МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ГЕОЛОГОРОЗВІДУВАЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра вищої математики

Особистий довідник студента з вищої математики

(Восьма частина)

Дніпро
НГУ
2017

Горбатов М.І. Особистий довідник студента з вищої математики (восьма частина) / М.І. Горбатов, О.О. Сдвижкова; М-во освіти і науки України; Нац. гірн. ун-т. – Дніпро: НГУ, 2017. – 39 с.

Автори : М.І. Горбатов, ст. викл.
О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

Затверджено редакційною радою ДВНЗ «НГУ» (протокол № 1 від 19.01.2017) за поданням методичної комісії напряму підготовки «Гірництво» (протокол № 12 від 07.12.2016).

Відповідальна за випуск завідувач кафедри вищої математики
О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

ВСТУП

Ця частина «Особистого довідника студента з вищої математики» присвячена подальшому заглибленню в інтегральне числення в усьому його різноманітті, а конкретно подає детальний розгляд криволінійних та поверхневих інтегралів.

У стислій формі автори намагалися сформулювати алгоритмічні приписи до математичних дій, не маючи наміру до якогось конкурування між довідником та підручником або методичкою.

Цей довідник є теоретичним і практичним доповненням до методичних розробок, підручників, конспектів. Його зможуть використовувати студенти всіх спеціальностей. На перших сторінках довідника за традицією знову подається шкільна навчальна актуальна інформація (мінімальний набір), оскільки в математиці має місце особливо велика залежність наступних її розділів від попередніх, тобто поняття, правила, формули так званої елементарної математики неминуче і дуже часто доводиться застосовувати для розуміння понять, правил і формул так званої вищої математики.

Матеріал викладено так, щоб максимально допомогти студенту оволодіти різними математичними поняттями і методами, зробити їх простими і природними, навчити використовувати їх на практиці.

Математичні поняття підкріплені фізичними та геометричними задачами, які дозволяють краще засвоїти викладену теорію, розібратися в її змісті, розвинути математичну культуру мислення.

Окремо у довіднику постійно наголошується на вмінні розрізняти сенс однакових чи майже однакових за виглядом формул, якщо ці формули подають деякі образи на площині або в просторі, тобто студенту рекомендується навчитися переходити, так би мовити, із площини в простір, а також із простору на площину. При такому вмінні просто запам’ятовувати доведеться значно менше.

ТАБЛИЦЯ СТЕПЕНІВ, ЩО НАЙБІЛЬШ ЧАСТО ЗУСТРІЧАЮТЬСЯ

n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729				
4	16	64	256	1024					
5	25	125	625						
6	36	216							
7	49	343							
8	64	512							
9	81	729							
10	100								
11	121								
12	144								
13	169								
14	196								
15	225								
16	256								
17	289								
18	324								
19	361								
20	400								
21	441								
22	484								
23	529								
24	576								
25	625								
26	676								
27	729								
28	784								
29	841								
30	900								
31	961								
32	1024								
33	1089								

!!! Числа, поміщені в цій таблиці, будемо називати «хорошими», тому що з них добуваються націло корені (наприклад: $\sqrt[10]{1024}=2$; $\sqrt[4]{625}=5$; $\sqrt[6]{729}=3$) і вони записуються як степені цілих чисел (наприклад: $1024=2^{10}$, $625=5^4$, $729=3^6$).

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

$$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$$
$$(A\pm B)^3=A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3$$
$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$$
$$(A\pm B)\left(A^2\ \mathbf{m}\ AB+B^2\right)=A^3\pm B^3$$

!!! Ліва частина цих рівностей має вигляд степеня або добутку, а права – многочлена. Якщо ці формули застосувати справа-наліво, одержуємо правила згортання алгебраїчної суми в компактний вид степеня або добутку, наприклад:

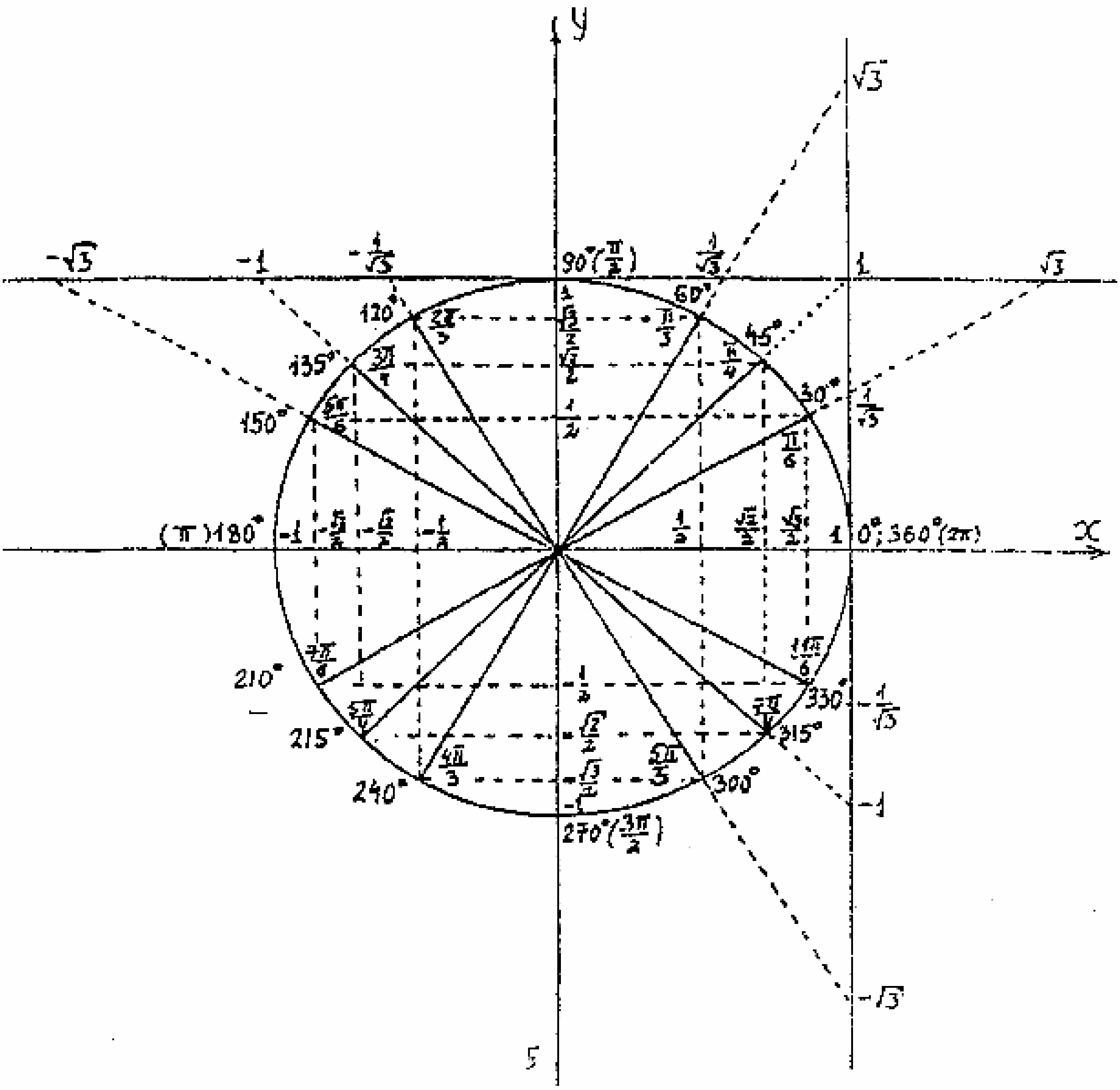
$$4a^2-12ax+9x^2=(2a-3x)^2;$$
$$81x^2-25a^2=(9x-5a)(9x+5a);$$
$$64+96b+48b^2+8b^3=(4+2b)^3.$$

!!! Ліва і права частини будь-якої формули фіксують математичні конструкції, які можна взаємозаміняти. Знання таких конструкцій істотно полегшує перетворення виразів, а тому необхідно збільшувати їхню кількість в мозку, у пам’яті, формуючи тим самим особистий БАНК КОНСТРУКЦІЙ ОБМІННОГО ФОНДУ.

ПРО ТРИГОНОМЕТРИЧНЕ КОЛО

!!! Тригонометричне коло ($R = 1$) дає можливість бачити значення тригонометричних функцій кутів, що часто зустрічаються, і це допомагає швидше їх запам'ятати. Коло також ілюструє властивості тригонометричних функцій: знаки, парність (непарність), зростання (спадання), нулі функцій, екстремуми.

!!! Синуси кутів дивимося на осі OY, косинуси – на осі OX; тангенси – на правій дотичній, котангенси – на верхній дотичній.



ФОРМУЛИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

I. Основні тригонометричні тотожності:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$
$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$$

II. Формули додавання:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha tg\beta}$$

III. Формули подвоєння (потроєння):

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$$
$$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$
$$\sin 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$$
$$\cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

IV. Формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток:

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$
$$ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

V. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

Про логарифми

I. Основна логарифмічна тотожність

$$a^{\log_a b} = b.$$

II. Властивості логарифмів

$$\log_a 1 = 0;$$
$$\log_a a = 1;$$
$$\log_a (b_1 \times b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2;$$
$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2;$$
$$\log_a b^k = k \log_a b;$$
$$\log_a \sqrt[k]{b} = \frac{1}{k} \log_a b.$$

III. Зв'язок між логарифмами різних систем

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ або } \log_a b = \log_a c \times \log_c b$$

IV. Десяткові та натуральні логарифми

$\lg b = \log_{10} b$ – логарифм числа b за основою 10;

$\ln b = \log_e b$ – логарифм числа b за основою e, де $e = 2,71828...$;

$\lg 2 = 0,3010...$;

$\lg 3 = 0,4771...$;

$\lg 5 = 0,6990...$;

$\lg e = 0,4343...$;

$\ln 10 = 2,3026...$.

Таблиця похідних

1. $y = C,\ y' = 0$.

2. $y = x^{\alpha},\ y' = \alpha x^{\alpha - 1}$.

3. $y = \sqrt{x},\ y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. $y = \ln x,\ y' = \dfrac{1}{x}$.

5. $y = \log_a x,\ y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$.

6. $y = e^x,\ y' = e^x$.

7. $y = a^x,\ y' = a^x \ln a$.

8. $y = \sin x,\ y' = \cos x$.

9. $y = \cos x,\ y' = -\sin x$

10. $y = \operatorname{tg} x,\ y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

11. $y = \operatorname{ctg} x,\ y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$.

12. $y = \arcsin x,\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

13. $y = \arccos x,\ y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

14. $y = \operatorname{arctg} x,\ y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

15. $y = \operatorname{arcctg} x,\ y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Таблиця інтегралів

1. $\int 0\,dx = C$.

2. $\int dx = x + C$.

3. $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1$.

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

5. $\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$.

6. $\int a^{x}\,dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$.

7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

11. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$.

12. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$.

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.

15. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

16. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$.

17. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$.

18. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$.

19. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

Інтегральне числення, як відомо, є величезним за обсягом і надзвичайно важливим розділом вищої математики. У попередніх частинах «Особистого довідника…» ти, друже студенте, мав можливість розглянути «прості» інтеграли, а потім подвійні, потрійні та застосування їх у практичних задачах. Прийшла черга ознайомитись із так званими криволінійними та поверхневими інтегралами. Виявилося, що уже й потрійних інтегралів мало для розв’язування всього різноманіття технічних, зокрема, задач. Криволінійні та поверхневі інтеграли посіли своє гідне місце, знайшли своє широке застосування.

Слід нагадати і підкреслити, що й вони в процесі обчислення теж невмолимо зводяться до початкових «простих» інтегралів, але вже дещо іншими шляхами. І знову спадковість розділів математики, їх взаємозв’язок. При розгляді криволінійних і поверхневих інтегралів із попереднього необхідно згадувати криві лінії та поверхні, рівняння цих ліній і поверхонь, їхні геометричні образи.

Обсяг практичних задач, які викликали до життя криволінійні та поверхневі інтеграли, виявився таким великим і різноманітним, що довелося створювати криволінійні інтеграли першого роду і другого роду, поверхневі інтеграли першого роду і другого роду.

КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ ПЕРШОГО РОДУ

Задача про масу матеріальної кривої

Вздовж неоднорідної матеріальної кривої AB розподілено масу з лінійною густиною $\gamma = \gamma(x, y)$. Необхідно знайти масу цієї кривої.

Відомо, що лінійною густиною γ маси, якщо крива однорідна, називають відношення маси кривої до її довжини. Але часто виникає необхідність обчислювати якраз маси неоднорідних кривих. Це коли густина на кривій розподілена нерівномірно, є змінною величиною, залежить від місцезнаходження точки на кривій.

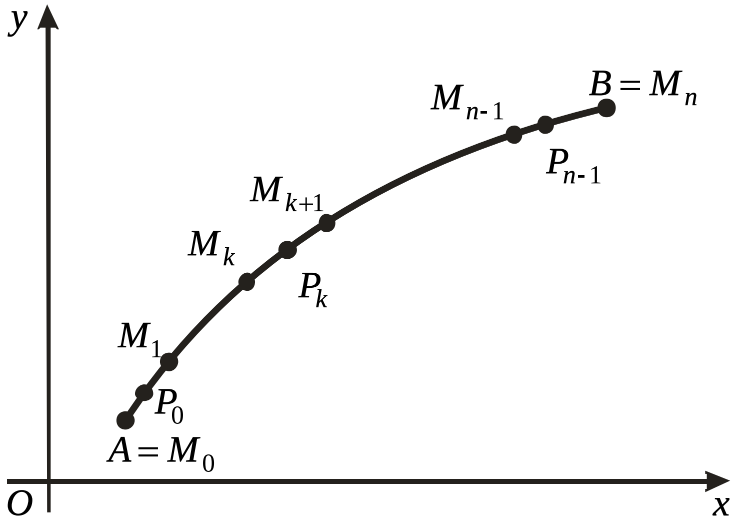
У цьому випадку лінійною густиною маси в довільній точці M називають границю (якщо вона існує) відношення маси тієї частини кривої, яка містить точку M, до її довжини при умові, що довжина цієї частини кривої прямує до нуля.

Припускаємо, що крива AB – спрямлювана, крім того, вважатимемо криву AB простою дугою. Нехай $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$ – параметричні рівняння кривої AB. Таку неперервну криву називають простою дугою, якщо кожним двом різним точкам відрізка $[\alpha;\beta]$ відповідають дві різні точки кривої.

Виконаємо деяке розбиття кривої AB на частини M_kM_{k+1} точками $A = M_0, M_1, ..., M_k, M_{k+1}, ...M_{n-1}, M_n = B$. На кожній дузі M_kM_{k+1}, $k = 0,1,...,n-1$ виберемо довільну точку $P_k \in M_kM_{k+1}$ і складемо суму

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}\gamma(P_k)\Delta s_k\,, \tag{1}$$

де Δs_k – довжина дуги M_kM_{k+1}.



Цю суму можна розглядати як наближене значення маси m кривої AB. Якщо $\max\Delta s_k\to 0$, то з формули (1) одержимо шукане значення маси m кривої AB, тобто

$$m=\lim_{\max\Delta s_k\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\gamma(P_k)\Delta s_k\,. \tag{2}$$

Таким чином, обчислення маси неоднорідної матеріальної кривої зводиться до обчислення границі виду (2), з якою пов'язують поняття криволінійного інтеграла першого роду.

Поняття криволінійного інтеграла першого роду, його існування та обчислення

Нехай у площині Oxy маємо спрямлювану криву AB і на цій кривій задано функцію $f(x,y)$. Припустимо, що параметр s, де $0\le s\le S$, означає довжину дуги на кривій AB, яка сполучає початкову точку A з довільною точкою кривої, S – довжина кривої AB. Тоді рівняння кривої AB можна записати у вигляді

$$x=x(s),\quad y=y(s),\quad 0\le s\le S\,.$$

При цьому задана функція $f(x,y)$ перетворюється за виглядом та змістом у функцію $f\left[x(s),y(s)\right]$ від змінної s.

Розглянемо T-розбиття відрізка $[0;S]$:

$0=s_0<s_1<\ldots<s_k<s_{k+1}<\ldots<s_{n-1}<s_n=S$.

Складемо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f\left[x(\tau_k), y(\tau_k)\right]\Delta s_k, \tag{3}$$

де $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$, $\tau_k \in [s_k; s_{k+1}]$, $k = 0,1,...,n-1$.

Суму (3) називають інтегральною сумою для функції $f(x,y)$ по кривій AB. Нехай $\lambda(T) = \max \Delta s_k$.

Означення 1. Число I називають границею інтегральних сум (3) при $\lambda(T) \to 0$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що нерівність $|I - \sigma| < \varepsilon$ виконується для кожного T-розбиття відрізка $[0;S]$ і для будь-якого вибору точок $\tau_k \in [s_k; s_{k+1}], k = 0,1,...,n-1$, для яких $\lambda(T) < \delta$.

Означення 2. Якщо при $\lambda(T) \to 0$ інтегральні суми (3) мають границею число I, то це число називають криволінійним інтегралом першого роду від функції $f(x,y)$ по кривій AB і позначають $\int\limits_{AB} f(x,y)\,ds$.

Таким чином,

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,ds = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f\left[x(\tau_k), y(\tau_k)\right]\Delta s_k. \tag{4}$$

Якщо $\int\limits_{AB} f(x,y)\,ds$ існує, то функцію $f(x,y)$ називають інтегровною на кривій AB.

Інтегральна сума σ є звичайною інтегральною сумою для функції $f\left[x(s), y(s)\right]$ від однієї змінної s на відрізку $[0;S]$. Тому якщо існує визначений $\int\limits_0^S f\left[x(s), y(s)\right]ds$, то існує й криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} f(x,y)\,ds$, причому

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,ds = \int\limits_0^S f\left[x(s), y(s)\right]ds. \tag{5}$$

Зокрема, рівність (5) справджується для функції $f\left[x(s), y(s)\right]$, неперервної на відрізку $[0;S]$. І тоді, коли функція $f(x,y)$, розглядувана як функція від двох змінних x і y, неперервна на кривій AB, криволінійний інтеграл першого роду існує. Формула (5) проте є не зовсім зручною для обчислення криволінійного інтеграла, бо не завжди легко знайти рівняння кривої у вигляді $x = x(s)$, $y = y(s)$, де s – довжина дуги.

Нехай рівняння кривої AB задано у вигляді

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha;\beta],$$

де t – довільний параметр, початок кривої – точка $A\left[x(\alpha), y(\alpha)\right]$, кінець – точка $B\left[x(\beta), y(\beta)\right]$. Припустимо, що функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервні разом із своїми похідними першого порядку на відрізку $[\alpha;\beta]$ і функція $f\left[x(t), y(t)\right]$ неперервна на відрізку $[\alpha;\beta]$. Тоді крива AB є спрямлювана і довжина S її дуги AM, де M – довільна точка кривої AB, обчислюється за формулою

$$S(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)}\,d\tau\ . \tag{6}$$

Звідси

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt\,. \tag{7}$$

З формули (5), приймаючи довжину дуги за параметр, одержуємо

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\left[x(t), y(t)\right]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt\,. \tag{8}$$

Зокрема, якщо криву AB задано в декартових координатах рівнянням $y = y(x)$, $a \le x \le b$, де функція $y(x)$ неперервна разом із своєю похідною $y'(x)$ на відрізку $[a;b]$, то формула (8) набирає вигляду

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_{a}^{b} f\left[x, y(x)\right]\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx\,; \tag{9}$$

якщо криву AB задано рівнянням $x = x(y)$, $c \le y \le d$, де функція $x(y)$ неперервна разом з похідною $x'(y)$ на відрізку $[c;d]$, то

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_{c}^{d} f\left[x(y), y\right]\sqrt{1 + x'^2(y)}\,dy\,. \tag{10}$$

Криву AB (криву інтегрування) часто позначають однією буквою, наприклад L.

З усього розглянутого вище бачимо, що дійсно у кінцевому підсумку обчислення криволінійних інтегралів першого роду зводиться до обчислення звичайних, так би мовити, інтегралів при застосуванні вже відомих прийомів і методів.

Властивості криволінійних інтегралів першого роду

Як і слід було чекати, криволінійні інтеграли першого роду мають властивості, які аналогічні властивостям визначених інтегралів, а справедливість їх випливає безпосередньо із формули (5), що зводить криволінійний інтеграл до визначеного.

Викладемо ці основні властивості.

1. Якщо функція $f(x,y)$ інтегровна на кривій AB, то інтегровною на цій кривій є й функція $Cf(x,y)$, де C – const, і виконується рівність

$$\int_{AB} Cf(x,y)\,ds = C\int_{AB} f(x,y)\,ds.$$

2. Якщо функції $f(x,y)$ та $\varphi(x,y)$ інтегровні на кривій AB, то функції $f(x,y)\pm\varphi(x,y)$ також інтегровні на цій кривій і

$$\int_{AB}\left[f(x,y)\pm\varphi(x,y)\right]ds = \int_{AB} f(x,y)\,ds \pm \int_{AB}\varphi(x,y)\,ds.$$

3. Якщо $f(x,y)$ невід’ємна інтегровна функція на кривій AB, то

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds \geq 0.$$

4. Якщо $f(x,y)\geq\varphi(x,y)$, $(x;y)\in AB$ і кожна з функцій $f(x,y)$ і $\varphi(x,y)$ інтегровна на кривій AB, то

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds \geq \int_{AB}\varphi(x,y)\,ds.$$

5. Якщо крива AB складається з двох кривих AC та CB і функція $f(x,y)$ інтегровна на кожній з кривих AC і CB, то функція $f(x,y)$ інтегровна на кривій AB, причому

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_{AC} f(x,y)\,ds + \int_{CB} f(x,y)\,ds.$$

6. Якщо функція $f(x,y)$ інтегровна на кривій AB, то функція $\left|f(x,y)\right|$ також інтегрована на цій кривій і

$$\left|\int_{AB} f(x,y)\,ds\right| \leq \int_{AB}\left|f(x,y)\right|ds.$$

7. **Теорема про середнє значення.** Якщо функція $f(x,y)$ неперервна на кривій AB, то на цій кривій знайдеться така точка $(\bar{x};\bar{y})$, що

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = f(\bar{x};\bar{y})S,$$

де S – довжина кривої AB.

Застосування криволінійних інтегралів першого роду

І такі інтеграли мають своє досить різноманітне застосування, як і було обіцяно раніше, що і підтверджує практичну необхідність їх виникнення.

Маса матеріальної кривої. Рівність (2) надає можливість обчислювати масу m матеріальної кривої AB з лінійною густиною $\gamma = \gamma(x,y)$, де функція $\gamma(x,y)$ неперервна на кривій AB:

$$m = \int_{AB} \gamma(x,y)\,ds. \tag{11}$$

Центр маси матеріальної кривої. Вздовж матеріальної кривої AB нехай розподілено масу з лінійною густиною $\gamma = \gamma(x,y)$.

Рівняння кривої AB нехай має вигляд

$$x = x(s),\ y = y(s),\ 0 \le s \le S,$$

де s – довжина дуги, що сполучає початкову точку A кривої з довільною її точкою. Замість функції $\gamma(x,y)$ дістанемо функцію $\gamma\left[x(s),y(s)\right]$ від однієї змінної s. Припускаємо, що функція $\gamma\left[x(s),y(s)\right]$ неперервна на відрізку $[0;S]$.

Розглянемо T=розбиття відрізка $[0;S]$:

$$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_k < s_{k+1} < \ldots < s_{n-1} < s_n = S.$$

Точки $A_k\left[x(s_k);y(s_k)\right]$ розіб'ють криву AB на n дуг A_kA_{k+1}, $k = 0,1,\ldots,n-1$. На кожній дузі A_kA_{k+1} вибираємо довільну точку $P_k(x_k;y_k)$, $x_k = x(\tau_k)$, $y_k = y(\tau_k)$, $\tau_k \in [s_k;s_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots,n-1$. Якщо припустити, що густина в кожній точці дуги A_kA_{k+1} стала і дорівнює $\gamma(x_k;y_k)$, а маса дуги A_kA_{k+1} зосереджена в точці $P_k(x_k;y_k)$, то задану криву можна наближено замінити системою n матеріальних точок P_k з масами $\gamma(x_k,y_k)\Delta s_k$, де $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$. Координати центра маси $\bar{x}$ та $\bar{y}$ такої системи матеріальних точок обчислюються за формулами

$$\overline{x}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k\gamma(x_k,y_k)\Delta s_k}{\sum_{k=0}^{n-1}\gamma(x_k,y_k)\Delta s_k}, \quad \overline{y}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1} y_k\gamma(x_k,y_k)\Delta s_k}{\sum_{k=0}^{n-1}\gamma(x_k,y_k)\Delta s_k}. \qquad (12)$$

Щоб одержати координати центра маси $\overline{x}$ та $\overline{y}$ кривої AB, слід у формулах (12) перейти до границі при $\lambda(T)=\max\Delta s_k\to 0$.

Остаточно маємо

$$\overline{x}=\frac{\int_{AB} x\gamma(x,y)\,ds}{\int_{AB}\gamma(x,y)\,ds}, \quad \overline{y}=\frac{\int_{AB} y\gamma(x,y)\,ds}{\int_{AB}\gamma(x,y)\,ds}. \qquad (13)$$

Якщо матеріальна крива AB однорідна, $\gamma=const$, то

$$\overline{x}=\frac{\int_{AB} x\,ds}{\int_{AB} ds}, \quad \overline{y}=\frac{\int_{AB} y\,ds}{\int_{AB} ds}. \qquad (14)$$

При розгляді «звичайних» визначених інтегралів ми вже одержали формули для обчислення координат центра маси однорідної матеріальної кривої. Користуючись формулою (9) уже цього розгляду можна перевірити, що формули (14) співпадають із тими, одержаними раніше.

Момент інерції матеріальної кривої. Для системи матеріальних точок з масами m_k, $k=1,2,...,n$ відносно деякої прямої момент інерції визначають за формулою

$$I=\sum_{k=1}^{n} r_k^2 m_k ,$$

де r_k – відстані точок від цієї прямої. Зокрема, моменти інерції системи n матеріальних точок $P_k(x_k;y_k)$ з масами m_k, $k=1,2,...,n$, розміщених у площині Oxy, відносно координатних осей Ox та Oy відповідно мають вигляд

$$I_x=\sum_{k=1}^{n} y_k^2 m_k , \quad I_y=\sum_{k=1}^{n} x_k^2 m_k .$$

Щоб знайти момент інерції матеріальної кривої AB, вздовж якої розподілено масу з лінійною густиною $\gamma=\gamma(x,y)$, де $\gamma(x,y)$ – неперервна функція на кривій AB, треба провести міркування, подібні до тих, які ми проводили у попередній задачі. Тоді формули моментів інерції кривої AB відносно координатних осей Ox та Oy відповідно запишуться так:

$$I_x = \int\limits_{AB} y^2\gamma(x,y)\,ds, \quad I_y = \int\limits_{AB} x^2\gamma(x,y)\,ds. \tag{15}$$

Криволінійні інтеграли першого роду для просторових кривих. Розглянуте раніше поняття криволінійного інтеграла першого роду для плоскої кривої AB можна без особливих зусиль перенести на випадок просторових кривих. Міркування при цьому будуть аналогічними.

Функція $f(x,y,z)$ нехай визначена та неперервна на просторовій кривій AB, яку задано рівняннями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [\alpha, \beta],$$

де функції $x(t),\ y(t),\ z(t)$ неперервні разом із похідними першого порядку на відрізку $[\alpha;\beta]$. У такому разі існує криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,ds$,

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[x(t),y(t),z(t)\right]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt. \tag{16}$$

Також зрозуміло, що криволінійні інтеграли першого роду для просторових кривих застосовуються при обчисленні маси просторової матеріальної кривої, її координат центра маси, моментів інерції. Відповідні формули можна одержати за допомогою міркувань, аналогічних наведеним вище для плоскої кривої.

Наприклад, третю координату центра маси просторової матеріальної кривої одержують за формулою

$$\bar{z} = \frac{\int\limits_{\alpha}^{\beta} z(t)\gamma\left[x(t),y(t),z(t)\right]ds}{\int\limits_{\alpha}^{\beta} \gamma\left[x(t),y(t),z(t)\right]ds}, \text{ де } ds = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

Для кращого усвідомлення поданого матеріалу варто розглянути наведені далі приклади.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_{L} \frac{ds}{x-y}$, де L – відрізок прямої від точки $A(0;-2)$ до точки $B(4;0)$.

Спочатку треба записати рівняння нашої прямої. Згадуємо, наприклад, рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$.

Величини k і b знаходимо при підстановці у це рівняння координат відомих точок прямої. Одержуємо

$$-2 = k\cdot 0 + b,\ \ 0 = k\cdot 4 + b, \text{ а звідси } b = -2,\ \ k = \frac{1}{2}.$$

Пряма AB має рівняння $y = \frac{1}{2}x - 2$. Далі $ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$. У нас $y' = \frac{1}{2}$. Обчислення даного криволінійного інтеграла зводиться до обчислення так званого звичайного визначеного інтеграла.

$$\int\limits_L \frac{ds}{x-y} = \int\limits_0^4 \frac{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{x-\left(\frac{1}{2}x-2\right)}dx = \int\limits_0^4 \frac{\frac{1}{2}\sqrt{5}}{\frac{1}{2}x+2}dx = \sqrt{5}\int\limits_0^4 \frac{dx}{x+4} = \sqrt{5}\ln|x+4|\Big|_0^4 =$$

$$= \sqrt{5}\left[\ln 8 - \ln 4\right] = \sqrt{5}\ln 2.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int\limits_L y\,ds$, де L – дуга параболи $y^2 = x$, що відтинається параболою $x^2 = y$.

Це, так би мовити, прості параболи: вершини їх знаходяться в початку координат, перша з них симетрична відносно осі Ox, друга – відносно осі Oy. Знайдемо точки перетину цих парабол

$$\begin{cases} y^2 = x & \left(x^2\right)^2 = x;\ \ x^4 = x; \quad \text{Скорочувати на } x \text{ не маємо права! Чому? Подумай.} \\ x^2 = y & x^4 - x = 0;\ x\left(x^3-1\right) = 0;\ x(x-1)\left(x^2+x+1\right) = 0;\ x_1 = 0;\ \ x_2 = 1;\ x_3, x_4 \text{ - ком-} \end{cases}$$

плексні числа.

Ми знаходимося в дійсній області, тому приймаємо лише $x_1 = 0$ і $x_2 = 1$. Відповідно $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, параболи перетинаються в точках $O(0;0)$ та $A(1;1)$. Ми йдемо по параболі $y^2 = x$. Звідси $y = \pm\sqrt{x}$. Нашою є верхня частина цієї параболи і вона має рівняння $y = \sqrt{x}$, звідки $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Маємо

$$\int\limits_L y\,ds = \int\limits_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx = \int\limits_0^1 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (4x+1)^{1/2}dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_0^1 (4x+1)^{1/2}d(4x+1) = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(4x+1)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}\left(5^{3/2}-1\right).$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \frac{y^3}{x}ds$, де L – дуга параболи $y^2 = 2x$ від точки $O(0;0)$ до точки $A\left(4;2\sqrt{2}\right)$.

Цей приклад розглянемо якраз для того, щоб продемонструвати іншу модифікацію формули і процесу обчислення. Тут зручно взяти за аргумент саме y, а за функцію – x. Рівняння кривої L задамо у вигляді $x = \frac{1}{2}y^2$. Тоді $x' = y$ і за модифікованою формулою одержуємо

$$\int\limits_L \frac{y^3}{x}ds = \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \frac{y^3}{\frac{1}{2}y^2}\sqrt{1+y^2}\,dy = 2\int\limits_0^{2\sqrt{2}} y\sqrt{1+y^2}\,dy = \int\limits_0^{2\sqrt{2}}\left(1+y^2\right)^{1/2} d\left(1+y^2\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(1+y^2\right)^{3/2}\Bigg|_0^{2\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\left[(1+8)^{3/2} - 1\right] = \frac{52}{3}.$$

Корисно наголосити, що діяли ми за формулою (10).

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int\limits_L\left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)ds$ між точками $A(-1;0)$ і $B(0;1)$ по дузі астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

Астроїда – одна із найзнаменитіших кривих, її графік можна бачити в деяких попередніх частинах «Особистого довідника…».

Крива, як бачимо, задана параметрично, тому використаємо формулу (8).

$x = \cos^3 t$; $x' = 3\cos^2 t(-\sin t)$; $y = \sin^3 t$; $y' = 3\sin^2 t \cdot \cos t$;

$$ds = \sqrt{\left(-3\cos^2 t\sin t\right)^2 + \left(3\sin^2 t\cos t\right)^2}\,dt = \sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 3\sin t\cos t\,dt;$$

$$\int\limits_L\left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)ds = \int\limits_\pi^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos t - 3\sqrt{\sin^3 t}\right)3\sin t\cos t\,dt =$$

$$= -12\int\limits_\pi^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,d(\cos t) - 9\int\limits_\pi^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{5}{2}} t\,d(\sin t) = -4\cos^3 t\Bigg|_\pi^{\frac{\pi}{2}} - \frac{18}{7}\sin^{\frac{7}{2}} t\Bigg|_\pi^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -4\left(\cos^3\frac{\pi}{2} - \cos^3\pi\right) - \frac{18}{7}\left(\sin^{\frac{7}{2}}\frac{\pi}{2} - \sin^{\frac{7}{2}}\pi\right) = -4(0+1) - \frac{18}{7}(1-0) = -\frac{46}{7}.$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, де L – контур кола $x^2+y^2=ax$.

Тут буде доцільно ввести полярні координати. В теоретичній частині розгляду криволінійних інтегралів першого роду ми такий (досить рідкісний) випадок не висвітлювали, але зможемо без особливих зусиль справитися з поставленим завданням, якщо згадаємо все необхідне про полярні координати.

Рівняння лінії в полярних координатах $\rho=\rho(\varphi)$. Формули переходу від декартової системи координат до полярної і навпаки:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi;\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}.$$

Знайдемо рівняння нашого кола в полярних координатах:

$$x^2+y^2=ax;\quad \rho^2=a\rho\cos\varphi;\quad \rho=a\cos\varphi.$$

Елемент $ds=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi=\sqrt{(a\cos\varphi)^2+(-a\sin\varphi)^2}\,d\varphi=a\,d\varphi$.

Коло $x^2+y^2=ax$ знаходиться в четвертому і першому квадрантах, воно ділиться пополам віссю Ox, а вісь Oy є дотичною до нього в початку координат, тому $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Отже,

$$\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho\,a\,d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos\varphi\,a\,d\varphi=a^2\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=a^2\left[1-(-1)\right]=2a^2.$$

Приклад 6. Знайти масу ділянки лінії $y=\ln x$ між точками з абсцисами $x_1=1$ і $x_2=3$, якщо густина лінії в кожній точці дорівнює квадрату абсциси точки.

Тут вже доведеться застосувати криволінійний інтеграл першого роду з конкретно практичною метою. Для цього використаємо формулу (11).

Якщо крива має рівняння $y=\ln x$, то звідси $y'=\frac{1}{x}$, густина $\gamma=x^2$. Отже,

$$m=\int\limits_1^3 x^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx=\int\limits_1^3 x\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^3\left(x^2+1\right)^{1/2}d\left(x^2+1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2}\Big|_1^3=$$

$$=\frac{1}{3}\left[10^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right]\text{ (од. маси).}$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \left(2z - \sqrt{x^2+y^2}\right)ds$, де L – дуга кривої $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$; $0 \le t \le 2\pi$.

Маємо просторову криву і будемо діяти за формулою (16).

Тут елемент

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1^2}\,dt = \sqrt{2+t^2}\,dt.$$

Сам інтеграл

$$\int\limits_L \left(2z - \sqrt{x^2+y^2}\right)ds = \int\limits_0^{2\pi}\left(2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\right)\sqrt{2+t^2}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2+t^2\right)^{3/2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\left[\left(2+4\pi^2\right)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right] = \frac{2}{3}\sqrt{2}\left[\left(1+2\pi^2\right)^{3/2} - 1\right].$$

КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ ДРУГОГО РОДУ

Задача про роботу змінної сили на криволінійному шляху.

При переміщенні матеріальної точки вздовж прямолінійного шляху під дією сталої сили робота визначається як скалярний добуток вектора сили на вектор шляху, тобто за формулою

$$W = \overline{F} \cdot \overline{S}. \tag{17}$$

У більш загальній задачі матеріальна точка $M(x;y)$ під дією сили $\overline{F}$ рухається в площині Oxy вздовж кривої L, причому сила вважається змінною, залежною від положення точки M на кривій. Треба обчислити роботу сили $\overline{F}$ при переміщенні точки M з точки A в точку B кривої. Орієнтуватися при цьому будемо на рис. 1, додатково з'єднавши точки поділу кривої відрізками (хордами).

Припустимо, що на кожному відрізку M_kM_{k+1} сила $\overline{F}$ стала і дорівнює її значенню в довільній точці цього відрізка, наприклад, в точці M_k. Тоді роботу сили на кожному відрізку M_kM_{k+1} можна обчислити за формулою (17), тобто

$$W_k = \overline{F}(M_k) \cdot \overline{M_kM_{k+1}}.$$

Точка M_k має координати x_k і y_k. Згадуємо вектори та дії з ними. У нас

$$\overline{F}(M_k) = P(M_k)\,\overline{i} + Q(M_k)\,\overline{j}, \quad \overline{M_kM_{k+1}} = \Delta x_k\,\overline{i} + \Delta y_k\,\overline{j},$$

де $\overline{i}, \overline{j}$ – орти, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, а робота

$$W_k = P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k.$$

Тоді робота вздовж усієї ламаної, вписаної в криву $\overset{\frown}{AB}$, дорівнює

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k .$$

Границю цієї суми при $\lambda(T) = \max\left|\overline{M_k M_{k+1}}\right| \to 0$ (якщо вона існує) приймають за роботу сили $\overline{F} = P(x,y)\bar{i} + Q(x,y)\bar{j}$ вздовж кривої AB, тобто

$$W = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k . \qquad (18)$$

Поняття криволінійного інтеграла другого роду, його існування та обчислення. У площині Oxy задано неперервну спрямлювану (границя вписаної ламаної існує) криву AB

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha;\beta],$$

де $A\left[x(\alpha);y(\alpha)\right]$, $B\left[x(\beta);y(\beta)\right]$ – початкова та кінцева точки кривої.

Нехай на цій кривій визначено функцію $P(x,y)$.

Виконуємо T-розбиття відрізка $[\alpha;\beta]$:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta .$$

На кожному відрізку $[t_k;t_{k+1}]$ візьмемо довільну точку τ_k і складемо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k , \qquad (19)$$

де $\xi_k = x(\tau_k)$, $\eta_k = y(\tau_k)$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $x_k = x(t_k)$, $x_{k+1} = x(t_{k+1})$.

Суму (19) називають інтегральною сумою.

Позначимо $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $\lambda(T) = \max \Delta t_k$, $k = 0,1,\ldots,n-1$.

Означення 1. Число I називають границею інтегральних сум (19) при $\lambda(T)\to 0$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що нерівність $|I - \sigma| < \varepsilon$ виконується для кожного T-розбиття відрізка $[\alpha;\beta]$ і кожного вибору точок $\tau_k \in [t_k;t_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, як тільки $\lambda(T) < \delta$.

Означення 2. Якщо при $\lambda(T)\to 0$ інтегральні суми (19) мають границею число I, то це число називають криволінійним інтегралом від функції $P(x,y)$ по абсцисі x вздовж кривої AB і позначають $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx$.

Таким чином,

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k\,. \qquad (20)$$

Аналогічно вводиться поняття криволінійного інтеграла за ординатою y, який позначається

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\,. \qquad (21)$$

Загальний вигляд криволінійного інтеграла другого роду такий:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\,. \qquad (22)$$

Цей інтеграл є сумою інтегралів $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx$ та $\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy$, кожен з яких існує.

Повернемося до задачі про роботу змінної сили $\overline{F} = P(x,y)\overline{i} + Q(x,y)\overline{j}$ на криволінійному шляху. Якщо границя в формулі (18) існує, то дістанемо формулу для обчислення такої роботи

$$W = \int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\,. \qquad (23)$$

Формула (23) виражає механічний зміст криволінійного інтеграла другого роду. Обчислення і таких інтегралів зводиться до обчислення звичайних визначених інтегралів.

Якщо криву AB задано параметричним рівнянням $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left\{ P\left[x(t),y(t)\right]x'(t) + Q\left[x(t),y(t)\right]y'(t) \right\} dt\,. \qquad (24)$$

Якщо криву AB задано рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} \left\{ P\left[x,y(x)\right] + Q\left[x,y(x)\right]y'(x) \right\} dx\,. \qquad (25)$$

Якщо криву AB задано рівнянням $x = x(y)$, $y \in [c,d]$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{c}^{d} \left\{ P\left[x(y),y\right]x'(y) + Q\left[x(y),y\right] \right\} dy\,. \qquad (26)$$

Властивості криволінійних інтегралів другого роду

1. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$,

   тобто при зміні напряму шляху інтегрування на протилежний криволінійний інтеграл змінює знак.

2. $\int\limits_{AB} C\left[P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right] = C\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, C – $const$.

3. $\int\limits_{AB} \left[P_1(x,y) \pm P_2(x,y)\right]dx + \left[Q_1(x,y) \pm Q_2(x,y)\right]dy = \int\limits_{AB} P_1(x,y)dx + Q_1(x,y)dy \pm$

   $\pm \int\limits_{AB} P_2(x,y)dx + Q_2(x,y)dy$.

4. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{CB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$,

   $C \in AB$.

Якщо контур інтегрування замкнений і не має точок самоперетину, то для нього можна вказати тільки два напрями обходу: проти стрілки годинника (додатна орієнтація) та за стрілкою годинника (від’ємна орієнтація).

Криволінійні інтеграли другого роду вздовж просторових кривих

Нехай криву AB задано рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\ t \in [\alpha;\beta]$, де функції $x(t), y(t), z(t)$ неперервні разом із похідними 1-го порядку на відрізку $[\alpha;\beta]$.

Нехай функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ визначені та неперервні на кривій AB. Тоді існує криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left\{P\left[x(t),y(t),z(t)\right]x'(t) + Q\left[x(t),y(t),z(t)\right]y'(t) + R\left[x(t),y(t),z(t)\right]z'(t)\right\}dt \qquad (27)$$

Властивості криволінійних інтегралів для плоских кривих переносяться і на просторові криві.

Повернемося до плоских замкнених кривих. Нехай замкнений контур L обмежує замкнену область D. Нехай у цій області задані неперервні функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$, які мають у ній неперервні частинні похідні. Тоді справедлива формула Гріна

$$\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy=\oint_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy, \tag{28}$$

де обхід по контуру L здійснюється у додатному напрямі, а маленьке коло на знакові інтеграла означає замкнутість контуру. Варто ще нагадати, що функції кількох змінних та подвійні інтеграли детально розглядалися у шостій та сьомій частинах «Особистого довідника…» відповідно.

Формула (28) дає можливість підмінити обчислення криволінійного інтеграла, якщо воно довге і громіздке, обчисленням подвійного і навпаки. Вибираємо за обставинами – результат має бути один і той же.

Площу області D, обмеженої замкненим контуром L, можна обчислити за формулою

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx, \tag{29}$$

де обхід контура L теж виконується проти стрілки годинника.

Бувають випадки, коли результат обчислення криволінійного інтеграла другого роду не залежить від шляху інтегрування, а залежить лише від початкової та кінцевої точок цього шляху. Із двох серйозних теорем випливає, що такі випадки мають місце за умови, коли

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{30}$$

Зрозуміло, що у таких випадках шлях інтегрування вибирають найпростіший, найвигідніший, від точки A до точки B йдуть, наприклад, спочатку паралельно осі Ox, а потім – паралельно осі Oy.

Приклад 8. Обчислити інтеграл $\int_L x\cos y dx+y\sin x dy$, де L – відрізок, що з’єднує точки $O(0;0)$ і $A(\pi;2\pi)$.

Спочатку визначимо шлях інтегрування OA. Легко бачити, що рівняння OA буде $y=2x$ ($y=kx$, $k=\frac{2\pi}{\pi}=2$). Звідси $dy=2dx$.

$$\int_L x\cos y dx+y\sin x dy=\int_0^{\pi} x\cos 2x dx+2x\sin x 2dx=\int_0^{\pi} x\left(-\cos 2x+4\sin x\right)dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} u=x \\ dv=\left(-\cos 2x+4\sin x\right)dx \end{array}\right.\left|\begin{array}{l} du=dx \\ v=-\frac{1}{2}\sin 2x-4\cos x \end{array}\right\}=x\left(-\frac{1}{2}\sin 2x-4\cos x\right)\Big|_0^{\pi}+$$

$$+\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+4\cos x\right)dx=x\left(-\frac{1}{2}\sin 2x-4\cos x\right)\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\pi}+4\sin x\Big|_0^{\pi}=4\pi.$$

Приклад 9. Сила $\overline{F}=xy\bar{i}+(x+y)\bar{j}$ переміщує точку маси m із початку координат в точку $A(1;1)$ по параболі $y=x^3$. Обчислити роботу.

За формулою (23) визначаємо роботу

$$W=\int_L xydx+(x+y)dy=\int_0^1 x\cdot x^3dx+\left(x+x^3\right)3x^2dx=\int_0^1\left(x^4+3x^3+3x^5\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{5}x^5+\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}x^6\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{5}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{29}{20}=1{,}45 \text{ (од. роб.).}$$

Приклад 10. Обчислити інтеграл $\int_L xdx+ydy+(x+y-1)dz$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1;1;1)$ і $B(2;3;4)$.

Спочатку згадуємо рівняння прямої, що проходить через дві точки.

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-1}{4-1};\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}(=t), \text{ або } x=t+1,\ y=2t+1,\ z=3t+1.$$

При переміщенні від точки A до точки B параметр t змінюється від 0 до 1; за формулою (27) маємо

$$\int_L xdx+ydy+(x+y-1)dz=\int_0^1(t+1)dt+(2t+1)2dt+(t+1+2t+1-1)3dt=$$

$$=\int_0^1(14t+6)dt=\left(7t^2+6t\right)\Big|_0^1=7+6=13.$$

Приклад 11. Обчислити інтеграл $\oint_L\left(1-x^2\right)ydx+x\left(1+y^2\right)dy$, де L – коло $x^2+y^2=R^2$. Обчислення провести двома способами: 1) безпосередньо, 2) за допомогою формули Гріна.

1. L – коло $x^2+y^2=R^2$, звідки $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$, де $y=\sqrt{R^2-x^2}$ – рівняння верхньої половини кола, а $y=-\sqrt{R^2-x^2}$ – нижньої. Якщо $y=\sqrt{R^2-x^2}$, то $dy=-\dfrac{xdx}{\sqrt{R^2-x^2}}$, якщо $y=-\sqrt{R^2-x^2}$, то $dy=\dfrac{xdx}{\sqrt{R^2-x^2}}$.

$$\oint_L\left(1-x^2\right)ydx+x\left(1+y^2\right)dy=\int_R^{-R}\left(1-x^2\right)\sqrt{R^2-x^2}dx+x\left(1+R^2-x^2\right)\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)dx+$$

$$+\int_{-R}^{R}\left(1-x^2\right)\left(-\sqrt{R^2-x^2}\right)dx+x\left(1+R^2-x^2\right)\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=$$

$$=2\int_{R}^{-R}\sqrt{R^2-x^2}dx-2\int_{R}^{-R}x^2\sqrt{R^2-x^2}dx-2\int_{R}^{-R}\frac{x^2dx}{\sqrt{R^2-x^2}}-2\int_{R}^{-R}x^2\sqrt{R^2-x^2}dx=$$

$$=2\int_{R}^{-R}\sqrt{R^2-x^2}dx+2\int_{R}^{-R}\frac{\left(R^2-x^2\right)-R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}dx-4\int_{R}^{-R}x^2\sqrt{R^2-x^2}dx=4\int_{R}^{-R}\sqrt{R^2-x^2}dx-$$

$$-2R^2\int_{R}^{-R}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}-4\int_{R}^{-R}x^2\sqrt{R^2-x^2}dx.$$

Обчислимо кожний з інтегралів окремо.

$$\int_{R}^{-R}\sqrt{R^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}\Bigg|_{R}^{-R}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}\Bigg|_{R}^{-R}=\frac{R^2}{2}\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}R^2\pi\ ;$$

$$\int_{R}^{-R}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{R}\Bigg|_{R}^{-R}=-\pi\ ;\quad \int_{R}^{-R}x^2\sqrt{R^2-x^2}dx=\left\{\begin{array}{l} x=R\sin t;\quad dx=R\cos t dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & R & -R \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \end{array} \end{array}\right\}=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}R^2\sin^2 tR\cos tR\cos tdt=\frac{1}{4}R^4\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=\frac{1}{8}R^4\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 4t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{8}R^4t\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{32}R^4\sin 4t\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{8}R^4\pi\ .$$

Остаточно маємо

$$\oint_L\left(1-x^2\right)ydx+x\left(1+y^2\right)dy=4\left(-\frac{1}{2}R^2\pi\right)-2R^2\left(-\pi\right)-4\left(-\frac{1}{8}R^4\pi\right)=\frac{1}{2}R^4\pi\ .$$

Значно простіше все буде, якщо рівняння кола записати в параметричній формі: $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $t\in[0;2\pi]$.

$$\oint_L\left(1-x^2\right)ydx+x\left(1+y^2\right)dy=$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\left(1-R^2\cos^2 t\right)R\sin t\left(-R\sin t\right)dt+R\cos t\left(1+R^2\sin^2 t\right)R\cos tdt=$$

$$=R^2\int_0^{2\pi}\left[\left(1-R^2\cos^2 t\right)\left(-\sin^2 t\right)+\left(1+R^2\sin^2 t\right)\cos^2 t\right]dt=R^2\int_0^{2\pi}\left[\cos 2t+\frac{1}{2}R^2\sin^2 2t\right]dt=$$

$$=R^2\int_0^{2\pi}\left[\cos 2t+\frac{1}{4}R^2-\frac{1}{4}R^2\cos 4t\right]dt=\frac{1}{2}R^2\sin 2t\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{4}R^4 t\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{16}R^4\sin 4t\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{2}R^4\pi .$$

2. У нас $P(x,y)=\left(1-x^2\right)y$, а $Q(x,y)=x\left(1+y^2\right)$, звідки $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1+y^2$, а $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1-x^2$, тому за формулою (28) та в полярних координатах

$$\oint_L\left(1-x^2\right)ydx+x\left(1+y^2\right)dy=\iint_D\left[\left(1+y^2\right)-\left(1-x^2\right)\right]dxdy=\iint_D\left(y^2+x^2\right)dxdy=$$

$$=\iint_D\rho^2\rho\, d\rho\, d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho^3 d\rho=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^R\right]d\varphi=\frac{1}{4}R^4\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{2}R^4\pi .$$

У цьому прикладі переваги застосування формули Гріна проявились особливо відчутно.

Приклад 12. Знайти площу фігури, обмеженої астроїдою $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

У попередніх частинах «Особистого довідника…» цю площу ми обчислювали, астроїду викреслювали, тому зможемо порівнювати застосування звичайного визначеного інтеграла, подвійного інтеграла, а також криволінійного інтеграла другого роду.

За формулою (29)

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t dt-a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\left(-\sin t\right)dt=$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t dt=\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t dt=\frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos 4t\right)dt=$$

$$=\frac{3}{16}a^2 t\Big|_0^{2\pi}-\frac{3}{64}a^2\sin 4t\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{8}a^2\pi \text{ (од. пл.).}$$

Результат, як бачимо, все той же.

Приклад 13. Обчислити інтеграл $\int_{AB}\left(x^3-y^3\right)dx-3xy^2dy$ по кривій, що сполучає точки $A(1;2)$ і $B(0;1)$.

Шлях інтегрування тут не вказано, тому є підозра, що результат обчислення і не залежить від форми шляху, а залежить лише від початкової та кінцевої точок.

Таке має місце при виконанні умови $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

У нас $P(x,y)=x^3-y^3$, $Q(x,y)=-3xy^2$, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-3y^2$.

Спочатку виберемо простий шлях інтегрування – пряму, що проходить через точки A і B, її рівняння $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{-1}$ або $y=x+1$.

Отже,

$$\int\limits_{AB}\left(x^3-y^3\right)dx-3xy^2dy=\int\limits_1^0\left[x^3-(x+1)^3-3x(x+1)^2\right]dx=$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}(x+1)^4-\frac{3}{4}x^4-2x^3-\frac{3}{2}x^2\right]\Bigg|_1^0=\frac{31}{4}.$$

А зараз візьмемо за шлях інтегрування ламану ACB, де точка $C(0;2)$ лежить на осі Oy, тобто спочатку йдемо паралельно осі Ox до осі Oy, а потім по осі Oy спускаємося вниз від точки C до точки B. Рівняння AC: $y=2$, $dy=0$ на AC. На CB $dx=0$.

$$\int\limits_{ACB}\left(x^3-y^3\right)dx-3xy^2dy=\int\limits_{AC}\left(x^3-y^3\right)dx-3xy^2dy+\int\limits_{CB}\left(x^3-y^3\right)dx-3xy^2dy=$$

$$=\int\limits_1^0\left(x^3-2^3\right)dx-3x\cdot 2^2\cdot 0+\int\limits_2^1\left(0^3-y^3\right)\cdot 0-3\cdot 0\cdot y^2dy=\frac{1}{4}x^4\Bigg|_1^0-8x\Bigg|_1^0=\frac{1}{4}(0-1)-8(0-1)=\frac{31}{4}.$$

Результат обчислення, як слід було чекати, виявився таким же.

Криволінійний інтеграл другого роду можна з користю застосувати ще й у знаходженні функції за її повним диференціалом.

Якщо відомий повний диференціал функції двох змінних $dU=Pdx+Qdy$, де $P'_y=Q'_x$, то її можна знайти, інтегруючи dU по будь-якій лінії між довільною фіксованою точкою $A(x_0;y_0)$ і змінною точкою $M(x;y)$. За лінію інтегрування прийнято брати ламану AKM з ланками, паралельними осям координат. При цьому функцію U можна одержати, наприклад, за формулою

$$U=\int\limits_{AM}dU+C=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C. \qquad (31)$$

Приклад 14. Перевірити, що даний вираз є повним диференціалом функції $U(x,y)$, знайти $U(x,y)$; $\left(2x-3y^2+1\right)dx+\left(2-6xy\right)dy$.

У нас $P=\left(2x-3y^2+1\right)$, $Q=2-6xy$, $P'_y=-6y$, $Q'_x=-6y$.

Оскільки тут $P'_y=Q'_x$, а P,Q,P'_y,Q'_x – неперервні, то даний вираз є повним диференціалом деякої функції U.

Знайдемо цю функцію, вибравши точку A в початку координат $O(0;0)$, йдучи по осі Ox до точки $K(x;0)$, а потім – паралельно осі Oy до точки $M(x;y)$. Застосуємо формулу (31).

Отже,

$$U=\int_0^x(2x+1)dx+\int_0^y(2-6xy)dy+C=x^2+x+2y-3xy^2+C.$$

Правильність одержаного результату легко перевірити. Повний диференціал функції U буде $dU=U'_xdx+U'_ydy=\left(2x+1-3y^2\right)dx+\left(2-6xy\right)dy$, тобто одержали даний в умові вираз.

ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ПЕРШОГО РОДУ

Функції можуть бути визначені на деякій поверхні. Такими функціями є, наприклад, швидкість рідини, що протікає через задану поверхню, густина розподілу електричних зарядів на поверхні провідника, освітленість поверхні і т.д. Необхідність розв’язувати деякі фізичні, зокрема, задачі і покликала до життя так звані поверхневі інтеграли.

Поняття поверхневого інтеграла першого роду, його існування та обчислення. Криволінійні інтеграли, згадуємо, є узагальненням звичайних визначених інтегралів. Аналогічно поверхневі інтеграли є узагальненням подвійних інтегралів.

Розглянемо поверхню S, замкнену або незамкнену. Нехай у кожній точці поверхні існує дотична площина, положення якої неперервно змінюється разом із точкою дотику. Таку поверхню називають гладкою. Якщо ж поверхня складається із скінченного числа гладких поверхонь, то вона називається кусково-гладкою.

Нехай у точках гладкої або кусково-гладкої поверхні S визначена деяка обмежена функція $f(x,y,z)$. Розіб’ємо поверхню S за допомогою сітки довільно проведених кусково-гладких кривих на n частин S_k, $k=0,1,\ldots,n-1$ без спільних внутрішніх точок (T-розбиття).

Нехай площа S_k дорівнює Δs_k, а $d_k=\operatorname{diam}S_k$. У кожній частині S_k вибираємо довільну точку $P_k(x_k;y_k;z_k)$. Складемо суму

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k, y_k, z_k\right)\Delta s_k . \qquad (32)$$

Цю суму називають інтегральною сумою.

Означення. Якщо при довільному T-розбитті поверхні S на частини S_k, $k=0,1,...,n-1$, та при довільному виборі точок $P_k \in S_k$, $k=0,1,...,n-1$, існує границя інтегральної суми (32) при $\lambda\left(T\right)=\max d_k \to 0$ і дорівнює числу I, то це число називають поверхневим інтегралом першого роду від функції $f\left(x,y,z\right)$ по поверхні S і позначають $\iint\limits_S f\left(x,y,z\right)ds$.

Таким чином

$$\iint\limits_S f\left(x,y,z\right)ds=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k, y_k, z_k\right)\Delta s_k . \qquad (33)$$

Розглянемо гладку поверхню S, задану рівнянням $z=z\left(x,y\right)$.

Нехай функція $f\left(x,y,z\right)$ неперервна в усіх точках цієї поверхні.

Нехай квадровна область $\overline{D}$ є проекцією поверхні S на площину Oxy. Оскільки поверхня S гладка, то функція $z=z\left(x,y\right)$ неперервна і має неперервні частинні похідні z'_x та z'_y в області $\overline{D}$.

При T-розбитті поверхні S на частини S_k область $\overline{D}$ розіб'ється на частини $\overline{D_k}$, які є відповідними проекціями частин S_k поверхні на площину Oxy.

Відомо, що

$$\Delta s_k=\frac{\Delta \sigma_k}{\cos\varphi_k},$$

де $\Delta\sigma_k$ – площа області $\overline{D_k}$, φ_k – кут між нормаллю до поверхні у точці P_k та віссю Oz. Оскільки

$$\cos\varphi_k=\frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x\left(x_k,y_k\right)+z'^2_y\left(x_k,y_k\right)}},$$

то $\Delta s_k=\sqrt{1+z'^2_x\left(x_k,y_k\right)+z'^2_y\left(x_k,y_k\right)}\Delta\sigma_k$, $k=0,1,...,n-1$.

Інтегральну суму (32) запишемо у вигляді

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k, y_k, z_k\right)\Delta s_k =$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1} f\left[x_k, y_k, z\left(x_k,y_k\right)\right]\sqrt{1+z'^2_x\left(x_k,y_k\right)+z'^2_y\left(x_k,y_k\right)}\Delta\sigma_k . \qquad (34)$$

У правій частині цієї рівності міститься інтегральна сума для функції

$$f\left[x_k, y_k, z(x,y)\right]\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)},$$

складена при T'-розбитті області $\overline{D}$, яке відповідає даному T-розбиттю поверхні S. Розглядувана функція неперервна в області $\overline{D}$, а тому інтегровна в ній.

Таким чином,

$$\lim_{\lambda'(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f\left[x_k, y_k, z(x_k,y_k)\right]\sqrt{1+z_x'^2(x_k,y_k)+z_y'^2(x_k,y_k)}\Delta\sigma_k =$$

$$=\iint_{\overline{D}} f\left[x,y,z(x,y)\right]\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\,dxdy,$$

де $\lambda'(T)=\max diam\overline{D_k}$.

Тоді з рівності (34) маємо

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k,y_k,z_k)\Delta s_k = \iint_{\overline{D}} f\left[x,y,z(x,y)\right]\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\,dxdy.$$

Ця рівність означає, що границя в лівій частині рівності існує, тому існує поверхневий інтеграл $\iint_S f(x,y,z)\,ds$, причому

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds = \iint_{\overline{D}} f\left[x,y,z(x,y)\right]\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\,dxdy. \tag{35}$$

Таким чином, якщо поверхня S гладка, а функція $f(x,y,z)$ неперервна на ній, то $\iint_S f(x,y,z)\,ds$ існує. Цей результат буде справедливий і для кусково-гладких поверхонь.

Якщо гладку поверхню S задано рівнянням $x=x(y,z)$ або $y=y(x,z)$, то одержимо відповідні формули переходу від поверхневого інтеграла до подвійного у цих випадках:

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds = \iint_{\overline{D_{yz}}} f\left[x(y,z),y,z\right]\sqrt{1+x_y'^2(y,z)+x_z'^2(y,z)}\,dydz, \tag{36}$$

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds = \iint_{\overline{D_{xz}}} f\left[x,y(x,z),z\right]\sqrt{1+y_x'^2(x,z)+y_z'^2(x,z)}\,dxdz, \tag{37}$$

де $\overline{D}_{yz}$ та $\overline{D}_{xz}$ – проекції заданих поверхонь на площини Oyz та Oxz.

Деякі застосування поверхневих інтегралів першого роду

На гладкій або кусково-гладкій поверхні S нехай розподілено масу з поверхневою густиною $\gamma=\gamma(x,y,z)$, причому $\gamma(x,y,z)$ неперервна функція на цій поверхні. Таку поверхню називають матеріальною.

За допомогою поверхневих інтегралів знаходять масу, координати центра маси, моменти інерції матеріальної поверхні відносно осей координат:

а) $$m=\iint_S \gamma(x,y,z)\,ds; \tag{38}$$

б) $$\overline{x}=\frac{\iint_S x\gamma(x,y,z)\,ds}{\iint_S \gamma(x,y,z)\,ds},\quad \overline{y}=\frac{\iint_S y\gamma(x,y,z)\,ds}{\iint_S \gamma(x,y,z)\,ds},\quad \overline{z}=\frac{\iint_S z\gamma(x,y,z)\,ds}{\iint_S \gamma(x,y,z)\,ds}. \tag{39}$$

Якщо $\gamma=const$, то $$\overline{x}=\frac{\iint_S x\,ds}{\iint_S ds},\quad \overline{y}=\frac{\iint_S y\,ds}{\iint_S ds},\quad \overline{z}=\frac{\iint_S z\,ds}{\iint_S ds} \tag{40}$$

в) $$I_x=\iint_S\left(y^2+z^2\right)\gamma(x,y,z)\,ds,\quad I_y=\iint_S\left(x^2+z^2\right)\gamma(x,y,z)\,ds, \tag{41}$$

$$I_z=\iint_S\left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y,z)\,ds$$

Приклад 15. Обчислити інтеграл $\iint_S xyz\,ds$, де S – частина площини $x+y+z=1$, яка лежить у першому октанті.

Наша поверхня S – частина площини $x+y+z=1$, обмежена сторонами трикутника з вершинами в точках $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$. На площину Oxy трикутник ABC проектується в трикутник AOB, де точка O – початок координат.

У площині Oxy рівняння прямої AB буде $x+y=1$.

У нас $z=1-x-y$, $z'_x=-1$, $z'_y=-1$. В трикутнику AOB $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$. За формулою (35)

$$\iint_S xyz\,ds=\iint_{\overline{D}} xy(1-x-y)\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy=$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(xy-x^2y-xy^2\right)dy=\sqrt{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{3}xy^3\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1\left[\frac{1}{2}x(1-x)^2-\frac{1}{2}x^2(1-x)^2-\frac{1}{3}x(1-x)^3\right]dx=\sqrt{3}\int_0^1 x(1-x)^2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}(1-x)\right]dx=$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1\left(x-2x^2+x^3\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}x\right)dx=\frac{1}{6}\sqrt{3}\int_0^1\left(x-2x^2+x^3-x^2+2x^3-x^4\right)dx=$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x^2-x^3+\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{120}\sqrt{3}.$$

Приклад 16. Знайти координати центра маси однорідної напівсфери радіуса R.

Нехай напівсфера стоїть на площині Oxy симетрично відносно осі Oz. Тоді рівняння напівсфери має вигляд $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Поверхня однорідна (постійна густина маси), тому із міркувань симетрії центр маси (центр ваги) має бути на осі Oz, тобто $\overline{x}=0$, $\overline{y}=0$. Формула для обчислення $\overline{z}$ має вигляд:

$$\overline{z}=\frac{\iint\limits_S z\,ds}{\iint\limits_S ds}.$$

У нас S має рівняння $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\geq 0$, звідки $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Елемент $ds=\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\,dxdy=\dfrac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$.

Наша напівсфера проектується в круг радіуса R з центром в початку координат, тому

$$\iint\limits_S z\,ds=\iint\limits_{\overline{D}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=R\iint\limits_{\overline{D}}dxdy=R\pi R^2=\pi R^3;$$

$$\iint\limits_S ds=\iint\limits_{\overline{D}}\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=2\pi R\int_0^R\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)d\left(R^2-\rho^2\right)}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=$$

$$=-2\pi R\sqrt{R^2-\rho^2}\,\Bigg|_0^R=2\pi R^2.$$

Застосували полярні координати. Отже, $\overline{z}=\dfrac{\pi R^3}{2\pi R^2}=\dfrac{R}{2}$.

ПОВЕРХНЕВИЙ ІНТЕГРАЛ ДРУГОГО РОДУ

У математиці розглядають поняття односторонньої та двосторонньої поверхонь. Виберемо на поверхні довільну точку M, проведемо в ній нормаль до поверхні певного напряму і розглянемо довільний замкнений контур, який виходить з точки M і повертається в точку M, причому контур не перетинає край поверхні, якщо він є.

При обході заданого контуру можуть бути два випадки:

1) після обходу контуру повертаємося в точку M з тим же напрямом нормалі, що був на початку;

2) після обходу контуру повертаємося в точку M з напрямом нормалі, протилежним початковому.

У першому випадку маємо двосторонню поверхню, у другому – односторонню. Сфера, еліпсоїд та багато інших замкнених поверхонь без самоперетинів – двосторонні. Надалі будемо розглядати двосторонні поверхні.

Введемо поняття поверхневого інтеграла другого роду. Міркування при цьому будуть дуже подібними до тих, які ми мали при розгляді поверхневих інтегралів першого роду, а ще раніше – криволінійних інтегралів. Знову візьмемо деяку гладку поверхню S, у кожній точці якої визначено обмежену функцію $f\left(x, y, z\right)$. Знову замкнена область $\overline{D}$ – проекція поверхні S на площину Oxy. Далі T-розбиття поверхні S на частини S_k, $k = 0,1,...,n-1$, вибір у кожній частині S_k довільної точки $P_k\left(x_k, y_k, z_k\right)$, складання суми

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k; y_k; z_k\right)\Delta\sigma_k, \tag{42}$$

де $\Delta\sigma_k$ – площа проекції частини S_k на площину Oxy.

Величину $\Delta\sigma_k$ вважаємо додатною, якщо в точках, що належать S_k, нормаль до поверхні S утворює з додатним напрямом осі Oz гострий кут, і від'ємною, якщо цей кут тупий. Нехай $d_k = diam S_k$, $k = 0,1,...,n-1$.

Означення. Якщо при довільному T-розбитті поверхні S на частини S_k, $k = 0,1,...,n-1$, та при довільному виборі точок $P_k\left(x_k, y_k, z_k\right) \in S_k$, $k = 0,1,...,n-1$, існує границя інтегральних сум (42) при $\lambda\left(T\right) = \max d_k \to 0$ і дорівнює числу I, то те число називають поверхневим інтегралом другого роду від функції $f\left(x, y, z\right)$ по поверхні S і позначають

$$\iint\limits_S f\left(x, y, z\right) dxdy.$$

Отже,

$$\iint\limits_S f\left(x, y, z\right) dxdy = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k; y_k; z_k\right)\Delta\sigma_k. \tag{43}$$

При заміні розглядуваної сторони поверхні на протилежну інтеграл змінює знак, бо змінює знак $\Delta\sigma_k$. Це випливає з означення поверхневого інтеграла другого роду.

Оскільки $dxdy = \cos\gamma ds$, де ds – елемент площі поверхні S, а γ – кут між нормаллю до поверхні та віссю Oz, то

$$\iint_S f(x,y,z)\,dxdy = \iint_S f(x,y,z)\cos\gamma\, ds.$$

Поверхню S можна проектувати на координатні площини Oxz та Oyz. Одержимо ще два поверхневі інтеграли другого роду:

$$\iint_S f(x,y,z)\,dxdz = \iint_S f(x,y,z)\cos\beta\, ds$$

та

$$\iint_S f(x,y,z)\,dydz = \iint_S f(x,y,z)\cos\alpha\, ds,$$

де β і α – кути між нормаллю до поверхні S і віссю Oy та Ox відповідно.

Найбільш поширеними є об'єднані поверхневі інтеграли другого роду, тобто

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy =$$

$$= \iint_S \left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right] ds.$$

Нехай гладку поверхню S задано рівнянням $z = z(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$, де квадровна область $\overline{D}$ – проекція поверхні S на площину Oxy.

Одержимо

$$\iint_S f(x,y,z)\,dxdy = \iint_{\overline{D}} f\left[x,y,z(x,y)\right] dxdy. \qquad (44)$$

Для нижньої сторони поверхні S

$$\iint_S f(x,y,z)\,dxdy = -\iint_{\overline{D}} f\left[x,y,z(x,y)\right] dxdy. \qquad (45)$$

Аналогічно

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds = \pm\iint_{\overline{D}_{yz}} f\left[x(y,z),y,z\right] dydz, \qquad (46)$$

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds = \pm\iint_{\overline{D}_{xz}} f\left[x,y(x,z),z\right] dxdz. \qquad (47)$$

$\overline{D}_{yz}$ та $\overline{D}_{xz}$ – проекції поверхні S на площини Oyz та Oxz відповідно.

Приклад 17. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду

$$\iint_S xz^2dxdy + xdydz + dxdz,$$

де S – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=4$, розміщена в першому октанті.

Нехай $\overline{D}_{xy}, \overline{D}_{yz}, \overline{D}_{xz}$ – проекції заданої поверхні на координатні площини Oxy, Oyz, Oxz. Це чверті кругів із центром у початку координат і радіусом 2.

Тоді

$$\iint_S xz^2dxdy = \iint_{\overline{D}_{xy}} x\left(4-x^2-y^2\right)dxdy =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos\varphi\, d\varphi \int_0^2 \rho^2\left(4-\rho^2\right)d\rho = \int_0^{\pi/2}\cos\varphi \left[\left(\frac{4}{3}\rho^3 - \frac{1}{5}\rho^5\right)\Bigg|_0^2\right]d\varphi = \left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right)\sin\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64}{15};$$

$$\iint_S xdydz = \iint_{\overline{D}_{yz}} \sqrt{4-y^2-z^2}\,dydz =$$

$$= \int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2\sqrt{4-\rho^2}\,\rho\, d\rho = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2\left(4-\rho^2\right)^{1/2}d\left(4-\rho^2\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\left[\left(4-\rho^2\right)^{3/2}\Bigg|_0^2\right]d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot(-8)\cdot\varphi\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}\pi;$$

$$\iint_S dxdz = \int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2\rho\, d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[\rho^2\Bigg|_0^2\right]d\varphi = 2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Остаточно

$$\iint_S xz^2dxdy + xdydz + dxdz = \frac{64}{15} + \frac{7}{3}\pi.$$

Приклад 18. Обчислити інтеграл $\iint_S zdxdy + xdxdz + ydydz$,

де S – трикутник, утворений перетином площини $x-y+z=1$ з координатними площинами, а саме – зовнішня (верхня) його частина.

Нормаль до поверхні S тут направлена назовні. Поверхня S знаходиться у четвертому октанті, тому нормаль утворює з осями Ox та Oz гострі кути α і γ, а з віссю Oy – тупий кут. Тоді $\cos\alpha>0$, $\cos\beta<0$, $\cos\gamma>0$. Кожний із трьох складових інтегралів обчислюємо окремо.

$$I_1 = \iint_S zdxdy = \iint_{\overline{D}_{xy}}(1-x+y)dxdy = \int_0^1dx\int_{x-1}^0(1-x+y)dy = \int_0^1\left[\left(y-xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_{x-1}^0\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left[-x + 1 + x^2 - x - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \right] dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{6};$$

$$I_2 = \iint_S x\,dxdz = -\iint_{\overline{D}_{xz}} x\,dxdz = -\int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} dz = -\int_0^1 x \left[z \Big|_0^{1-x} \right] dx = -\int_0^1 \left(x - x^2 \right) dx = -\frac{1}{6};$$

$$I_3 = \iint_S y\,dydz = +\iint_{\overline{D}_{yz}} y\,dydz = \int_{-1}^0 y\,dy \int_0^{1+y} dz = \int_{-1}^0 y \left[z \Big|_0^{1+y} \right] dy = \int_{-1}^0 \left(y + y^2 \right) dy = -\frac{1}{6}.$$

При обчисленні I_2 знак мінус узяли тому, що β – тупий кут і $\cos\beta < 0$.

Отже,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}.$$

ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО – ГАУССА

Ця формула може бути застосована у випадку замкнених просторових поверхонь. Вона зв'язує потрійний інтеграл по області $\overline{G} \subset R_3$ з поверхневим інтегралом по зовнішній стороні поверхні S, яка обмежує цю область.

Нехай в області $\overline{G}$ визначені функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, неперервні разом із частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$. Тоді

$$\iiint_{\overline{G}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$= \iint_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy, \qquad (48)$$

або

$$\iiint_{\overline{G}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$= \iint_S \left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma \right] ds, \qquad (49)$$

де α, β, γ – кути між нормаллю до поверхні S та відповідними координатними осями.

Формулу (48) або (49) називають формулою Остроградського – Гаусса.

Якщо у формулах (48) та (49) покласти

$$P(x,y,z) = -x, \quad Q(x,y,z) = y, \quad R(x,y,z) = z,$$

то в лівій частині цих формул матимемо $\iiint_{\overline{G}} dxdydz$.

Оскільки $\iiint\limits_{\overline{G}} dxdydz$ чисельно дорівнює об'єму тіла $\overline{G}$, то з формул (48) і (49) маємо формулу для обчислення об'єму тіла $\overline{G}$ через поверхневий інтеграл по поверхні S, яка обмежує це тіло.

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{S} xdydz + ydxdz + zdxdy, \qquad (50)$$

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{S}\left(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right)ds. \qquad (51)$$

Приклад 19. Користуючись формулою Остроградського – Гаусса, обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{S} x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, де S – повна поверхня циліндра $x^2 + y^2 = 4$, вміщеного між площинами $z = 0$ і $z = 9$.

Використаємо формулу (48).

$P(x,y,z) = x^3$, $Q(x,y,z) = y^3$, $R(x,y,z) = z^3$; $P'_x = 3x^2$, $Q'_y = 3y^2$, $R'_z = 3z^2$;

$$\iint\limits_{S} x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy = 3\iiint\limits_{\overline{G}}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)dxdydz =$$

$$= 3\iint\limits_{\overline{D}} dxdy\int_0^9\left(x^2 + y^2 + z^2\right)dz = 3\iint\limits_{\overline{D}}\left[\left(x^2z + y^2z + \frac{1}{3}z^3\right)\Big|_0^9\right]dxdy =$$

$$= 27\iint\limits_{\overline{D}}\left(x^2 + y^2 + 27\right)dxdy = 27\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\left(\rho^2 + 27\right)\rho\, d\rho = \frac{27}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\left(\rho^2 + 27\right)d\left(\rho^2 + 27\right) =$$

$$= \frac{27}{4}\int_0^{2\pi}\left[\left(\rho^2 + 27\right)^2\Big|_0^2\right]d\varphi = \frac{27}{4}\int_0^{2\pi}\left(31^2 - 27^2\right)d\varphi = 3132\pi.$$

Вигода від застосування формули Остроградського – Гаусса тут була очевидною.

Приклад 20. Користуючись формулою Остроградського – Гаусса, обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{S} xydydz + yzdxdz + xzdxdy$, де S – зовнішня сторона піраміди, складеної площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Маємо $P'_x + Q'_y + R'_z = y + z + x$.

Наша піраміда добре відома із попереднього.

$$\iint\limits_{S} xydydz + yzdxdz + xzdxdy = \iiint\limits_{\overline{G}}\left(x + y + z\right)dxdydz =$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\left(x + y + z\right)dz = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[\left(xz + yz + \frac{1}{2}z^2\right)\Big|_0^{1-x-y}\right]dy =$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[(x+y)(1-x-y)+\frac{1}{2}(1-x-y)^2\right]dy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-xy+\frac{1}{2}\right]dy=$$

$$=\int_0^1\left[-\frac{1}{2}x^2(1-x)-\frac{1}{6}(1-x)^3-\frac{1}{2}x(1-x)^2+\frac{1}{2}(1-x)\right]dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^3\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{24}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{8}.$$

ФОРМУЛА СТОКСА

Ця формула узагальнює формулу Гріна для простору R_3. Вона пов'язує поверхневий інтеграл по незамкненій поверхні S із криволінійним інтегралом по контуру L, який обмежує цю поверхню.

На цю формулу ми виходимо за допомогою міркувань, подібних до уже проведених нами раніше. Функції – учасниці формули $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ і $R(x,y,z)$ – мають бути неперервними в області, їхні частинні похідні першого порядку теж мають бути неперервними і т. д. В результаті одержуємо

$$\oint_L P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=$$

$$=\iint_S\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha\right]ds. \qquad (52)$$

Це і є формула Стокса.

Її можна записати ще й так:

$$\oint_L P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz. \qquad (53)$$

Приклад 21. Користуючись формулою Стокса, обчислити криволінійний інтеграл $\oint_L x^2y^2dx+dy+zdz$, де контур L – коло $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z=0$.

За поверхню взяти напівсферу $z=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Інтегрування по колу в площині Oxy ведеться у додатному напрямі.

$P(x,y,z)=x^2y^2$, $Q(x,y,z)=1$, $R(x,y,z)=z$; $P'_y=2x^2y$, $P'_z=0$, $Q'_x=0$, $Q'_z=0$, $R'_x=0$, $R'_y=0$.

Отже, за формулою (53)

$$\int_L x^2y^2dx+dy+zdz=-2\iint_S x^2y\,dxdy=-2\int_{-R}^{R}x^2dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}ydy=-\int_{-R}^{R}x^2\left[y^2\Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\right]dx=$$

$$=-\int_{-R}^{R}x^2\cdot 0\cdot dx=0.$$

Завершуємо. Матеріал досить складний, але посильний. Незмінні побажання успіхів!

Горбатов Микола Іванович
Сдвижкова Олена Олександрівна

ОСОБИСТИЙ ДОВІДНИК СТУДЕНТА З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

(Восьма частина)

Редактор Ю.В. Рачковська

Підписано до друку 28.08.2017. Формат 30х42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 2,3.
Обл.-вид. арк. 2,3. Тираж 50 пр. Зам. № .

Підготовлено до друку та видрукувано
у Державному ВНЗ «Національний гірничий університет»
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19