УДК 539.3/6(075.8)

© В.А. Ропай, И.П. Федорова

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ РАСКРЫТИЯ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ ЗАДАЧИ ПРИ РАСЧЕТЕ МНОГОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК

© V. Ropay, I. Fedorova

ANALYTICAL METHOD OF OPENING OF STATIC INDETERMINATENESS OF PROBLEM AT STRENGTH DESIGN OF MULTISPAN BEAMS

Приведен разработанный и обоснованный аналитический метод расчета многопролетных балок с раскрытием статической неопределимости задачи с помощью универсального уравнения изогнутой оси балки при плоском изгибе. Показана независимость значений опорных реакций балки от ее изгибной жесткости. Метод позволяет рассчитывать балки с любым числом пролетов и с любыми граничными условиями.

Наведено розроблений та обґрунтований аналітичний метод розрахунку багатопролітної балки з розкриттям статичної невизначеності задачі за допомогою універсального рівняння зігнутої вісі балки при плоскому згині. Показана незалежність значень реакцій опор від згинальної жорсткості балки. Метод дозволяє розраховувати балки з різним числом прольотів та довільними граничними умовами.

Во всех учебниках по курсам сопротивления материалов и строительной механики (сошлемся на последний [1]) для расчета многопролетных балок приводится разработанный в 19 веке графоаналитический метод под названием “Уравнения 3-х моментов», который предполагает перемножение эпюр изгибающих моментов. Метод устаревший и требует дополнительных пояснений, как и для чего перемножаются эпюры и на это требуется дополнительные и ненужные затраты времени. Метод позволял рассчитывать только 3-х пролетные балки, а если пролетов больше, то было необходимо добавлять в расчетную схему еще 3 пролета, а не 1, не 2 как было бы необходимо.

Нами предлагается логичный, простой аналитический метод, в котором необходимые для раскрытия статической неопределимости задачи уравнения составляются с использованием универсального уравнения изогнутой оси балки. При этом число пролетов балки может быть любым и значения «лишних» реакций связей не зависят от изгибной жесткости балки при любом способе ее закрепления. Покажем это.

Универсальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид:

$$v(x) = v_0 + \theta_0 \cdot x + \frac{M_0 \cdot x^2}{2!EI_z} + \frac{P_0 \cdot x^3}{3!EI_z} + \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i\,(x-a_i)^2}{2!EI_z} + \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i\,(x-b_i)^3}{3!EI_z} + \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i\,(x-c_i)^4}{4!EI_z} - \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i\,(x-d_i)^4}{4!EI_z}, \qquad (1)$$

где x – координата сечения балки, в котором определяют ее прогиб; начало оси x всегда располагают в крайнем левом сечении балки, положительное направление оси y принимают обычно вверх, $v(x)$ − смещение сечения балки с координатой x в направлении оси y; EI_z – изгибная жесткость балки относительно нейтральной оси z; v_0 , θ_0 – прогиб и угол поворота сечения балки в начале координат; M_0 и P_0 – момент и сила, приложенные к балке в начале координат; M_i– величина действующего на балку «i-го» момента, приложенного на расстоянии a_i от начала координат; P_i – величина действующей на балку «i-ой» силы, приложенной на расстоянии b_i от начала координат; q_i – интенсивность приложенной к балке «i-ой» равномерно распределённой нагрузки; c_i – расстояние от начала координат до начала распределенной нагрузки q_i ; d_i – то же, до конца распределенной нагрузки q_i.

Отметим, что:

1. При определения перемещения какого-либо сечения балки, учитывают только внешнюю нагрузку (M,P,q), которая приложена между началом координат и данным сечением.

2. Внешние моменты, направленные по ходу часовой стрелки и сосредоточенные и распределенные нагрузки, совпадающие по направлению с осью y, считаются положительными.

Возможны три способа закрепления левого конца балки в начале координат:

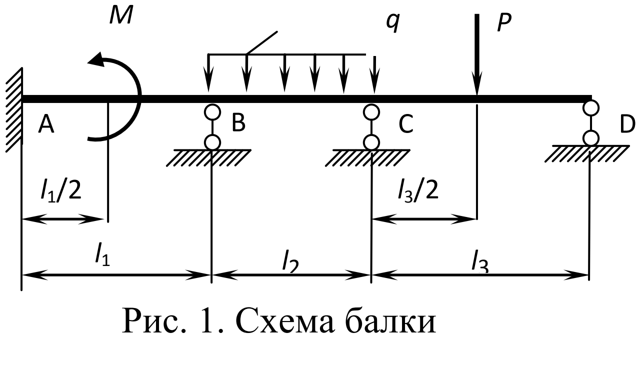
1. Жесткое защемление, при этом $v_0 = 0$, $\Theta_0 = 0$, $M_0 \neq 0$, $P_0 \neq 0$;

2. Шарнирное опирание, при этом $v_0 = 0$, $\Theta_0 \neq 0$, $M_0 = 0$, $P_0 \neq 0$;

3. Свободный левый конец балки − $v_0 \neq 0$, $\Theta_0 \neq 0$, $M_0 = 0$, $P_0 = 0$.

Рассмотрим три примера, с указанными граничными условиями, покажем сам метод и почему реакции «лишних» связей не зависят от изгибной жесткости балки.

Пример 1. Требуется выполнить расчет балки (рис.1) при следующих данных:



M=5 кНм,P=12 кН, q=8 кН/м, l_1=4 м, l_2=5,6 м, l_3=4 м

Рис. 1. Схема балки

Расчетная схема представлена на рис. 2. При вертикальных внешних нагрузках из уравнения статики $\sum F_{ix} = 0$ следует, что $R_{AX} \equiv 0$. Для определения 5 неизвестных: M_A, R_A, R_B, R_C, R_D необходимо составить 5 уравнений. Можем составить только 2 уравнения статики для плоской системы параллельных сил 1)

$\sum F_{iY} = 0$; 2) $\sum M_A(F_i) = 0$ и три уравнения с помощью универсального уравнения изогнутой оси балки, выражающие условия, что прогибы балки на опорах *B*, *C* и *D* равны нулю:
3) $v_B = 0$; 4) $v_C = 0$; 5) $v_D = 0$.

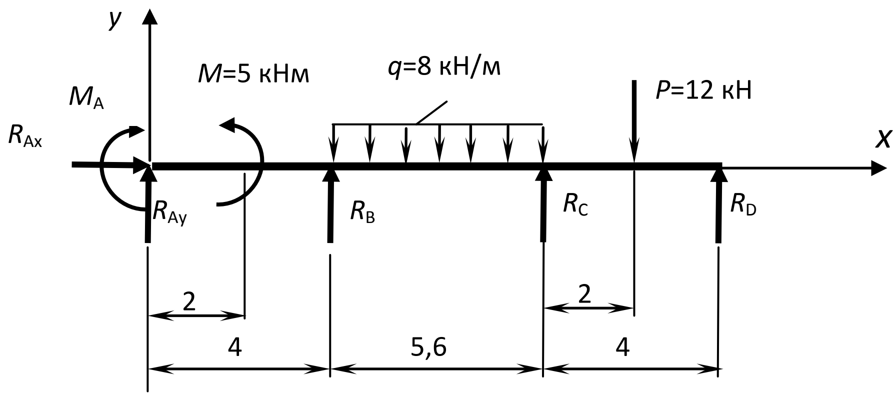


Рис. 2. Расчетная схема балки

Составляем эти уравнения, приводя их к каноническому в алгебре виду:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{aligned}\right\}$$

1) $\sum F_{iY} = 0$. $\qquad R_A + R_B + R_C + R_D - q \cdot 5{,}6 - P = 0$.

Подставляем значения нагрузок и приводим уравнение к каноническому виду:

$$0 \cdot M_A + 1 \cdot R_A + 1 \cdot R_B + 1 \cdot R_C + 1 \cdot R_D = 56{,}8. \qquad (2)$$

2) $\sum M_A(F_i) = 0$. $\qquad -M_A + M + R_B \cdot 4 + R_C \cdot 9{,}6 + R_D \cdot 13{,}6 - q \cdot 5{,}6 \cdot 6{,}8 - P \cdot 11{,}6 = 0.$

В канонической форме это уравнение принимает вид:

$$-1 \cdot M_A + 0 \cdot R_A + 4 \cdot R_B + 9{,}6 \cdot R_C + 13{,}6 \cdot R_D = 438{,}84. \qquad (3)$$

3) $v_B = 0$ при $x = 4$ м $\qquad v_0 + \Theta_0 4 + \dfrac{M_0 4^2}{2!EI} + \dfrac{Q_0 4^3}{3!EI} - \dfrac{M(4-2)^2}{2!EI} = 0$, или

$$1 \cdot M_A + 1{,}33 \cdot R_A + 0 \cdot R_B + 0 \cdot R_C + 0 \cdot R_D = 1{,}25. \qquad (4)$$

4) $v_C = 0$ при $x = 9{,}6$ м

$$v_0 + \Theta_0 9{,}6 + \frac{M_0 9{,}6^2}{2!EI} + \frac{Q_0 9{,}6^3}{3!EI} - \frac{M(9{,}6-2)^2}{2!EI} + \frac{R_B(9{,}6-4)^3}{3!EI} - \frac{q(9{,}6-4)^4}{4!EI} = 0 \text{ или}$$

$$1 \cdot M_A + 3{,}2 \cdot R_A + 0{,}635 \cdot R_B + 0 \cdot R_C + 0 \cdot R_D = 10{,}248. \qquad (5)$$

5) $v_D = 0$ при $x = 13{,}6$ м

$$v_0+\Theta_0 13{,}6+\frac{M_0 13{,}6^2}{2!EI}+\frac{Q_0 13{,}6^3}{3!EI}-\frac{M(13{,}6-2)^2}{2!EI}+\frac{R_B(13{,}6-4)^3}{3!EI}+\frac{R_C(13{,}6-9{,}6)^3}{3!EI}-$$

$$-\frac{q(13{,}6-4)^4}{4!EI}+\frac{q(13{,}6-9{,}6)^4}{4!EI}-\frac{P(13{,}6-11{,}6)^3}{3!EI}=0.$$

$$1\cdot M_A+4{,}53\cdot R_A+1{,}594\cdot R_B+0{,}115\cdot R_C+0\cdot R_D=33{,}502\,. \qquad (6)$$

Систему пяти линейных алгебраических уравнений (2-6) представим в матричной форме $A\cdot R=B$,

где $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 9{,}6 & 13{,}6 \\ 1 & 1{,}33 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3{,}2 & 0{,}635 & 0 & 0 \\ 1 & 4{,}53 & 1{,}594 & 0{,}115 & 0 \end{pmatrix}$; $R=\begin{pmatrix} M_A \\ R_A \\ R_B \\ R_C \\ R_D \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 56{,}8 \\ 438{,}84 \\ 1{,}25 \\ 10{,}248 \\ 33{,}502 \end{pmatrix}$.

Изгибная жесткость балки не входит в разрешающие уравнения и, следовательно, реакции «лишних» связей от нее не зависят. Получено: $M_A=6{,}42$ кНм, $R_A=-3{,}89$ кН, $R_B=25{,}62$ кН, $R_C=33{,}54$ кН, $R_D=1{,}53$ кН. Дальнейший расчет балки не представляет труда.

Пример 2. Раскрыть статическую неопределимость задачи (рис.3) при следующих данных: l_1=5 м, l_2=4 м, l_3=4 м, M=5 кНм, P=14 кН, q=12 кН/м.

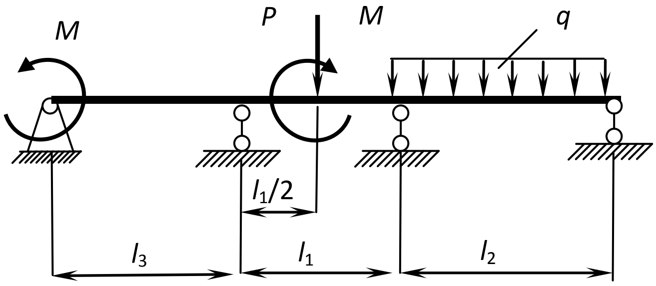


Рис. 3. Схема балки

Решение

Расчетная схема показана на рис. 4

При вертикальных внешних нагрузках из уравнения статики $\sum F_{ix}=0$ следует, что $R_{AX}\equiv 0$. Для определения 5 неизвестных R_A, R_B, R_C, R_D и Θ_0 (Θ_0 – неизвестный угол поворота сечения балки на шарнирной опоре А) необходимо составить 5 уравнений. Можем составить только 2 уравнения статики для плоской системы параллельных сил 1) $\sum F_{iY}=0$; 2) $\sum M_A(F_i)=0$ и три уравнения с помощью универсального уравнения изогнутой оси балки, выражающие условия, что прогибы балки на опорах B, C и D равны нулю:

3) $v_B=0$; 4) $v_C=0$; 5) $v_D=0$.

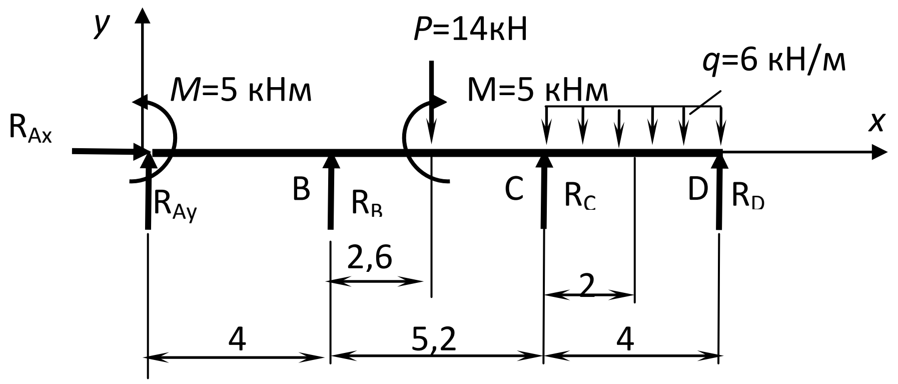


Рис. 4. Расчетная схема

Составляем эти уравнения, приводя их к каноническому виду:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

1) $\sum F_{iY} = 0$. $\quad R_A + R_B + R_C + R_D - q \cdot 4 - P = 0$.

Подставляем значения нагрузок и приводим уравнение к каноническому виду (добавляем слагаемое $0 \cdot \Theta_0$, так как неизвестная величина Θ_0 в уравнение не входит) :

$$0 \cdot \Theta_0 + 1 \cdot R_A + 1 \cdot R_B + 1 \cdot R_C + 1 \cdot R_D = 38. \tag{8}$$

2) $\sum M_A(F_i) = 0$. $\quad M - M + R_B \cdot 4 + R_C \cdot 9{,}2 + R_D \cdot 13{,}2 - q \cdot 4 \cdot 11{,}2 - P \cdot 6{,}6 = 0.$

В канонической форме это уравнение принимает вид:

$$0 \cdot \Theta_0 + 0 \cdot R_A + 4 \cdot R_B + 9{,}2 \cdot R_C + 13{,}2 \cdot R_D = 361{,}2. \tag{9}$$

3) $v_B = 0$ при $x = 4$ м $\quad v_0 + \Theta_0 4 + \dfrac{M_0(4)^2}{2!EI} + \dfrac{Q_0 4^3}{3!EI} = 0$,

учтем, что при шарнирном закреплении опоры A в рассматриваемой задаче $v_0 = 0, \Theta_0 \neq 0$, $M_0 = -M$, $Q_0 = R_A$, все члены уравнения можем разделить на $\dfrac{4^2}{2EI}$ и записать его в виде:

$$0{,}5EI \cdot \Theta_0 + 1{,}33 \cdot R_A + 0 \cdot R_B + 0 \cdot R_C + 0 \cdot R_D = 5. \tag{10}$$

4) $v_C = 0$ при $x = 9{,}2$ м

$$v_0 + \Theta_0 9{,}2 + \frac{M_0 9{,}2^2}{2!EI} + \frac{Q_0 9{,}2^3}{3!EI} + \frac{M(9{,}2-6{,}6)^2}{2!EI} - \frac{P(9{,}2-6{,}6)^3}{3!EI} + \frac{R_B(9{,}2-4)^3}{3!EI} = 0.$$

Учтем, что $v_0 = 0$, $\Theta_0 \neq 0$, $M_0 = -M$, $Q_0 = R_A$, разделим все члены уравнения на $\dfrac{9{,}2^2}{2EI}$ и приведем к каноническому виду:

$$0{,}217EI \cdot \Theta_0 + 3{,}067 \cdot R_A + 0{,}554 \cdot R_B + 0 \cdot R_C + 0 \cdot R_D = 5{,}57. \tag{11}$$

5) $v_D = 0$ при $x = 13{,}2$ м

$$v_0 + \Theta_0 13.2 + \frac{M_0 13{,}2^2}{2!EI} + \frac{Q_0 13{,}2^3}{3!EI} + \frac{M(13{,}2-6{,}6)^2}{2!EI} - \frac{P(13{,}2-6{,}6)^3}{3!EI} + \frac{R_B(13{,}2-4)^3}{3!EI} +$$
$$+\frac{R_C(13{,}2-9{,}2)^3}{3!EI} - \frac{q(13{,}2-9{,}2)^4}{4!EI} = 0.$$

Учитываем, что $v_0 = 0,\ \Theta_0 \neq 0$, $M_0 = -M$, $Q_0 = R_A$, делим все члены уравнения на $\dfrac{13{,}2^2}{2EI}$, получаем:

$$0{,}152EI \cdot \Theta_0 + 4{,}4 \cdot R_A + 1{,}49 \cdot R_B + 0{,}122 \cdot R_C + 0 \cdot R_D = 12{,}185. \qquad (12)$$

Полученную систему 5 линейных алгебраических уравнений представим в матричной форме $A \cdot R = B$, (13)

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9{,}2 & 13{,}2 \\ 0{,}5EI & 1{,}33 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}217EI & 3{,}067 & 0{,}554 & 0 & 0 \\ 0{,}152EI & 4{,}4 & 1{,}49 & 0{,}122 & 0 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} \Theta_0 \\ R_A \\ R_B \\ R_C \\ R_D \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 38 \\ 361{,}2 \\ 5 \\ 5{,}57 \\ 12{,}185 \end{pmatrix}.$$

В уравнения (8)–(12) входит изгибная жесткость балки *EI*, которую мы пока не знаем, подбор поперечного сечения балки является итоговым пунктом последовательности расчета на прочность или жесткость в подобной задаче. На данном этапе расчета мы должны принять некоторое значение $EI \neq 0$.

Оценим влияние значения изгибной жесткости балки на расчетные значения реакций опор.

В таблице прокатных профилей указаны номера двутавров N10 - N60c. Моменты инерции площади поперечного сечения балок относительно центральной главной оси инерции: для двутавра N10 I=245 см^4 = 245·10^{-8} м^4, для двутавра N60c I=91060 см^4=91060·10^{-8} м^4. Модуль упругости стали E=2·10^8 кПа (кН/м^2).

Как следует из приведенной таблицы, значения реакции опор не зависят от величины изгибной жесткости балки, поэтому на данном этапе расчета для всех вариантов заданий можно рекомендовать принимать одно значение *EI*, например, для двутавра N 30, в, равное 18800 кНм^2.

Для решения системы 5 алгебраических уравнений мы использовали MathCAD.

Получено: $R = \begin{pmatrix} 4{,}521\cdot10^{-4} \\ 0{,}564 \\ 3{,}601 \\ 24{,}955 \\ 8{,}879 \end{pmatrix}$, т.е. $\Theta_0 = 4{,}521\cdot10^{-4}$, $R_A = 0{,}564$ кН, $R_B = 3{,}601$ кН,

$R_C = 24{,}955$ кН, $R_D = 8{,}879$ кН.

Таблица 1

Значения реакций опор балки при разных значениях ее изгибной жесткости

EI, кНм^2	min 490	среднее 91270	max 182120	для N 30в 18800
Θ_0	0,017	$9{,}311\cdot10^{-5}$	$4{,}667\cdot10^{-5}$	$4{,}521\cdot10^{-4}$
R_A, кН	0,564	0,565	0,564	0,564
R_B, кН	3,601	3,600	3,601	3,601
R_C, кН	24,955	24,957	24,955	24,955
R_D, кН	8,879	8,878	8,879	8,879

Пояснить независимость значений реакций опор балки от ее изгибной жесткости EI удобно с помощью правила Крамера, в соответствии с которым решение системы алгебраических уравнений (7) находится в виде:

$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, …, $x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, где Δ - определитель системы уравнений (7),

$$\Delta = \det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \Delta_1 = \det\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \det\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \Delta_n = \det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

В наших обозначениях для системы 5–ти уравнений (13) определитель Δ имеет вид

$$\Delta = \det\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9{,}2 & 13{,}2 \\ 0{,}5EI & 1{,}33 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}217EI & 3{,}067 & 0{,}554 & 0 & 0 \\ 0{,}152EI & 4{,}4 & 1{,}49 & 0{,}122 & 0 \end{vmatrix},$$ можем сделать следующее преобразование: в силу свойств определителей общий множитель, содержащийся во всех членах одного ряда, вынесем за знак определителя, т. е.

$$\Delta = \det\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9{,}2 & 13{,}2 \\ 0{,}5EI & 1{,}33 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}217EI & 3{,}067 & 0{,}554 & 0 & 0 \\ 0{,}152EI & 4{,}4 & 1{,}49 & 0{,}122 & 0 \end{vmatrix} = EI\cdot\det\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9{,}2 & 13{,}2 \\ 0{,}5 & 1{,}33 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}217 & 3{,}067 & 0{,}554 & 0 & 0 \\ 0{,}152 & 4{,}4 & 1{,}49 & 0{,}122 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det\begin{vmatrix} 38 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 361{,}2 & 0 & 4 & 9{,}2 & 13{,}2 \\ 5 & 1{,}33 & 0 & 0 & 0 \\ 5{,}57 & 3{,}067 & 0{,}554 & 0 & 0 \\ 12{,}185 & 4{,}4 & 1{,}49 & 0{,}122 & 0 \end{vmatrix},$$ $\Theta_0 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$ зависит от величины EI, но

$$\Delta_2 = \det\begin{vmatrix} 0 & 38 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 361{,}2 & 4 & 9{,}2 & 13{,}2 \\ 0{,}5EI & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}217EI & 5{,}57 & 0{,}554 & 0 & 0 \\ 0{,}152EI & 12{,}185 & 1{,}49 & 0{,}122 & 0 \end{vmatrix} = EI\cdot\det\begin{vmatrix} 0 & 38 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 361{,}2 & 4 & 9{,}2 & 13{,}2 \\ 0{,}5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}217 & 5{,}57 & 0{,}554 & 0 & 0 \\ 0{,}152 & 12{,}185 & 1{,}49 & 0{,}122 & 0 \end{vmatrix}$$

и $R_A = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ от EI не зависит, поскольку оно сокращается в числителе и знаменателе. Аналогичные преобразования можно сделать в $\Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$, поэтому значения реакций опор B, C, D тоже не зависят от EI.

Пример 3. Раскрыть статическую неопределимость задачи (рис.5) при следующих данных: l_1=5 м, l_2=4 м, l_3=4 м, M=5 кНм, P=14 кН, q=12 кН/м.

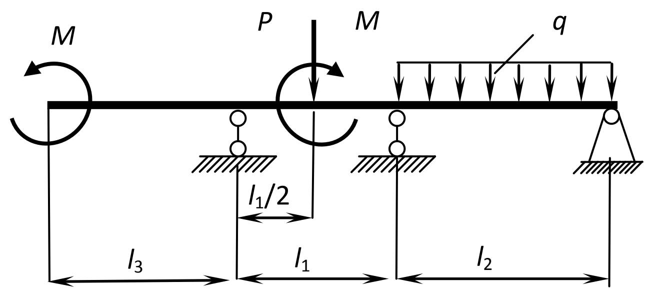


Рис. 5. Схема балки

Решение

Расчетная схема показана на рис. 6.

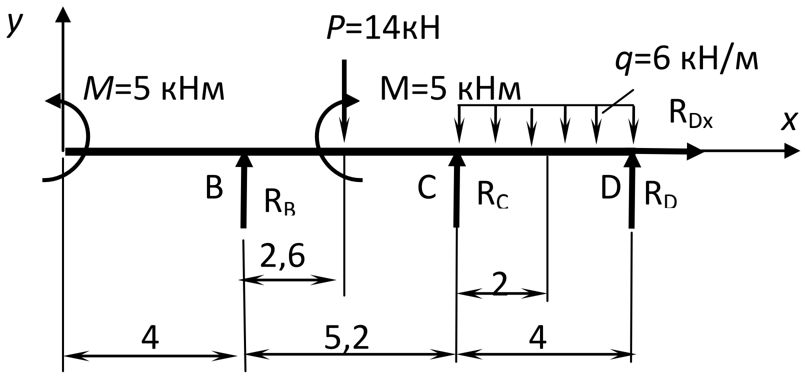


Рис. 6. Расчетная схема

При вертикальных внешних нагрузках из уравнения статики $\sum F_{ix} = 0$ следует, что $R_{ДX} \equiv 0$. Для определения 5 неизвестных R_B, R_C, R_D, v_0 и Θ_0 (неизвестные прогиб v_0 и Θ_0 - угол поворота сечения балки на опоре А – в начале координат) необходимо составить 5 уравнений. Можем составить 2 уравнения статики для плоской системы параллельных сил 1) $\sum F_{iY} = 0$; 2) $\sum M_A(F_i) = 0$

и три уравнения с помощью универсального уравнения изогнутой оси балки, выражающие условия, что прогибы балки на опорах *B*, *C* и *D* равны нулю:
3) $v_B = 0$; 4) $v_C = 0$; 5) $v_D = 0$.

Составляем эти уравнения, приводя их к каноническому в алгебре виду.
1) $\sum F_{iY} = 0$. $R_B + R_C + R_D - q \cdot 4 - P = 0$.

Подставляем значения нагрузок и приводим уравнение к каноническому виду (добавляем слагаемые $0 \cdot v_0$ и $0 \cdot \Theta_0$, так как неизвестные величины v_0 и Θ_0 в уравнение не входят):

$$0 \cdot v_0 + 0 \cdot \Theta_0 + 1 \cdot R_B + 1 \cdot R_C + 1 \cdot R_D = 38. \qquad (14)$$

2) $\sum M_A(F_i) = 0$. $M \quad - M + R_B \cdot 4 + R_C \cdot 9{,}2 + R_D \cdot 13{,}2 - q \cdot 4 \cdot 11{,}2 - P \cdot 6{,}6 = 0$.

В канонической форме это уравнение принимает вид:

$$0 \cdot v_0 + 0 \cdot \Theta_0 + 4 \cdot R_B + 9{,}2 \cdot R_C + 13{,}2 \cdot R_D = 361{,}2. \qquad (15)$$

3) $v_B = 0$ при $x = 4$ м $\qquad v_0 + \Theta_0 4 + \dfrac{M_0 (4)^2}{2! EI} + \dfrac{Q_0 4^3}{3! EI} = 0$,

учтем, что при шарнирном закреплении опоры A в рассматриваемой задаче $v_0 \neq 0, \Theta_0 \neq 0$, $M_0 = -M$, $Q_0 = 0$ все члены уравнения можем разделить на $\dfrac{4^2}{2EI}$ и записать его в виде:

$$0{,}125 EI \cdot v_0 + 0{,}5 EI \cdot \Theta_0 + 0 \cdot R_B + 0 \cdot R_C + 0 \cdot R_D = 5. \qquad (16)$$

4) $v_C = 0$ при $x = 9{,}2$ м

$$v_0 + \Theta_0 9{,}2 + \frac{M_0 9{,}2^2}{2! EI} + \frac{Q_0 9{,}2^3}{3! EI} + \frac{M(9{,}2 - 6{,}6)^2}{2! EI} - \frac{P(9{,}2 - 6{,}6)^3}{3! EI} + \frac{R_B (9{,}2 - 4)^3}{3! EI} = 0.$$

Учтем, что $v_0 \neq 0, \Theta_0 \neq 0$, $M_0 = -M$, $Q_0 = 0$, разделим все члены уравнения на $\dfrac{9{,}2^2}{2EI}$ и приведем к каноническому виду:

$$0{,}0236 EI \cdot v_0 + 0{,}217 EI \cdot \Theta_0 + 0{,}554 \cdot R_B + 0 \cdot R_C + 0 \cdot R_D = 5{,}57. \qquad (17)$$

5) $v_D = 0$ при $x = 13{,}2$

$$v_0 + \Theta_0 13.2 + \frac{M_0 13{,}2^2}{2! EI} + \frac{Q_0 13{,}2^3}{3! EI} + \frac{M(13{,}2 - 6{,}6)^2}{2! EI} - \frac{P(13{,}2 - 6{,}6)^3}{3! EI} + \frac{R_B (13{,}2 - 4)^3}{3! EI} +$$
$$+ \frac{R_C (13{,}2 - 9{,}2)^3}{3! EI} - \frac{q(13{,}2 - 9{,}2)^4}{4! EI} = 0.$$

Учитываем, что $v_0 \neq 0$, $\Theta_0 \neq 0$, $M_0 = -M$, $Q_0 = 0$, делим все члены уравнения на $\dfrac{13{,}2^2}{2EI}$, получаем:

$$0{,}01148 EI \cdot v_0 + 0{,}152 EI \cdot \Theta_0 + 1{,}49 \cdot R_B + 0{,}122 \cdot R_C + 0 \cdot R_D = 12{,}185. \qquad (18)$$

Полученную систему 5 линейных алгебраических уравнений представим в матричной форме $\qquad A \cdot R = B, \qquad (19)$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9{,}2 & 13{,}2 \\ 0{,}125EI & 0{,}5EI & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0236EI & 0{,}217EI & 0{,}554 & 0 & 0 \\ 0{,}01148EI & 0{,}152EI & 1{,}49 & 0{,}122 & 0 \end{pmatrix}$; $R = \begin{pmatrix} v_0 \\ \Theta_0 \\ R_B \\ R_C \\ R_D \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 38 \\ 361{,}2 \\ 5 \\ 5{,}57 \\ 12{,}185 \end{pmatrix}$.

В уравнения (14) – (18) входит изгибная жесткость балки EI, которую мы пока не знаем.

Оценим влияние значения изгибной жесткости балки на расчетные значения реакций опор (табл.2).

Как следует из приведенной таблицы, значения реакции опор практически не зависят от величины изгибной жесткости балки, поэтому на данном этапе расчета для всех вариантов заданий можно рекомендовать принимать одно значение EI, например, для двутавра N 30, в, равное 18800 кНм^2, или, что проще, EI=10000 кНм^2.

Таблица 2

Значения реакций опор балки при разных значениях ее изгибной жесткости

EI, кНм^2	1000	10000	Разность в %
v_0, м	$-30\cdot10^{-3}$	$-1{,}565\cdot10^{-3}$	
Θ_0, рад	$17\cdot10^{-3}$	$1{,}391\cdot10^{-3}$	
R_B, кН	4,496	4,672	+3,672
R_C, кН	26,063	25,637	-1,25
R_D, кН	7,441	7,691	+3,25

Поясним это с помощью правила Крамера. Определитель системы уравнений (19) имеет вид

$\Delta = \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9{,}2 & 13{,}2 \\ 0{,}125EI & 0{,}5EI & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0238EI & 0{,}217EI & 0{,}554 & 0 & 0 \\ 0{,}01148EI & 0{,}152EI & 1{,}49 & 0{,}122 & 0 \end{vmatrix}$, сделаем следующее преобразование:

в силу свойств определителей общий множитель, содержащийся во всех членах одного ряда, вынесем за знак определителя, т. е.

$$\Delta = (EI)^2 \cdot \det\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9{,}2 & 13{,}2 \\ 0{,}125 & 05 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0236 & 0{,}217 & 0{,}554 & 0 & 0 \\ 0{,}01148 & 0{,}152 & 1{,}49 & 0{,}122 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det\begin{vmatrix} 38 & 0\cdot EI & 1 & 1 & 1 \\ 361 & 0\cdot EI & 4 & 9{,}2 & 13{,}2 \\ 5 & 0{,}5EI & 0 & 0 & 0 \\ 5{,}57 & 0{,}217EI & 0{,}554 & 0 & 0 \\ 12{,}185 & 0{,}152EI & 1{,}49 & 0{,}122 & 0 \end{vmatrix} = EI\cdot\det\begin{vmatrix} 38 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 361 & 0 & 4 & 9{,}2 & 13{,}2 \\ 5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 5{,}57 & 0{,}217 & 0{,}554 & 0 & 0 \\ 12{,}185 & 0{,}152 & 1{,}49 & 0{,}122 & 0 \end{vmatrix},$$

$v_0 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$ зависит от EI.

$$\Delta_2 = \det\begin{vmatrix} 0 & 38 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 361 & 4 & 9{,}2 & 13{,}2 \\ 0{,}125EI & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0238EI & 5{,}57 & 0{,}554 & 0 & 0 \\ 0{,}01148EI & 12{,}185 & 1{,}49 & 0{,}122 & 0 \end{vmatrix} = EI\cdot\det\begin{vmatrix} 0 & 38 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 361 & 4 & 9{,}2 & 13{,}2 \\ 0{,}125 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0238 & 5{,}57 & 0{,}554 & 0 & 0 \\ 0{,}01148 & 12{,}185 & 1{,}49 & 0{,}122 & 0 \end{vmatrix}$$

$\Theta_0 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ зависит от EI.

$$\Delta_3 = \det\begin{vmatrix} 0 & 0 & 38 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 361 & 9{,}2 & 13{,}2 \\ 0{,}125EI & 0{,}5EI & 5 & 0 & 0 \\ 0{,}0238EI & 0{,}217EI & 5{,}57 & 0 & 0 \\ 0{,}01148EI & 0{,}152EI & 12{,}185 & 0{,}122 & 0 \end{vmatrix} = (EI)^2\det\begin{vmatrix} 0 & 0 & 38 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 361 & 9{,}2 & 13{,}2 \\ 0{,}125 & 0{,}5 & 5 & 0 & 0 \\ 0{,}0238 & 0{,}217 & 5{,}57 & 0 & 0 \\ 0{,}01148 & 0{,}152 & 12{,}185 & 0{,}122 & 0 \end{vmatrix},$$

$R_B = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ от EI не зависит, поскольку оно сокращается в числителе и знаменателе. Аналогичные преобразования можно сделать в Δ_4, Δ_5, поэтому значения реакций опор B, C, D не зависят от значения изгибной жесткости балки.

Таким образом доказано, что реакции опор многопролетной балки не зависят от ее изгибной жесткости при всех возможных способах закрепления опор. Положить жесткость балки равной нулю нельзя, т.к. изменяется физическая суть задачи – балка превращается в нить.

Последовательность расчета балки на прочность должна быть следующая:

1. В расчетной схеме все связи заменяем неизвестными реакциям связей;

2. Составляем уравнения статики;

3. Остальные алгебраические уравнения (число уравнений должно быть равно числу неизвестных реакция связей) составляем с помощью универсаль-

ного уравнения изогнутой оси балки, они описывают равенство нулю прогибов балки на опорах;

4. Систему полученных алгебраических уравнений решаем, задав некоторое значение изгибной жесткости балки;

5. Определив реакции опор, строим эпюру изгибающих моментов, по значению наибольшего изгибающего момента и допускаемому для материала балки напряжению вычисляем требуемый момент сопротивления поперечного сечения балки и выбираем по сортаменту прокатных профилей требуемый номер профиля.

Перечень ссылок

1. Писаренко Г.С. Опір матеріалів: підручник / Г.С. Писаренко, О.Д. Квітка, Є.С. Уманський.– К.: Вища школа, 2004. – 653 с.

ABSTRACT

Purpose. To develop analytical method of strength design of multispan beams instead of old “method of three moments”.

The method. Static indeterminateness of problem is opened with the aid of universal equation of the bent ax of beam at a flat bend.

The originality. It is shown independence of values of supporting reactions of beam from its flexural inflexibility.

Practical implications. A sequence of calculation of beamon durability must be following:
1. In a calculationhart replace all of connections by unknown reactions of connections;
2. Form equations of static’s;
3. Make other algebraic equations with the aid of universal equation of the bent ax of beam, they describe equality to zero of displacements of beam on supports;
4. Solve the system of the got algebraic equations, setting some value of flexural inflexibility of beam;
5. Defining the reactions of supports, build the epure of bending moments, by value of max moment and the tension assumed for material of beam calculate the required moment of resistance of cross-section of beam and choosethe required number of type on the assortment of rental types.

Keywords: multispan beams; analytical method; reactions of supports; flexural inflexibility.