МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Матеріали методичного забезпечення
поглибленого вивчення розділу

Дніпро
2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ГЕОЛОГОРОЗВІДУВАЛЬНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра вищої математики

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Матеріали методичного забезпечення
поглибленого вивчення розділу

Дніпро
НГУ
2018

Інтегральне числення функції багатьох змінних. Матеріали методичного забезпечення поглибленого вивчення розділу студентами технічних спеціальностей / Упоряд.: Т.С. Кагадій, Л.І. Шелест. – Дніпро : НГУ, 2018. – 62 с.

Упорядники: Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (розділи II, III);
Л.І. Шелест, ст. викл. (розділи I, II, Ш).

Подано основні теоретичні відомості до розділу «Інтегральне числення функції багатьох змінних», наведено розв’язання задач підвищеної складності та приклади для самостійного розгляду.

Відповідальна за випуск зав. кафедри вищої математики О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

ВСТУП

Дані методичні матеріали є третьою частиною з циклу, що призначений для студентів, які цікавляться вищою математикою і прагнуть поглибити свої знання з цього предмету.

Мета цього видання:

- сформувати й розвинути математичне мислення студентів, розвити у них практичні навички при розв’язуванні нестандартних задач;
- не виходячи за рамки програми курсу для технічних спеціальностей, допомогти студентам самостійно вивчити нові прийоми та методи розв'язання, а також ознайомитися з деякими теоретичними відомостями.

Навчальний посібник складається з таких розділів: подвійний інтеграл, потрійний інтеграл, криволінійний інтеграл. Крім різноманітних та складних прикладів, наведені деякі додаткові теоретичні відомості.

І. ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

1. Означення подвійного інтеграла

Подвійним інтегралом від неперервної функції $f(x,y)$ по обмеженій замкнутій області $Д$ на площині XOY називають число

$$\iint\limits_{\infty} f(x,y)\,dxdy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0 \\ \max|\Delta y_i|\to 0}} \sum_i \sum_j f\left(x_i, y_j\right)\Delta x_i \Delta y_i ,$$

де $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ і сума розповсюджується на ті значення i, j, для яких $\left(x_i, y_j\right) \in Д$.

Теорема існування подвійного інтеграла: для будь-якої функції $z = f(x,y)$ неперервній в обмеженій замкнутій області, яка має площу σ існує подвійний інтеграл.

Якщо область $Д$ задана нерівностями $a \le x \le b \quad y_1(x) \le y \le y_2(x)$, де $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні функції на відрізку $[a;b]$, то відповідний подвійний інтеграл може бути обчисленим за формулою:

$$\iint\limits_{Д} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy .$$

2. Властивості подвійного інтеграла

1^0. Постійний множник k можна винести за знак подвійного інтеграла:

$$\iint\limits_{Д} k f(x,y)\,dxdy = k\iint\limits_{Д} f(x,y)\,dxdy .$$

2^0. Подвійний інтеграл від суми декілька функцій дорівнює сумі подвійних інтегралів от доданків:

$$\iint\limits_{Д}\left(f\left(x,y\right)+g\left(x,y\right)\right)dxdy=\iint\limits_{Д}f\left(x,y\right)dxdy+\iint\limits_{Д}g\left(x,y\right)dxdy.$$

3^0. Якщо в області інтегрування *Д* має місце нерівність $f\left(x,y\right)\geq 0$, то і $\iint\limits_{Д}f\left(x,y\right)dxdy\geq 0$.

4^0. Якщо в області інтегрування функції $f\left(x,y\right)$ и $g\left(x,y\right)$ задовольняють нерівності $f\left(x,y\right)\geq g\left(x,y\right)$, то

$$\iint\limits_{Д}f\left(x,y\right)dxdy\geq\iint\limits_{Д}g\left(x,y\right)dxdy.$$

5^0. Якщо область інтегрування розбита на декілька частин $Д_1, Д_2, ..., Д_k$, то $\iint\limits_{Д}f\left(x,y\right)dxdy\geq\iint\limits_{Д_1}f\left(x,y\right)dxdy+\iint\limits_{Д_2}f\left(x,y\right)dxdy+...+\iint\limits_{Д_k}f\left(x,y\right)dxdy$.

3. Теорема про середнє значення

Нехай, функція $f\left(x,y\right)$ неперервна в замкнутій обмеженій області *Д*. Тоді в області *Д* існує така точка $P_0\left(x_0,y_0\right)$, що

$$\iint\limits_{Д}f\left(x,y\right)dxdy=f\left(x_0,y_0\right)S,$$

де S – площа області *Д*, $f\left(x_0,y_0\right)$ називається середнім значенням функції $f\left(x,y\right)$ в області *Д*.

4. Оцінка подвійного інтеграла

Нехай m – найменше, M – найбільше значення функції $f\left(x,y\right)$ в області *Д* і нехай S є площа області *Д*. Тоді

$$mS\leq\iint\limits_{Д}f\left(x,y\right)dxdy\leq MS.$$

5. Заміна змінних в подвійному інтегралі

Якщо замість змінних x, y вводяться нові змінні u, v по закону $x=x\left(u,v\right)$, $y=y\left(u,v\right)$, і ці функції неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку, а також є функції $u=u\left(x,y\right)$, $v=v\left(x,y\right)$, які є перетворенням оберненим до $x=x\left(u,v\right)$, $y=y\left(u,v\right)$, мають ці ж властивості, і якобіан

$$\dot{I} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{Д(x,y)}{Д(u,v)}, \text{ то}$$

справедлива формула $\iint\limits_{Д} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{Д'} f\left(x(u,v), y(u,v)\right)\left|\dot{I}\right|dudv$.

У випадку переходу до полярних координат ρ, φ за формулами $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ маємо:

$$\iint\limits_{Д} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{Д'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.$$

Приклад 1.1. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} xy^2 dy$.

Розв'язання.

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} xy^2 dy = \int\limits_0^1 dx x \frac{y^3}{3}\Bigg|_{x^2}^{x} = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 x\left(x^3 - x^6\right)dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 x\left(x^4 - x^7\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8}\right) = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{40}.$$

Відповідь: $\frac{1}{40}$**.**

Приклад 1.2. Обчислити $\int\limits_a^A dx \int\limits_b^B f(x,y)dy$, якщо $f(x,y) = F''_{xy}(x,y)$.

Розв'язання.

$$f(x,y) = F''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

$\int\limits_a^A dx \int\limits_b^B \frac{\partial^2 F}{dxdy} dy = \int\limits_a^A dx \int\limits_b^B \frac{\partial}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)dy = \{$спочатку обчислюємо внутрішній інтеграл $\int\limits_b^B \frac{\partial}{dy}\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right)dy = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\Bigg|_b^B = \frac{\partial F(x,B)}{\partial x} - \frac{\partial F(x,b)}{\partial x}$,

потім обчислюємо зовнішній інтеграл $\}$

$$= \int\limits_0^A \left(\frac{\partial F(x,B)}{\partial x} - \frac{\partial F(x,b)}{dx}\right)dx = F(x,B) - F(x,b)\Bigg|_a^A =$$

$$= F(A,B) - F(A,b) - F(a,B) + F(a,b).$$

Приклад 1.3. Нехай $f(x)$ неперервна функція на відрізку $a \le x \le b$. Довести нерівність $\left(\int\limits_a^b f(x)dx\right)^2 \le (b-a)\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Вказівка. Роздивитись інтеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_a^b \left(f(x)-f(y)\right)^2 dy$.

Розв'язання.

Так як $\left(f(x)-f(y)\right)^2 \ge 0$, то $\int\limits_a^b dx \int\limits_a^b \left(f(x)-f(y)\right)^2 dy \ge 0$.

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_a^b \left(f(x)-f(y)\right)^2 dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_a^b \left(f^2(x)-2f(x)f(y)+f^2(y)\right)dy \ge 0.$$

Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_a^b \left(f^2(x)-2f(x)f(y)+f^2(y)\right)dy = \int\limits_a^b f^2(x)dy -$$

$-\int\limits_a^b 2f(x)f(y)dy + \int\limits_a^b f^2(y)dy =$ { множник $f^2(x)$ в першому інтегралі і $2f(x)$ в другому можна винести за знак інтеграла, бо інтегрування іде по змінній y, а $\int\limits_a^b f(y)dy = \int\limits_a^b f(x)dx$, а третій інтеграл $\int\limits_a^b f^2(y)dy = \int\limits_a^b f^2(x)dx$ } $= f^2(x)y\Big|_a^b - 2f(x)\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b f^2(x)dx =$

$= f^2(x)(b-a) - 2f(x)\int\limits_a^b f(x)dx$ + $\int\limits_a^b f^2(x)dx$.Тепер обчислюємо

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_a^b \left(f(x)-f(y)\right)^2 dy = \int\limits_a^b f^2(x)(b-a)dx -$$

$-2\int\limits_a^b \left(f(x)\int\limits_a^b f(x)dx\right)dx + \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b f^2(x)dx\right)dx =$ { в другому інтегралі

$\int_a^b f(x)dx$ і в третьому $\int_a^b f^2(x)dx$ – це числа і їх можна винести за знак інтегралу }

$$(b-a)\int_a^b f^2(x)dx-2\int_a^b f(x)dx\int_a^b f(x)dx+\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b dx=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx$$

–

$$-2\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2+(b-a)\int_a^b f^2(x)dx=2(b-a)\int_a^b f^2(x)dx-2\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\ge 0$$

Ми довели, що $\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)dx$.

Приклад 1.4. Який знак має інтеграл: $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\ln\left(x^2+y^2\right)dxdy$.

Розв'язання.

Побудуємо область інтегрування, задану нерівністю $|x|+|y|\le 1$. Побудуємо пряму $x+y=1$, після цього побудуємо функцію $|x|+y=1$. Для цього на графіку функції $x+y=1$ витремо ту її частину, яка знаходиться зліва від осі OY, ту частину , яка знаходиться справа від осі відобразимо симетрично осі OY.

Тепер побудуємо графік функції $|x|+|y|=1$. Для цього ту частину графіка $|x|+|y|=1$ знаходиться нижче осі OX витираємо, а ту, що вище відображаємо симетрично осі OX. Получимо квадрат *ABCD*. Графік кривої $|x|+|y|=1$ ділить всю площину на дві частини: на область, яка знаходиться зовні квадрата, та область, яка знаходиться всередині квадрата. Нерівність $|x|+|y|\le 1$ виконується всередині квадрату. Область інтегрування заштрихована (рис. 1).

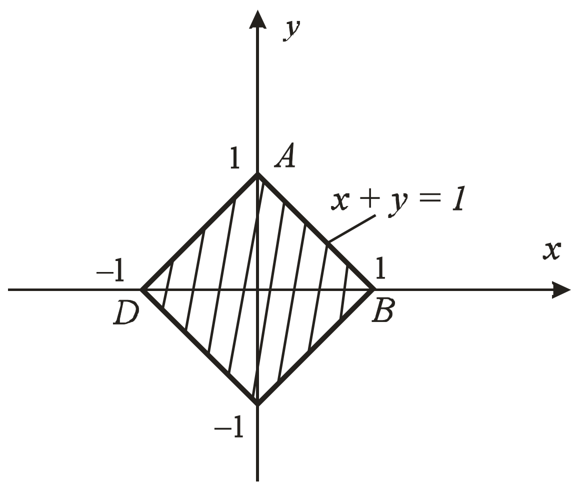

Рис. 1

В цій області в кожній точці (x,y) $\ln\left(x^2+y^2\right)<0$, так як $x^2+y^2<1$.

Доведемо це.

Точки (x, y) задовольняють нерівності

$|x|+|y|\leq 1 \Rightarrow |x|^2+|y|^2+2|x||y|\leq 1$, $|x|^2 = x^2$, $|y|^2 = y^2$, а $2|x||y|\geq 0$, $x^2+y^2\leq 1-2|x||y| \Rightarrow x^2+y^2<1$, а подвійний інтеграл от від'ємної функції дорівнює від'ємному числу.

Приклад 1.5. Оцінити інтеграл $\iint\limits_{|x|+|y|\leq 10} \dfrac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$.

Розв'язання.

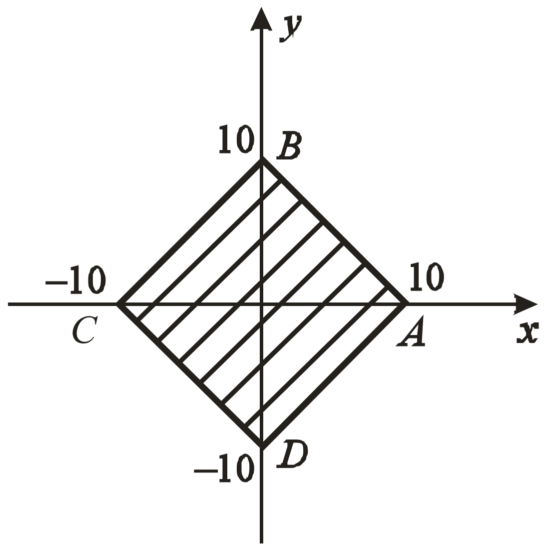

Рис. 2

Побудуємо область інтегрування тим же засобом, яким користувались в прикладі 1.3 (рис. 2). Оцінимо функцію $\dfrac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$:

$$\frac{1}{102}\leq \frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\leq \frac{1}{100},$$

Площа квадрата *АВСД* дорівнює

$$S=\frac{1}{2}BD\cdot CD=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 20=200.$$

Тоді

$$\frac{200}{102}\leq \iint\limits_D \frac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\leq \frac{1}{100}\cdot 200,$$

тобто $1{,}96\leq \iint\limits_D \dfrac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\leq 2$.

Приклад 1.6. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 25} \dfrac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$.

Розв'язання.

Цей інтеграл краще обчислити в полярній системі координат. Зробимо заміну змінних $x=\rho\cos\varphi$, $y=\beta\sin\varphi$, $x^2+y^2=\rho^2$.

Запишемо область інтегрування в полярній системі координат: $\rho\leq 5$, і побудуємо її (рис. 3).

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 25} \frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} = \iint\limits_{r\le\sqrt{5}} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{24+\rho^2}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \frac{\pi d\pi}{\sqrt{24+\rho^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \frac{2\rho d\rho}{\sqrt{24+\rho^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^5 \frac{2\rho d\rho}{\sqrt{24+\rho^2}} = \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} 2\sqrt{24+\rho^2}\Big|_0^5 =$$

$$= \frac{1}{2}2\pi \cdot 2\left(\sqrt{24+25}-\sqrt{24}\right) = \left(7-\sqrt{24}\right)2\pi .$$

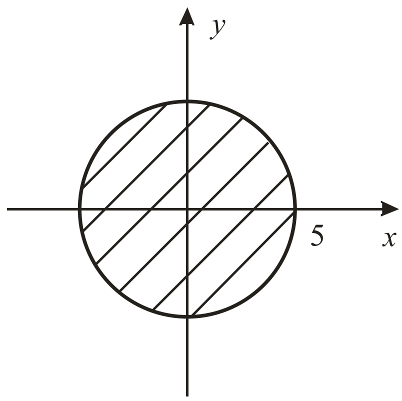

Рис. 3

Приклад 1.7. Перейти до полярних координат ρ і φ, розставити границі інтегрування і одному и другому порядку $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f\left(x,y\right)dy$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння кривих, які обмежують область інтегрування *D* і побудуємо цю область (рис. 4) $x=1$, $x=0$, $y=1-x$, $y=\sqrt{1-x^2}$.
Перейдемо до полярної системи координат і запишемо рівняння кривих, які обмежують область *D*:

$$y=1-x \Rightarrow \rho\sin\varphi = 1-\rho\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}.$$

$$y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \rho = 1.$$

$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f\left(x,y\right)dy =$$

$$\iint\limits_{Д} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho d\varphi =$$

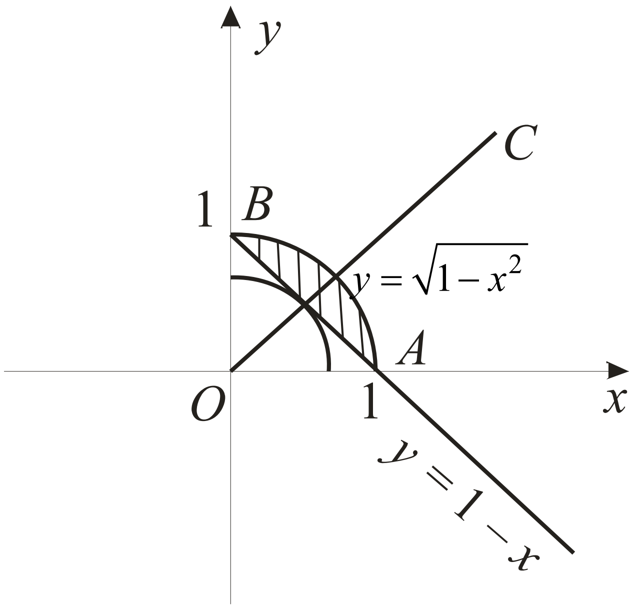

Рис. 4

$\{$ якщо інтегруємо спочатку по φ, а потім по ρ, то для цього проводимо промені з початку координат, які проходять через крайні точки області *D*, це промені OA і OB. Границями зовнішнього інтеграла є кути, під якими ці промені нахилені до додатного напрямку осі OX. Для того, щоб поставити границі внутрішнього інтеграла, треба з початку координат провести промінь OC, який перетинає область *D*. Крива через яку входить цей промінь в область *D* є нижньою границею внутрішнього інтеграла, а через яку виходить – верхньою $\} = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^{1} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho =$

$= \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} d\rho \int\limits_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\varphi =$ { якщо ми зовнішній інтеграл інтегруємо по ρ, а внутрішній по φ, то треба намалювати кола з центром в точці O, між якими міститься область *D*. Зовнішнє коло має рівняння $r = \rho$, а внутрішнє – це коло, яке дотикається до прямої $y = 1 - x$.

Щоб знайти радіус цього кола треба опустити перпендикуляр з точки *O* на пряму $y = 1 - x$. Кут $\angle OAB = \frac{\pi}{4}$. Із трикутника ODA знайдемо OD. $OD = OA\sin\frac{\pi}{4} = \rho\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Рівняння цього кола $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ці радіуси і є границями зовнішнього інтеграла. Щоб поставити границі внутрішнього інтеграла, треба провести коло з центром в початку координат і радіусом r_1, який задовольняє умові $\frac{\sqrt{2}}{2} < r_1 < 1$, і подивитися через яку криву це коло входить в нашу область, через яку виходить. Ці криві і будуть границями внутрішнього інтеграла. Для цього рівняння цих кривих треба розв'язати відносно φ. Ми бачимо, що це коло входить в область *D* через пряму $y = 1 - x$ і через неї виходить. Рівняння цієї прямої $r\left(\sin\varphi + \cos\varphi\right) = 1$, його треба розв'язати відносно φ.

$$\rho\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+\cos\varphi\right)=1 \Rightarrow \rho\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-4\right)\cos\frac{\pi}{4}=1 \Rightarrow \frac{\cancel{2}\rho\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Rightarrow$$

$$\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}\rho}, \quad \varphi=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2}\rho}+2k\pi, \quad \varphi_1=\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\rho\sqrt{2}},$$

$$\varphi_2=\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{\rho\sqrt{2}}\}.$$

Приклад 1.8. Змінити порядок інтегрування в наступних інтегралах:

а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} f(\varphi,\rho)d\rho \quad (a>0)$, б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi,\rho)d\rho \quad (a>0)$,

в) $\int\limits_{a}^{0} d\varphi \int\limits_{0}^{\varphi} f(\varphi,\rho)d\rho \quad (0<a<2\pi)$.

Розв'язання.

а) Запишемо рівняння, які обмежують області інтегрування і побудуємо цю область.

Д: $\varphi=\frac{\pi}{2}$; $\rho=0$; $\varphi=-\frac{\pi}{2}$; $\rho=a\cos\varphi$.

Щоб змінити порядок інтегрування треба область *Д* обмежити колами з центром в початку координат. Одне коло $\rho=a$, друге $\rho=0$. Тепер проведемо дугу кола, яке має рівняння $\rho=b$, де $0<b<a$, ця дуга входить в область *Д* через коло $\rho=a\cos\varphi$ і через нього виходить, тоді розв'яжемо це рівняння відносно φ: $\varphi=\pm\arccos\frac{\rho}{a}$.

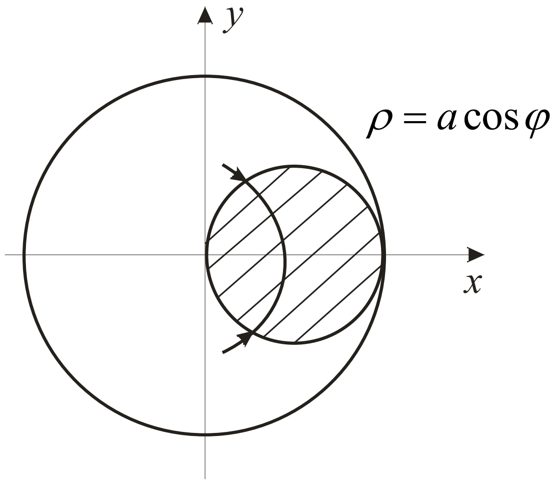

Рис. 5

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} f(\varphi,\rho)d\rho = \int\limits_{0}^{a} d\rho \int\limits_{-\arccos\frac{\rho}{2}}^{\arccos\frac{\rho}{2}} f(\varphi,\rho)d\rho.$$

б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi,\rho)d\rho$.

Побудуємо область *Д* (рис. 6).

Д: $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\rho=a\sqrt{\sin 2\varphi} \Rightarrow \rho^2=a\sin 2\varphi$,
$\varphi=0$, $\rho=0$.

Найбільше значення функції $\rho=a\sqrt{\sin 2\varphi}$, $\rho=a$. Це означає, що область *Д* знаходиться між колами $\rho=a$ і $\rho=0$.

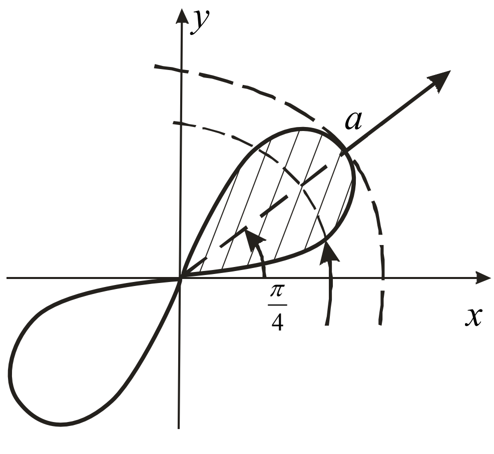

Рис. 6

Коли ми проведемо дугу кола радіуса менше a, то вона входить в область $Д$ і виходить з неї через криву $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$. Розв'яжемо це рівняння відносно φ. $\rho^2 = a\sin 2\varphi$, $\sin 2\varphi = \frac{\rho^2}{a}$, $2\varphi = (-1)^k \arcsin\frac{\rho^2}{a} +$,

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\pi - \arcsin\frac{\rho^2}{a}\right).$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi,\rho)\,d\rho = \int_0^a dr \int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{\rho^2}{a}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\rho^2}{a}} f(\varphi,\rho)\,d\rho.$$

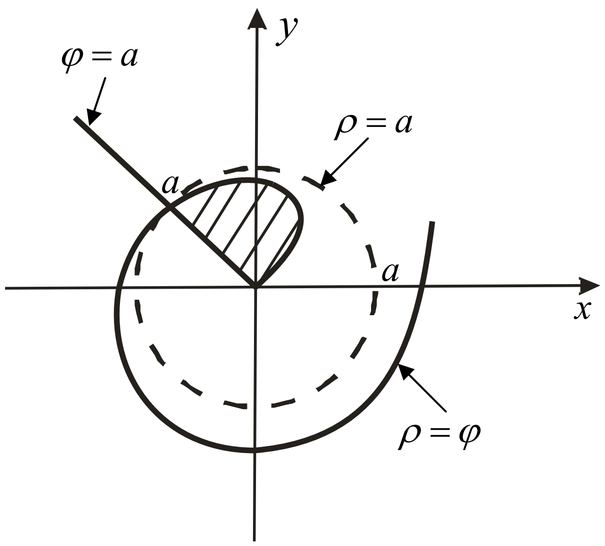

Рис. 7

в) $\int_a^0 d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi,\rho)\,d\rho$.

Усе робимо так, як в попередніх прикладах. $Д: \begin{matrix} \varphi = 0 & \rho = \varphi \\ \varphi = a & \rho = 0 \end{matrix}$.

$$\int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi,\rho)\,d\rho = \int_0^a dr \int_{\rho}^a f(\varphi,\rho)\,d\rho.$$

Приклад 1.9. Замініть подвійний інтеграл однократним за допомогою переходу в полярну систему координат.

а). $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$;

б) $\iint\limits_{Д} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$, $Д$: $\{|y| \le |x|; |x| \le 1\}$;

в) $\iint\limits_{x^2+y^2\le x} f\left(\frac{x}{y}\right)dxdy$.

Розв'язання.

а) Перейдемо до полярної системи координат. Зробимо заміну змінних: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $x^2 + y^2 = \rho^2$, $\dot{I} = \rho d\rho$. Область *Д* записуємо у вигляді нерівності $\rho \le 1$ (рис. 8), тоді

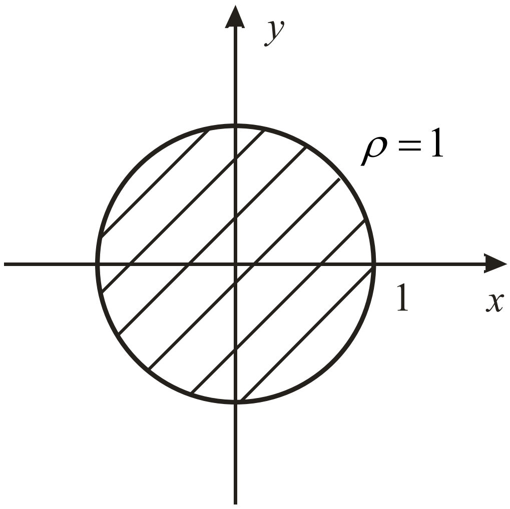

Рис. 8

$$\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le 1} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\rho\le 1} f(\rho)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 f(\rho)\rho d\rho =$$

= { так як внутрішній інтеграл не залежить від φ, то він дорівнює числу, його можна винести за знак інтеграла, тому такий повторний інтеграл можна записати як добуток інтегралів } =

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_0^1 f(\rho)\rho d\rho = = 2\pi \int\limits_0^1 f(\rho)\rho d\rho.$$

б) Зобразимо область *Д* на координатній площині. Рівняння $|y| = |x|$ дає два рівняння прямих $x = y$, $y = -x$, а $|x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Зобразимо їх (рис. 9).

Рівняння прямих, які обмежують область *Д*, запишемо в полярній системі координат.

Рівняння $y = \pm x$ в полярній системі координат мають вигляд $\rho\cos\varphi = \pm\rho\sin\varphi \Rightarrow \mathrm{tg}\,\varphi = \pm 1$. Промінь *OB* має рівняння $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$, *OA* – $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, *OД* – $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$, *OC* – $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$. Рівняння $x = \pm 1$ має вигляд $\rho\cos\varphi = \pm 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos\varphi = \pm\dfrac{1}{\rho}$. Підінтегральна функція і область *Д* симетричні відносно осей координат, тому

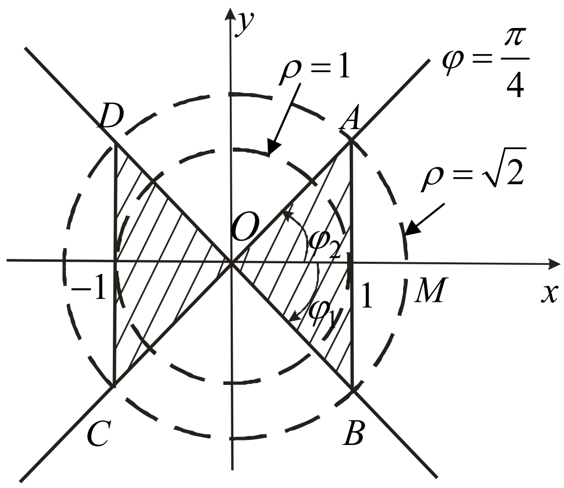

Рис. 9

$$\iint\limits_{Д} f\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = 4\iint\limits_{Д_1} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,$$ де $Д_1$ – трикутник *OMA*.

Перейдемо до полярної системи координат

$\iint\limits_{Д} f\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = 4\iint\limits_{Д_1} f\left(\rho\right)\rho d\rho d\varphi =$ { для того, щоб нам перейти до однократного інтеграла треба зовнішній інтеграл брати по $d\rho$. Для цього область $Д_1$ треба заключити між двома колами з центром в точці O, це кола $\rho=1$, $\rho=\sqrt{2}$ } $=$ $4\iint\limits_{Д_2} f\left(\rho\right)\rho d\rho d\varphi + 4\iint\limits_{Д_3} f\left(\rho\right)\rho d\rho d\varphi =$ { Область $Д_2$ це частина області $Д_1$, яка знаходиться в колі $\rho=1$, а $Д_3$ – це та частина області $Д_1$, яка знаходиться поза колом $\rho=1$ } $=$

$$4\int\limits_0^1 f\left(\rho\right)\rho d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi + 4\int\limits_1^{\sqrt{2}} f\left(\rho\right)\rho d\rho \int\limits_{\arccos\frac{1}{\rho}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi =$$

$$= \pi\int\limits_0^1 f\left(\rho\right) d\rho + \int\limits_1^{\sqrt{2}} f\left(\rho\right)\rho\left(\pi - 4\arccos\frac{1}{\rho}\right)d\rho.$$

в) Робимо точно так як в попередніх прикладах, тому даємо розв’язок без пояснення.

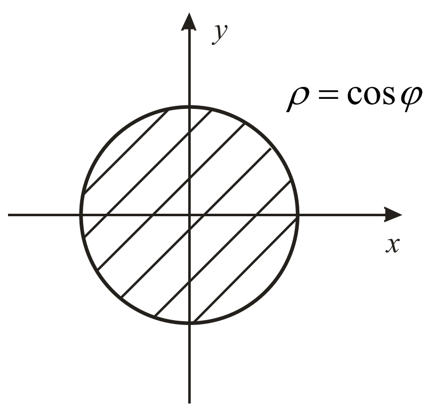

Рис. 10

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le x} f\left(\frac{y}{x}\right)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\rho\le\cos\varphi} f\left(\operatorname{tg}\varphi\right)\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\cos\varphi} f\left(\operatorname{tg}\varphi\right)\rho d\rho =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\operatorname{tg}\varphi\right)\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi f\left(\operatorname{tg}\varphi\right)d\varphi.$$

Приклад 1.10. Замість x і y ввести нові змінні u і v, знайти границі інтегрування в інтегралі $\int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x,y)dxdy$, якщо $u = x + y$, $v = x - y$.

Розв'язання.

Якщо $u = x + y$, $v = x - y$, то $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u-v)$,

$$\dot{I} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},\ \left|\dot{I}\right| = \frac{1}{2}.$$

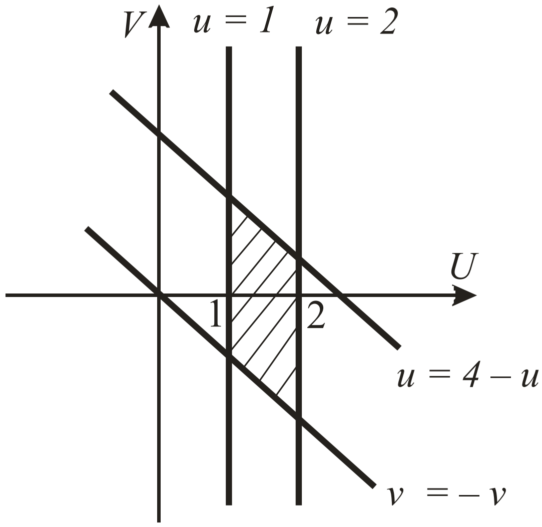

Рис. 11

Випишемо рівняння границь області *Д*. *Д*: $x = 2$, $x = 0$, $y = 2 - x$, $y = 1 - x$. Тоді рівняння області *Д* в новій системі координат мають вигляд: $u + v = 4$, $u + v = 0$, $u = 2$, $u = 1$.

$$\int_1^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}; \frac{u-v}{2}\right)\frac{1}{2}dv = \frac{1}{2}\int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}; \frac{u-v}{2}\right)dv.$$

Приклад 1.11. Зробити відповідну заміну змінних і звести подвійний інтеграл до однократного $\iint_Д f(xy)dxdy$, де *Д* обмежена кривими $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$, $x > 0$, $y > 0$.

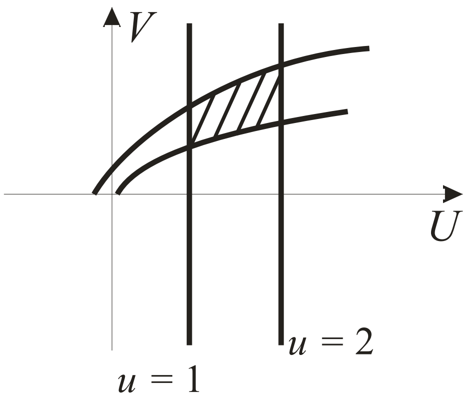

Рис. 12

Зробимо заміну: $xy = u$, $x = v$, тоді $x = v$, $y = \frac{u}{v}$,

$$\dot{I} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{v}.$$

Рівняння кривих в новій системі координат мають вид: $xy = 2 \Rightarrow u = 2$, $y = x \Rightarrow u = v^2$, $y = 4x \Rightarrow u = 4v^2$.

$$\iint_{Д} f(xy)\,dxdy = \iint_{Д_1} f(u)\frac{1}{v}dudv = \int_1^2 f(u)\,du \int_{\frac{1}{2}\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \frac{1}{v}dv = \int_1^2 f(u)\ln|v| \Big|_{\frac{1}{2}\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} du =$$

$$= \int_1^2 f(u)\left(\ln\sqrt{u} - \ln\frac{1}{2}\sqrt{u}\right)du = \int_1^2 f(u)\ln 2du = \ln 2\int_1^2 f(u)\,du.$$

Приклад 1.12. Знайти $F'(t)$, якщо $F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)\,dxdy \quad (t > 0)$.

Розв'язання.

Перейдемо до полярної системи координат, зробимо заміну змінних $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{r\le t} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho d\varphi = \int_0^t \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\varphi$$

$\{$ ми одержали визначений інтеграл, який є функцією верхньої межі, тому користуємося формулою $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$ $\}$.

$$F'(t) = t\int_0^{2\pi} f(t\cos\varphi, t\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Приклад 1.13. Знайти $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le t} f(x,y)\,dxdy$.

Розв'язання.

Для обчислення подвійного інтегралу перейдемо до полярної системи координат. Зробимо заміну змінних $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, тоді

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{r\le t} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho d\varphi = \int_0^t \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Тоді $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int\limits_0^t rdr\int\limits_0^{2\pi} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)d\varphi}{\pi t^2} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} =$ тому користуємося правилом

Лопіталя $\} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(\int\limits_0^t rdr\int\limits_0^{2\pi} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)d\varphi\right)'_t}{\left(\pi\rho^2\right)'_t} =$

$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{\cancel{t}\int\limits_0^{2\pi} f\left(t\cos\varphi, t\sin\varphi\right)d\varphi}{2\pi\cancel{t}} = \frac{\int\limits_0^{2\pi} f\left(0,0\right)d\varphi}{2\pi} = \frac{f\left(0,0\right)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi}{2\pi} = \frac{f\left(0,0\right)\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}} = f\left(0,0\right).$$

Приклад 1.14. Обчислити $\iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$.

Розв’язання.

Перейдемо до полярної системи координат, тоді $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Накреслимо область інтегрування.

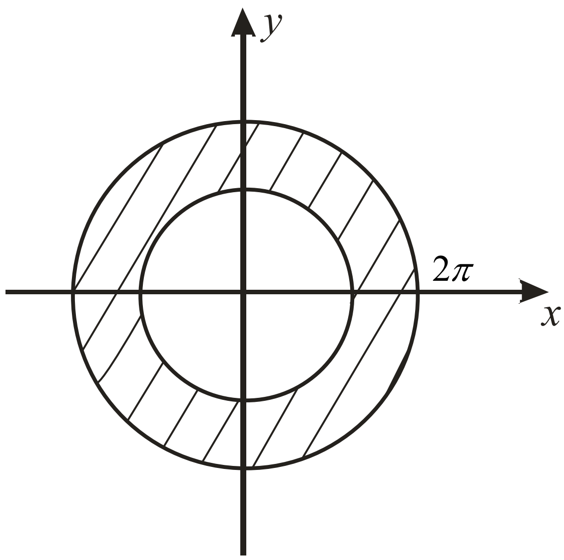

Рис. 13

$$\iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\pi\le x\le 2\pi} r\sin r d\varphi dr =$$

$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\pi^{2\pi} r\sin r dr =$ {так як внутрішній інтеграл не залежить від φ, то} $= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_\pi^{2\pi} r\sin r dr =$

$$= \left\{\int\limits_\pi^{2\pi} r\sin r dr = \begin{cases} u = r & du = dr \\ dv = \sin r dr & v = -\cos r \end{cases}\right\} =$$

$$= -r\cos r\Big|_\pi^{2\pi} + \int\limits_\pi^{2\pi} \cos r dr = -2\pi + \pi\cos\pi =$$

$$= -2\pi - \pi = -3\pi \text{, а } \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \Bigg\} = \; = -3\pi \cdot 2\pi = -6\pi^2 .$$

Приклад 1.15. Обчислити $\iint\limits_{x^2+y^2 \le 4} \operatorname{sgn}\left(x^2 - y^2 + 2\right) dxdy$.

Розв'язання.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \ge 0 \\ -1, \text{ якщо } x < 0 \end{cases}, \text{ тоді } \operatorname{sgn}\left(x^2 - y^2 + 2\right) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x^2 - y^2 + 2 \ge 0 \\ -1, \text{ якщо } x^2 - y^2 + 2 < 0 \end{cases}.$$

Область інтегрування $x^2 + y^2 \le 4$, накреслимо її (рис. 14).

Гіпербола $x^2 - y^2 + 2 = 0$ має дві гілки.

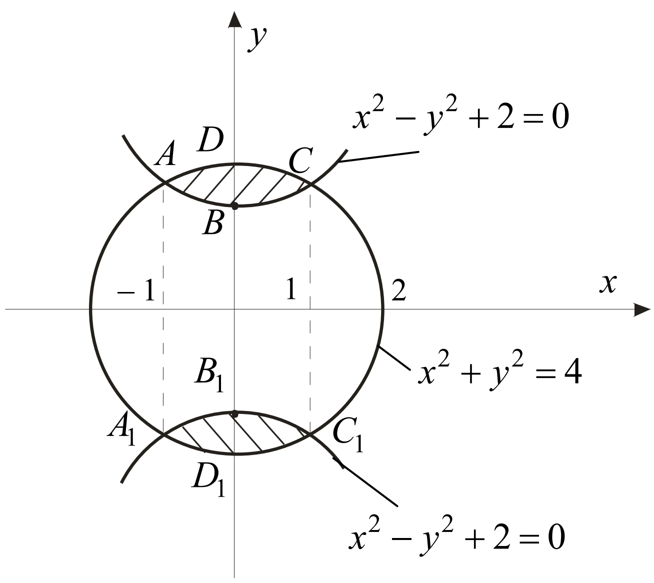

Рис. 14

В області інтегрування $ADCB \cup A_1D_1C_1B_1$ (назвемо її Ω_1) $x^2 - y^2 + 2 < 0$ і $\operatorname{sgn}\left(x^2 - y^2 + 2\right) = -1$, а в області $ABCC_1B_1A$ (назвемо її Ω_2) $x^2 - y^2 + 2 > 0$ і $\operatorname{sgn}\left(x^2 - y^2 + 2\right) = 1$.

Тоді,

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \le 4} \operatorname{sgn}\left(x^2 - y^2 + 2\right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_2} dxdy - \iint\limits_{\Omega_1} dxdy = 4 \iint\limits_{BCDO} dxdy$$

(так як $\iint\limits_{\Omega} dxdy$ – це площа фігури обмеженої кривими, а вона симетрична відносно осі OX і осі OY) =

$$4\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x^2+2}} dy + 4\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} dy - 4\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} dxdy = 4\int\limits_0^1 \sqrt{x^2+2}\, dx + 4\int\limits_1^2 \sqrt{4-x^2}\, dx -$$

$$-4\int_0^1\left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{x^2+2}\right)dx = 8\left(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+2}+2\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right)\Bigg|_0^1+8\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}-$$

$$-8\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=4\sqrt{3}+8\ln\left(1+\sqrt{3}\right)-8\ln\sqrt{2}+8\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-8\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=\frac{4\pi}{8}+8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Далі нагадуємо, як обчислюються інтеграли $\int\sqrt{4-x^2}dx$ і $\int\sqrt{x^2+2}dx$.

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=\left\{\begin{aligned}x&=2\sin t\\ dx&=2\cos t\end{aligned}\right\}=4\int\cos^2 t dt=2\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right),$$

$$\int\sqrt{x^2+2}dx=\left\{\begin{aligned}u&=\sqrt{x^2+2}\\ dv&=dx\end{aligned}\right.\Bigg|_{v=x}^{du}=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}}dx=x\sqrt{x^2+2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx=$$

$$=x\sqrt{x^2+2}-\int\frac{x^2+2-2}{\sqrt{x^2+2}}dx=x\sqrt{x^2+2}-\int\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}+\int\frac{2}{\sqrt{x^2+2}}dx=$$

$$=x\sqrt{x^2+2}-\int\sqrt{x^2+2}dx+2\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right).$$

Ми одержали рівняння відносно $\int\sqrt{x^2+2}dx$, розв’яжемо його, одержимо

$$\int\sqrt{x^2+2}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+2}+2\ln x+\sqrt{x^2+2}.$$

Приклад 1.16. Замість x і y ввести нові змінні u і v, визначити границі інтегрування у наступних подвійних інтегралах

а) $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta y} f(x,y)dy \quad (0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta)$, якщо $u = x$, $v = \dfrac{y}{x}$;

б) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} f(x,y)dy$, якщо $u = x + y$, $v = x - y$;

в) $\iint\limits_{Д} f(x,y)dxdy$, $Д$ обмежена кривими $\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$ $(a > 0)$, якщо $x = u\cos^4 v$, $y = u\sin^4 v$.

Розв'язання.

а) Запишемо рівняння кривих, які обмежують область інтегрування: $x = a$, $x = b$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$.

Зробимо заміну змінних $u = x$, $v = \dfrac{u}{x}$. Розв'яжемо цю систему рівнянь відносно x і y: $x = u$, $y = uv$, знайдемо якобіан $\dot{I}$.

$$\dot{I} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u.$$

Якщо ми робимо вказану заміну змінних $x = u$, $y = uv$, то рівняння кривих в системі координат UOV мають вигляд: $u = a$, $u = b$, $uv = \alpha u \Rightarrow v = \alpha$, $uv = \beta u \Rightarrow v = \beta$.

Зобразимо цю область в системі координат UOV.

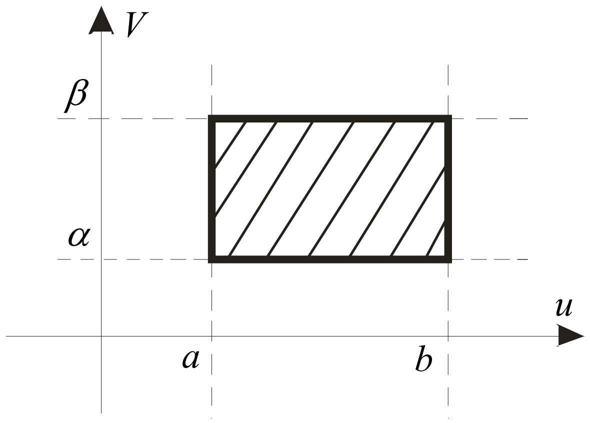

Рис. 15

Тоді $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta y} f(x,y)dy = \int\limits_a^b udu \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(u,uv)dv$.

б) Запишемо рівняння кривих, які обмежують область інтегрування $x = 0$, $x = 2$, $y = 2 - x$, $y = 1 - x$.

Зробимо заміну змінних $u = x + y$, $v = x - y$. Розв'яжемо цю систему рівнянь відносно x і y: $x = \dfrac{1}{2}(u + v)$, $y = \dfrac{1}{2}(u - v)$.

Тепер знайдемо якобіан $\dot{I}$.

$$\dot{I} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Запишемо рівняння кривих, які обмежують область інтегрування в новій системі координат.

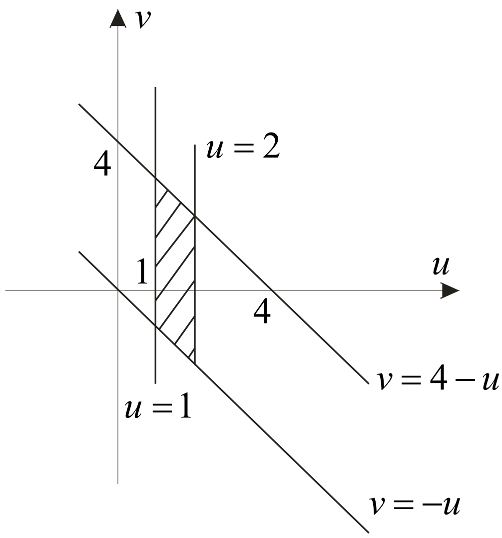

Рис. 16

$$x = 2 \to u + v = 4,$$
$$y = 2 - x \to u = 2,$$
$$x = 0 \to u + v = 0,$$
$$y = 1 - x \to u = 1.$$

Зобразимо цю область в системі координат UOV (рис. 16).

$$\int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x, y)\, dy = \frac{1}{2}\int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv.$$

в) Робимо заміну змінних $x = u\cos^4 v$, $y = u\sin^4 v$, знайдемо якобіан

$$\dot{I} = \begin{vmatrix} \cos^4 v & -4u\cos^3 v\sin v \\ \sin^4 v & 4u\sin^3 v\cos v \end{vmatrix} = 4u\sin^3 v\cos^5 v + 4u\cos^3 v\sin^5 v =$$

$$= 4u\sin^3 v\cos^3 v\left(\cos^2 v + \sin^2 v\right) = \frac{1}{2}u\sin^3 2v.$$

Рівняння кривих, які обмежують область інтегрування, мають вигляд $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$ $(a > 0)$, тому $x \geq 0$, $y \geq 0$, звідси витікає, що $u \geq 0$, а v – кут в першій чверті, тому $\left|\dot{I}\right| = \frac{1}{2}u\sin^3 2v$.

Рівняння кривих, які обмежують область інтегрування в новій системі координат мають вигляд:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{u}\cos^2 v + \sqrt{u}\sin^2 v = \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{u} = \sqrt{a} \Rightarrow u = a$$

$$x = 0 \Rightarrow u\cos^4 v = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ \cos v = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ v = \frac{\pi}{2} \end{array}\right., \; y = 0 \Rightarrow u\sin^4 v = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ \sin v = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \end{array}\right..$$ Зробимо рисунок в узагальненій полярній системі координат.

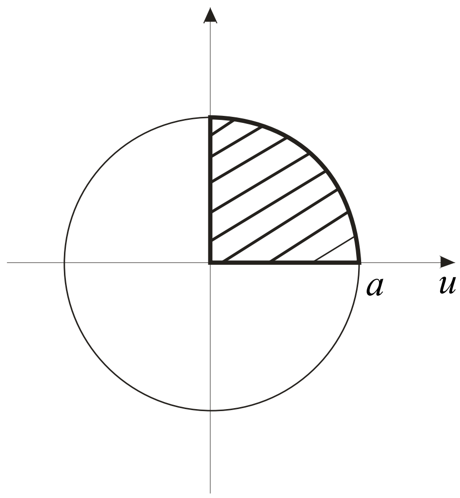

Рис. 17

$$\iint\limits_{Д} f(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint \frac{1}{2} u \sin^3 2v f\left(u\cos^4 v, u\sin^4 v\right) dudv =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2v dv \int\limits_0^a uf\left(u\cos^4 v, u\sin^4 v\right) du .$$

Приклад 1.17. Довести, що заміна змінних $x+y=\xi$, $y=\xi\eta$ переводить трикутник $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$ в одиничний квадрат $0\le\xi\le 1$, $0\le\eta\le 1$.

Розв'язання.

Розв'яжемо систему рівнянь $x+y=\xi$, $y=\xi\eta$ відносно x і y, получимо $x=\xi-\xi\eta$, $y=\eta\xi$. Зобразимо задану область $Д$ в системі координат XOY (рис. 18). Запишемо область $Д$ в новій системі координат.

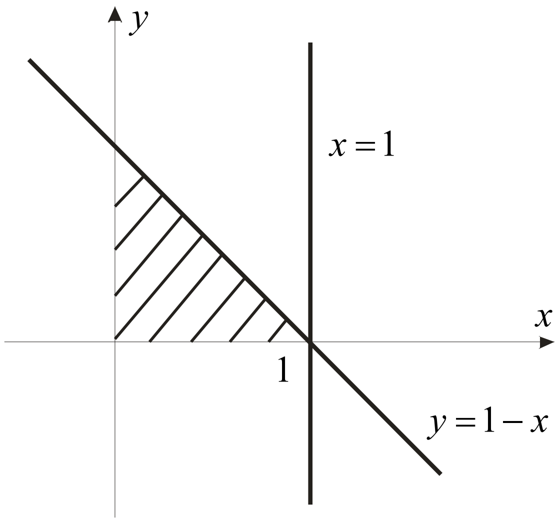

Рис. 18

$$\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1-x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0\le \xi-\xi\eta\le 1, \\ 0\le \xi\eta\le 1-\xi+\xi\eta. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le \xi(1-\eta)\le 1 \\ \xi\eta\le 1-\xi+\xi\eta \\ \xi\eta\ge 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо останню систему нерівностей. $\xi=0$ є розв'язком системи.

Розглянемо випадок, коли $\xi>0$, тоді

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le\xi(1-\eta)\le 1\\ \xi\le 1\\ \xi>0\\ \eta\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le 1-\eta\le\dfrac{1}{\varepsilon}\\ \xi\le 1\\ \xi>0\\ \eta\ge 0\end{cases}\begin{cases}-1\le-\eta\le-1+\dfrac{1}{\varepsilon}\\ \xi\le 1\\ \xi>0\\ \eta\ge 0\end{cases}\begin{cases}1-\dfrac{1}{\varepsilon}\le\eta\le 1\\ \xi\le 1\\ \xi>0\\ \eta\ge 0\end{cases}$$

Цю систему нерівностей зобразимо в системі координат $\xi O\eta$.

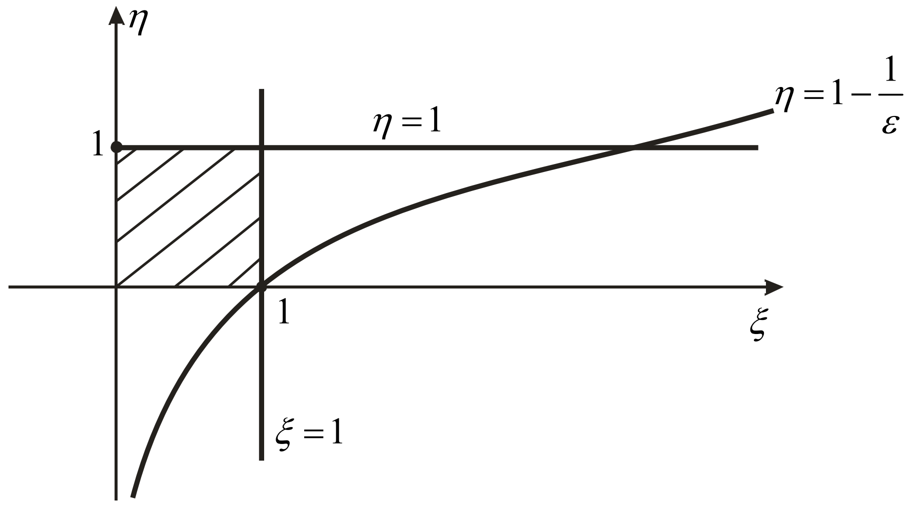

Рис. 19

Приклад 1.19. Знайти площу фігури, яка обмежена кривими $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$ і $x^2+y^2=2ax$.

Розв'язання.

Перейдемо до полярної системи координат, зробимо заміну змінних $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $x^2+y^2=\rho^2$, тоді рівняння кривих, які обмежують нашу площу будуть мати такий вигляд:

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)\Rightarrow\rho^4=2a^2\left(\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho^4=2a^2\rho^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)\Rightarrow\rho^2=2a^2\cos 2\varphi,$$

$$x^2+y^2=2ax\Rightarrow\rho^2=2a\rho\cos\varphi\Rightarrow\rho=2a\cos\varphi.$$

Зробимо рисунок. Крива $\rho=2a\cos\varphi$ – це коло, у якого центр має координати $(0,a)$ і радіус a, вісь OY це дотична до цього кола. Друга крива

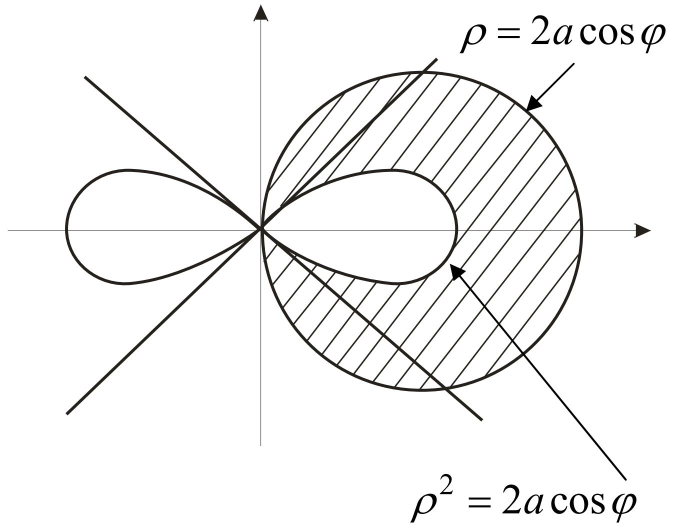

Рис. 20

$\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ це лемніската Бернуллі, так як $\rho^2 \geq 0$, то $\cos 2\varphi \geq 0$, тому прямі $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{4}$ будуть дотичними для цієї кривої.

Тоді площа заштрихованої фігури S дорівнює різниці площі кола S_1 і площі S_2 кривої $\rho^2 = 2a\cos\varphi$.

$$S_{кола} = \pi a^2.$$

$$S = \iint\limits_{Д} dxdy = \iint\limits_{Д} \rho d\rho d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho d\rho = \cancel{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^2}{\cancel{2}}\Bigg|_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi =$$

$$= 2a^2 \cdot \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

Таким чином $S = S_1 - S_2 = \pi a^2 - a^2 = a^2(\pi - 1)$.

Приклад 1.20. Знайти площу фігури, яка обмежена петлею кривої $(x+y)^4 = ax^2y$, яка лежить в першій чверті $(a > 0)$.

Розв'язання.

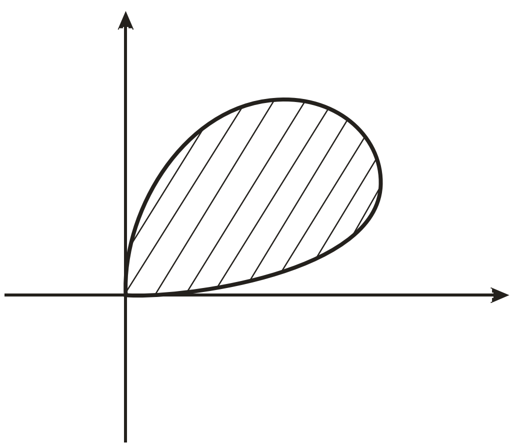
Рис. 21

Зробимо заміну змінних $x = \rho\cos^2\varphi$, $y = \rho\sin^2\rho$. Тоді рівняння кривої буде мати вигляд

$\rho^4 = a\rho^2\cos^4\varphi\rho\sin^2\varphi \Rightarrow$

$\rho^2 = a\cos^4\varphi\sin^2\varphi$.

Промені, які мають рівняння $\varphi = 0$ і $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ будуть дотичними, так як $\rho(0) = \rho\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Петля, яка лежить в першій чверті має вигляд (рис. 21).

Знайдемо якобіан: $\dot{I} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2\varphi & -2\rho\cos\varphi\sin\varphi \\ \sin^2\varphi & 2\rho\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} =$

$= 2\rho\sin\varphi\cos^3\varphi + 2\rho\cos\varphi\sin^3\varphi = 2\rho\sin\varphi\cos\varphi.$

Тоді

$$S = \iint\limits_{Д} \left|\dot{I}\right| d\rho d\varphi = \iint\limits_{Д} 2\rho\sin\varphi\cos\varphi d\varphi d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos^4\varphi\sin^2\varphi} 2\rho\sin\varphi\cos\varphi d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\varphi\sin^5\varphi d\varphi = \left\{ \begin{matrix} \cos\varphi = t & t_1 = 1 \\ -\sin\varphi d\varphi = dt & t_2 = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= -\int\limits_1^0 a^2 t^9 \left(1-t^2\right)^2 dt = a^2 \int\limits_0^1 t^9\left(1-t^2\right)^2 dt = a^2\int\limits_0^1 \left(t^9 - 2t^4 + t^{13}\right)dt =$$

$$= a^2\left(\frac{t^{10}}{10} - \frac{\cancel{2}t^{12}}{\cancel{12}6} + \frac{t^{14}}{14}\right)\Bigg|_0^1 = a^2\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{6} + \frac{1}{14}\right) = \frac{a^2}{210}.$$

Приклад 1.21. Знайти площу фігури обмеженою кривими $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1,$ $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2$, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $4\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ $\left(a > 0, b > 0\right)$.

Розв'язання.

Зробимо заміну змінних:

$\sqrt{\frac{x}{a}} = \rho\cos^2\varphi,\quad \sqrt{\frac{y}{b}} = \rho\sin^2\varphi \quad \Rightarrow \quad x = a\rho^2\cos^4\varphi,\quad y = b\rho^2\sin^4\varphi.$ Тоді рівняння кривих, які обмежують нашу фігуру, будуть мати вигляд:

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1 \Rightarrow \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = 1 \Rightarrow \rho = 1,$$

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2 \Rightarrow \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = 1 \Rightarrow \rho = 2,$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \Rightarrow \rho^2\cos^4\varphi = \rho^2\sin^4\varphi \Rightarrow \mathrm{tg}\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4},$$

$$4\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\Rightarrow 4\rho^2\cos^4\varphi=\rho^2\sin^4\varphi\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}\Rightarrow\varphi=\operatorname{arctg}\sqrt{2}\,.$$

Зобразимо схематично цю площину в узагальненій полярній системі координат.

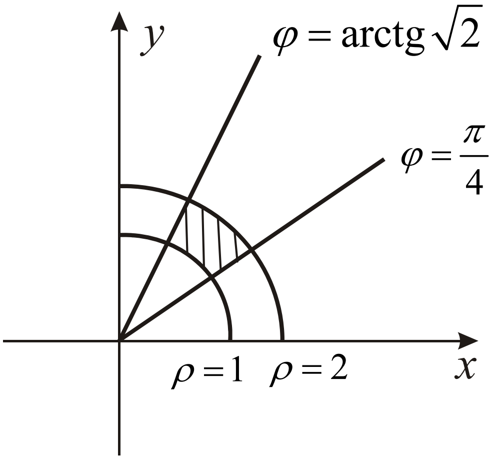

Рис. 22

Знайдемо якобіан $\dot{I}$.

$$\dot{I}=\begin{vmatrix}2\rho a\cos^4\varphi & -4\rho^2 a\cos^3\varphi\sin\varphi\\ 2\rho b\sin^4\varphi & 4\rho^2 b\sin^3\varphi\cos\varphi\end{vmatrix}=$$
$$=8\rho^3 ab\cos^5\varphi\sin^3\varphi+$$
$$+8\rho^3 ab\cos^3\varphi\sin^5\varphi=$$
$$=8\rho^3 ab\cos^3\varphi\sin^3\varphi=$$
$$=\rho^3 ab\sin^3 2\varphi,$$

$\left|\dot{I}\right|=\rho^3 ab\sin^3 2\varphi$, так як $\sin 2\varphi>0$.

Площа фігури обчислюється за формулою:

$$S=\iint\limits_{Д}dxdy=\iint\rho^3 ab\sin^3 2\varphi d\varphi d\rho=ab\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}}d\varphi\sin^3 2\varphi\int\limits_1^2\rho^3 d\rho=$$

(так як внутрішній інтеграл не залежить від φ, то) $=$

$$ab\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}}\sin^3 2\varphi d\varphi\int\limits_1^2\rho^3 d\rho=\begin{cases}\cos 2\varphi=t,\\ -2\sin 2\varphi d\varphi=dt,\end{cases}\ \sin 2\varphi d\varphi=-\frac{dt}{2},$$

$$\left.t_1=\cos\left[2,\frac{\pi}{4}\right)=0,\ t_2=\cos 2\operatorname{arctg}\sqrt{2}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg}\sqrt{2}}{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg}\sqrt{2}}=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}\right\}=$$

$$=-ab\int\limits_0^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{2}\left(-t^2\right)dt\cdot\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_1^2=-\frac{ab}{2}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\cdot\frac{1}{4}(16-1)=-\frac{ab}{2}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{81}\right)\cdot\frac{15}{4}=$$

$$=\frac{\cancel{15}5ab}{\cancel{8}4}\cdot\frac{\cancel{26}13}{\cancel{81}27}=\frac{65ab}{108}.$$

Відповідь: $\frac{65ab}{108}$.

Приклад 1.22. Знайти площу фігури, яка обмежена кривими $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$, $x^2+y^2\geq a^2$.

Розв'язання.

Перейдемо до полярної системи координат, рівняння кривих, які обмежують площу, мають вигляд:

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)\Rightarrow\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\right)^2=2a^2\left(\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho^4=2a^2\cos 2\varphi\Rightarrow\rho^2=2a^2\cos 2\varphi.\quad x^2+y^2=a^2\Rightarrow\rho=a.$$

Зробимо схематичний рисунок. Знайдемо точки перетину кривих, для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases}\rho^2=2a^2\cos 2\varphi\\ \rho=a\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=2a^2\cos 2\varphi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos 2\varphi=\frac{1}{2},\quad\varphi=\frac{\pi}{6}.$$

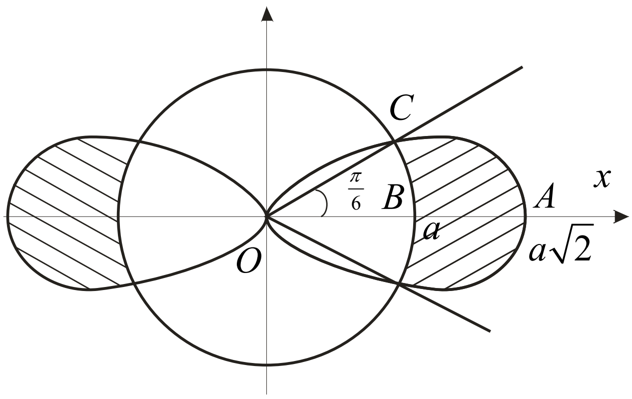

Рис. 23

Фігура симетрична відносно осей координат,

$$S=4S_{BCA}=4\iint\limits_{Д_1}\rho d\rho d\varphi=$$

$$=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int\limits_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}}\rho d\rho=$$

$$=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}}d\varphi=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(2a^2\cos 2\varphi-a^2\right)d\varphi=$$

$$=2\left(\cancel{2}a^2\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\sin 2\varphi-a^2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=2a^2\left(\sin\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=2a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a^3\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{a^3\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{3}$.

Приклад 1.23. Знайти площу фігури, яка обмежена кривими $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=4$, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $8\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $\left(x>0, y>0\right)$.

Розв'язання.

Зробимо заміну змінних:

$\frac{x}{a}=\rho\cos^3\varphi$, $\frac{y}{b}=\rho\sin^3\varphi$, тоді $x=a\rho\cos^3\varphi$, $y=a\rho\sin^3\varphi$.

Рівняння кривих в цій узагальненій полярній системі координат мають вигляд

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1\Rightarrow\rho^{2/3}\cos^2\varphi+\rho^{2/3}\sin^2\varphi=1\Rightarrow\rho^{2/3}=1\Rightarrow\rho=1,$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=4\Rightarrow\rho^{2/3}=4\Rightarrow\rho=4^{3/2}=8,$$

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\Rightarrow\rho\cos^3\varphi=\rho\sin^3\varphi\Rightarrow\operatorname{tg}^3\varphi=1\Rightarrow\operatorname{tg}\varphi=1\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4},$$

$$8\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\Rightarrow 8\rho\cos^3\varphi=\rho\sin^3\varphi\Rightarrow\operatorname{tg}^3\varphi=8\Rightarrow\operatorname{tg}\varphi=2\Rightarrow\varphi=\operatorname{arctg}2.$$

$$\left|\dot{J}\right|=\begin{vmatrix}a\cos^3\varphi & -3a\rho\cos^2\varphi\sin\varphi\\ b\sin^3\phi & 3b\rho\sin^2\varphi\cos\varphi\end{vmatrix}=3ab\rho\sin^2\varphi\cos^4\varphi+3ab\rho\sin^4\varphi\cos^2\varphi=$$

$$=3ab\rho\sin^2\varphi\cos^2\varphi=\frac{3}{4}ab\rho\sin^2 2\varphi.$$

Зробимо схематичний рисунок.

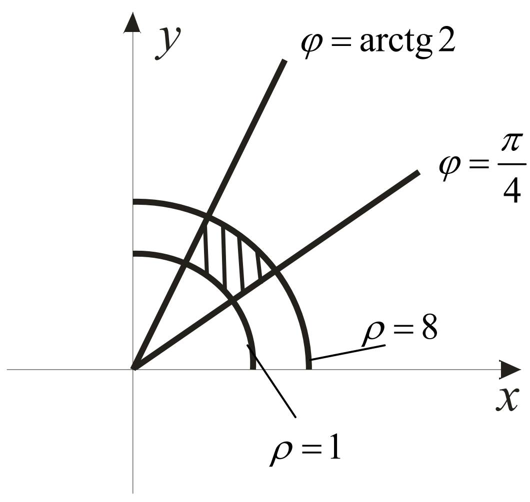

Рис. 24

$$S=\iint\limits_{Д}dxdy=\iint\limits_{Д}\frac{3}{4}ab\rho\sin^2 2\varphi=$$

$$=\frac{3}{4}ab\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}2}\sin^2 2\varphi d\varphi\int\limits_{1}^{\rho}\rho d\rho=$$

$$=\frac{3}{4}ab\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_1^8\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}2}\left(1-\cos 4\varphi\right)d\varphi=$$

= (так як внутрішній інтеграл не залежить від φ, то повторний інтеграл дорівнює добутку цих інтегралів) =

$$=\frac{3}{16}ab(64-1)\cdot\left(4-\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}2}=\frac{3\cdot 63}{16}ab\left(\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\sin\varphi\operatorname{arctg}2\right)=$$

= (спростимо цю відповідь: $\operatorname{in}\varphi\operatorname{arctg}2=2\sin 2\operatorname{arctg}2\cos 2\operatorname{arctg}2=$

$=2\cdot\frac{2\operatorname{tg}\operatorname{arctg}2}{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg}2}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg}2}{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg}2}=\frac{4\cdot 2}{1+4}\cdot\frac{1-4}{1+4}=-\frac{24}{25}$, $\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{4}=\alpha$, тоді

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\alpha\Rightarrow\frac{\operatorname{tg}\operatorname{arctg}2-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\operatorname{arctg}2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\operatorname{tg}\alpha\Rightarrow\frac{2-1}{1+2\cdot 1}=\operatorname{tg}\alpha\Rightarrow$$

$\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}\Rightarrow\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$) = $=\frac{189}{16}ab\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{6}{25}\right)$.

Відповідь: $\frac{189}{16}ab\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{6}{25}\right)$.

Приклад 1.24. Знайти площу фігури, яка обмежена кривою $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{\kappa^2}$, $(x>0, y>0)$.

Розв'язання.

Зробимо заміну змінної: $\frac{x}{a}=\rho\cos^2\varphi$, $\frac{y}{b}=\rho\sin^2\varphi\Rightarrow$ $x=a\rho\cos^2\varphi$, $y=b\rho\sin^2\varphi$. Запишемо рівняння кривої в цій системі координат:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}\Rightarrow\rho^4=\rho^2\left(\frac{a^2\cos^4\varphi}{h^2}+\frac{b^2\sin^4\varphi}{k^2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho^2=\frac{a^2\cos^4\varphi}{h^2}+\frac{b^2\sin^4\varphi}{k^2}.$$

Знайдемо якобіан $\dot{J}$

$$\dot{J}=\begin{vmatrix}a\cos^2\varphi & -2a\rho\sin\varphi\cos\varphi\\ b\sin^2\varphi & 2b\rho\sin\varphi\cos\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=2ab\rho\sin\varphi+\cos^3\varphi+2ab\rho\sin^3\varphi\cos\varphi=$$

$$=2ab\rho\sin\varphi\cos\varphi=\rho ab\sin 2\varphi.$$

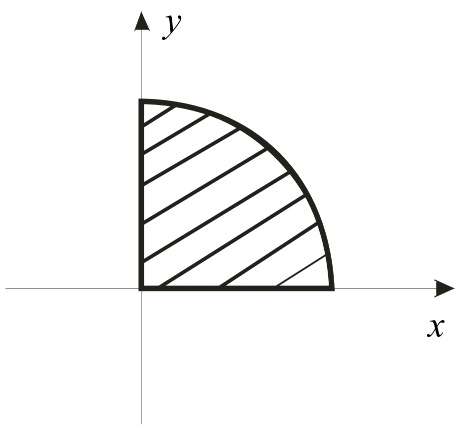

Рис. 25

Зробимо схематичний рисунок

Крива $\rho^2 = \dfrac{a^2\cos^4\varphi}{h^2} + \dfrac{b^2\sin^4\varphi}{k^2}$ замкнена, але нам треба знайти площу куска цієї фігури, яка лежить в першій чверті.

$$S = \iint_{Д} \rho ab\sin 2\varphi d\rho d\varphi = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sin 2\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2\cos^4\varphi}{h^2}+\frac{b^2\sin^4\varphi}{k^2}}} \rho d\rho =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\left(\frac{a^2\cos^4\varphi}{h^2} + \frac{b^2\sin^4\varphi}{k^2}\right)d\varphi = \frac{aba^2}{2h^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\varphi\cos^5\varphi d\varphi +$$

$$+\frac{ab}{2}\frac{b^2}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi\sin^5\varphi d\varphi = -\frac{a^3b}{h^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi d\cos\varphi + \frac{ab^3}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi d\sin\varphi =$$

$$= -\frac{a^3b}{h^2}\frac{\cos^6\varphi}{6}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{ab^3}{k^2}\frac{\sin^6\varphi}{6}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3b}{6h^2} + \frac{ab^3}{6k^2} = \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right).$$

Відповідь: $\dfrac{ab}{6}\left(\dfrac{a^2}{h^2} + \dfrac{b^2}{k^2}\right)$.

Приклад 1.25. Знайти площу перетину поверхні $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = a^2$ площиною $x + y + z = 0$.

Розв'язання.

Якщо рівняння поверхні задано явно відносно z, то формула обчислення площини поверхні має вигляд $S = \iint_{Д}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$, де $Д$ – проекція поверхні на площину XOY.

$$z = -x - y,\ \frac{\partial z}{\partial x} = -1,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -1 \Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

Область $Д$ – це проекція на XOY поверхні, площу якої ми знаходимо. Рівняння проекції на XOY лінії перетину двох поверхонь $z = f_1(x, y)$ і $z = f_2(x, y)$ знаходиться виключенням z з цих двох рівнянь.

$$\begin{cases} z = -x - y \\ x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = a^2 \end{cases}$$

З першого рівняння значення z підставляємо в друге рівняння, получимо

$$x^2 + y^2 + (-x-y)^2 - xy - x(-x-y) - y(-x-y) = a \Rightarrow$$

$$3x^2 + 3y^2 + 3xy = a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + xy = \frac{a^2}{3}.$$

Ця замкнена крива обмежує проекцію нашої поверхні на площину XOY. Перейдемо до полярної системи координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Рівняння кривої $x^2 + y^2 + xy = \dfrac{a^2}{3}$ в цій системі має вигляд

$$\rho^2 + \rho^2\sin\varphi\cos\varphi = \frac{a^2}{3} \Rightarrow \rho^2 = \frac{a^2}{3\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)} \Rightarrow \rho = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3(2 + \sin 2\varphi)}}.$$

Зробимо схематичний рисунок області *Д*. Построїмо криву $\rho = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3(2+\sin 2\varphi)}}$ по точках

ρ	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a\sqrt{2}}{3}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$
φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π

Фігура симетрична відносно бісектрис координатних кутів. Позначимо область $OABC$ буквою $Д_1$

$$S = \iint\limits_{Д} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{Д} \sqrt{3}dxdy = 4\sqrt{3}\iint\limits_{Д_1} dxdy =$$

$$= 4\sqrt{3}\iint\limits_{Д_1} \rho d\rho d\varphi =$$

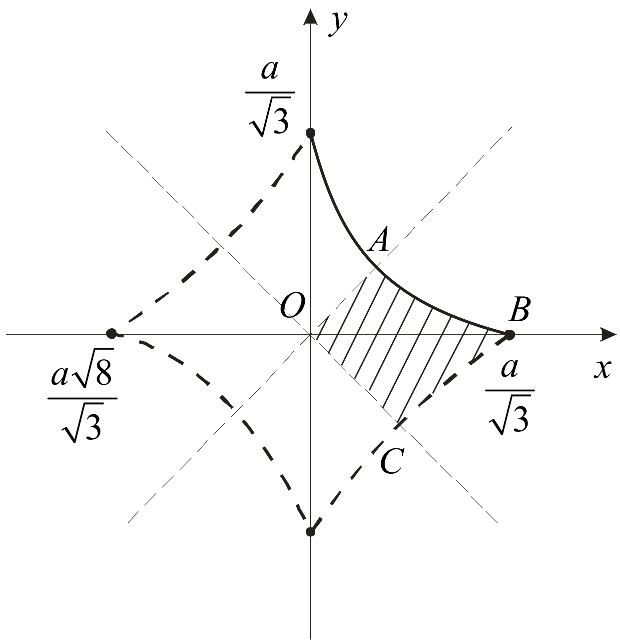

Рис. 26

$$= 4\sqrt{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{a}{\sqrt{3\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)}}} \rho d\rho = 4\sqrt{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{0}^{\frac{a}{\sqrt{3\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)}}} = \frac{4\sqrt{3}a^2}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{2+\sin 2\varphi} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \mathrm{tg}\varphi = t, & \varphi = \mathrm{arctg}\, t \\ d\varphi = \dfrac{dt}{1+t^2}, & \sin 2\varphi = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{matrix}\right\} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{3}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{3}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{2\left(t^2+1+t\right)} =$$

$$= \frac{2a\sqrt{3}}{3}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2a^2\sqrt{3}\cdot 2}{3\cdot\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{3}}\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{4a^2}{3}\left(\mathrm{arctg}\sqrt{3} - \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4a^2 3}{3}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2a^2\pi}{3}.$$

Примітка: $0 \le \varphi \le 2\pi$, але нам треба було при інтегруванні зробити заміну $\mathrm{tg}\varphi = t$, а ця функція не існує в точці $\dfrac{\pi + k\pi}{2}$, тоді б прийшлось розбивати інтеграл на чотири інтеграла і розв'язувати невластиві інтеграли, тому користуючись властивостями області *Д*, ми розбили на 4 рівних по площині області.

Відповідь: $\dfrac{2a^2\pi}{3}$

Приклад 1.26. Знайти об'єм тіла, яке обмежене поверхнями $z = \cos x \cos y$, $z = 0$, $|x+y| \le \dfrac{\pi}{2}|x-y| \le \dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання.

Якщо тіло обмежено двома поверхнями в рівняння яких входить z, і одно з них $z = 0$, то об'єм можна знайти без рисунка в системі координат XYZ. Бо об'єм такого циліндричного тіла, яке стоїть на площині XOY на області *Д*, а зверху накрите поверхнею $z = f(x, y)$, можна обчислити по формулі $V = \iint\limits_{Д} z dxdy$.

Для того, щоб обчислити подвійний інтеграл, треба построїти область *Д*. Поверхні, рівняння яких не входить явно z, є циліндричні поверхні з твірною паралельною осі OZ.

На площині XOY рисуємо лінії перетину цих поверхонь з цією площиною, якщо одержимо замкнену область, то вона і є областю *Д*, якщо не замкнена, то тоді дозамикаємо її лінією перетину поверхні $z = f\left(x, y\right)$ з площиною XOY. Її рівняння має вигляд $f\left(x, y\right) = 0$.

Отже, будуємо лінії перетину циліндричних поверхонь $\left|x + y\right| = \dfrac{\pi}{2}$, $\left|x - y\right| = \dfrac{\pi}{2}$.

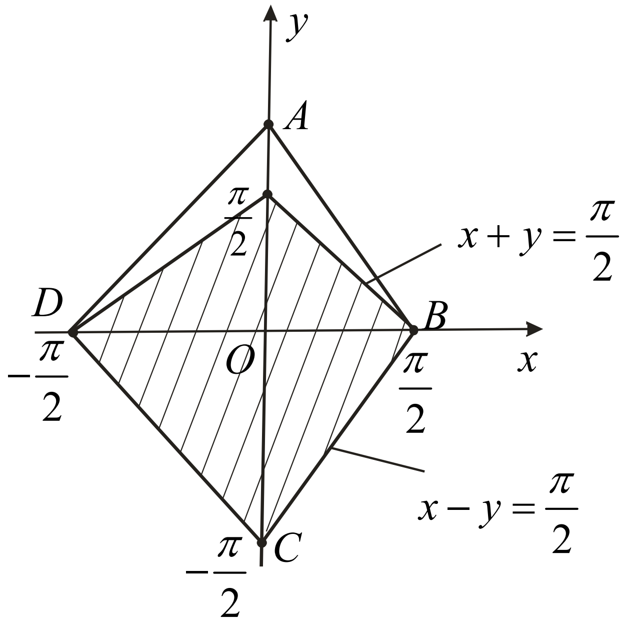

Рис. 27

Поверхня $z = \cos x \cos y$ перетинає площину по осям OX і OY, $\cos x \cos y \geq 0$ в кожній чверті і вона симетрична відносно осі OX і OY, тому $V = 4\iint\limits_{Д} \cos x \cos y dxdy$, Д –область OAB.

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos y dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x} dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx -$$

$$-4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cos 2x\right) dx = 2\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi .$$

Відповідь: π.

Приклад 1.27. Знайти об'єм тіла, яке обмежене поверхнями $z = xy$, $x + y + z = 1$, $z = 0$.

Розв'язання.

Тіло стоїть на площині $z = 0$, а зверху накрито різними поверхнями. Область *Д* буде обмежена лініями перетину поверхонь $z = xy$, $x + y + z = 1$. $z = xy$ перетинає площину $z = 0$ по прямим $x = 0$, $y = 0$, а $z + x + y = 1$ – по прямій $x + y = 1$. Знайдемо проекцію ліній перетину $z = xy$, $z + x + y = 1$. Для цього з цих рівнянь виключимо z. Рівняння проекції лінії перетину має вигляд

$$x+y+xy=1 \Rightarrow y=-1+\frac{2}{1+x}.$$

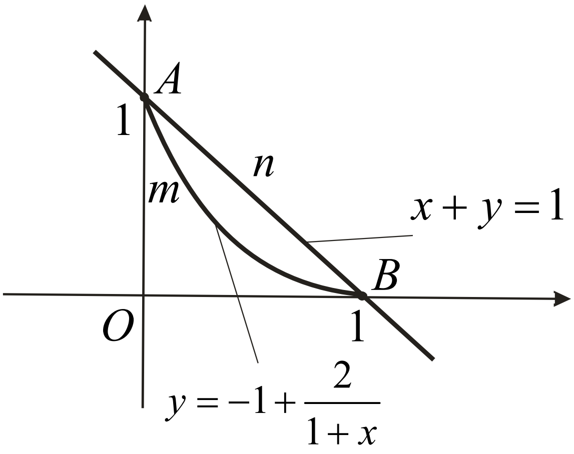

Рис. 28

Зробимо рисунок області *Д*.

Область *Д* OAB складається з $Д_1$ – області $OAmB$ і $Д_2$ – області $AmBn$. Область $Д_1$ накриває поверхня $z=xy$, а над $Д_2$ – $z=1-x-y$, тому

$$V=\iint\limits_{Д_1} xydxdy+\iint\limits_{Д_2}(1-x-y)dxdy=$$

$$=\int_0^1 xdx\int_0^{-1+\frac{2}{1+x}} ydy+\int_0^1 dx\int_{-1+\frac{2}{1+x}}^{1-x}(1-x-y)dy=$$

$$=\int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{-1+\frac{2}{1+x}}dx+\int_0^1\left(y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-1+\frac{2}{1+x}}^{1-x}dx=\int_0^1\frac{1}{2}x\left(-1+\frac{2}{1+x}\right)^2dx+$$

$$+\int_0^1\left(1-x+1-\frac{2}{1+x}-x\left(1-x+1-\frac{2}{1+x}\right)-\frac{1}{2}(1-x)^2+\frac{1}{2}\left(-1+\frac{2}{1+x}\right)^2\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x-\frac{2x}{1+x}+\frac{2x}{(1+x)^2}+2-x-\frac{2}{1+x}-2x+x^2+\frac{2x}{1+x}-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}-\frac{2}{1+x}+\frac{2}{(1+x)^2}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(-\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}-\frac{2}{1+x}+x^2-\frac{1}{2}(x-1)^2\right)dx=-\frac{5}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{5}{2}x-2\ln|1+x|+\frac{x^3}{3}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_0^1=-\frac{5}{4}+\frac{5}{2}-2\ln 2+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{7}{12}-2\ln 2.$$

Відповідь: $\frac{7}{12}-2\ln 2$.

Приклад 1.28. Знайти об’єм тіла, яке обмежене поверхнями

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

Розв'язання.

Зробимо заміну змінних: $\dfrac{x}{a}=\rho\cos^2\varphi$, $\dfrac{y}{b}=\rho\sin^2\varphi \Rightarrow x=a\rho\cos^2\varphi$,

$y=b\rho\sin^2\varphi$, $\dot{J}=\begin{vmatrix} a\cos^2\varphi & -2a\rho\cos\varphi\sin\varphi \\ b\sin^2\kappa & 2b\rho\cos\varphi\sin\varphi \end{vmatrix}=2ab\rho\cos^3\varphi\sin\varphi=$

$=2ab\rho\sin^3\varphi\cos\varphi=2ab\rho\sin\varphi\cos\varphi=ab\rho\sin 2\varphi$.

Рівняння поверхонь в цій системі координат записуємо у вигляді:

$$z^2=c^2\left(1-\rho^2\right)\Rightarrow z=c\sqrt{1-\rho^2}.$$

Зобразимо область *Д*.

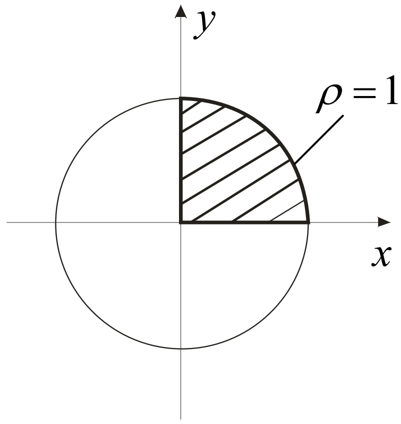

Рис. 29

$$V=\iint\limits_{Д} abc\rho\sqrt{1-\rho^2}\sin 2\varphi d\varphi d\rho=$$

$$=abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sin 2\varphi\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}d\rho=$$

$$=-abc\cdot\frac{1}{2}\cos 2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\int_0^1 -\frac{1}{2}\sqrt{1-\rho^2}d\left(1-\rho^2\right)==abc\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\left(1-\rho^2\right)^{3/2}\cdot\cancel{2}}{3}\Bigg|_0^1\right)=\frac{abc}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{abc}{3}$.

Приклад 1.29. Обчислити об'єм тіла, яке обмежено поверхнями

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Розв'язання.

Зробимо заміну змінних: $\dfrac{x}{a}=\rho\cos\varphi$, $\dfrac{y}{b}=\rho\sin\varphi$, $x=a\rho\cos\varphi$, $y=a\rho\sin\varphi$. В узагальненій циліндричній системі координат $\dot{J}=ab\rho$.

Рівняння $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1\Rightarrow\rho^2+1=\dfrac{z^2}{c^2}\Rightarrow z=c\sqrt{\rho^2+1}$,

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\rho^2=1\Rightarrow\rho=1$.

Перша поверхня симетрична відносно всіх осей координат, тому $V = 2\iint\limits_{Д} c\sqrt{\rho^2+1}abc\rho d\rho$, де $Д$ – область інтегрування зображена на рис. 30.

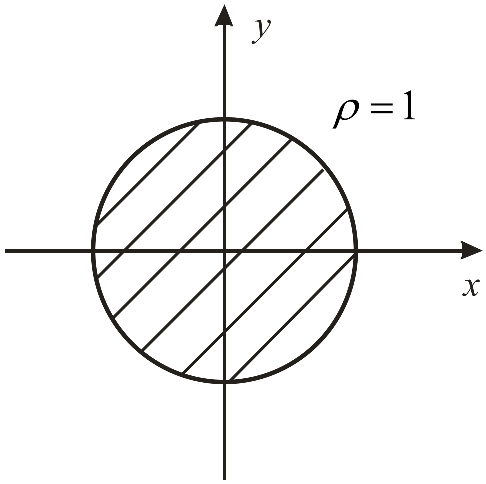

Рис. 30

$$V = 2abc\iint\limits_{Д} \rho\sqrt{\rho^2+1}d\rho d\varphi =$$

$$= 2abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 \rho\sqrt{\rho^2+1}d\rho =$$

$$= 2abc\left(\varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{\rho^2+1}d\left(\rho^2+1\right)\right) =$$

$$= 2abc\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\left(\rho^2+1\right)^{3/2}\cdot\cancel{2}}{3}\Bigg|_0^1 =$$

$$= 4abc\pi\frac{2\sqrt{2}-1}{3} = \frac{4\pi abc}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Відповідь: $\frac{4\pi abc}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

Приклад 1.30. Обчислити об'єм тіла, яке обмежено поверхнями $z = c\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$, $z = 0$, $\sqrt{x^2+y^2} = a\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

Розв'язання.

Так як $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$, то з рівняння другої поверхні видно, що $0 \le \mathrm{arctg}\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$.

Перейдемо до циліндричної системи координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, $\dot{J} = \rho$.

Рівняння поверхонь, які обмежують тіло в цій системі координат мають вид: $z = c\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x} \Rightarrow z = c\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{tg}\,\varphi \Rightarrow z = c\varphi$ (так як $\mathrm{arctg}\,\mathrm{tg}\,\varphi = \varphi$, якщо tg знаходиться в інтервалі $\varphi\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$), $\sqrt{x^2+y^2} = a\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x} \Rightarrow$ $\rho = a\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{tg}\,\varphi \Rightarrow \rho = a\varphi$.

Зобразимо область *Д*.

$$V=\iint\limits_{Д} c\varphi\rho d\rho d\varphi = c\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi d\varphi\int\limits_0^{a\varphi}\rho d\rho =$$

$$= c\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi d\varphi \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{a\varphi} = \frac{1}{2}c\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi a^2\varphi^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}ca^2\left.\frac{\varphi^4}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ca^2\pi^4}{128}.$$

Відповідь: $\frac{ca^2\pi^4}{128}$.

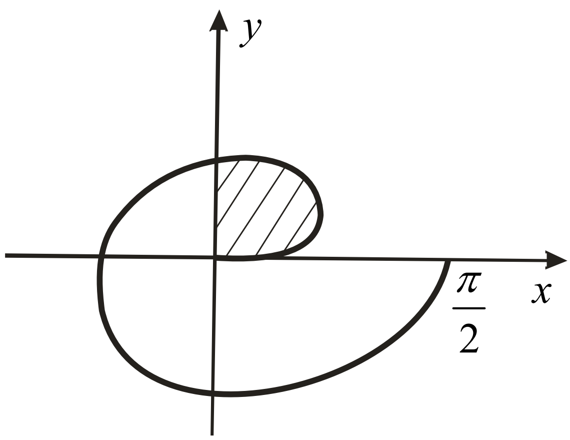

Рис. 31

II. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

1. Безпосереднє обчислення потрійного інтеграла

Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в області V обмежена і визначається наступними нерівностями

$$x_1 \le x \le x_2, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x), \quad z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ – неперервні функції, то потрійний інтеграл від функції $f(x,y,z)$, визначеної в області V, може бути обчисленим по формулі:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Обчислення потрійного інтеграла в декартовій системі координат зводиться до послідовного обчислення одного однократного інтеграла і одного подвійного. Для цього треба спроектувати тіло, по якому ведеться інтегрування, на одну із координатних площин. Наприклад, на площину XOY, і область інтегрування обмежена знизу поверхнею $z=\varphi_1(x,y)$, а зверху $z=\varphi_2(x,y)$, то краще використати формулу

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_Д dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

де $Д$ – проекція T на площину XOY.

2. Заміна змінних в потрійному інтегралі

Якщо в потрійному інтегралі $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$ проводиться заміна змінних по формулам $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$, причому функції $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ утворюють взаємне однозначне відображення області V простору $OXYZ$ на область V_1 простору O_1UVV , і якобіан $\dot{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$, то справедлива формула:

$$\iiint\limits_V f\left(x,y,z\right)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f\left(x\left(u,v,w\right),y\left(u,v,w\right),z\left(u,v,w\right)\right)\left|\dot{J}\right|dudvdw.$$

Як окремі випадки маємо:

1) циліндричну систему координат φ,ρ,z, де $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$, $I=\rho$.

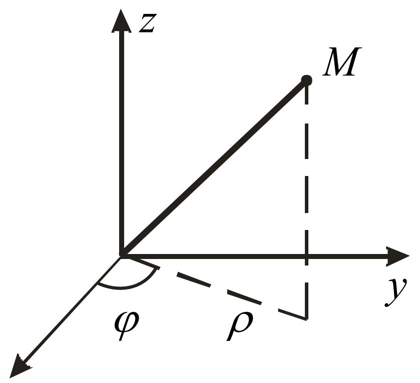

Рис. 31

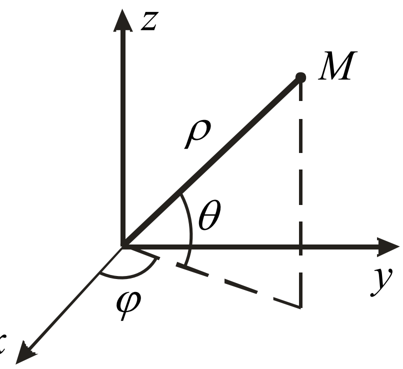

Рис. 32

2) сферичну систему координат $x=\rho\cos\varphi\cos\theta$, $y=\rho\sin\varphi\cos\theta$, $z=\rho\sin\theta$, $I=\rho^2\cos\theta$.

Приклад 2.1. Обчислити $\iiint\limits_T xyzdxdydz$, де область T обмежена поверхнями $y=x^2$, $x=y^2$, $x=xy$, $z=0$.

Розв'язання.

Якщо в рівняння поверхні не входить якась координата, то це циліндрична поверхня з твірною паралельній тій осі, найменування якої не

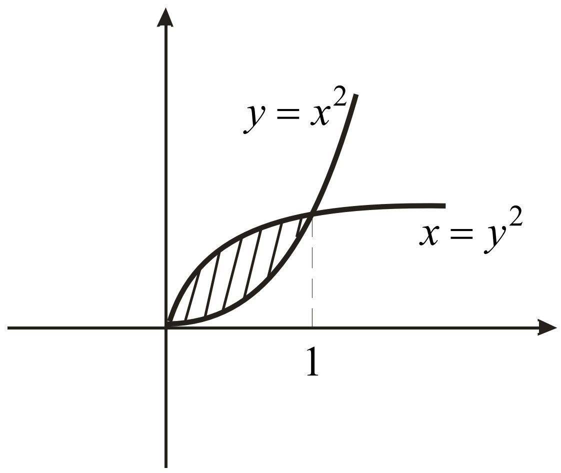

Рис. 33

входить в рівняння. Такими поверхнями є поверхні $y=x^2$, $x=y^2$, це параболічні циліндри з твірною паралельною осі OZ. Крім того, тіло T обмежують ще дві поверхні, в які входить z, тому область T в просторі можна не малювати, нам вигідно спроектувати область T на площину $z=0$, і тоді можна зробити схематичний рисунок області *Д*, тоді

$$\iiint_T xyzdxdydz = \iint_{Д} dxdy\int_0^{xy} xyzdz = \int_0^1 dx\int_{x^2} dy\int_0^{xy} xyzdz = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x^z}} dy\left(xy\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{xy} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^3y^3dy = \frac{1}{2}\int_0^1 x^3\cdot\frac{y^4}{4}\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} = \frac{1}{8}\int_0^1 x^3\left(x^2-x^8\right)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x^6}{6}-\frac{x^{12}}{12}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{96}.$$

Приклад 2.2. Змінити порядок інтегрування

$$\int_0^x dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f\left(x,y,z\right)dz.$$

Розв'язання.

Запишемо рівняння поверхонь, які обмежують область інтегрування:

$$x=1,\quad y=1-x,\quad z=x+y$$
$$x=0,\quad y=0,\quad z=0.$$

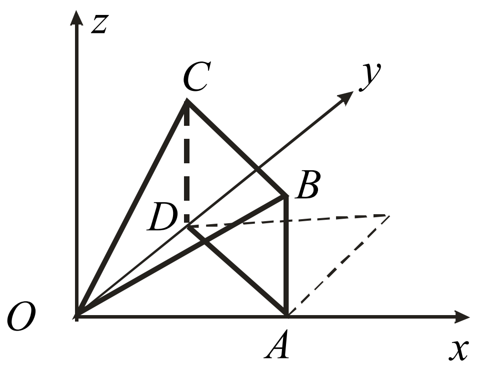

Рис. 34

Побудуємо область інтегрування схематично.

Перші чотири рівняння на площині XOY описують також проекцію області інтегрування на цю площину. Зробимо схематичний рисунок області інтегрування.

Змінимо порядок інтегрування. Ісходний інтеграл можна записати в такому вигляді:

$$\iint\limits_{Д} dxdy \int\limits_{0}^{x+y} f(x,y,z)\,dz\,,$$

де $Д$ – проекція тіла на площину XOY – це трикутник ODA. Тепер змінимо порядок інтегрування так, щоб наружний інтеграл був $\iint\limits_{Д_1} dzdx$ ($Д_1$ – це проекція області інтегрування на площину XOZ.

Зробимо схематичний рисунок цієї проекції.

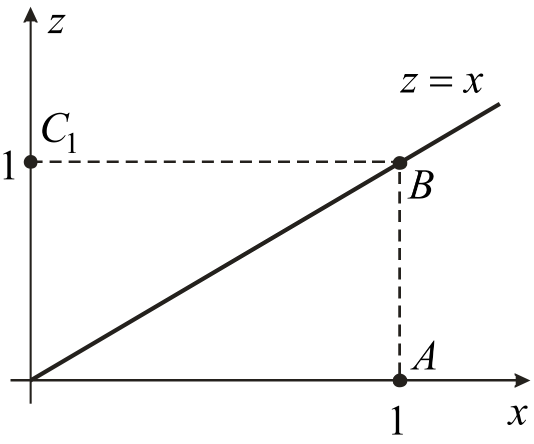

Рис. 35

C_1 – проекція точки C, O – проекція точки D. Щоб поставити границі внутрішнього інтеграла, треба проколоти спицею область інтегрування і подивитись, через яку поверхню ввійдемо в тіло, через яку вийдемо з нього.

Рівняння цих поверхонь розв’язуємо відносно y, тоді права частина рівняння поверхні через яку ми входимо буде нижньою границею внутрішнього інтеграла, а через яку входимо – верхньою границею.

Коли ми входимо в область через трикутник OAB, то входимо через площину XOZ, її рівняння $y=0$, а виходимо через площину $ABCD$, її рівняння $y=1-x$, якщо входимо через трикутник CDB, то входимо через площину OCB, її рівняння $y=z-x$. Таким чином, якщо ми змінили порядок інтегрування, то тепер наш потрійний інтеграл зведеться до суми інтегралів.

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz = \iint\limits_{Д_1} dxdy \int\limits_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy + \iint\limits_{Д_2} dxdy \int\limits_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dy =$$

{$Д_1$ – трикутник AOB, $Д_2$ – трикутник OC_1B_1, зводимо подвійний інтеграл до двократного} = $\int\limits_0^1 dz \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy + \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^z dx \int\limits_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dy$.

Тепер можна змінити порядок інтегрування у подвійного інтеграла, потім можна спроектувати область інтегрування на площину ZOY. Це можна зробити самостійно.

Приклад 2.3. Замінити потрійний інтеграл однократним

$$\int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z)\,dz.$$

Розв'язання.

Запишемо рівняння поверхонь, які обмежують область інтегрування і зробимо схематичний рисунок.

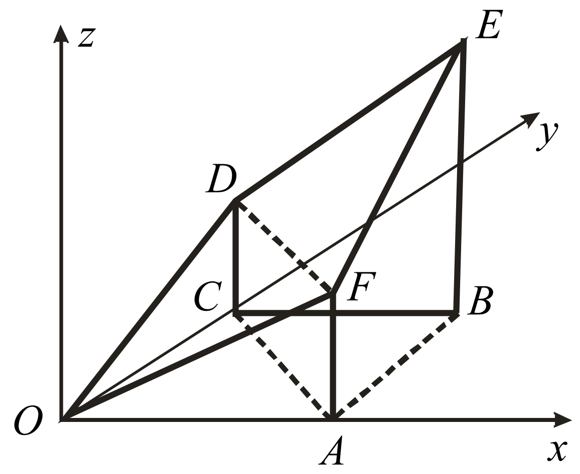

Рис. 36

$$x=1, \quad y=1, \quad z=x+y$$
$$x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

Для того, щоб звести його до однократного, треба змінити порядок інтегрування так, щоб наружний інтеграл був інтегралом по dz.

$ODEF$ – це площина $x+y=z$, $AFEB-x=1$, $CBED-y=1$.

Для цього спроектуємо нашу область на площину XOZ, або на XOY.

Побудуємо цю проекцію. E_1 – проекція точки E, $Д_1$ – точки $Д$. Тепер протикаємо спицею область інтегрування паралельно осі OY. Коли ми спицею протикаємо область через трикутник OFA, то бачимо, що входимо в тіло через площину $y=0$, а виходимо через площину $CDEB$, її рівняння $y=1$. Якщо входимо через чотирикутник OD_1E_1F, то входимо через площину $ODEF$, її рівняння $y=z-x$, а виходимо через площину $CDEB$, її рівняння $y=1$

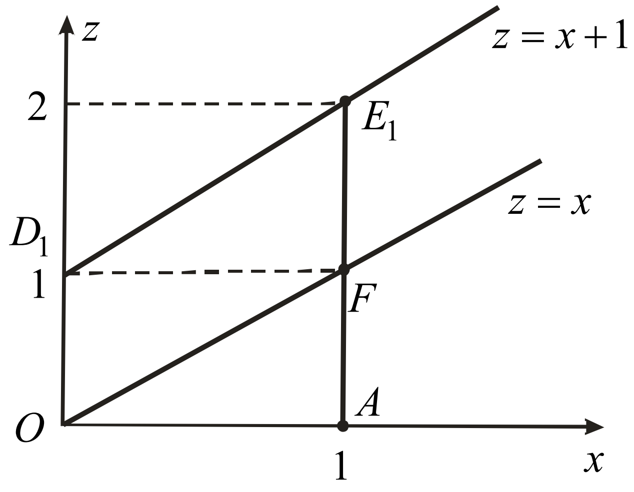

Рис. 37

Рівняння прямої DE: $\begin{cases} z=x+y \\ y=1 \end{cases}$, рівняння D_1E_1 – це проекція DE на площину $y=0$, її рівняння $z=x+1$, рівняння прямої OF $\begin{cases} z=x+y \\ y=0 \end{cases}$. Тоді

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x+y} f(z)\,dz=\iint_{Д_1} f(z)\,dzdx\int_0^1 dy+\iint_{Д_2} f(z)\,dz\int_{z-x}^1 dy=$$

$=\{Д_1-$ це трикутник CFA, $Д_2$ – це чотирикутник OD_1E_1F, подвійний інтеграл по області $Д_2$ буде дорівнювати сумі інтегралів по області OD_1F та по області $D_1E_1F\}=$

$$\int_0^1 f(z)dz\int_z^1 dx\int_0^1 dy+\int_0^1 f(z)dz\int_0^z dx\int_{z-x}^1 dy+\int_1^2 f(z)dz\int_{z-1}^1 dx\int_{z-x}^1 dy=$$

$$=\int_0^1 f(z)dz\int_z^1 dx+\int_0^1 f(z)dz\int_0^z(1-z+x)dx+\int_1^2 f(z)dz\int_{z-1}^1(1-z+x)dx=$$

$$=\int_0^1 f(z)(1-z)+\int_0^1 f(z)dz\left(x-zx+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^z+\int_1^2 f(z)dz\left(x-zx+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{z-1}^1=$$

$$=\int_0^1 f(z(1-z)dz)+\int_0^1 f(z)\left(z-z^2+\frac{z^2}{2}\right)dz+$$

$$+\int_1^2 f(z)\left(1-z+\frac{1}{2}-z+1+z^2-z+\frac{z^2}{2}+z-\frac{1}{2}\right)dz=$$

$$=\int_0^1 f(z)\left(1-\frac{z^2}{2}\right)dz+\int_1^2 f(z)\left(2-2z+\frac{z^2}{2}\right)dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 f(z)\left(2-z^2\right)+\frac{1}{2}\int_0^1 f(z)(2-z)^2\,dz.$$

Приклад 2.4. Обчислити $\iiint_T xyzdxdydz$, де область T обмежена поверхнями $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Розв'язання.

Якщо область інтегрування – шар, то вигідно перейти до сферичної системи координат.

Зробимо заміну змінних: $x=\rho\cos\varphi\cos\theta$, $y=\rho\sin\varphi\cos\theta$, $z=\rho\sin\theta$, $\dot{J}=\rho^2\cos\theta$.

Рівняння шара в сферичній системі координат $\rho=1$.

$$\iiint xyzdxdydz = \iiint \rho^5 \cos\varphi \cos^3\theta \sin\varphi \sin\theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \sin\theta d\theta \int_0^1 \rho^5 d\rho = \{$ так як внутрішні інтеграли не залежать від змінних зовнішніх інтегралів, то цей інтеграл дорівнює добутку всіх цих інтегралів $\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^3\theta d(\cos\theta) \int_0^1 \rho^5 d\rho =$

$$-\frac{1}{4}\cos 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(-\frac{\cos^4\theta}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{48}.$$

Приклад 2.5. Знайти $\int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x,y,z)dz$, якщо $f(x,y,z) = F'''_{xyz}(x,y,z)$ и a,b,c,A,B,C – постійні.

Розв'язання.

$f(x,y,z) = \dfrac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z}$, тоді $\int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C \dfrac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z} dz = \int_a^A dx \int_b^B \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\Big|_c^C dy =$

$$= \int_a^A dx \int_b^B \left(\frac{\partial^2 F(x,y,C)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F(x,y,c)}{\partial x \partial y} \right) dy = \int_a^A \left(\frac{\partial F(x,y,C)}{\partial x} - \frac{\partial F(x,y,c)}{\partial x} \right)\Bigg|_b^B =$$

$$= \int_a^A \left(\frac{\partial F(x,B,C)}{\partial x} - \frac{\partial F(x,b,C)}{\partial x} - \frac{\partial F(x,B,c)}{\partial x} - \frac{\partial F(x,b,c)}{\partial x} \right) dx =$$

$$= \left(F(x,B,C) - F(x,B,c) + F(x,b,c) \right)\Big|_a^A = F(A,B,C) - F(a,B,C) -$$

$$-F(A,b,C) + F(a,B,C) - F(A,B,c) + F(a,B,c) + F(A,b,c) - F(a,b,c).$$

Приклад 2.6.

Знайти $F'(t)$, якщо $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdysz$, де f – диференційовна функція.

Розв'язання.

Перейдемо до полярної системи координат: $A=\rho\cos\varphi\cos\theta$, $y=\rho\sin\varphi\cos\theta$, $z=\rho\sin\theta$, $x^2+y^2+z^2=\rho^2$, $\dot{J}=r^2\cos\theta$.

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\iiint\limits_{\rho\le t} f\left(\rho^2\right)\rho^2\cos\psi d\varphi d\theta=$$

$=\{$зведемо цей потрібний інтеграл до однократного, тобто наружний інтеграл зробимо $\rho\}=$

$$=\int_0^t f\left(\rho^2\right)\rho^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=\int_0^t f\left(\rho^2\right)\rho^2 d\rho\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=4\pi\int_0^t f\left(\rho^2\right)\rho^2 d\rho=F(t).$$

Це визначений інтеграл, тому $F'(t)=4\pi f\left(t^2\right)t^2$.

Приклад 2.7. Обчислити $\iiint\limits_T\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, якщо область T обмежена поверхнею $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Розв'язання.

Зробимо заміну змінних. $x=a\rho\cos\varphi\cos\theta$, $y=b\rho\sin\rho\cos\theta$, $z=c\rho\sin\theta$, $\dot{J}=abc\rho^2\cos\theta$. Рівняння еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ буде мати вигляд $\rho=1$. Тоді

$$\iiint\limits_T\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz=abc\iiint\limits_T\rho^2\cos\theta d\varphi d\theta d\rho=$$

$$=abc\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\cos\theta\int\limits_0^1\rho^2\cos\theta d\rho=abc\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1=abc\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{4abc\pi}{3}.$$

Приклад 2.8. Знайти об'єм тіла обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=2az$, $x^2+y^2\le z^2$.

Розв'язання.

Зробимо схематичний рисунок. Перша поверхня – це сфера, центр якої $(0,0,a)$, друга – конус. Перейдемо до сферичних координат:

$$x=\rho\cos\varphi\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\varphi\cos\theta,$$
$$z=c\rho\sin\theta,$$
$$\dot{J}=\rho^2\cos\theta.$$

Рівняння сфери $\rho=2a\sin\theta$, рівняння конуса $\rho^2\cos^2\theta=$ $=\rho^2\sin^2\theta\Rightarrow\cos 2\theta=0\Rightarrow$ $=2\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$.

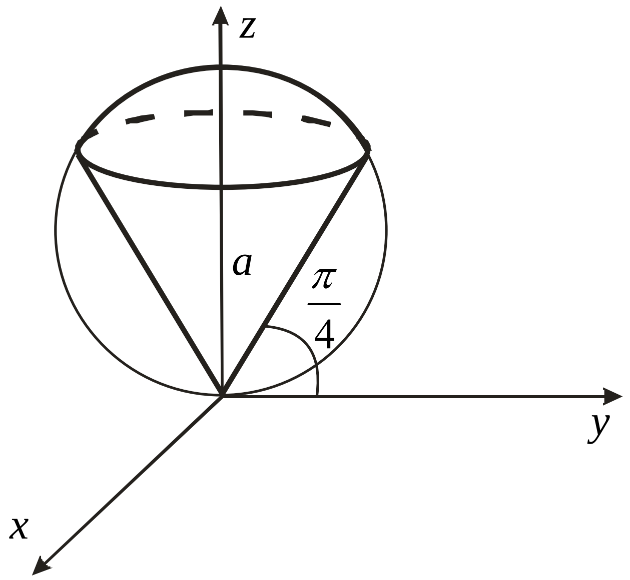

Рис. 38

$$V=\iiint\limits_T d\varphi d\theta\rho^2\cos\theta d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{2a\sin\theta}\rho^2\cos\theta d\rho=$$

$$=2\pi\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\cos\theta\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{2a\sin\theta}=2\pi\frac{8a^3}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta=$$

$$=\frac{2\pi\cdot 8a^3}{3}\cdot\frac{\sin^4\theta}{4}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4\pi a^3}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\pi a^3.$$

Приклад 2.9. Обчислити об’єм тіла, яке обмежене поверхнею $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=\frac{x}{h}$.

Розв’язання.

Перейдемо до узагальненої системи координат $x=a\rho\cos\varphi\cos\theta$, $y=b\rho\sin\varphi\cos\theta$, $z=c\rho\sin\theta$, $\dot{J}=abc\rho^2\cos\theta$.

Запишемо рівняння поверхні в сферичній системі координат:

$$\rho^4=\frac{a\rho\cos\varphi\cos\theta}{h}\Rightarrow\rho=\sqrt[3]{\frac{a\cos\varphi\cos\theta}{h}}.$$

Із рівняння поверхні видно, що $x\geq 0$. Лінія перетину цього тіла з площиною $z=0$ має рівняння $z^3=\frac{a\cos\varphi}{h}$, звідки видно, що $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$, але ця фігура симетрична відносно площини XOY, тому $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$.

$$\iiint\limits_T abc\rho^2\cos\theta d\varphi d\theta d\rho=abc\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int\limits_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\varphi\cos\theta}}\rho^2d\rho=$$

$$=abc\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\varphi\cos\theta}}d\theta=\frac{1}{3}abc\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a}{h}\cos\varphi\cos^2\theta d\theta=$$

$$=\frac{1}{3}abc\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{3}\frac{a^2bc}{h}\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta=$$

$$=\frac{a^2bc}{3h}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}\frac{\pi a^2bc}{h}.$$

Приклад 2.10. Знайти об'єм тіла, яке обмежене поверхнею $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2=\dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k}\ \left(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\right)$.

Розв'язання.

Перейдемо до узагальненій сферичній системі координат. Зробимо заміну змінних: $x=a\rho\cos^2\varphi\cos^2\theta$, $y=b\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta$, $y=c\rho\sin^2\theta$, $\dot{J}=4abc\rho^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cos^3\theta\sin\theta$.

Запишемо рівняння поверхні, яке обмежує тіло в цій системі координат: $\rho=\cos^2\theta\left(\dfrac{a\cos^2\varphi}{h}+\dfrac{b\sin^2\varphi}{k}\right)$.

$$V=4abc\iiint\limits_T\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\theta\sin\theta d\varphi d\theta d\rho=$$

$$=4abc\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin\theta d\theta\int\limits_0^{\cos^2\theta\left(\frac{a\cos^2\varphi}{h}+\frac{b\sin^2\varphi}{k}\right)}\rho^2 d\rho=$$

$$=\frac{4abc}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin\theta\cos^6\theta\left(\frac{a\cos^2\varphi}{h}+\frac{b\sin^2\varphi}{k}\right)^3 d\theta=$$

$$=\frac{4abc}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{a\cos^2\varphi}{h}+\frac{b\sin^2\varphi}{k}\right)^3 d\varphi\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9\theta\sin\theta d\theta=$$

$$=\frac{4abc}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{a^3\cos^6\varphi}{h^3}+\frac{3a^2b\cos^4\varphi\sin^2\varphi}{h^2k}+\frac{3ab^2\cos^2\varphi\sin^4\varphi}{hk^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{b^3\sin^6\varphi}{k^3}\right)d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos^9\theta d\cos\theta=\frac{4abc}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a^3}{h^3}\cos^7\varphi\sin\varphi+\right.$$

$$+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3a^2b\cos^5\varphi\sin^3\varphi}{h^2k}+\frac{3ab^2}{hk^2}\cos^3\varphi\sin^5\varphi+\frac{b^3}{k^3}\cos\varphi\sin^7\varphi\cdot\left(-\frac{\cos^{10}\theta}{10}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{4abc}{30}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{a^3}{h^3}\cos^7\varphi\right)d\cos\varphi+\frac{3a^2b}{h^2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos^5\varphi\left(1-\cos^2\varphi\right)d\cos\varphi+\right.$$

$$\left.+\frac{3ab^2}{hk^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\left(1-\sin^2\varphi\right)d\sin\varphi+\frac{b^3}{k^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\varphi d\sin\varphi\right)=$$

$$=\frac{4abc}{30}\left(\frac{a^3}{8h^2}+\frac{3a^2b}{h^2k}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\frac{3ab^2}{hk^2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)\right)=$$

$$=\frac{4abc}{30\cdot 8}\left(\frac{a^3}{h^2}+\frac{a^2b}{h^2k}+\frac{ab^2}{hk^2}+\frac{b^3}{k^3}\right)=\frac{abc}{60}\left(\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)+\frac{b^2}{k^2}\left(\frac{a}{k}+\frac{b}{k}\right)\right)=$$

$$=\frac{abc}{60}\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

III. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

1. Криволінійний інтеграл 1-го роду

Якщо $f(x,y,z)$ – функція, визначена і неперервна в точках гладкої кривої C, яка задана параметрично:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t_1 \le t \le t_2,$$

і dl – диференціал дуги, то

$$\int_C f(x,y,z)\,dl = \int_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,dt.$$

Криволінійний інтеграл не залежить від напрямку інтегрування по кривій C.

Якщо криволінійний інтеграл заданий на площині і рівняння кривої C розв'язано відносно однієї змінної $y=\psi(x)$, або $x=\varphi(y)$, то в першому випадку $dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, а в другому – $dl=\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\,dy$. Тоді

$$\int_C f(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f\left(x,\psi(x)\right)\sqrt{1+(x')^2}\,dx,$$

або

$$\int_C f(x,y)\,dx = \int_{y_1}^{y_2} f\left(\psi(y),y\right)\sqrt{1+\left(\varphi'(y)\right)^2}\,dy.$$

2. Криволінійний інтеграл 2-го роду

Якщо функції $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ неперервні в точках кривої C, яка задана параметрично $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, то

$$\int_C P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\Big(P\left(x(t),y(t),z(t)\right)x'(t)+Q\left(x(t),y(t),z(t)\right)y'(t)+$$

$$+R\left(x(t),y(t),z(t)\right)z'(t)\Big)dt.$$

3. Формула Гріна

1^0. Якщо C – замкнений кусочно-гладкий контур, який обмежує однозв'язну область *Д* і функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні разом із своїми частинними похідними $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ в цій області *Д*, то справедлива формула Гріна:

$$\iint\limits_{Д}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint Pdx+Qdy.$$

2^0. Площа плоскої області

Площа S фігури, яка обмежена простим кусочно-гладким контуром *C*, то її площу S

$$S=\oint\limits_{C} xdy=-\oint ydx=\frac{1}{2}\oint(xdy-ydx).$$

4. Випадок повного диференціалу

Якщо $P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=du$,

де $u=u(x,y,z)$ – однозначна функція в області V, то інтеграл не залежить від виду кривої *C*, яка лежить в цій області і

$$\int\limits_{C} Pdx+Qdy+Rdz=u(x_2,y_2,z_2)-u(x_1,y_1,z_1),$$

де (x_1,y_1,z_1) – початкова точка, і (x_2,y_2,z_2) – кінцева точка путі.

Для того, щоб криволінійний інтеграл не залежав від шляху по якому обчислюється інтеграл, необхідно і достатньо, щоб P, Q, R мали неперервні частні похідні першого порядку і виконувалися наступні умови:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Приклад 3.1. Обчислити $\int\limits_{C}\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)dl$, де C – дуга астроїди $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Розв'язання.

Задамо рівняння кривої *C* параметрично:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \ 0 \le t \le 2\pi .$$

Знайдемо dl: $x' = -3a\cos^2 t \sin t$, $y' = 3a\sin^2 t \cos t$, тоді

$$\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2 = 9a^2\cos^4 t + \sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t = 9a^2\sin^2 t = \frac{9a^2}{4}\sin^2 2t .$$

Так як крива C симетрична відносно осей OX і OY, і функція $x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}$, яка знаходиться під знаком інтеграла симетрична відносно осей координат, то інтеграл в кожній чверті однаковий.

Тоді

$$\int\limits_C \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) dl = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^{\frac{4}{3}}\cos^4 t + a^{\frac{4}{3}}\sin^4 t \right) \sqrt{\frac{9a^2}{4}\sin^2 2t dt} =$$

$$= \left(\text{функція } \sin 2t \ge 0 \text{ для } t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \text{ тому} \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{9a^2}{4}\sin^2 2t} = \frac{3a}{2}\sin 2t \right) = 4a^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{3}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right)\sin 2t dt =$$

$$= \left\{ \cos^4 t + \sin^4 t = \cos^4 t + \sin^4 t + 2\sin^2 t\cos^2 t - 2\sin^2 t\cos^2 t = \right.$$

$$\left. = \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{4}\sin^2 2t = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t \right\} =$$

$$= 6a^{\frac{7}{3}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t\right)\sin 2t dt = 6a^{\frac{7}{3}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\left(1 - \cos^2 2t\right)\right)\left(-\frac{1}{2}d\left(\cos 2t\right)\right) =$$

$$= 6a^{\frac{7}{3}}\left(-\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4}\frac{\cos^3 2t}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a^{\frac{7}{3}}\left(-\frac{1}{4}\left(-1-1\right) - \frac{1}{12}\left(-1-1\right)\right) =$$

$$= 6a^{\frac{7}{3}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = 4a^{\frac{7}{3}} .$$

Приклад 3.2. Обчислити довжину кривої $y = \arcsin\frac{x}{a}$, $z = \frac{a}{u}\ln\frac{a-x}{a+x}$ від точка $O(0,0,0)$ до точки $A(x_0, y_0, z_0)$.

Розв'язання.

У просторі крива задається лінією перетину двох поверхонь. Для обчислення криволінійного інтегралу нам треба задати криву параметрично. Так як обидві поверхні циліндричні і їх рівняння розв'язані відносно y в першій поверхні, і відносно z у другій, то в якості параметра візьмемо x. Тоді параметричні рівняння кривої C мають вигляд: $\begin{cases} x = x, \\ y = a\arcsin\frac{x}{a}, \\ z = \frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}. \end{cases}$

Довжина дуги кривої шукається за формулою $l = \int\limits_C dl$, тому обчислимо dl.

$$x' = 1,\ y' = a\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$z' = \left(\frac{a}{4}\ln\frac{x-a}{x+a}\right)' = \frac{a}{4}\big(\ln(x-a)-\ln(x+a)\big)' = \frac{a}{4}\left(-\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a+x}\right) = -\frac{a^2}{2\left(a^2-x^2\right)}.$$

$$l = \int\limits_0^{x_0}\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2-x^2}+\frac{a^4}{4\left(a^2-x^2\right)^2}}dx = \int\limits_0^{x_0}\sqrt{\frac{4\left(a^2-x^2\right)^2+4a^2\left(a^2-x^2\right)+a^4}{4\left(a^2-x^2\right)^2}}dx =$$

$$= \int\limits_0^{x_0}\frac{2\left(a^2-x^2\right)+a^2}{2\left(a^2-x^2\right)}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_0}\frac{3a^2-2x^2}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_0}\left(\frac{2a^2-2x^2}{a^2-x^2}+\frac{a^2}{a^2-x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_0}\left(2+\frac{a^2}{a^2-x^2}\right)dx = x+\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right|\Bigg|_0^{x_0} = x_0+\frac{a}{4}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| =$$

$$= \left(\frac{a}{4}\ln\left|\frac{a-x_0}{a+x_0}\right| = z_0\right) = x_0+z_0.$$

Приклад 3.3. Обчислити довжину кривої $(x-y)^2 = a(x+y)$, $x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$ від точки $O(0,0,0)$ до точки $A(x_0, y_0, z_0)$, параметри всі додатні.

Розв'язання.

Треба спочатку рівняння кривої, яка задана перетином двох поверхонь, записати параметрично. Маємо таку систему рівнянь: $\begin{cases} (x-y)^2 = a(x+y) \\ x^2 - y^2 = \frac{a}{8}z^2 \end{cases}$.

Позначимо $\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases}$, звідси $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases}$. Перше рівняння кривої запишеться так: $u^2 = av$, звідси $v = \frac{u^2}{2}$, тоді x і y запишуть через один параметр: $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(u + \frac{u^2}{a}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{a} - u\right) \end{cases}$. Тепер через параметр u виразимо z, для цього скористуємося другим рівнянням кривої; підставимо в рівняння $x^2 - y^2 = \frac{a}{8}z^2$ значення x і y, получимо

$$\left(\frac{1}{2}\left(u + \frac{u^2}{a}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{a} - u\right)\right)^2 = \frac{9}{8}z^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(u^2 + \frac{2u^3}{a} + \frac{u^4}{a^2} - \frac{u^4}{a^2} + \frac{2u^3}{a} - u^2\right) = \frac{9}{8}z^2 \Rightarrow \frac{u^3}{a} = \frac{9}{8}z^2 \Rightarrow \Rightarrow z = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}.$$

Так як за умовою задачі всі параметри додатні, то $z \geq 0$, тому $z = \frac{2}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$.

Запишемо рівняння кривої параметрично $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left(u+\dfrac{u^2}{a}\right) \\ y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u^2}{a}-u\right) \\ z=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$.

Знайдемо dl, для цього знайдемо похідні $\dfrac{dx}{du}$, $\dfrac{dy}{du}$, $\dfrac{dz}{du}$.

$$\frac{dx}{du}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2u}{a}\right),\quad \frac{dy}{du}=\frac{1}{2}\left(\frac{2u}{a}-1\right),\quad \frac{dz}{du}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}u^{\frac{1}{2}}.$$

Знайдемо $(x')^2+(y')^2+(z')^2$.

$$(x')^2+(y')^2+(z')^2=\frac{1}{4}\left(1+\cancel{\frac{4u}{a}}+\frac{4u^2}{a^2}+\frac{4u^2}{a^2}-\cancel{\frac{4u}{a}}+1\right)+\frac{2u}{a}=\frac{1}{2}+\frac{2u^2}{a^2}+\frac{2u}{a}=$$

$$=\frac{a^2+4u^2+4u}{2a^2}=\frac{(a+2u)^2}{2a^2}.$$

Знайдемо параметр u, при якому задані точки O і A мають координати $(0,0,0)$ і (x_0,y_0,z_0). Для цього в параметричні рівняння кривої підставимо спочатку координати точки $O(0,0,0)$, потім $A(x_0,y_0,z_0)$, получимо

$$\begin{cases} 0=\dfrac{1}{2}\left(u+\dfrac{u^2}{a}\right) \\ 0=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u^2}{a}-u\right) \\ 0=\pm\dfrac{2}{3}\dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \end{cases},\qquad \begin{cases} x_0=\dfrac{1}{2}\left(u+\dfrac{u^2}{a}\right) \\ y_0=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u^2}{a}-u\right) \\ z_0=\dfrac{2}{3}\dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \end{cases}.$$

Третє рівняння має тільки один розв'язок, то він і буде розв'язком системи, тобто $u_2 = \sqrt[3]{\dfrac{9az_0^2}{8}}$.

$$l = \int_C dl = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\frac{(a+2u)^2}{2a^2}} du = \frac{1}{a\sqrt{2}} \int_0 (a+2u) du = \frac{1}{a\sqrt{2}} \left(au + u^2 \right) \Bigg|_0^{\sqrt[3]{\frac{9az_0^2}{8}}} =$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{2}} \left(a\sqrt[3]{\frac{9az_0^2}{8}} + \sqrt[3]{\left(\frac{9az_0^2}{8}\right)^2} \right) = \frac{3}{a\sqrt{2}} \left(\frac{a}{4}\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}} + \frac{a}{2}\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}} \right) =$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}} + 2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}} \right).$$

Приклад 3.4. Знайти масу дуги кривої $x = at$, $y = \dfrac{a}{2}t^2$, $z = \dfrac{a}{3}t^2$ $(0 \le t \le 1)$, щільність якої змінюється по закону $\rho = \sqrt{\dfrac{2y}{a}}$.

Розв'язання.

Масу кривої обчислюють по формулі $M = \int_C \rho(x, y, z) dl$.

Знайдемо $dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt = \sqrt{a^2 + (at)^2 + \left(at^2\right)^2} dt =$ $= a\sqrt{1 + t^2 + t^4} dt$, тоді

$$M = \frac{a}{2}\int_0^1 t\sqrt{1 + t^2 + t^4} dt = \frac{a}{2}\int_0^1 t\sqrt{\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = \left\{ \begin{matrix} t^2 + \frac{1}{2} = z, & t_1 = \frac{1}{2} \\ 2tdt = dz, & t_2 = \frac{3}{2} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{a}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{z^2 + \frac{3}{4}} dz = \{\text{цей інтеграл можна інтегрувати по частинам, де } u = \sqrt{z^2 + \frac{3}{4}}\} =$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(z\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{4}\ln\left(z+\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}\right)\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}=\frac{a}{4}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\ln\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{a}{8}\left(3\sqrt{3}-1+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)\right)\Bigg).$$

Приклад 3.5. Знайти координати центра мас контуру однорідного сферичного трикутника $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

Розв'язання.

Зробимо схематичний рисунок. Сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$ пересікається площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$ по кривим BC, AB, AC.

Координати центра мас обчислюються за формулами:

$$x_c=\frac{1}{M}\int_l x\gamma dl,$$

$$y_c=\frac{1}{M}\int_C y\gamma dl,$$

$$z_c=\frac{1}{M}\int_l z\gamma dl,$$

де $\gamma(x,y,z)$ – щільність, в цьому випадку $\gamma=const$, $M=\int_C \gamma dl=\gamma\int_C dl=\gamma l$, де l – довжина кривої.

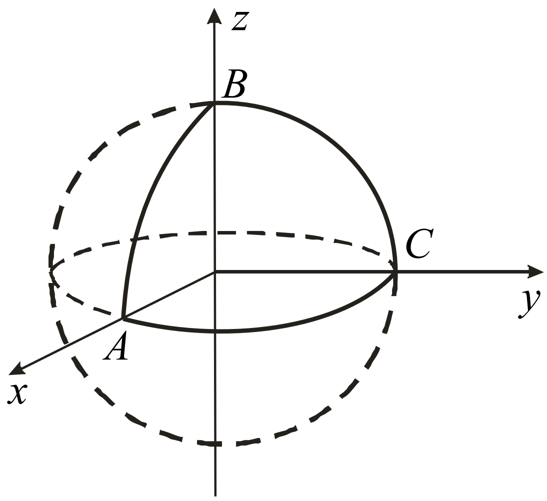

Рис. 39

$$x_c=\frac{\int xdl}{l},\quad y_c=\frac{\int ydl}{l},\quad z_c=\frac{\int zdl}{l}.$$

Довжини дуг AB, AC, BC однакові, вони є чверть діаметрального перетину сфери, тобто довжина $\breve{AB}$ дорівнює $\frac{\pi a}{2}$, тоді $l=\frac{3\pi a}{2}$.

Тепер обчислимо $\int_C xdl$, $\int_C ydl$, $\int_C zdl$. Для цього запишемо рівняння дуг AB, BC, AC – параметрично:

$$AC:\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = 0. \end{cases} \quad BC:\begin{cases} x = 0, \\ y = a\cos t, \\ z = a\sin t. \end{cases} \quad AB:\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = 0, \\ z = a\sin t. \end{cases}$$

На кожній кривій $dl = adt$.

$$\int_C xdl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos tdt + \int_0^{\pi} a^2 \cos tdt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \cdot dt = 2a^2.$$

$$\int_C ydl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin tdt + \int_0^{\pi} 0 \cdot dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos tdt = 2a^2.$$ Також $\int_C zdl = 2a^2$.

Тоді $x_c = \dfrac{4a}{3\pi}, \quad y_c = \dfrac{4a}{3\pi}, \quad z_c = \dfrac{4a}{3\pi}.$

Приклад 3.6. Обчислити інтеграл $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)dy$ по шляху, який не пересікає вісь OY.

Розв'язання.

Якщо інтеграл береться по кривій від точки A до точки B, то він залежить від форми шляху, але в деяких випадках він однаковий. І коли криволінійний інтеграл, заданий від точки A до точки B, і шлях по якому його обчислюють, не заданий, то може бути, що він не залежить від шляху інтегрування. Тоді ми вибираємо найпростіший шлях.

Перевіримо це.

$$P = 1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}, \quad Q = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}.$$

Ці функції і їх частинні похідні

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}$$

неперервні для $x \neq 0$ і $y \neq 0$, рівні, це означає, що інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Тому обчислюємо його по прямій $y = \pi$, тоді $dy = 0$

$$\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{x}{y}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy = \int\limits_1^2 \left(1-\frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{y}\right)dx =$$

$$= x\Big|_1^2 + \pi\int\limits_1^2 \cos\frac{\pi}{x}\, d\left(\frac{\pi}{x}\right) = 2-1+\pi\sin\frac{\pi}{x}\Big|_1^2 = 1+\pi.$$

Приклад 3.7. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AmB} \left(\varphi(y)e^x - my\right)dx + \left(\varphi'(y)e^x - m\right)dy$, де $\varphi(y)$ і $\varphi'(y)$ – неперервні функції, AmB – будь-яка крива, яка з'єднує точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$, але така, що обмежує разом з відрізком AB площу $AmBA$ заданої величини S.

Розв'язання.

Нам треба обчислити інтеграл по будь-якій кривій, яка з'єднує точки A і B. Цю криву AmB ми відрізком BA замкнемо, і будемо обчислювати цей інтеграл по замкненій кривій, тоді

$$\int\limits_{AmB} Pdx + Qdy =$$

$$= \oint Pdx + Qdy - \int\limits_{BA} Pdx + Qdy,$$

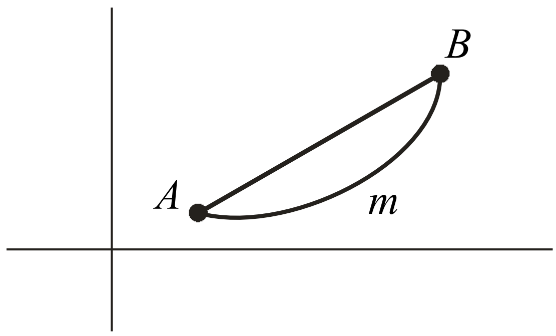

Рис. 40

де AB – відрізок.

Для обчислення інтеграла по замкненій кривій скористуємось формулою Гріна:

$$\oint \left(\varphi(y)e^x - my\right)dx + \left(\varphi'(y)e^x - m\right)dy =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} P(x,y) = \varphi(y)e^x - my, \quad Q(x,y) = \varphi'(y)e^x - m, \quad \text{тоді} \\ \dfrac{\partial Q}{dx} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = \varphi'(y)e^x - \varphi'(y)e^x + m = m \end{array} \right\} =$$

$$= \iint\limits_{Д} m\,dxdy = m\iint\limits_{Д} dxdy = mS,$$

так як $\iint\limits_{Д} dxdy$ дорівнює площі, яка знаходиться внутрі замкненої кривої, а вона за умовою дорівнює S.

Тепер обчислимо криволінійний інтеграл по відрізку BA. Запишемо рівняння прямої BA: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Розв'яжемо це рівняння відносно X, получимо: $x=y\dfrac{x-x_1}{y_2-y_1}+\dfrac{x_1y_2-y_1x_2}{y_2-y_1}$, $dx=\dfrac{x_2-x_1}{y_2-y_1}dy$. В підінтегральному виразі переставимо доданки місцями

$$\left(\varphi(y)e^x-my\right)dx+\left(\varphi'(y)e^x-m\right)dy=\varphi(y)e^x dx+\varphi'(y)e^x dy-mydx-mdy$$

перші два доданки це диференціал функції $\varphi(y)e^x$, тоді наш вираз набуде вид

$$\left(\varphi(y)e^x-my\right)dx+\left(\varphi'(y)e^x-m\right)dy=d\left(\varphi(y)e^x\right)-mydx-mdy.$$

Тоді $\int\limits_{BA} d\left(\varphi(y)e^x\right)=mydx-mdy=\int\limits_{BA} d\left(\varphi(y)e^x\right)-m\int\limits_{BA} ydx+dy=$

$$=\varphi(y_1)e^{x_1}-\varphi(y_2)e^{x_2}-m\int\limits_{y_2}^{y_1} y\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}dy+dy=\varphi(y_1)e^{x_1}-\varphi(y_2)e^{x_2}-$$

$$-m\left(\frac{y^2}{2}\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}\Bigg|_{y_2}^{y_1}+y\Bigg|_{y_2}^{y_1}\right)=\varphi(y_1)e^{x_1}-\varphi(y_2)e^{x_2}+m(y_2-y_1)+$$

$$+\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2-y_1).$$

Тоді $\int\limits_{AmB}\left(\varphi(y)e^x-my\right)dx+\left(\varphi'(y)e^x-m\right)dy=mS+\varphi(y_2)e^{x_2}-$

$$-\varphi(y_1)e^{x_1}-m(y_2-y_1)-\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2-y_1).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Справочное пособие по математическому анализу. Ч. 1. Введение в анализ, производная, интеграл / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай и др. – К.: Вища шк., 1978. – 696 с.

2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1990. – 624 с.

3. Садовничий В.А. Задачи студенческих математических олимпиад / В.А. Садовничий, А.А. Григорьян, С.В. Конягин. – М.: МГУ, 1987. – 310 с.

4. Садовничий В.А. Задачи студенческих олимпиад по математике / В.А. Садовничий, А.С. Подколузин. – М.: Наука, 1978. – 207 с.

ЗМІСТ

Упорядники:

Кагадій Тетяна Станіславівна

Шелест Людмила Іванівна

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Матеріали методичного забезпечення
поглибленого вивчення розділу

Видано в редакції упорядників

Підписано до друку 20.02.2018. Формат 30х42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 3,8.
Обл.-вид. арк. 3,8. Тираж 50 пр. Зам. №

Державний вищий навчальний заклад
«Національний гірничий університет»
49005, м. Дніпро, просп. Дм. Яворницького, 19.