МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

Р Я Д И

МАТЕРІАЛИ МЕТОДИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ
поглибленого вивчення розділу

Дніпропетровськ
2016

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ГЕОЛОГОРОЗВІДУВАЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра вищої математики

Т.С. Кагадій, Л.І. Шелест

Р Я Д И

МАТЕРІАЛИ МЕТОДИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ
поглибленого вивчення розділу
студентами технічних спеціальностей

Дніпропетровськ
НГУ
2016

Кагадій Т.С. Ряди. Матеріали методичного забезпечення поглибленого вивчення розділу студентами технічних спеціальностей / Т.С. Кагадій, Л.І. Шелест ; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Дніпропетровськ : НГУ, 2016. – 55 с.

Автори: Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (розділи 1–2);
Л.І. Шелест, ст. викл. (розділи 3–6).

Подано основні теоретичні відомості до розділу «Ряди», наведено розв’язання задач підвищеної складності та приклади для самостійного розгляду.

Відповідальна за випуск зав. кафедри вищої математики О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

ВСТУП

Дані методичні матеріали є четвертою частиною з циклу, що призначений для студентів, які цікавляться вищою математикою і прагнуть поглибити свої знання з цього предмету.

Мета цього видання:

- сформувати й розвинути математичне мислення студентів, розвити у них практичні навички при розв'язуванні нестандартних задач;
- не виходячи за рамки програми курсу для технічних спеціальностей, допомогти студентам самостійно вивчити нові прийоми та методи розв'язання, а також ознайомитися з деякими теоретичними відомостями.

Навчальний посібник складається з таких розділів: числові ряди, функціональні ряди, степеневі ряди. Крім різноманітних прикладів, наведені деякі додаткові теоретичні відомості.

1. ЧИСЛОВІ РЯДИ. ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ЗНАКОСТАЛИХ РЯДІВ

1.1. Деякі загальні поняття

Числовий ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається збіжним, якщо існує границя послідовності часткових сум ряду $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ при необмеженому зростанні номеру *n,* цю границю називають сумою ряду: $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$.

Якщо границя не існує, ряд називається розбіжним.

1.2. Деякі властивості рядів

1. Якщо в ряді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ відкинути скінченну кількість членів, то це не впливає на збіжність ряду.

2. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається і має суму S, тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$, де λ – число, також збігається і має суму λS.

3. Якщо збігаються ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sigma$, то також збігаються ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ і їх суми дорівнюють $S \pm \sigma$.

4. Необхідна умова збіжності. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тоді $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то такий ряд розбіжний.

5. Достатні ознаки збіжності для знакопостійних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1). Ознака порівняння. Нехай маємо два знакосталих ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2), причому $a_n \le b_n$ для $N \ge n$. Тоді, якщо ряд (2) збігається, то збігається і ряд (1). Якщо ряд (1) розбігається, то розбігається і ряд (2).

Взагалі, якщо існують ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ і якщо $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ існує і не дорівнює нулю, то ці ряди ведуть себе однаково, тобто, якщо один ряд збігається, то і другий збігається, якщо один розбігається, то і другий розбігається.

2). Ознака Даламбера. Якщо для знакосталого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує скінчена або нескінчена границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \begin{cases} \rho < 1, & \text{то ряд збігається} \\ \rho > 1, & \text{то ряд розбігається} \\ \rho = 1, & \text{то ознака не працює, нічого про збіжність} \\ & \quad \text{цього ряду сказати не можна.} \end{cases}$$

3). Ознака Коші. Якщо $a_n \ge 0$ $(n \in N)$ і

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho, \text{ то } \begin{cases} \rho < 1 & \text{ряд збігається} \\ \rho > 1 & \text{ряд розбігається} \\ \rho = 1 & \text{нічого про збіжність ряду сказати не можна.} \end{cases}$$

4). Ознака Раабе. Якщо $a_n > 0$ $(n \in N)$ і

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\rho, \text{ то } \begin{cases}\rho<1 & \text{ряд збігається}\\ \rho>1 & \text{ряд розбігається}\\ \rho=1 & \text{нічого сказати про збіжність ряду не можна.}\end{cases}$$

5). Інтегральна ознака Коші. Нехай задано знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, члени якого монотонно спадають до нуля. Нехай існує монотонно спадна функція $f(x)$ така, що її значення при $x=n$ збігається з a_n, тобто $f(n)=a_n$. Тоді, якщо збігається невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, якщо цей інтеграл розбігається, то розбігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Приклад 1. Знайти суму ряду, якщо вона існує. $\infty\sum_{n=1}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$.

Розв'язання.

Загальний член послідовності часткових сум ряду має вигляд

$$S_n=\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)+$$
$$+\left(\sqrt{6}-2\sqrt{5}+\sqrt{4}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2}\right)+\left(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)+$$
$$+\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}.$$

Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)=\{\infty-\infty\}=$

$=\left(\text{домножемо і поділемо два останні доданки на їх суму}\right)=$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(1-\sqrt{2}+\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{2}+\frac{(n+2-n-1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right)=1-\sqrt{2}.$$

Приклад 2. Знайти суму ряду, якщо вона існує.

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots .$$

Розв'язання.

Загальний член послідовності часткових сум ряду має вигляд:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Кожний доданок $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ можна звести в суму

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1} = \frac{A(3n+1)+B(3n-2)}{(3n-2)(3n+1)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1 = A(3n+1) + B(3n-2)$. Ця рівність буде тотожністю, якщо коефіцієнти при n і вільні члени зліва і справа будуть однакові, тобто получимо систему рівнянь для знаходження A і B.

$$\begin{cases} 3D + 3B = 0 \\ A - 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B = -\frac{1}{3}, \\ A = \frac{1}{3} \end{matrix},$$

тоді $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{3n-2} - \frac{\frac{1}{3}}{3n+2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right).$

Звідси $S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} =$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right).$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}.$

Приклад 3. Нехай відомі два ряди з невід'ємними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, які розбігаються. Що можна сказати про збіжність рядів: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$.

Розв'язання.

а) $\min(a_n, b_n) \le b_n$, $\min(a_n, b_n) \le a_n$

Якщо ряд з більшими членами розбігається, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ може збігатися і може розбігатися.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max\left(a_n,b_n\right)\geq b_n$ і $\max\left(a_n,b_n\right)\geq a_n$, якщо ряд з меншими членами розбігається, то згідно з ознакою порівняння і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max\left(a_n,b_n\right)$ розбігається.

Приклад 4. Довести, що якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ збігаються, то збігаються й ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_nb_n\right)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)^2$, $\sum\frac{|a_n|}{n}$.

Розв'язання.

Доведемо нерівність для будь яких чисел a і b.

$\left(|a|-|b|\right)^2\geq 0\Rightarrow a^2+b^2\geq 2|a||b|=|ab|<\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right).$

Якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ збігаються, то збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$. Він знакододатній. Ми довели, що $|a_nb_n|\leq a_n^2+b_n^2$, тоді за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$ збігається, то збігається і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$.

Тепер доведемо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)^2$ збігається.

$\left(a_n+b_n\right)^2=a_n^2+2b_na_n+b_n^2\leq a_n^2+b_n^2+2|b_na_n|.$

Тепер розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2+2|b_na_n|$ – він збігається, так як ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_na_n|$ збігаються, тоді за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)^2$ – збігається.

Тепер розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$.

Нехай $b_n=\frac{1}{n}$, тоді $|b_na_n|=\frac{|a_n|}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігаються і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$.

Приклад 5. Довести, що ряд оберненої членам арифметичної прогресії розбігається.

Розв'язання.

Розглянемо ряд чисел деякої арифметичної прогресії $a_1, a_1+d, a_1+2d, ..., a_1+d_{(n-1)}, a_1+d_n, ...$. Ряд, утворений оберненими членами арифметичної прогресії, має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_1+d_n}$.

Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{a_n+dx}dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{1}{a_n+dx}dx = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left|a_n+dx\right|\Big|_1^A = \infty .$$

Інтеграл розбігається, то і ряд розбігається.

Приклад 6. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)...\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right).$$

Розв'язання.

Застосуємо ознаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)...\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)...\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{2n+3}}\right) = \sqrt{2}-1<1 \Rightarrow \text{ ряд збігається.}$$

Приклад 7. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Розв'язання.

Застосовуємо ознаку Коші. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{n}}}{2+\frac{1}{n}} =$

$= \left\{ \text{обчислимо } \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln n^{\frac{2}{n}}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2}{n}\ln n} = e^{\lim_{n\to\infty} e^{\frac{2\ln n}{n}}} = \right.$ (застосуємо правило Лопіталя) $= e^{\lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{2}}} = e^0 = 1\left.\right\} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ ряд збігається.

Приклад 8. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Розв'язання.

Перевіримо, чи виконується необхідна ознака збіжності числових рядів.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{\left(n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{n^n\left(n+\frac{1}{n^2}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \{\text{обчислимо окремо границю чисельника і знаменика:}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = \text{(застосуэмо правило Лопіталя)} = \text{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \text{(застосувати другу визначну границю)} =$$

$= e^0 = 1\} \Rightarrow$ ряд розбігається.

Приклад 9. Дослідити ряд на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} nx \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$.

Розв'язання.

$a_n = nx\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$. Розглянемо другий множник n-го члена

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{1+x^2+\cos^2\alpha}\cdot\frac{\sin^2 2\alpha}{1+x^2+\cos^2 2\alpha}\cdot\ldots\cdot\frac{\sin^2 n\alpha}{1+x^2+\cos^2 n\alpha}.$$

Розглянемо один з цих множників $\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha} = f(\alpha)$. При будь-якому x ця функція періодична, відносно змінної α, період її $T = \frac{\pi}{k}$, і обмежена $\leq 0\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha} \leq \frac{1}{1+x^2}$.

Найбільше і найменше значення множника $\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$ можна знайти по схемі знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{k}\right]$, але ці границі і так видно: $0 \le \sin^2 k\alpha \le 1$, і коли $\sin^2 k\alpha = 0$, то $\cos^2 k\alpha = 1$, якщо $\sin^2 k\alpha = 1$, то $\cos^2 k\alpha = 0$.

Розв'яжемо рівняння $\sin^2 k\alpha = 1$.

$$\alpha = \frac{\pi}{2k} + \frac{n\pi}{k} = \frac{(1+2n)\pi}{2k} \Rightarrow f\left(\frac{\pi(1+2n)}{2k}\right) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha} \le \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} < 1 \text{ для всіх } x \ne 0.$$

Тоді $nx\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha} \le nx\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} nx\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}$ збігається. Для доведення цього скористуємось ознакою Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x\cdot\left(1+x^2\right)^4}{\left(1+x^2\right)^{n+1}\cdot nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{1+x^2} < 1 \text{ для всіх } x \ne 0.$$

Розглянемо поведінку цього ряду в точці $x=0$; $\sum_{n=1}^{\infty} 0$, він збіжний, тому ряд збігається для всіх x і для всіх α.

Приклад 10. Дослідити ряд на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{\left(2n^2+n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}$.

Розв'язання.

Скористуємось ознакою Коші.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n-1}}{\left(2n^2+n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{n-1}{n}}}{\left(2n^2+n+1\right)^{\frac{n+1}{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-\frac{1}{n}}}{\left(\sqrt{2n^2+n+1}\right)^{1+\frac{1}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2+n+1}} \cdot \frac{n^{-\frac{1}{n}}}{\left(\sqrt{2n^2+n+1}\right)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2+n+1}} \cdot \left(n\sqrt{2n^2+n+1}\right)^{-\frac{1}{n}} =$$

$=$ { окремо обчислимо границю першого множника і другого, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{2n^2+n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{2n^2+n+1}\right)^{-\frac{1}{n}}=\left\{\infty^0\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^4+n^3+n^2}\right)^{-\frac{1}{n}}=$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{1}{n}\ln\sqrt{2n^4+n^3+n^2}}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(2n^4+n^3+n^2\right)}{n}}=$ (скористуємось правилом Лопіталя) $=$

$=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+3n^2+2n}{2n^4+n^3+n^2}}=e^0=1$. Так як існує границя кожного множника, то границя добутку дорівнює добутку границь } $=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1,\Rightarrow$ ряд збігається.

Приклад 11. Дослідити ряд на збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{2^n+3^n}$.

Розв'язання.

Скористуємось ознакою Даламбера

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^5}{2^{n+1}+3^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n+3^n}{n^5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^5}{n^5}\cdot\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=$ { чисельник і знаменник другого дробу поділимо на 3^{n+1} } $==\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^5}{n^5}\cdot\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}=$ { границя першого множника дорівнює 1, другого $\dfrac{1}{3}$, так як $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$ } $=\dfrac{1}{3}<1$, ряд збігається.

Приклад 12. Дослідити ряд на збіжність $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\ldots$. Вказівка $\sqrt{2}=2\cos\dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання.

$\sqrt{2}=2\cos\dfrac{\pi}{4}$; $\quad\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\cos\dfrac{\pi}{4}}=\sqrt{2\left(1-\cos\dfrac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2\cdot 2\sin^2\dfrac{\pi}{8}}=2\sin\dfrac{\pi}{8}$,

$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\dfrac{\pi}{4}}}=\sqrt{2-\sqrt{2\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)}}=\sqrt{2-\sqrt{2\cdot 2\cos^2\dfrac{\pi}{8}}}=$

$=\sqrt{2-2\cos\dfrac{\pi}{8}}=2\sin\dfrac{\pi}{16}$,

$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\dfrac{\pi}{8}}}=\sqrt{2-2\cos\dfrac{\pi}{16}}=2\sin\dfrac{\pi}{32}$.

Тоді $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots=2\cos\dfrac{\pi}{4}+2\sin\dfrac{\pi}{8}+$

$$+2\sin\frac{\pi}{16}+2\sin\frac{\pi}{32}+...=2\cos\frac{\pi}{4}+2\sum_{n=3}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}.$$

Скористуємось ознакою Даламбера.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n}}}=\{\ \ \dfrac{0}{0}$, тому скористуємось правилом Лопіталя $\}$ =

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\pi\cdot 2^{-n-1}\ln 2(-1)}{\sin\frac{\pi}{2^{n}}\cdot\pi\cdot 2^{-n-1}\ln 2(-1)}=\frac{1}{2}<1\text{, ряд збігається.}$$

Приклад 13. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ розбіжний.

Розв'язання.

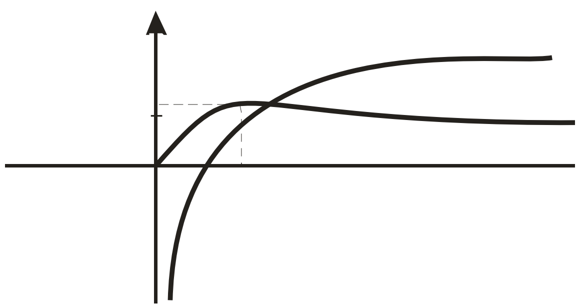
Застосуємо ознаку порівняння.

Розглянемо функцію $y=x^{\frac{1}{x}}$, область визначення $x>0$. Знайдемо область значень цієї функції. Знайдемо екстремуми, $y'=\left(x^{\frac{1}{x}}\right)'=\left(e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}\right)'=\left(e^{\frac{\ln x}{x}}\right)'=$ $=e^{\frac{\ln x}{x}}\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)$, знайдемо критичні точки: $1-\ln x=0$, $x=e$, точка максимуму.

$f(e)=e^{\frac{1}{e}}>1$. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\left\{0^{\infty}\right\}=0$.

З графіку видно, що починаючи з деякого $x>e$ $\ln x>x^{\frac{1}{x}}\Rightarrow\dfrac{1}{\ln x}<\dfrac{1}{x^{\frac{1}{x}}}$.

Тому $\dfrac{1}{n\ln n}<\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.



Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$, він розбігається за інтегральної ознаки Коші, так як $\int\limits_2^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}dx=\ln\left|\ln x\right|\Big|_2^{\infty}=\infty$.

Таким чином ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ розбігається.

Приклад 14. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$ на збіжність.

Розв'язання. Застосуємо ознаку порівняння. $n>\ln n$ (видно з графіків функцій $y=x$ і $y=\ln x$), тому $n^2-n<n^2-\ln n \Rightarrow \frac{1}{n^2-n}>\frac{1}{n^2-\ln n}$.

Розглянемо ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$. Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Розглянемо збіжність $\int_2^{\infty}\frac{1}{x^2-x}dx$. Скористуємось ознаками збіжності невластивих інтегралів: знайдемо $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2-x}}{x^2}=1\neq 0$. Якщо ця границя існує і не дорівнює нулю, то ці інтеграли ведуть себе однаково, це означає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$ збігається.

Приклад 15. Чи збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$.

Розв'язання.

З'ясовувати збіжність ряду будемо за допомогою ознаки порівняння: $n!<n^n \Rightarrow \ln n!=\ln+\ln 2+...+\ln n<n\ln n \Rightarrow \frac{1}{\ln n!}>\frac{1}{n\ln n}$.

Розглянемо ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$, за інтегральною ознакою Коші цей ряд розбігається. Тоді і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$ розбігається.

Приклад 16. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, де $a_1=1$, $a_{n+1}=\cos a_n$.

Розв'язання.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1+\cos 1+\cos\cos 1+...+\cos\cos...\cos 1+...$,

$0\le a_n<1$, $\cos a_{n+1}>\cos a_n$, це видно з означення функції $y=\cos x$ (рис. 1)

Дуга $AC=1$ радіану, $OA_1=\cos 1$. На колі відкладемо дугу $\cos 1$, це дуга CA_2, $OA_2=\cos\cos 1$ і т. д.

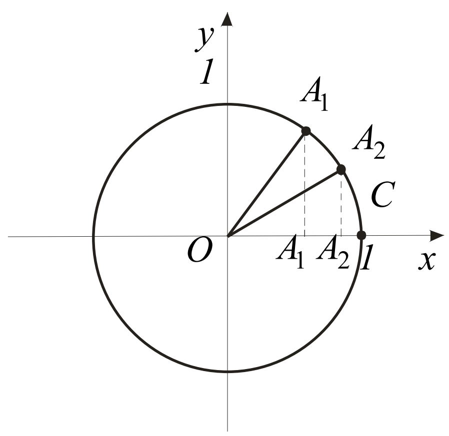


Рис. 1

Звідси видно, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, тоді ряд розбігається.

Приклад 17. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n}$, де x_n – додатні корені рівняння $x=\operatorname{tg}x$, які записані в порядку зростання.

Розв'язання.

Рівняння $x=\operatorname{tg}x$ має безліч коренів. $x_n\in\left(\frac{\pi}{2}+\pi(n-1);\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$. Звідси $x_n>\frac{\pi}{2}+\pi(n-1)\geq 1$ і тоді $\frac{1}{x_n^2}\leq\frac{1}{n^2}$. А ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається, це означає, що і ряд $\sum\frac{1}{x^2}$ збігається.

Приклад 18. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma(n)}{n^2}$, де $\gamma(n)$ – число цифр числа n.

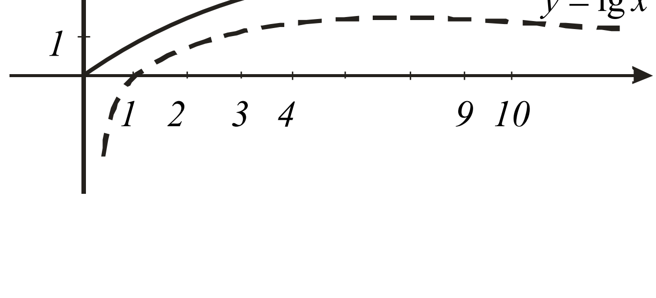
Розв'язання.

Розглянемо однозначні числа $1\leq n<10$, тоді $0<\lg n<1$ і ціла частина $[\lg n]=0$, тоді $\gamma(n)=1+[\lg n]$.

Розглянемо двозначні числа $10\leq n<100$, тоді число n можна записати як $n=10\cdot p$, де $11\leq p<10$, $\lg n=\lg 10+\lg p=1+\lg p$, де ціла частина $[\lg p]=1$ і ціла частина $[\lg n]=2$, і т.д. Тобто $\gamma(n)=1+[\lg n]<1+\lg n$.

Тоді $\gamma(n)\leq 1+[\lg n]$ і $\frac{\gamma_n}{n^2}<\frac{1+[\lg n]}{n^2}<\frac{1+\lg n}{n^2}$.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\lg n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\lg n}{n^2}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – це гармонічний ряд, який збігається. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\lg n}{n^2}$: $\lg n<\sqrt{n}$, це видно з графіків цих функцій $y=\lg x$ і $y=\sqrt{x}$.



Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ збігається, це гармонічний ряд. Тоді згідно з ознакою порівняння і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\lg n}{n^2}$ збігається.

Приклад 19. Дослідити на збіжність ряди а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x^2}$,

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\pi n}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n}^{n+1}e^{-\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання.

а) $\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}<\sqrt{x}$, тоді $\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x^2}<\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}dx$. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}\frac{1}{n^{3/2}}$.

$\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx<\frac{2}{3}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ збігається, тому і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x^2}$ збігається.

б) $\frac{\sin^2 x}{x}>\sin^2 x$ для всіх $x>1$, звідси $\int\limits_{\pi n}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx>\int\limits_{\pi n}^{(n+1)\pi}\sin^2 xdx$,

$\int\limits_{\pi n}^{(n+1)\pi}\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int\limits_{\pi n}^{(n+1)\pi}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)_{\pi n}^{\pi(n+1)}=$

$\frac{1}{2}\left(\pi(n+1)-\pi n-\frac{1}{2}\sin 2\pi(n+1)+\frac{1}{2}\sin 2\pi n\right)=\frac{1}{2}\pi$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2}$ розбігається,

так як $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\neq 0$. Звідси за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\pi n}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ розбігається.

в)

$$\frac{nn!}{(2n)!}\quad\frac{(n+1)(n+1)!(2n)!}{(2n+2)!n(n!)}=\frac{(n+1)^2}{n(2n+2)(2n+1)}<0<1.$$

Приклад 20. Дослідити збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+...+n!}{(2n)!}$.

Розв'язання.

$\frac{1!+2!+...+n!}{(2n)!}<\frac{n\cdot n!}{(2n)!}$.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot n!}{(2n)!}$, застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)!(2n)!}{(2n+2)!n(n!)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!(n+1)(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)n(n!)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n(2n+2)(2n+1)}=0<1$$, ряд збігається, тому початковий ряд також збігається.

Приклад 21. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^{\alpha}}$.

Розв'язання.

Задачу розв'яжемо за допомогою ознаки порівняння.

$$a_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^{\alpha}}=\frac{\ln^2 1+\ln^2 2+...+\ln^2 n}{n^{\alpha}}<\frac{n\ln^2 n}{n^{\alpha}}\{\text{для } m\geq 3\ \ln n>1,\text{ тому}\}$$

$<\frac{n}{n^{\alpha-1}}=\frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Ряд $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ збігається, якщо $\alpha-1>1$, тобто ряд збігається для $\alpha>2$. Звідси витікає, що початковий ряд збігається

Приклад 22. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$.

Розв'язання.

Скористуємось ознаками порівняння. Для того, щоб підібрати ряд для порівняння, спростимо:

$a_n=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}=\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}\right)}{n^{\alpha}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}\right)}$ (це ми робимо, щоб визначити степінь a_n) $=\frac{4}{n^{\alpha}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}\right)}$. Тоді для порівняння беремо ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}n^{\frac{1}{2}}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.

Знайдемо $\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^{\alpha}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}\right)}\cdot\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{1}=4$. Тоді ці ряди ведуть себе однаково. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ збігається, якщо $\alpha+\frac{1}{2}>1$, тобто $\alpha>\frac{1}{2}$, і розбігається, якщо $\alpha\leq\frac{1}{2}$.

Приклад 23. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b}\right)$.

Розв'язання.

Скористуємось ознаками порівняння. Для того щоб підібрати ряд для порівняння, визначимо степінь $a_n=\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b}$. Для цього звільнимось від ірраціональності.

$$a_n=\frac{\left(\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b}\right)\left(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b}\right)}{\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b}}=\frac{n+a-\sqrt{n^2+n+b}}{\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b}}=$$

$$=\frac{\left(n+a-\sqrt{n^2+n+b}\right)\left(n+a+\sqrt{n^2+n+b}\right)}{\left(n+a-\sqrt[4]{n^2+n+b}\right)\left(n+a+\sqrt{n^2+n+b}\right)}=$$

$$=\frac{(n+a)^2-\left(n^2+n+b\right)}{\left(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b}\right)\left(n+a+\sqrt{n^2+n+b}\right)}=$$

$$=\frac{n(2a-1)+a^2-b}{\left(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b}\right)\left(n+a+\sqrt{n^2+n+b}\right)}.$$

Степінь цього виразу дорівнює $\dfrac{n}{n\cdot n^{\frac{1}{2}}}$, якщо $2a-1\neq 0$ і $\dfrac{n}{n\cdot n^{\frac{1}{2}}}$, якщо $2a-1=0$. Якщо $a=\dfrac{1}{2}$, то ряд для порівняння має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, він розбігається і $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n(2a-1)+a^2-b\right)n^{\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b}\right)\left(n+a+\sqrt{n^2+n+b}\right)}=2a-1\neq 0$, тому ці ряди ведуть себе однаково, тобто наш ряд розбігається. Якщо $a=\dfrac{1}{2}$, то для порівняння беремо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, тоді він збігається, а

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a^2-b\right)n^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b}\right)\left(n+a+\sqrt{n^2+n+b}\right)}=a^2-b\neq 0,$$

звідси витікає, що наш ряд теж збігається.

Приклад 24. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$.

Розв’язання.

Перевіримо чи виконується достатня ознака $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}} =$

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{\cancel{n}}}{\frac{c}{\cancel{n}}}} = e^{\frac{a}{c}} \neq 0 \Rightarrow$ ряд розбігається.

Приклад 25. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{\left(2+\sqrt{1}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)...\left(2+\sqrt{n}\right)}$.

Розв’язання.

Якщо застосуємо ознаку Даламбера, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, тоді застосуємо ознаку Раабе.

Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt{n!}\,\cancel{\left(2+\sqrt{1}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)...\left(2+\sqrt{n}\right)}\left(2+\sqrt{n+1}\right)}{\cancel{\left(2+\sqrt{1}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)...\left(2+\sqrt{n}\right)}\sqrt{(n+1)!}}\right) - 1 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n!}\left(2+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n!}\sqrt{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(2+\sqrt{n+1}-\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+1}} - 1\right) =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}} = 2 > 1$, ряд збігається.

Приклад 26. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{\alpha}{n}\right)^{n^3}$.

Розв’язання.

Скористуємось ознакою Коші.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\cos\frac{\alpha}{n}\right)^{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\alpha}{n}\right)^{n2} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{n}}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n^2}{2}} =$$

$=$ {застосуємо другу визначну границю} $=$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{n}\right)^{-\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{n}}}\right)^{-\sin^2\frac{\alpha}{n}\frac{n^2}{2}} = \;= e^{\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{\sin^2\frac{\alpha}{n}\cdot n^2\cdot\frac{\alpha^2}{n^2}}{2\cdot\frac{\alpha^2}{n^2}}} = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} < 1,\ \text{якщо}\quad \alpha \neq 0$$

$\Rightarrow$ ряд збігається. Якщо $\alpha = 0$, то ряд розбігається, так як загальний член має ряду при $n \to \infty$ не наближається до нуля.

Приклад 27. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$, $a > 0$, $b > 0$.

Розв'язання.

В чисельнику і знаменнику загальний член ряду стоять степеневі функції. Тому будемо користуватися ознакою порівняння.

Для цього підберемо такий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, щоб $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \delta \neq 0$.

Розглянемо $\quad a_n = \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} = \frac{n^{2n}}{(n+a)^n(n+b)^n(n+a)^b(n+b)^a} =$

(поділимо чисельник і займенник на n^{2n}) $= \frac{1}{\frac{(n+a)^n}{n^n}\frac{(n+a)^n}{n^n}(n+a)^b(n+b)^a} =$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\left(1+\frac{a}{n}\right)^n(n+a)^b(n+b)^a}.$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a = e^a,\quad \lim_{n\to\infty}\left(+\frac{b}{n}\right)^n = e^b\right) \approx \frac{1}{e^{a+b}n^{a+b}}.$$

Таким чином ми підібрали ряд з яким будемо порівнювати наш ряд, це ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{a+b}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n}\cdot n^{a+b}}{(n+a)^{n+a}(n+b)^{n+b}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{a+b}}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\left(1+\frac{a}{n}\right)^n(n+a)^b(n+b)^a} = \frac{1}{e^{a+b}} \neq 0.$$

А ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a+b}}$ збігається, коли $a+b>1$ і розбігається при $a+b \le 1$. При таких же умовах збігається і розбігається наш ісходний ряд.

Приклад 28. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ на збіжність.

Розв'язання.

Застосуємо ознаку порівнянню.

$a_n = 1-\cos\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{2n}$, $\sin x < x$ для всіх $x > 0$, тоді

$a_n = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{2n} < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається, тому збігається і вихідний ряд.

Приклад 29. Чи збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{-1}$, якщо $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ для $n \geq 3$.

Розв'язання.

Застосуємо ознаку порівняння. Члени послідовності u_n зростають $\Rightarrow u_{n-2} < u_{n-1} \Rightarrow u_n \leq 2u_{n-1}$, $u_n \geq \frac{3}{2}u_{n-1}$, що можна довести методом математичної індукції. Ця нерівність виконується для $n = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_3 \geq \frac{3}{2}u_2$. Нехай ця нерівність виконується для $u_n : u_n \geq \frac{3}{2}u_{n-1}$, $u_{n-1} \leq \frac{2}{3}u_n$. Доведемо, що вона виконується і для u_{n+1}.

$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} > u_n + \frac{2}{3}u_n = \frac{5}{3}u_n < \frac{3}{2}u_n$. $\frac{u_{n-1}^{-1}}{2} \leq u_n^{-1} \leq \frac{2}{3}u_{n-1}^{-1}$. Кожний член

Розглянемо послідовність $\overline{u_n} = \frac{3}{2}u_{n-1}$, $\overline{\overline{u_n}} = 2u_{n-1}$. Це геометричні прогресії $\overline{u_n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, $\overline{\overline{u_n}} = 2^n$, тоді $\sum_{n-1}^{\infty} u_n^{-1}$ мажорується сумою x геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, що збігається.

Приклад 30. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n!}{n^{\alpha}}$ на збіжність.

Розв'язання.

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}$.

Для $\alpha < 0$ ряд розбігається, тому що не виконується необхідна ознака збіжності $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n!}{n^{\alpha}} = \infty$. Розглянемо випадок, коли $\alpha > 0$. Застосуємо ознаку порівняння. $\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln n < n\ln n$, тому $\dfrac{\ln n!}{n^{\alpha}} < \dfrac{n\ln n}{n^{\alpha}} = \dfrac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$. Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

$$\int_1^{\infty} x^{1-\alpha}\ln x dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x \\ dv = x^{1-\alpha}dx \end{matrix}\left|\begin{matrix} du=\frac{1}{x}dx \\ \\ v=\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\end{matrix}\right.\right\} = -\frac{1}{\alpha}\ln x\cdot x^{1-\alpha}\Big|_1^{\infty} + \frac{1}{\alpha}\int_1^{\infty}\frac{1}{x}x^{-\alpha}dx =$$

$$= \ln x\cdot x^{1-\alpha}\Big|_1^{\infty} + \frac{1}{\alpha}\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\Big|_1^{\infty} = \left\{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\pi}} = \left\{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha-2}} = \right.\right.$$

$$= \left\{\begin{matrix} 0,\ \text{якщо } \alpha > 2 \\ 1,\ \text{якщо } \alpha = 2\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{-\alpha x^{\alpha}} = 0 \\ \alpha > 1\end{matrix}\right\}, \text{ тому ряд } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}} \text{ збігається для } \alpha \ge 2.$$

2. ЗНАКОЗМІННІ ЧИСЛОВІ РЯДИ

Знакозмінними числовими рядами називають ряди, в яких деякі члени ряду додатні числа, деякі відмінні.

Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду: якщо для знакозмінного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то вихідний ряд збігається. Якщо члени ряду – числа однакового знака, то на такі ряди переносяться основні властивості кінцевих сум, тобто від зміни місць доданків сума не змінюється.

В рядах, які збігаються умовно, не можна переставляти нескінченну кількість членів, оскільки може змінитися сума ряду і навіть може утворитися розбіжний ряд.

Наприклад, розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ... + (-1)^n\dfrac{1}{n}$. Цей ряд збігається умовно і суму його позначимо через S.

Переставимо члени цього ряду, розмістимо після кожного доданого члена два від'ємних. Отримаємо ряд $1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{7} - ...$.

Позначимо часткові суми ряду $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+$ через S_n, а другого ряду через σ_n.

Тоді $S_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $S_4=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$, $S_6=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{37}{60}$,

$\sigma_3=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$, $\sigma_6=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{7}{24}$, $\sigma_9=\frac{7}{24}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{37}{120}$, …

Звідси, $\sigma_3=0,5S_2$, $\sigma_6=0,5S_4$, $\sigma_9=0,5S_6$ і взагалі можна довести, що $\sigma_{3m}=0,5S_{2m}$. Оскільки $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m}=S$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{3m}=0,5\lim\limits_{n\to\infty}S_m=0,5S$.

Таким чином послідовність часткових сум другого ряду з номерами, які кратні трьом, мають границю $0,5S$. Далі знайдемо

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_{3m+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\sigma_{3m}+\frac{1}{2m+1}\right)=0,5S \quad \text{і}$$

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_{3m+2}=\lim_{m\to\infty}\left(\sigma_{3m}+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{4m+2}\right)=0,5S.$$

Ми показали, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_m$ існує, це означає, що другий ряд збігається, але сума його дорівнює половині суми першого ряду.

Для знакозмінних рядів окремо виділяються ряди знакопочережні, тобто ряди $a_1-a_2+a_3-a_4+...+(-1)^{n-1}a_n+...$.

Для знакопочережних рядів використовують **ознаку Лейбніця**:

якщо в знакопочережному ряді $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, де при будь якому n $a_n>0$, члени ряду за абсолютною величиною монотонно спадаюча, тобто $a_1>a_2>...>u_n>u_{n+1}>...$, і $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, то ряд збігається, його сума додатна і не перевищує першого члена ряду.

Ознака Абеля. Знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ збігається, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ і послідовність b_n монотонно обмежена.

Приклад 31. Довести збіжність ряду $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+...$ і знайти їх суму.

Розв'язання.

$$1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+...+=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{2^n}.$$

Цей ряд знакопочережний. Розглянемо ряд, складений із модулів членів нашого ряду, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$. Застосуємо узагальнену ознаку Даламбера: $a_{n+1}=\frac{2(n+1)+1}{2^{n+1}}=\frac{2n+3}{2^{n+1}}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$, ряд збігається, це означає, що вихідний ряд збігається абсолютно.

Для того, щоб знайти суму ряду складемо послідовність часткових сум.

$S_n=1-\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}-\frac{7}{2^3}+...+\frac{(-1)^n(2n+1)}{2^n}=$ (кожний доданок, починаючи з другого, розкладемо в суму $-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$, $\frac{5}{2^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{4}{2^2}$ і т. д.) $=$

$$=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{(-1)^k}{2^k}+...+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)+\left(\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{(-1)^k}{2^k}+...+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{(-1)^k}{2^k}+...+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)\right)+\left(\frac{1}{2^2}+...+\frac{(-1)^k}{2^k}+...+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2^2}+...+\frac{(-1)^k}{2^k}+...+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)\Bigg)+...+\left(\frac{(-1)^k}{2^k}+...+\frac{(-1)^n}{2^n}+\frac{(-1)^k}{2^k}+...+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)+...+$$

$$+\left(\frac{(-1)^n}{2^n}+...+\frac{(-1)^n}{2^n}\right).$$

Кожний вираз в дужках позначимо $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}\dots\ S_n^{(k+1)}\dots S_n^{(4)}$.

$S_n^{(1)}$ – це перша строчка, геометрична прогресія, перший член якої b_1 дорівнює 1, а $q=\left(-\frac{1}{2}\right)$, членів $n+1$.

Формула знаходження суми n членів геометричної прогресії має вигляд $S_n=\frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$.

Тому $S_n^{(1)}=\frac{\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)$.

$S_n^{(2)}$ – це сума чисел, які стоять в другій дужці, це сума двох однакових геометричних прогресій, у яких $b_1 = -\dfrac{1}{2}$, $q = -\dfrac{1}{2}$, число членів n.

$$S_n^{(2)} = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)\ldots$$ так як $(-1)^n = -(-1)^{n+1}$.

$S_n^{(k+1)}$ – це теж сума двох однакових геометричних прогресій, у яких $b_1 = \dfrac{(-1)^k}{2^k}$, $q = -\dfrac{1}{2}$, число членів $n-k+1$, сума двох цих прогресій дорівнює $S_n^{(k+1)} = \dfrac{4}{3}\dfrac{(-1)^k}{2^k}\left(1-\dfrac{(-1)^{n-k+1}}{2^{n-k+1}}\right) = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{(-1)^k}{2^k}-\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)$, і нарешті остання дужка $S_n^{(n)} = 2\dfrac{(-1)^n}{2^n}$.

Тоді

$$S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + \ldots + S_n^{k+1} + \ldots + S_n^{(n)} = \frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right) + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right) +$$

$$+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right) + \ldots + \frac{4}{3}\left(\frac{(-1)^k}{2^k}-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right) + \ldots + 2\frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right) +$$

$$+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right) + 2\frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)}{1+\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+2\frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right) + \frac{4}{9}\left(-1+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right) + 2\frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Знайдемо тепер суму цього ряду.

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right) + \frac{4}{9}\left(-1+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right) + 2\frac{(-1)^n}{2^n}\right) =$$

$$= \left\{\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} = 0\right\} = \frac{2}{3}-\frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$

Приклад 32. Знайти суму ряду $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$.

Вказівка. Застосувати формулу $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n$, де C – постійна Ейлера і $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

Розв'язання.

Розглянемо часткову суму парного числа членів ряду.

$$S_2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{2}{2}-\frac{2}{4}-\frac{2}{6}-\ldots-\frac{2}{2n}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=$$

= (застосуємо формулу із вказівки) = $C+\ln 2n+\varepsilon n-\left(C+\ln n+\varepsilon n\right)=$

$$=\cancel{C}+\ln 2n+\varepsilon_{2n}-\cancel{C}-\ln n-\varepsilon_n=\ln\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}}+\varepsilon_n-\varepsilon_n.$$

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n\right)=\ln 2.$$

Тепер розглянемо часткову суму непарного числа членів

$S_{2n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}=$ (сума парного числа членів ми тільки що знайшли) $=\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n+\frac{1}{2n+1}$, тому

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n+\frac{1}{2n+1}\right)=\ln 2.$$

Таким чином, часткові суми як першого, так і непарного числа членів мають однакову границю $\ln 2$.

Приклад 33. Знайти суму ряду $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots$.

Розв'язання.

Кожний третій член ряду від'ємний.

Розглянемо часткову суму членів число яких кратне 3.

$$S_{3m}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\ldots+\frac{1}{2^{3m-3}}+\frac{1}{2^{3m-2}}-\frac{1}{2^{Sm-1}}.$$

Додамо суму модулів всіх членів, які від'ємні, та віднімемо їх, сума не зміниться.

$$S_{3m}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{3m-3}}+\frac{1}{2^{3m-2}}+\frac{1}{2^{Sm-1}}-\frac{2}{2^2}-\frac{2}{2^3}-...-\frac{2}{2^{3m-4}}-\frac{2}{2^{3m-1}}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{3m-3}}+\frac{1}{2^{3m-2}}+\frac{1}{2^{Sm-1}}\right)-2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{2}{2^{3m-1}}\right)=$$

= { в перших дужках стоїть геометрична прогресія, $b_1=1$, $q=\frac{1}{2}$, число членів $3m-1$, її сума дорівнює $\frac{1-\frac{1}{2^{3m}}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^{3m}}\right)$, в других дужках стоїть геометрична прогресія, $b_1=\frac{1}{2^2}$, $q=\frac{1}{2^3}$, число членів m, її сума дорівнює

$$\frac{\frac{1}{2^2}\left(1-\frac{1}{2^{3m}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8}{4\cdot 7}\left(1-\frac{1}{2^{3m}}\right)\}\ =2\left(1-\frac{1}{2^{3m}}\right)-\frac{4}{7}\left(1-\frac{1}{2^{3m}}\right).$$

$$S=\lim_{m\to\infty}\left(2\left(1-\frac{1}{2^{3m}}\right)-\frac{4}{7}\left(1-\frac{1}{2^{3m}}\right)\right)=2-\frac{4}{7}=1\frac{3}{7}.$$

Тепер розглянемо суму члені числа $3m+1$ і $3m+2$.

$$S_{3m+1}=S_{3m}+\frac{1}{2^{3m}},\ \lim_{m\to\infty}\left(S_{3m}+\frac{1}{2^{3m}}\right)=1\frac{3}{7}.$$

$$S_{3m+2}=S_{3m}+\frac{1}{2^{3m+1}}+\frac{1}{2^{3m+2}},\ \lim_{m\to\infty}\left(S_{3m}+\frac{1}{2^{3m+1}}+\frac{1}{2^{3m+2}}\right)=1\frac{3}{7}.$$

Всі ці границі однакові, тому $S=1\frac{3}{7}$.

Приклад 34. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

Розв'язання.

Це ряд знакопочережний, застосуємо ознаку Лейбніця.

$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{(n+1)\sqrt[100]{n}}=0$., ряд збігається.

Тепер перевіримо, як він збігається. Розглянемо ряд, утворений із модулів членів цього ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n+1)\sqrt[100]{n}}$. Застосуємо ознаку порівняння.

В якості ряду, з яким ми будемо порівнювати наш ряд, візьмемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{(n+1)\sqrt[100]{n}}\cdot\frac{\sqrt[100]{n}}{1}=1\neq 0$. Звідси витікає, що ці ряди ведуть себе однаково.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ розбігається. Тому наш ряд збігається умовно.

Приклад 35. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)}{\sqrt[n^2]{n}}$.

Розв'язання.

Цей ряд знакопочережний. Застосуємо ознаку Лейбніца.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln\frac{1}{n^{\frac{1}{n^2}}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{1}{n^2}\ln n}=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}}=$ { застосуємо правило Лопіталя } $=$

$=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2n}}=e^0=1$. Ряд розбігається.

Приклад 36. Скільки членів ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$ належить взяти, щоб одержати його суму з точністю до $\varepsilon=10^{-6}$.

Розв'язання.

Цей ряд знакопочережний, за ознакою Лейбніца він збігається, так як $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}<0$. За ознакою Лейбніца сума ряду по модулю не перевершує першого члена ряду, тому потрібне число N (де N – номер останнього члена ряду), яке нам потрібно взяти, щоб знайти суму ряду заданої точності, знаходимо з нерівності $\frac{1}{\sqrt{(N+1)^2+1}}<\frac{1}{10^6}$. Розв'яжемо цю нерівність. Так як обидві частини нерівності додатні, то із нашої нерівності витикає, що $\sqrt{(N+1)^2+1}>10^6\Rightarrow(N+1)^2+1>10^{12}\Rightarrow(N+1)^2>10^{12}-1\Rightarrow|N+1|>\sqrt{10^{12}-1}$, так як N – натуральне число, то $N+1>\sqrt{10^{12}-1}\Rightarrow N>\sqrt{10^{12}-1}-1$. Найменше натуральне число, яке задовольняє цій нерівності 10^6, тому $N>10^6$.

3. ДІЇ З РЯДАМИ

3.1. Сума рядів.

За ознакою $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \pm b_n \right)$.

Якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються, але вірні рівності

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\lambda a_n + M b_n \right) = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + M \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, де λ і M – довільні числа.

3.2. Правило Коші. Під добутком двох рядів розуміється третій ряд, загальний член якого має вигляд: $C_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1$.

Але $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ вірно, коли один ряд збігається, а другий збігається абсолютно, або всі три ряди збігаються.

Приклад 37. Що можна сказати про суму двох рядів, із яких а) один ряд збігається, а другий розбігається; б) обидва ряди розбігаються.

Розв'язання.

а) Ряд розбігається; б) може збігатись і може розбігатись.

Приклад 38. Знайти суму двох рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right).$$

Розв'язання.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3} \right)$ збігається, тому що він є сумою двох рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ збігається за ознакою Даламбера, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ за ознакою Лейбніця, другий збігається за такими ж ознаками.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3} + \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right) =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{n^3}(1-1)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^{n+1}}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}},$$ а це сума нескінченої геометричної прогресії з першим членом $b_1=\frac{1}{9}$, $q=\frac{1}{3}$.

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{6}.$$

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}=4\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{2}.$$

Приклад 39. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$.

Розв'язання.

Цей ряд є сумою двох рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$, які є геометричними прогресіями.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{4},\ \text{тому}\ S=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Приклад 40. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n}{2^n}$.

Розв'язання.

$\cos\frac{2\pi n}{3}=1-2\sin\frac{2\pi n}{3}=$ **(**n – числа натуральні, тому всі вони поділяються на числа кратні 3, тобто $n=3k$, або не кратні $n=3k$, тоді всі числа n можна задати таким чином: $n=\left[\begin{array}{l}3k-2\\3k-1\\3k\end{array}\right.$, при $k\in N$, $\sin\frac{3k\pi}{3}=0$,

$\sin\frac{3k\pi-\pi}{3}=\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{3k\pi-2\pi}{3}=\sin\left(k\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, а

$$\sin^2\frac{2\pi n}{3}=\left\{\begin{array}{l}\frac{4}{3},-\text{якщо } n\neq 3k\\0,\quad \text{якщо } n=3k\end{array}\right)=\left\{\begin{array}{l}1,\text{якщо } n=3k\\-\frac{1}{2},\text{якщо } n=3k-2,\ \text{або } n=3k-1.\end{array}\right.$$

Ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n-2}}$ знакопостійні, збігаються, тому в них можна переставляти місцями доданки, сума не зміниться, так як це все нескінченні геометричні прогресії з $|q|<1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n}{2^n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3k}}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3k-1}}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3k-2}}=\frac{2^{\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{8}}-\frac{1}{2}\frac{2^{\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{8}}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}}=$$

$$=\frac{1}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{8}}{7}-\frac{1}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{8}}{7}-\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{7}=-\frac{2}{7}.$$

Приклад 41.

Відомо, що $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

Розв'язання.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots=$ (додамо доданки $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}+\ldots$ і віднімемо їх) $=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}+\ldots\right)=$ (сума ряду в перших дужках відома, а в сумі, яка стоїть в других дужках винесемо за дужку $2^{\frac{1}{2}}$, получимо $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}+\ldots\right)=\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}$) $=$ $\frac{\pi}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{3\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$.

4. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

1. Область збіжності. Сукупність x_0 тих значень x, для яких збігається функціональний ряд $u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$ називається областю збіжності цього ряду, а функція $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}u_i(x)$ $(x\in X)$, де $S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ – послідовність часткових сум, є його сумою.

2. Рівномірна збіжність. Послідовність функцій $f_n(x)$ називається рівномірно збіжною до функції $f(x)$ на проміжку X, якщо $V_{\xi}>0\exists N=N(\xi)$ (яке залежить от ε не залежить від x) таке, що $V_n>N(\xi)$ виконується нерівність $\left|f_n(x)-f(x)\right|<0$ одночасно для всіх $\in X$.

Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ називається рівномірно збіжним на множині X, якщо рівномірно збігається на цій множині послідовність його часткових сум.

3. Ознака Вейерштраса. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ збігається абсолютно й рівномірно на множині X, якщо існує числовий ряд $C_1+C_2+...+C_n+...$, який збігається, і такий, що $\left|u_n(x)\right|\le C_n$ при $x\in X$ $(n\in N)$.

4. Ознака Абеля. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ збігається рівномірно на множині X, якщо 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ збігається рівномірно на множині X; 2) функції $b_n(x)$ обмежені у сукупність і при кожному x утворюють монотонну послідовність.

5. Властивості функціональних рядів.

а) Сума ряду, який рівномірно збігається і його члени функції неперервні, неперервна;

б) якщо функціональний ряд збігається рівномірно на кожному $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ і існують конечні границі $\lim\limits_{x\to a}u_n(x)=A_n$ $(n\in N)$, то

– ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ збігається;

– має місце нерівність $\lim\limits_{x\to a}\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\lim\limits_{x\to a}u_n(x)\right]$;

в) якщо члени ряду, який збігається, неперервне діференцюються при $a<x<b$ і ряд похідних $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ збігається рівномірно на інтервалі (a,b), то $\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ при $x\in(a,b)$;

г) якщо члени ряду неперервні і цей ряд збігається рівномірно на $[a,b]$, то $\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$.

Приклад 42. Знайти область збіжності (абсолютну і умовну) ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

Розв'язання.

Нехай $\frac{1-x}{1+x}=t$, тоді ряд буде виглядати так $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}t^n$.

Застосуємо ознаку Даламбера $\lim_{n\to\infty}\frac{|t|^{n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{|t|^n}=|t|$.

За ознакою Даламбера ряд збігається для t, для яких $|t|<1$, розбігається для $|t|>1$. Точки $t=\pm1$ розглянемо окремо.

В точці $t=-1$ ряд має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$. Цей числовий ряд розбігається.

В точці $t=1$ ряд має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$, він знакопочережний, і за ознакою Лейбніца збігається, але ряд складений із модулів цього ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ розбігається, це означає, що в точці $t=1$ ряд збігається умовно. Область збіжності ряду $-1<t\le1$. Повертаємось до старої змінної $-1<\frac{1-x}{1+x}\le1$.

Розв'яжемо цю систему нерівнянь.

$$\begin{cases}\frac{1-x}{1+x}\le1\\ \frac{1-x}{1+x}>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1-x-1-x}{1+x}\le0\\ \frac{1-x+1+x}{1+x}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{-2x}{1+x}\le0\\ \frac{2}{1+x}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x\le0\\ 1+x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge0\\ x>-1\end{cases}\Rightarrow x\in[0;\infty)$$

Але в точці $x=0$ ряд збігається умовно, а для $x\in(0;\infty)$ він збігається абсолютно.

Приклад 43. Знайти область збіжності (абсолютну і умовну) ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$.

Розв'язання.

Позначимо $\frac{2x}{1+x^2}=t$, тоді ряд буде мати вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}t^n$.

Застосуємо ознаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)t^{n+1}2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)(2n+2)\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)t^n}\right|=|t|.$$

Для $|t|<1$ ряд збігається, $|t|>1$ – розбігається, а для $|t|=1$ треба дослідити збіжність ряду окремо при $t=1$ і $t=-1$.

Розглянемо точку $|t|=1$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}$. Застосуємо ознаку Раабе для знакодатнього ряду. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{\cancel{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}}{\cancel{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}}\cdot\frac{\cancel{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\,(2n-2)}{\cancel{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\,(2n+1)}-1\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1+\frac{1}{2n+1}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$, ряд розбігається.

Розглянемо точку $t=-1$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}$. Застосуємо ознаку Лейбніця.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}=0$, так як число множників прямує до нескінченності, кожний множник менш за одиницю, а добуток чисел менших за одиницю завжди менший найменшого множника.

Отже, для всіх $|t|<1$ ряд збігається абсолютно, а в $t=-1$ – умовно. Тепер вернемося до старих змінних $-1\le\frac{2x}{1+x^2}<1$. Розв'яжемо цю систему нерівностей

$$\begin{cases}\frac{2x}{1+x^2}<1\\ \frac{2x}{1+x^2}\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x<1+x^2\\ 2x\ge -1+x^2\end{cases}\text{ (тому що } 1+x^2>0 \text{ для всіх } x\text{)}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+1>0\\x^2+1+2x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-1)^2>0\\(x+1)^2\ge 0\end{cases}$$ Розв’язком цієї системи є всі x, крім $x=1$.

Отже ряд збігається абсолютно при $|x|\ne 1$ і збігається умовно при $x=-1$.

Приклад 44. Знайти область збіжності (абсолютну і умовну) ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Розв’язання.

x^{2n} для всіх x додатне число, коли $x\ge 0$, то $x^n=|x|^n$, коли $x<0$, то $x^n=(-1)^n|x|^n$.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}}$. Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Знайдемо

$$\int_1^{\infty}\frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}}dn=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}}dn=\begin{cases}|x|^n=t & t_1=|x|\\|x|^n\ln|x|dn=dt & t_2=0\begin{cases}0, \text{ якщо } |x|<1\\\infty, \text{ якщо } |x|>1\end{cases}\end{cases}.$$

Розглянемо випадок, коли $|x|<1$.

$$\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}}dn=\lim_{A\to\infty}\int_{|x|}^{0}\frac{dt}{\ln|x|\left(1+t^2\right)}=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\ln|x|}\operatorname{arctg}t\Big|_{|x|}^{0}=-\frac{1}{\ln|x|}\operatorname{arctg}|x|,$$

тобто інтеграл збігається для всіх $|x|<1$, $x\ne 0$.

Розглянемо випадок, коли $|x|>1$. Тоді

$$\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}}dn=\lim_{A\to\infty}\int_{|x|}^{\infty}\frac{dt}{\ln|x|\left(1+t^2\right)}=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\ln|x|}\operatorname{arctg}t\Big|_{|x|}^{\infty}=\frac{1}{\ln|x|}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}|x|\right),$$

тобто інтеграл збігається.

Тепер дослідимо збіжність ряду для $x=0$, $x=\pm 1$.

а) $x=0$, тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}0$ збігається.

б) $x=\pm 1$, тоді ряд має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ або $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}$.

У цих рядів $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}=0$, тобто в цих точках ряд розбігається.

Отже, ряд збігається абсолютно у всіх x, для яких $|x|\ne 1$, в точках $x=\pm 1$ ряд розбігається.

Приклад 45. Користуючись ознакою Вейерштраса, довести рівномірну збіжність в наступних функціональних рядах:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty<x<\infty$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $0\le x<\infty$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)$, $\frac{1}{2}\le|x|\le 2$.

Розв'язання.

а) Знайдемо такий числовий ряд, який збігається, для якого $\left|u_n\left(x\right)\right|\le C_n$ для всіх x. $\frac{1}{x^2+n^2}<\frac{1}{n^2}$ для всіх $x\in\left(-\infty;\infty\right)$, а числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається.

б) Розглянемо $f\left(x\right)=\frac{x}{1+n^4x^2}$. Знайдемо найбільше значення цієї функції, для цього знайдемо похідну $f'\left(x\right)=\frac{1+n^4x^2-x\cdot 2xn^4}{1+n^4x^2}=\frac{1-x^2n^4}{1+n^4x^2}$. Знайдемо критичні точки: $1-x^2n^4=0$, $x^2=\frac{1}{n^4}$, $x=\pm\frac{1}{n^2}$. Але нам треба дослідити ряд для $x\in\left[0;\infty\right)$, тому нас цікавить тільки точка $x=\frac{1}{n^2}$. Похідна $f'\left(\frac{1}{n^2};+\varepsilon\right)<0$, а $f'\left(\frac{1}{n^2};-\varepsilon\right)>0$, звідси витікає, що $x=\frac{1}{n^2}$ – точка максимуму.

$f\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\frac{1}{n^2}}{1+n^4\cdot\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2n^2}$, тобто на інтервалі $x\in\left[0;\infty\right)$ $\frac{x}{1+n^4x^2}\le\frac{1}{2n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ збігається для всіх x, це означає, ряд збігається рівномірно.

в) Треба довести, що ряд збігається рівномірно на проміжках $x\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};2\right]$. Розглянемо проміжок $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$. Знайдемо найбільше і найменше значення функції $f\left(x\right)=x^n+x^{-n}$ на проміжку $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$.

$$f'\left(x\right)=nx^{n-1}-nx^{-n-1}=n\left(x^{n-1}-\frac{1}{x^{n+1}}\right)=\frac{n\left(x^{2n}-1\right)}{x^{n+1}}.$$

Знайдемо критичні точки, для цього розв'яжемо рівняння $\frac{n\left(x^{2n}-1\right)}{x^{n+1}}=0\Rightarrow x^{2n}-1=0\Rightarrow x=\pm1$. Знайдемо $f\left(2\right)=2^n+2^{-n}=2^n+\frac{1}{2^n}$,

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^n}+2^n$, $f(1)=2$, тому для всіх $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$ функція $f(x)<2^n+\frac{1}{2^n}$. Тоді $\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)<\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(2^n+2^{-n}\right)$.

Розглянемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)$. Застосуємо ознаку Даламбера.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\left(2^{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\sqrt{(n+1)!}\cdot n^2\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt{(n+1)!}\cdot n^2}\right)\left(\frac{2^{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}}}{2^n+\frac{1}{2^n}}\right)=$ (поділимо чисельник і знаменник на 2^n) $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt{(n+1)!}\cdot n^2}\right)\left(\frac{2+\frac{1}{2^{2n+1}}}{1+\frac{1}{2^{2n}}}\right)=$ (границя першого множника існує і дорівнює нулю, так як степінь чисельника дорівнює 2, а степінь знаменника $2\frac{1}{2}$, границя другого множника дорівнює 2) $=0<1$.

Ряд збігається, звідси витікає, що функціональний ряд збігається рівномірно.

Тепер розглянемо поведінку ряду на проміжку $x\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$. Для від'ємних x вираз x^n+x^{-n} можна записати у вигляді $x^n+x^{-n}=(-1)^n\left(|x|^n+|x|^{-n}\right)$. Тому, якщо ми розглянемо поведінку ряду складеного із модулів членів ряду, то він буде мати вигляд такий самий, як і для $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Тому на цьому проміжку ряд буде також збігатися рівномірно.

Приклад 46. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

Розв'язання.

Функціональні ряди, які збігаються рівномірно, можна почленно диференціювати і почленно інтегрувати. Тому можна спробувати підібрати таку функцію, похідна якої, або інтеграл якої в точці x_0 буде співпадати з нашим числовим рядом.

Розглянемо функцію $f(x)=3^{-nx}$. $f'(x)=-n3^{-nx}\ln 3$, $f''(x)=+n^2 3^{-nx}\ln^2 3$.

Тому розглянемо ряд $\frac{1}{\ln^2 3}\sum_{n=1}^{\infty}3^{-nx}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}3^{-nx}$ збігається рівномірно, це геометрична прогресія, $l_1 = 3^{-x}$, $q = 3^{-x}$, тому $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-nx} = \frac{3^{-x}}{1-3^{-x}} = \frac{3^{\frac{1}{x}}}{1-3^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{3^x - 1}$.

Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot 3^{-n} = \frac{1}{\ln^2 3}\left(\frac{1}{3^x-1}\right)''\Bigg|_{x=1} = \left(\left(\frac{1}{3^x-1}\right)' = \frac{-3^x \ln 3}{\left(3^x-1\right)^2}, \left(\frac{1}{3^x-1}\right)'' = \right.$

$$\left. = \frac{-3^x \ln^2 3\left(3^x-1\right)^2 + 2\left(3^x-1\right)3^{2x}\ln^2 3}{\left(3^x-1\right)^4} = \frac{\ln^2 3 \cdot 3^x \cancel{\left(3^x-1\right)}\left(-3^x+1+2\cdot 3^x\right)}{\left(3^x-1\right)^{\cancel{4}\,3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\ln^2 3}} \cdot \frac{\cancel{\ln^2 3} \cdot 3\left(-3+1+2\cdot 3\right)}{\left(3-1\right)^3} = \frac{3}{2}.$$

Приклад 47. Обчислити $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

Розв'язання.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, так як кожний ряд збігається. Другий ряд – це нескінчена геометрична прогресія, у якої $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. Для першого $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^n}$ підберемо функціональний ряд, який збігається рівномірно. Розглянемо функцію $f(x) = 2^{-nx}$, $f'(x) = -n2^{-nx}\ln 2$. Розглянемо функціональний ряд $\frac{-2}{\ln 2}\sum_{n=1}^{\infty} 2n^{-nx} =$ (це геометрична прогресія, у якої $b_1 = \frac{1}{2^x}$, $q = \frac{1}{2^x}$, він збігається рівномірно) $= \frac{-2}{\ln 2} \cdot \frac{2^{\frac{1}{x}}}{1 - \frac{1}{2^x}} = \frac{1}{2^x - 1} \cdot \frac{2}{\ln 2}$. Знайдемо похідну від цієї суми ряду.

$$\left(\frac{-2}{\ln 2} \cdot \frac{1}{2^x - 1}\right)' = \frac{-2}{\ln 2} \cdot \frac{-2^x \ln 2}{\left(2^x-1\right)^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^n} = \frac{-2}{\ln 2}\left(\frac{-2\ln 2}{\left(2-1\right)^2}\right) = 4.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \left(b_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 4 - 1 = 3$.

5. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

1. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-a\right)^n$ називається степеневим. Радіус збіжності знаходиться за формулою $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ або $\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

2. Основні властивості степеневого ряду.

Сума степеневого ряду усередині інтервалу збіжності $x\in\left(-R;R\right)$ є неперервна функція.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{a^{n^2}}x^n \quad \left(a>1\right)$.

Степеневий ряд можна почленно диференціювати в будь-якій точці його інтервалу збіжності $x\in\left(-R;R\right)$, і можна почленно інтегрувати на інтервалі збіжності $x\in\left(-R;R\right)$, тобто

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots\right)dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}a_0dx+\int\limits_{x_1}^{x_2}a_1xdx+\ldots+\int\limits_{x_1}^{x_2}a_nx^ndx+\ldots$$

3. Ряд Тейлора. Аналітична в точці a функція $f\left(x\right)$ в деякому околі цієї точки розкладається в степеневий ряд

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{\left(n\right)}\left(a\right)}{n!}\left(x-a\right)^n.$$

Залишковий член цього ряду $R_n\left(x\right)=f\left(x\right)-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{\left(n\right)}\left(a\right)}{n!}\left(x-a\right)^n$ може бути зображено у вигляді

$$R_n\left(x\right)=\frac{f^{n+1}\left(a+\theta\left(x-a\right)\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-a\right)^n \quad \left(0<\theta<1\right)$$ – форма Лагранжа,

або у вигляді

$$R_n\left(x\right)=\frac{f^{n+1}\left(a+\theta_1\left(x-a\right)\right)}{n!}\left(1-\theta_1\right)^n\left(x-a\right)^{n+1} \quad \left(0<\theta_1<1\right)$$ – форма Коші.

Треба пам'ятати п'ять основних розкладів в ряд Маклорена.

I. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{\left(n\right)}\left(0\right)}{n!}$, $x\in\left(-\infty;\infty\right)$.

II. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\left(-1\right)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n+1}x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}$, $x\in\left(-\infty;\infty\right)$.

III. $\cos x = x - \dfrac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n!} + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in (-\infty;\infty)$.

IV. $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \dfrac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + ... =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n$, $x \in (-1;1)$.

IVa. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^4 + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

V. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$, $-1 < x \le 1$.

4. Дії зі степеневими рядами.

Усередині інтеграла збіжності $|x-a| < B$ маємо:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \pm \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-a)^n$.

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$,

де $C_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0$.

в) $\dfrac{d}{dx}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right] = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$.

г) $\int \left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right] dx = C + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$.

У випадках в) і г) інтервал збіжності одержаного ряду збігається з інтервалом збіжності вихідного ряду.

Приклад 48. Знайти інтервал збіжності і дослідити поведінку в граничних точках інтервалу збіжності наступних рядів: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$,

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{a^n + b^n}$ $(a > 0,\, b > 0)$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

Розв’язання.

а) Знайдемо радіус збіжності за формулою $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$,

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + (-1)2^n}{n} \cdot \dfrac{n+1}{3^{n+1} + (-1)^{n+1} 2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} \cdot \dfrac{3^n + (-1)^n 2^n}{3 \cdot 3^n - (-1)^n 2^n \cdot 2} =$ (границя першого множника дорівнює 1, а чисельник і знаменник другого множника прямує до нескінченності, щоб розкрити цю невизначеність поділимо чисельник і знаменник другого множника на 3^n) $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1+(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3-(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 2} =$

$= \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{3}$, $n \to \infty$. Тоді ряд збігається для всіх $-\frac{1}{3} < x+1 < \frac{1}{3}$. Розглянемо поведінку ряду на границі проміжку збіжності, коли $x+1=\frac{1}{3}$ і $x+1=-\frac{1}{3}$.

Розглянемо випадок $x+1=\frac{1}{3}$. В цій точці ряд має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-1)^n 2^n}{n\cdot 3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{n\cdot 3^n} + \frac{(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$. Перший ряд розбіжний, а другий збіжний, тому в точці $x+1=-\frac{1}{3}$ ряд розбігається.

Розглянемо випадок $x+1=-\frac{1}{3}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-1)^n 2^n}{n(-1)^n 3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n}$. Перший ряд збігається умовно, а другий знакододатний ряд збігається, це означає, що ряд збігається умовно.

Отже, ряд збігається $-\frac{1}{3} < x+1 < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$, в точці $x=-\frac{2}{3}$ він розбігається, а в точці $x=-\frac{4}{3}$ збігається умовно.

б) Знайдемо радіус збіжності:

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n!)^2 (2n)!}\,(2n+1)(2n+2)}{\cancel{(2n)!(n!)^2}\,(n+1)^2} = 4$, тому при $x \in (-4;4)$ ряд збігається абсолютно. Розглянемо поведінку ряду в точці $x=4$. Ряд в цій точці має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$. Знайдемо $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n!)^2 4^n (2n+2)!}{(2n)! 4^{n+1}((n+1)!)^2} =$

$=\dfrac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2}=\dfrac{4n^2+6n+2}{4n^2+8n+4}=\dfrac{4n^2+8n+4-2n-2}{4n^2+8n+4}=$

$=\dfrac{4n^2+8n+4}{4n^2+8n+4}-\dfrac{2n-2}{4\left(n^2+2n+1\right)}=1-\dfrac{n-1}{2(n+1)^2}<1$. Це означає, що $a_{n+1}>a_n$ для всіх n, тобто члени ряду монотонно зростають. Це означає, що границя загального члена ряду при $n\to\infty$ не може дорівнювати нулю. В цій точці ряд розбігається. По цій же причині ряд розбігається і в точці $x=-4$.

в) Знайдемо радіус збіжності за формулою $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a^n+b^n}\cdot\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{1}=$ (нехай $a>b$, поділимо чисельник і знаменник на a^n) $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a+\left(\frac{b}{a}\right)^n\cdot\frac{b}{a}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=\left(\dfrac{b}{a}<1\Rightarrow\left(\dfrac{b}{n}\right)^n\to 0\right)=a$, якщо $b>1$, то $R=b$, тобто $R=\max(a,b)$. На проміжку $x\in(-a;a)$ ряд збігається абсолютно.

Розглянемо поведінку ряду в точках $x=a$ і $x=-a$. В точці $x=a$ ряд має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{a^n+b^n}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=1\neq 0$. Ряд розбігається в точці $x=-4$, так як границя модулю загального члена ряду також не дорівнює нулю. Ряд в цих точках розбігається.

г) Знайдемо $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}\cdot\dfrac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{3^{-\sqrt{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}\cdot 3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=$ (перший множник при $n\to\infty$ наближається до одиниці, а границю другого знайдемо окремо $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=3^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}$ = це невизначеність $\infty-\infty$ = $3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{(n+1)^2+1}}}=3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{(n+1)^2+1}}}=3^0=1$) = 1. Ряд абсолютно збігається на проміжку $x\in(-1;1)$. Розглянемо поведінку ряду в точках $x=\pm 1$. Модуль загального члена і при $x=1$ і при $x=-1$ має вигляд $a_n=\dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}$.

Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\sqrt{n}}$ застосуємо ознаку порівнянь $3^{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, це видно з графіків функцій $y = 3^{\sqrt{x}}$ і $y = \sqrt{x}$, тоді $\frac{1}{3^{\sqrt{n}}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, тоді $\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n^2+1}}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\left(n^2+1\right)}}$ збігається, тому збігається і ряд.

в точці $x = 1$, а в точці $x = -1$ ми одержимо знакопочережний ряд, у якого ряд складений із модулів його членів збігається, тому він збігається абсолютно.

д) Знайдемо радіус збіжності за формулою $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$.

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e}$. Ряд збігається на проміжку $x \in \left(-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right)$. З'ясуємо, як веде себе ряд в точках $x = \pm\frac{1}{e}$.

Ряд в точці $x = \frac{1}{e}$ має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$.

Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}\right)^2} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} - \ln e^n\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-n+n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)} =$

(Розкладемо функцію $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ в ряд Маклорена, получимо $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \ldots$) $= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n+n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\ldots\right)\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n+n-\frac{1}{2}+\frac{1}{3n}+\ldots\right)} =$
$= e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$. Ряд розбігається. З цієї причини розбігається ряд і в точці $x = -\frac{1}{e}$.

е) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!a^{(n+1)^2}}{a^{n^2}(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!a^{(n+1)^2-n^2}}{n!(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{2n+1}\cdot 2\ln 2}{1} = \infty$.

Ряд збігається для $x \in (-\infty; \infty)$.

Приклад 49. Розкласти функцію $f\left(x\right)=\dfrac{x}{1+x-2x^2}$ в ряд Маклорена.

Розв'язання.

Для того, щоб розкласти функцію в ряд Маклорена, треба знайти загальну формулу похідної n-го порядку. Ця задача часто буває дуже важкою. Тому треба спробувати звести функцію в суму функцій, розклад яких ми знаємо.

Іноді функція, яку ми хочемо розкласти є похідною, або інтегралом от табличної функції, розклад якої ми знаємо.

Розкладемо нашу функцію в суму. Для цього спочатку розкладемо на множники знаменник $1+x-2x^2$. Для цього знайдемо корені рівняння $2x^2-x-1=0$: $x_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_2=1$. Тому $-2x^2+x+1=-2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-1\right)$.

Тепер розкладемо функцію $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$ в суму методом розкладання раціонального дробу на найпростіші дроби.

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-1\right)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{A}{x+\frac{1}{2}}+\frac{B}{x-1}\right)=-\frac{1}{2}\frac{A\left(x-1\right)+B\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-1\right)}\Rightarrow$$

$\Rightarrow A\left(x-1\right)+B\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=x$ (многочлени є рівними, якщо коефіцієнти при однакових степенях рівні, або їх значення при одному і тому ж x_0 рівні) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l|l} x=1- & \frac{3}{2}B=1 \\ x=-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}A=-\frac{1}{2} \end{array}\Rightarrow\begin{array}{l} B=\frac{2}{3}, \\ A=\frac{1}{3}. \end{array}$$

Тому $\dfrac{x}{1+x-2x^2}=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{2}{3}}{x-1}\right)=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{1+2x}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{1-x}\right)=$

$=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+2x}-\dfrac{1}{1-x}\right)=$ (скористуємось формулою розкладання функцій $\dfrac{1}{1+x}$ і $\dfrac{1}{1-x}$ в ряд Маклорена: $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^n$, $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$) $=$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(2x\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-1\right)^n2^n-1\right)x^n=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\left(-1\right)^n2^n\right)x^n.$$

Область збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(2x\right)^n$ дорівнює $\left|2x\right|<1$, а ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n-\left|x\right|<1$, тому область збіжності їх суми $\left|x\right|<\dfrac{1}{2}$.

Приклад 50. Розкласти в ряд Маклорена наступні функції:

а) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$; б) $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x$;

в) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2-2x}{1+4x}$.

Розв'язання.

а) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)=(1+x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=$ (дивись формулу V) $=$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n}=$ (Область збіжності цих рядів $-1<x\le 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}x^{n+1}}{n+1}$) $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}x^{n+1}}{n+1}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n}=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}x^{n+1}}{n+1}-$

$-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}x^{n+1}}{n}=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}\right)=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-(-1)^{n}x^{n+1}}{n(n+1)}=$

$=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n(n+1)}$.

б) $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x=\dfrac{1}{4}\ln(1+x)-\dfrac{1}{4}\ln(1-x)+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. Функції $\ln(1+x)$ і $\ln(1-x)$ – табличні. Розкладемо функцію $\operatorname{arctg}x$ в ряд.

$$\operatorname{arctg}x=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\int\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int x^{2n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Тоді $f(x)=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}-\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(-1)^n x^n}{n}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}$.

Розглянемо

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{2n-1}x^n}{n}=\left((-1)^{2n-1}=-1\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=$

$=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots=2x+\dfrac{2x^3}{3}+\ldots=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Тому

$f(x)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^7}{7}+\ldots+x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\ldots\right)=$

$=\dfrac{1}{2}\left(2x+\dfrac{2x^5}{5}+\dfrac{2x^9}{9}+\ldots\right)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sum\dfrac{x^{4n-1}}{4n-1}$.

Область збіжності $x \in (-1;1)$. Це видно із того, що область збіжності ряду для $\ln(1+x)$ є $-1 < x \le 1$, для $\ln(1+x)$ є $-1 \le x < 1$, для $\operatorname{arctg} x$ є $-1 < x < 1$.

в) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{2-2x}{1+4x}$. Знайдемо похідну цієї функції:

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}\right)' = \frac{\dfrac{-2(1+4x)-(2-2x)4}{(1+4x)^2}}{1+\left(\dfrac{2-2x}{1+4x}\right)^2} = \frac{-10}{20x^2+5} = \frac{-2}{1+4x^2} = \frac{-2}{1+(2x)^2}.$$

Цю функцію розкладемо за формулою $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. Звідси

$\dfrac{-2}{1+(2x)^2} = -2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n} x^{2n}$, ми розклали в ряд Маклорена похідну, тепер

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{2-2x}{1+4x}\right) = C + \int f'(x)dx = C - 2\sum_{n=0}^{\infty}\int (-1)^n 2^{2n} x^{2n} dx = C - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} =$$
$$= C + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1}.$$

В т. $f(0) = \operatorname{arctg} 2$, це означає, що в нашому випадку $C = \operatorname{arctg} 2$, тому $f(x) = \operatorname{arctg} 2 + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1}$.

Функція $\dfrac{1}{1-x}$ розкладається в ряд Маклорена, який збігається на інтервалі $-1 < x < 1$, тому $\dfrac{1}{1+(2x)^2}$ розкладається в ряд Маклорена, який збігається на інтервалі $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$. Область визначення функції $\operatorname{arctg}\dfrac{2-2x}{1+4x}$ $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4}; \infty\right)$. Ми при інтегруванні ряду підбирали C з того, що $f(0) = \operatorname{arctg} 2$, тому знайшли розклад функції $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{2-2x}{1+4x}$ в ряд Маклорена, область збіжності якого $x \in \left(-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right]$, а можна перевірити, що кінцевий ряд збігається і в точці $\dfrac{1}{2}$.

Приклад 51. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. Підказка: розгляньте функцію $f(x)=\operatorname{arctg}x$.

Розв'язання.

Іноді суму числового ряду можна знайти, якщо підібрати функцію, яка розкладається в ряд Маклорена, або в ряд Тейлора, і похідна або інтеграл від неї в якійсь точці x_0 співпадає з тим числовим рядом, суму якого нам треба знайти.

Розкладемо функцію $f(x)=\operatorname{arctg}x$ в ряд Маклорена.

$$\operatorname{arctg}x = C+\int\frac{1}{1+x^2}dx = C+\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx = C+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

В точці $x=0$ $\operatorname{arctg}0=0$, тому $C=0$, так як сума ряду в точці $x=0$ дорівнює нулю. Отже, $\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Область збіжності цього ряду $x\in(-1;1]$, тоді $\operatorname{arctg}1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. Тобто $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

Якщо рахувати члени ряду від $n=k$, а хочемо здвинути початок рахунку $n=k+\alpha$, то в формулу загального члена ряду замість n підставляємо $n-\alpha$. Наш ряд починався рахуватися при $n=0$, а ми хочемо передвинути початок рахунку з $n=1$, тому в загальний член ряду ми підставили $n-1$, а $(-1)^{n-1}=(-1)^{n+1}$.

Приклад 52. Розкласти функцію $f(x)=\ln\frac{1}{2+2x+x^2}$ по цілим додатним степеням бінома $(x+1)$.

Розв'язання.

Нам треба розкласти функцію $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $x+1$. Це можна зробити з відомими розкладами деяких функцій в ряд Маклорена, якщо функцію зможемо записати так, щоб можна було ввести нову змінну $(x+1)=t$, так, щоб ми получили функцію, розклад якої в ряд Маклорена нам відомий.

$\ln\frac{1}{2+2x+x^2}=-\ln\left(2+2x+x^2\right)=-\ln\left(1+(1+x)^2\right)$. Розклад в ряд Маклорена: ми знаємо функцію $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$.

Тоді $-\ln\left(1+(1+x)^2\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(1+x)^{2n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+x)^{2n}}{n}$.

Область збіжності ряду Маклорена для функції $\ln(1+x)$ $-1 < x \le 1$. Тоді область збіжності для нашого ряду $-1 < (1+x)^2 \le 1$. Це система нерівностей $\begin{cases}(1+x)^2 \ge -1 \\ (1+x)^2 \le 1\end{cases}$, перша нерівність виконується при $x \in (-\infty;\infty)$, а друга для $-1 \le 1+x \le 1$.

Звідси область збіжності $-2 \le x \le 0$.

Приклад 53. Розкласти функцію $f(x) = \dfrac{x}{x^2-5x+6}$ в ряд Тейлора по степеням $x-5$.

Розв'язання.

Розкладемо $\dfrac{x}{x^2-5x+6}$ на суму простіших дробів.

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow A(x-3)+B(x-2) = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|l} x=3 & B=3 \\ x=2 & -A=2,\;\; A=-2. \end{array}$$

Тоді

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{-2}{(x-5)+3} + \frac{3}{(x-5)+2} = \frac{-2}{3\left(1+\dfrac{x-5}{3}\right)} + \frac{3}{2\left(1+\dfrac{x-5}{2}\right)} =$$

$=$ (ми знаємо розклад функції $\dfrac{1}{x+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$) $=$ $-\dfrac{2}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-5)^n}{2^n} =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-5)^n\left(-\dfrac{2}{3^{n+1}} + \dfrac{3}{2^{n+1}}\right)$. Область збіжності для першого ряду $-1 < \dfrac{x-5}{3} < 1$, для другого $-1 < \dfrac{x-5}{2} < 1$, тому область збіжності суми є розв'язком системи нерівностей:

$$\begin{cases}-1 < \dfrac{x-5}{3} < 1 \\ -1 < \dfrac{x-5}{2} < 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3 < x-5 < 3 \\ -2 < x-5 < 2\end{cases} \Rightarrow -2 < x-5 < 2 \Rightarrow x \in (3;7).$$

6. ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ

1. В деяких випадках ряд можна зображувати у вигляді лінійної комбінації відомих рядів: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

2. Метод Абеля. Якщо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ збігається, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$.

Приклад 54. Знайти суми рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$.

Розв'язання.

а) Розкладемо дріб на суму найпростіших дробів:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1+n-n}{n(n+1)}==\frac{1+n}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+...=$ (так як ісходний ряд збігається абсолютно, то можна переставити доданки від цього сума не зміниться) $=1-\frac{2}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+...=1+2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...\right)=$

$1+2\left(-1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-...\right)=1-2+2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-...\right)=$

$-1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=-1+2\ln 2$ (так як $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$ відомий) $=2\ln 2-1$.

б) Розкладемо дріб $\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ на суму найпростіших дробів

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}+\frac{C}{n+3}=$$

$$=\frac{A(n+2)(n+3)+B(n+1)(n+3)+C(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Так як перша і остання дробі рівні і їх знаменники рівні, то і чисельники рівні, звідси маємо тотожність:

$$n=A(n+2)(n+3)+B(n+1)(n+3)+C(n+1)(n+2).$$

Ліва й права частини рівні при будь якому n, тому прирівняємо їх при $n=-1$, $n=-2$, $n=-3$.

$$\begin{array}{l|ll} n=-1 & 2A=-1 & A=-\dfrac{1}{2}, \\ n=-2- & -B=-2-\Rightarrow & B=2, \\ n=-3 & 2C=-3 & C=-\dfrac{3}{2}. \end{array}$$

Тоді $\dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{4}{n+2}-\dfrac{3}{n+3}\right).$

Знайдемо $S_n=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{3}-\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{4}-\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{6}+...$

$-\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{4}{n}-\dfrac{3}{n+1}-\dfrac{1}{n}+\dfrac{4}{n+1}-\dfrac{3}{n+2}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{4}{n+2}-\dfrac{3}{n+3}=$

$=-\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{3}{n+3}.$

Тоді $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{3}{n+3}\right)=\dfrac{1}{2}.$

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-1}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)(n+1)}=$ (здвинемо початок відліку від $n=2$ до $n=1$, для цього в ряд в загальний член замість n треба підставити $n+1$) $=$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+2)}$. І знову розкладемо загальний член на суму простіших:

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2+n-n}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{2+n}{n(n+2)}-\frac{n}{n(n+2)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right).$$

Знайдемо

$S_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+...+\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)=$

$=(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+2}\right)).$

$S=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{4}{3}.$

г) Розкладемо дріб $\dfrac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$ на найпростіші дроби.

$$\frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n^2}+\frac{C}{n+1}+\frac{D}{(n+1)^2}=\frac{An(n+1)^2+B(n+1)^2+C(n+1)^2n^2+Dn^2}{n^2(n+1)^2}.$$

Звідси маємо тотожність $2n-1=An(n+1)^2+B(n+1)^2+C(n+1)^2n^2+Dn^2$.

$$\begin{array}{l|l} n=0 & -1=B \\ n=-1 & -3=D \\ n^3 & 0=A+C \\ n^2 & 0=2A+B+C+D \end{array}$$

Звідси $B=-1$, $D=-3$, $A=4$, $C=-4$.

Тоді $\dfrac{2n-1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{4}{n+1}-\dfrac{3}{(n+1)^2}$, можемо розкласти ряд в суму рядів, тобто

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{n^2(n+1)^2}=4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{4}{n+1}\right)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}-3\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}$, так як кожний ряд збігається.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}-1=\dfrac{\pi^2}{6}-1$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ розкласти в суму далі не можна, тому що $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ розбігаються. Знайдемо суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$.

$S_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$.

Отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{n^2(n+1)^2}=4-\dfrac{\pi^2}{6}-3\left(\dfrac{\pi^2}{6}-1\right)=7-\dfrac{2\pi^2}{3}$.

Приклад 55. Використовуючи метод Абеля, знайти суми рядів:

а) 3014 $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\ldots$, б) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots$

Розв’язання.

а) $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\ldots=\sum\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$. Розглянемо степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$ в точці $x=1$ ряд збігається (тому його можна диференціювати) і співпадає з нашим рядом.

$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{3n}}{n}=\dfrac{1}{1+x^3}$, так це геометрична прогресія з першим членом 1 і знаменник її дорівнює $-x^3$.

Сума ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}=\int\dfrac{dx}{1+x^3}+C$.

Знайдемо інтеграл $\int \frac{dx}{1+x^3} = \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1} \right) dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(1+x)\left(x^2-x+1\right)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \Rightarrow A\left(x^2-x+1\right) + (Bx+C)(x+1) = 1 \Rightarrow \\ \begin{array}{l|l} x=-1 & 3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3} \\ x^2 & A + B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{3} \\ x & -A + B + C = 0 \Rightarrow C = \frac{2}{3} \end{array} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{3}{6}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{2\sqrt{3}} + C.$$

Тобто $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{2\sqrt{3}} + C$.

Але ряд в точці $x=0$ дорівнює нулю, тому $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}} + C = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow C = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Отже, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

В точці $x=1$ получимо $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{3n+1} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

б) $\sum 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Розглянемо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, який в точці $x=1$ дорівнює нашому числовому ряду, і в цій точці він збігається.

Знайдемо похідну $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$.

Так як це геометрична прогресія, перший член якої $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \int\frac{dx}{1+x^2} + C = \operatorname{arctg} x + C$.

Але сума ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ в точці $x=0$ дорівнює 0. Тому $\operatorname{arctg} 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$.

$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x$. Тоді $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Справочное пособие по математическому анализу. Ч. 1. Введение в анализ, производная, интеграл / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай и др. – К.: Вища шк., 1978. – 696 с.

2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1990. – 624 с.

3. Садовничий В.А. Задачи студенческих математических олимпиад / В.А. Садовничий, А.А. Григорьян, С.В. Конягин. – М.: МГУ, 1987. – 310 с.

4. Садовничий В.А. Задачи студенческих олимпиад по математике / В.А. Садовничий, А.С. Подколузин. – М.: Наука, 1978. – 207 с.

ЗМІСТ

Кагадій Тетяна Станіславівна

Шелест Людмила Іванівна

Р Я Д И

МАТЕРІАЛИ МЕТОДИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ
поглибленого вивчення розділу
студентами технічних спеціальностей

Видано в редакції авторів.

Підписано до друку 29.09.2016. Формат 30х42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 2,6.
Обл.-вид. арк. 2,6. Тираж 50 пр. Зам. №

Державний вищий навчальний заклад
«Національний гірничий університет»
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.