

УДК [622.261-1123:622.281]:519.25

© А.Н. Шашенко, Е.А. Сдвижкова, А.С. Ковров

ВЛИЯНИЕ МИКРО- И МАКРОСТРУКТУРЫ НА ПРОЧНОСТЬ НЕОДНОРОДНОГО ПОРОДНОГО МАССИВА

Предложена и исследована вероятностно-статистическая модель прочности монолитного, ненарушенного трещинами, породного массива. Исследованы нормальный и усеченный нормальный законы распределения предела прочности на одноосное сжатие. Получены формулы для коэффициента структурного ослабления, позволяющие оценить прочность статистически неоднородного породного массива.

Запропонована і досліджена ймовірнісно-статистична модель міцності монолітного та ненарушеного тріщинами породного масиву. Досліджено нормальний і усічений нормальний закони розподілу межі міцності на одновісний тиск. Отримано формули для коефіцієнта структурного ослаблення, що дозволяють оцінити міцність статистично неоднорідного породного масиву.

Probabilistic-statistical model of the monolithic and non-fractured rock mass strength is proposed and investigated. Normal and truncated normal distribution laws of ultimate strength in uniaxial compression are studied. The formulas for the coefficient of structural weakening for assessment of the strength of the statistically heterogeneous rock mass are obtained.

Введение. Оценка прочности структурно неоднородного породного массива, содержащего плоские дефекты в виде систем трещин, является довольно сложной задачей, решению которой посвящен ряд исследований. Их обобщение можно найти в [1].

Если теоретически отобрать породные образцы во всех точках исследуемой области породного массива, то результаты испытаний их на одноосное сжатие образуют генеральную совокупность, статистическая обработка которой дает полное представление о прочности и степени неоднородности изучаемого объекта. При этом образцы, отобранные в области трещин, имеют нулевую прочность или прочность значительно меньшую средней. По этой причине они могут не попасть в эту выборку, хотя в силу своего существования должны быть в ней представлены.

Формулировка целей. Полагается, что вследствие естественной неоднородности структурные элементы, на основе которых определяется прочность горных пород (лабораторные стандартные образцы), обладают различающимися параметрами. Их пределы прочности в процессе тестирования принимают случайные значения, образующие статистическую совокупность. Целью работы является исследование нормального и усеченного нормального законов распределения предела прочности пород на одноосное сжатие, получение аналитических выражений для коэффициента структурного ослабления и оценка прочности статистически неоднородного породного массива.

Изложение. Исследуем, каким образом повлияет на закон распределения и характеристики генеральной выборки искусственное привнесение в нее значений прочности близких или равных нулю.

Для решения поставленной задачи рассмотрим неоднородный породный массив, содержащий несколько систем трещин (рис. 1). Пусть в этом массиве в произвольном направлении проходится горная выработка. Выделим вдоль продольной ее оси блок длиной L_1 , шириной L_2 и высотой L_3 . Блок имеет такие размеры, что все системы трещин, независимо от их ориентировки по отношению к оси X (L_i), пересекут его стороны. При этом среднее расстояние между трещинами, подсчитанное по длинам L_i , равно l_{mi} , а соответствующая интенсивность трещиноватости составит $q_{mi} = l_{mi}^{-1}$.

При идеальной обработке из этого блока могут быть изготовлено n образцов с линейным размером l_0 . ($l_0 \ll L_i$). Результаты испытаний этих образцов на сжатие представляли бы выборку из генеральной совокупности значений прочности структурных элементов.

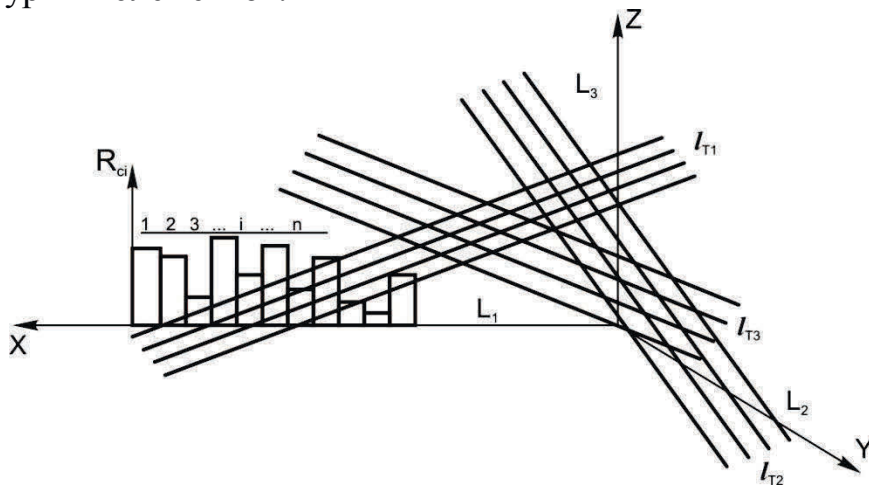


Рис.1. Расчетная схема к решению задачи о структурно-механическом ослаблении породного массива

Однако, испытаниям подвергаются не все образцы, а лишь та часть, количеством n_g , которая не содержит макродефекты и реально может быть изготовлена. Таким образом, будет получена совокупность значений прочности R_i ($i = 1 \dots n_g$), для которых среднее значение (начальный момент первого порядка) равно:

$$m_1 = \frac{1}{n_g} \sum_{i=1}^{n_g} R_i. \quad (1)$$

Однако, в генеральной совокупности в соответствии с принятой гипотезой содержатся структурные элементы, прочность которых значительно меньше прочности ненарушенных образцов и оценивается некоторой функцией снижения прочности $f(\alpha)$, зависящей от угла наклона трещины α к горизонтальной плоскости ($\alpha = 90^\circ - \theta$). Их присутствие должно быть отражено и в выборке из генеральной совокупности. Таким образом, к исходной совокупности из n_g образцов должны быть добавлены n_m нарушенных образцов, прочность которых равна

$$R_{im} = f(\alpha)R_i \quad (i = 1 \dots n_m). \quad (2)$$

Статистическая обработка должна выполняться для нового, «исправленного», вариационного ряда из $n=n_m+n_g$ данных.

Определим параметры статистического распределения для такого ряда. Среднее значение прочности (начальный момент первого порядка) равно:

$$m_1' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Ri = \frac{\sum_{i=1}^{n_g} R_i + \sum_{i=1}^{n_m} R_i}{n_g + n_m} \quad (3)$$

Обозначим

$$n_g/n_m = \nu, \quad (4)$$

тогда

$$\frac{1}{n_g + n_m} = \frac{\nu}{n_g(\nu + 1)},$$

а выражение (3) с учетом (4) примет вид

$$\begin{aligned} m_1' &= \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_g} R_i}{n_g} + \frac{\sum_{i=1}^{n_m} R_i}{n_g} \right) = \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_g} R_i}{n_g} + \frac{\sum_{i=1}^{n_m} R_i f(\alpha)}{n_g} \right) = \frac{\nu}{1+\nu} \left(m_1 + \frac{1}{\nu} f(\alpha) m_1 \right) = \\ &= m_1 \frac{\nu + f(\alpha)}{\nu + 1}. \end{aligned}$$

Из (4) найдем, что величина ν может быть представлена в виде:

$$\nu = l_m / l_0, \quad (5)$$

и тогда она может быть легко определена экспериментально. Здесь l_m и l_0 – среднее расстояние между трещинами и характерный размер образца соответственно.

Следует отметить, что величина ν по своей физической природе не может быть меньше единицы. При расстоянии между трещинами меньше l_0 из такой среды невозможно изготовить образцы стандартных размеров. Кроме того, после определенного уровня нарушенности среда принимает свойства скорее сыпучей, чем сплошной среды. Такой среде соответствует дисперсия значений прочности, близкая к нулю, и коэффициент структурного ослабления, близкий к единице. Таким образом, исследуемая вероятностно-статистическая модель породной среды со случайно распределенными дефектами в виде трещин имеет ограничения: она отражает свойства породного массива, структура которого занимает промежуточное положение между сыпучей средой (модель однородного на микроскопическом уровне тела) и сплошной нетрещиноватой средой (модель сплошного неоднородного на субмакроскопическом уровне тела). Об этом следует помнить, анализируя полученные результаты.

Начальные моменты первого порядка для исходного и «исправленного» (дополненного нарушенными элементами) статистического ряда связаны соотношением:

$$m_1' = K_1 m_1, \quad (6)$$

где

$$K_1 = \frac{\nu + f(\alpha)}{\nu + 1} = \frac{\frac{l_m}{l_0} + f(\alpha)}{\frac{l_m}{l_0} + 1}. \quad (7)$$

Важнейшим параметром статистического распределения является дисперсия, характеризующая разброс данных относительно среднего. Дисперсия представляет собой центральный момент второго порядка, который, как известно, связан с начальными моментами первого и второго порядков:

$$D' = \mu_2' = m_2' - (m_1')^2. \quad (8)$$

Момент первого порядка определяется формулой (6). Найдем момент второго порядка для «исправленного» ряда:

$$\begin{aligned} m_2' &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_g} R_i^2 + \sum_{i=1}^{n_m} (R_i f(\alpha))^2}{n_g + n_m} = \\ &= \frac{\nu}{1 + \nu} \left(m_2 + \frac{1}{\nu} f^2(\alpha) m_2 \right) = K_2 m_2 \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$K_2 = \frac{\nu + f^2(\alpha)}{\nu + 1} = \frac{\frac{l_m}{l_0} + f^2(\alpha)}{\frac{l_m}{l_0} + 1}.$$

Можно показать, что все начальные моменты k -го порядка «исправленного» и исходного ряда связаны соотношением:

$$m_k' = K_k m_k, \quad (10)$$

где

$$K_k = \frac{\nu + f^k(\alpha)}{\nu + 1} = \frac{\frac{l_m}{l_0} + f^k(\alpha)}{\frac{l_m}{l_0} + 1}. \quad (11)$$

В частном случае, если полагать прочность нарушенных элементов равной нулю, коэффициент влияния трещин одинаков для всех начальных моментов:

$$K_1 = K_2 = K_3 = \dots K_k = K = \frac{\frac{l_m}{l_0}}{\frac{l_m}{l_0} + 1} = \frac{l_m}{l_m + l_0}. \quad (12)$$

Величина K изменяется в пределах от 0,5 ($l_m = l_0$ – сильно трещиноватая среда) до 1,0 ($l_m \rightarrow \infty$ – нетрещиноватая среда)

Таким образом, дисперсия «исправленного» вариационного ряда равна:

$$D' = \mu'_2 = K_2 m_2 - K_1^2 m_1^2. \quad (13)$$

В физическом отношении дисперсия характеризует степень неоднородности среды. Поэтому влияние на ее величину структурных неоднородностей представляет особый интерес. Рассмотрим случай, когда $f(\alpha) = 0$, т.е. в предположении, что прочность дефектных элементов близка нулю, как это сделано в [2, 3].

Выражение (13) удовлетворяет граничным условиям: при $\nu = 0$, $D' = 0$ – массив разрушен, механически однороден и может быть приравнен к сыпучей среде; при отсутствии трещин ($\nu \rightarrow \infty$) получим выражение для дисперсии опробования монолитного массива:

$$D = m_2 - m_1^2.$$

Коэффициент вариации обычного опробования (без учета нарушенных образцов) определяется формулой:

$$\eta = \frac{\sqrt{D}}{m_1}.$$

Введем обозначение

$$A_k = m_k / m_1^k, \quad (14)$$

тогда

$$\eta^2 = \frac{m_2 - m_1^2}{m_1^2} = A_2 - 1,$$

откуда

$$A_2 = \eta^2 + 1.$$

Выражение (13) с учетом последнего равенства принимает вид:

$$D' = m_1^2 \frac{\nu}{1 + \nu} \left(A_2 - \frac{\nu}{1 + \nu} \right) = m_1^2 f(A_2, \nu), \quad (15)$$

где $f(A_2, \nu)$ – функция влияния структурно - механических неоднородностей на величину дисперсии. Для идеальной однородной среды $A_2 = 1$, для реальной же породной среды, как показывает анализ, величина A_2 составляет 1,1-1,5.

На рис. 2 показаны графики функции $f(A_2, \nu)$ в зависимости от значений A_2 и ν . Представленные кривые имеют явно выраженные максимумы. До определенного значения $\nu = \nu^*$ дисперсия возрастает, затем плавно снижается по мере увеличения расстояния между трещинами.

Исследуем функцию $f(A_2, \nu)$ на экстремум и получим то предельное значение ν^* , после которого в породной среде наступают значительные качественные изменения:

$$\nu^* = A_2 (2 - A_2)^{-1}. \quad (16)$$

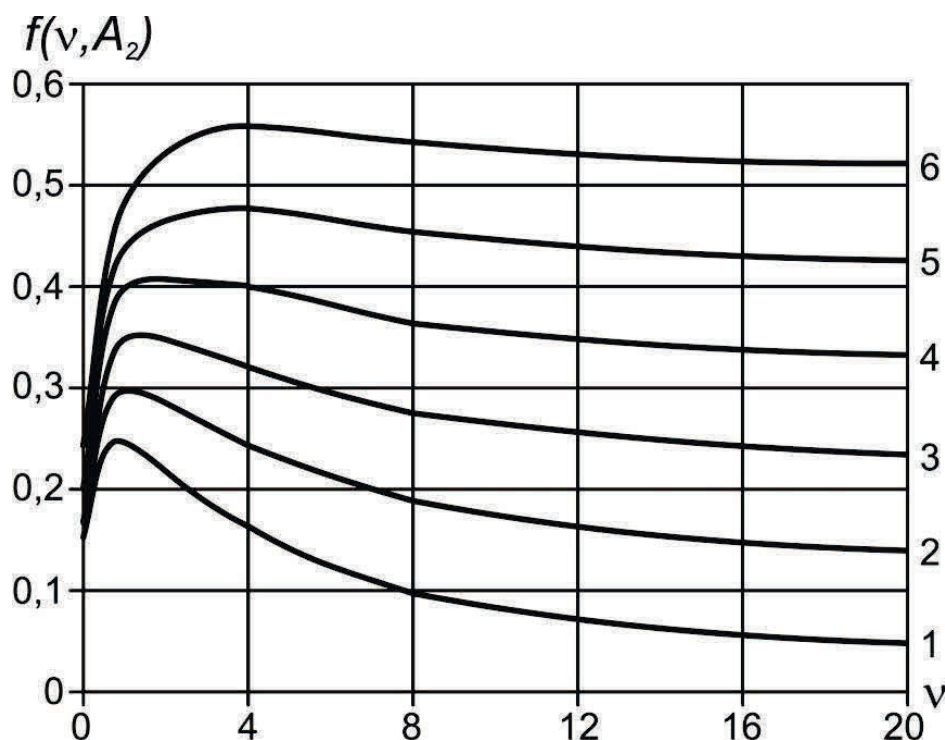


Рис. 2. Изменение дисперсии выборки, включающей нарушенные образцы, в зависимости от расстояния между трещинами и вариации реального опробования: 1, 2, 3, 4, 5, 6— при $A_2=1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5$ соответственно

При $\nu < \nu^*$ среда обладает таким высоким уровнем разрушенности, что может быть приравнена к сыпучей среде с некоторыми усредненными свойствами. Дисперсия такой среды, как и квазиоднородной, близка к нулю. По сути, выражение (16) определяет границы применимости рассматриваемой вероятностно-статистической модели: графики функции $f(A_2, \nu)$ и справа и слева приближаются к оси абсцисс.

Из (13), с учетом (14), получим выражение для относительной вариации «исправленного» вариационного ряда, т.е. для вариации прочности структурно неоднородного массива. В предположении, что прочность дефектных элементов равна нулю ($f(\alpha)=0$) выражение для относительной вариации прочности будет иметь вид:

$$\eta' = \frac{\sqrt{D'}}{m_1'} = \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu} A_2 - 1} = \sqrt{\frac{l_m + l_0}{l_m} (\eta^2 + 1) - 1}. \quad (17)$$

В таком виде коэффициент вариации отражает не только внутреннюю структурную неоднородность массива, характеризуемую вариацией прочности при обычном опробовании, но и механическое его ослабление системами трещин.

На рис. 3 показаны графики значения коэффициента вариации η' в зависимости от плотности трещин $\nu = \frac{l_m}{l_0}$ и степени внутренней неоднородности

породной среды, определяемой параметром $A_2 = \eta^2 + 1$. Если полагать, что дефектные элементы все-таки обладают некоторой прочностью ($f(\alpha) \neq 0$) относительная вариация «исправленного» ряда будет определяться выражением:

$$\eta' = \frac{\sqrt{D'}}{m_1'} = \sqrt{\frac{K_2 m_2 - K_1^2 m_1^2}{K_1^2 m_1^2}} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1^2} A_2 - 1} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1^2} (\eta^2 + 1) - 1}. \quad (18)$$

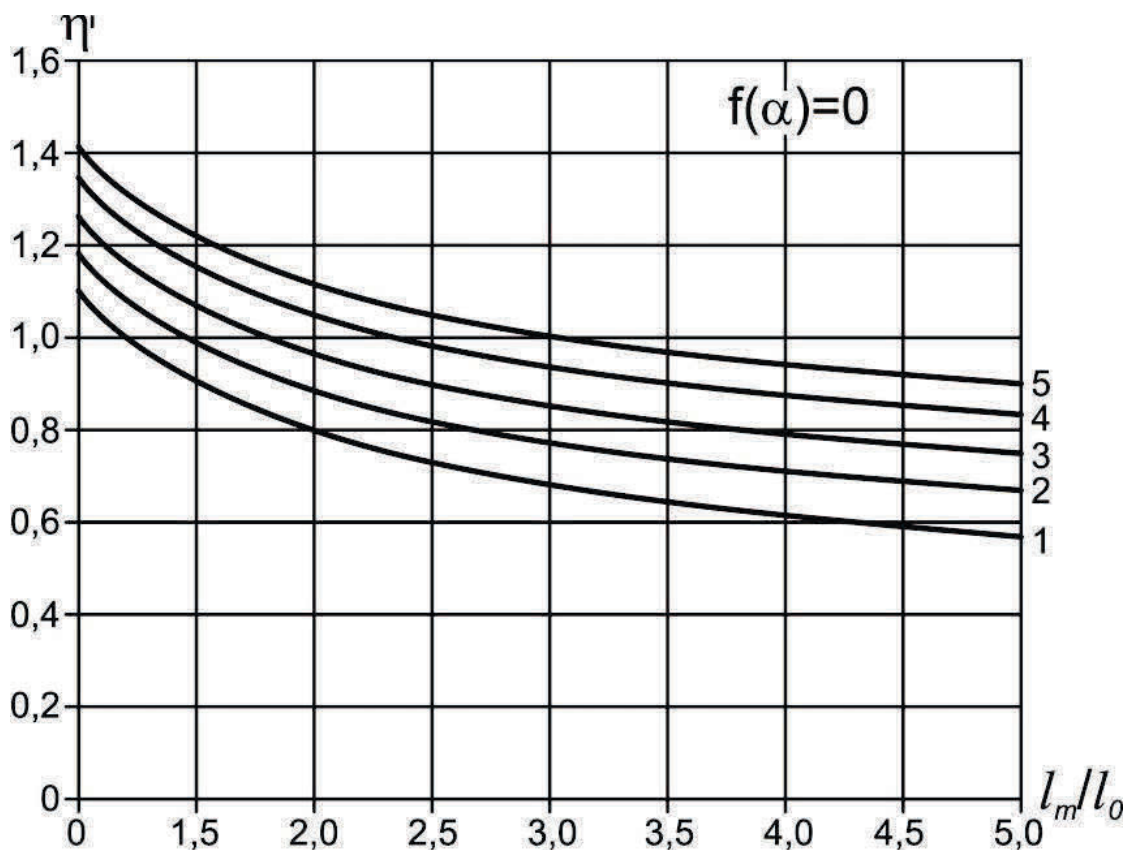


Рис. 3. Зависимость коэффициента вариации трещиноватого породного массива от расстояния между трещинами и степени неоднородности среды в предположении, что прочность дефектных элементов равна нулю:

1, 2, 3, 4, 5 – при $A_2 = \eta^2 + 1 = 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5$ соответственно

Исследуем теперь, как влияет наличие нарушенных элементов в выборке на вероятностное распределение прочности структурных элементов.

Выше указывалось, что подбор распределения для эмпирических данных может быть осуществлен с помощью диаграммы Пирсона, на которой представлены теоретические распределения в зависимости от характерных для них значений асимметрии и эксцесса. Последние определяются центральными моментами третьего и четвертого порядков. В свою очередь центральные моменты могут быть выражены через начальные:

$$\begin{aligned}\mu_2 &= m_2 - m_1^2; \\ \mu_3 &= m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3; \\ \mu_4 &= m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4.\end{aligned}\quad (19)$$

Для нормального распределения все начальные моменты нечетных порядков равны нулю. Отсюда получаются известные соотношения [4]:

$$\beta_1^2 = \frac{\mu_3}{\mu_2} = 0; \quad (20)$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3. \quad (21)$$

Определим из этих условий, как должны соотноситься между собой моменты симметричного (нормального) распределения. Из второго уравнения (19) и условия (20) получим, что

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = 0,$$

или

$$\frac{m_3}{m_1^3} = 3 \frac{m_2}{m_1^2} - 2. \quad (22)$$

Для случая, когда $m_1 \neq 0$ можно использовать обозначение (14) и преобразовать (22) к виду:

$$A_3 = 3A_2 - 2. \quad (23)$$

Из третьего уравнения (19) и условия (21) получим:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4}{m_2 - m_1^2} = 3. \quad (24)$$

При $m_1 \neq 0$, вынося общий множитель m_1^4 в числителе и знаменателе дроби и используя (14), преобразуем последнее уравнение к виду:

$$\frac{A_4 - 4A_3 + 6A_2 - 3}{(A_2 - 1)^2} = 3,$$

откуда при $A_2 \neq 1$, получим:

$$A_4 = 3A_2 - 2. \quad (25)$$

Уравнения (22), (24), либо полученные из них (23) и (25), образуют систему, которой должны удовлетворять моменты распределения для того, чтобы оно было нормальным.

Например, если математическое ожидание нормального распределения равно нулю ($m_1 = 0$), то при любом значении m_2 получим, что $m_3 = 0$, а $m_4 = 3m_2^2$.

Пусть математическое ожидание отлично от нуля, например, $m_1 = 1$, и известно, что $A_2 = 1,2$. Тогда из (23) следует, что $A_3 = 1,6$, а из (22) $A_4 = 2,32$.

При таких значениях моментов распределение обладает асимметрией и эксцессом, удовлетворяющими уравнениям (20), (21), т.е. является нормаль-

ным. Проанализируем, как изменится это распределение, если будет учтено, что в статистическую совокупность, для которой оно построено, добавятся элементы со значительно меньшей прочностью.

Как было показано выше, начальные моменты обычного вариационного ряда (m_k) и «исправленного» (m'_k) связаны соотношением (10).

Тогда выражения (19) для центральных моментов примут вид:

$$\begin{aligned}\mu'_2 &= K_2 m_2 - K_1^2 m_1^2; \\ \mu'_3 &= K_3 m_3 - 3K_1 K_2 m_2 m_1 + 2K_1^3 m_1^3; \\ \mu'_4 &= K_4 m_4 - 4K_3 K_1 m_3 m_1 + 6K_2 K_1^2 m_2 m_1^2 - 3K_1^4 m_1^4.\end{aligned}\tag{26}$$

Как видим присутствие элементов, нарушенных макродефектами, меняет все моменты распределения, в том числе и те, которые определяют собой асимметрию и эксцесс. С учетом соотношений (19) и (24) показатель асимметрии можно выразить через относительные величины:

$$\beta_1^2 = \frac{(A_3 - 3A_2 + 2)^2}{(A_2 - 1)^3}.$$

Для «исправленного» ряда, в который внесены элементы с макродефектами, получим

$$A'_2 = \frac{K_2 m_2}{K_1^2 m_1^2} = \frac{K_2}{K_1^2} A_2; \quad A'_3 = \frac{K_3 m_3}{K_1^3 m_1^3} = \frac{K_3}{K_1^3} A_3; \quad A'_4 = \frac{K_4 m_4}{K_1^4 m_1^4} = \frac{K_4}{K_1^4} A_4.$$

Тогда показатель асимметрии примет вид:

$$\beta_1^{2'} = \frac{\left(\frac{K_3}{K_1^3} A_3 - 3 \frac{K_2}{K_1^2} A_2 + 2 \right)^2}{\left(\frac{K_2}{K_1^2} A_2 - 1 \right)^3}.\tag{27}$$

Аналогично получим выражение для показателя эксцесса:

$$\beta_2' = \frac{\frac{K_4}{K_1^4} A_4 - 4 \frac{K_3}{K_1^3} A_3 + 6 \frac{K_2}{K_1^2} A_2 - 3}{\left(\frac{K_2}{K_1^2} A_2 - 1 \right)^2}.\tag{28}$$

Если исходное распределение симметрично, то с учетом (23) и (25) получим, что показатели асимметрии и эксцесса «исправленного» ряда зависят только от относительной величины A_2 , которая связана с вариацией значений случайной величины ($A_2 = \eta^2 + 1$).

Исследуем, как влияет наличие макродефектов на закон распределения прочности структурных элементов массива. Как и в предыдущей задаче для простоты изложения будем полагать, что прочность дефектных элементов

близка нулю. В этом случае коэффициент влияния трещин определяется формулой (12).

Определим для рассмотренного выше примера ($m_1 = 1$, $A_2 = \eta^2 + 1 = 1,2$) моменты «исправленного» ряда по формулам (26) для различных значений расстояния между трещинами и подсчитаем соответствующие коэффициенты асимметрии и эксцесса (табл. 1).

Из таблицы видно, что с уменьшением расстояния между трещинами l_m , т.е. с ростом интенсивности трещин, значения асимметрии и эксцесса увеличиваются.

Точки с координатами (β_1^2', β_2') , нанесенные на график Пирсона, с увеличением плотности трещин все более удаляются от точки, соответствующей нормальному закону (рис. 4). Траектория движения точки для заданного значения $A_2 = 1,2$ проходит вблизи линий, соответствующих гамма-распределению и распределению Вейбулла. При других сочетаниях моментов симметричного распределения (например, при $A_2 = 1,3$) значения асимметрии и эксцесса таковы, что движение точки осуществляется вблизи линии логарифмически нормального распределения (табл. 2).

Таблица 1

Значения «исправленных» показателей асимметрии и эксцесса для исходного распределения с параметром $A_2 = 1,2$

$\frac{l_m}{l_0}$	ν	β_1^2'	β_2'
1,0	0,50	1,33	4,11
1,5	0,60	0,76	3,46
2,0	0,66	0,50	3,19
2,5	0,71	0,36	3,05
3,0	0,75	0,27	2,92
10,0	0,90	0,09	2,97

Искусственное внесение элементов с нулевой прочностью в статистический ряд меняет значения асимметрии и эксцесса, а, следовательно, и вид распределения. Из рис. 4 видно, что с уменьшением расстояния между трещинами отклонение от симметричного распределения становится все более значительным. Формально, для приведенного примера при $(l_m/l_0) < 1$ распределение становится близким к экспоненциальному закону. Однако это противоречит физической сути задачи, свидетельствуя о глубоких качественных изменениях в среде, где элементы с нулевой прочностью становятся преобладающими, а сама среда по своим свойствам приближается к однородной сыпучей. Очевидно, что

если полагать прочность дефектных элементов равной нулю, случай $(l_m/l_0) < 1$ следует исключить из рассмотрения.

Таблица 2

Значения «исправленных» показателей асимметрии и эксцесса для исходного распределения с параметром $A_2=1,3$

$\frac{l_m}{l_0}$	ν	β_1^2	β_2'
1,0	0,5	1,15	4,83
1,5	0,6	0,65	4,05
2	0,66	0,42	3,69
2,5	0,71	0,30	3,50
3	0,75	0,22	3,38
10	0,9	0,03	3,05

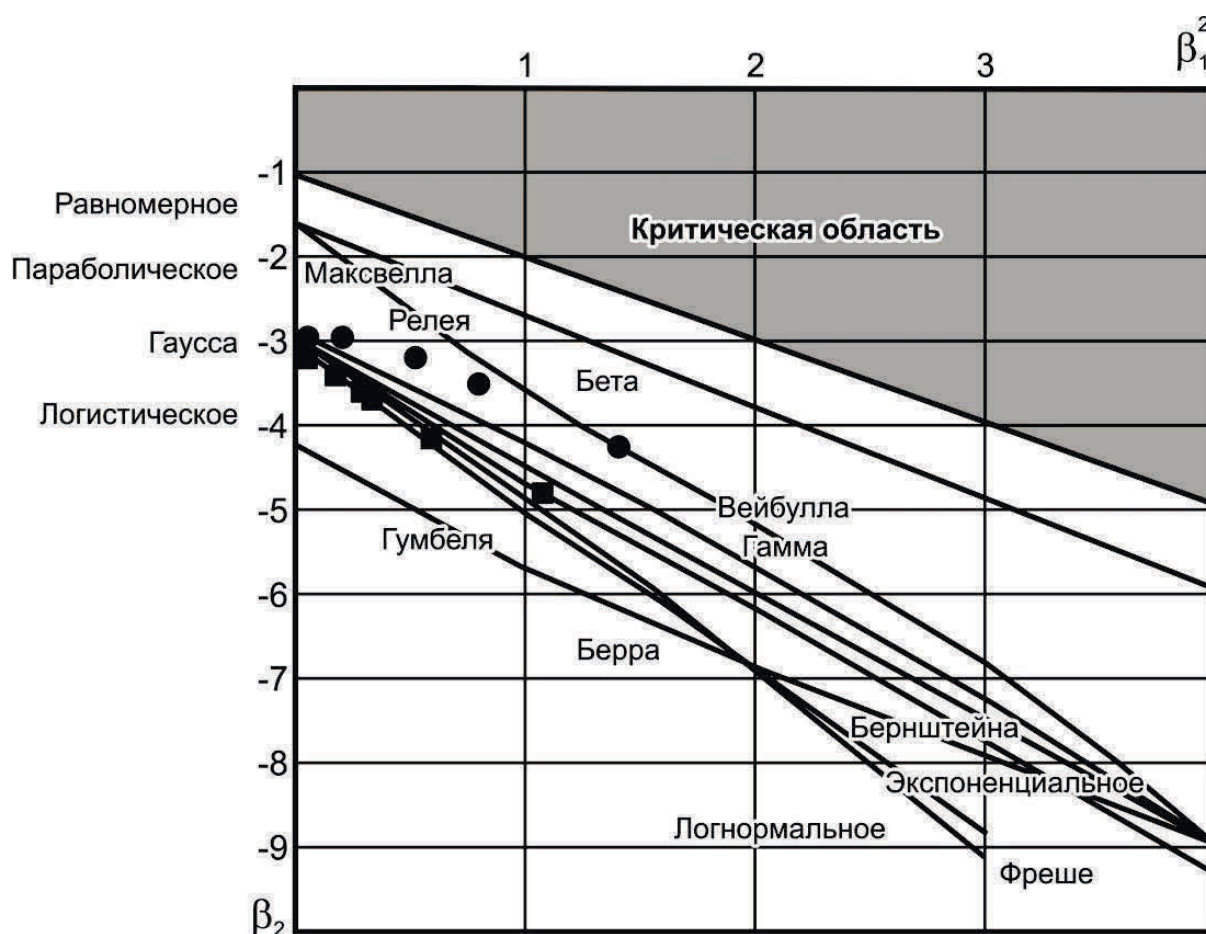


Рис. 4. Диаграмма Пирсона с точками для статистических распределений, в которые условно внесены элементы с макродефектами: ● – точки, соответствующие исходному ряду с соотношением начальных моментов $A_2=1,2$; ■ – точки, соответствующие исходному ряду с соотношением начальных моментов $A_2=1,3$

Таким образом, наличие трещин в реальном породном массиве не только оказывает влияние на статистические оценки исследуемого количественного признака, но и меняет закон распределения вероятностей всех его механических параметров. Вид «исправленного» распределения зависит от соотношений начальных моментов исходного статистического распределения, полученного как результат опробования ненарушенных структурных элементов. Степень отклонения прочности элементов от симметричного распределения определяется расстоянием между трещинами.

Список литература

1. Шашенко А.Н. Деформируемость и прочность массивов горных пород: монография // А.Н. Шашенко, Е.А. Сдвижкова, С.Н. Гапеев. – Д.: Національний гірничий університет, 2008. – 224 с.
2. Шашенко А.Н., Тулуб С.Б., Сдвижкова Е.А. Некоторые задачи статистической геомеханики. – К.: Пульсари, 2001. – 243 с.
3. Сдвижкова Е.А., Бабец Д.В. Влияние структурной неоднородности породного массива на статистическое распределение его физико-механических свойств // Науковий вісник НГУ. – №9. – 2003. – С. 95-98.
4. Глушко В.Т., Виноградов В.В. Разрушение горных пород и прогнозирование проявлений горного давления. – М.: Недра, 1980. – 214 с.

*Рекомендована к публікації д.т.н. Роенком А.М.
Надійшла до редакції 23.03.2015*