

МЕХАНИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВАГОНОВ СО СВОБОДНОЙ И ЖЕСТКОЙ НАСАДКОЙ КОЛЕС И РЕЛЬСОВОГО ПУТИ С ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ И ВЕРТИКАЛЬНЫМИ ПЛАВНЫМИ И СТУПЕНЧАТЫМИ НЕРОВНОСТЯМИ

В.В. Говоруха, Институт геотехнической механики НАН Украины, Украина

Рассмотрен метод исследований и способ математического моделирования процесса взаимодействия двухосных вагонов со свободной и жесткой насадкой колес и рельсового пути с горизонтальными и вертикальными плавными и ступенчатыми неровностями. Приведены результаты исследований динамических показателей, колебаний и устойчивости движения при различных конструктивных решениях и вариантах построения расчетных схем вагонов. Установлено явление резонанса, обусловленное близостью частот вынужденных и собственных колебаний транспортной системы.

Введение. Большое многообразие решаемых задач механики горного рельсового транспорта [1-7] и др. основаны на известных методах механики железнодорожного рельсового транспорта [8-12] и др., где процессы механики взаимодействия транспортных средств базировались на принципе жесткого крепления колес на осях колесных пар.

В отличие от железнодорожного рельсового транспорта в промышленном рельсовом транспорте подземных горных предприятий на двухосных, четырехосных вагонах и секционных поездах, колеса имеют свободные повороты на осях колесных пар. Такие технические решения вызваны сложными подземными горно-геологическими условиями и соответственно криволинейными участками рельсового пути или стрелочных переводов с малыми радиусами кривизны 8,0–50,0 м.

Принятое допущение о жесткой насадке колес для подземного горного рельсового транспорта некорректно в случае традиционного использования вагонов, колеса которых имеют свободные повороты на осях колесных пар.

Поэтому ниже приводится метод исследований и способ математического моделирования процесса взаимодействия двухосных вагонов со свободной и жесткой насадкой колес и рельсового пути, учитывающие специфику крепления колес на осях колесных пар в соответствии с фактической конструкцией подвижных единиц. При этом рассматривается движение вагонов по рельсовому пути произвольной кривизны с горизонтальными и вертикальными плавными и ступенчатыми неровностями, а также отступлениями по ширине колеи. В механике подземного рельсового транспорта горных предприятий эти вопросы ранее не рассматривались.

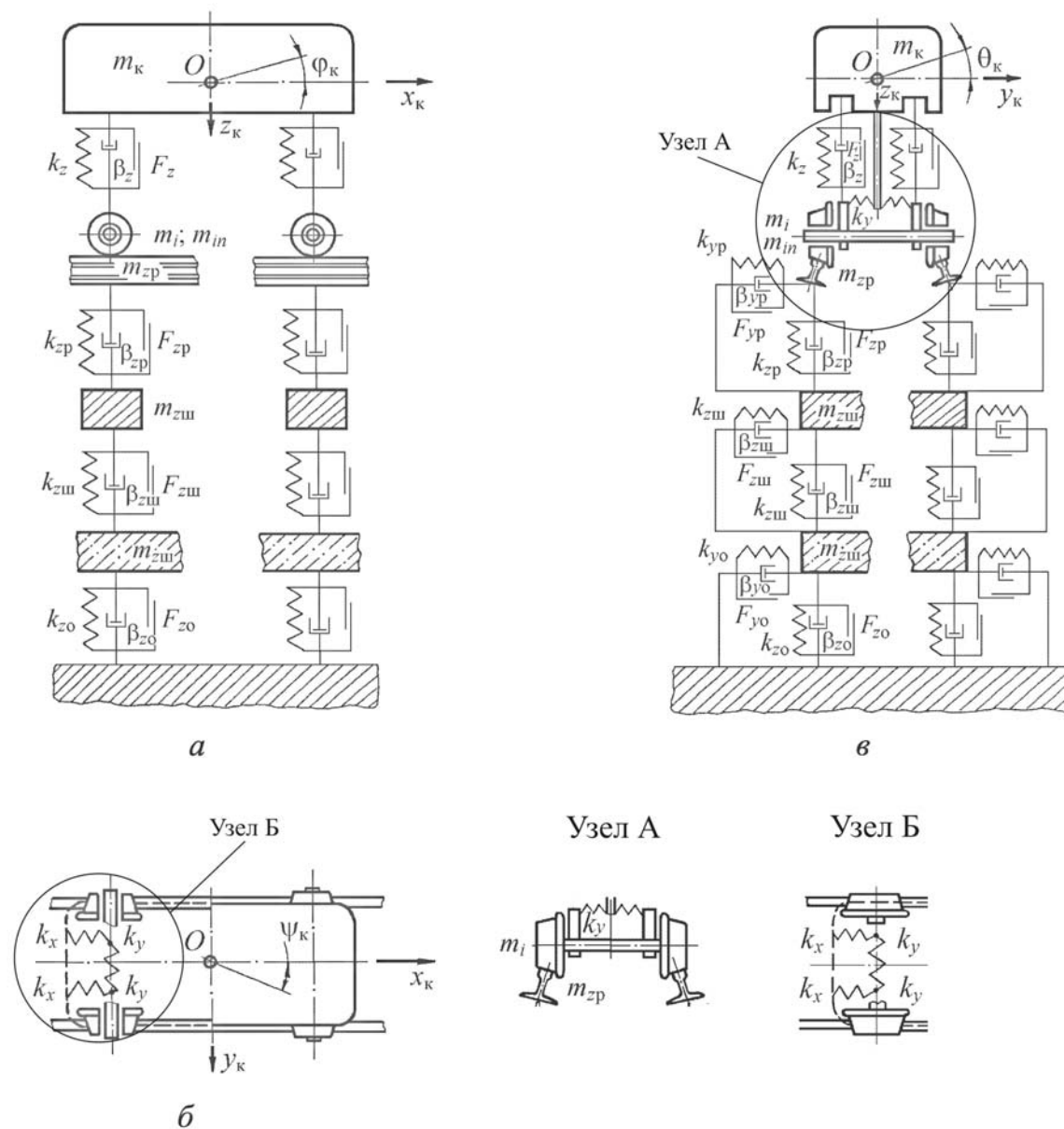
Постановка задачи. Для практического применения результатов исследований механики транспортных систем подземного горного рельсового транспорта одной из важных задач является выбор правильных расчетных схем и методов исследования процессов взаимодействия подвижных единиц и рельсового пути, соответствующих конструктивным особенностям средств подземного рельсового транспорта и условиям эксплуатации, а также установление показателей нагруженности, устойчивости и безопасности движения двухосных вагонов.

Объект и методы исследований. В качестве объектов для исследования приняты двухосные вагоны колеи 750 и 900 мм с жесткой и свободной насадкой колес на осях колесных пар, а также рельсовый путь горных предприятий, включающий прямолинейные участки, переходные и круговые кривые с плавными и ступенчатыми неровностями рельсовых нитей в горизонтальной (поперечной) и вертикальной плоскостях с наличием отступлений по ширине колеи.

Двухосный вагон представлен механической системой, состоящей из твердых тел (кузова, рам тележек, колесных пар или осей колесных пар и колес, свободно насаженных на эти оси), соединенных упруго-диссипативными, жесткими или шарнирными связями. Свойства связей характеризуются упругостью с коэффициентом k , вязким сопротивлением β и сухим

трением с силой трения F . На рис. 1 представлена расчетная схема двухосного вагона со свободным вращением колес относительно осей колесных пар.

Расчетная схема двухосного вагона с жесткой насадкой колес на осях колесных пар имеет аналогию с расчетной схемой, показанной на рис. 1 за исключением жесткого объединения в одно целое пары колес и оси колесной пары (рис. 1, узел А, узел Б).



a —вид сбоку; $б$ —вид сверху; $в$ —вид с торца
 Рис.1 – Расчетная схема транспортной системы со свободным вращением колес относительно осей колесных пар

Путь под каждым колесом транспортного средства представлен цепочкой твердых тел в вертикальном и поперечном направлениях, моделирующих основные составные его элементы (рельсы, подрельсовое основание, подшпальное основание), соединенные между собой упруго-диссипативными, жесткими или шарнирными связями. Учитывалось вязкое сопротивление, пропорциональное относительной скорости перемещения твердых тел, и сухое трение между телами (рис. 1). Рассмотрен также случай, когда путь представлен одним твердым телом в вертикальном и поперечном направлениях, присоединенным к каждому колесу с помощью упруго-диссипативных связей [13].

Для математической модели, описывающей движение подвижного транспортного средства по рельсовому пути с произвольным очертанием рельсовых нитей, выбрана одна неподвижная система координат $\tilde{O}\xi\eta\zeta$, а для каждого твердого тела системы – по две подвижные системы координат: естественная $Oxyz$ и неизменно связанная с твердым телом $Cx'y'z'$ (рис. 2). Положение такой системы координат в соответствии с рис. 3 описывается дуговой координатой вдоль оси пути s , углом χ между касательной к оси пути и неподвижной осью $\tilde{O}\xi$, углом наклона ϑ_h поверхности пути в поперечной плоскости вследствие возвышения наружного рельса h . Сферическое движение формируют три угла: $\tilde{\Psi} = \psi + \chi$; φ ; $\tilde{\vartheta} = \vartheta + \vartheta_h$, определяющие повороты главных центральных осей Cx' , Cy' , Cz' относительно неподвижной системы координат [10–13].

Линейные перемещение кузова вагона обозначим через x_k, y_k, z_k а угловые через $\psi_k, \varphi_k, \vartheta_k$. Поступательные перемещения x, y, z описывают соответственно подергивания, боковой отход и подпрыгивания, а углы поворота ψ, φ, ϑ – виляние, галопирование и боковую качку.

Перемещения элементов ходовой части подвижной единицы имеют аналогичные обозначения с индексами $n = 1, 2$ – для осей колесных пар, n_j – для колес n -х осей ($j = 1, 2$). Эти индексы приняты также для обозначения инерционных характеристик твердых тел, входящих в систему (масс, моментов инерции). Для перемещений и инерционных характеристик элементов пути рельсов, шпал и основания, находящихся под n_j -ми колесами, приняты такие же обозначения, как и для колес соответственно с индексами $p, ш, о$.

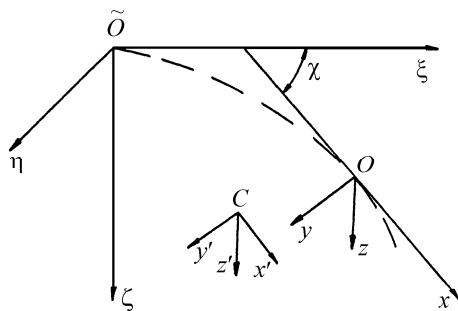
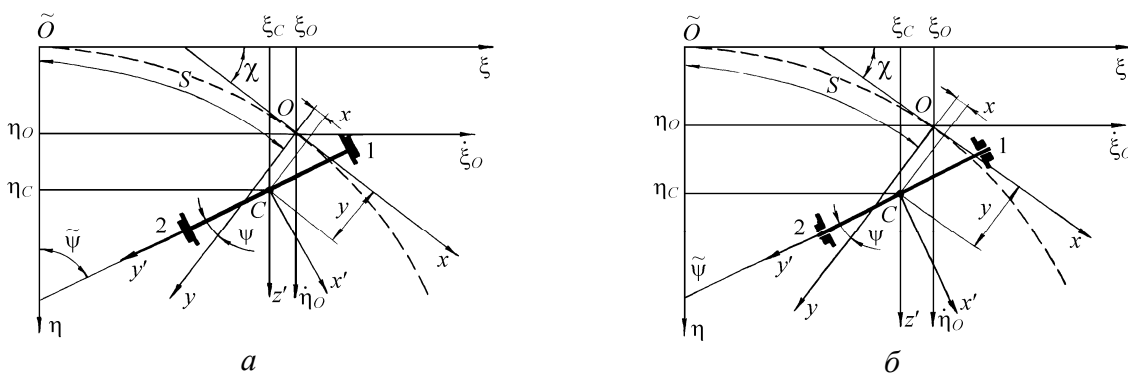


Рис. 2 – Системы координат для математической модели подвижного транспортного средства



a – жесткая насадка колес; *b* – свободная насадка колес

Рис.3 – Схема движения колесной пары

Уравнения связей исследуемой системы в подвижных системах координат $Oxyz$ имеют вид:

$$\begin{aligned} x_{nj} &= x_n; & y_{nj} &= y_n; & z_{nj} &= z_n - (-1)^n d_1 \vartheta_n; & \vartheta_{nj} &= \vartheta_n; & \psi_{nj} &= \psi_n; & \varphi_n &= \varphi_k; \\ x_{njp} &= 0; & \vartheta_{njp} &= 0; & \varphi_{njp} &= 0; & \psi_{njp} &= 0; & z_{n1p} &= z_n - d_1 \vartheta_n; & z_{n2p} &= z_n + d_1 \vartheta_n; \end{aligned}$$

$x_{njш} = 0; \vartheta_{njш} = 0; \varphi_{njш} = 0; \psi_{njш} = 0;$
 $x_{njо} = 0; \vartheta_{njо} = 0; \varphi_{njо} = 0; \psi_{njо} = 0. \quad (n = 1, 2; j = 1, 2),$
 где $2d_1$ – расстояние между средними кругами катания колес;
 r – радиус среднего круга катания колеса.

За обобщенные координаты принимаются:

$$x_k, y_k, z_k, \vartheta_k, \varphi_k, \psi_k, x_n, y_n, z_n, \psi_n, \vartheta_n, \varphi_{nj}, y_{njр}, y_{njш}, y_{njо}, z_{njш}, z_{njо} \quad (n = 1, 2; j = 1, 2).$$

Скорости перемещающихся твердых тел подвижной единицы в системе отсчета $O\xi\eta\zeta$ определяются из соотношения:

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 \cong \dot{s}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\chi}^2(x^2 + y^2) + 2[\dot{s}(\dot{x} - \dot{\chi}y) + \dot{\chi}(x\dot{y} - \dot{\chi}y)] + \frac{d}{dt}(z \cos \vartheta_h - 0,5h)^2. \quad (1)$$

Математические модели движения исследуемых систем были получены с помощью уравнений Лагранжа II рода. В общем виде уравнения движения вагона будет иметь вид:

$$D_v + \Pi_v + \Phi_v = Q_v, \quad (v = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

где D_v, Π_v, Φ_v – дифференциальные операторы, соответствующие уравнениям Лагранжа II рода:

$$D_v = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} - \frac{\partial T}{\partial q_v}, \quad \Pi_v = \frac{\partial \Pi}{\partial q_v}, \quad \Phi_v = \frac{\partial \Phi}{\partial q_v}, \quad (3)$$

где Q_v – обобщенные силы; соответствующие обобщенным координатам q_v ; n – число степеней свободы системы; T, Π, Φ – кинетическая, потенциальная энергии и функция рассеяния.

При принятых исходных предпосылках выражения D_v, Π_v, Φ_v можно представить в виде:

$$D_v = f(m, I, q_v, \ddot{q}_v), \quad \Pi_v = f_1(k, q_v) + \Pi_h(q_v), \quad \Phi_v = f_2(\beta, \dot{q}_v) + f_3(F, \dot{q}_v), \quad (4)$$

де m, I – инерционные характеристики (массы и моменты инерции) твердых тел системы, $k_z, k_{zp}, k_{zш}$ и $k_{zo}, \beta_z, \beta_{zp}, \beta_{zш}, \beta_{zo}$ – коэффициенты жесткости упругих и вязкости диссипативных элементов соответственно вагона, рельсов, шпал и основания, $F_z, F_{zp}, F_{zш}, F_{zo}$ – силы сухого трения в связях между твердыми телами соответственно вагона, рельсов, шпал и основания, $\Pi_h(q_v)$ – составляющая потенциальной энергии, обусловленная изменением высоты центров тяжести твердых тел при перемещениях q_v .

Обобщенные силы Q_v определялись как функции сил взаимодействия между колесами и рельсами P_{nj}, F_{ynj}, X_{nj} в вертикальном, поперечном и продольном направлениях (здесь n – номер колесной пары, $j = 1, 2$ – номер колеса n -ой колесной пары).

Отметим отличительные особенности определения сил P_{nj}, F_{ynj}, X_{nj} для случаев свободной и жесткой насадки колес на оси колесных пар.

Силы P_{nj} , действующие на колеса в вертикальном направлении, в общих случаях вычислялись одинаково и представляют собой сумму статических и динамических сил, определяемых через динамические прогибы и их производные по времени и через коэффициенты жесткости и вязкости (или сил сухого трения) элементов рессорного подвешивания.

Силы взаимодействия колес с рельсами в поперечном направлении F_{ynj} определялись как сумма сил псевдоскольжения в поперечном направлении y_{nj} и сил бокового давления гребней колес на головки рельса $W_{nj} = -P_{nj} \frac{dr_{nj}}{dy_{nj}}$, где r_{nj} – приращения радиусов колес при их поперечном перемещении относительно рельсов y_{nj} .

Касательные силы взаимодействия колес с рельсами (силы псевдоскольжения) F_{nj} находились, исходя из гипотезы крипа с учетом нелинейной зависимости их от безразмерных характеристик проскальзывания, из выражения:

$$F_{nj} = -f_{nj} \varepsilon_{nj} \left[\left(\frac{f_{nj} \varepsilon_{nj}}{k_f p_{nj}} \right)^2 + 1 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

а составляющие сил псевдоскольжения X_{nj} , Y_{nj} в продольном и поперечном направлениях следующим образом:

$$X_{nj} = F_{nj} \frac{\varepsilon_{xnj}}{\varepsilon_{nj}}, \quad Y_{nj} = F_{nj} \frac{\varepsilon_{ynj}}{\varepsilon_{nj}}, \quad (6)$$

где ε_{nj} , ε_{xnj} , ε_{ynj} – безразмерные характеристики проскальзываний колес и их составляющие в продольном и поперечном направлениях, $\varepsilon_{nj} = (\varepsilon_{xnj}^2 + \varepsilon_{ynj}^2)^{1/2}$, f_{nj} – коэффициенты псевдоскольжения, k_f – коэффициент трения между колесами и рельсами [10–13].

Составляющие безразмерных характеристик проскальзываний ε_{ynj} определялись для жесткой и свободной насадок колес по формуле:

$$\varepsilon_{ynj} = \frac{1}{v} \dot{y}_{nj}^* - \psi_{nj},$$

а составляющая безразмерной характеристики ε_{xnj} – из выражений:

$$\varepsilon_{xnj} = (-1)^{j+1} \left[\frac{d_1}{v} (\dot{\psi}_{nj} + \dot{\chi}_{nj}) + (-1)^j \frac{\Delta r_{nj}}{r} \right] - \text{для жесткой насадки колес} \quad (7)$$

$$\varepsilon_{xnj} = (-1)^{j+1} \left[\frac{d_1}{v} (\dot{\psi}_{nj} + \dot{\chi}_{nj}) + (-1)^j \frac{\Delta r_{nj}}{r} + (-1)^j \frac{r \dot{\phi}_{nj}}{v} \right] - \text{для свободной посадки колес.} \quad (8)$$

Здесь v – скорость равномерного движения транспортного средства, \dot{y}_{nj}^* – относительная скорость перемещения точек контакта колес и головок рельсов, $2a$ – база тележки (для безтележечного экипажа – база экипажа), k_n – кривизна пути под n -ой колесной парой, $2d_1$ – расстояние между средними кругами катания колес колесной пары, r – радиус среднего круга катания колес, $\dot{\chi}_{nj}$ – угловая скорость, обусловленная кривизной пути под j -ым колесом n -ой колесной пары.

Силы, соответствующие кинетической энергии, определяются с помощью дифференциальных операторов

$$D_v = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} - \frac{\partial T}{\partial q_v}. \quad (9)$$

Операторы (9) относительно обобщенных координат системы (с учетом соотношений $\cos \vartheta_{hk} \cong 1$; $\cos \vartheta_{hn} \cong 1$; $\ddot{h}_k = 0$; $\ddot{h}_n = 0$) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} D_{xk} &= m_k (\ddot{x}_k - x_k \dot{\chi}_k^2 + \ddot{s}_k - 2\dot{\chi}_k \dot{y}_k - \ddot{\chi}_k y_k); & D_{yk} &= m_k [\ddot{y}_k + \dot{\chi}_k (\dot{s}_k + 2\dot{x}_k - \dot{\chi}_k y_k) + \ddot{\chi}_k x_k]; \\ D_{zk} &= m_k \ddot{z}_k; & D_{\vartheta k} &= I_{xk} \ddot{\vartheta}_k; & D_{\varphi k} &= I_{yk} \ddot{\varphi}_k; & D_{\psi k} &= I_{zk} (\ddot{\psi}_k + \ddot{\chi}_k); \\ D_{xn} &= m_n (\ddot{x}_n - x_n \dot{\chi}_n^2 + \ddot{s}_n - 2\dot{\chi}_n \dot{y}_n - \ddot{\chi}_n y_n); \\ D_{yn} &= m_n [\ddot{y}_n + \dot{\chi}_n (\dot{s}_n + 2\dot{x}_n - \dot{\chi}_n y_n) + \ddot{\chi}_n x_n]; & D_{zn} &= (m_1 + 2m_p); & D_{\vartheta n} &= (I_{xn} + 2m_{np} d_1^2) \ddot{\vartheta}_n; \\ D_{\varphi n} &= I_{zn} (\ddot{\varphi}_n + \ddot{\chi}_n); & D_{\varphi nj} &= I_{ynj} \ddot{\varphi}_{nj}; & D_{ynjp} &= m_{njp} \ddot{y}_{njp}; & D_{ynjш} &= m_{njш} \ddot{y}_{njш}; \\ D_{ynjo} &= m_{njo} \ddot{y}_{njo}; & D_{znjш} &= m_{njш} \ddot{z}_{njш}; & D_{znjo} &= m_{njo} \ddot{z}_{njo}, \end{aligned} \quad (10)$$

где m_k , m_n , m_{in} , m_p , $m_{ш}$, m_o – массы кузова, осей колесных пар, колес, рельсов, шпал и основания; I_{xk} , I_{yk} , I_{zk} , I_{xn} , I_{yn} , I_{zn} , I_{xnj} , I_{ynj} , I_{znj} – моменты инерции относительно главных центральных осей кузова, осей колесных пар и колес; где $\dot{\chi}$, $\ddot{\chi}$ – угловые скорость и ускорение, обу-

словленные криволинейным очертанием переходных или круговых кривых рельсового пути, а также неровностями рельсовых нитей в плане, которые определяются согласно выражениям

$$\dot{\chi} = \nu(K_a + K_H), \quad \ddot{\chi} = \nu(\dot{K}_a + \dot{K}_H), \quad (11)$$

где K_a – кривизна проектного очертания рельсового пути в криволинейных участках в плане; K_H – кривизна рельсового пути вследствие неровностей пути и стрелочных переводов в плане.

Кривизну рельсового пути и рельсовых нитей в криволинейных участках K_a можно определить согласно приведенным в работе [13] соотношениям:

для прямолинейных участков $K_a = 0$, для круговых кривых $K_a = 1/R$,

$$\text{для входных переходных кривых } K_a = \frac{1}{Rl_o} \left(x_0 - \frac{l_o}{2\pi} \sin \frac{2\pi x_0}{l_o} \right),$$

$$\text{для выходных переходных кривых } K_a = \frac{1}{R} - \frac{1}{Rl'_o} \left(x_0 - \frac{l'_o}{2\pi} \sin \frac{2\pi x'_o}{l'_o} \right).$$

Здесь l_o, l'_o – длина входной и выходной переходных кривых; x_0, x'_o – дуговые координаты, определяемые соответственно от начала переходной и конца круговой кривых.

Неровности рельсовых нитей элементов обычного пути в плане K_H можно рассматривать как детерминированные неровности в виде косинусоиды, синусоиды или сложной спектральной функции [13].

Неровности в плане в виде синусоиды описываются функцией

$$K_H = -\frac{4\pi^2 A'_H}{(l'_H)^2} \sin \frac{2\pi \nu t}{l'_H}, \quad (12)$$

где A'_H, l'_H – амплитуда и длина неровности в пределах периода, а неровности в плане, заданные в виде косинусоиды, функцией

$$K_H \begin{cases} -\frac{2\pi^2 A'_{HG}}{(l'_{HG})^2} \cos \frac{2\pi \nu t}{l'_H}, & 0 < t \leq \tau_{HG} \\ 0, & t > \tau_{HG}, \end{cases} \quad (13)$$

$\tau_{HG} = l'_{HG} / \nu$ – время движения колесной пары по заданной неровности.

Потенциальная энергия системы определяется как алгебраическая сумма энергии упругих деформаций Π_1 и изменения энергии Π_2 вследствие возвышения наружного рельса над внутренним. Потенциальная энергия упругих деформаций системы

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \frac{1}{2} \left(k_x \sum_{n=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Delta x_{nj}^2 + k_z \sum_{n=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Delta z_{nj}^2 + k_y \sum_{n=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Delta y_{nj}^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 \sum_{j=1}^2 (k_{zр} \Delta z_{njр}^2 + k_{zш} \Delta z_{njш}^2 + \\ & + k_{zo} \Delta z_{njo}^2 + k_{yp} \Delta y_{njр}^2 + k_{yш} \Delta y_{njш}^2 + k_{yo} \Delta y_{njo}^2), \end{aligned} \quad (14)$$

где k_x, k_y, k_z – жесткости упругих элементов рессорного подвешивания в продольном, поперечном и вертикальном направлениях; $k_{zр}, k_{zш}, k_{zo}, k_{yp}, k_{yш}, k_{yo}$ – приведенные жесткости рельсов, шпал со креплением, основания, балластного слоя и почвы соответственно в вертикальном и поперечном направлениях, а перемещения упругих элементов системы:

$$\begin{aligned} & \Delta x_{nj}, \Delta y_{nj}, \Delta z_{nj}, \Delta z_{njр}, \Delta z_{njш}, \Delta z_{njo}, \Delta y_{njр}, \Delta y_{njш}, \Delta y_{njo} \\ & \Delta z_{nj} = z_k + (-1)^n l \varphi_k + (-1)^j b(\vartheta_k - \vartheta_n) - \eta_n - z_n; \\ \Delta z_{njр} = & z_n + (-1)^j d_1 \vartheta_n - z_{njш}; \quad \Delta z_{njш} = z_{njш} - z_{njo}; \quad \Delta z_{njo} = z_{njo}; \quad \Delta y_{n1} = y_{n2} = y_k - (-1)^n l \psi_k - H_o \vartheta_k - y_n; \\ & \Delta y_{njр} = y_{njр} - y_{njш}; \quad \Delta y_{njш} = y_{njш} - y_{njo}; \quad \Delta y_{njo} = y_{njo}; \quad \Delta x_{nj} = x_k - (-1)^j b(\psi_k - \psi_n) - x_n, \end{aligned}$$

где $2l$ – база подвижной единицы; $2b$ – расстояние в поперечном направлении между упругими элементами подвижной единицы; η_1, η_2 – вертикальные неровности рельсового пути; H_0 – расстояние по высоте от центра тяжести кузова до осей колесных пар.

Форма вертикальных неровностей, как и горизонтальных, весьма разнообразна [13]. Для изолированной неровности уравнение в пределах периода будет иметь вид

$$\eta_n = \begin{cases} \frac{A_{\text{HB}}}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi \nu t}{l_{\text{HB}}} \right), & 0 < t < \tau_{\text{HB}}; \\ 0, & \tau_{\text{HB}} < t \leq T_{\text{HB}}, \end{cases} \quad (15)$$

где A_{HB} – наибольшая глубина вертикальной неровности; l_{H} – длина вертикальной неровности; $\tau_{\text{HB}} = l_{\text{H}}/\nu$ – время движения колесной пары по вертикальной неровности; $T_{\text{HB}} = L_{\text{p}}/\nu$ – период повторения вертикальной неровности с учетом длины рельса между стыками L_{p} .

Для рельсовых звеньев

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{k=N_k} A_{\text{HBK}} (\cos \omega_{\text{HB}} t - 1), \quad (16)$$

где A_{HBK} – амплитуда неровностей различных гармоник; k – количество экстремальных образований вертикальных неровностей; ω_{HB} – частота воздействия вертикальных неровностей, $\omega_{\text{HB}} = 2\pi \nu / l_{\text{H}}$.

Для стыковых участков

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{k=N_k} A_{\text{HBK}} \left| \sin \frac{1}{2} \omega_{\text{HB}} t \right|, \quad (17)$$

а для рельсового пути можно использовать

$$\eta_n(x) = \frac{A_{\text{H}}}{2} [\sigma_0(x) - \sigma_0(x - l_{\text{H}})] \times \left(1 - \cos \frac{2\pi \nu t}{l_{\text{H}}} \right), \quad (18)$$

где $\sigma_0(x)$ – единичная функция: x – текущая абсцисса неровности.

Потенциальная энергия, соответствующая подъему и опусканию центров тяжести тел системы при их перемещениях в кривых вследствие возвышения наружного рельса над внутренним,

$$П_2 = -m_{\kappa} g \mathcal{G}_{hk} y_{\kappa} - \sum_{n=1}^2 m_n g \mathcal{G}_{hn} y_n - \sum_{n=1}^2 \sum_{j=1}^2 m_{nj} g \mathcal{G}_{nj} y_{nj} \quad (19)$$

Функция рассеяния энергии системы определяется согласно выражения

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_{n=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[(F_x \Delta \dot{x}_{nj} \operatorname{sgn} \Delta \dot{x}_{nj} + F_y \Delta \dot{y}_{nj} \operatorname{sgn} \Delta \dot{y}_{nj} + F_z \Delta \dot{z}_{nj} \operatorname{sgn} \Delta \dot{z}_{nj} + \right. \\ & + F_{z\text{p}} \Delta \dot{z}_{nj} \operatorname{sgn} \Delta \dot{z}_{nj} + F_{z\text{ш}} \Delta \dot{z}_{nj\text{ш}} \operatorname{sgn} \Delta \dot{z}_{nj\text{ш}} + F_{z\text{o}} \Delta \dot{z}_{nj\text{o}} \operatorname{sgn} \Delta \dot{z}_{nj\text{o}} + \\ & + F_{y\text{p}} \Delta \dot{y}_{nj\text{p}} \operatorname{sgn} \Delta \dot{y}_{nj\text{p}} + F_{y\text{ш}} \Delta \dot{y}_{nj\text{ш}} \operatorname{sgn} \Delta \dot{y}_{nj\text{ш}} + F_{y\text{o}} \Delta \dot{y}_{nj\text{o}} \operatorname{sgn} \Delta \dot{y}_{nj\text{o}}) + \\ & + \frac{1}{2} (\beta_z \Delta \dot{z}_{nj}^2 + \beta_y \Delta \dot{y}_{nj}^2 + \beta_x \Delta \dot{x}_{nj}^2 + \beta_{z\text{p}} \Delta \dot{z}_{nj\text{p}}^2 + \beta_{z\text{ш}} \Delta \dot{z}_{nj\text{ш}}^2 + \beta_{z\text{o}} \Delta \dot{z}_{nj\text{o}}^2 + \\ & + \beta_{y\text{p}} \Delta \dot{y}_{nj\text{p}}^2 + \beta_{y\text{ш}} \Delta \dot{y}_{nj\text{ш}}^2 + \beta_{y\text{o}} \Delta \dot{y}_{nj\text{o}}^2) \left. \right], \quad (20) \end{aligned}$$

где $F_x, F_y, F_z, F_{y\text{p}}, F_{z\text{p}}, F_{y\text{ш}}, F_{z\text{ш}}, F_{y\text{o}}, F_{z\text{o}}$ – силы трения в демпферах сухого трения рессорного подвешивания, подрельсового основания, подпшального основания и почвы выработки в продольном, поперечном и вертикальном направлениях; $\beta_x, \beta_y, \beta_z, \beta_{y\text{p}}, \beta_{z\text{p}}, \beta_{y\text{ш}}, \beta_{z\text{ш}}, \beta_{y\text{o}}, \beta_{z\text{o}}$ – коэффициенты вязкого сопротивления для рессорного подвешивания, подрельсового основания, подпшального основания и почвы выработки в вертикальном и поперечном направле-

ниях соответственно.

При движении подвижной единицы по рельсовому пути приращения радиусов кругов катания колес Δr_{nj} происходят вследствие поперечных перемещений бандажей колес относительно головок рельсов. Изменение величины приращения Δr_{nj} обусловлено коничностью бандажей колес, подуклонкой профиля головки рельсов, изменением зазоров между ребордами (гребнями) колес и головками рельсов в зоне их взаимных контактов. Коничность бандажей колес как в плоскости круга катания, так и в плоскости реборды зависит от степени износа колес вагонов.

Если коничность профиля бандажа не изменяется, а износ имеет место в зоне реборды, то изменение радиусов поверхности катания колес определяется согласно выражения [10-13]

$$\Delta r_{nj} = (-1)^n \mu y_{nj}^* + 0,007 \text{abs}(r_{nj})^{n2} n_1 \sigma_{nj}, \quad n = 1, 2, \quad (21)$$

где μ – коничность поверхности катания колес; n_1, n_2 – константы, характеризующие степень износа частей бандажа колеса;

$$r_{nj} = 1000 [y_{nj}^* - (-1)^j \delta \text{sgn } y_{nj}^*];$$

$$\sigma_{n1} = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau_{n1} > 0; \\ 0 & \text{при } \tau_{n1} \leq 0, \end{cases} \quad \sigma_{n2} = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau_{n2} > 0; \\ 0 & \text{при } \tau_{n2} \leq 0, \end{cases} \quad \Delta y_i = y_i - y_{oj}.$$

где δ – зазор в межрельсовой колее в пределах линейной части профиля колес, мм.

Изменение радиусов поверхности катания колес можно найти также из выражения [10-13]

$$\Delta r_{nj} = \frac{(-1)^j}{2} (\mu_1 + \mu_2) y_{nj}^* + \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_2) \left\{ \sqrt{[(-1)^j y_{nj}^* - \delta_o]^2 + C_o} - \sqrt{\delta_o^2 + C_o} \right\}, \quad (22)$$

где $\mu_1, \mu_2, \delta_o, C_o$ – константы, характеризующие профиль колес.

В случае, когда профиль поверхности катания колес в результате интенсивного износа имеет криволинейную форму, используется формула [10–13]

$$\Delta r_{nj} = \mu_1 [(-1)^n y_{nj}^* - \delta_o] \text{abs} \{ \mu_2^2 [(-1)^j y_{nj}^* - \delta_o]^2 + 1 \}^{-1/2} + \mu_1 \delta_o \text{abs} (\mu_2^2 \delta_o^2 + 1)^{1/2}. \quad (23)$$

С помощью выражений (22–23) можно аппроксимировать различные формы профиля бандажа колес. При этом значения характеристик $n_1, n_2, \mu, \mu_1, \mu_2, \delta_o, C_o$ определяются применительно к исследуемым параметрам профиля бандажа колеса и новым рельсам.

Подставив в выражения (24) значения операторов Dq_v ($v=1, 2, \dots, N$) в сочетании с уравнениями (2, 3, 4, 9, 10, 14, 19, 20) получим систему уравнений движения обобщенного двухосного вагона. В общем виде уравнение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} m_k (\ddot{x}_k - x_k \dot{\chi}_k^2 + \ddot{s}_k - 2\dot{\chi}_k \dot{y}_k - \ddot{\chi}_k y_k) + \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_k} &= 0; \\ m_k [\ddot{y}_k + \dot{\chi}_k (\dot{s}_k + 2x_k - \dot{\chi}_k y_k) + \ddot{\chi}_k x_k] + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_k} &= 0; \quad m_k \ddot{z}_k + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}_k} = 0; \\ I_{xk} \ddot{\vartheta}_k + \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\vartheta}_k} &= Q_k; \quad \left(\sum_{n=1}^2 I_{yn} + I_{yk} \right) \ddot{\varphi}_k + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_k} = 0; \\ I_z (\ddot{\psi}_k + \ddot{\chi}_k) + \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\psi}_k} &= 0; \quad \left(\sum_{j=1}^2 m_{nj} + m_n \right) (\ddot{x}_n - x_n \dot{\chi}_n^2 + \ddot{s}_n - 2\dot{\chi}_n \dot{y}_n - \ddot{\chi}_n y_n) + \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_n} = Q_{xn}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{j=1}^2 m_{nj} + m_n \right) [\ddot{y}_n + \dot{\chi}_n (\dot{s}_n + 2\dot{x}_n - \dot{\chi}_n y_n) - \ddot{\chi}_n x_n] + \frac{\partial \Pi}{\partial y_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_n} = Q_{yn} ; \\
& (m_n + 2m_p) \ddot{z}_n + \frac{\partial \Pi}{\partial z_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}_n} = 0 ; \quad \left[I_{xn} + \sum_{j=1}^2 (m_{nj} d_1^2 + m_p d_1^2) \vartheta_n + \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\vartheta}_n} \right] = Q_{\vartheta n} ; \\
& \left(I_{zn} + \sum_{n=1}^2 m_{nj} d_1^2 \right) (\ddot{\psi}_n + \ddot{\chi}_n) + \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\psi}_n} = Q_{\psi n} ; \quad I_{ynj} \ddot{\phi}_{nj} = Q_{\varphi nj} ; \quad m_{njp} \ddot{y}_{njp} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_{njp}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_{njp}} = Q_{ynjp} ; \\
& m_{njш} \ddot{y}_{njш} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_{njш}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_{njш}} = 0 ; \quad m_{njo} \ddot{y}_{njo} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_{njo}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_{njo}} = 0 ; \\
& m_{njш} \ddot{z}_{njш} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_{njш}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}_{njш}} = 0 ; \quad m_{njo} \ddot{z}_{njo} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_{njo}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}_{njo}} = 0 . \tag{25}
\end{aligned}$$

Система уравнений (25) может быть использована для исследования колебаний, устойчивости движения и нагруженности элементов двухосного вагона со свободно вращающимися на осях колесами и путевой структуры с приведенными к каждому колесу тремя сосредоточенными массами (см. рис. 1). Если путь представляется в виде одиночных сосредоточенных приведенных к каждому колесу масс [13], то уравнения системы (25), соответствующие координатам $y_{njш}$, y_{njo} , $z_{njш}$, z_{njo} , будут отсутствовать, но при этом увеличатся численные значения m_{njp} .

Рассмотрим расчетные схемы, в которых учитываются свободные повороты колес на их осях (см. рис. 1, а, б, в), и схемы, соответствующие жесткой насадке колес на оси колесных пар (рис. 1, узел А и узел Б). В последнем случае можно использовать также систему уравнений (25), заменив в ней четыре уравнения с координатой ϕ_{nj} на два уравнения с координатами φ_n :

$$I_{yn}^* \ddot{\varphi}_n = Q_{\varphi n} , \tag{26}$$

$$\text{где } I_{yn}^* = I_{yn} + \sum_{j=1}^2 I_{ynj} ; \quad Q_{\varphi n} = \sum_{j=1}^2 Q_{\varphi nj} .$$

Оценку расчетных схем исследуемых транспортных систем проведем по показателям, характеризующим нагруженность ходовых частей, рессорных комплектов вагонеток и пути в вертикальном и поперечном направлениях, и по показателям безопасности движения, в частности, характеризующим устойчивость от сдвига рельсошпальной решетки, обезгруживание колес, вкатывание колес на рельсы. Поэтому в качестве критериев для оценки динамических показателей исследуемых типов шахтного подвижного состава выберем максимальные значения сил, действующих на колеса, рессорные комплекты и рельсовые нити в вертикальном и поперечном направлениях (соответственно P_{nj} , Q_{ynj} , F_{znj} , F_{ynj} и Q_{znjp} , Q_{ynjp}), поперечных сил Q_{yn} , действующих на колесные пары, коэффициентов устойчивости от обезгруживания колес $k_{обез}$, сдвига рельсошпальной решетки $k_{сд}$ и от вкатывания колес на рельсы $k_{вк}$.

Рассмотрим результаты расчетов, соответствующие движению по прямой и кривой $R = 30$ м со скоростью 5 м/с для различных расчетных схем двухосной вагонетки ВГ-4,5-750, обусловленных степенью их детализации. Каждая колесная пара представлена одним твердым телом или каждая ось и два свободно вращающихся на ней колеса – тремя твердыми телами.

Для расчетной схемы вагонетки со свободным вращением колес колебания при движении по прямолинейному участку пути быстро затухают, а при движении по кривой $R = 30$ м затухают очень медленно. При этом колесные пары в кривой устанавливаются в положение, при котором колесо передней колесной пары, катящееся по наружному рельсу, и колесо задней колесной пары, катящееся по внутреннему рельсу, периодически касаются гребнями или выкружками колес головок рельсов, причем наружная рельсовая нить имеет существенно большее отжатие, чем внутренняя.

Движение по прямолинейному участку пути двухосной вагонетки с жестко насаженными на оси колесами характеризуются интенсивными нарастающими колебаниями, т.е. движение вагонетки неустойчиво. В кривой $R = 30$ м движение этой вагонетки также сопровождается колебаниями, однако, эти колебания затухают, стремясь к состоянию, соответствующему стационарному режиму движения (режиму, при котором скорости и ускорения всех обобщенных координат равны нулю). Отличительной особенностью движения вагонетки с жестко насаженными колесами является то, что в ней колесные пары устанавливаются в кривой в хордальное положение, а для вагонетки со свободно вращающимися на осях колесами – в положение, приближающееся к состоянию наибольшего перекоса.

Отметим также, что вагонетка ВГ-4,5-750 со свободно вращающимися колесами выгодно отличается от вагонетки с жестко насаженными на оси колесами, так как в первом случае прямолинейное и криволинейное движение устойчиво, а во втором – движение по прямой неустойчиво. Таким образом, качество движения из условия его устойчивости и установившихся режимов движения в кривых для обеих расчетных схем может быть различным. Поэтому при выборе расчетных схем транспортных средств необходимо учитывать конструктивные особенности, обусловленные креплением колес на их осях вращения. Этот вывод является актуальным, так как в ранее проводимых исследованиях эти конструктивные особенности вагонеток не учитывались (колеса и оси колесных пар представлялись одним твердым телом).

Оценим динамические характеристики двухосной вагонетки ВГ-4,5-750 для двух расчетных схем, соответствующих независимому и зависимому вращению колес на осях колесных пар, при вынужденных колебаниях, обусловленных периодическими неровностями пути (вертикальными стыковыми неровностями длиной $l_n = 2$ м и глубиной $A_n = 0,01$ м и горизонтальными синусоидальными неровностями длиной в пределах одного периода $l'_n = 3$ м и глубиной $A'_n = 0,03$ м).

Результаты расчетов показали, что в прямолинейном участке пути большинство показателей нагруженности ходовых частей и рессорных комплектов вагонеток и пути имеют близкие значения, исключая показатель, характеризующий нагруженность колесных пар в поперечном направлении, который ниже для вагонетки со свободно вращающимися на осях колесами примерно на 25%. В криволинейных участках пути радиусом $R = 30$ м по показателям нагруженности и безопасности движения вагонетки со свободно вращающимися колесами лучше (разность в показателях достигает 20%).

Поэтому и для анализа вынужденных колебаний расчетные схемы транспортных средств следует также выбирать с учетом конструктивных особенностей, касающихся характера крепления колес на осях колесных пар.

Оценка расчетных схем, соответствующих одномассовой и многомассовой путевой структуре под каждым колесом вагонетки ВГ-4,5-750 показала, что из условий нагруженности показатели отличаются на 5,3%, а из условия безопасности движения не больше, чем на 10,6%.

Рассмотрим влияние неровностей пути вследствие их накопления и отступлений от проектного положения оси пути.

Оценка влияния на нагруженность и безопасность движения вагонетки длин l_n и глубин A_n вертикальных неровностей пути в интервале $l_n = 1-10$ м и $A_n = 0,005-0,025$ м показала, что наиболее опасными являются вертикальные неровности пути протяженностью $l_n = 1-4$ м и глубиной $A_n \geq 0,01$ м, которые должны устраняться в процессе эксплуатации в первую очередь.

Полученные в процессе проведения расчетов зависимости показателей нагруженности и безопасности движения вагонетки ВГ-4,5-750 при $v = 5$ м/с от длины и глубины (l'_n и A'_n) горизонтальных неровностей ($l'_n = 1-10$ м, $A'_n = 0,005-0,060$ м) показали, что при длине горизонтальной неровности равной $l'_n \approx 5$ м имеет место явление резонанса (рис. 4), при котором принятые показатели имеют максимальные значения. В этом случае частота вынужденных колебаний, равная ≈ 1 герц, близка к частотам собственных колебаний бокового отбоя

и боковой качки кузова вагонетки, равным $\approx 1,1$ герца. При этом на рис. 4 показаны зависимости максимальных значений вертикальных нагрузок и коэффициентов обезгруживания колес от длины горизонтальных неровностей прямолинейного пути: а – нагрузки на колеса, б – нагрузки на рельсы, в – нагрузки на упругие элементы вагонетки, г – коэффициенты обезгруживания колес, а 1, 2, 3, 4, 5, 6 – глубины горизонтальных неровностей соответственно 0,005; 0,010; 0,015; 0,020; 0,030; 0,060 м.

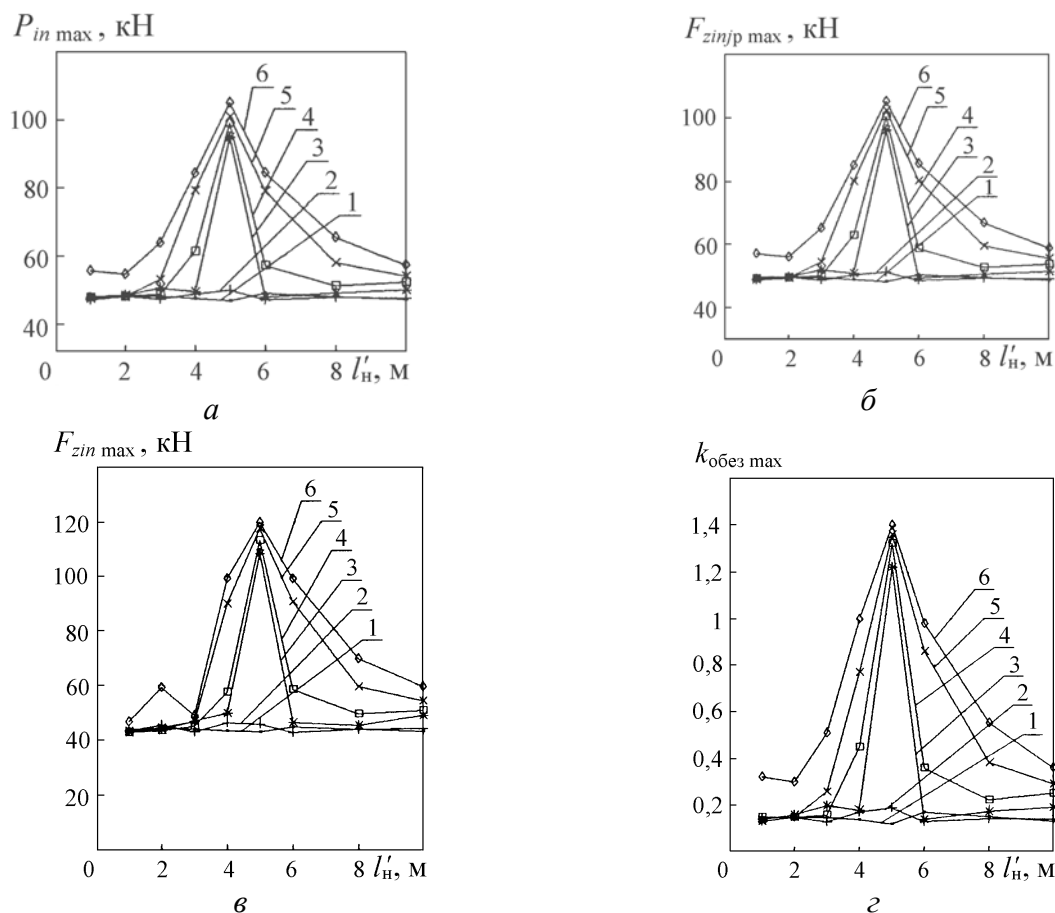


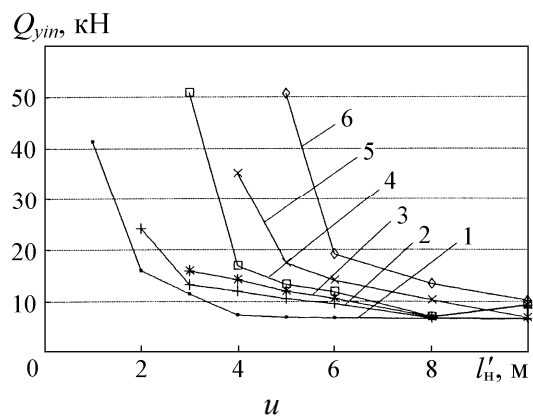
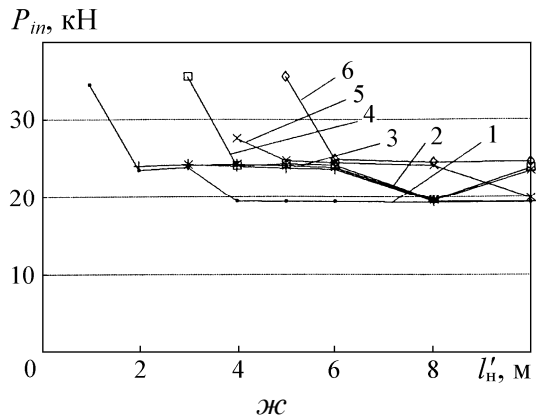
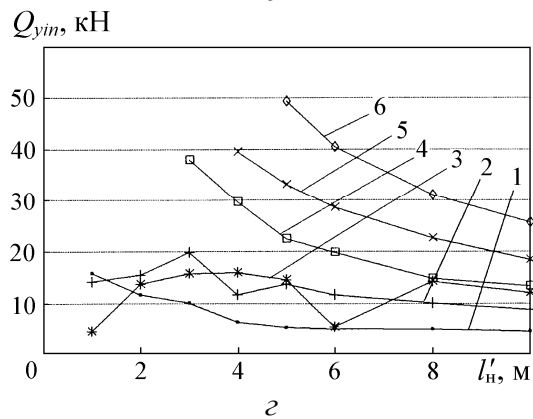
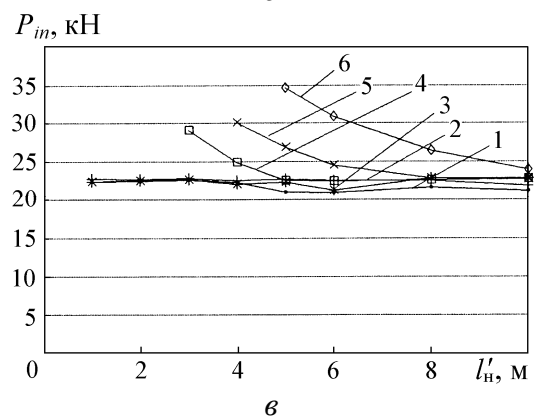
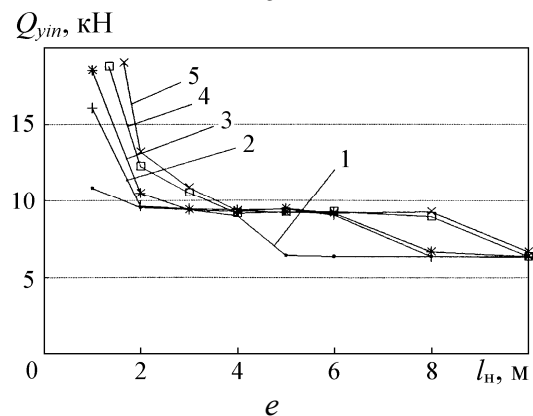
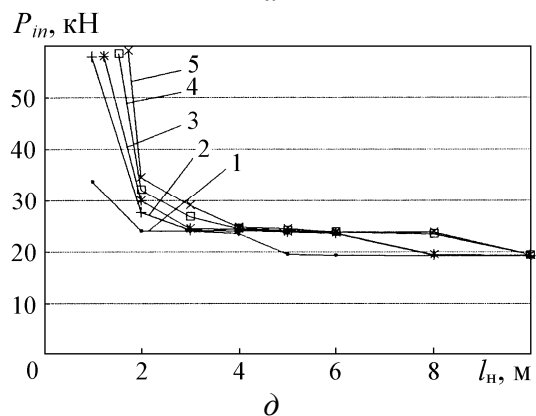
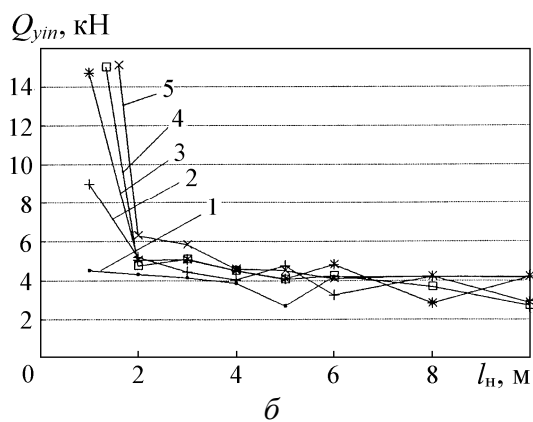
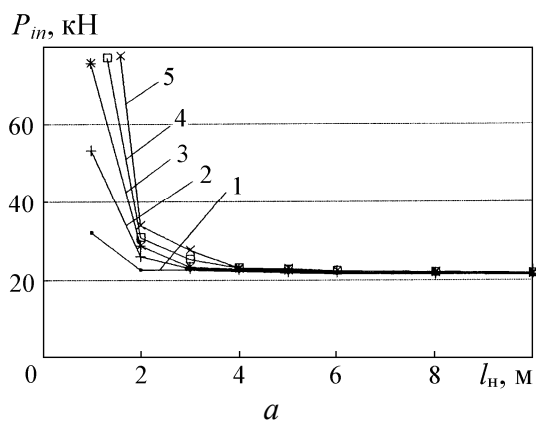
Рис. 4 – Резонансные явления

Возможность появления резонанса была показана также для случая движения вагонетки со скоростью 3 м/с по пути с горизонтальными и вертикальными неровностями $l_n = l'_n = 3$ м, т.е. в случае, когда $v / l'_n \approx v$ (v – частота собственных колебаний вагонетки). При этом не обеспечивается безопасность движения даже при небольшом значении глубины неровностей A'_n .

Аналогичные результаты исследований получены также для двухосной вагонетки типа ВГ 3,3-900 [13]. Зависимости наибольших вертикальных и поперечных сил взаимодействия колес и рельсов от длины вертикальных и поперечных неровностей для прямолинейных и криволинейных участков пути показаны на рис. 5–7.

Из установленных зависимостей (рис. 5, а, б, в, г) видно, что наибольшие значения вертикальных и поперечных сил взаимодействия колес с рельсами отмечены в интервале вертикальных неровностей $l_n < 2,0$ мм. Эти силы увеличиваются с уменьшением длины неровности, причем на их значения влияет глубина неровностей A_n при малых длинах неровностей l_n . Влияние параметров поперечных неровностей на нагруженность ходовых частей вагонетки ВГ 3,3-900 имеет несколько иной характер, чем вертикальных неровностей, а максимальные значения вертикальных и поперечных сил (рис. 5, д, е, ж, з) имеют место в интервале

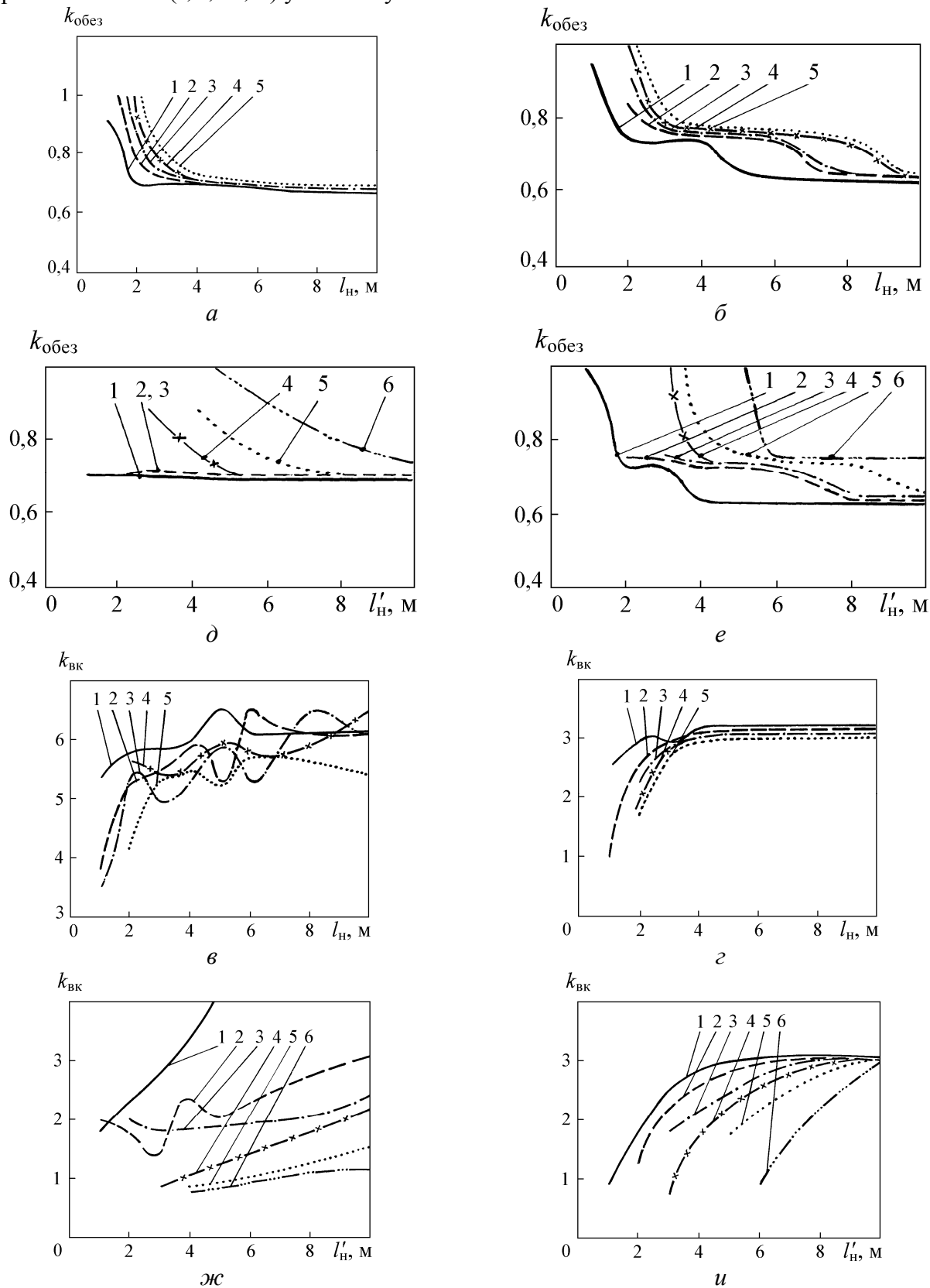
$l'_H = 1,0-6,0$ м. При этом явление резонанса может возникать при $l'_H = \frac{v_{\text{эксн}}}{v}$ ($v_{\text{эксн}}$ – эксплуатационное значение скорости) при коротких неровностях.



а, в, д, ж – вертикальные силы, *б, г, е, и* – поперечные силы; 1, 2, 3, 4, 5 – глубина вертикаль-

ной неровности 0,005; 0,010; 0,015; 0,020; 0,025 м соответственно

Рис. 5. Зависимости наибольших вертикальных (*а, б, в, г*) и поперечных (*д, е, ж, и*) сил взаимодействия колес и рельсов от длины вертикальных неровностей прямолинейного (*а, б, д, е*) и криволинейного (*в, г, ж, и*) участка пути



а, в, д, ж – прямолинейный участок пути, *б, г, е, и* – криволинейный участок пути ($R = 30$ м); 1, 2, 3, 4, 5 – глубина неровности 0,005; 0,010; 0,015; 0,020; 0,050 м соответственно

Рис. 6. Зависимости наибольших значений коэффициента обезгруживания (*а, б, в, г*) и

наименьших значений коэффициента вкатывания колес (δ , ϵ , ζ , η) от длины вертикальных (a , b , δ , ϵ) и поперечных (ϵ , ζ , ζ , η) неровностей прямолинейного (a , ϵ , δ , ζ) и криволинейного (b , ζ , ϵ , η) участков пути при скорости 5 м/с

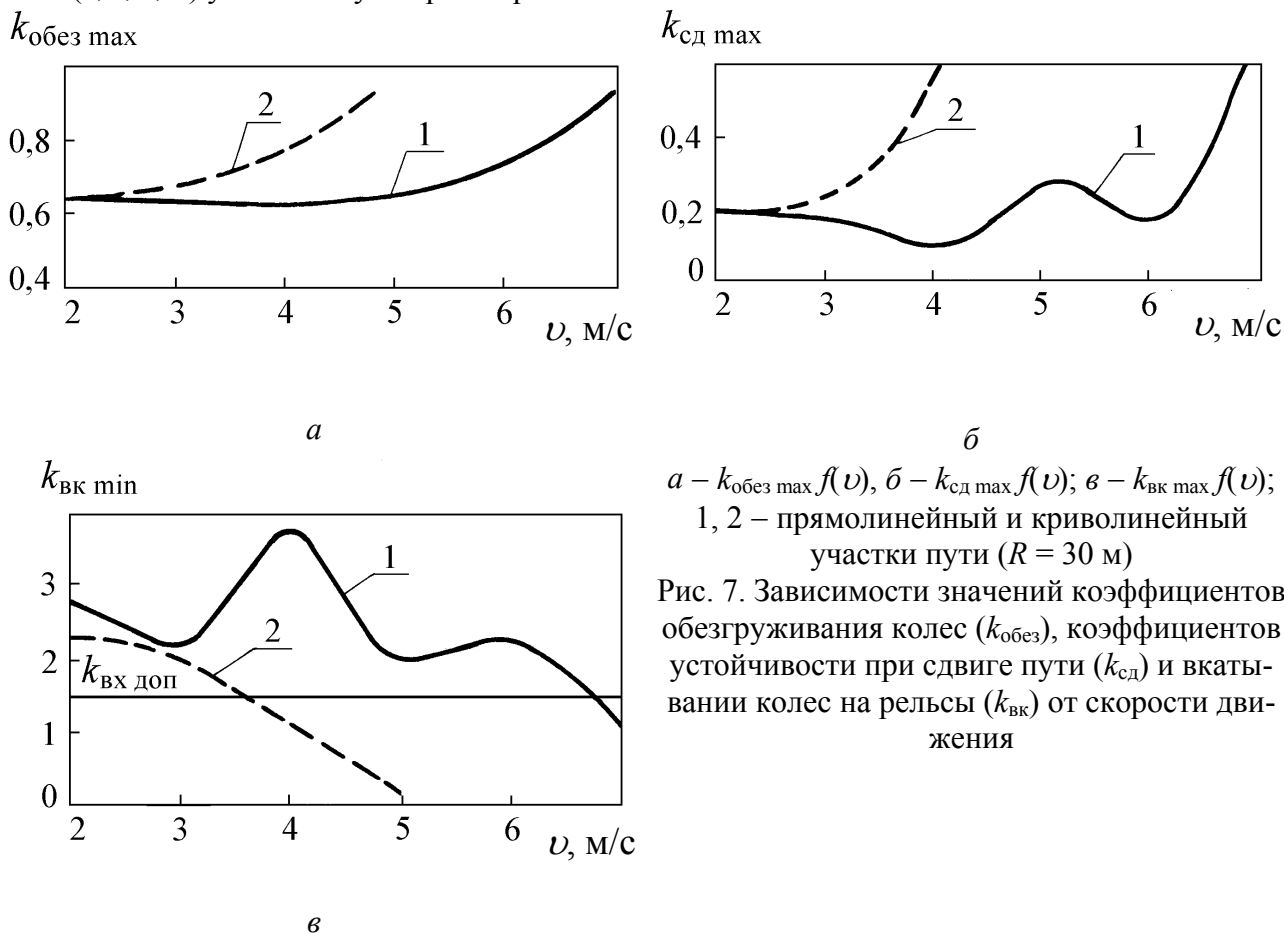


Рис. 7. Зависимости значений коэффициентов обезгруживания колес ($k_{обез}$), коэффициентов устойчивости при сдвиге пути (k_{cd}) и вкатывании колес на рельсы (k_{vk}) от скорости движения

Из графиков зависимостей максимальных значений коэффициентов обезгруживания $k_{обез}$ от величин неровностей l_n , l'_n , A_n , A'_n видно, что коэффициенты обезгруживания колес могут достичь недопустимых для безопасности движения значений ($k_{обез} \geq 0,7$).

Из характеров зависимостей коэффициентов устойчивости от вкатывания на рельсы (k_{vk}) от величин неровностей l_n , l'_n , A_n , A'_n (рис. 6, д, е, ж, з) видно, что с уменьшением длины неровностей l'_n и с увеличением ее глубин A'_n значения k_{vk} достигают величин, меньших нормативных ($k_{vk} \geq 1,5$). При этом устойчивость от вкатывания колес на рельсы не обеспечивается при движении вагонетки по коротким неровностям ($l'_n \leq 4,0$ м) и большой глубины ($A'_n \geq 0,020$ м). Эти неровности должны своевременно устраняться в процессе эксплуатации.

Из графиков зависимости экспериментальных значений показателей безопасности движения (рис. 7 а, б, в) от скорости движения вагона видно, что на прямолинейном участке пути коэффициенты обезгруживания колес (k_{vk}), устойчивости от сдвига пути (k_{cd}) значительно возрастают при скоростях движения более 3,0 м/с. При этом некоторые показатели k_{cd} , $k_{обез}$, k_{vk} , характеризующие устойчивость транспортной системы, достигают при скоростях более 6,0 м/с предельно допустимых значений ($k_{cd} \leq 0,4$; $k_{vk} \geq 1,5$). В кривых участках пути эти показатели достигают предельно допустимых значений в интервале скоростей $v > 3,0$ м/с.

Сравнительная оценка нагруженности и безопасности движения вагонов со свободным вращением и жесткой насадкой колес при вынужденных колебаниях, обусловленных периодическими неровностями пути показывает, что разница показателей нагруженности для обеих расчетных схем, в которых каждая колесная пара представлена как одно и как три твердых тела (ось и два колеса), достигает до 66 % при прямолинейном движении и около

35 % при движении по кривой $R = 30,0$ м. Наибольшие расхождения показателей безопасности наблюдаются при прямолинейном движении до 61 % и при движении по кривой $R = 30,0$ м до 35 %.

Следовательно, в расчетных схемах двухосных вагонеток нельзя допускать упрощений, связанных с отклонениями от конструктивных особенностей вагонов.

Более полная информация о результатах исследования взаимодействия двухосных вагонов и рельсового пути представлена в работе автора [13].

Выводы. Разработаны алгоритмы и эффективные математические модели для исследования механики взаимодействия вагонов со свободной и жесткой насадкой колес на осях колесных пар и инерционного, упруго-диссипативного рельсового пути и стрелочных переводов с горизонтальными и вертикальными плавными и ступенчатыми неровностями.

Представлены новые методы и определены показатели нагруженности, колебаний и устойчивости двухосных вагонов со свободной и жесткой насадкой колес с путевой структурой, имеющей отклонения в плане и профиле рельсовых нитей.

Установлено явление резонанса, обусловленное близостью частот вынужденных колебаний и частот собственных колебаний двухосных вагонов, а также критические скорости вагонов в безопасном режиме движения.

Список литературы

1. Шахтарь П.С. Определение динамических нагрузок в ходовых частях шахтных вагонеток с неподрессоренным кузовом / П.С. Шахтарь, Я.Е. Степанов, М.К. Галушко. – М.: ЦНИИЭИуголь, 1972. – 248 с.
2. Поляков Н.С. Динамика шахтного рельсового транспорта / Н.С. Поляков, Е.Е. Новиков. – Киев: Наук. думка, 1973. – 192 с.
3. Мишин В. В. Геометрия и кинематика колесной пары на криволинейном участке рельсового пути / В. В. Мишин, Р. В. Кирия // Изв. вузов. Горн. журн. – 1980. – № 11. – С. 42–48.
4. Кузнецов Б.А. Геометрия вписывания экипажа, оборудованного колесами клинового профиля, в кривые рельсового пути постоянного радиуса / Б.А. Кузнецов, А.А. Молчанов // Вопр. руднич. трансп. – М., 1972. – Вып. 12. – С. 116–121.
5. Выскребец А.Н. Исследование динамического взаимодействия вагонетки и рельсового пути / А.Н. Выскребец // Механика горных машин. К.: Наук. думка. – 1980. – С.77–82.
6. Быля А.К. О вертикальных и поперечных силах, действующих на рудничную вагонетку со стороны пути / А.К. Быля // Вопр. руднич. трансп. – М., 1965. – Вып. 8. – С. 134–143.
7. 108. Динамика и прочность шахтных транспортных сосудов / Е.Е. Новиков, Е.Ф. Земляной, В.В. Говоруха и др. – Киев: Наук. думка, 1983. – 152 с.
8. Королев К.П. Вписывание паровозов в кривые участки пути / К.П. Королев // Тр.ВНИИЖТ. – 1950. – 233 с.
9. Ершков О.П. Расчеты горизонтальных поперечных сил в кривых / О.П. Ершков // Тр. ВНИИЖТ. – 1966. – Вып. 301. – 235 с.
10. Коган А.Я. Поперечные горизонтальные силы, действующие на железнодорожный путь в кривых участках пути // А.Я. Коган / Тр. ВНИИЖТ. – 1979. – Вып. 619. – 88 с.
11. Лазарян В.А. Динамика вагонов. / В.А. Лазарян // Устойчивость движения и колебания. – М.:Транспорт, 1964. – 186 с.
12. Вериги М.Ф. Взаимодействие пути и подвижного состава / М.Ф. Вериги, А.Я. Коган. – М.: Транспорт, 1986. – 559 с.
13. Говоруха В. В. Механика взаимодействия рельсового пути, подвижных транспортных средств и смежных устройств/ В.В. Говоруха. – Днепропетровск: Лира, 2006. – 448 с.