

СЕМИНАР 6
ДОКЛАД НА СИМПОЗИУМЕ "НЕДЕЛЯ ГОРНЯКА - 99"

МОСКВА, МГГУ, 25.01.99 – 29.01.99

П.А. Егоров, А.А. Березняк,
2000

УДК 622.7

П.А. Егоров, А.А. Березняк

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗДЕЛЕНИЯ
СМЕСИ МИНЕРАЛЬНЫХ ЗЕРЕН

С

войства и поведение систем, состоящих из достаточно большого числа частиц, определяются закономерностями особого типа, получившими название статистических закономерностей [1]. К таким системам можно отнести зернистые материалы, изучение свойств и поведения которых в различных условиях составляет одну из важных задач обогащения полезных ископаемых.

Представим идеализированную систему, состоящую из частиц двух сортов одинакового размера D и различной плотности ρ_1 и ρ_2 , причем $\rho_1 > \rho_2$, массы частиц обозначим m_1 и m_2 . Пусть число частиц первого и второго сорта равно соответственно N_1 и N_2 . Смесь находится в бесконечно высоком сосуде с площадью основания S . Извне в систему подводится энергия, например, вибрации, в результате чего частицы совершают хаотические движения. Мерой хаотичности движения частиц служит статистическая температура Θ . Следует отметить, что система находится во внешнем гравитационном поле с ускорением свободного падения g . Тогда потенциальная энергия частицы массы m зависит только от вертикальной координаты h и равна:

$$E = mgh$$

Распределение частиц, зависящее от их потенциальной энергии, будет изменяться только вдоль вертикальной оси, а в горизонтальной плоскости частицы распределяются равномерно. Так как всякая равновесная система стремится занять состояние с наименьшей энергией, то частицы с большей плотностью будут стремиться занять положение с меньшим значением вертикальной координаты.

Рассмотрим подсистему частиц первого сорта при статистической температуре, стремящейся к нулю. В этом случае хаотическим движением можно пренебречь, поэтому каждая частица будет занимать определенное место в пространстве, и в этом месте пространства может находиться не более одной частицы. Применим распределение Гиббса для сово-

купности частиц числом n_k , находящихся в k -том состоянии, и запишем выражение для термодинамического потенциала этой совокупности [2]:

$$\Omega_k = -\Theta \ln \sum_{n_k} \left(\exp \left(\frac{\mu_1 - E_{1k}}{\Theta} \right) \right)^{n_k}$$

μ_1 - химический потенциал частиц первого сорта.

С учетом пространственной несовместимости частиц числа заполнения каждого состояния могут принимать лишь значения 0 или 1, поэтому получим:

$$\Omega_k = -\Theta \ln \left(1 + \exp \left(\frac{\mu_1 - E_{1k}}{\Theta} \right) \right)$$

Поскольку среднее число частиц равно производной от термодинамического потенциала по химическому потенциалу с обратным знаком, то в данном случае искомое среднее число частиц в k -том состоянии получится как производная

$$\bar{n}_{k1} = -\frac{\partial \Omega_k}{\partial \mu_1} = \frac{\exp \left(\frac{\mu_1 - E_{1k}}{\Theta} \right)}{1 + \exp \left(\frac{\mu_1 - E_{1k}}{\Theta} \right)}$$

или окончательно

$$\bar{n}_{k1} = \frac{1}{\exp \left(\frac{E_{1k} - \mu_1}{\Theta} \right) + 1}$$

Это есть функция распределения для рассматриваемой подсистемы частиц. Все частицы, находящиеся в элементе объема Sdh , обладают одинаковой потенциальной энергией m_1gh , и максимальное их количество равно:

$$n_{01} = S / D^2$$

Тогда для числа частиц, находящихся на определенном уровне с учетом функции распределения можем записать:

$$dn_1 = \frac{n_{01} dh}{\left(1 + \exp \left(\frac{m_1gh - \mu_1}{\Theta} \right) \right) D}$$

Интегрируя по dh , получим полное число частиц подсистемы

$$N_1 = \frac{n_{01}}{D} \int_0^{\infty} \frac{dh}{\exp \left(\frac{m_1gh - \mu_1}{\Theta} \right) + 1}$$

Преобразуем этот интеграл, сделав подстановку $m_1gh - \mu_1 = \Theta z$:

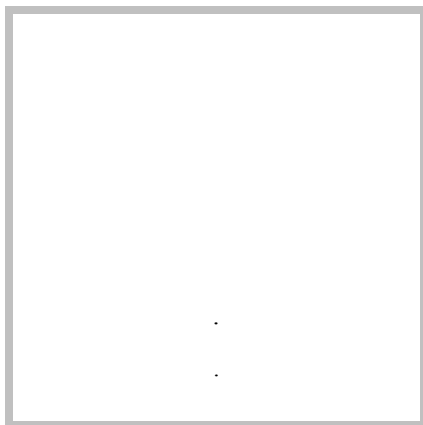


Рис. 1. Распределение частиц по высоте при статистической температуре $5 \cdot 10^{-8}$ Дж

1 – частицы большей плотности;
2 – частицы меньшей плотности

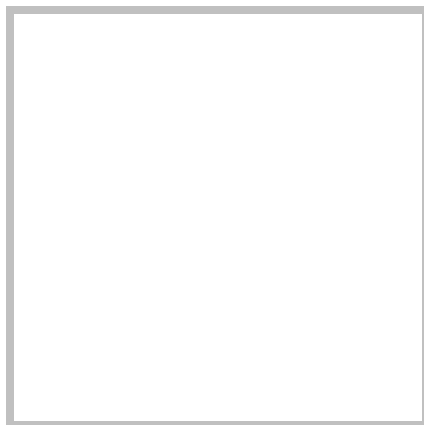


Рис. 2. Распределение частиц по высоте при статистической температуре $4 \cdot 10^{-7}$ Дж.

1 – частицы большей плотности;
2 – частицы меньшей плотности

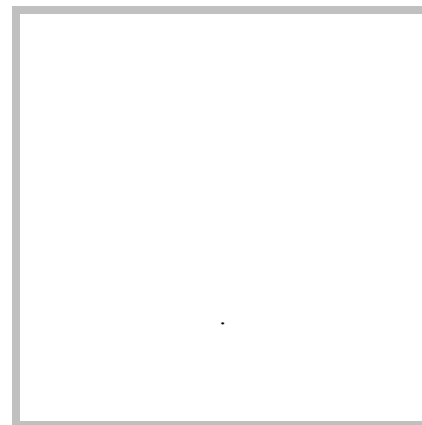


Рис. 3. Распределение плотности смеси частиц по высоте.

1 - статистическая температура $4 \cdot 10^{-7}$ Дж.; 2 - статистическая температура $5 \cdot 10^{-8}$ Дж

$$N_1 = \frac{n_{01}}{D} \int_{\frac{\mu_1}{\Theta}}^{\infty} \frac{dz}{\exp(z)+1} = \frac{n_{01}}{D} \frac{\ln \left(\left(1 + \exp \left(\frac{\mu_1}{\Theta} \right) \right) \exp \left(-\frac{\mu_1}{\Theta} \right) \right)}{m_1 g} \Theta + \mu_1$$

В случае $\mu_1 \gg \Theta$, а именно этот случай нас и будет интересовать в дальнейшем, выражение под логарифмом стремится к 1, а сам логарифм выражения равен нулю. Учитывая, что высота неподвижного слоя частиц первого сорта $h_{01} = N_1 D / n_{01}$, получим выражение для $\mu_1 = m_1 g h_{01}$

В итоге после соответствующей подстановки получим для частиц большей плотности функциональную зависимость их количества в слое толщиной D от высоты и статистической температуры:

$$n_1 = \frac{n_{01}}{1 + \exp \left(\frac{m_1 g (h - h_{01})}{\Theta} \right)}$$

Производя выкладки, аналогичные вышеприведенным, для частиц другого сорта с учетом того, что $n_{02} = S / D^2 - n_{01}$, получим распределение их по высоте в виде:

$$dn_2 = \frac{n_{02} dh}{\left(1 + \exp \left(\frac{m_2 g h - \mu_2}{\Theta} \right) \right) D}$$

В случае очень низкой статистической температуры интегрирование этого выражения по высоте следует начинать не с нуля, а с h_{01} . Сделав соответствующую подстановку, для общего количества частиц другого сорта будем иметь выражение:

$$N_2 = \frac{n_{02}}{D} \int_{\frac{m_2 g h_{01} - \mu_2}{\Theta}}^{\infty} \frac{dz}{\exp(z)+1} = \frac{n_{02}}{D} \frac{\ln \left(\left(\exp \left(\frac{m_2 g h_{01}}{\Theta} \right) + \exp \left(\frac{\mu_2}{\Theta} \right) \right) \exp \left(-\frac{\mu_2}{\Theta} \right) \right)}{m_2 g} \Theta + \mu_2 - m_2 g h_{01}$$

Так как выполняются условия $\mu_2 \gg \Theta$ и $\mu_2 > m_2 g h_{01}$, то по-прежнему выражение под логарифмом стремится к 1, а сам логарифм равен нулю. Следова-

тельно, химический потенциал для частиц меньшей плотности равен:

$$\mu_2 = m_2 g \frac{N_2 D}{n_{02}} + m_2 g h_{01} = m_2 g (h_{01} + h_{02})$$

Итоговое выражение для распределения частиц другого сорта по высоте имеет вид:

$$n_2 = \frac{n_{02}}{1 + \exp \left(\frac{m_2 g (h - h_{01} - h_{02})}{\Theta} \right)}$$

В качестве реального примера рассмотрим систему, состоящую из смеси частиц кварца плотности $\rho_1 = 2700$ кг/м³ и частиц угля плотности $\rho_2 = 1300$ кг/м³. Размер всех частиц одинаковый и равен $D = 10^{-3}$ м, количество частиц первого и второго сорта $N_1 = N_2 = 10^5$ шт. Пусть смесь помещена в сосуд с площадью основания $S = 10^{-3}$ м² и неограниченной высотой. Для этих условий $n_{01} = 10^3$, $h_{01} = h_{02} = 0,1$ м, $m_1 = 2,7 \cdot 10^{-6}$ кг, $m_2 = 1,3 \cdot 10^{-6}$ кг, $g = 9,81$ м/с².

Графики функций распределения количества частиц по высоте при различных статистических температурах $\Theta_1 = 5 \cdot 10^{-8}$ Дж и $\Theta_2 = 4 \cdot 10^{-7}$ Дж представлены на рисунках 1 и 2. На рисунке 3 показано распределение плотности смеси частиц по высоте при тех же температурах.

Анализируя графики, видим, что при статистической температуре Θ_1 существует узкий интервал в диапазоне высот от 0,085 м до 0,115 м, в котором происходит перемешивание частиц. Ниже этой зоны находятся частицы большей плотности, а выше – частицы меньшей плотности. При повышении температуры до Θ_2 зона перемешивания распространяется на весь занимаемый частицами объем, однако внизу находятся преимущественно частицы первого сорта.

Так как процесс разделения частиц есть процесс, обратный перемешиванию, то можно полагать, что разделение

частиц возможно только в зоне перемешивания. Следовательно, для полного разделения необходима минимальная статистическая температура, или, другими словами, необходима минимальная энергия хаотизации системы, благодаря которой все частицы, по крайней мере, одного сорта, могут перемещаться по занимаемому системой объему. Но при этом погрешность разделения увеличивается.

Для уменьшения погрешности разделения температуру следует снижать таким образом, чтобы система постоянно находи-

лась в квазиравновесном состоянии. Это условие можно выполнить только в том случае, если время снижения температуры будет больше времени релаксации системы.

Рассмотрение вопросов, связанных с временем установления статистического равновесия и временем, необходимым для разделения частиц, выходит за рамки данной статьи, но может быть рассмотрено с позиций физической кинетики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левич В.Г. Введение в статистическую физику. М : Гостехиздат, 1954. - с.155.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Статистическая физика. М : Гостехиздат, 1958. - с.565.



КОРОТКО
ОБ
АВТОРАХ

Егоров П.А. – кандидат химических наук, профессор Национальной горной академии Украины.

Березняк А.А. – Национальная горная академия Украины.