

А.Д. ПОЛУЛЯХ, д-р техн. наук
(Україна, Дніпропетровськ, ГП "Укрніиуглеобогачення"),

Д.А. ПОЛУЛЯХ, канд. техн. наук
(Україна, Дніпропетровськ, Государственное ВУЗ "Национальный горный университет"),

И.В. ЕРЕМЕЕВ
(Россия, Гуково, ЦОФ "Гуковская")

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРОУПЛОТНЕНИЯ УГОЛЬНОГО ШЛАМА ПРИ ОБЕЗВОЖИВАНИИ НА СИТЕ ВИБРАЦИОННОГО ГРОХОТА

На конечной стадии обезвоживания, где начинается виброуплотнение шлама, для высококонцентрированной суспензии характерно наличие пространственной структуры, способной сопротивляться напряжению, которое не превосходит некоторой величины τ_c , называемой напряжением сдвига или пределом текучести [1]. Если же напряжение в материале превышает предел текучести, то структура его разрушается и происходит медленное сдвиговое течение со скоростью, пропорциональной избыточной скорости сдвига [2], т.е. материал ведет себя как ньютоновская жидкость при сдвиговом напряжении $\tau - \tau_c$.

Материал, отвечающий указанным свойствам, носит название реологического тела Бингама-Шведова [3].

В результате анализа сил, действующих на материал, разработана динамическая расчетная схема инерционного вязкопластичного материала, находящегося под действием гармонической возмущающей силы (рис. 1).

В соответствии с принятой динамической схемой уравнение движения слоя на вибрирующей поверхности будет иметь вид

$$m\ddot{y} + \eta\dot{y} + 2h\tau_c (\text{sgn } \dot{y} + 1) = F \cos \omega t, \quad (1)$$

где $m\ddot{y} = \rho h\ddot{y}$ – сила инерции слоя; $y = \varepsilon h$ – вертикальное перемещение слоя; $\eta\dot{y}$ – сила вязкого трения в слое; $\dot{y} = h\dot{\varepsilon}$ – скорость вертикального перемещения слоя; $\dot{\varepsilon}$ – скорость деформации слоя; $m = \rho h$ – масса слоя; η – коэффициент вязкости; h – толщина слоя; ρ – плотность материала; τ_c – напряжение сдвига; $F \cos \omega t$ – возмущающая сила, где F и ω – амплитуда и частота возмущающей силы.

На конечной стадии процесса обезвоживания высота слоя изменяется медленно, так, что $dh/dt \ll 1$.

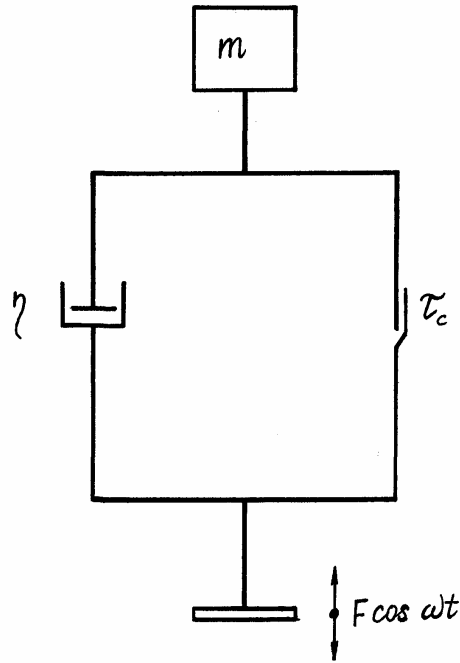


Рис. 1. Расчетная динамическая схема инерционного вязкопластичного материала на вибрирующей поверхности

Уравнение (1) содержит нелинейность, обусловленную функцией $\text{sgn } \dot{y}$. Для решения уравнений такого типа используют методы поэтапного интегрирования [4], либо методы, основанные на линеаризации уравнения движения.

Для приведения уравнения (1) к линейному виду воспользуемся методом энергетического баланса [5], в соответствии с которым нелинейная сила сухого трения может быть заменена эквивалентной в энергетическом отношении линейной силой $b_o \dot{y}$, для которой коэффициент b_o определяется, исходя из условия равенства работ, совершаемых обеими силами за период колебаний, т.е.

$$\int_0^T \tau_c \text{sgn } \dot{y} \cdot \dot{y} \cdot dt = \int_0^T b_o \dot{y}^2 dt. \quad (2)$$

В первом приближении можно принять, что в стационарном режиме колебательный процесс является гармоническим.

Из уравнения (1) видно, что нелинейная сила трения проявляется только для положительных значений скорости, а функция $\text{sgn } \dot{y}$ принимает значения 0 и 1. Тогда ожидаемый закон колебаний для скорости перемещения слоя следующий

$$\dot{y} = -a\omega \sin \omega t, \quad (3)$$

где a и ω – амплитуда и частота колебаний слоя, соответственно.

Подставим выражение (3) в (2) и получим

$$\int_0^T b_o \dot{y}^2 dt = b_o a^2 \varpi \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi = b_o \pi a^2 \varpi, \quad (4)$$

где $\psi = \omega t$.

Вычислим интеграл в левой части (2) для нелинейной силы сопротивления

$$\int_0^T \tau_c \dot{y} \operatorname{sgn} \dot{y} \cdot dt = -\tau_c a \int_0^{2\pi} \sin \psi \operatorname{sgn} \dot{y} \cdot d\psi = 4\tau_c a. \quad (5)$$

Приравняв результаты вычислений (4) и (5) определим эквивалентный коэффициент трения

$$b_o = \frac{4}{\pi a \varpi} \tau_c.$$

После определения коэффициента b_o задача сводится к исследованию эквивалентной линейной динамической системы, для которой сила сухого трения

$$2h\tau_c (\operatorname{sgn} \dot{y} + 1) \approx 2h\tau_c (by + 1), \quad (6)$$

где $b = 4/\pi a \varpi$.

Движение линеаризованной динамической системы будет описываться уравнением

$$m\ddot{y} + (\eta + 2bh\delta c) \dot{y} + 2h\tau_c = F \cos \omega t. \quad (7)$$

Для системы с неупругим сопротивлением колебания отстают от возмущающей силы. Поэтому, если в первом приближении колебания происходят по закону $y = a \cos \omega t$, то закон изменения возмущающей силы может быть записан как $F \cos(\omega t + \varphi)$, где φ – фазовый угол. Тогда уравнение (7) линеаризованной динамической системы будет описываться уравнением

$$m\ddot{y} + (\eta + 2bh\tau_c) \dot{y} + 2h\tau_c = F \cos(\omega t + \varphi). \quad (8)$$

Для определения фазы колебаний φ рассмотрим системы в момент наибольшего отклонения системы от положения равновесия, т.е. когда $\cos \omega t = 1$.

Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство

При этом $y = a$, $\dot{y} = 0$, $\ddot{y} = -a\omega^2$. При постановке этих значений в уравнение (8) имеем

$$F \cos \varphi = 2h\tau_c - ma\omega^2. \quad (9)$$

Когда же система проходит через положение равновесия $\cos \omega t = 0$. При этом $y = 0$, $\dot{y} = -a\omega$, $\ddot{y} = 0$. подставив эти значения в уравнение (8), получим

$$F \sin \varphi = (\eta + 2bh\tau_c) a\omega - 2h\tau_c. \quad (10)$$

Возведя два последних равенства в квадрат и сложив их, получим выражение, связывающее величину возмущающей силы и амплитуду колебаний системы:

$$F^2 = (2h\tau_c - ma\omega^2)^2 + (Ba\omega - 2h\tau_c)^2, \quad (11)$$

где $B = \eta + 2bh\tau_c$.

Фаза колебаний при этом

$$\varphi = \arcs \cos \frac{2h\tau_c - ma\omega^2}{F}.$$

Уравнение (8) представляет собой линейное уравнение вынужденных колебаний инерционного вязкопластического тела, для которого сила сухого трения представлена в виде постоянной составляющей $2h\tau_c$. В этом уравнении в функции вязкого сопротивления присутствуют амплитуда a и частота ω колебаний слоя материала. Кроме того, известно, что коэффициент вязкости η также является функцией a и ω [6, 7].

Разделим левую и правую части уравнения (8) на $m = \rho h$, тогда, используя обозначение, сделанное в (11),

$$\ddot{y} + \frac{B}{m} \dot{y} + \frac{2\tau_c}{\rho} - \frac{F}{m} \cos(\omega t + \varphi) = 0. \quad (12)$$

Введем новую переменную $u = \dot{y}$, $\dot{u} = \ddot{y}$, после чего уравнение (12) будет иметь вид

$$\dot{u} + \frac{B}{m}u + \frac{2\tau_c}{\rho} - \frac{F}{m}\cos(\omega t + \varphi) = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка [8], решение которого известно

$$\dot{y} = u = \ell^{-\frac{B}{m}t} \left\{ \int \left[\frac{F}{m}\cos(\omega t + \varphi) - \frac{2h\tau_c}{m} \right] \ell^{\frac{B}{m}t} dt + C_o \right\}, \quad (14)$$

где C_o – начальное значение.

Интеграл, входящий в (14) является табличным [8], а его решение для перемещения вибрирующего слоя в стационарном процессе ($t \rightarrow \infty$) после преобразований принимает вид:

$$y = h_o - \frac{2h\tau_c}{B}t + \frac{Fm}{B^2 + m^2\omega^2} \times \left[\frac{B}{m\omega}\sin(\omega t + \varphi) - \cos(\omega t + \varphi) - \frac{B^2 + m^2\omega^2}{m\omega B}\sin\varphi \right]. \quad (15)$$

Уравнение (15) описывает перемещение поверхности слоя материала при колебательном сдвиговом течении и содержит эволюционную

$$y_1 = h_o - \frac{2h\tau_c}{B}t + \frac{F}{\omega B}\sin\varphi \quad (16)$$

и осциллирующую

$$y_2 = \frac{Fm}{B^2 + m^2\omega^2} \left[\frac{B}{m\omega}\sin(\omega t + \varphi) - \cos(\omega t + \varphi) \right] \quad (17)$$

составляющие. Виброуплотнение слоя происходит без изменения его массы при постоянном сопротивлении. Естественно, что уплотнение слоя возможно только тогда, когда напряжение в материале превысит напряжение сдвига τ_c .

Эволюционная составляющая скорости уплотнения в стационарном режиме $dy/dt = 2h\tau_c/B$. Здесь высота слоя h присутствует как параметр.

Коэффициент вязкости концентрированной суспензии зависит от параметров вибрации как [9]

$$\eta = \eta_o + \frac{k}{a\omega^3},$$

где k – постоянный коэффициент, а η_o – коэффициент остаточной вязкости, обусловленной вибрационным тиксотропным разрушением дисперсионной среды.

Тогда скорость уплотнения слоя материала на вибрирующем сите

$$\frac{dy}{dt} \approx - \frac{2h\tau_c}{\eta_o + \frac{k}{a\omega^3} + \frac{8h\tau_c}{\pi a\omega}}. \quad (18)$$

Входящие в эту формулу параметры τ_c , η_o и k подлежат экспериментальному определению.

Таким образом, разработана математическая модель конечной стадии процесса обезвоживания суспензии на сите виброгрохота, когда слой материала характеризуется вязкопластическими свойствами. На этой стадии обезвоживание материала происходит за счет виброуплотнения слоя и вытеснения свободной влаги из порового пространства.

Как видно из выражения (18) скорость уплотнения слоя зависит от текущей высоты слоя h , напряжение сдвига материала слоя τ_c , эффективной вязкости η , а также от частоты ω и амплитуды a колебаний рабочей поверхности.

Эффективная вязкость и напряжение сдвига материала слоя изменяются в процессе уплотнения за счет увеличения концентрации твердой фазы. Так, для отходов флотации ЦОФ "Суходольская" и ЦОФ "Криворожская" зависимости эффективной вязкости от содержания твердого, имеют нелинейный характер [10].

Аналогичный характер имеют зависимости напряжения сдвига от содержания твердой компоненты [10, 11].

Подобные зависимости могут быть хорошо аппроксимированы выражениями [12]:

$$\eta = \eta_o \cdot \frac{h_1 - h_o^*}{h - h_o^*}, \quad (19)$$

$$\tau_c = \tau_o \cdot \frac{h_2 - h_o^*}{h - h_o^*}, \quad (20)$$

где η_o и τ_o – эффективная вязкость и напряжение сдвига при некотором на-

Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство

чальном содержании твердого; h_1 , h_2 и h – начальная и текущая высоты слоя; h_o^* – высота слоя при плотно упакованной смеси материала.

Разность $h - h_o^*$, стоящая в знаменателях выражений (19) и (20), положительна и всегда больше 0.

Параметрами аппроксимации при описании экспериментально полученных зависимостей служат η_o , τ_o , h_1 и h_2 .

Известно также [6, 7, 12], что эффективная вязкость дисперсной среды существенно зависит от динамических параметров рабочей поверхности, т.е. $\eta = \eta(a, \omega)$. Предлагаемые зависимости вибровязкости от частоты и амплитуды колебаний следующие: $\eta = \eta_o + k / \omega^3 a$ [4]; $\eta = \eta_o + \alpha / u$, $\eta = \eta_o \exp(\alpha / u)$ [6]; $\eta = \eta_o + (\tau - \tau_c) / (1 + \alpha u) \dot{\epsilon}$ [7] и т.д., где η_o – вязкость предельно разрушенной дисперсной структуры; α , k – коэффициенты тиксотропии; $u = \alpha \omega^2 / g$ – интенсивность вибрации; $\dot{\epsilon}$ – градиент скорости деформирования материала.

Многообразие предлагаемых зависимостей $\eta(\alpha, \omega)$ объясняется различием испытываемых материалов и способов приложения вибрации. Поэтому для построения адекватной зависимости $\eta(\alpha, \omega)$ необходимо проведение представительного эксперимента с приложением вибрационного воздействия к образцу испытываемого материала в необходимом диапазоне изменения амплитуды и частоты.

Используя зависимости (19) и (20) для эффективной вязкости и напряжения сдвига, а также одну из зависимостей $\eta(\alpha, \omega)$, например, $\eta = \eta_o + k / \omega^3$, перепишем уравнение (18)

$$\frac{dh}{dt} \approx - \frac{2\pi \tilde{h}_2 \tau_o a \omega^3 h}{\pi \tilde{h}_1 (\eta_o a \omega^3 + k) + 8 \tilde{h}_2 \tau_o \omega^2 h}, \quad (21)$$

где обозначено: $\tilde{h}_1 = h_1 - h_o^*$, $\tilde{h}_2 = h_2 - h_o^*$.

Интегрируя уравнение (21)

$$\frac{\tilde{h}_1 (\eta_o a \omega^3 + k)}{2 \tilde{h}_2 \tau_o \omega^3 a} \int \frac{dh}{h} + \frac{4}{\pi a \omega} \int dh = - \int dt + C \quad (22)$$

при начальном условии

$$h = h_o \text{ при } t = 0, \quad (23)$$

Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство

получим

$$t = \frac{4}{\pi a \omega} (h_o - h) - \frac{\tilde{h}_1 (\eta_o a \omega^3 + k)}{2 \tilde{h}_2 \tau_o \omega^3 a} \ln \frac{h}{h_o}. \quad (24)$$

Выражение (24) является уравнением кинетики уплотнения слоя материала на вибрирующей рабочей поверхности в процессе обезвоживания.

Для построения зависимостей влияния динамических параметров рабочей поверхности на показатели уплотнения слоя обезвоживаемого материала был проведен вычислительный эксперимент, в котором коэффициенты уравнений (21) и (24) предварительно выбраны в соответствие с результатами испытаний материалов, приведенными в работах [6, 7, 10-12]: $\tau_o = 10 \text{ Н/м}^2$, $k = 10^6 \text{ Н/м} \cdot \text{с}^2$, $\eta_o = 10^3 \text{ Н} \cdot \text{с/м}^2$, $\tilde{h}_1 = \tilde{h}_2 = 0,1 \text{ м}$. По результатам вычислений построены графики влияния амплитуды и частоты колебаний рабочей поверхности на скорость процесса уплотнения материала в диапазоне изменения амплитуды от 0,25 до 4 мм и частоты от 25 до 400 рад/с (рис. 2). Как видно из графиков, в традиционном диапазоне частот и амплитуд колебаний существующих грохотов повышение частоты значительно эффективнее сказывается на повышении скорости уплотнения слоя, чем увеличение амплитуды колебаний. Например, для принятых констант материала повышение частоты колебаний рабочей поверхности от 25 до 200 рад/с. сопровождается интенсивным ростом скорости уплотнения для слоя 0,1 м, а при дальнейшем повышении частоты колебаний скорость уплотнения резко снижается. С уменьшением слоя материала скорость уплотнения также снижается.

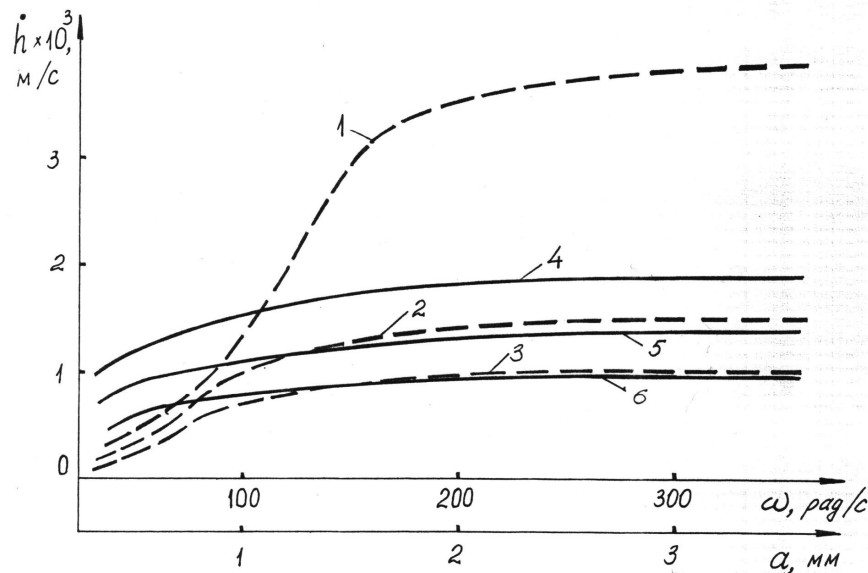


Рис. 2. Графики влияния амплитуды и частоты колебаний рабочей поверхности на скорость процесса уплотнения материала:

1, 2, 3 – $f(\omega)$ при $a=2 \text{ мм}$; 4, 5, 6 – $f(a)$ при $\omega=100 \text{ рад/с}$; 1, 4 – $h = 0,1 \text{ м}$;
2, 5 – $h = 0,5 \text{ м}$; 3, 6 – $h = 0,01 \text{ м}$

Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство

Увеличение амплитуды колебаний для модельного материала является эффективным до величины 2 мм, а при дальнейшем повышении амплитуды рост скорости уплотнения незначителен.

На рис. 3 приведены кривые кинетики уплотнения слоя модельного материала при амплитуде колебаний рабочей поверхности 2 мм и частотах от 25 до 400 рад/с, а на рис. 4 кинетические кривые при $\omega = 150$ рад/с и амплитудах от 0,5 до 4 мм.

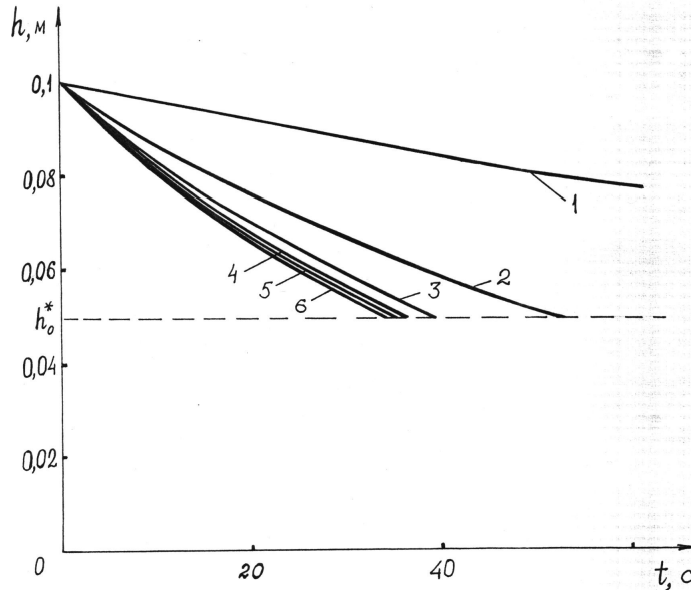


Рис. 3. Кривые кинетики уплотнения слоя модельного материала при амплитуде колебаний рабочей поверхности 2 мм и частотах:
1 – 25; 2 – 50; 3 – 100; 4 – 200; 5 – 300; 6 – 400 рад/с

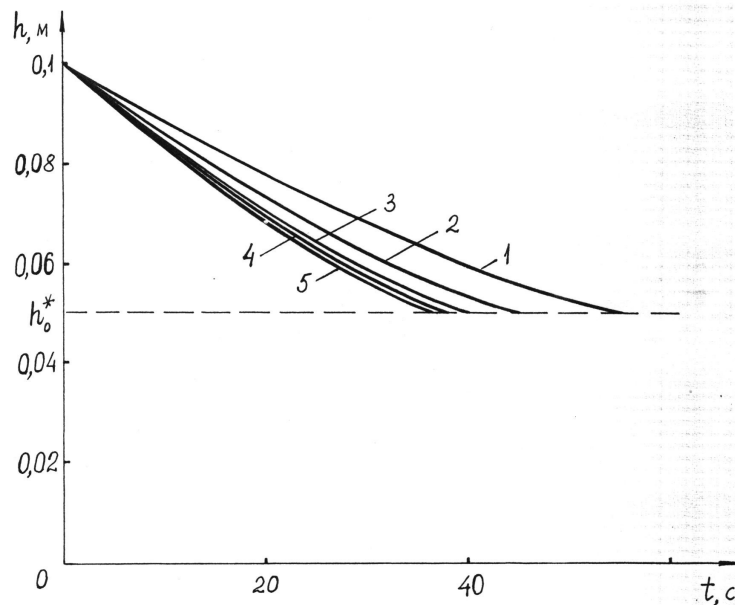


Рис. 4. Кинетические кривые при $\omega = 150$ рад/с и амплитудах:
1 – 0,5; 2 – 1; 3 – 2; 4 – 3; 5 – 4 мм

Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство

Из рис. 3, 4 следует, что время перехода обезвоживаемого материала в структурированное состояние составляет порядка 40 с. После этого времени, для уплотнения структурированного материала необходимо изменение характера колебаний, которое на одном и том же грохоте может быть достигнуто изменением угла наклона конечной части рабочей поверхности. При этом направление колебаний должно быть более вертикальным.

Таким образом, из разработанной модели обезвоживания следует, что рабочая поверхность обезвоживающего грохота должна состоять из трех участков: первый – участок сгущения с переходом исходной суспензии в концентрированное состояние; второй – участок структурирования с переходом концентрированной суспензии в вязкопластичный материал; третий – участок уплотнения с переходом вязкопластичного материала в уплотненное состояние подобное состоянию упругопластичного тела.

Выводы

Процесс обезвоживания суспензии на сите виброгрохота состоит из трех этапов: на первом этапе, характеризуемом значительным содержанием жидкой фазы, происходит предварительное обезвоживание материала в виде его сгущения, обусловленное главным образом гидростатическим давлением слоя суспензии, во втором этапе происходит подготовительное обезвоживание материала в виде его структурирования, обусловленное главным образом гравитационной и возмущающей силой колебаний, сопровождающееся выделением основной части свободной влаги из порового пространства слоя; на третьем этапе происходит окончательное обезвоживание материала в виде его уплотнения, обусловленное главным образом возмущающей силой колебаний, сопровождающееся выделением остаточной части свободной влаги из порового пространства слоя.

Список литературы

1. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. – М.: Мир, 1964. – 216 с.
2. Ричардсон Э. Динамика реальных жидкостей. – М.: Мир, 1965. – 328 с.
3. Урьев Н.Б. Высококонцентрированные дисперсные системы. – М.: Химия, 1980. – 320 с.
4. Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. – М.: Наука, 1964. – 412 с.
5. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
6. Руденко И.Ф. Формование изделий поверхностными виброустройствами. – М.: Стройиздат, 1971. – 104 с.
7. Кунное Г.Я. Вибрационная технология бетона. – Л.: Стройиздат, 1967. – 168 с.
8. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
9. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.
10. Фоменко Т.Г., Кондратенко А.Ф. Отходы флотации и их свойства. – М.: Недра, 1977. – 125 с.
11. Полулях А.Д., Сансиев В.Г., Гарус В.К. Экспериментальные исследования дефор-

Зневоднення та сушіння. Водно-шламове господарство

мационних свойств павлоградских концентрированных шламов // Обогащение полезных ископаемых: Науч.-техн. сб. – 2004. – Вып. 19(60). – С. 97-107.

12. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел. – М.: Наука, 1976. – 328 с.

© Полулях А.Д., Полулях Д.А., Еремеев И.В., 2013

Надійшла до редколегії 12.10.2013 р.

Рекомендовано до публікації д.т.н. П.І. Піловим