

УДК 004.942

## СРЕДНЕСТАТИСТИЧЕСКАЯ ХОРДА – ИНДИКАТОР ФОРМЫ ОВАЛЬНЫХ ФИГУР В ГОМОГЕННЫХ МОНОСЛОЙНЫХ ПОТОКАХ

**Александр А. Аннов**, специалист по контролю параметров зернисто/кусковых потоков  
Штутгарт, Германия, e-mail: [annov@gmx.de](mailto:annov@gmx.de)

**Антон А. Аннов**, специалист по информационным технологиям  
Штутгарт, Германия, e-mail: [annov@hotmail.com](mailto:annov@hotmail.com)

**Аннотация.** В результате компьютерного моделирования установлено, что относительная величина среднестатистической хорды является индикатором формы эллипса. Определены графики функций среднестатистических хорд и эквивалентных диаметров в зависимости от коэффициента сжатия эллипсообразных проекций для горизонтальных и вертикальных монослойных неупорядоченных потоков подобных эллипсоидов вращения. С их помощью возможен контроль формы, размера и объема усредненных объектов таких идеализированных потоков.

*Ключевые слова:* поток эллипсоидов вращения, коэффициент сжатия эллипса, среднестатистическая хорда.

## AVERAGE STATISTICAL CHODR - INDICATOR FORMS OF OVAL FIGURES IN MONOLAYER HOMOGENEOUS STREAMS

**Aleksander Annov**, control specialist parameters of grainy / lumpy streams  
Stuttgart, Deutschland, e-mail: [annov@gmx.de](mailto:annov@gmx.de)

**Anton Annov**, IT Specialist  
Stuttgart, Deutschland, e-mail: [annov@hotmail.com](mailto:annov@hotmail.com)

**Abstract.** As a result of computer simulation established that the relative magnitude of average statistical chord is the indicator forms of the ellipse. Identified graphs of functions average statistical chords and the equivalent diameters depending on the compression ratio of ellipse-shaped projections for horizontal and vertical of monolayer disordered streams of the similar ellipsoids of rotation. With their help is possible to control the shape, size and volume the averaged objects such idealized streams.

*Keywords:* stream of the ellipsoids of rotation, compression ratio of the ellipse, the average statistical chord.

**Введение.** В ряде случаев при контроле технологических процессов необходимо распознавание формы и размера объектов,двигающихся в неупорядоченных горизонтальных, вертикальных или наклонных потоках. Примером таких потоков являются циркуляционные потоки в горнодо-

бывающей промышленности. В большинстве случаев объекты потоков имеют овальную форму, которые условно можно отнести к классу “Овалоидов” [1], а их проекции на транспортное устройство к “Овалам”. Характерным примером Овалоида является эллипсоид (вращения или 3-х осный), а Овала – эллипс. Частным случаем Овала является круг, Овалоида – сфера. Из известных методов и средств распознавания формы и размера объектов в потоке наиболее информативными является те, которые основаны на видеонаблюдении [2] и анализе большого массива полученной информации. Наиболее распространенными причинами, сдерживающими широкое использование таких методов, являются: недостаточно комфортные технологические условия (агрессивность среды, освещенность, запыленность) и недостаточно высокая культура производственного процесса. В качестве альтернативы, авторы проверяют возможность получения меньшей, но в ряде случаев достаточной информации, для осуществления автоматического контроля параметров технологических потоков более простыми и дешевыми средствами.

С этой целью, в процессе исследования, на первом этапе [3], были рассмотрены горизонтальные проекции удлинённых эллипсоидов вращения, неподвижно лежащих на горизонтальной плоскости, имитирующие горизонтальный поток однородных объектов в статическом состоянии. Далее кратко изложены методика и результаты моделирования средних хорд для проекций горизонтального однородного потока вытянутых эллипсоидов вращения. Данная работа является продолжением начатого исследования применительно к вертикальным однородным монослойным потокам эллипсоидов вращения.

**Цель работы.** Исследовать массив хорд, получаемый в результате статистического сканирования проекций (2D) объектов монослойного неупорядоченного потока подобных эллипсоидов (3D), с целью выявления параметров характеризующих форму и размер объектов в потоке.

#### **Методика и результаты исследования.**

**Показатель формы эллипса.** При равномерном сжатии круг преобразуется в эллипс. Степень сжатия [4<sup>56</sup>] является показателем формы эллипса, которая характеризуется коэффициентом сжатия эллипса  $k = b/a$ , где ( $a$ ) и ( $b$ ) полуоси эллипса (Рис.1). Для круга ( $k = 1$ ), при ( $k = 0$ ) круг вырождается в прямую линию. Ось сжатия ( $x$ ) называется большой осью эллипса, а диаметр, совпадающий с этой осью, называется большой главный диаметр ( $d_x = 2a$ ) эллипса (Рис.1). Диаметр, совпадающий с осью ( $y$ ), называется малым диаметром ( $d_y = 2b$ ) эллипса.

С целью упрощения сравнения одноименных параметров, все параметры рассмотрены в относительных единицах, полученных путем деле-

ния параметра на большой главный диаметр ( $d_x$ ) эллипса. Путем умножения относительных значений параметров (диаметра, хорды) на наибольшую из измеренных хорд ( $h_{max} = d_x$ ), возвращается реальная величина параметра.

Моделирование квазибесконечного пошагово – вращающегося переменного множества параллельных хорд эллипса при поддержке программы *Excel*. Методика моделирования заключается в моделировании конечного множества ( $Q\{h_{\beta i/x}\}, d_{\beta/x} \in Q$ ) параллельных относительных хорд ( $h_{\beta i/x}$ ), включая равнонаправленный диаметр ( $d_{\beta/x}$ ), с заданным относительным расстоянием ( $\Delta h_x$ ) между хордами, и последующем пошаговом вращении множества на интервале вращения  $\beta = [0; \pi]$ .

С целью повышения точности результатов моделирования, шаг вращения ( $\Delta\beta$ ) и, особенно заданный предельный относительный шаг ( $\Delta\vec{h}_x$ ) между параллельными хордами, выбирается минимально возможными  $\Delta h_x \rightarrow (\Delta\vec{h}_x \cong 0)$ . Получаемое таким образом множество параллельных хорд является квазибесконечным.

Для корректности сравнения полученных результатов моделирования вращающегося переменного квазибесконечного множества  $\vec{Q}\{h_{\beta i/x}\}$  для эллипсов разной формы, порядок и исходные данные оставались неизменными за счет постоянства расстояния (шага смещения) между параллельными хордами ( $\Delta\vec{h}_x$ ) и большого главного диаметра ( $d_x$ ) эллипсов.

В случае сравнения эллипсов разной формы ( $k_1 \neq k_2$ ) и размера ( $d_{x1} = \delta d_{x2}$ ), требуется обеспечивать равенство шагов смещения в сравниваемых эллипсах ( $\Delta\vec{h}_{x1} = \delta \Delta\vec{h}_{x2}$ ), за счет введения коэффициента ( $\delta$ ).

В процессе вращения множества  $\vec{Q}\{h_{\beta i/x}\}$  в конкретном эллипсе, суммарная длина хорд [3] является величиной постоянной, а их количество, ввиду постоянного расстояния между хордами, величиной переменной ( $\tilde{n}_\beta$ ).

Все средние значения хорд и диаметров являются среднеарифметическими.

Для моделирования выбраны следующие параметры, обеспечивающие достоверность результатов при приемлемом объеме вычислительных операций:

$\beta = [0; \pi]$  – интервал угла вращения переменного множества  $\vec{Q}\{h_{\beta i/x}\}$  параллельных хорд, включая диаметр;

$\Delta\beta = \pi/36$  – шаг вращения множества  $\vec{Q}\{h_{\beta i/x}\}$ ;

$\Delta\vec{h}_a = 2\Delta\vec{h}_x = 0,001$  – шаг смещения очередной хорды относительно диаметра;

$i = [+1000; -1000]$  – интервал параллельного и зеркально - симметричного смещения на величину  $(\Delta \vec{h}_a)$  очередной относительной хорды  $(h_{\beta i/x})$  от равнонаправленного относительного диаметра  $(d_{\beta/x})$  во множестве  $\tilde{Q}\{h_{\beta i/x}\}$ ;

$k = [0; 1]$  – интервал коэффициента сжатия эллипса;

$\Delta k = 0,1$  – шаг коэффициента сжатия эллипса.

Расчет текущего значения относительного диаметра  $(d_{\beta/x})$  эллипса, в зависимости от угла его поворота относительно оси абсцисс, производится согласно [3] по формуле

$$d_{\beta/x} = \frac{d_{\beta}}{d_x} = \frac{k}{\sqrt{k^2 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta}} \quad (1)$$

На основе общеизвестного канонического уравнения эллипса и уравнения хорды, параллельной диаметру, получено уравнение относительной хорды  $(h_{\beta i/x})$ , которая параллельно, пошагово и зеркально - симметрично смещается (Рис. 1) относительно равнонаправленного диаметра  $(d_{\beta/x})$  на заданную величину относительного смещения  $(\Delta \vec{h}_a = 2\Delta \vec{h}_x)$

$$h_{\beta i/x} = \frac{h_{\beta i}}{d_x} = \frac{d_{\beta/x}}{k} \sqrt{k^2 - d_{\beta/x}^2 (i\Delta \vec{h}_a)^2} = \frac{d_{\beta/x}}{k} \sqrt{k^2 - d_{\beta/x}^2 (2i\Delta \vec{h}_x)^2}. \quad (2)$$

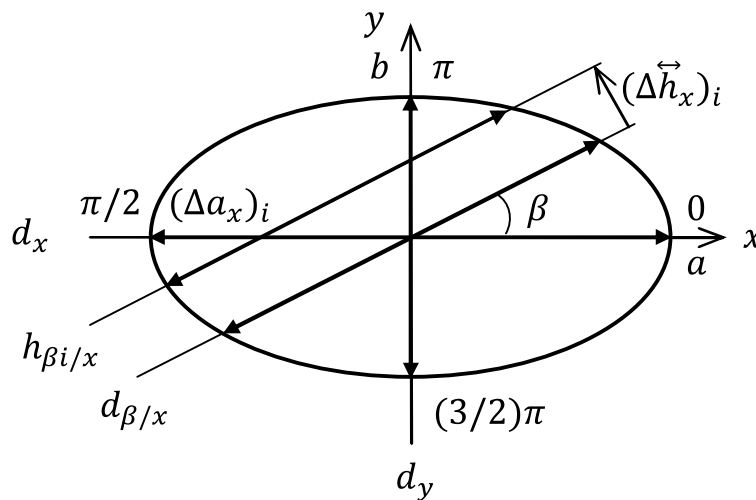


Рис. 1. Параллельное смещение очередной ( $i$ ) относительной хорды  $(h_{\beta i/x})$  от равнонаправленного относительного диаметра  $(d_{\beta/x})$  на заданную величину предельного шага относительного смещения

$$(\Delta \vec{h}_x = \frac{\Delta \vec{h}}{d_x} = \frac{\Delta a}{d_x} \sin \beta).$$

В результате моделирования [3] получены, представленные на Рис. 3, степенные функции на замкнутом интервале  $k_{\rightarrow} \in [1; 0]$ , где символ  $(\rightarrow)$  указывает на то, что параметры относятся к горизонтальным проекциям.

При этом также установлено, что среднеарифметическое статистического массива относительных хорд ( $\hat{H}_{k \rightarrow/x}$ ) эллипса, посредством коэффициента сжатия ( $k_{\rightarrow}$ ), однозначно характеризует форму эллипса и является *индикатором* его формы.

**Моделирование усредненной вертикальной проекции, свободно вращающегося эллипсоида вращения.** Наиболее характерным случаем неупорядоченного потока подобных объектов является вертикальный малослойный разреженный поток, свободно истекающий из выпускного отверстия емкости. В таких потоках ориентация рассматриваемых объектов (вытянутых эллипсоидов вращения) равновозможная, имеет случайный характер. А форма их проекций на вертикальную плоскость имеет форму эллипса. Введем отличительные символы для горизонтальных и вертикальных потоков. Обозначим главные диаметры горизонтальной проекции неподвижного эллипсоида через ( $d_x = d_{a \rightarrow}; d_y = d_{b \rightarrow}$ ), а главные диаметры вертикальной проекции, свободно вращающегося в вертикальной плоскости эллипсоида, посредством ( $d_{a \downarrow}; d_{b \downarrow}$ ).

Тогда, интервал колебаний большого главного диаметра вертикальных проекций равен  $d_{a \downarrow} = [d_{a \rightarrow}; d_{b \rightarrow}]$ , а их малые главные диаметры остаются неизменными  $d_{b \downarrow} = d_{b \rightarrow}$ . То есть, проекция на вертикальную плоскость эллипса, вращающегося в вертикальной плоскости (Рис. 2) равномерно сжимается до круга вдоль большой главной оси.

Средняя форма проекций на вертикальную плоскость, вращающегося эллипса с коэффициентом сжатия ( $k$ ), имеет форму усредненного эллипса, с величиной главных диаметров ( $\bar{d}_{ak \downarrow}; \bar{d}_{bk \downarrow}$ ) или в относительных единицах ( $\bar{d}_{ak \downarrow/x}; \bar{d}_{bk \downarrow/x}$ ).

Для экспериментального определения связи между формой и размером горизонтальной проекции эллипсоида вращения, характеризующейся коэффициентом сжатия ( $k_{\rightarrow}$ ), и его усредненной проекции на вертикальную плоскость, характеризующейся ( $k_{\downarrow}$ ), также использованы приемы математического моделирования.

Рассмотрим в неподвижной декартовой прямоугольной системе координат, вращение в вертикальной плоскости горизонтальной проекции эллипсоида (Рис. 2) с коэффициентом сжатия ( $k_{\rightarrow}$ ). При вращении проекции на угол вращения ( $\gamma$ ), формула (1) расчета, независимо вращающегося в эллипсе относительного диаметра, текущий угол вращения которого ( $\beta$ ) имеет вид

$$d_{\beta k \rightarrow/x} = \frac{d_{\beta k}}{d_x} = \frac{k_{\rightarrow}}{\sqrt{k_{\rightarrow}^2 \cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)}}$$

Проекция ( $d_{\beta k \downarrow / x}$ ) на ось ординат, вращающегося диаметра ( $d_{\beta k \rightarrow / x}$ ), определяется из треугольника (Рис. 2)

$$d_{\beta k \downarrow / x} = d_{\beta k \rightarrow / x} \sin(\gamma + \beta). \quad (3)$$

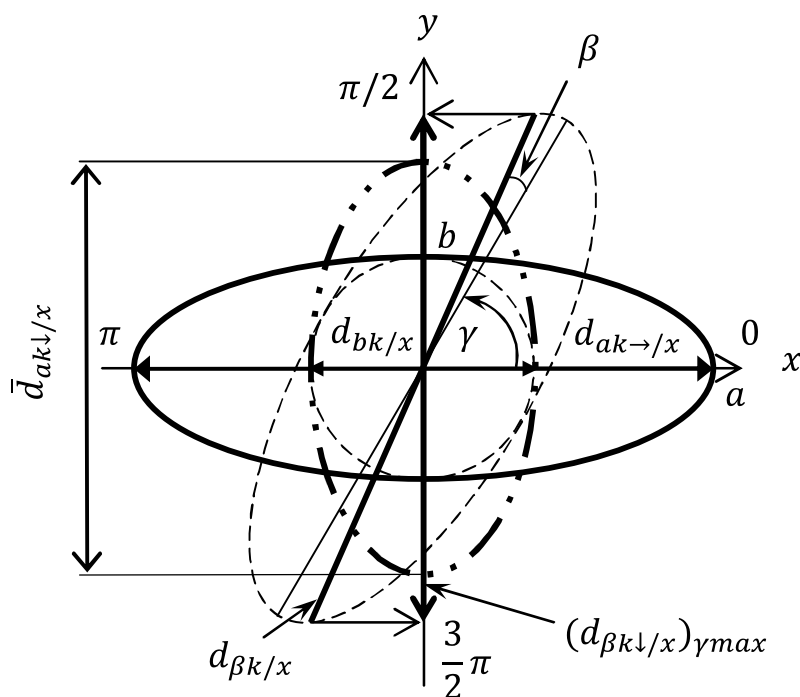


Рис. 2. Построение усредненной вертикальной проекции при пошаговом вращении в вертикальной плоскости на интервале  $[0; \pi/2]$  горизонтальной проекции эллипсоида вращения, где:

$a, b$  – полуоси горизонтальной проекции эллипсоида;

$d_{ak \rightarrow / x}, d_{bk \rightarrow / x} = d_{bk/x}$  – главные относительные диаметры горизонтальной проекции эллипсоида, коэффициент сжатия которой ( $k_{\rightarrow}$ );

$d_{\beta k \rightarrow / x}$  – относительный диаметр, пошагово - вращающийся внутри проекции эллипсоида (независимо от ориентации проекции), при текущем угле вращения ( $\beta$ );

$(d_{\beta k \downarrow / x})_{\gamma max}$  – наибольшая из вертикальных проекций, вращающегося диаметра ( $d_{\beta k \rightarrow / x}$ ), при текущем пошаговом угле поворота ( $\gamma$ ) проекции относительно оси абсцисс, при этом на интервале пошагового вращения  $\gamma = [0; \frac{\pi}{2}]$  образуется конечное множество значений  $Q\{(d_{\beta k \downarrow / x})_{\gamma max}\}$ ;

$\bar{d}_{ak \downarrow / x}$  – большой главный относительный диаметр усредненной вертикальной проекции эллипсоида при его вращении в вертикальной плоскости, равный среднеарифметическому множества значений  $Q\{(d_{\beta k \downarrow / x})_{\gamma max}\}$ ;  $\bar{d}_{bk \downarrow / x} = d_{bk/x}$  – малый главный относительный диаметр усредненной вертикальной проекции эллипсоида.

С учетом (3) получена формула для моделирования проекции на ось ординат, пошагово - вращающегося относительного диаметра эллипса, с текущим углом вращения ( $\beta$ ), при вращении эллипса относительно оси абсцисс на угол ( $\gamma$ )

$$d_{\beta k_{\downarrow}/x} = \frac{(k_{\rightarrow}) \sin(\gamma + \beta)}{\sqrt{k_{\rightarrow}^2 \cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)}} \quad (4)$$

Очевидно, что при каждом пошаговом повороте эллипса, только при одном угле ( $\beta$ ) вращения диаметра, его проекция на ось ординат имеет наибольшее значение  $(d_{\beta k_{\downarrow}/x})_{\gamma max}$ . При пошаговом увеличении угла вращения эллипса на интервале  $\gamma = [0; \frac{\pi}{2}]$ , с заданным шагом вращения  $\Delta\gamma = \pi/36$ , образуется конечное множество значений  $Q\{(d_{\beta k_{\downarrow}/x})_{\gamma max}\}$ .

Среднеарифметическое такого множества  $\bar{Q}\{(d_{\beta k_{\downarrow}/x})_{\gamma max}\}$  является большим главным относительным диаметром  $(\bar{d}_{ak_{\downarrow}/x})$ , усредненной эллипсообразной проекции на ось ординат, вращающегося в вертикальной плоскости эллипса с коэффициентом сжатия ( $k_{\rightarrow}$ ). Таким образом, коэффициент сжатия усредненной вертикальной эллипсообразной проекции равен

$$k_{\downarrow} = \frac{\bar{d}_{ak_{\downarrow}/x}}{\bar{d}_{bk_{\downarrow}/x}}$$

**Программирование функции для моделирования в среде Excel.** Согласно (3), программируемая функция проекции на ось ординат пошагово - вращающегося относительного диаметра эллипса, с текущим углом вращения ( $\beta$ ), при вращении эллипса с коэффициентом сжатия ( $k_{\rightarrow}$ ) относительно оси абсцисс на угол ( $\gamma$ ) имеет вид

$$f_{\gamma} = \$A\$13 * \text{SIN}(\text{C\$2} + \$B4) / (\text{ROOT}(((\$A\$13 * \$A\$13) * (\text{COS}(\$B4) * \text{COS}(\$B4))) + (\text{SIN}(\$B4) * \text{SIN}(\$B4))))$$

Ячейка A13 соответствует текущему значению ( $k_{\rightarrow}$ ), ячейки C2 и B4 соответствуют текущим углам вращения ( $\beta$ ) и ( $\gamma$ ).

Коэффициент сжатия усредненной проекции на ось ординат

$$k_{\downarrow} = k_{\rightarrow} / \bar{f}_{\gamma, max}$$

где:  $f_{\gamma, max}$  – наибольшее значение проекций ( $f_{\gamma}$ ) на интервале угла вращения диаметра  $\beta = [0; \frac{\pi}{2}]$  для каждого угла вращения эллипса ( $\gamma$ );

$\bar{f}_{\gamma, max}$  – среднеарифметическое всех значений ( $f_{\gamma, max}$ ) на интервале угла вращения эллипса  $\gamma = [0; \frac{\pi}{2}]$ .

**Результаты моделирования.** Определены коэффициенты ( $k_{\downarrow}$ ) сжатия усредненной эллипсообразной проекции на вертикальную плоскость вертикального неупорядоченного потока вытянутых эллипсоидов вращения на замкнутом интервале  $k_{\downarrow} \in [1; 0]$ , представленные после интерполяции в виде функции  $k_{\downarrow} = f(k_{\rightarrow})$  на Рис. 3.

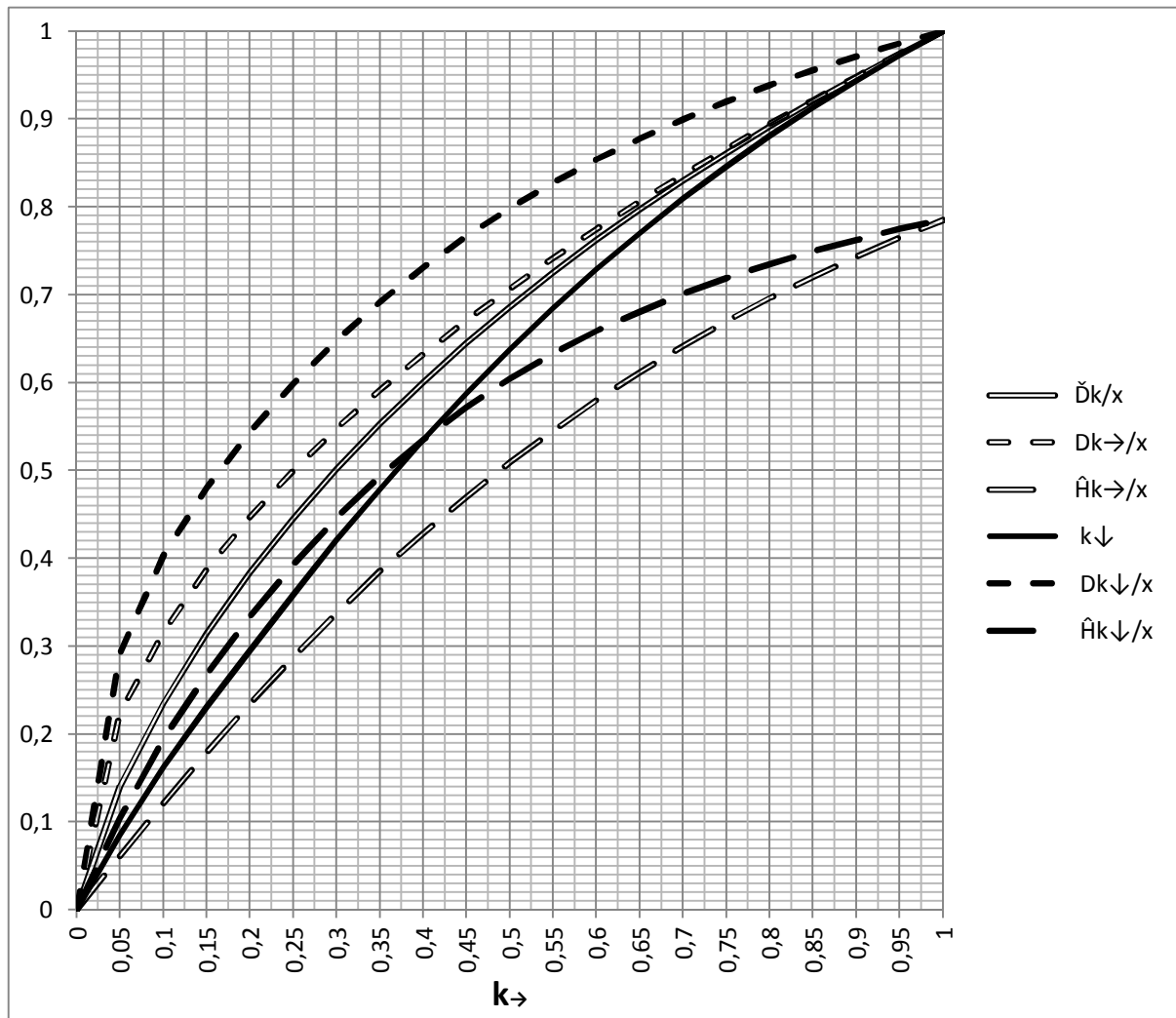


Рис. 3. Графики функций хорд и диаметров на полном интервале сжатия  $k = [0; 1]$  эллипсообразных проекций для горизонтального ( $\rightarrow$ ) и свободно падающего вертикального ( $\downarrow$ ) монослойных потоков вытянутых эллипсоидов вращения, где:

$\check{D}_{k_{\rightarrow}/x} = f(k_{\rightarrow})$  – средний относительный диаметр эллипса;

$D_{k_{\rightarrow}/x} = f(k_{\rightarrow})$  – эквивалентный относительный диаметр эллипса, рассчитанный по формуле  $D_{k_{\rightarrow}/x} = \frac{D_{k_{\rightarrow}}}{d_x} = \sqrt{4ab}/d_x = \sqrt{d_x d_y}/d_x = \sqrt{k_{\rightarrow}}$ .

$\hat{H}_{k_{\rightarrow}/x} = f(k_{\rightarrow})$  – среднеарифметическое статистического массива относительных хорд эллипса;

$k_{\downarrow} = f(k_{\rightarrow})$  – коэффициент сжатия усредненной вертикальной эллипсообразной проекции на ось ординат;

$D_{k_{\downarrow}/x} = f(k_{\rightarrow})$  – эквивалентный относительный диаметр усредненной вертикальной эллипсообразной проекции на ось ординат, рассчитанный по формуле  $D_{k_{\downarrow}/x} = \sqrt{k_{\downarrow}}$ ;

$\hat{H}_{k_{\downarrow}/x} = f(k_{\rightarrow})$  – средняя относительная хорда усредненной вертикальной эллипсообразной проекции на ось ординат.



Для определения значений средних хорд ( $\hat{H}_{k\downarrow/x}$ ), при известном коэффициенте сжатия ( $k_{\downarrow}$ ), использована, ранее полученная для эллипсов любой формы функция  $\hat{H}_{k\rightarrow/x} = f(k_{\rightarrow})$ .

Полученные результаты (Рис. 3) относятся к идеализированным потокам, в которых объекты потока находятся только или в горизонтальном положении или в неупорядоченном свободном падении с равновероятной ориентацией. Реальные потоки отличаются от рассмотренных. Например, при повышении плотности горизонтального потока, часть объектов из-за стесненности располагается наклонно к плоскости проекции. Наиболее сложно предсказывать закономерность статистического расположения объектов в наклонных потоках, в которых движение объектов потока состоит из двух составляющих: качения и скольжения.

Реально измеренная функция средних хорд  $\hat{H}_{k\searrow/x} = f(k)$  для приведенных случаев, располагается в промежуточной зоне (Рис. 3) между функциями горизонтального и вертикального потоков, что выражается неравенством  $\hat{H}_{k\rightarrow/x} \leq \hat{H}_{k\searrow/x} \leq \hat{H}_{k\downarrow/x}$ . Величина относительного смещения измеренной функции внутри промежуточной зоны характеризует долю объектов потока, ориентация которых отличается от рассмотренной как идеальная. Например, при оптической сортировке, смещение измеренного значения горизонтального потока внутри промежуточной зоны на 20%, указывает на то, что около 30% объектов потока расположены наклонно, по причине нарушения их укладки или повышенной плотности потока. Точная оценка возможна только при известном значении усредненного коэффициента формы объектов потока, например, при контроле потока штампованных таблеток в форме овалоидов. Для его определения требуется поиск дополнительного параметра, путем анализа имеющегося массива хорд потока.

Пример: В результате статистического сканирования неупорядоченного вертикального однослойного потока подобных объектов в количестве  $10^5$  штук, имеющих форму вытянутого эллипсоида вращения, получен массив измеренных хорд, на основании которого определены исходные данные:

$$h_{max} = 20mm - \text{длина наибольшей хорды } (h_{max} = d_x);$$

$\hat{H}_{k\downarrow} = 13,62mm$  – среднеарифметическое статистического множества измеренных хорд.

$$\text{Относительное значение средней хорды } \hat{H}_{k\downarrow/x} = \frac{\hat{H}_{k\downarrow}}{h_{max}} = 0,681.$$

Полученному значению ( $\hat{H}_{k\downarrow/x}$ ), согласно (Рис. 3), соответствуют:  $k_{\downarrow} = 0,771$ ;  $k_{\rightarrow} = 0,650$ ;  $D_{k\downarrow/x} = 0,878$ ;  $D_{k\rightarrow/x} = 0,806$ .

Главные диаметры усредненного эллипсоида в потоке

$$d_{a\rightarrow} = h_{max} = 20\text{mm}; \quad d_{b\rightarrow} = d_{c\rightarrow} = 0,650 * 20 = 13\text{mm}.$$

Главные диаметры усредненной вертикальной проекции потока вытянутых эллипсоидов вращения

$$d_{b\downarrow} = d_{b\rightarrow} = 13\text{mm}; \quad d_{a\downarrow} = d_{b\downarrow}/k_{\downarrow} = 13/0,771 = 16,86\text{mm}.$$

Диаметр сферы, эквивалентной по объему, усредненному вытянутому эллипсоиду вращения в измеренном потоке

$$D_o = \sqrt[3]{d_{a\rightarrow}d_{b\rightarrow}d_{c\rightarrow}} = \sqrt[3]{20 * 13 * 13} = 15\text{mm}.$$

Объем усредненного объекта потока

$$V_{\theta} = \frac{\pi}{6}D_o^3 = \frac{\pi}{6} * 15^3 = 1767\text{mm}^3.$$

**Выводы.** Средняя относительная хорда эллипса (среднеарифметическое статистического массива относительных хорд  $(\hat{H}_{k\rightarrow/x})$  эллипса) посредством коэффициента сжатия ( $k_{\rightarrow}$ ) эллипса однозначно характеризует форму эллипса и является *индикатором* его формы. По ее величине, измеренной для проекций объектов идеализированных горизонтальных  $(\hat{H}_{k\rightarrow/x})$  или вертикальных  $(\hat{H}_{k\downarrow/x})$  потоков вытянутых эллипсоидов вращения, можно однозначно определять форму объектов потока и рассчитывать их главные диаметры и объем.

**Нерешенные задачи.** При более сложной задаче, когда объектами потока являются 3-х осные эллипсоиды, или, когда поток не является идеализированным, требуется поиск дополнительного параметра в измеренном массиве хорд, способствующего определению усредненной формы объектов потока.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Овал: Материал из Википедии: [Электронный ресурс]. URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Овал>. (Дата обращения: 05.03.2014)
2. Stark,U. u. Mueller, A.: Effektive Methoden zur Messung der Korngroesse und Kornform. Aufbereitungs Technik 45 (2004) Nr. 6, S. 32/37
3. Annov, A., Annov, A.: Average chords and diameters of the ellipse. LAP LAMBERT Akademic Publishing, 2014, 50 s.
4. М.Я. Выгодский. Справочник по высшей математике. М., 1998. – 846 с.