_i + \sum_{(l,s) \in W_i} A_{ls} \varphi_{0i}^{ls} - S \max(0, -\text{sign}(\psi_i)), \quad (4.70)$$

$$\text{где } W_i = \left\{ (l,s), l = \overline{1, m}, s = \overline{1, m1} : \min_{r=1, N} \left\{ 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m1} A_{jk} Y_{jk} D_{ls}^{jk} + \psi_r \right\} \varphi_{0r}^{ls} = \right. \\ \left. = \left\{ 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m1} A_{jk} (Y_{jk} + I_1^{jk}) D_{ls}^{jk} + \psi_i \right\} \varphi_{0i}^{ls} \right\};$$

$$g_P^{Y_{jk}} = 2 A_{jk} \left(-Y_{jk} + \sum_{l=1}^m \sum_{s=1}^{m1} D_{ls}^{jk} \varphi_{0i}^{ls} \right), \quad (4.71)$$

где i – номер индекса [для каждой пары (l, s) он свой], при котором достигается $\min_{r=1, N} \left\{ 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m1} A_{jk} (Y_{jk} + I_1^{jk}) D_{ls}^{jk} + \psi_r \right\} \varphi_{0r}^{ls}$.

4. Выбирая начальный шаг $h > 0$ r -алгоритма, получаем такие приближения векторов:

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} + h_0 g_P^\psi(Y^{(0)}, \psi^{(0)}), \quad Y^{(1)} = Y^{(0)} + h_0 g_P^Y(Y^{(0)}, \psi^{(0)}).$$

Далее переходим ко второму шагу.

Предположим, что в результате вычислений после k шагов получены определенные значения $\varphi^{(k)}$, $\lambda^{(k-1)}(x)$, $Y^{(k)}(x)$ в узлах сетки.

5. $(k+1)$ -й шаг:

а) вычисляем переменную $\lambda_i^{(k)}(x)$, $i = \overline{1, N}$, по формуле (4.69);

б) определяем значение градиента $g_P(Y^{(k)}, \psi^{(k)})$ по формулам (4.70), (4.71), если $Y = Y^{(k)}$; $\psi = \psi^{(k)}$;

в) выполняем $(k+1)$ -й шаг r -алгоритма для максимизации функции (4.69) относительно переменных $Y(\cdot)$, ψ и определяем следующее приближение векторов $\psi^{(k+1)}$, $Y^{(k+1)}$;

г) проверяем условие $\left| (Y^{(k)}, \psi^{(k)}) - (Y^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}) \right| \leq \varepsilon$, или $\|g_P(Y^{(k)}, \psi^{(k)})\| \leq \varepsilon$; если ни одно из них не выполняется, то переходим к $(k+2)$ -му шагу алгоритма, в противном случае – к пункту «д»);

д) полагаем, что $\lambda_*(\cdot) = \lambda^{(l)}(\cdot)$, $\psi^* = \psi^{(l)}$, $Y(\cdot) = Y^{(l)}(\cdot)$, где l – номер итерации, на которой выполняется хотя бы один из указанных выше критериев окончания итерационного процесса; далее вычисляем оптимальное значение конечномерной аппроксимации целевого функционала (4.57), а для контроля правильности результата – значение функционала (4.69), при том, что $\lambda(\cdot) = \lambda_*(\cdot)$, $\psi = \psi^*$, $Y(\cdot) = Y^*(\cdot)$.

4.2.5. Сходимость и оценка погрешности конечномерной аппроксимации задачи

Численная реализация алгоритма решения задачи (4.57), основанного на теореме 4.5, предполагает аппроксимацию такой задачи:

$$F_1(Y(\cdot), \psi) \rightarrow \max, \quad Y(\cdot) \in L_2(\Omega), \quad \psi \in \Gamma, \quad (4.72)$$

задачей следующего вида:

$$\tilde{F}_1^L(Y(\cdot), \psi) \rightarrow \max, \quad Y(\cdot) \in L_2(\Omega), \quad \psi \in \Gamma, \quad (4.73)$$

в которой целевая функция $\tilde{F}_L(Y, \psi)$ отличается от $F_1(Y, \psi)$ тем, что в ней функция Грина заменена суммой L конечного числа слагаемых.

Пусть $G(x, x', T)$ – точное, а $\tilde{G}_L(x, x', T)$ – приближенное значение функции Грина; $Y^*(\cdot)$ и $\tilde{Y}_L(\cdot)$ – точные решения задач (4.72) и (4.73) соответственно, а $\lambda^*(\cdot)$ и $\tilde{\lambda}^L(\cdot)$ – отвечающие им значения вектор-функции $\lambda(\cdot)$. Рассмотрим вопрос о сходимости последовательности характеристических функций $\{\tilde{\lambda}^L(\cdot)\}$ к функции $\lambda^*(\cdot)$ при условии, что $L \rightarrow \infty$ в случае, когда множество $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq q\}$.

Прежде всего, убедимся, что

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{Y}_L(x) = Y^*(x). \quad (4.74)$$

С этой целью сформулируем и докажем леммы.

Лемма 4.2. Функционалы задач (4.73) при условии, что $L \rightarrow \infty$, сходятся к функционалу задачи (4.72) равномерно по всем элементам $Y(\cdot) \in L_2(\Omega)$.

Доказательство. Рассмотрим такую разность:

$$\begin{aligned} & F_1(Y, \Psi) - \tilde{F}_L(Y, \Psi) = \\ & = \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} (Y(x) + \bar{Z}(x)) G(x, x', T) \varphi_{0j}(x') dx + \psi_j \varphi_{0j}(x') \right\} dx' - \\ & - \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x)) \tilde{G}_L(x, x', T) \varphi_{0j}(x') dx + \psi_j \varphi_{0j}(x') \right\} dx'. \end{aligned}$$

Используя оценки, полученные в работе [65], можно выполнить такие преобразования:

$$\begin{aligned} & F_1(Y, \Psi) - \tilde{F}_L(Y, \Psi) = \\ & = \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x) + O(1/L^2)) (\tilde{G}_L(x, x', T) + O(e^{-L^2})) \varphi_{0j}(x') dx + \psi_j \varphi_{0j}(x') \right\} dx' - \\ & - \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x)) \tilde{G}_L(x, x', T) \varphi_{0j}(x') dx + \psi_j \varphi_{0j}(x') \right\} dx'. \end{aligned}$$

Предположим, что для каждого фиксированного элемента $x' \in \Omega$ и для каждого значения $L = 1, 2, \dots$,

$$\min_{j=1, N} \left\{ \left(2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x)) \tilde{G}_L(x, x', T) dx + \psi_j \right) \varphi_{0j}(x') \right\}$$

достигается, если $j = k$, а

$$\min_{j=1, N} \left\{ \left(2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x) + O(1/L^2)) (\tilde{G}_L(x, x', T) + O(e^{-L^2})) dx + \psi_j \right) \varphi_{0j}(x') \right\}$$

достигается, когда $j = l$.

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \left(2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x) + O(1/L^2)) (\tilde{G}_L(x, x', T) + O(e^{-L^2})) dx + \psi_l \right) \Phi_{0l}(x') \leq \\ & \leq \left(2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x) + O(1/L^2)) (\tilde{G}_L(x, x', T) + O(e^{-L^2})) dx + \psi_k \right) \Phi_{0k}(x') \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \left(2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x)) \tilde{G}_L(x, x', T) dx + \psi_l \right) \Phi_{0l}(x') - \\ & - \left(2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x)) \tilde{G}_L(x, x', T) dx + \psi_k \right) \Phi_{0k}(x') \leq \\ & \leq 2 [\Phi_{0k}(x') - \Phi_{0l}(x')] \int_{\Omega} (O(1/L^2) \tilde{G}_L(x, x', T) + O(e^{-L^2})) (Y(x) + \tilde{Z}(x)) dx. \end{aligned}$$

Поскольку интеграл в правой части последнего неравенства является величиной порядка $O(1/L^2)$, то найдется такое число L' , что для всех значений $L > L'$, разность

$$\begin{aligned} W = & \left(2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x)) \tilde{G}_L(x, x', T) dx + \psi_l \right) \Phi_{0l}(x') - \\ & - \left(2 \int_{\Omega} (Y(x) + \tilde{Z}(x)) \tilde{G}_L(x, x', T) dx + \psi_k \right) \Phi_{0k}(x'), \end{aligned}$$

будет меньше сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, стало быть, $k = l$ и в связи с произвольностью выбора точки $x' \in \Omega$, можно заключить, что

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{F}_L(Y, \psi) = F_1(Y, \psi). \quad (4.75)$$

Лемма 4.3. Функционалы $F_1(Y, \psi)$ и $\tilde{F}_L(Y, \psi)$ являются вогнутыми по аргументу $Y(\cdot)$.

Её доказательство см. в литературе [66].

Теперь, основываясь на материале лемм 4.2 и 4.3, можно убедиться, что имеет место формула (4.73). Так как функция $\tilde{Y}_L(\cdot)$ максимизирует функционал $\tilde{F}_L(Y, \psi)$, то выполняется следующее соотношение:

$$\tilde{F}_L(\tilde{Y}_L(x), \psi) \geq \tilde{F}_L(Y(x), \psi) \quad \forall Y(x) \in L_2(\Omega). \quad (4.76)$$

Переходя к пределу при условии, что $L \rightarrow \infty$, и принимая во внимание разность (4.74), получим такой результат:

$$F_1(\tilde{Y}(x), \psi) \geq F_1(Y(x), \psi) \quad \forall Y(x) \in L_2(\Omega), \quad \forall \psi \in \Gamma,$$

где $\tilde{Y}(x)$ – некоторый элемент пространства $L_2(\Omega)$. Покажем, что $\tilde{Y}(x) = Y^*(x)$. Предположим обратное, тогда, согласно соотношению (4.76), должно выполняться следующее неравенство:

$$F_1(\tilde{Y}(x), \psi) \geq F_1(\alpha \tilde{Y}(x) + (1 - \alpha)Y^*(x), \psi), \quad (4.77)$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$.

Так как функционал $F_1(Y(x), \psi)$ вогнут по аргументу $Y(\cdot)$, то (4.77) можно переписать в таком виде:

$$F_1(\tilde{Y}(x), \psi) \geq \alpha F_1(\tilde{Y}(x), \psi) + (1 - \alpha)F_1(Y^*(x), \psi),$$

а это может быть только в случае, когда $F_1(\tilde{Y}(x), \psi) = F_1(Y^*(x), \psi)$. Значит,

$$\tilde{Y}(x) \in S^* = \left\{ Y^*(x) \in L_2(\Omega) : F_1(Y^*(x), \psi) \geq F_1(Y(x), \psi) \forall Y(x) \in L_2(\Omega) \right\}.$$

Не теряя общности, можно считать, что $\tilde{Y}(x) = Y^*(x)$.

Докажем теперь, что $\forall x \in \Omega$ имеет место такое равенство:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}^L(x) = \lambda^*(x). \quad (4.78)$$

Согласно формуле (4.64) и теореме 4.4 можно записать следующие соотношения между функциями $Y(\cdot)$ и $\lambda(\cdot)$:

$$Y^*(x) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} G(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \lambda_i^*(x') dx',$$

$$\tilde{Y}_L(x) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \tilde{G}_L(x, x', T) \varphi_{0i}(x') \tilde{\lambda}_i^L(x') dx'.$$

Рассмотрим такую разность:

$$\begin{aligned} Y^*(x) - \tilde{Y}_L(x) &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \left[G(x, x', T) \lambda_i^*(x') - \tilde{G}_L(x, x', T) \tilde{\lambda}_i^L(x') \right] dx' = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \left[O(e^{-\gamma_L T}) \lambda_i^*(x') + \tilde{G}_L(x, x', T) (\lambda_i^*(x') - \tilde{\lambda}_i^L(x')) \right] dx'. \end{aligned}$$

При условии, что $L \rightarrow \infty$, выражение в левой части, согласно разности (4.74), стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \left\{ O(e^{-\gamma_i L T}) \lambda_i^*(x') + \tilde{G}_L(x, x', T) (\lambda_i^*(x') - \tilde{\lambda}_i^L(x')) \right\} dx' = 0,$$

а это возможно лишь в случае, когда для всех точек $x \in \Omega$ и для всех $i=1, 2, \dots, N$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (\lambda_i^*(x) - \tilde{\lambda}_i^L(x)) = 0,$$

так как $\varphi_{0i}(x)$, $\tilde{G}_L(x, x', T)$ – ограниченные, не равные тождественно нулю функции на множествах Ω и $\Omega \times \Omega \times [0, T]$ соответственно, а $\lim_{L \rightarrow \infty} O(e^{-\gamma_i L T}) = 0$.

Таким образом, доказана асимптотическая сходимость последовательности вектор-функций $\{\tilde{\lambda}_i^L(x)\}$ к искомой вектор-функции $\lambda_i^*(x)$, если $L \rightarrow \infty$.

Оценим теперь погрешность вычисления функционала $I(\cdot)$, возникающую за счет приближения функции Грина, а именно:

$$\begin{aligned} I(\lambda(\cdot)) - \tilde{I}(\tilde{\lambda}(\cdot)) &= \int_{\Omega} \left[\left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') G(x, x', T) \lambda_i(x') dx' + \bar{Z}(x) \right\}^2 - \right. \\ &\quad \left. \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \tilde{G}_L(x, x', T) \tilde{\lambda}_i(x') dx' + \tilde{Z}(x) \right\}^2 \right] dx = \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \left[G(x, x', T) \lambda_i(x') + \tilde{G}_L(x, x', T) \tilde{\lambda}_i(x') \right] dx' + (\bar{Z}(x) + \tilde{Z}(x)) \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') \left[G(x, x', T) \lambda_i(x') - G(x, x', T) \tilde{\lambda}_i(x') \right] dx' + (\bar{Z}(x) - \tilde{Z}(x)) \right\} dx. \end{aligned}$$

Убедимся, что первый множитель в подынтегральном выражении, обозначим его через $W_1(x)$, при определенных условиях ограничен, а второй – $W_2(x)$ – стремится к нулю, если $L \rightarrow \infty$.

Пусть $S = \max_{i=1, N} \max_{x \in \Omega} \varphi_{0i}(x)$; $M_z = \max_{x \in \Omega} Z(x)$; $M_f = \max_{x \in \Omega} \max_{t \in [0, T]} f(x, t)$;

$M_g = \max_{x \in \Omega} \max_{t \in [0, T]} g(x, t)$. Тогда, используя оценки, полученные в

результате исследований [65], можно записать оценку первого множителя $W_1(x)$, а именно:

$$W_1(x) \leq 2M_z + \frac{16M_f p^2 q^2}{\pi^2(p^2 + q^2)} + \frac{8 - 4e^{-\pi^2 L^2(p^2 + q^2)T/(pq)^2}}{1 - e^{\pi^2 T(p^2 + q^2)/(pq)^2}} \left(S - \frac{M_f p^2 q^2}{\pi^2(p^2 + q^2)} \right) + \frac{32p^2 q^2}{\pi^3} \left(\frac{\pi^4}{36} - \frac{1}{e^{\left(\frac{\pi^2}{p^2} + \frac{\pi^2}{q^2}\right)T} - 1} \right) \leq A,$$

где $A = \text{const} < \infty$. Оценка второго множителя

$$W_2(x) = \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{0i}(x') [G(x, x', T) \lambda_i(x') - G(x, x', T) \tilde{\lambda}_i(x')] dx' + (\bar{Z}(x) - \tilde{Z}(x)) \right\} \leq \leq S \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left\{ \frac{4}{pq} e^{-L^2 k^2 T} \lambda(x') + \frac{4 - 4e^{-L^2 k^2 T}}{1 - e^{k^2 T}} [\lambda_i(x') - \tilde{\lambda}_i(x')] \right\} dx' + (4M_f pq/k^2 + 16M_g/\pi^2)(1 - e^{-L^2 k^2 T})/L^2,$$

где $k^2 = \pi^2(p^2 + q^2)/(pq)^2$.

Учитывая равенство (4.78), можно подобрать такое значение L'' , что для всех чисел $L > L''$ и точек $x \in \Omega$ будет справедливо следующее неравенство:

$$\|\lambda_i(x) - \tilde{\lambda}_i(x)\| \leq \varepsilon'',$$

где $\varepsilon'' > 0$ – сколь угодно малое число.

Пусть L' – число, начиная с которого

$$\left| 4S e^{-L^2 k^2 T} + (4M_f pq/k^2 + 16M_g/\pi^2)(1 - e^{-L^2 k^2 T})/L^2 \right| \leq \varepsilon'.$$

Предположим, что $L > \max\{L', L''\}$, тогда величина $W_2(x)$, а следовательно, и величина $|I(\lambda(\cdot)) - \tilde{I}(\tilde{\lambda}(\cdot))|$ будут иметь порядок

$o(\varepsilon)$, где $\varepsilon = \max(\varepsilon', \varepsilon'')$. Тем самым показана асимптотическая сходимость $\tilde{I}_L(\tilde{\lambda}(\cdot)) \rightarrow I(\lambda(\cdot))$, если $L \rightarrow \infty$.

*4.3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ИДЕНТИФИКАЦИИ РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ
ЧАСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
И НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ*

Описанный выше метод можно легко распространить на случай, когда идентификации подлежит, например, кусочно-непрерывная функция правой части дифференциального уравнения или задача восстановления начальных условий, зависящих, кроме разбиения, еще и от некоторых параметров, требующих определения (так называемая параметрическая идентификация).

4.3.1. Задача идентификации функции распределенного источника

Рассмотрим следующую модельную задачу:

$$V(u(\cdot)) = \int_{\Omega} [\varphi(x, 1, u) - z(x)]^2 dx \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (4.79)$$

где $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$; $z(x) = \|x - x_0\|^2$, $x_0 = (2, 2)$; $\varphi = \varphi(x, t, u)$ – решение краевой задачи, то есть

$$\partial\varphi/\partial t = \Delta\varphi + u(x)\exp(-t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, 1]; \quad (4.80)$$

$$\varphi(x, 0) \equiv \varphi_0(x) \quad \forall x \in \Omega; \quad (4.81)$$

$$\varphi(x, t) \equiv 0 \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]. \quad (4.82)$$

Ограничения на управление $u(\cdot)$ имеют такой вид:

$$U = \{u(x) \in L_2(\Omega) : u(x) = u_i(x) \quad \forall x \in \Omega_i, \int_{\Omega_i} u(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}\}, \quad (4.83)$$

где $(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega)$; $u_i(x) = \|x - \tau_i\|^2 \quad \forall x \in \Omega$; $\tau_i \in \Omega$ – фиксированные точки, $i = \overline{1, N}$; $\|\cdot\|$ – евклидова метрика.

Применяя вышеизложенную методику решения задачи управления, сводящейся к непрерывной нелинейной задаче оптимального разбиения множеств, решение задачи (4.79) – (4.83) можно получить в такой форме п. в. для $x' \in \Omega$:

$$\lambda_i^*(x') = \begin{cases} 1, & \text{если } \left[2 \int_{\Omega} (Y^*(x) + I_1(x)) H(x, x') dx + \psi_i^* \right] u_i(x') = \\ = \min_{j=1, N} \left\{ \left[2 \int_{\Omega} (Y^*(x) + I_1(x)) H(x, x') dx + \psi_j^* \right] u_j(x') \right\} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.84)$$

где $H(x, x') = \int_0^1 G(x, x', T-t) e^{-t} dt$, $I_1(x) = 2 \int_{\Omega} G(x, x', T) dx' - z(x)$, а

$Y^*(\cdot)$, ψ^* – решение задачи максимизации, а именно:

$$F_1(Y(\cdot), \psi) \rightarrow \max_{(Y(\cdot), \psi) \in L_2(\Omega) \times \Gamma},$$

здесь функционал имеет такой вид:

$$F_1(Y(\cdot), \psi) = - \int_{\Omega} Y^2(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \\ + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left\{ 2 \int_{\Omega} (Y(x) + I_1(x)) H(x, x') u_j(x') dx + \psi_j u_j(x') \right\} dx'.$$

И таким образом, представленный в п. 4.2.4 алгоритм с небольшими изменениями может быть использован в решении задачи (4.79) – (4.83).

Для численного решения этой задачи область Ω покрывалась сеткой $m \times m_1 = 20 \times 20$. Двойные интегралы, входящие в формулы для определения функций $\lambda_i(\cdot)$, $i = \overline{1, N}$, значения функционала F_1 и его вектора-градиента в точке $(Y(\cdot), \psi)$ вычислялись с помощью кубатурной формулы трапеций по узлам сетки.

Далее рассмотрим результаты решения нескольких тестовых задач с помощью измененного алгоритма.

1. При решении задачи (4.79) – (4.83) со следующими входными данными: $N=3$; $\tau_1 = (0;4)$; $\tau_2 = (2;2)$; $\tau_3 = (4;0)$; $b = (40;50;30)$; $\psi^{(0)} = (1;1;1)$; $\varphi_0(x) = 0$, $u^{(0)}(x) = u_1(x)$, $\forall x \in \Omega$; $\varepsilon = 0,001$, после проведения 25 итераций достигнуты оптимальные значения функционалов прямой и двойственной задач: $I^* = 98,630$; $P^* = 98,6214$. Разбиение множества Ω , соответствующее оптимальному на нем заданию функций $u_i(\cdot)$, $i = \overline{1, N}$, содержит рис. 4.10. Вектор двойственных переменных $\psi^* = (0,0018; 0,00078; 0,0013)$. Для проверки выполнения условий (4.83) были вычислены значения интегралов в левых частях неравенств, а именно:

$$\int_{\Omega_1^*} u_1(x) dx = 2,11; \int_{\Omega_2^*} u_2(x) dx = 28,53; \int_{\Omega_3^*} u_3(x) dx = 2,11.$$

Разница между оптимальными значениями функционалов прямой и двойственной задач в этом примере и ниже объясняется погрешностью вычислений (см. замечание в п. 4.2.5).

2. На рис. 4.11 представлено разбиение множества Ω , соответствующее оптимальному решению задачи (4.79) – (4.83) при следующих исходных данных: $N=4$; $\varphi_0(x) = 2$; $\tau_1 = (3;3)$; $\tau_3 = (3;1)$; $\tau_2 = (1;3)$; $\tau_4 = (1;1)$; $u^{(0)}(x) = u_2(x)$, $\forall x \in \Omega$, $\psi^{(0)} = (1;1;1;1)$.

Минимальное значение целевого функционала $I^* = 127,762$, было достигнуто после выполнения 15 итераций.

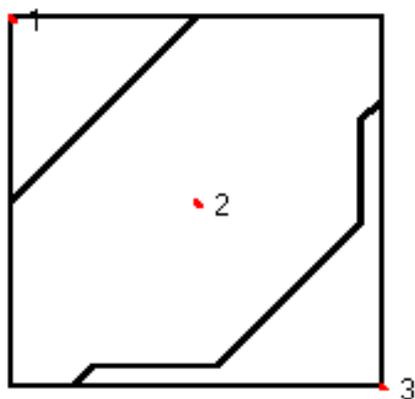


Рис. 4.10. Оптимальное разбиение множества Ω на 3 подмножества в задаче (4.79) – (4.83)

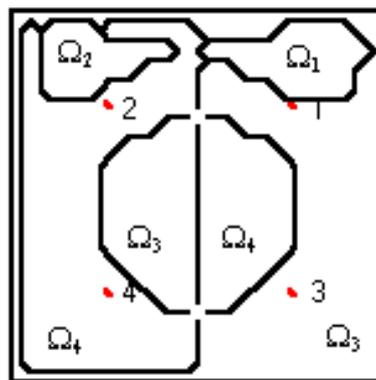


Рис. 4.11. Оптимальное разбиение множества Ω на 4 несвязных подмножества в задаче (4.79) – (4.83)

При этом получены следующие значения двойственного функционала и вектора сопряженных переменных: $P^* = 127,732$, $\psi^* = (1,18; 0,000; 1,344; 0,000)$; а $\int_{\Omega_1^*} u_1(x) dx = 0,996$; $\int_{\Omega_2^*} u_2(x) dx = 5,93$;
 $\int_{\Omega_3^*} u_3(x) = 0,782$; $\int_{\Omega_4^*} u_4(x) dx = 8,32$.

4.3.2. Параметрическая идентификация кусочно-непрерывной функции начальных условий для параболического уравнения

Описанный в п. 4.2.4 алгоритм решения задач оптимального управления (стартового или распределенного), которые сводятся к нелинейным задачам оптимального разбиения множеств, легко применим в том случае, когда функции, определяющие множество допустимых управлений U , зависят от некоторых параметров, которые необходимо отыскать в процессе решения. Стало быть, решаем так называемые задачи управления, сводящиеся к нелинейным задачам ОРМ с размещением центров подмножеств (см. гл. 1).

Для того, чтобы убедиться в справедливости данных утверждений, рассмотрим задачу стартового управления такого вида:

$$V(u(\cdot; \bar{\omega}, \tau)) = \int_{\Omega} [\varphi(x, 1, u) - z(x)]^2 dx \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (4.85)$$

где $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$; $\varphi = \varphi(x, t, u)$ – решение следующей краевой задачи:

$$\partial \varphi / \partial t = \Delta \varphi + \exp(-t)((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, 1]; \quad (4.86)$$

$$\varphi(x, 0) = u(x; \bar{\omega}, \tau) \quad \forall x \in \Omega; \quad (4.87)$$

$$\varphi(x, t) \equiv 0; \quad (x, t) \in \partial \Omega \times [0, 1]. \quad (4.88)$$

Ограничения на управление $u(\cdot)$ имеют такой вид:

$$U = \left\{ u(x) \in L_2(\Omega) : u(x) = \|x - \tau_i\|^2 \quad \forall x \in \Omega_i, \int_{\Omega_i} dx \leq b_i, \quad i = \overline{1, N}; \bar{\omega} \in P_2(\Omega) \right\}.$$

Пусть $z(x)$ – аналитическое решение краевой задачи (4.86) – (4.88) с такой функцией начальных условий: $\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^N \|x - \beta_i\|^2 \lambda_i(x)$, где $N = 2$; $\beta_1 = (2,1)$; $\beta_2 = (2,3)$; а $\lambda_1(\cdot)$, $\lambda_2(\cdot)$ – характеристические функции подмножеств, составляющих разбиение множества Ω (см. рис. 4.12). Здесь значения констант b_i , $i = \overline{1, N}$, подбирали таким образом, чтобы ограничения на площади подмножеств выполнялись как строгие неравенства.

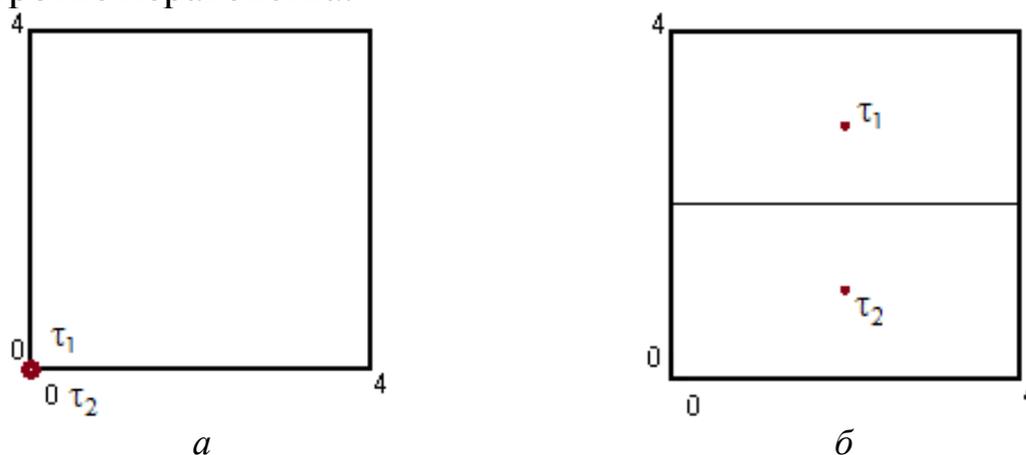


Рис. 4.12. Разбиение множества Ω на 2 подмножества в задаче ОРМ, к которой сводится задача параметрической идентификации (4.85) – (4.88): начальное приближение (а) и оптимальные значения (б) параметров τ_i

При решении задачи (4.85) – (4.88), для которого применяли после модификации изложенный в п. 4.2.4 алгоритм (его дополнили условием отыскания минимума относительно аргумента $\tau \in \Omega^2$), начиная с начального приближения $\Omega_1^{(0)} = \Omega$; $\Omega_2^{(0)} = \emptyset$; $\tau_i^{(0)} = (0,0)$; $i = \overline{1, N}$, получили с точностью $\varepsilon = 0,0001$, следующий результат: разбиение множества Ω , соответствующее оптимальной функции начальных условий $u(\cdot; \bar{\omega}, \tau)$, совпало с разбиением, представленным на рис. 4.12; при этом значения координат центров подмножеств $\tau_1^* = (1,999; 2,725)$, $\tau_2^* = (2,00; 1,274)$; значения функционалов прямой и двойственной задач $I^* = 0,3045$; $P^* = 0,2807$. Как нетрудно заметить, значения координат точек τ_i при достаточной степени точности совпадают с координатами точек β_i ; кроме того, значение функционала прямой задачи оказалось весьма удовлетворительным.

Решая эту же задачу при условии, что функция $z(x)$ является аналитическим решением краевой задачи (4.86) – (4.88) с функцией начальных условий такого вида: $\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^N \|x - \beta_i\|^2 \lambda_i(x)$, где $N = 4$; $\beta_1 = (1;1)$; $\beta_2 = (1;3)$; $\beta_3 = (3;1)$; $\beta_4 = (3;3)$; $\lambda_i(\cdot)$ – характеристические функции подмножеств, составляющих разбиение квадрата Ω , представленное на рис. 4.13, *а*, исходя из начального приближения координат центров подмножеств $\tau_i = (0,0)$, $\forall i$, вектора сопряженных переменных $\psi^{(0)} = (1,1,1,1)$, и управления $u^{(0)}(x) = u_1(x) \quad \forall x \in \Omega$,

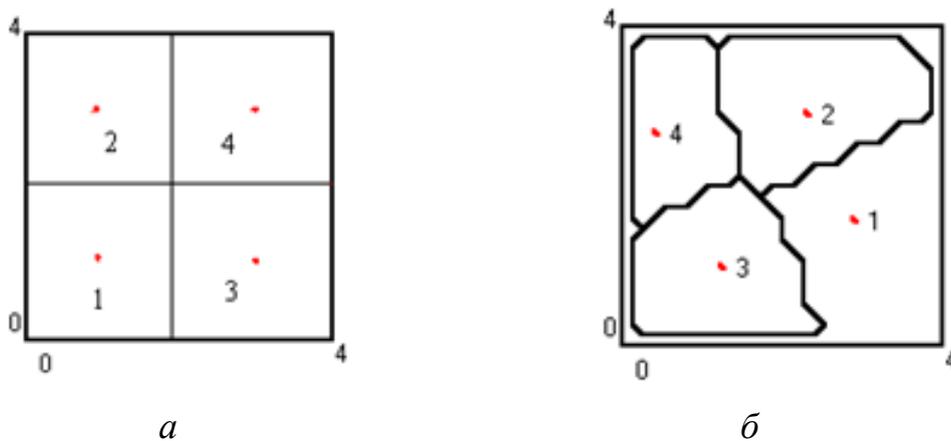


Рис. 4.13. Разбиение множества Ω на 4 подмножества в задаче ОРМ, к которой сводится задача параметрической идентификации (4.85) – (4.88):

начальное приближение (*а*) и оптимальные значения (*б*) параметров τ_i после проведения 60 итераций с точностью $\varepsilon = 0,0001$, получили оптимальное значение функционала (4.85) $I^* = 0,413$. При этом двойственный функционал $P(Y(\cdot), \psi)$ достиг такого значения: $P^* = 0,327$. Для сравнения – значение функционала исходной задачи на нулевой итерации было таковым: $I^{(0)} = 26,24$. Разбиение множества Ω , соответствующее оптимальной функции $u^*(\cdot)$, изображено на рис. 4.13, *б*. При этом получены следующие оптимальные значения параметров (координат центров подмножеств): $\tau_1 = (2,89; 1,6)$; $\tau_2 = (2,29; 2,93)$; $\tau_3 = (1,224; 1,003)$; $\tau_4 = (0,39; 2,681)$.

4.4. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ КРИТЕРИЕМ
КАЧЕСТВА КАК МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ
ИДЕНТИФИКАЦИИ РАЗРЫВНЫХ НАЧАЛЬНЫХ
УСЛОВИЙ

На практике часто возникают задачи, математическая постановка которых содержит функционал, недифференцируемый по Фреше, а имеющий лишь производные по направлениям в функциональном пространстве. Эта особенность делает решение таких задач очень сложным. В данном параграфе рассмотрена задача управления, которая сводится к задаче оптимального разбиения без ограничений, а ее функционал содержит функцию $|\cdot|$. Схема решения этой задачи, разработана на базе метода последовательной линеаризации Р.П. Федоренко [112].

4.4.1. Постановка задачи управления и схема ее решения

Рассмотрим задачу стартового управления параболической системой [134], а именно:

$$V(u(\cdot)) = \int_{\Omega} |\varphi(x, T; u(x)) - Z(x)| dx \rightarrow \min_{u(x) \in U}. \quad (4.89)$$

$$\partial\varphi/\partial t = \Delta\varphi + f(x, t); \quad (4.90)$$

$$\varphi(x, 0) = u(x); \quad u \in U; \quad (4.91)$$

$$\varphi(x, t) = g(x, t) \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T]; \quad (4.92)$$

$$U = \left\{ u(x; \bar{\omega}) = u_i(x) \text{ п. в. для } x \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad \bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega) \right\};$$

$u_i(\cdot)$, $i = \overline{1, N}$, – заданные функции из пространства $L_2(\Omega)$.

Рассматривая характеристические функции $\lambda_i(\cdot)$ подмножеств Ω_i , $i = \overline{1, N}$, функцию начальных условий можно представить в следующем виде:

$$\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^N u_i(x) \lambda_i(x). \quad (4.93)$$

Обозначим через функцию $\varphi(x, t; \lambda(x))$ решение краевой задачи (4.90) – (4.92), соответствующее функции начальных условий (4.93).

Рассмотрим задачу, эквивалентную задаче (4.89) – (4.92), то есть

$$I(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} |\varphi(x, T; \lambda(x)) - Z(x)| dx \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} . \quad (4.94)$$

В соответствии с методами решения непрерывных задач ОРМ, вводим симплекс Λ_0 и далее будем решать такую задачу:

$$I(\lambda(\cdot)) \rightarrow \min_{\lambda(x) \in \Lambda_0} \quad (4.95)$$

Для решения задачи (4.95), (4.90) – (4.92) будем применять метод последовательной линеаризации Р.П. Федоренко [112], который разработан для решения задач оптимального управления системой с сосредоточенными параметрами. Этот метод предусматривает так называемый спуск в пространстве функций $\lambda(\cdot)$ и построение минимизирующей последовательности $\lambda^k(\cdot) \in \Lambda_0$.

Рассмотрим схему применения метода.

0. Задано: $\lambda^0(\cdot) \in \Lambda_0, k = 0$.

1. Учитывая, что функция $u^k(\cdot) = \sum_{i=1}^N u_i(\cdot) \lambda_i^k(\cdot)$, решаем краевую задачу (4.90) – (4.92) и вычисляем значение функционала (4.95).

2. В окрестности невозмущенной пары функций $\{\lambda^k(\cdot), \varphi(\cdot, \cdot)\}$ задача линеаризуется. Процесс линеаризации включает два этапа:
– вычисление функциональной производной – дифференциала Гато: $D(\lambda^k(\cdot), v^k(\cdot)) = D(\lambda^k(\cdot), \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)); \bar{\lambda}(\cdot) \in \Lambda_0$;
– построение малой окрестности $\delta\Lambda_0$ невозмущенной функции $\lambda^k(\cdot)$.

3. Формулируется и решается задача поиска приращения (возмущения) управляющей функции $v^k(\cdot) = \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)$, из такого условия:

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} D(\lambda^0(\cdot), \lambda(\cdot) - \lambda^0(\cdot)) = D(\lambda^0(\cdot), \bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^0(\cdot)). \quad (4.96)$$

Эта задача является линеаризацией решаемой задачи в окрестности невозмущенной пары функций $\{\lambda^k(\cdot), \varphi(\cdot, \cdot)\}$. Решение задачи (4.34) позволяет осуществить основной шаг процесса – переход к следующему приближению

$$\lambda^{k+1}(\cdot) = \lambda^k(\cdot) + s(\bar{\lambda}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)). \quad (4.97)$$

Параметр $s \in [0,1]$ подбирается так, чтобы обеспечить условие релаксации, а именно:

$$I(\lambda^{k+1}(\cdot)) \leq I(\lambda^k(\cdot)). \quad (4.98)$$

Критериями окончания итерационного процесса построения минимизирующей последовательности управлений могут служить следующие неравенства:

$$|\lambda^{k+1}(\cdot) - \lambda^k(\cdot)| \leq \varepsilon; \quad |I^{k+1} - I^k| \leq \varepsilon; \quad |D(\lambda^k(\cdot), \bar{\lambda}(\cdot)) - \lambda^k(\cdot)| \leq \varepsilon. \quad (4.99)$$

4.4.2. Дифференциал Гато функционала вспомогательной задачи

Составной частью описанной схемы является вычисление дифференциала Гато функционала (4.33).

Функционал $I(\lambda(\cdot))$ называется *дифференцируемым по Гато*, если для любой вектор-функции $v(\cdot)$ [из того же пространства, что и $\lambda(\cdot)$] имеет место такая формула:

$$I(\lambda(\cdot) + sv(\cdot)) = I(\lambda(\cdot)) + sD(\lambda(\cdot), v(\cdot)) + o(s), \quad (4.100)$$

где s – любое малое неотрицательное число; $D(\lambda(\cdot), v(\cdot))$ – некоторый функционал, называемый производной функционала I в точке $\lambda(\cdot)$ по направлению $v(\cdot)$ (дифференциалом Гато).

Введем следующее обозначение:

$$\Omega^0 = \{x \in \Omega : \varphi(x, T; \lambda^0(x)) - Z(x) = 0\};$$

$$\Omega^{+(-)} = \{x \in \Omega : \varphi(x, T; \lambda^0(x)) - Z(x) > 0 (< 0)\}.$$

Под вариацией (приращением) функции $\lambda^{(0)}(\cdot) \in \Lambda_0$, будем понимать функцию $v(\cdot) = \lambda(\cdot) - \lambda^0(\cdot)$, где $\lambda(\cdot) \in \Lambda_0$.

Дадим приращение $\delta u(\cdot) = sv(\cdot)$, функции $\lambda^0(\cdot)$, где $s > 0$ – достаточно малый параметр. Этому приращению соответствует приращение фазовой траектории $\delta\varphi$, которая является решением такой краевой задачи:

$$\frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial t} = \Delta(\delta\varphi); \quad (4.101)$$

$$\delta\varphi(x, 0) = \sum_{i=1}^N u_i(x) s v_i(x); \quad (4.102)$$

$$\delta\varphi(x, t) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega; \quad t \in [0, T]. \quad (4.103)$$

Рассмотрим значение функционала

$$\begin{aligned} I(\lambda^0(\cdot) + \delta u(\cdot)) &= \int_{\Omega} \left| \varphi(x, T; \lambda^0(x)) - Z(x) + s\delta\varphi(x, T) + O(\|\delta u\|^2) \right| dx = \\ &= \int_{\Omega^0} |\delta\varphi(x, T)| dx + \int_{\Omega^+} \left\{ \varphi(x, T; \lambda^0(x)) - Z(x) + s\delta\varphi(x, T) \right\} dx - \\ &\quad - \int_{\Omega^-} \left\{ \varphi(x, T; \lambda^0(x)) - Z(x) + s\delta\varphi(x, T) \right\} dx + O(s). \end{aligned}$$

Сопоставляя это выражение с выражением (4.100), делаем вывод о том, что дифференциал Гато функционала $I(\lambda(\cdot))$ вычисляется по следующей формуле:

$$D(\lambda^0(\cdot), \nu(\cdot)) = \int_{\Omega^0} |\delta\varphi(x, T)| dx + \int_{\Omega^+} \delta\varphi(x, T) dx - \int_{\Omega^-} \delta\varphi(x, T) dx.$$

Используя уравнения в вариациях (4.101) – (4.103) и тождество Лагранжа, это выражение запишем в эквивалентном виде относительно приращения $\nu(\cdot)$, а именно:

$$D(\lambda^0(\cdot), \nu(\cdot)) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \psi(x, 0) u_i(x) v_i(x) dx + \int_{\Omega^0} \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \psi(x, x', 0) u_i(x) v_i(x) dx \right| dx', \quad (4.104)$$

где $\psi(x, t)$ – решение такой краевой задачи:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi = 0; \quad (4.105)$$

$$\psi(x, T) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Omega^+; \\ 0, & \text{если } x \in \Omega^0; \\ -1, & \text{если } x \in \Omega^-; \end{cases} \quad (4.106)$$

$$\psi(x, x', t) = 0 \quad x \in \partial\Omega; \quad t \in [0, T], \quad (4.107)$$

а $\psi(x, x', t)$ – решение следующей задачи:

$$\frac{\partial \psi(x, x', t)}{\partial t} + \Delta \psi(x, x', t) = 0; \quad \forall x \in \Omega, t \in [0, T], \quad (4.108)$$

$$\psi(x, x', T) = \delta(x - x'), \quad (4.109)$$

$$\psi(x, x', t) = 0 \quad x \in \partial\Omega; \quad t \in [0, T]. \quad (4.110)$$

Подчеркнем, что в случае, когда $\text{mes}\Omega^0 = 0$, функционал (4.95) дифференцируем по Фреше, и его производная вычисляется после решения краевой задачи (4.105) – (4.107) согласно следующей формуле:

$$\frac{\partial I(\lambda(\cdot))}{\partial \lambda_i(\cdot)} = \psi(\cdot, 0)u_i(\cdot).$$

4.4.3. Элементы вычислительной технологии

Для выполнения вычислений область Ω покрывается равномерной сеткой, шаг которой относительно переменной x равен h_x , а переменной y – h_y . Стало быть,

$$\gamma = \left\{ (x_i, y_j) : x_i = x_0 + ih_x, y_j = y_0 + jh_y, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, m1} \right\}.$$

В качестве искомой функции $\lambda(\cdot)$ будет выступать такая кусочно-постоянная функция:

$$\lambda(\bar{x}) = \lambda_{i+1/2, j+1/2}(\bar{x}), \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}; \quad y_j \leq y \leq y_{j+1}.$$

Вариации $v(\cdot)$ будем искать в том же классе.

Далее задается начальное приближение функции $\lambda^0(\cdot)$. Решаем краевую задачу (4.90) – (4.92). Интегрирование этой системы осуществляется одним из подходящих стандартных методов, после чего запоминаются значения функции $\varphi(\cdot, T)$ в конечный момент времени T , а именно: $\varphi_{ij} = \varphi(x_i, y_j, T)$.

Вычисление производной Гато функционала (4.95) в точке $\lambda^0(\cdot)$ требует интегрирования системы (4.108) – (4.110). При этом следует выделить множества индексов $M_\varepsilon^-, M_\varepsilon^+, M_\varepsilon^0$ следующим образом:

$$(i, j) \in M_\varepsilon^-, \text{ если } \varphi_{ij} - Z(x_i, y_j) < -\varepsilon;$$

$$(i, j) \in M_\varepsilon^+, \text{ если } \varphi_{ij} - Z(x_i, y_j) > \varepsilon;$$

$$(i, j) \in M_\varepsilon^0, \text{ если } |\varphi_{ij} - Z(x_i, y_j)| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Замечание. Выбор значения параметра $\varepsilon > 0$ определяется следующими соображениями: величина ε должна быть как можно меньше, поскольку трудность решения задачи связана с количеством индексов в множестве M_ε^0 . В то же время, она не должна быть слишком малой: не следует допускать перехода в течение одного шага процесса какого-либо индекса (i, j) из множества M_ε^- в M_ε^+ .

Далее записывается конечномерная аппроксимация задачи (4.96). Заменяя в выражении производной Гато интегралы интегральными суммами, получим следующую задачу для определения функции $\bar{\lambda}(\cdot)$:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^m \sum_{s=1}^{m1} \bar{A}_{ps} u_{ps}^i (\lambda_{ps}^i - \lambda_{ps}^{0i}) + \sum_{(l,j) \in M_\varepsilon^0} \left| \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^m \sum_{s=1}^{m1} A_{ps}^{lj} u_{ps}^i (\lambda_{ps}^i - \lambda_{ps}^{0i}) \right| \rightarrow \min_{\lambda},$$

при таких условиях:

$$0 \leq \lambda_{ps}^i \leq 1, \quad i = \overline{1, N};$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_{ps}^i = 1; \quad p = \overline{1, m}; \quad s = \overline{1, m1}.$$

Эта задача легко сводится к задаче линейного программирования [15], которая решается при помощи симплекс-метода. Как результат, получаем в каждой точке сетки γ значение вектор-функции $\lambda^*(\cdot)$, являющейся решением задачи минимизации конечномерного аналога функционала (4.96) на симплексе Λ_0 . Это решение может содержать либо все целые компоненты [и тогда оно является также оптимальным целым решением задачи (4.95)], либо имеет несколько дробных значений, которые несложно округлить [92]. Будем считать, что для каждой точки сетки γ большей компоненте вектора $\lambda^*(\cdot)$, соответствует значение этой компоненты вектора $\lambda^{**}(\cdot)$, равное 1, остальные его компоненты обнуляем.

Заметим, что при возрастании размерности задач, т. е. при увеличении количества узлов сетки γ , дробные значения появляются все чаще и обычные методы округления в большинстве случаев не обеспечивают оптимальное решение задачи (4.95). В этом случае во избежание описанной ситуации можно воспользоваться методом ветвей и границ в сочетании с методом отсечения плоскостей.

4.4.4. Решение тестовых задач с недифференцируемым функционалом

Для апробации метода, разработанного в п. 4.4.2, выполнили решение ряда тестовых задач. Результаты решения некоторых из них приведены ниже.

Тестовая задача 1: найти такое разбиение $\bar{\omega}^*$ множества $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 4\}$, на N подмножеств ($N = 5$), при котором

$$V(\varphi_0(\cdot, \bar{\omega})) = \int_{\Omega} |\varphi(x, 1; \varphi_0(x, \bar{\omega})) - Z(x)| dx \rightarrow \min_{\varphi_0(\cdot, \bar{\omega}) \in \Phi}, \quad (4.111)$$

где $\varphi(x, t; \varphi_0(x, \bar{\omega}))$ – решение такой задачи:

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \Delta \varphi(x, t) + 7e^{-t} \left((x-2)^2 + (y-2)^2 \right); \quad (4.112)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x, \bar{\omega}), \quad \varphi_0(x, \bar{\omega}) \in U, \quad (4.113)$$

$$\varphi(x, t) \equiv 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, t \in [0, T]; \quad (4.114)$$

$$U = \{ \varphi(x) = \varphi_{0i}(x) \quad \forall x \in \Omega_i, i = \overline{1, N}; (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega) \}.$$

В случае, когда функция $Z(x) \equiv 0$ на всем множестве Ω , а функции $\varphi_{0i}(x)$, определяющие множество допустимых управлений, задавались следующим образом:

$$\varphi_{0i}(x) = \max \left[(x_1 - \tau_{1i}), (x_2 - \tau_{2i}) \right], \quad i = \overline{1, 5}, \quad (4.115)$$

где $\tau_1 = (0, 0)$; $\tau_2 = (2, 2)$; $\tau_3 = (0, 4)$; $\tau_4 = (4, 0)$; $\tau_5 = (4, 4)$, оптимальное разбиение квадрата Ω было получено при выполнении четвертой итерации в виде, изображенном на рис. 4.14.

Для численного решения этой задачи множество Ω покрывалось такой сеткой: $m \times m_1 = 20 \times 20$. Двойные интегралы, входящие в формулы для определения функций $\lambda_i, i = \overline{1, N}$, значения функционалов исходной задачи и соответствующей вспомогательной непрерывной задачи оптимизации на симплексе, а также ее дифференциала Гато вычислялись с помощью кубатурной формулы трапеций. Начальное разбиение квадрата было задано следующим образом: $\Omega_1 = \Omega, \Omega_i = \emptyset, i = \overline{2, 4}$. Информация о значении функционалов в исходной и соответствующей непрерывной задаче

минимизации на симплексе, а также о количестве узлов сетки, входящих в множество M_ε^0 [напомним, что это множество всех точек из Ω , для которых $|\varphi(x, T) - Z(x)| \leq \varepsilon$], содержится в табл. 4.1. При этом $\varepsilon = 0,025$. Следует отметить, вследствие равенства нулю функции $Z(x)$ и неотрицательности значений функции $\varphi(x, T)$, полученное на последней итерации разбиение квадрата действительно является оптимальным.

Тестовая задача 2. Для того, чтобы убедиться в правильности действия алгоритма решения, рассматривалась такая задача стартового управления:

$$V(u(\cdot; \bar{\omega}, \tau)) = \int_{\Omega} [\varphi(x, 1, u) - z(x)]^2 dx \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (4.116)$$

где $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$; $\varphi = \varphi(x, t, u)$ – решение задачи

$$\partial\varphi / \partial t = \Delta\varphi + \exp(-t)((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, 1]; \quad (4.117)$$

$$\varphi(x, 0) = u(x; \bar{\omega}, \tau) \quad \forall x \in \Omega; \quad (4.118)$$

$$\varphi(x, t) \equiv 0 \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]. \quad (4.119)$$

Ограничения на функцию управления $u(\cdot)$ имеют такой вид:

$$U = \left\{ u(x) \in L_2(\Omega) : u(x) = \|x - \tau_i\|^2 \quad \forall x \in \Omega_i, \quad \bar{\omega} \in P_2(\Omega) \right\}.$$

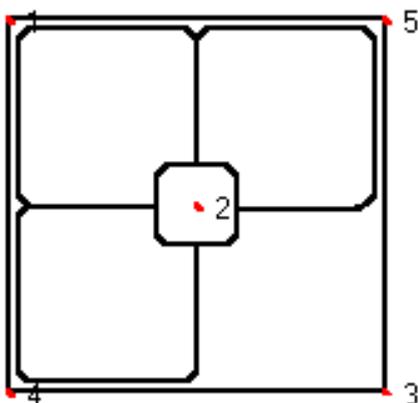


Таблица 4.1

Номер итерации	I ($0 \leq \lambda \leq 1$)	I ($\lambda = 0 \vee 1$)	Число точек в Ω_0
1	60,71	60,71	0
2	31,2249	31,2249	0
3	30,6585	31,2249	0
4	30,6574	30,6574	4
5	30,618	30,6574	4

Рис. 4.14. Оптимальное разбиение множества в задаче (4.111) – (4.115)

В качестве функции $z(x)$ выступало аналитическое решение краевой задачи (4.117) – (4.119), в которой функция начальных

условий $\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^N \varphi_{0i}(x)\lambda_i(x)$, где $N = 2$; $\varphi_{01}(x) = 7\|x - \beta_1\|^2$;

$\varphi_{02}(x) = 2\|x - \beta_2\|^2$; $\beta_1 = (3; 2)$; $\beta_2 = (1; 2)$, а в качестве $\lambda_i(\cdot)$ выступали характеристические функции подмножеств, составляющих разбиение множества Ω , на рис. 4.15 они обозначены пунктиром.

При этом начальное разбиение множества $\Omega_1^{(0)} = \Omega$, $\Omega_2^{(0)} = \emptyset$.

При определении множества M_ε^0 допускаемая погрешность $\varepsilon = 0,01$; погрешность, при которой выполнен критерий окончания итерационного процесса, $\varepsilon_1 = 0,0001$.

Оптимальное разбиение, полученное во время проведения 7-й итерации, изображено на рис. 4.15 в виде сплошной линии. Заметим, что добиться точности разбиения, показанного на рис. 4.15 пунктиром, сложно. Это обусловлено, во-первых, погрешностью вычислений при решении краевой задачи (4.112) – (4.114), определении функционалов исходной и вспомогательной задач; во-вторых, погрешностью, допускаемой при определении множества M_ε^0 (см. п. 4.4.3). Значение же функционала исходной задачи, как можно наблюдать, от итерации к итерации уменьшается, что говорит о правильности действия алгоритма.

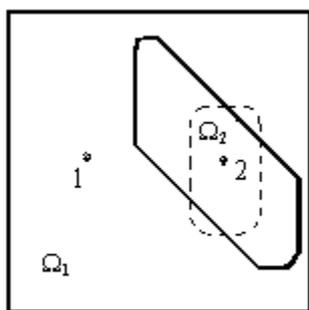


Рис 4.15. Оптимальное разбиение множества в задаче (4.116) – (4.119), если $N = 2$

Таблица 4.2

Номер итерации	I ($0 \leq \lambda \leq 1$)	I ($\lambda = 0 \vee 1$)	Число точек в Ω_0
1	10,29	10,29	0
2	3,67	3,67	0
3	0,88	3,67	42
4	0,6827	3,61	60
5	0,6512	2,83	56
6	0,6113	0,6113	43
7	0,1816	0,6113	125

При решении этой же задачи с использованием такой исходной информации: $N=3$; $\varphi_{0i}(x) = \|x - \tau_i\|^2$; $\tau_1 = (1; 1)$; $\tau_2 = (2; 3)$; $\tau_3 = (3; 1)$; $Z(x)$ – решение краевой задачи (4.116) – (4.119), где

$u(x) = \sum_{i=1}^3 \|x - \tau_i\|^2 \lambda_i(x)$; $\lambda_i(\cdot)$ – характеристические функции подмножеств, образующих разбиение множества Ω , представленное

Методы оптимального разбиения множеств в задачах идентификации динамических систем

на рис. 4.16 пунктиром, на седьмой итерации было получено оптимальное разбиение множества, изображенное там же сплошной линией. Значение функционала исходной задачи уменьшилось с 44,621 до 1,75. Подробная информация о процессе построения минимизирующей последовательности содержится в табл. 4.3.

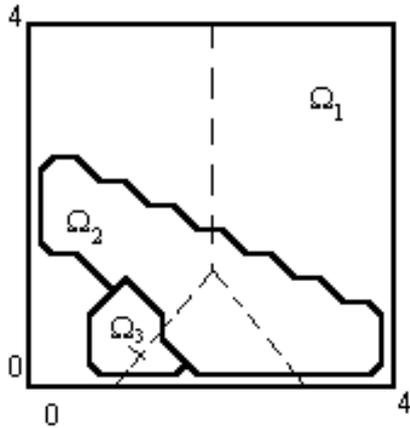


Рис 4.16. Оптимальное разбиение множества в задаче (4.116) – (4.119), если $N = 3$

Таблица 4.3

Номер итерации	I ($0 \leq \lambda \leq 1$)	I ($\lambda = 0 \vee 1$)	Число точек в Ω_0
1	10,45	10,45	0
2	3,8976	3,8976	0
3	3,2783	3,2839	3
4	0,6996	0,7104	2
5	0,4158	0,7104	80
6	0,3831	0,7104	98
7	0,3831	0,7104	117

Таким образом, метод, описанный в п. 4.4.2, позволяет строить минимизирующую последовательность управляющих функций для задачи управления с недифференцируемым функционалом (4.89) – (4.94).

ГЛАВА 5

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ ИНДУСТРИАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ МЕТОДАМИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Среди наиболее важных научных задач в последнее время особое место занимает проблема охраны окружающей среды и ее восстановления. Интенсивное развитие экономики требует определения оптимальных условий для размещения новых предприятий и введения технологических ограничений на их промышленные выбросы с учетом минимальной дозы загрязнения экологически значимых зон. Вопрос удачного выбора мест строительства индустриальных объектов является многоаспектной и алгоритмически сложной задачей. В научных исследованиях проблем оптимальности взаимного расположения промышленных предприятий [75] выделены следующие типы задач:

– планирование ввода в эксплуатацию индустриальных объектов на заданной территории с учетом сформировавшейся там экологической структуры (например, сооружение крупного комбината в окрестностях того или иного города);

– формирование экологической структуры вокруг промышленных объектов (в частности, строительство населенных пунктов рядом с предполагаемым местом сооружения предприятий, эксплуатирующих месторождение полезных ископаемых и поэтому “привязанных” к той или иной местности);

– одновременное вместе с возведением индустриальных объектов планирование экологически значимых зон.

Последние два типа можно рассматривать как частные случаи задач оптимального управления, сводящихся в математической постановке к задачам ОРМ с размещением (или без) “центров подмножеств”. В этой главе иллюстрируется возможность практического применения методов оптимального разбиения множеств к решению указанных задач. Рассматриваются две задачи территориального планирования с учетом диффузионных процессов в атмосфере. Математические модели этих задач включают в себя краевую задачу, сформулированную для дифференциального

уравнения, описывающего процесс переноса и диффузии загрязняющих примесей в атмосфере [26, 75, 85]. Применяя (если это возможно) в этом случае ее аналитическое решение или аппарат сопряженных уравнений [75, 85], сформулированные задачи можно свести к задачам оптимального разбиения множества.

*5.1. ЗАДАЧА ФОРМИРОВАНИЯ
ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ВОКРУГ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ*

Пусть в некотором регионе Ω действуют M промышленных предприятий, выбрасывающих в атмосферу загрязняющую примесь. Требуется на заданной территории Ω выделить N экологически значимых зон некоторой площади S_k , $k = \overline{1, N}$ (например, под сельскохозяйственные угодья, зоны отдыха, жилые постройки) так, чтобы в этих зонах уровень загрязнений, обусловленных деятельностью указанных промышленных объектов не превышал допустимые санитарные нормы, а затраты на восстановление окружающей среды, на сооружение и эксплуатацию коммуникационных линий (железных и автомобильных дорог, водопроводов, линий связи и т. д.) были минимальными.

Составим математическую модель данной задачи. Пусть N промышленных объектов, каждый из которых выбрасывает ежесекундно в атмосферу на высоте $z = H$, загрязняющую субстанцию с интенсивностью Q_i , $i = \overline{1, N}$, расположены в точках $\tau_i = (x_i, y_i) \in \Omega$.

Предположим, что $\varphi(x, y, z, t)$ – интенсивность распространения аэрозольной субстанции, мигрирующей вместе с потоком воздуха в атмосфере. Процесс распространения загрязняющей примеси в цилиндрической области G с поверхностью S , которая включает боковую поверхность цилиндра Σ , нижнее основание Ω (если $z = 0$), верхнее основание Σ_H (когда $z = H$), описывается следующей краевой задачей [27, 75]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} v \varphi + \sigma \varphi = \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + f(x, y, z, t); \quad (5.1)$$

$$\varphi = \varphi_0, \quad \text{если } t = 0; \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha \varphi, \quad \text{если } z = 0; \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \text{если } z = H; \quad (5.4)$$

$$\varphi = \varphi_S \quad \text{на } S, \quad \text{если } v_n < 0, \quad (5.5)$$

где $v = (v_x, v_y, v_z)$, – вектор скорости потока воздуха; $\sigma \geq 0$, – величина, пропорциональная относительной скорости самопроизвольного уменьшения концентрации примеси; $\nu \geq 0$, $\mu \geq 0$, – горизонтальный и вертикальный коэффициенты диффузии соответственно, вычисляемые экспериментально [8, 26]; f представляет собой функцию источника загрязняющей примеси, то есть

$$f = \sum_{i=1}^N Q_i \delta(\bar{x} - \bar{\tau}_i); \quad (5.6)$$

где $\bar{x} = (x, y, z)$, $\delta(\bar{x} - \tau)$, – δ -функция, удовлетворяющая такому условию:

$$\int_{\Omega} \varphi(r) \delta(r - \tau) dr = \begin{cases} \varphi(\tau), & \tau \in \Omega, \\ 0, & \tau \notin \Omega; \end{cases}$$

$\bar{\tau}_i = (x_i, y_i, H)$, $i = \overline{1, N}$; $\varphi_0(\cdot)$, $\varphi_S(\cdot, \cdot)$ – заданные функции, v_n – проекция вектора v на внешнюю нормаль к боковой поверхности S , $\alpha \geq 0$, – некоторая функция, характеризующая взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью.

Потребуем также от решения задачи (5.1) – (5.5) выполнения необходимых условий гладкости и периодичности, а именно:

$$\varphi(r, T) = \varphi(r, 0).$$

Необходимо определить на множестве Ω области (подмножества) Ω_k , $k = \overline{1, N}$, так, чтобы функционал

$$V(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \beta \int_0^T \int_G d(r') \varphi(r', t) dr' dt + \gamma \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left(\sum_{k=1}^M c_i(r, \tau_k) + q_i \right) dr, \quad (5.7)$$

достигал минимального значения и выполнялись такие ограничения:

$$\text{mes}(\Omega_k) = S_k, \quad k = \overline{1, N}; \quad (5.8)$$

$$\Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset, \quad k \neq j, \quad k, j = \overline{1, N}; \quad (5.9)$$

$$a \int_0^T \int_0^H \int_{\Omega_k} \varphi(r', t) dr' dt \leq b_k, \quad k = \overline{1, N}. \quad (5.10)$$

В функционале (5.7) $\beta, \gamma \geq 0$ – это некие константы, по которым определяют приоритет соответствующего слагаемого; $d(r)$ – функция, определяющая затраты на восстановление окружающей среды, причем, если $r \in \Omega_k$, и зона Ω_k выделяется под жилые постройки, то функция $d(r)$ включает не только затраты на очистительные мероприятия, но и отчисления на восстановление здоровья людей в k -й зоне, рассчитанные на единицу концентрации аэрозоля (здесь и далее предположим, что загрязняющая примесь однородна, то есть состоит из одного компонента); будем предполагать, что $d(r)$ – кусочно-постоянная функция, тогда

$$d(r) = \begin{cases} d_i E_i + K_i, & r \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, N}; \\ K_{N+1}, & r \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N \Omega_i, \end{cases}$$

где d_i – затраты на восстановление здоровья людей в расчете на единицу населения и на единицу концентрации загрязнения; K_i – отчисления на очистительные мероприятия; E_i – предполагаемая численность населения в данном регионе (если зона не заселена, то $E_i = 0$); T – заданный момент времени, $c_k(r', \tau_i)$ – стоимость обустройства и эксплуатации коммуникационных линий в расчете на единицу кратчайшего расстояния между объектом τ_i и k -й зоной (включая среднюю стоимость перевозки грузов и пассажиров); q_k – стоимость построек в k -й зоне; $a = \omega_g + \nu\alpha$, b_1, \dots, b_N – заданные неотрицательные константы, которые определяют допустимую норму загрязнения подстилающей поверхности экологически значимых зон.

Легко заметить, что первое слагаемое в выражении функционала (5.7) определяет затраты на восстановление окружающей среды, которые состоят из отчислений на очистительные мероприятия, на охрану здоровья людей рассматриваемого региона, на повышение качества питания, на содержание профилактических учреждений и т. д. Второе слагаемое характеризует стоимость сооружения каких-либо построек в экологически значимых зонах и необходимых коммуникационных линий этих зон для связи с промышленными объектами.

Эквивалентная динамическая задача ОРМ и основные расчетные формулы для ее решения. В экологической литературе [26] считается, что газовые и аэрозольные загрязняющие вещества могут переноситься на десятки, сотни и тысячи километров от источника выброса, однако высота распространения основной массы загрязнения ограничена в пределах 600 – 2000 метров. Масштабы горизонтального переноса в этом случае значительно превышают масштабы возможного вертикального распространения загрязнений. В связи с этим целесообразно использовать двумерную модель для прогноза распространения мелкодисперсных и газообразных примесей. Введя следующее определение среднего количества загрязняющих веществ по высоте возможного их переноса:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{H} \int_0^H \varphi dz,$$

приходим к такой модели распространения загрязняющих аэрозолей:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial v_1 \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial v_2 \bar{\varphi}}{\partial y} + (\sigma + \bar{\sigma}) \bar{\varphi} = \mu \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} + f(r, t), \quad (5.11)$$

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0, \quad \text{если } t = 0, \quad (5.12)$$

$$\bar{\varphi} = g \quad \text{на границе } \partial\Omega, \quad (5.13)$$

где $\bar{\sigma} = \frac{w_g + \alpha v}{H}$.

Если считать, что граница области распространения аэрозоля достаточно удалена от рассматриваемой территории Ω и соответственно от точек $\tau_i, i = \overline{1, M}$, и влиянием выброса в окрестности границы можно пренебречь, то начальные и краевые условия для дифференциального уравнения (5.11) будут иметь следующий вид:

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0, \quad \text{если } t = 0; \quad (5.14)$$

$$\bar{\varphi} \rightarrow 0, \quad \text{если } r \rightarrow \pm\infty. \quad (5.15)$$

Введем в рассмотрение множество $\Omega_{N+1} = \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^N \Omega_k$, мера

которого, очевидно, $\text{mes}(\Omega_{N+1}) = \text{mes}(\Omega) - \sum_{k=1}^N S_k$. Тогда подмножества

$\{\Omega_1, \dots, \Omega_{N+1}\}$ составляют разбиение множества Ω и с учетом

Решение некоторых задач экологии методами оптимального разбиения множеств

вышеизложенного перехода к двумерному аналогу краевой задачи (5.1) – (5.5) исходную задачу можно сформулировать следующим образом: найти разбиение $\bar{\omega} \in P_{N+1}(\Omega)$, которое отвечает таким условиям:

$$\begin{aligned} \bar{V}(\bar{\omega}) = & \beta \int_0^T \sum_{i=1}^{N+1} \int_{\Omega_i} (d_i E_i + K_i) \bar{\varphi}(r, t) dr dt + \\ & + \gamma \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left[\sum_{k=1}^M c_i(r, \tau_k) + q_i \right] dr \rightarrow \min \end{aligned} \quad (5.16)$$

при ограничениях (5.7) – (5.9), где $\bar{\varphi}(\cdot, \cdot)$ – решение краевой задачи (5.11) – (5.13) или (5.11), (5.14), (5.15).

Следуя методу решения задач ОРМ, от этой задачи переходим к задаче бесконечномерного программирования, то есть

$$\begin{aligned} I(\lambda(\cdot)) = & \beta \int_0^T \sum_{i=1}^{N+1} \int_{\Omega} (d_i E_i + K_i) \bar{\varphi}(r, t) \lambda_i(r) dr dt + \\ & + \gamma \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left(\sum_{k=1}^M c_i(r, \tau_k) + q_i \right) \lambda_i(r) dr \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Lambda_0} \end{aligned} \quad (5.17)$$

при таких условиях:

$$\int_{\Omega} \lambda_k(r) dr = S_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (5.18)$$

$$a \int_0^T \int_{\Omega} \bar{\varphi}(r, t) \lambda_k(r) dr dt \leq b_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (5.19)$$

$$\Lambda_0 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_{N+1}(x)) : \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega; \right. \\ \left. 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ для } x \in \Omega; \quad i = \overline{1, N+1} \right\}.$$

Решение этой задачи реализуем путем поиска седловой точки функционала Лагранжа задачи (5.17) – (5.19), который имеет следующий вид:

$$h(\lambda(\cdot), \xi, \psi) = \beta \int_0^T \sum_{i=1}^{N+1} \int_{\Omega} (d_i E_i + K_i) \bar{\varphi}(r, t) \lambda_i(r) dr dt +$$

$$\begin{aligned}
 & +\gamma \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^M c_i(r, \tau_k) + q_i \right) \lambda_i(r) dr + \sum_{i=1}^{N+1} \xi_i \left(\int_{\Omega} \lambda_i(r) dr - S_i \right) + \\
 & + \sum_{i=1}^N \psi_i \left(a \int_0^T \int_{\Omega} \bar{\varphi}(r, t) \lambda_i(r) dr dt - b_i \right),
 \end{aligned}$$

где $(\psi, \xi) \in \Gamma = \{(\psi, \xi) \in R^{2N+1} : \psi_i \geq 0, i = \overline{1, N}\}$, $\lambda(\cdot) \in \Lambda_0$.

Введя в рассмотрение такую вектор-функцию:

$$p_i(r, \psi_i, \xi_i) = \begin{cases} \left(a\psi_i + \beta(d_i E_i + K_i) \right) \int_0^T \bar{\varphi}(r, t) dt + \gamma \left(\sum_{k=1}^M c_i(r, \tau_k) + q_i \right) + \xi_i, & i = \overline{1, N} \\ \beta K_i \int_0^T \bar{\varphi}(r, t) dt + \xi_i, & i = N+1, \end{cases}$$

функционал Лагранжа можем записать в компактной, удобной для дальнейшего исследования, форме, а именно:

$$h(\lambda(\cdot), \xi, \psi) = \sum_{i=1}^{N+1} \int_{\Omega} p_i(r, \psi_i, \xi_i) \lambda_i(r) dr - \sum_{i=1}^{N+1} \xi_i S_i - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i.$$

Для отыскания седловой точки этого функционала получены следующие формулы:

$$\lambda_i^*(r) = \begin{cases} 1, & \text{если } p_i(r, \psi_i^*, \xi_i^*) = \min_{k=1, N+1} p_k(r, \psi_k^*, \xi_k^*) \\ 0 & \text{в остальных случаях, } \forall i = \overline{1, N+1}, \end{cases} \quad (5.20)$$

где в качестве параметров $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*, \xi_1^*, \dots, \xi_{N+1}^*$ выбирается решение такой задачи:

$$G(\psi, \xi) = \int_{\Omega} \min_{k=1, N+1} p_k(r, \psi_k, \xi_k) dr - \sum_{i=1}^{N+1} \xi_i S_i - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \rightarrow \max_{(\xi, \psi) \in \Gamma}. \quad (5.21)$$

Алгоритм решения задачи формирования экологической структуры вокруг промышленных объектов. Вместо задачи условной оптимизации (5.21) будем решать такую задачу на безусловный максимум функции:

$$P(\psi, \xi) = G(\psi, \xi) - S \sum_{k=1}^N \max(0, -\psi_k). \quad (5.22)$$

Множество Ω покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение $(\psi, \xi) = (\psi^{(0)}, \xi^{(0)})$. Тем или иным методом [27, 75] решаем краевую задачу (5.11) – (5.13).

Вычисляем значения функции $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (5.20) при условии, что $\psi = \psi^{(0)}$, $\xi = \xi^{(0)}$. Определяем компоненты вектора градиента функции $P(\psi, \xi)$ в узлах сетки согласно таким формулам:

$$g_P^{\psi k}(\psi, \xi) = a \int_0^T \int_{\Omega} \bar{\varphi}(r, t) \lambda_k(r) dr dt - b_k + S \max[0, \text{sign}(-\psi_k)], \quad k = \overline{1, N};$$

$$g_P^{\xi k} = -S_k + \int_{\Omega} \lambda_k(r) dr, \quad k = \overline{1, N+1}, \quad (5.23)$$

при том, что $\lambda = \lambda^{(0)}(\cdot)$, $\psi = \psi^{(0)}$, $\xi = \xi^{(0)}$.

Выбираем начальный пробный шаг $\beta_0 > 0$ для r -алгоритма и получаем первое приближение неизвестных параметров, то есть

$$\psi_i^{(1)} = \psi_i^{(0)} + \beta_0 g_P^{\psi_i}(\psi^{(0)}, \xi^{(0)}), \quad i = \overline{1, N};$$

$$\xi_i^{(1)} = \xi_i^{(0)} + \beta_0 g_P^{\xi_i}(\psi^{(0)}, \xi^{(0)}), \quad i = \overline{1, N+1}.$$

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после выполнения k , $k = 1, 2, \dots$, шагов алгоритма получены определенные значения приближений $\lambda^{(k-1)}(\cdot)$, $\psi^{(k)}$, $\xi^{(k)}$ в узлах сетки.

Далее опишем $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значения функции $\lambda^{(k)}(\cdot)$ в узлах сетки по формулам (5.19), если $\psi = \psi^{(k)}$, $\xi = \xi^{(k)}$.

2. Определяем значение вектора градиента функции $P(\psi, \xi)$ в узлах сетки по формулам (5.23), при том, что $\lambda = \lambda^{(k)}(\cdot)$, $\psi = \psi^{(k)}$, $\xi = \xi^{(k)}$.

3. Выполняем $(k+1)$ -й шаг алгоритма обобщенных градиентов с растяжением пространства, краткая схема которого имеет следующий вид:

$$(\psi^{(k+1)}, \xi^{(k+1)}) = (\psi^{(k)}, \xi^{(k)}) + \beta_k B_{k+1}^{\psi} \tilde{g}_P(\psi^{(k)}, \xi^{(k)}),$$

где B_{k+1} – операторы отображения преобразованного пространства в

основное пространство E^{2N+1} , причем $B_0 = I_{2N+1}$ (I_{2N+1} – единичная матрица), $\tilde{g}_P = (B_{k+1})^* g_P(\psi^{(k)}, \xi^{(k)})$; β_k – шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия оптимума по направлению \tilde{g}_P .
 Формулы для пересчета матриц B_{k+1} см. в разделе 1.2.2.

4. Если такое условие:

$$\left\| (\psi^{(k)}, \xi^{(k)}) - (\psi^{(k+1)}, \xi^{(k+1)}) \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (5.24)$$

не выполняется, то переходим к $(k + 2)$ -му шагу алгоритма, иначе – к п. 5.

5. Полагаем, что $\lambda^*(\cdot) = \lambda^{(l)}(\cdot)$; $\psi^* = \psi^{(l)}$; $\xi = \xi^{(l)}$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (5.24).

6. Вычисляем оптимальное значение целевой функции по формуле (5.24) при условии, что $\psi = \psi^*$, $\xi = \xi^*$, а для контроля правильности счета – значение функционала (5.17), если $\lambda(\cdot) = \lambda^*(\cdot)$.

*5.2. ЗАДАЧА ОДНОВРЕМЕННОГО
 ПЛАНИРОВАНИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА
 ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ
 И ЭКОЛОГИЧЕСКИ ЗНАЧИМЫХ ЗОН*

Пусть требуется в некотором регионе Ω определить место для строительства нового промышленного объекта и выделить зоны $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ заданной площади так, чтобы вызванный деятельностью этого предприятия уровень загрязнения земной поверхности в выделенных экологически значимых зонах не превышал допустимые санитарные нормы, а общее количество выпавшей загрязняющей примеси на подстилающую поверхность области Ω было минимальным. Введем также условие размещения источника загрязнения как можно ближе к каждой из зон [67].

Так как в сформулированной задаче нас интересует только уровень загрязнения земной поверхности региона, то для описания процесса распространения загрязняющей примеси ограничимся двумерной моделью (5.11) – (5.13). Функция источника загрязнений в уравнении (5.11) имеет такой вид:

$$f(\tau_0, r, t) = Q(t)\delta(r - \tau_0), \quad (5.25)$$

где $Q(t)$ – предполагаемая интенсивность источника загрязнений (может изменяться со временем), $\tau_0 = (x_0, y_0)$, – его координаты.

Условимся решение краевой задачи (5.11) – (5.13) с функцией источника (5.25), соответствующее каждой точке $\tau_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, обозначать $\varphi(r, \tau_0, t)$.

Требуется найти точку $\tau_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, и выделить на множестве Ω подмножества $\Omega_k, k = \overline{1, N}$, таким образом, чтобы функционал

$$V(\tau_0, \{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) = \beta a \int_0^T \int_{\Omega} \bar{\varphi}(r', \tau_0, t) dr' dt + \gamma \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} c_k(r, \tau_0) dr, \quad (5.26)$$

достигал минимального значения при выполнении следующих ограничений:

$$\text{mes}(\Omega_k) = S_k, \quad k = \overline{1, N}; \quad (5.27)$$

$$\Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset, \quad k \neq j, \quad k, j = \overline{1, N}; \quad (5.28)$$

$$a \int_0^T \int_{\Omega} \bar{\varphi}(r', \tau_0, t) dr' dt \leq b_k, \quad k = \overline{1, N}. \quad (5.29)$$

В выражении (5.26) β и γ – весовые коэффициенты, T – заданный момент времени.

Замечание. Задача (5.26) – (5.29) легко распространяется на случай произвольности конечного числа размещаемых объектов.

Эквивалентная задача ОРМ и основные соотношения, характеризующие оптимальное решение задачи. Как и в предыдущем пункте, введя в рассмотрение подмножество

$$\Omega_{N+1} = \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^N \Omega_k, \quad \text{с мерой } \text{mes}(\Omega_{N+1}) = \text{mes}(\Omega) - \sum_{k=1}^N S_k, \quad \text{от задачи}$$

(5.26) – (5.29) переходим к эквивалентной задаче оптимального разбиения множества, в которой необходимо определить разбиение $\bar{\omega}^* = \{\Omega_1^*, \dots, \Omega_{N+1}^*\} \in P_{N+1}(\Omega)$, и точку $\tau_0^* \in \Omega$, при которых функционал

$$V(\tau_0, \bar{\omega}) = \beta a \sum_{k=1}^{N+1} \int_0^T \int_{\Omega} \bar{\varphi}(r, \tau_0, t) dr dt + \gamma \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} c_k(r, \tau_0) dr, \quad (5.30)$$

достигал своего минимального значения с учетом ограничений (5.27) – (5.29), где $\bar{\varphi}(r, \tau, t)$ – решение краевой задачи (5.11) – (5.13), (5.25).

Для подмножества Ω_{N+1} введем фиктивное ограничение, то есть

$$a \int_0^T \int_{\Omega_{N+1}} \bar{\varphi}(r, \tau, t) dr dt \leq b_{N+1}, \quad (5.31)$$

где $b_{N+1} = \int_0^T \int_{\Omega} \max_{\tau \in \Omega} \bar{\varphi}(r, \tau, t) dr dt$.

Следуя методике решения линейных задач ОРМ, от задачи (5.30), (5.27) – (5.29) перейдем к задаче бесконечномерного программирования, а именно:

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \beta a \sum_{k=1}^{N+1} \int_0^T \int_{\Omega_k} \bar{\varphi}(r, \tau, t) \lambda_k(r) dr dt + \\ + \gamma \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} c_k(r, \tau) dr \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Lambda_2 \times \Omega}, \quad (5.32)$$

где

$$\Lambda_2 = \left\{ \lambda(r) \in \Lambda_0; \int_0^T a \int_{\Omega_i} \bar{\varphi}(r, \tau, t) \lambda_i(r) dr dt \leq b_i, \int_{\Omega_i} \lambda_i(r) dr = S_i, i = \overline{1, N+1} \right\}; \\ \Lambda_0 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_{N+1}(x)): 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, \right. \\ \left. i = \overline{1, N+1}; \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i(x) = 1 \text{ п. в. для } x \in \Omega \right\}.$$

Оптимальное решение задачи (5.32) получено в следующем виде: для $i = \overline{1, N+1}$ и п. в. для $x \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x') = \begin{cases} 1, & \text{если } x' \in \Omega_i^*, \\ 0, & \text{если } x' \in \Omega \setminus \Omega_i^*, \end{cases} \quad (5.33)$$

$$\Omega_i^* = \left\{ r \in \Omega: p_i(r, \tau_0^*, \psi_i, \xi_i) = \min_{k=1, N+1} p_k(r, \tau_0^*, \psi_k, \xi_k) \right\},$$

где

$$p_i(r, \tau_0^*, \psi_i, \xi_i) = \begin{cases} a(\beta + \psi_i) \int_0^T \bar{\varphi}(r, \tau_0^*, t) dt + \gamma c_i(r, \tau_0^*) + \xi_i, & i = \overline{1, N}; \\ a(\beta + \psi_i) \int_0^T \bar{\varphi}(r, \tau_0^*, t) dt + \xi_i, & i = N + 1, \end{cases}$$

а в качестве параметров $\tau_0^*, \psi_1^*, \dots, \psi_{N+1}^*, \xi_1^*, \dots, \xi_{N+1}^*$ выбирается оптимальное решение такой задачи:

$$G(\tau, \psi, \xi) = \int_{\Omega} \min_{k=1, N+1} p_k(r, \tau, \psi_k, \xi_k) dr - \sum_{i=1}^{N+1} (\psi_i b_i + \xi_i S_i) \rightarrow \min_{\tau \in \Omega} \max_{(\psi, \xi) \in \Gamma}, \quad (5.34)$$

$$\Gamma = \{(\psi, \xi) \in E^{2N+1} : \psi_i \geq 0, i = \overline{1, N+1}\}.$$

Далее, на основе полученных формул составим численный алгоритм решения задачи ОРМ и отметим особенности его реализации в расчете на приближенное решение краевой задачи для определения функции $\bar{\varphi}(r, \tau, t)$ при помощи конечно-разностных схем.

Численный алгоритм решения задачи ОРМ. Пусть в задаче (5.34) функция $\bar{\varphi}(r, \tau, t)$ является решением краевой задачи (5.11), (5.14), (5.15). В предположении, что компоненты вектора скорости v_1, v_2 представляют собой постоянные величины, решение краевой задачи может иметь аналитический вид [42, 43], то есть

$$\bar{\varphi}(r, \tau, t) = \frac{Q}{4\pi\mu t} \exp \left[-\bar{\sigma}t - \frac{[x - x_0 - v_1 t]^2}{4\mu t} - \frac{[y - y_0 - v_2 t]^2}{4\mu t} \right], \quad (5.35)$$

$$t \in [0, T].$$

Подставив это выражение в задачу (5.34), получим задачу условной конечномерной оптимизации негладкой функции $G(\tau, \psi, \xi)$, для решения которой будем применять r -алгоритм. При этом от задачи условной оптимизации по переменной ψ переходим к задаче на безусловный экстремум, а именно:

$$P(\tau, \psi, \xi) = G(\tau, \psi, \xi) + A \sum_{i=1}^{N+1} \max(-\psi_i, 0) \rightarrow \min_{\tau \in \Omega} \max_{(\psi, \xi) \in E^{2N+2}}, \quad (5.36)$$

где A – некоторая постоянная, значительно большая максимального множителя Лагранжа.

Численный алгоритм решения задачи оптимального разбиения (5.32) в случае, когда имеется ввиду аналитическое решение начально-краевой задачи (5.11), (5.14), (5.15), формулируем ниже.

Множество Ω покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение $(\psi, \tau, \xi) = (\psi^{(0)}, \tau^{(0)}, \xi^{(0)})$. Вычисляем значения функции $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (5.33) при таких условиях: $\psi = \psi^{(0)}$, $\tau = \tau^{(0)}$, $\xi = \xi^{(0)}$. Определяем также значения компонент вектора градиента функции $P(\tau, \psi, \xi)$ в узлах сетки, применив следующие формулы:

$$g_P^{\psi_k}(\tau, \psi, \xi) = \beta a \int_0^T \int_{\Omega} \bar{\varphi}(r, \tau, t) \lambda_k(r) dr dt - b_k + S \max[0, \text{sign}(-\psi_k)],$$

$$k = \overline{1, N+1};$$

$$g_P^{\tau} = a \sum_{i=1}^{N+1} \int_0^T \int_{\Omega} (\beta + \psi_i) \frac{\partial \bar{\varphi}(r, \tau, t)}{\partial \tau} dx dt + \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial c_k(r, \tau)}{\partial \tau} dr;$$

$$g_P^{\xi} = -S_k + \int_{\Omega} \lambda_k(r) dr, \quad k = \overline{1, N+1}, \quad (5.37)$$

если $\lambda = \lambda^{(0)}(\cdot)$, $\psi = \psi^{(0)}$, $\tau = \tau^{(0)}$, $\xi = \xi^{(0)}$. Компоненты вектора градиента функции $\bar{\varphi}(r, \tau, t)$ вычисляются по таким формулам:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}(r, \tau, t)}{\partial x_0} = \frac{Q}{4\pi\mu t} \exp \left[-\bar{\sigma}t - \frac{[x - x_0 - v_1 t]^2}{4\mu t} - \frac{[y - y_0 - v_2 t]^2}{4\mu t} \right] \times \frac{-2(x - x_0 - v_1 t)}{4\mu t};$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}(r, \tau, t)}{\partial y_0} = \frac{Q}{4\pi\mu t} \exp \left[-\bar{\sigma}t - \frac{[x - x_0 - v_1 t]^2}{4\mu t} - \frac{[y - y_0 - v_2 t]^2}{4\mu t} \right] \times \frac{-2(y - y_0 - v_2 t)}{4\mu t}.$$

Выбираем начальный пробный шаг $\beta_0 > 0$ для r -алгоритма и находим значения таких переменных:

$$\psi_i^{(1)} = \psi_i^{(0)} + \beta_0 g_P^{\psi_i}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)});$$

$$\xi_i^{(1)} = \xi_i^{(0)} + \beta_0 g_P^{\xi_i}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)}); \quad i = \overline{1, N+1};$$

$$\tau^{(1)} = \text{Pr}_{\Omega} \left[\tau^{(0)} - \beta_0 g_P^{\tau}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}, \xi^{(0)}) \right],$$

где Pr_{Ω} – оператор проектирования на Ω .

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после выполнения $k, k = 1, 2, \dots$, шагов алгоритма получены определенные значения приближений $\lambda^{(k-1)}(\cdot), \psi^{(k)}, \tau^{(k)}, \xi^{(k)}$ в узлах сетки. Опишем последовательность действий на $(k + 1)$ -м шаге.

1. Вычисляем значения функции $\lambda^{(k)}(\cdot)$ в узлах сетки по формулам (5.33), при том, что $\psi = \psi^{(k)}; \tau = \tau^{(k)}; \xi = \xi^{(k)}$.

2. Определяем значение вектора градиента функции $P(\tau, \psi, \xi)$ в узлах сетки, применяя формулы (5.37), если $\lambda = \lambda^{(k)}(\cdot); \psi = \psi^{(k)}; \tau = \tau^{(k)}; \xi = \xi^{(k)}$.

3. Выполняем $(k + 1)$ -й шаг алгоритма обобщенных псевдо-градиентов с растяжением пространства и определяем приближения $\psi^{(k+1)}, \xi^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}$ (см. раздел 1.2.2).

4. Если условие

$$\left\| \left(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \xi^{(k)} \right) - \left(\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}, \xi^{(k+1)} \right) \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (5.38)$$

не выполняется, то переходим к $(k + 2)$ -му шагу алгоритма, а иначе – к п. 5.

5. Полагаем, что $\lambda^* = \lambda^{(l)}(\cdot); \psi^* = \psi^{(l)}; \tau^* = \tau^{(l)}; \xi = \xi^{(l)}$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (5.38).

6. Вычисляем оптимальное значение целевой функции по формуле (5.34) при условии, что $\psi = \psi^*; \tau = \tau^*; \xi = \xi^*$, а для контроля правильности счета – значение функционала (5.32), если $\lambda(\cdot) = \lambda^*(\cdot); \tau = \tau^*$.

Алгоритм описан.

В случае, когда решение краевой задачи (5.11) – (5.13) или (5.11), (5.14), (5.15) можно осуществить только при помощи каких-либо приближенных методов интегрирования, для отыскания градиента функции $G(\tau, \psi, \xi)$ относительно переменной τ приходится применять конечноразностные производные, то есть

$$\frac{\partial \bar{\varphi}(r, \tau + h_x e_1, t)}{\partial \tau_1} = \frac{\bar{\varphi}(r, \tau + h_x e_1, t) - \bar{\varphi}(r, \tau, t)}{h_x},$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}(r, \tau + h_y e_2, t)}{\partial \tau_2} = \frac{\bar{\varphi}(r, \tau + h_y e_2, t) - \bar{\varphi}(r, \tau, t)}{h_y},$$

где e_1, e_2 – орты соответствующих осей координат.

Как нетрудно заметить, для вычисления компонент вектор-градиента функции $G(\tau, \psi, \xi)$ по переменной τ необходимо решать на каждой итерации оптимизационного процесса краевую задачу (5.11) – (5.13) трижды (а в случае, когда количество размещаемых предприятий M произвольно, то $2M + 1$ раз).

В остальном алгоритм решения задачи тот же.

Опишем еще один алгоритм решения задачи оптимального разбиения (5.32), который позволяет избежать многократного численного решения краевой задачи для уравнения переноса и диффузии при выполнении каждой итерации процесса оптимизации функции $G(\tau, \psi, \xi)$. Этот алгоритм отличается от вышеописанных способом отыскания компонент вектора градиента целевой функции в задаче (5.34), соответствующих переменной $\tau = (x_0, y_0)$.

Пусть известно некоторое начальное приближение координат размещаемого предприятия $\tau^{(0)}$, а также начальные значения вектора двойственных переменных $\psi^{(0)}, \xi^{(0)}$.

Находим значения функции $\bar{\varphi}(\cdot, \cdot, \cdot)$ в узлах сетки при условии, что $\tau = \tau^{(0)}$. Вычислим значения функции $\lambda^{(0)}(\cdot)$ в узлах сетки по формулам (5.33).

Компоненты вектора градиента функции $G(\tau, \psi, \xi)$ по переменным ψ, ξ вычисляются с применением тех же формул (5.37). Для того, чтобы найти компоненты градиента, соответствующие переменной τ , выполним рассмотренные ниже действия.

Запишем задачу, сопряженную с моделью (5.11) – (5.13), а именно:

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{\partial v_1 \varphi^*}{\partial x} - \frac{\partial v_2 \varphi^*}{\partial y} + \sigma \varphi^* = \mu \Delta \varphi^* + q; \quad (5.39)$$

$$\varphi^* = 0, \quad \text{если } t = T, \quad (5.40)$$

$$\varphi^* = 0 \quad \text{на } \partial \Omega. \quad (5.41)$$

Функцию $G(\tau, \psi, \xi)$ запишем в таком виде:

$$G(\tau, \psi, \xi) = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \left[a(\beta + \psi_k) \int_0^T \bar{\varphi}(r, \tau, t) dt + \xi_k \right] \lambda_k^{(0)}(r) dr - \\ - \text{mes}(\Omega) + \gamma \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} c_k(r, \tau) dr - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i. \quad (5.42)$$

Когда в качестве функции q выбирают следующую функцию:

$$q(r, t) = \begin{cases} a(\beta + \psi_k), & \text{если } (r, t) \in \Omega_k \times [0, T] \\ 0, & \text{если } (r, t) \notin \Omega_k \times [0, T], \end{cases}$$

то линейная относительно функции $\bar{\varphi}(\cdot, \cdot, \cdot)$ часть функционала может быть записана в сопряженном виде, то есть

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} a(\beta + \psi_k) \int_0^T \bar{\varphi}(r, \tau, t) dt \lambda_k^{(0)}(r) dr = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} Q \delta(r - \tau) \varphi^*(r, t) dr dt = Q \int_0^T \varphi^*(\tau, t) dt. \end{aligned}$$

Теперь частные производные функции $G(\tau, \psi, \xi)$ по координатам τ будем вычислять таким образом:

$$g_P^\tau = Q \int_0^T \frac{\partial \varphi^*(\tau, t)}{\partial \tau} dt,$$

где

$$\frac{\partial \varphi^*(\tau, t)}{\partial \tau_1} \approx \frac{\varphi^*((x_{l+1}, y_j), t) - \varphi^*((x_l, y_j), t)}{h_x};$$

$$\frac{\partial \varphi^*(\tau, t)}{\partial \tau_2} \approx \frac{\varphi^*((x_l, y_{j+1}), t) - \varphi^*((x_l, y_j), t)}{h_y},$$

здесь (x_l, y_j) – точка на сетке γ , наименее отстоящая от приближения $\tau^{(0)}$. Значения сопряженной функции $\varphi^*(\cdot, \cdot, \cdot)$ в узлах сетки находим каким-либо из приближенных конечно-разностных методов.

5.3. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ

Как известно, при расчете переноса примесей в окружающей среде с использованием моделей турбулентности большое значение имеет точность и достоверность задания исходной информации. Используя расчетные модели для изучения миграции в атмосфере примесей на протяжении достаточно длительных интервалов времени, принимают во внимание результаты наблюдений, а также применяют различные эмпирические формулы расчета входной информации, по которым, в свою очередь, выполняют численное

решение уравнения переноса и диффузии примеси (коэффициенты турбулентного обмена, скорость осаждения примеси и т. д.).

Пример 5.1. Рассмотрим задачу определения в некоторой прямоугольной области размером 500×500 км пяти зон площадью 100, 200, 200, 200 и 200 кв. км, отводимых, в частности, под сельскохозяйственные угодья, с минимальным уровнем загрязнения почвенного покрова антропогенными выбросами городов и промышленных центров. Известно, что промышленные выбросы распространяются на высоте $H \approx 350 - 600$ м, поэтому решение уравнения (5.10) дает осредненное по высоте значение концентрации примеси. Общее количество источников выброса 10. Численное решение осуществляют в безразмерном виде. В качестве характерного линейного масштаба выбран размер $L = 100$ км. Размерный масштаб скорости $V = 1$ м/с. Значения безразмерных координат городов и промышленных центров указаны в табл. 5.1. Для проведения численного эксперимента примем за масштабную единицу количество примеси, выбрасываемой в атмосферу в городе N1, и нормируем выбросы, происходящие в остальных промышленных центрах. В безразмерном виде количество примеси, выбрасываемой в городе N1, равно 10, выброс из остальных загрязняющих источников оценивается безразмерным коэффициентом q , его значение находим в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Координаты предприятий и данные об интенсивности распространения выбросов для решения примера 5.1

Промышленный центр	Координата x , км	Координата y , км	Безразмерная величина выброса q
N1	1	1	10,0
N2	2,04	2,04	5,6
N3	2,96	2,96	4,0
N4	3,94	3,98	4,0
N5	1,02	2,06	3,0
N6	1	3	6,0
N7	1,02	4	6,3
N8	2	2,95	4,2
N9	2	1	6,3
N10	2,04	3,98	8,4

Здесь при выполнении расчетов принимались следующие безразмерные значения коэффициентов диффузии: $\mu_x = \mu_y = 0,4$. В значении коэффициента σ в двумерной модели (5.10) учтены такие факторы: скорость оседания частиц примеси, изменение интенсивности воздействия примеси вследствие химических превращений, влияние почвенного покрова, вымывание примеси осадками. В качестве исходного значения было принято, что $\sigma = 0,2 \cdot 10^{-4}$. Эти и дополнительные данные относительно розы ветров в регионе, параметров краевой задачи, описывающей процесс распространения загрязняющих веществ в атмосфере, взяты из литературы [26].

В выражении функционала (5.7) значения функций $c_i(r, \tau)$, описывающих стоимость сооружения и эксплуатации коммуникационных линий в расчете на единицу кратчайшего расстояния между объектами τ_k , $k = \overline{1, NN}$, и точкой r i -й охранной зоны (включая среднюю стоимость планируемых перевозок грузов), пропорциональны этому расстоянию. Преобладающим в рассматриваемом регионе на протяжении временного цикла $[0; T]$ предполагалось направление ветра, параллельное оси x .

Другая исходная информация: ограничения на предельно допустимые санитарные нормы загрязнения выделяемых экологически важных зон равны соответственно 2,5; 3; 0,6; 0,9; 0,5 условных единиц, точность вычислений $\varepsilon = 0,0001$.

Численный расчет выполнялся при помощи разностной сетки размером 100×100 узлов. Для решения краевой задачи, описывающей процесс распространения загрязняющих веществ (5.10) – (4.12), использовали приведенную в литературе четырехшаговую попеременно-треугольную разностную схему [26]. Схема динамики распространения загрязняющего вещества в атмосфере изображена на рис. 5.1. Здесь показаны среднегодовые показатели концентрации техногенной примеси.

На рис. 5.2 изображено разбиение множества, являющееся оптимальным решением задачи (5.7), (5.10) – (5.12) в случае, когда коэффициенты β и γ в функционале, которые определяют приоритет того или иного слагаемого, равны соответственно 10 и 0,005.

На рис. 5.3 видим разбиение множества, полученное в результате решения той же задачи при условии, что $\beta = 0,1$ и $\gamma = 10$. Здесь

отражена ситуация, когда стоимость проведения коммуникаций превышает сумму отчислений на очистительные мероприятия. Как видно из рис. 5.2 и 5.3, выделяемые в рассматриваемой области экологически важные зоны могут быть не связаны между собой, кроме того, вытянуты вдоль линий, отражающих уровень концентрации загрязняющей примеси.

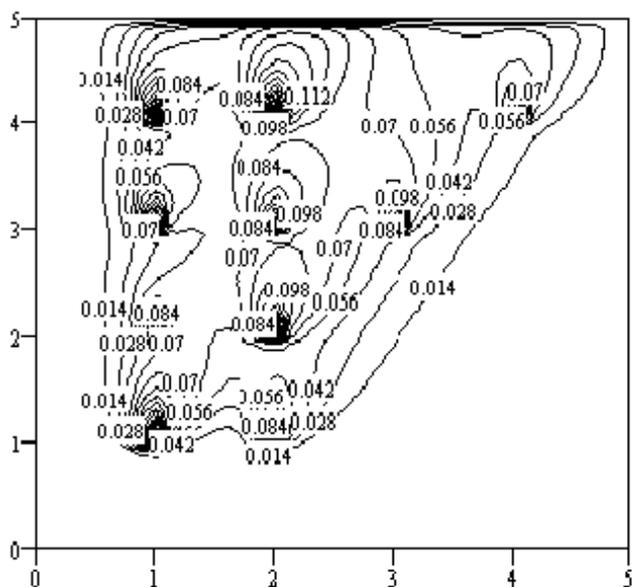


Рис. 5.1. Схема динамики распространения загрязняющего вещества в атмосфере

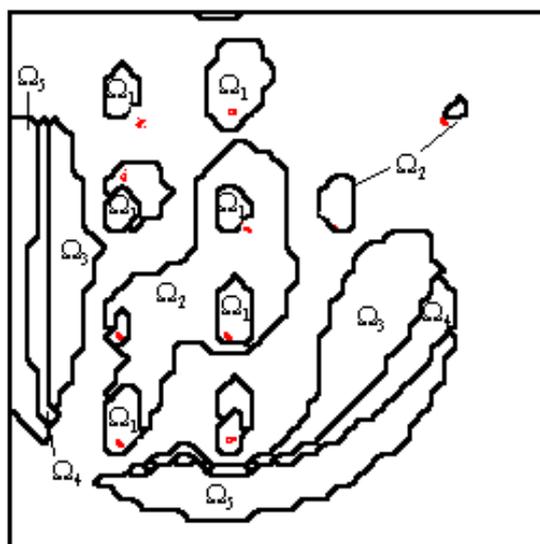


Рис. 5.2. Оптимальное решение задачи (5.7), (5.10) – (5.12), в которой $\beta = 10$; $\gamma = 0,005$

Для того, чтобы получить более компактно расположенные области Ω_k в множестве, необходимо учитывать дополнительные ограничения на диаметры этих подмножеств. Это значительно усложняет решение задачи.

Пример 5.2. Рассмотрим еще одну смоделированную ситуацию. Пусть в области размером 80×70 кв. км требуется выделить 5 зон (подмножеств), площадь которых составляет 30, 10, 30, 20, 50 кв. км.

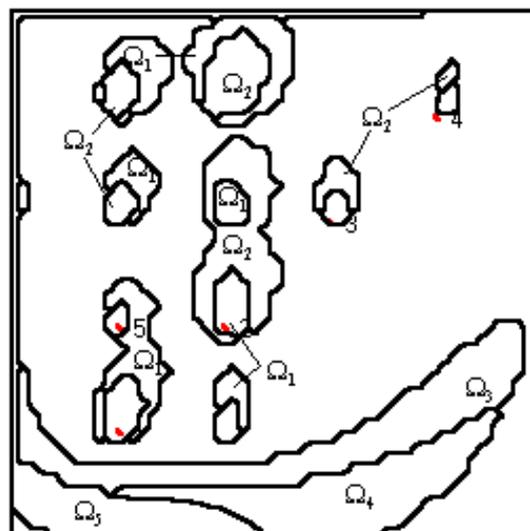


Рис. 5.3. Оптимальное решение задачи (5.7), (5.10) – (5.12), в которой $\beta = 0,1$; $\gamma = 10$

Решение некоторых задач экологии методами оптимального разбиения множеств

При этом уровень загрязнения почвенного покрова этих зон выбросами вследствие деятельности 5 крупных промышленных центров не должен превышать санитарно допустимые нормы, а сами зоны следует разместить как можно ближе к указанным центрам. Координаты расположения и значения интенсивности выбросов, исходящих от источников загрязняющих веществ, приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Координаты предприятий и данные об интенсивности промышленных выбросов для решения примера 5.2

Промышленный центр	Координата x , км	Координата y , км	Безразмерная величина выброса q
N1	7	6	100
N2	6	5	100
N3	1,95	3,98	100
N4	4	2,98	200
N5	7,7	2	100

В решении задачи использовали следующие входные данные: $\sigma = 0$; $w_s = 0,08$, коэффициенты диффузии $\mu_x = \mu_y = 0,4$; равномерный профиль ветра: $u = -1$; $v = 0$. В качестве начального для расчета концентрации загрязняющего вещества было задано условие, что $\varphi = 0$. Приняты такие ограничения на предельно допустимые санитарные нормы загрязнения экологически важных зон: $b = (1; 2; 3; 2; 1)$.

Константы, определяющие приоритет слагаемых β и γ в выражении функционала задачи, задавались равными 10 и 1 соответственно. В результате решения задачи с применением алгоритма, включающего численный расчет краевой задачи, сформулированной для уравнения переноса, оптимальное разбиение области было достигнуто во время выполнения 67-й итерации в виде, изображенном на рис. 5.4.

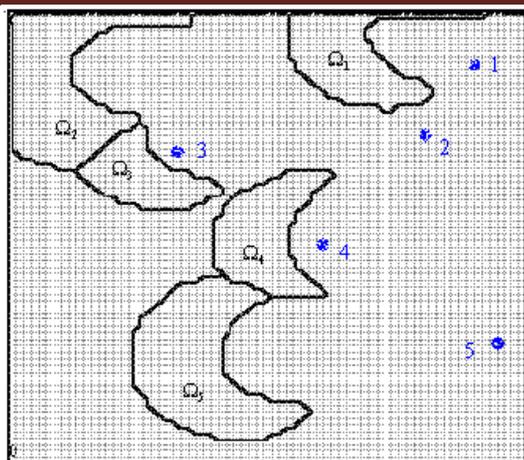


Рис. 5.4. Оптимальное разбиение области в примере 5.2

Оптимальное значение функционала исходной задачи равно 20,15. Для контроля правильности счета было вычислено значение функционала двойственной задачи, а также определены площади полученных зон. Результатом вычислений были следующие величины: $P = 19,75$; $S = (29,97; 10,03; 30; 19,97; 41,25)$; при этом уровень загрязнения значительно меньше допустимых норм.

Пример 5.3. Приведем решение одной тестовой задачи, предусматривающей одновременное размещение промышленных объектов и выделение экологически значимых зон. Пусть в некотором регионе размером 800×700 кв. км требуется разместить промышленные объекты ($N = 4$) и выделить 4 зоны площадью 600, 400, 300 и 200 кв. км. Предполагаемая интенсивность ежесекундных выбросов в атмосферу загрязняющих веществ каждым из предприятий равна 20, 10, 10, 20 усл. ед. соответственно. Предельно допустимые санитарные нормы загрязнения для каждой зоны равны 0,5; 0,2; 0,3; 0,2 усл. ед. соответственно. Введем условие, по которому i -я зона находилась бы как можно ближе к i -му предприятию. При этом предполагается, что затраты на проведение коммуникационных линий пропорциональны расстоянию от выделенной зоны до соответствующего промышленного объекта, а затраты на восстановление окружающей среды пропорциональны концентрации загрязняющего вещества в каждой точке зоны. Начальным приближением мест расположения промышленных центров считали точки с такими координатами: (0,8; 5,4); (2;2); (6;3) и (4;4).

На рис. 5.5 изображено разбиение области на зоны и координаты промышленных центров, что соответствует оптимальному решению сформулированной задачи при условии, что $\beta = 0,1$ и $\gamma = 1$. Эти значения коэффициентов позволяют сделать приоритетным в выражении функционала слагаемое, в котором учтены затраты на проведение коммуникационных линий. Оптимальные координаты промышленных объектов имеют следующие значения: $\tau_1 = (6,84; 3,96)$; $\tau_2 = (1,04; 2,33)$;

Решение некоторых задач экологии методами оптимального разбиения множеств

$\tau_3 = (5,23; 1,15)$; $\tau_4 = (2,74; 0,90)$. Функционал задачи при этом равен 16,213 (значение двойственного критерия качества равно 15,85).

Результатом решения задачи, в которой учтен только уровень загрязнения среды, что соответствует таким значениям коэффициентов: $\beta = 100$ и $\gamma = 0,01$, было разбиение области на экологически значимые зоны (см. рис. 5.6).

Следует отметить, что решение достигнуто путем выполнения значительно меньшего числа итераций (81), чем в предыдущем случае, когда $\beta = 0,1$ и $\gamma = 1$, а для получения оптимального решения задачи потребовалось 395 итераций.

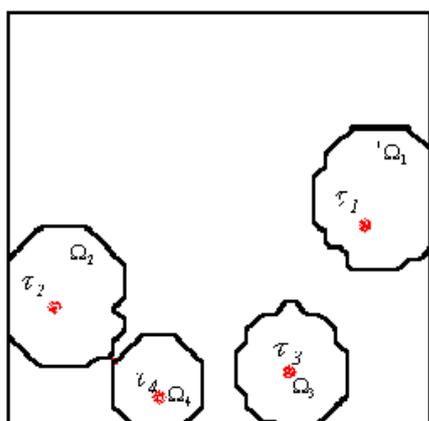


Рис. 5.5. Оптимальное решение примера 5.3 при условии, что $\beta = 0,1$; $\gamma = 1$

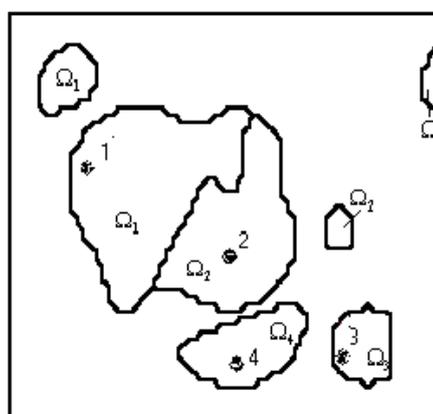


Рис. 5.6. Оптимальное решение примера 5.3 при условии, что $\beta = 100$; $\gamma = 0,01$

Таким образом, результаты численных экспериментов на ЭВМ подтверждают возможность использования методов ОРМ к решению задач формирования экологической системы промышленных регионов, подобных задачам (5.1) – (5.10) или (5.26) – (5.29).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Безусловно, рассмотренные в данной работе модели и методы только частично представляют теорию непрерывных задач оптимального разбиения множеств и спектр ее приложений. Из-за ограниченного объема монографии не удалось охватить другие аспекты теории, в частности: динамические задачи оптимального разбиения множеств [43, 44, 61 – 64]; задачи идентификации многокомпонентных распределенных систем, сводящиеся в собственной постановке к непрерывным задачам ОРМ [89, 90]; многоэтапные задачи размещения и разбиения [110, 111].

Авторам монографии не удалось уделить внимание важным вопросам создания единой теоретической базы для определения общих необходимых и достаточных условий оптимальности разбиения в различных задачах ОРМ [38 – 40], а также принципам построения на их основе эффективных алгоритмов решения задач разбиения.

Не лишним будет отметить, что методы оптимального разбиения множеств весьма успешно применяют для построения диаграмм Вороного – широко известных математических объектов вычислительной геометрии, которые используются в различных областях прикладных наук: кристаллографии, физике, астрономии, компьютерной графике, офтальмологии, технике, маркетинге, картографии и др. [88, 91, 93, 136, 138]. Так, в литературных источниках [46, 47] была показана возможность построения диаграммы Вороного и ее различных вариаций на основе единого подхода, когда формулируют непрерывную задачу оптимального разбиения множества с критерием качества разбиения, который обеспечивает соответствующий вид этой диаграммы, и применяют математический и алгоритмический аппарат ее решения. Применение этого подхода позволяет строить не только уже известные диаграммы Вороного, но и конструировать новые.

В настоящее время авторы монографии активно ведут научные исследования, связанные с решением непрерывных задач оптимального шарового покрытия, родственных по своей математической постановке задачам разбиения множеств; приложениями методов ОРМ к многоэтапным задачам размещения

Заключение

[110, 111]; и решением задач ОРМ при нечетких данных [108, 109, 139]. Применение математического и алгоритмического аппарата теории непрерывных задач ОРМ к решению задач однократного покрытия подробно описано в литературе [59], практические приложения методов ОРМ к задачам однократного шарового покрытия описаны во многих источниках [17, 105, 106, 132], как и задачи многократного шарового покрытия вместе с алгоритмами их решения [60, 70].

Из современных исследований [69, 129, 133, 136 – 139 и др.] можно почерпнуть информацию о других сферах жизнедеятельности человека, где находят применение задачи оптимального разбиения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С. А. Прикладная статистика: классификация и снижение размерности / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. – М. : Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
2. Айзерман М. А. Метод потенциальных функций в теории обучения машин / М. А. Айзерман, Э. М. Браверман, Л. И. Розоноэр. – М. : Наука, 1970. – 384 с.
3. Алексеев В. М. Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1979. – 429 с.
4. Алифанов О. М. Идентификация математических моделей сложного теплообмена / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, А. В. Ненарокомов. – М. : Изд-во МАИ, 1999. – 252 с.
5. Алифанов О. М. Обратные задачи как методологическая основа идентификации тепловых математических моделей / О. М. Алифанов // Тр. IV междунар. форума по тепломассообмену (22–26 мая 2000 г. Минск): тез. докл. – Минск, 2000. Т. 3. – С. 3–13.
6. Афанасьев А. П. Необходимые условия в оптимальном управлении / А. П. Афанасьев, В. В. Дикусар, А.А. Милютин, С.А. Чуканов. – М. : Наука, 1990. – 220 с.
7. Бейко И.В. Условия оптимальности границы разделения зон территориального обслуживания / И.В. Бейко, Е.М. Киселева // Применение мат. методов к решению производ.-эконом. задач: сб. научн. раб. / Днепр. гос. ун-т. – Д., 1973. – С. 53–55.
8. Берлянд М. Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы / М. Е. Берлянд. – Л. : Гидрометеиздат, 1985. – 273 с.
9. Белозерский Л.А. Основы построения систем распознавания образов / Л.А. Белозерский. – К. : Наук. думка, 1995. – 299 с.
10. Бессонов А. Н. Методы и средства идентификации динамических объектов / А. Н. Бессонов, Ю. В. Загашвили, А. С. Маркелов. – Л. : Энергоатомиздат, 1989. – 280 с.
11. Бублик Б. Н. Основы теории управления / Б. Н. Бублик, Н. Ф. Кириченко. – К. : Вища шк., 1975. – 327 с.
12. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1975. – 568 с.
13. Вапник В.Н. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей / В. Н. Вапник, Т. Г. Глазкова, В. А. Кощеев, А. И. Михальский, А.Я. Червоненкис. – М. : Наука, 1984. – 815 с.
14. Васильев В. И. Распознающие системы. Справочник / В. И. Васильев. – К. : Наук. думка, 1983. – 422 с.
15. Васильев Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. – М. : Факториал Пресс, 2002. – 824 с.
16. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А. О. Ватульян. – М. : Физматлит, 2007. – 223 с.

-
17. Горячко Е.А. Математическое моделирование в задачах оптимального размещения базовых станций при проектировании сетей беспроводной связи / Е.А. Горячко, С.А. Ус // Науковий вісник НГУ. – 2008. – № 5. – С. 6 – 9.
 18. Гроп Д. Методы идентификации систем / Д. Гроп. – М. : Мир, 1979. – 472 с.
 19. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач: учеб. пособие / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.
 20. Демьянов В. Ф. Недифференцируемая оптимизация / В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев. – М. : Наука, 1981. – 384 с.
 21. Епанечников В.А. Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности / В.А. Епанечников // Теория вероятностей и ее применения. – 1969. – Т. 14, № 1. – С. 156 – 161.
 22. Егоров А. И. Математические методы оптимизации процессов теплопроводности и диффузии / А. И. Егоров, Р. Р. Рафатов. – Фрунзе : Илим, 1990. – 336 с.
 23. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. – М. : Наука, 1980. – 352 с.
 24. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л.А. Заде. – М. : Мир, 1976. – 168 с.
 25. Зайченко, Ю. П. Исследование операций. Нечеткая оптимизация / Ю. П. Зайченко. – К. : Вища шк., 1991. – 191 с.
 26. Згуровский М. З. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде / М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ, Н. Н. Беляев. – К. : Наук. думка, 1997. – 368 с.
 27. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – М. : Наука, 1974. – 480 с.
 28. Кадочнікова Я. Є. Методи та алгоритми розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин з обмеженнями: автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.05.01 / Кадочнікова Яна Євгенівна; Дніпр. нац. ун-т – Д., 2010. – 19 с.
 29. Канторович Л. В. О перемещении масс / Л. В. Канторович // Докл. АН СССР. – 1942. – № 7 – 8. – С. 227–229.
 30. Капустян В.Е. Решение некоторых задач стартового управления методом оптимального разбиения множеств / В.Е. Капустян, Е.М. Киселева, Л.С. Кроха // Проблемы управления и информатики. – 1995. – № 5. – С. 80 – 88.
 31. Киселева Е.М. Исследование одного класса задач оптимального разбиения: автореф. дис...канд. физ.-мат. наук: спец. 01.05.01 / Киселева Елена Михайловна; Киев. гос. ун-т. – К., 1975. – 15 с.
 32. Киселева Е. М. Алгоритм решения задачи оптимального разбиения с ограничениями / Е. М. Киселева // Кибернетика, – 1983. – № 1. – С. 115 – 120.
 33. Киселева Е. М. Решение одной задачи оптимального разбиения с размещением центров тяжести подмножеств // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1989. – Т. 29, № 5. – С. 709 – 722.

Список литературы

34. Киселева Е. М. Решение обобщенной задачи Неймана – Пирсона с использованием методов оптимального разбиения множеств / Е. М. Киселева // Журн. вычислит. математ. и мат. физики. – 1992. – Т. 31, № 1. – С. 167–173.
35. Киселева Е. М. Свойства оптимальных решений для одной задачи орошения / Е. М. Киселева, И.В. Бейко // Краевые задачи фильтрации: сб. науч. раб. / ИМ АН УССР. – К., 1973. – С. 255–261.
36. Киселева Е.М. Условие оптимальности и метод решения для одного класса многокритериальных непрерывных задач разбиения множеств / Е.М. Киселева, Н.К. Васильева // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 6. – С. 118–128.
37. Киселева Е. М. Решение непрерывной нелинейной задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств для случая выпуклого функционала / Е.М. Киселева, М.С. Дунайчук // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 2. – С. 134 – 152.
38. Киселева Е. М. Некоторые свойства пространства разбиений непрерывного множества / Е. М. Киселева, А. А. Жильцова // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. / Дніпр. нац. ун-т. – Д., 2007. – С. 84 – 91.
39. Киселева Е. М. Непрерывная задача оптимального нечеткого разбиения множеств без ограничений с заданным положением центров подмножеств / Е. М. Киселева, А. А. Жильцова // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. / Дніпр. нац. ун-т. – Д., 2005. – С. 123 – 128.
40. Киселева Е. М. Общая схема получения необходимых условий оптимальности для непрерывных задач оптимального разбиения множеств / Е. М. Киселева, А. А. Жильцова, В. А. Строева // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 5. – С. 50 – 63.
41. Киселева Е. М. Решение непрерывной однопродуктовой задачи оптимального разбиения с дополнительными ограничениями / Е. М. Киселева, Я. Е. Кадочникова // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 4. – С. 47 – 61.
42. Киселева Е.М. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К. : Наук. думка, 2013. – 606 с.
43. Кісельова О. М. Про зведення однієї нелінійної динамічної задачі оптимального розбиття множин до лінійної неперервної задачі розбиття / О. М. Кісельова, Л. С. Коряшкіна, О. В. Зайченко // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. / Дніпр. нац. ун-т. – Д., 2013. – С. 164 – 173.
44. Киселева Е. М. Конструктивные алгоритмы решения непрерывных задач многократного покрытия / Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина, А. А. Михалева // Системные технологии, 2014. – С. 3 – 14.
45. Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и r -алгоритмы / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К. : Наук. думка, 2015. – 400 с.

46. Киселева Е.М. Теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств как универсальный математический аппарат построения диаграммы Вороного и ее обобщений. Часть 1. Теоретические основы / Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 51, № 3. – С. 3 – 15 с.

47. Киселева Е.М. Теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств как универсальный математический аппарат построения диаграммы Вороного и ее обобщений. Часть 2. Алгоритмы построения диаграмм Вороного на основе теории оптимального разбиения множеств / Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 51, № 4. – С. 3 – 14.

48. Кісельова О. М. Ідентифікація динамічної системи з декількома режимами функціонування / О. М. Кісельова, Л. С. Коряшкіна, О. В. Правдивий // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. / Дніпр. нац. ун-т. – Д., 2011. – С.141 – 150.

49. Киселева Е. М. Алгоритм решения нелинейной непрерывной многопродуктовой задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств / Е. М. Киселева, В. А. Строева // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 1. – С. 40 – 53.

50. Киселева Е. М. Классификация нечетких задач оптимального разбиения множеств и некоторые подходы к их решению / Е. М. Киселева, О. Ю. Лебедь // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 1. – С. 3 – 14.

51. Кісельова О. М. Деякі підходи до розв'язання задач оптимального розбиття множин із нечітким параметром у системі обмежень / О. М. Кісельова, О. Ю. Лебідь // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. / Дніпр. нац. ун-т. – Д., 2009. – С. 169 – 175.

52. Киселева Е. М., Решение одной задачи оптимального нечеткого разбиения множеств / Е. М. Киселева, С. А. Ус . – М., 1991. – Деп. в ВИНТИ 03. 01. 1991, № 71 – В91. – 9 с.

53. Киселева Е. М. Метод оптимального разбиения множеств в распознавании образов / Е. М. Киселева, С. А. Ус // Вопросы прикладной математики и математического моделирования: сб. науч. тр. / Днепр. гос. ун-т. – Д., 1995. – С. 110 – 114.

54. Киселева Е. М. О решении одной задачи самообучения распознаванию образов методами оптимального разбиения множеств / Е. М. Киселева, С. А. Ус // Методы решения граничных задач и обработки данных: сб. науч. тр. / Днепр. гос. ун-т. – Д., 1995. – С.103 – 108.

55. Киселева Е. М. Об одной нелинейной модели определения зон обслуживания / Е. М. Киселева, С. А. Ус // Математичне моделювання. – 1998. – № 3. – С. 3 – 6.

56. Киселева Е. М. Алгоритм решения многопродуктовой задачи оптимального разбиения с ограничениями / Е.М. Киселева, Н.З. Шор // Кибернетика. – 1985. – № 1. – С. 176 – 81.

Список литературы

57. Киселева Е. М. Решение непрерывной задачи оптимального разбиения в условиях неполной информации об исходных данных / Е. М. Киселева, Н. З. Шор // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1991. – Т. 31, № 6. – С. 792 – 809.
58. Киселева Е. М. Исследование алгоритма решения одного класса непрерывных задач разбиения / Е. М. Киселева, Н. З. Шор // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – № 1. – С. 84 – 96.
59. Киселева Е. М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: монография / Е. М. Киселева, Н. З. Шор. – К. : Наук. думка, 2005. – 564 с.
60. Киселева Е. М. Непрерывная задача многократного шарового покрытия с ограничениями и метод ее решения / Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина, А. А. Михалева // Системні технології. – Дніпропетровськ, 2015. – №1. – С. 165 – 179.
61. Киселева Е. М. О решении и свойствах простейшей динамической задачи оптимального разбиения множеств / Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина // Проблемы управления и информатики. – 2013. – № 3. – С. 102 – 112.
62. Киселева Е. М. О динамической задаче оптимального разбиения множеств с интегральными ограничениями / Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина, Т. А. Шевченко // Проблемы управления и информатики. – 2013. – № 4. – С. 33 – 44.
63. Киселева Е. М. О решении динамической задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств / Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина, Т. А. Шевченко // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 6. – С. 29 – 40.
64. Коряшкіна Л. С. Чисельний алгоритм розв'язання неперервної динамічної задачі оптимального розбиття множин з квадратичним функціоналом / Л. С. Коряшкина, О. В. Зайченко, А. П. Череватенко // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. / Дніпр. нац. ун-т. – Д., 2014. – С. 155 – 166.
65. Коряшкина Л. С. Методы оптимального разбиения множеств для некоторых задач управления с квадратичным функционалом / Л. С. Коряшкина // Проблемы управления и информатики. – 1997. – № 5. – С. 39 – 49.
66. Коряшкина Л. С. Решение одной задачи управления параболической системой / Л. С. Коряшкина // Проблемы управления и информатики. – 1998. – № 2. – С. 94 – 101.
67. Коряшкина Л. С. Решение одной задачи оптимального размещения промышленного объекта / Л. С. Коряшкина // Питання прикладної математики і матем. моделювання: зб. наук. пр. / Дніпр. держ. ун-т. – Д., 1999. – С. 65–69.
68. Коряшкіна Л. С. Методи оптимального розбиття множин у керуванні розподіленими системами: автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.05.01 / Коряшкіна Лариса Сергіївна; Дніпр. держ. ун-т. – Д., 2000. – 18 с.
69. Коряшкіна Л. С. Об алгоритмах решения задачи оптимизации размещения и поля действия конечного числа источников в непрерывной среде / Л. С. Коряшкина, О. Б. Блюсс, Н. В. Гранкина // Питання прикладної

математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. / Дніпр. нац. ун-т. – Д., 2014. – С. 10 – 21.

70. Коряшкіна Л. С. Применение методов оптимального разбиения множеств к непрерывным задачам многократного покрытия / Л. С. Коряшкіна, А. А. Михалева, В.И. Навоенко // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. / Дніпр. нац. ун-т. – Д., 2014. – С. 141 – 154.

71. Коряшкіна Л.С. Задача параметричної ідентифікації багатозонних динамічних систем / Л. С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Системные технологии. – 2015. – № 4 (99). – С. 88 – 101.

72. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М. : Радио и связь, 1982. – 432 с.

73. Лебідь О.Ю. Методи та алгоритми розв'язування нечітких задач оптимального розбиття множин: автореф. дис... канд. фіз-мат. наук: спец. 01.05.01 / Лебідь Оксана Юріївна; Дніпр. нац. ун-т. – Д., 2011. – 20 с.

74. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzy TECH / А. В. Леоненков. – СПб. : БХВ – Петербург, 2003. – 736 с.

75. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук. – М. : Наука. – 1982. – 320 с.

76. Матвейкин В. Г. Теоретические основы энергосберегающего управления динамическими режимами установок производственно-технического назначения: монография. / В. Г. Матвейкин, Д. Ю. Муромцев. – М. : Машиностроение, 2007. – 128 с.

77. Милютин А. А. Принцип максимума в общей задаче оптимального управления / А. А. Милютин. – М. : Наука, 1999. – 304 с.

78. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – 2-е изд. перераб. и доп. – М. : Наука, 1983. – 424 с.

79. Муромцев Ю.Л. Моделирование и оптимизация технических систем при изменении состояний функционирования / Ю.Л. Муромцев, Л.Н. Ляпин, О.В. Попова; М-во высш. и сред. спец. образования РФ, Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ВГУ, 1992. – 164 с.

80. Надарая Э.А. Об оценке плотности распределения случайных величин / Э.А. Надарая // Сообщ. АН ГССР. – 1964. – Т. 34. – № 2. – С. 277 – 280.

81. Надарая Э.А. Непараметрическое оценивание плотности вероятности и кривой регрессии / Э.А. Надарая. – Тбилиси : Изд-во ТГУ, 1983. – 194 с.

82. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / под ред. Д. А. Поспелова. – М. : Наука, 1986. – 312 с.

83. Орлов А.И. Прикладная статистика / А. И. Орлов. – М. : Экзамен, 2004. – 656 с.

84. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 206 с.

85. Петросян Л. И. Введение в математическую экологию / Л. И. Петросян, В. А. Захаров. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1989. – 352 с.

Список литературы

86. Подиновский, В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М. : Наука, 1982. – 254 с.
87. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М. : Наука, 1983. – 392 с.
88. Препарата Ф. Вычислительная геометрия: Введение / Под ред. Ю. М. Банковского; Ф. Препарата, М. Шеймос. – М. : Мир, 1989. – 478 с.
89. Сергиенко И.В. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека. – К. : Наук. думка, 2009. – 639 с.
90. Сергиенко И. В. Применение методов оптимального разбиения множеств для решения геометрических обратных задач теплопроводности / И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека, Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина. – Мат. 3-й междунар. конф. «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии» (19 – 23 марта 2012 г., Кишинэу): тез. докл. – Кишинэу, 2012. – С. 459 – 467.
91. Словохотов Ю. Л. Физика и социофизика. Ч. 3. Квазифизическое моделирование в социологии и политологии. Некоторые модели лингвистики, демографии и математической истории / Ю.Л. Словохотов // Control Sciences. – 2012. – № 3. – С. 2 – 34.
92. Сухарев А. Г. Минимаксные алгоритмы в задачах целочисленного анализа / А.Г. Сухарев. – М. : Наука, 1989. – 364 с.
93. Терехов С. В. Моделирование тепловых и кинетических свойств реальных систем / С.В. Терехов. – Донецк : Вебер, 2007. – 306 с.
94. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 288 с.
95. Трухаев Р. Н. Модели принятия решений в условиях неопределенности / Р.Н. Трухаев. – М. : Наука, 1981. – 257 с.
96. Трухаев Р. Н. Теория неклассических вариационных задач / Р. Н. Трухаев, В. В. Хоменюк; М-во высш. и сред. спец. образования СССР, Ленингр. гос. ун-т. – Л. : ЛГУ, 1971. – 168 с.
97. Ус С. А. Решение одного класса бесконечномерных задач оптимизации: автореф. дис... канд. физ.-мат. наук: спец. 05.13.18 / Ус Светлана Альбертовна; ИПМаш АН УССР. – Харьков, 1992. – 16 с.
98. Ус С. А. Застосування методу оптимального розбиття множин в задачах дослідження критеріїв прийняття рішень / С. А. Ус, С. О. Легостаєва // Вісник Запорізького національного університету: зб. наук. праць. Фізико-математичні науки / Запор. нац. ун-т. – Запоріжжя, 2011. – С. 128 – 133.
99. Ус С. А. Применение метода оптимального разбиения множеств к решению задачи построения байесовых множеств / С. А. Ус, Е. А. Рецкая // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. / Дніпр. нац. ун-т. – Д., 2000. – С. 86 – 89.
100. Ус С. А. Метод оптимального разбиения множеств в распознавании образов / С. А. Ус // Вопросы прикладной математики и математического моделирования: сб. науч. работ / Днепр. гос. ун-т. – Д., 1995 – С. 110–114.

-
101. Ус С. А. Применение метода оптимального разбиения множеств к решению задач распознавания образов / С. А. Ус; Днепр. гос. ун-т. – М., 1991. – Деп. в ВИНТИ Акад. наук СССР 12.12.1991, № 4609 – В91. – 16 с.
102. Ус С. А. О моделях оптимального разбиения множеств в условиях неопределенности / С. А. Ус // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. / Дніпр. нац. ун-т. – Д., 2010. – С. 320 – 326.
103. Ус С. А. Задача оптимального разбиения множеств с множественнозначным целевым функционалом / С. А. Ус // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. / Дніпр. нац. ун-т. – Д., 2011. – С. 269 – 273
104. Ус С. А. Об одном подходе к решению бесконечномерной задачи оптимального разбиения множества с интервальным целевым функционалом / С. А. Ус // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. / Дніпр. нац. ун-т. – Д., 2012. – С. 254 – 260.
105. Ус С. А. Решение задачи оптимального размещения базовых станций при проектировании сетей беспроводной связи / С. А. Ус, Е. А. Горячко // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. / Дніпр. нац. ун-т. – Д., 2009. – С. 359 – 363.
106. Ус С. А. Определение оптимального размещения источников света в производственном помещении / С. А. Ус, В. П. Яценко // Науковий вісник НГУ. – 2009. – № 6. – С. 73 – 76.
107. Ус С. А. Дослідження застосування методу оптимального розбиття множин у задачах розпізнавання образів / С. А. Ус, І. Репич // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. / Дніпр. нац. ун-т. – Д., 2008. – С. 280 – 286.
108. Ус С. А. Задача оптимального розбиття множин із нечітким цільовим функціоналом / С. А. Ус // Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНЕМ-2011). мат. всеукр. наук. семінару (26 – 27 серпня 2011 р., м. Полтава): тез. допов. – Полтава, 2011. – С. 107 – 109.
109. Ус С. А. Решение задачи оптимального разбиения множеств с интервальным целевым функционалом / С. А. Ус // Проблемы информатики и моделирования: 11-я междунар. науч.-техн. конф. (26 – 30 сентября 2011 г., г. Харьков): тез. док. / Нац. техн. ун-т «ХПИ». – Х., 2011. – С. 74.
110. Ус С. А. Алгоритм решения двухэтапной задачи размещения производства с предпочтениями / С. А. Ус, О. Д. Станина // Системні технології. – Д., 2014. – Вип. 2(91). – С. 116 – 124.
111. Ус С. А. О математических моделях многоэтапных задач размещения предприятий / С. А. Ус, О. Д. Станина // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр. / Дніпр. нац. ун-т. – Д., 2014. – С. 258 – 267.
112. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления / Р. П. Федоренко. – М. : Наука. – 1978. – 488 с.
113. Федоров В. В. Численные методы максимина / В. В. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 280 с.

Список литературы

114. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М. : Наука, 1985. – 225 с.
115. Цыпкин Я. З. Основы теории обучающихся систем / Я.З. Цыпкин. – М. : Наука, 1970. – 252 с.
116. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах / Я.З. Цыпкин. – М. : Наука, 1968. – 400 с.
117. Шлезингер М. И. О самопроизвольном различении образов / М.И. Шлезингер // Читающие автоматы. – К. : Наук. думка, 1965. – С. 38 – 45.
118. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение / Н.З. Шор. – К. : Наук. думка, 1979. – 200 с.
119. Шор Н. З. Использование методов негладкой оптимизации в задачах стохастического программирования / Н. З. Шор, Т. А. Бардадым, Н. Г. Журбенко, А. П. Лиховид, П. И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 5. – С. 33 – 47.
120. Шор Н. З. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация / Н.З. Шор, С.И. Стеценко. – К. : Наук. думка, 1989. – 208 с.
121. Шор Н. З. Использование модификации r -алгоритма для нахождения минимума полиномиальных функций / Н. З. Шор, П. И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 4. – С. 28 – 49.
122. Эккланд И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы: пер. с англ. / И. Эккланд, Р. Темам. – М. : Мир, 1979. – 399 с.
123. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации / Д.Б. Юдин. – М. : Сов. радио, 1974. – 400 с.
124. Balas E. Set partitioning: a survey / E. Balas, M.W. Padberg // Comb. Optimiz. Lect. summer Sch. Comb. Optimiz. Urbino, 1977. – Chichester e.a., 1979. – P. 151 – 210.
125. Bollabas B. The optimal arrangement of producers / B. Bollabas // J. London Math. Soc. – 1973. – V. 6, № 4. – P. 605–613.
126. Chen R. Relaxation methods for the solution of the minimax location – allocation problem in Euclidean space / R. Chen, G.Y. Handler // Nav. Res. Log. – 1987. – V. 34. – № 6. – P. 231 – 243.
127. Corley H.W. Duality relationships a partitioning problem / H.W. Corley, S.D. Roberts // SIAM. J. Appl. Math. – 1972. – V. 23. – № 4. – P. 490 – 494.
128. Duda R. O. Pattern classification / R. O. Duda, P. E. Hart, D. G. Stork. – New York : JohnWiley and Sons, 2001. – P. 119 – 139.
129. Farahani R. Z. Facility location. Concepts, models, algorithms and case studies. Springer – Verlag / R.Z. Farahani, M. Hekmatfar (eds.). – Berlin : Heidelberg, 2009. – 530 p.
130. Francis R. L. Sufficient conditions for some optimum – property facility design / R.L. Francis // Oper. Res. – 1967. – V. 15, № 3. – P. 448 – 466.
131. Friedman M. On the analysis and solution of certain geographical optimal covering problems / M. Friedman // Comput. and Oper. Res. – 1976. – V. 3, № 4. – P. 283 – 294.

-
132. Garfinkel R. S. The set partitioning problem: set covering with Equality Constraints / R. S. Garfinkel, M. L. Fisher, P. Kedia // *Oper. Res.* – 1969. – V. 17. – P. 848–856.
133. Carlsson J. G. Dividing a Territory Among Several Facilities / John Gunnar Carlsson, Raghuvier Devulapalli // *INFORMS Journal on Computing.* – 2013. – V. 25(4). – P. 730 – 742.
134. Kiseleva E.M. On Continuous Problems of the Optimal Partitioning of Sets with Non – Differentiable Functional / E.M. Kiseleva, L.S. Koryashkina // *Abstracts of U.S. – Ukrainian Workshop “Recent Advances in Non – Differentiable optimization”.* – Kyiv, 2000. – P. 20.
135. Koriashkina L.S. One way to solve problems of multi-zone dynamics models identification / L.S. Koriashkina, A.V. Pravdivy, A.P. Cherevatenko // *Power Engineering, Control & Information Technologies in Geotechnical Systems.* – London : CRC Press/ Balkema – Taylor & Francis Group, 2015. – P. 153 – 160.
136. Laver M. Endogenous birth and death of political parties in dynamic party competition, in: Seth A., Prescott T., Bryson J. (eds). / M. Laver, E. Sergenti, M. Schilperoord // *Modelling natural action selection.* – Cambridge: Cambridge Univ. Press. – 2010. – 584 p.
137. Sweeney P.E. Cutting and packing problems: a categorized, application oriented research bibliography / P.E. Sweeney, E.L. Ridenour // *Journ. Oper. Res. Soc.* – 1992. – № 7. – P. 691 – 706.
138. Us S. A. Application of the optimal set partitioning method to problem of wireless network engineering / S. A. Us // *Energy Efficiency Improvement of Geotechnical Systems - International Forum on Energy Efficiency.* – London : CRC Press/ Balkema – Taylor & Francis Group, 2013. – P. 175 – 181.
139. Us S.A. A New Method to Solve a Continuous Facility Location Problem Under Uncertainty Power Engineering, Control and Information Technologies in Geotechnical Systems / S. A. Us // *Power Engineering, Control & Information Technologies in Geotechnical Systems.* – London : CRC Press/ Balkema – Taylor & Francis Group, 2015. – P. 127 – 133.

Олена Михайлівна **Кісельова**
Лариса Сергіївна **Коряшкіна**
Світлана Альбертівна **Ус**

**ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН
У ЗАДАЧАХ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ, АНАЛІЗУ
ТА ІДЕНТИФІКАЦІЇ СИСТЕМ**

Монографія

Редактор О.Н. Ільченко

Підп. до друку 13.05.2015. Формат 30x42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 15,8.
Обл.-вид. арк. 17,3. Тираж 300 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видруковано
в Державному вищому навчальному закладі
«Національний гірничий університет»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842
від 11.06.2004 р.
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.