

## ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА ОДНОПЛОСКОСТНОЙ БАЛАНСИРОВКИ

*И.А. Таран, М.Н. Трубицин, Государственные ВУЗ «НГУ» Украина*

*С.В. Шишко, Государственные ВУЗ «УГХТУ», Украина*

Получена обобщенная формула для одноплоскостной балансировки в матричном виде. Определены условия существования решения задачи метода трех пробных пусков. Проведен сравнительный анализ накопления погрешностей расчета при неточном задании исходных данных (фаз и амплитуд). Даны рекомендации по предварительной оценке результатов последнего, третьего пуска

Задача балансировки произвольных жестких вращающихся тел (роторов) подразумевает совмещение главной центральной оси инерции ротора с осью его вращения. Если поперечный размер балансируемого ротора значительно больше продольного (вдоль оси вращения) размера, то такой ротор можно считать плоским диском. В этом случае для балансировки диска необходимо, чтобы его центр масс лежал на оси вращения – это известная задача одноплоскостной балансировки [1]. Ее можно решать методами статической и более общей и точной динамической (моментной) балансировки [2]. Наиболее распространенными способами решения задач динамической балансировки являются:

1. метод фаз и амплитуд, где при использовании вибродатчиков и специального отметчика положения (угла поворота ротора) измеряются параметры (фазы и амплитуды) колебаний опор ротора – вибро- перемещения, скорости, ускорения [3].;

2. метод амплитуд [4], в отличие от предыдущего метода, здесь отсутствуют датчик положения и, следовательно, возможность определения фаз колебаний опор, результатами опытов являются только амплитуды колебаний.

В обоих методах отслеживаются реакции линейной механической системы «вращающийся ротор» на вносимые возмущения – пробные дисбалансы  $d_{np} = m_{np} \cdot r_{np}$  ( $m_{np}$  – масса пробного груза, положительная, если груз прикрепляется к ротору, отрицательная, если масса удаляется с ротора;  $r_{np}$  – радиус расположения пробного груза). Пробный дисбаланс имеет свою угловую координату  $\varphi_{np}$ . Измерение колебаний опор вращающегося ротора с присоединенными  $d_{np}$  традиционно называются пробными пусками. А запуск ротора с начальным, собственным и неизвестным пока дисбалансом  $d_0 = m_0 \cdot r_0$  (с угловой координатой  $\varphi_0$ ) называется нулевым пуском. Считается, что все замеры колебаний опор на всех пусках производятся при одной и той частоте вращения ротора  $\omega$ . Возникающая при этом центробежная сила инерции  $F = m \cdot r \cdot \omega^2 = d \cdot \omega^2$  от каждого дисбаланса воспринимается опорами и вносит своё слагаемое (с амплитудой  $A$ , фазой  $\alpha$ ) в колебания опор, рис.1.

Отметим, что в силу линейных свойств рассматриваемой механической системы амплитуда  $A$  пропорциональна возмущающей силе  $F$ , а фаза колебаний опоры  $\alpha$  сдвинута относительно фазы дисбаланса  $d$  на некоторую величину  $\delta$ , рис.1 и [3, с.194].

Сформулируем задачу одноплоскостной балансировки: отбрасывая из рассмотрения собственный вес ротора, при производстве минимального количества пусков (включая нулевой) определить величину  $d_0$  и расположение  $\varphi_0$  исходного дисбаланса плоского диска, для последующего совмещения его центра масс с осью вращения путем удаления лишней или добавления недостающей массы, т.е. нанесения на ротор корректирующего дисбаланса  $d_{корр} = m_{корр} \cdot r_{корр} = -d_0$ , с угловой координатой  $\varphi_{корр} = \varphi_0$  при  $m_{корр} < 0$  (удаление массы) и  $\varphi_{корр} = \varphi_0 + \pi$  при  $m_{корр} > 0$  (добавление массы).

В связи с тем, что дисбалансы, силы инерции и колебания наглядно представляются векторами, наиболее простой вид решения задач балансировки при использовании метода фаз и амплитуд удобно получить применив комплексные числа в Эйлеровой форме, [3]:

- дисбалансы  $D = d \cdot e^{i\varphi}$ ;
- амплитуды  $Am = A \cdot e^{i\alpha}$ ;

- динамические коэффициенты влияния (ДКВ)  $K=k \cdot e^{i\delta}$ ,

где  $i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица.

При этом модуль  $k$  комплексного числа  $K$  будет иметь смысл масштабного, переводного коэффициента, показывающего, во сколько раз изменилась величина амплитуды по сравнению с величиной дисбаланса, т.е. в комплексной форме

$$Am = A \cdot e^{i\alpha} = K \cdot D = (k \cdot d) \cdot e^{i(\varphi + \delta)}.$$

Удачный переход от скалярных (амплитуды и фазы) представлений рассматриваемых величин к векторным (комплексные числа) подсказал идею и цель настоящей работы. Идея - выявление взаимосвязи между выводами обобщенных формул метода фаз и амплитуд и метода амплитуд при однозначном определении параметров  $d_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $k$  с помощью минимального количества пробных пусков и использование матричных обозначений. Цель работы: вывод и тестовая проверка обобщенной формулы одноплоскостной балансировки методом амплитуд, направленная на уменьшение погрешностей получаемых результатов  $d_0$ ,  $\varphi_0$  и  $k$ . Выполнение этих пунктов будет способствовать в дальнейшем разработке способов и алгоритмов балансировки, исключающих применение вибродатчиков.

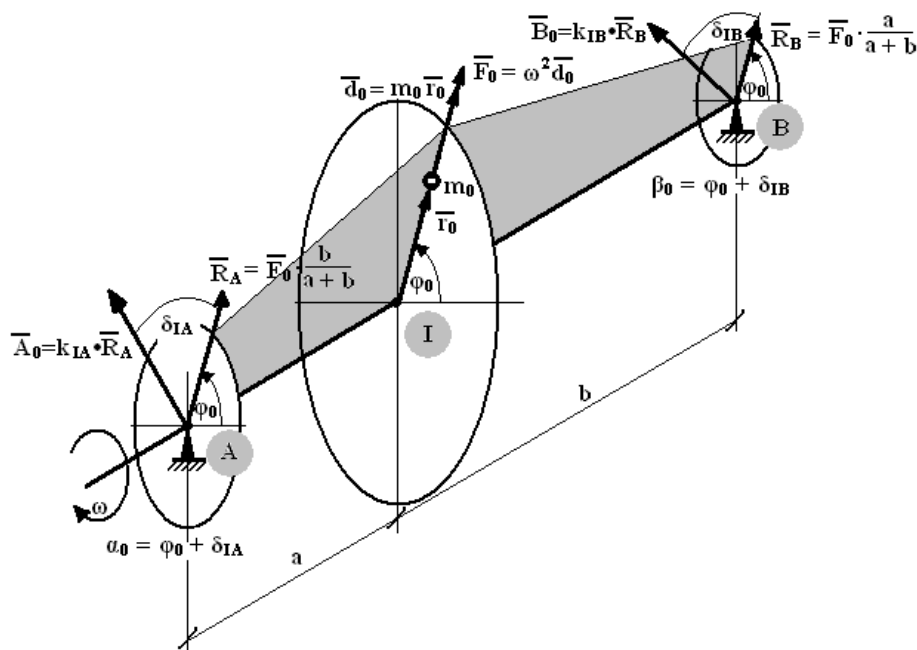


Рис.1. Векторная расстановка дисбалансов, усилий и параметров колебаний опор при одноплоскостной балансировке. Серым цветом показана плоскость действия усилия инерции  $F_0$  и его производных усилий  $R_A$  и  $R_B$  на опорах. Вибродатчик рекомендуется ставить на ближайшей к диску опоре (в нашем случае – опора А, т.к.  $a < b$ ) для получения большей величины сигнала (в виду  $R_A > R_B$  и  $A_0 > B_0$ ).

В виду наличия в методе фаз и амплитуд только двух комплексных неизвестных  $D$  и  $K$  для их определения необходимо иметь два условия, которые формируют простую систему двух линейных уравнений с комплексными коэффициентами по результатам всего двух пусков нулевого и первого. Остальные пуски можно считать проверочными.

$$\begin{cases} Am_0 = K \cdot D_0 \\ Am_1 = K \cdot (D_0 + D_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_0 = \frac{Am_0}{Am_1 - Am_0} \cdot D_1 \\ K = \frac{Am_1 - Am_0}{D_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_0 r_0 = |D_0|; & \varphi_0 = \arg(D_0); \\ k = |K|; & \delta = \arg(K); \end{cases} \quad (1)$$

Отметим, что при производстве пусков возникают естественные погрешности получения величин и фаз, и амплитуд, связанные с погрешностями вибродатчиков и отметчика положения ротора. При проведении расчетов может произойти накопление погрешностей, завися-

щее от величин погрешностей четырех исходных (полученных в результате опытов) параметров  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $Am_0$  и  $Am_1$ . Несомненной положительной чертой метода фаз и амплитуд является рассмотрение ДКВ. При балансировке партий однотипных роторов, на одинаковых опорах знание комплексного числа  $K$  позволяет уже на втором и последующих балансируемых роторах обходиться всего одним (начальным) пуском и определять исходный дисбаланс ротора из первого уравнения вышеприведенной системы  $D_0 = Am_0 / K$ .

Рассмотрим метод амплитуд для одноплоскостной балансировки, еще он называется методом трех пусков [2, 4]. Правильней его было бы называть методом трех пробных пусков, т.к. с учетом начального пуска это уже будет метод четырех пусков. Действительно, неизвестных по-прежнему четыре  $d_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $k$  и  $\delta$ , но сдвиг фаз  $\delta$  здесь получить не представляется возможным. В специальной литературе [2], [4] и др. для этой задачи вводятся различные шаблонные упрощения (которые, к сожалению, не всегда можно применить) для трех пробных пусков:

- пробные дисбалансы имеют одинаковую величину

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 = m_3 r_3 = m r = d_{np}; \quad (2)$$

- пробные дисбалансы равномерно расположены по угловой координате, т.е.

$$(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = (0^\circ 120^\circ 240^\circ); \quad (3)$$

- пробные дисбалансы расположены специальным образом по угловой координате

$$(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = (0^\circ 90^\circ 180^\circ). \quad (4)$$

Конкретные рекомендации в каких случаях применять те или иные упрощения в перечисленной литературе отсутствуют. Есть только ссылки на возможное упрощение аналитических расчетов или графических векторных построений, а также сетования на громоздкость проведения необходимых вычислительных операций. Современные балансировочные станки и аппаратура обязательной своей частью имеют компьютерный блок или подключаются к ПК, которые несомненно справятся с аналитическим описанием и проведением необходимых выкладок задач даже многоплоскостной балансировки. К тому же эти расчеты не должны быть столь уж сложными, хотя бы потому, что в [1] приводятся примеры решения отдельных, поэтапных задач балансировки, выполненные на программируемых советских микрокалькуляторах типа МК-51, где объем программирования составлял всего 100-105 шагов.

Рассмотрим традиционную графическую векторную интерпретацию задачу балансировки методом амплитуд. Экспериментально доказано [3, с.194], что вектора амплитуд колебаний опор ротора «запаздывают» относительно порождающих их векторов дисбалансов, т.е. имеют сдвиг фаз  $\delta$ , рис.2а. Причем этот сдвиг является постоянной величиной для каждой рассматриваемой опоры и не зависит от величины дисбаланса. При таком свойстве векторов амплитуд колебаний опор ротора надобность в нахождении угла  $\delta$  отпадает, а векторные треугольники дисбалансов и соответствующих им амплитуд будут подобны с коэффициентом подобия  $k$ .

При производстве нулевого и  $j$ -того пробного пусков получим, согласно теоремы косинусов, соответствующие амплитуды и дисбалансы, связанные системой уравнений.

$$\begin{cases} A_0 = k \cdot d_0 = k \cdot m_0 r_0 \\ A_j = k \cdot \sqrt{d_0^2 + d_j^2 + 2d_0 d_j \cos(\varphi_j - \varphi_0)} \end{cases} \quad j = 1, 2, 3$$

Исключая из этой системы коэффициент подобия  $k$  и вводя безразмерную амплитуду

$$\lambda_j = A_j / A_0$$

получим окончательную систему трех линейных уравнений, позволяющую получить однозначное решение поставленной задачи.

$$\left\{ (1 - \lambda_j) (m_0 r_0)^2 \right\} + 2 m_j r_j \cos \varphi_j \{ m_0 r_0 \cdot \cos \varphi_0 \} + 2 m_j r_j \sin \varphi_j \{ m_0 r_0 \cdot \sin \varphi_0 \} = -(m_j r_j)^2$$

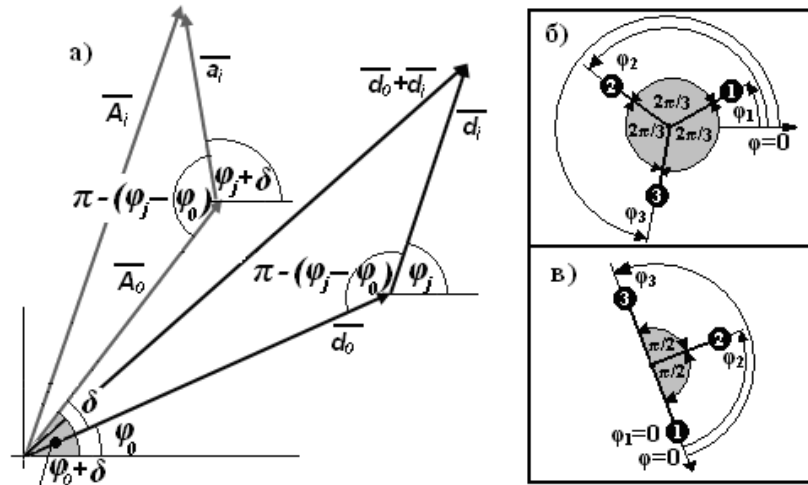


Рис.2. а) подобные векторные треугольники дисбалансов и соответствующих им амплитуды; б) и в) специальное расположение трех пробных дисбалансов.

Искомые неизвестные в этой системе взяты в фигурные скобки. Тогда обобщенную формулу метода амплитуд одноплоскостной балансировки можно представить в удобной матричной форме

$$\begin{bmatrix} (m_0 r_0)^2 \\ m_0 r_0 \cdot \cos \varphi_0 \\ m_0 r_0 \cdot \sin \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 - 1 & -2m_1 r_1 \cdot \cos \varphi_1 & -2m_1 r_1 \cdot \sin \varphi_1 \\ \lambda_2^2 - 1 & -2m_2 r_2 \cdot \cos \varphi_2 & -2m_2 r_2 \cdot \sin \varphi_2 \\ \lambda_3^2 - 1 & -2m_3 r_3 \cdot \cos \varphi_3 & -2m_3 r_3 \cdot \sin \varphi_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} (m_1 r_1)^2 \\ (m_2 r_2)^2 \\ (m_3 r_3)^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

легко поддающейся программированию. Возможные упрощения этой формулы не приводят к более компактному чем (5) виду, а именно

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_0 \cos \varphi_0 \\ d_0 \sin \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + d_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + d_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{\mu_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \mu_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + \mu_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}} \\ \frac{\mu_1 (d_2 \sin \varphi_3 - d_3 \sin \varphi_2) + \mu_2 (d_3 \sin \varphi_1 - d_1 \sin \varphi_3) + \mu_3 (d_1 \sin \varphi_2 - d_2 \sin \varphi_1)}{2(\mu_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \mu_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + \mu_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2))} \\ \frac{\mu_1 (d_2 \cos \varphi_3 - d_3 \cos \varphi_2) + \mu_2 (d_3 \cos \varphi_1 - d_1 \cos \varphi_3) + \mu_3 (d_1 \cos \varphi_2 - d_2 \cos \varphi_1)}{-2(\mu_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \mu_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + \mu_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2))} \end{bmatrix}$$

где 
$$\mu_j = \frac{\lambda_j^2 - 1}{m_j \cdot r_j} = \frac{\lambda_j^2 - 1}{d_j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Введение в рассмотрение для общего случая угла  $\varphi_1 \neq 0$  позволяет на практике не привязываться к одной системе угловых координат, а использовать удобные системы отсчета углов. Это имеет несомненное практическое преимущество, особенно когда по техническим причинам нельзя устанавливать пробные грузы по одному принципу (равномерно по окружности, через  $90^\circ$ , или комбинацией из двух слагаемых-грузов и др.).

Получение менее громоздких аналитических выражений возможно лишь при использовании алгебры матриц и последовательном рассмотрении условий (2,3,4), так, например, при одинаковых пробных дисбалансах имеем

$$\begin{bmatrix} m_0 r_0 \\ m_0 r_0 \cos \varphi_0 \\ m_0 r_0 \sin \varphi_0 \end{bmatrix} = mr \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{(1 - \lambda_1^2) \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + (1 - \lambda_2^2) \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + (1 - \lambda_3^2) \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}} \\ \frac{\lambda_1^2 (\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_3)) + \lambda_2^2 (\sin(\varphi_3) - \sin(\varphi_1)) + \lambda_3^2 (\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2))}{-2((1 - \lambda_1^2) \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + (1 - \lambda_2^2) \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + (1 - \lambda_3^2) \sin(\varphi_2 - \varphi_1))} \\ \frac{\lambda_1^2 (\cos(\varphi_2) - \cos(\varphi_3)) + \lambda_2^2 (\cos(\varphi_3) - \cos(\varphi_1)) + \lambda_3^2 (\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2))}{2((1 - \lambda_1^2) \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + (1 - \lambda_2^2) \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + (1 - \lambda_3^2) \sin(\varphi_2 - \varphi_1))} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Принятие условия (3)  $(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = (0^\circ 120^\circ 240^\circ)$  для углов пробных дисбалансов дает

$$\begin{bmatrix} m_0 r_0 \\ m_0 r_0 \cos \varphi_0 \\ m_0 r_0 \sin \varphi_0 \end{bmatrix} = mr \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{\sum_{j=1}^3 \lambda_j^2 - 3}}; & \frac{1}{2} \cdot \frac{3\lambda_1^2 - \sum_{j=1}^3 \lambda_j^2}{\sum_{j=1}^3 \lambda_j^2 - 3}; & \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\lambda_2^2 - \lambda_3^2}{\sum_{j=1}^3 \lambda_j^2 - 3}; \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

Подстановка (4)  $(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = (0^\circ 90^\circ 180^\circ)$  в (6) позволяет получить

$$\begin{bmatrix} m_0 r_0 \\ m_0 r_0 \cos \varphi_0 \\ m_0 r_0 \sin \varphi_0 \end{bmatrix} = mr \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 2}}; & \frac{\lambda_1^2 - \lambda_3^2}{2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 2)}; & \frac{3\lambda_2^2 - \sum_{j=1}^3 \lambda_j^2}{2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 2)}; \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

В случае установки пробных и корректирующих грузов на окружности одного радиуса  $R$  ( $R = r = r_0$ ) из выражений (7 и 8) можно сокращением исключить  $r$  и  $r_0$ . Другие варианты упрощения обобщенной формулы (5) и следующих из нее выражений (направленных на нахождение физического или геометрического смысла) надеемся получить в дальнейшем.

Правильность полученной формулы подтверждается выражением для нахождения фазы исходного дисбаланса, [2, с 94]

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{(A_1^2 - A_2^2)(1 - \cos \beta) - (A_1^2 - A_3^2)(1 - \cos \alpha)}{(A_1^2 - A_2^2) \sin \beta - (A_1^2 - A_3^2) \sin \alpha},$$

где обозначениям Левита [2] соответствует:  $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ ;  $\beta = \varphi_3 - \varphi_1$ ;  $\gamma = \varphi_0$ . И для  $\varphi_1 = 0$ , с учетом  $\lambda_j = A_j / A_0$ , получаем следствие из обобщенной формулы и более лаконичный вариант нахождения  $\operatorname{tg} \varphi_0$  при равномерной расстановке пробных грузов через  $120^\circ$ , рис. 26.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_0 &= \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0} = \frac{\cos \varphi_2 (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) + \cos \varphi_3 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + (\lambda_3^2 - \lambda_2^2)}{\sin \varphi_2 (-\lambda_1^2 + \lambda_3^2) + \sin \varphi_3 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} = \\ &= \frac{(A_1^2 - A_2^2)(1 - \cos \varphi_3) - (A_1^2 - A_3^2)(1 - \cos \varphi_2)}{(A_1^2 - A_2^2) \sin \varphi_3 - (A_1^2 - A_3^2) \sin \varphi_2} = \sqrt{3} \cdot \frac{\lambda_2^2 - \lambda_3^2}{3\lambda_1^2 - \sum_{j=1}^3 \lambda_j^2} \end{aligned}$$

Покажем преимущество использования полученной формулы (5) на рассмотренном в [2, с 94] примере одноплоскостной балансировки тонкого диска.

Необходимо произвести балансировку диска методом трех пробных пусков при помощи одного пробного грузика массой 20г. Установку пробных и уравнивающей масс, а также, при необходимости, удаление корректирующей массы с диска производить на одной и той же окружности радиуса  $R$ . Результаты замеров колебаний опор приведены в следующей таблице.

Таблица 1.

Колебания опоры ротора в зависимости от расстановки пробного груза

Названия пусков	нулевой	пробные		
Номера пусков	0	1	2	3
Величина амплитуды на опоре, ед.	29	20	32	42
Фазы установки пробного груза ( $m_{np}=20g$ ), градусы	-	0	120	240

Имеем случай одинаковых пробных грузов  $mr = m_{np} \cdot R$  при их равномерной расстановке – вариант (3), т.е. можно применить формулы (7). Предварительно находим относительные амплитуды

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{A_0} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,69 \\ 1,103 \\ 1,148 \end{bmatrix}.$$

Приняв, по условию задачи  $r_0 = R = r$ , получаем из (7)

$$\begin{bmatrix} m_0 \\ m_0 \cos \varphi_0 \\ m_0 \sin \varphi_0 \end{bmatrix} = 20 \cdot \begin{bmatrix} 1,949 \\ -1,495 \\ -0,966 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38,956 \\ -29,895 \\ -19,274 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_0 = -147,189^\circ$$

Как видно, теперь в проводимом балансировочном расчете можно опустить следующие логические действия:

- расстановки амплитуд по убыванию (выбор максимальной амплитуды);
- учета зависимости направления отсчета углов  $\varphi_j$  от направления вращения ротора;
- определения интервалов (дуг) расположения «легкой» или «тяжелой» точек;
- выбора, в виду известного тригонометрического равенства  $tg \varphi = tg(\varphi \pm \pi)$ , нужного значения  $tg \varphi_0$ , не всегда совпадающего с главным значением.

Предлагаемая формула позволяет также опустить так называемые контрольные пуски (определяющие необходимость добалансировки, в случае ошибочного выбора  $\varphi_0$  или знака корректирующей массы), т.к. выдает однозначное расположение и величину исходного дисбаланса ротора.

Рассмотрим область применимости зависимости (5) и следствий из нее. Здесь нас интересуют вопросы областей существования решений приведенных уравнений, т.к. это непосредственно связано с практическими вариантами, когда ротор невозможно отбалансировать или «ротор не подлежит балансировке». Если принять гипотетический случай, что пробные и корректирующие дисбалансы могут иметь сколь угодно большие значения, то остается рассмотреть теоретически возможные условия, перечисленные в табл. 2.

Таблица 2.

Аналитические условия, описывающие границы области определения решения задачи одноплоскостной балансировки

Большое количество критериев задачи вынуждает принять упрощения: $m_j r_j = m_i, \varphi_1 = 0.$		
№ условия	I часть таблицы	Вид аналитических условий
	Формулировка условия	Начальный
I-1	равенство нулю детерминанта матрицы системы линейных уравнений (5)	$\det \begin{bmatrix} \lambda_1^2 - 1 & 1 & 0 \\ \lambda_2^2 - 1 & \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \\ \lambda_3^2 - 1 & \cos \varphi_3 & \sin \varphi_3 \end{bmatrix} = 0$
I-2	равенство нулю знаменателей компонент вектора правой части выражения (6)	$(1 - \lambda_1^2) \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - (1 - \lambda_2^2) \sin(\varphi_3) + (1 - \lambda_3^2) \sin(\varphi_2) = 0$
I-3	отрицательность подкоренного выражения первой компоненты вектора правой части выражения (6)	$\frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \sin(\varphi_3) - \sin(\varphi_2)}{(1 - \lambda_1^2) \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - (1 - \lambda_2^2) \sin(\varphi_3) + (1 - \lambda_3^2) \sin(\varphi_2)} < 0$ или $\frac{(\lambda_1^2 - 1) \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + (\lambda_2^2 - 1) \sin(\varphi_3) - (\lambda_3^2 - 1) \sin(\varphi_2)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \sin(\varphi_3) - \sin(\varphi_2)} < 0$
№	II часть таблицы	Конечный вид аналитических условий
II-1	Условия I-1 и I-2 - совпали	$\lambda_3^2 = \frac{(\lambda_2^2 - 1) \sin \varphi_3 - (\lambda_1^2 - 1) \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin \varphi_2} + 1$
II-2		
II-3	Решение зависит от знака выражения $\sin(\varphi_2)/\sin(\varphi_3)$	$\frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \sin(\varphi_3) - \sin(\varphi_2)}{\lambda_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \lambda_2^2 \sin(\varphi_3) - \lambda_3^2 \sin(\varphi_2)} < 0$

Подстановка совпавших условий II-1,2 из табл.2 в условие II-3 дает не принимаемое неравенство  $1 < 0$ , т.е. подкоренное выражение в формуле (6) будет положительным при наступлении более общего условия I-1. Отметим, что неравенство II-3 также не будет выполняться, если  $\varphi_2 = \varphi_3$ . Это соответствует одинаковым второму и третьему пробным пускам, где при одинаковых амплитудах  $A_2 = A_3$  получим одинаковые строки детерминанта I-1 и равенство его нулю.

Переформулируем задачу для графической интерпретации. Построить границу области определения одноплоскостной балансировки (зависимости  $\lambda_3 = A(\varphi_3)$  или  $\varphi_3 = \Phi(\lambda_3)$ ), при условии различных трех пробных пусках  $m_j r_j = m r$

$$\varphi_1 \neq \varphi_2, \varphi_1 \neq \varphi_3, \varphi_3 \neq \varphi_2$$

и известных из этих пусков пяти данных  $A_0, A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ , которые можно свести к трем  $\lambda_1, \lambda_2, \varphi_1 = 0, \varphi_2$  (через относительные амплитуды и выбор угловой системы). Определить угол расположения третьей пробной массы  $\varphi_3$ , такой, что амплитуда  $\lambda_3$  принимает произвольное значение, а матрица системы линейных уравнений (5) - вырожденная. Для представления определителя I-1 (табл.2) нулю используем свойства линейной зависимости строк (столбцов) определителя. Будем искать пары чисел  $c_1 c_2 (s_1 s_2)$ , таких что умножение их на соответствующие индексам строки (столбцы) получим третью (-ий) строку (столбец). Полученные системы линейных уравнений относительно неизвестных  $c_1 c_2 (s_1 s_2)$  и  $\varphi_3$  имеют вид

$$\begin{cases} (\lambda_1^2 - 1)c_1 + c_2 = 0 \\ (\lambda_2^2 - 1)c_1 + c_2 \cdot \cos \varphi_2 = \sin \varphi_2 \\ (\lambda_3^2 - 1)c_1 + c_2 \cdot \cos \varphi_3 = \sin \varphi_3 \end{cases} \quad \begin{cases} (\lambda_1^2 - 1)s_1 + (\lambda_2^2 - 1)s_2 = \lambda_3^2 - 1 \\ s_1 + s_2 \cdot \cos \varphi_2 = \cos \varphi_3 \\ s_1 + s_2 \cdot \sin \varphi_2 = \sin \varphi_3 \end{cases} .$$

Решение их (связь между  $\lambda_3$  и  $\varphi_3$ ) совпадают между собой и условием II-1 (табл.2), тогда для функции  $\lambda_3 = A(\varphi_3)$  при прочих заданных параметрах имеем зависимость

$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{(\lambda_2^2 - 1)\sin \varphi_3 - (\lambda_1^2 - 1)\sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin \varphi_2}} + 1. \quad (9)$$

Получаемые по (9) графики, представленные в табл. 3, и их анализ позволяет сделать следующие выводы:

- рассматриваемые функции, на интересующем нас интервале  $0 \leq \varphi_3 \leq 2\pi$  могут иметь разрывы, связанные со знаком подкоренного выражения (9); поиск границ этих интервалов является отдельной задачей и в данной работе не рассматривается;
- налицо явно выраженная симметрия графиков относительно вертикали  $\varphi_3 = \pi$ ; с одной стороны это означает, что при таком выборе угла  $\varphi_3$  вертикаль  $\pi$  обязательно пересечет линию  $A(\varphi_3)$ , т.е. возможен нежелательный вариант  $det=0$  (первый столбец табл. 3); с другой – при попадании вертикали  $\pi$  в интервал разрыва функции (последний столбец табл.3) имеем корректные условия для решения задачи одноплоскостной балансировки;
- матрица системы (5) априори будет иметь не нулевой определитель если величина  $\lambda_3$  превысит симметричные максимумы (вершины) линий  $A(\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1)$ ; в рассматриваемом случае  $\lambda_3$  должна быть, с запасом, не менее 4;
- линии, соответствующие значению  $\varphi_2 = \pi$  на графиках отсутствуют; задачи диаметрального расположения пробных грузов в настоящей работе не рассматриваются;
- наиболее общим, да и удобным условием корректности задачи одноплоскостной балансировки остается условие I-1 (табл. 2).

Погрешность производимой балансировки зависит, в первую очередь, от погрешностей результирующих параметры колебаний опор ротора приборов и устройств. В нашем случае это датчики регистрации амплитуд колебаний, фаз колебаний и определения скорости вращения ротора  $\omega$ . Каждый тип таких датчиков имеет свой разброс, обычно характеризуемый некоторым числом  $\pm p, \%$ . И тогда экспериментально определяемый параметр  $\Pi$  будет находится в интервале  $[\Pi_{min}; \Pi_{max}] = [\Pi \cdot (1 - p \cdot 10^{-2}); \Pi \cdot (1 + p \cdot 10^{-2})]$ . Известно, что современные стационарные балансировочные станки, датчики колебаний имеют погрешность 10-15%. Некоторые дорогостоящие фазомеры имеют погрешность менее 5%. Интересно, как будет накапливаться погрешность решения задачи балансировки двумя рассматриваемыми методами при одинаковых погрешностях измерения амплитуд ( $\varepsilon$ ) и отличных от  $\varepsilon$  погрешности измерения фазы ( $\mu$ ). Это позволит выяснить какой из методов накапливает меньшую погрешность.

Сравнение метода амплитуд и фаз с методом амплитуд проведем на произвольном тестовом примере, исходные данные которого и получаемые точные значения амплитуд и фаз приведены в следующей таблице.

Для определения влияния соотношения величин  $\varepsilon$  и  $\mu$  в расчете выбраны два варианта  $\varepsilon > \mu$  и  $\varepsilon < \mu$  с одинаковой разницей  $|\varepsilon - \mu| = 3\%$ . Расчеты фаз и амплитуд проводились по MathCad-программе, листинг которой представлен на рис. 5. Где в качестве проверки проведены три расчета: 0-1; 0-2; 0-3, с постоянным нулевым пуском  $N_{0II}=0$  и изменяемым первым пуском  $N_{III}=1,2,3$ . Как видно из рис. 5 и рис. 6, результаты всех 4 расчетов (3 - метод фаз и амплитуд; 1 – метод амплитуд) полностью совпадают.



Таблица 3.

Варианты графических зависимостей  $\lambda_3 = A(\varphi_3)$  для различных  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\varphi_2$ 

$\lambda_{1,2}$	$\lambda_1=0,5$	$\lambda_1=1,5$	$\lambda_1=2,5$
$\lambda_2=0,5$			
$\lambda_2=1,5$			
$\lambda_2=2,5$			
Пояснения к таблице	$\varphi_2$ , радианы		Цвет линий
	$0; 2\pi$		не проводилась, т.к. тогда $\varphi_2 = \varphi_1$ и $det=0$ для $\forall \varphi_3$
	$\pi/3$		— красный
	$2\pi/3$		— синий
	$\pi$		— зеленый
	$4\pi/3$		--- черный, пунктир
$5\pi/3$		— коричневый	

Таблица 4.

Тестовый пример одноплоскостной балансировки

№ пуска	Исходные данные для расчета						Точные значения параметров колебаний	
	Дисбалансы		ДКВ, (мкм)/(г·мм)	Погрешность измерения			$A_n$ , мкм	$\alpha_n$ , °
	$d_n$ , г·мм	$\varphi_n$ , °		амплитуды	фазы			
$n$					I расчет	II расчет		
0	47	51	$K=0,3 \cdot e^{i \cdot 6}$ $k=0,3$ $\delta_k=343,775^\circ$	$\varepsilon = 10\%$	$\mu = 7\%$	$\mu = 13\%$	14,1	34,775
1	50	30					28,613	23,946
2	60	140					23,058	86,083
3	70	240					7,41	-118,91

$$i := \sqrt{-1} \quad n := 1..3 \quad j := 0..3 \quad \underline{K}_{\text{мкм}} := 0.3 \cdot e^{i \cdot 6} = 0.288 - 0.084i$$

$$d := \begin{pmatrix} 47 \\ 50 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix} \quad \phi := \begin{pmatrix} 51 \\ 30 \\ 140 \\ 240 \end{pmatrix} \cdot \text{deg}$$

$$D_j := d_j \cdot e^{i \cdot \phi_j} \quad Am_0 := K \cdot D_0 \quad Am_n := K \cdot (D_0 + D_n) \quad Am = \begin{pmatrix} 11.582 + 8.042i \\ 26.15 + 11.614i \\ 1.575 + 23.004i \\ -3.582 - 6.486i \end{pmatrix}$$

$$\text{КомЧис}(Am_0, Am_1, d1) := \begin{cases} \text{"комплексные числа"} \\ d0 \leftarrow \frac{Am_0}{Am_1 - Am_0} \cdot d1 \\ dkv \leftarrow \frac{Am_1 - Am_0}{d1} \\ \left( \begin{matrix} |d0| & \frac{\arg(d0)}{\text{deg}} & |dkv| \end{matrix} \right)^T \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} i0 \\ i1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{КомЧис}(Am_{i0}, Am_{i1}, D_{i1}) = \begin{pmatrix} 47 \\ 51 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i0 \\ i1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{КомЧис}(Am_{i0}, Am_{i1}, D_{i1}) = \begin{pmatrix} 47 \\ 51 \\ 0.3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d_0 \\ \frac{\phi_0}{\text{deg}} \\ |K| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 \\ 51 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i0 \\ i1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{КомЧис}(Am_{i0}, Am_{i1}, D_{i1}) = \begin{pmatrix} 47 \\ 51 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Рис. 5. Расчет тестового примера при помощи комплексных чисел (метод фаз и амплитуд).

```

МеЗпус(Аmp, mr, Φ) := "метод 3 пробных пусков"
for j ∈ 1..3
  αj ←  $\frac{Amp_j}{Amp_0}$ 
  x ←  $\begin{bmatrix} (\alpha_1)^2 - 1 & -2 \cdot m_{r1} \cdot \cos(\Phi_1) & -2 \cdot m_{r1} \cdot \sin(\Phi_1) \\ (\alpha_2)^2 - 1 & -2 \cdot m_{r2} \cdot \cos(\Phi_2) & -2 \cdot m_{r2} \cdot \sin(\Phi_2) \\ (\alpha_3)^2 - 1 & -2 \cdot m_{r3} \cdot \cos(\Phi_3) & -2 \cdot m_{r3} \cdot \sin(\Phi_3) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} (m_{r1})^2 \\ (m_{r2})^2 \\ (m_{r3})^2 \end{bmatrix}$ 
  mr0 ←  $\sqrt{x_0}$ 
  (сΦ0 sΦ0 k) ←  $\begin{pmatrix} \frac{x_1}{m_{r0}} & \frac{x_2}{m_{r0}} & \frac{Amp_0}{m_{r0}} \end{pmatrix}$ 
  Φ0 ← atan2(сΦ0, sΦ0)
   $\begin{pmatrix} m_{r0} & \frac{\Phi_0}{deg} & k \end{pmatrix}^T$ 
  АЗpj := |Аmj|
  МеЗпус(АЗp, d, Φ) =  $\begin{pmatrix} 47 \\ 51 \\ 0.3 \end{pmatrix}$ 

```

Рис. 6. Расчет тестового примера при помощи метода амплитуд. Исходные данные к программе те же, что и на рис. 5.

Загрубление исходных данных, табл. 5, для каждого метода проведем одним и тем же образом - построим бинарную матрицу размерностью  $4 \times 2^4$ , компонентам которой 0 и 1 будут соответствовать:

0 – минимальное значение параметра  $Pz = P_{ТОЧ} \cdot (1 - [\mu \text{ или } \varepsilon] \cdot 10^{-2})$ ;

1 – максимальное значение параметра  $Pz = P_{ТОЧ} \cdot (1 + [\mu \text{ или } \varepsilon] \cdot 10^{-2})$ ,

где  $Pz$  принимает вид компонент последней строки табл.5, а  $P_{ТОЧ}$  – точные значения параметров колебаний (два последних столбца табл. 4).

Таблица 5.

Обозначение параметров загрузки к расчету накопления погрешностей

Метод №	амплитуд и фаз				амплитуд			
	1	2	3	4	1	2	3	4
параметр	$Az\phi_0$	$az\phi_0$	$Az\phi_1$	$az\phi_1$	$Az3_0$	$Az3_0$	$Az3_1$	$Az3_1$

Далее, по каждой MathCad-программе, рис. 5,6 определяются  $d_0, \phi_0, k$ , соответствующие «экспериментальным» данным одинаково загрубленным (для обоих методов), в каждом из  $2^4=16$  вариантах. Получаем 16 пар векторов

$$[ d\phi_0 \phi\phi_0 k\phi ] [ d3_0 \phi3_0 k3 ],$$

компоненты которых позволяют найти накопленные в результате расчетов по обоим методам погрешности сравнением их с точным значением  $[ d_0 \phi_0 k ]$ . Имеем опять 16 пар векторов

$$\begin{bmatrix} \Delta d\phi = \frac{d_0 - d\phi_0}{d_0 \cdot 0,01} \\ \Delta\varphi\phi = \frac{\varphi_0 - \varphi\phi_0}{\varphi_0 \cdot 0,01} \\ \Delta k\phi = \frac{k - k\phi_0}{k \cdot 0,01} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \Delta d3 = \frac{d_0 - d3_0}{d_0 \cdot 0,01} \\ \Delta\varphi3 = \frac{\varphi_0 - \varphi3_0}{\varphi_0 \cdot 0,01} \\ \Delta k3 = \frac{k - k3_0}{k \cdot 0,01} \end{bmatrix},$$

показывающих накопленные погрешности в %.

Промежуточные результаты представим на примере расчета 5-го варианта закругления исходных данных, табл. 6, т.к. в силу громоздкости 32-х строчной матрицы демонстрация ее просто не будет иметь смысла.

Таблица 6.

Промежуточные результаты расчета накопления погрешностей по 5-му варианту расчета закругления «экспериментальных» амплитуд и фаз

Точные значения			Вар. №5	Заглубленные		d <sub>0</sub> , φ <sub>0</sub> , k		Погрешность, %		
АиФ	3 пуска			АиФ	3 пуска	АиФ	3 пуска	АиФ	3 пуска	
14,1	14,1	d <sub>0</sub> =47 φ <sub>0</sub> =51° k=0,3	0	min	12,69	12,69	33,518	36,723	-28,68	-21,87
28,61	28,61		1	max	31,475	31,475				
34,78°	23,06		0	min	32,34°	20,752	41,216	35,504	-19,19	-30,39
23,95°	7,41		1	max	25,62°	8,15	0,379	0,346	26,2	15,19

Сравнение соответствующих компонент последних пар векторов (серые ячейки табл. 6) для всех 16 вариантов удобно провести графически, рис. 7.

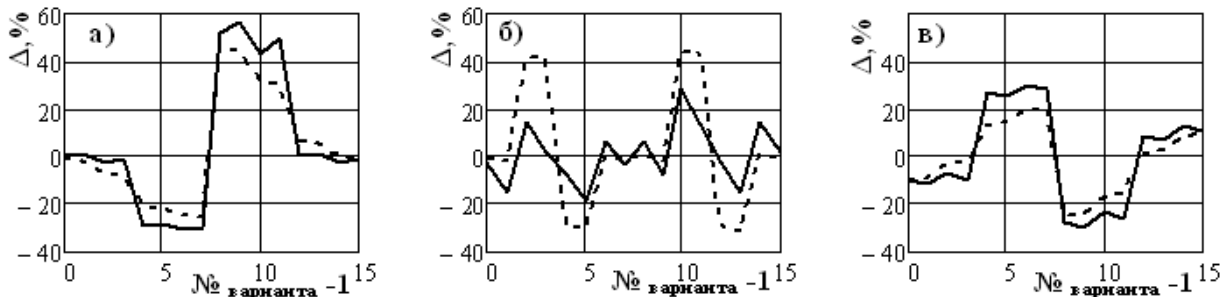


Рис. 7. Изменение величины погрешностей расчетов по номерам вариантов:  
 сплошная линия – погрешности метода амплитуд и фаз;  
 пунктирная линия – погрешности метода трех пусков (амплитуд).  
 а) погрешность в определении начального дисбаланса;  
 б) погрешность в определении фазы начального дисбаланса;  
 в) погрешность в определении модуля ДКВ (масштаба изменения величины амплитуды по сравнению с величиной дисбаланса).

Анализируя рис. 7, по поведению «синусоид» трудно отдать предпочтение одному из рассматриваемых методов. При определении  $d_0$  и  $k$  (рис.7, а и в) можно считать накопление погрешностей почти одинаковым в обоих методах, причем максимумы погрешностей у метода амплитуд меньше ~10%. При определении фазы начального дисбаланса  $\varphi_0$  рис. 7 б, налицо значительное (20-30%) превышение погрешностей метода амплитуд по сравнению с погрешностями метода амплитуд и фаз. Это связано с:

- уменьшенным количеством производимых действий с тригонометрическими функциями в последнем методе;
- возможностью близкого нахождения решения задачи балансировки к границе области определения решений, табл. 2, (на этих же абсциссах происходят всплески погрешностей и метода фаз и амплитуд);

- не найденным пока еще условием (-ями) некорректности задачи балансировки.

В дальнейшем, здесь представляют интерес вопросы, связанные с поиском явных зависимостей между  $d_0$ ,  $\varphi_0$  и исходными данными – амплитудами  $A_0 \dots A_3$  на основе специальной расстановки специальных пробных масс. На рис. 7 приведена только одна тройка графических зависимостей для  $\mu = 7\%$ . Вторую тройку, для  $\mu = 13\%$ , не имеет смысла демонстрировать, т.к. она полностью повторяет первую. Налицо новая интереснейшая задача, решение которой может позволить отказаться от дорогостоящих точных приборов за счет менее точных, но позволяющих накопить одинаковую погрешность.

Подводя итоги проделанным действиям, заключаем, что задача определения накопления погрешностей при одноплоскостной балансировке требует более детального рассмотрения и учета взаимного расположения всех дисбалансов, соотношения их масс, последовательности установки пробных масс, влияние не постоянства скорости вращения ротора и т.д., поэтому она в рамках одной работы рассмотрена быть не может.

### Выводы

1. Показаны реальные конкурентные основы метода амплитуд по сравнению с методом амплитуд и фаз.
2. Выведена обобщенная формула одноплоскостной балансировки (5) и на ее основе разработана методика, позволяющая для произвольной расстановки исходного и пробного дисбалансов найти положение центра масс балансируемого плоского диска.
3. Определены условия применимости полученной обобщенной формулы на основании выведенной зависимости угла расстановки третьего пробного груза  $\varphi_3$  от величины суммарного дисбаланса  $d_0 + d_3$  (начального плюс третьего).
4. Даны рекомендации по оценке величины третьей амплитуды  $A_3$  по сравнению с амплитудами предыдущих пусков  $A_0, A_1, A_2$  для корректировки решения задачи одноплоскостной балансировки.
5. Обоснована современная возможность предпочтения усложнения алгоритма решения задачи одноплоскостной балансировки (неявный, скрытый вид формул, включение задачи обращения матриц) по сравнению с приемами упрощающими расчет (ручной, графический, но не компьютерный) и увеличивающими количество логических и геометрических действий.
6. Разработанная формула позволяет получить однозначное решение задачи одноплоскостной балансировки за минимальное количество пробных пусков – три, при этом отказавшись от четвертого проверочного пуска.

### Литература

1. М.Е. Левит, В.М. Рыженков Балансировка деталей и узлов. М.: Машиностроение, 1986.- 248 с.
2. Гольдин А.С. Вибрация роторных машин. М.: Машиностроение, 2000.- 344 с.
3. Левит М.Е. Справочник по балансировке. М.: Машиностроение, 1992.- 464 с.
4. Штейнвольф Л.И. Динамические расчеты машин и механизмов. М.: Машгиз, 1961 – 240с.