

Е.С. ЛАПШИН, д-р техн. наук,

А.И. ШЕВЧЕНКО, канд. техн. наук

(Украина, Днепропетровск, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕТИКИ ГРОХОЧЕНИЯ И ОБЕЗВОЖИВАНИЯ МИНЕРАЛЬНОГО СЫРЬЯ

Для разделения минерального сырья по крупности и его обезвоживания широко применяются вибрационные грохоты. Отсюда пристальное внимание к усовершенствованию вибрационных грохотов, которое обеспечит повышение качества сырья, энерго- и ресурсосбережение, уменьшение вредного влияния на экологию.

Разделение по крупности и обезвоживание минерального сырья на вибрационном грохоте происходит в результате прохождения мелких частиц и жидкости через его слой и отверстия просеивающей поверхности. При грохочении по классу, меньшему, чем капиллярная постоянная, этим процессам препятствуют силы поверхностного натяжения, которые преодолеваются за счет динамического воздействия. Для повышения эффективности грохочения при этих условиях предложено использовать виброударный режим возбуждения просеивающей поверхности [1-2], а также дезинтегрирующие элементы (д.э.) [3].

Для обеспечения высокой производительности грохочение производят толстым слоем в режиме с подбрасыванием. Общеизвестно, что в этом случае классификация происходит в результате сегрегации, просеивания и вибротранспортирования. Интенсивность этих составляющих зависит от грансостава, формы частиц, физико-механических свойств и влажности сырья, высоты слоя, конструктивных и динамических параметров грохота. Особо следует отметить, что в процессе грохочения изменяется высота слоя и влажность, а это существенно сказывается на всех трех составляющих.

С развитием компьютерной техники наметилась такая тенденция: выбор рациональных конструктивных и режимных параметров грохота производить на основе численного моделирования, а не трудоемких и длительных натуральных испытаний. Для этого необходима математическая модель процесса грохочения и обезвоживания. Создано большое количество как теоретических, так и эмпирических моделей. Их анализ приведен в монографии [4].

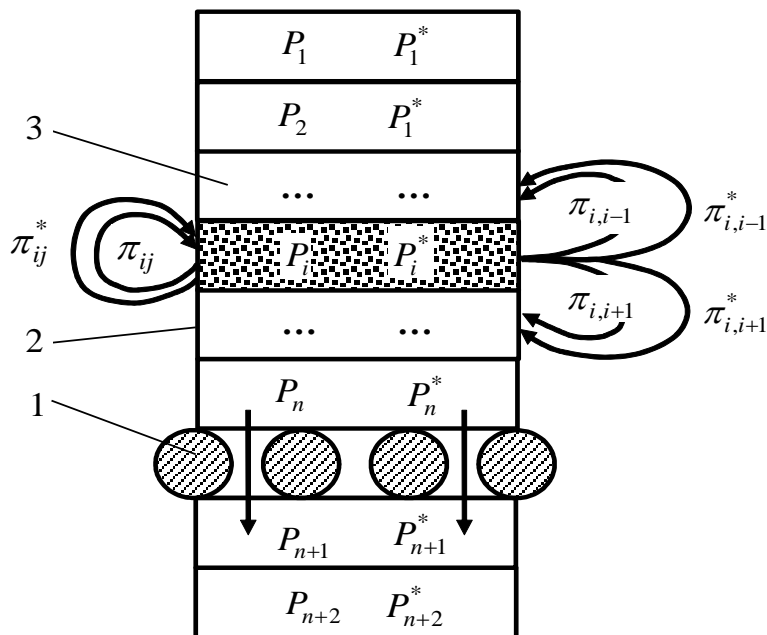
Разработанная математическая модель кинетики грохочения влажного горного сырья [5-9], учитывающая сегрегацию, просеивание, забивание отверстий просеивающей поверхности, изменение высоты слоя в результате просеивания, а также вибрационное транспортирование, позволяет на основе численного эксперимента определить рациональные конструктивные и динамические параметры, при которых достигаются требуемые технологические показатели грохочения. Однако она не описывает изменение влажности сырья в процессе вибрационного грохочения. Это особенно важно, когда одновременно с разде-

Підготовчі процеси збагачення

лением по крупности требуется эффективное обезвоживание. Поэтому были изучены особенности прохождения жидкости через отверстия просеивающей поверхности [10-13], удельные энергетические затраты на удаление жидкости [14-15] и разработана модель обезвоживания [16, 17]. Далее необходимо выполнить математическое моделирование, учитывающее взаимное влияние классификации по крупности и обезвоживания. Создание такой модели позволит на основе численного моделирования определить рациональные конструктивные и динамические параметры грохота, при которых обеспечивается энерго- и ресурсосбережение.

В этой связи цель данной работы – разработать математическую модель, которая комплексно описывает кинетику грохочения и обезвоживания.

Кинетику грохочения и обезвоживания будем моделировать дискретным марковским процессом с дискретными состояниями [4, 5, 7-9]. Проведем две плоскости, перпендикулярные к просеивающей поверхности 1 (рисунок), причем одну плоскость проведем через начало просеивающей поверхности, а вторую – на расстоянии l_k от нее. Часть объема грохотимого материала, ограниченного этими плоскостями, назовем контрольным объемом 2.



Расчетная схема процесса грохочения и обезвоживания:

1 – просеивающая поверхность; 2 – контрольный объем; 3 – элементарный слой

Начальная высота контрольного объема равна [4]

$$H_1 = Q / 3600 \rho_f V_1 b_c, \quad (1)$$

где Q – массовая производительность по питанию; ρ – насыпная плотность; V_1 – скорость вибротранспортирования при высоте H_1 ; b_c – ширина просеивающей поверхности.

Підготовчі процеси збагачення

Контрольний об'єм по висоті розделим на n елементарних слоев 3 висотою $h = H_1/n$. Условно д.э. и подрешетное пространство также будем называть элементарными слоями. Каждому элементарному слою присвоим индекс i . Отсчет ведем сверху вниз (подрешетное пространство слой $n+1$, а д.э. – $n+2$).

Распределение частиц подрешетного класса крупности d (мелкие частицы) по высоте контрольного объема будем характеризовать $n+2$ -мерным вектором вероятностей состояний $\bar{P}(t)$, компонентами которого являются вероятности $P_i = M_i/M$, где M_i и M – соответственно массы мелких частиц в i -ом слое и в контрольном объеме.

Под действием вибрации частицы с вероятностью π_{ij} переходит из i -го элементарного слоя в j -тый.

Эволюция вектора состояний для частиц описывается выражением [4, 5, 7-9]

$$\bar{P}(k) = \bar{P}(0) \|\pi_{ij}\|^k, \quad (2)$$

где $\bar{P}(0)$ и $\bar{P}(k)$ – вектор состояний в начале процесса грохочения и после k взаимодействий грохотимого материала с просеивающей поверхностью; $\|\pi_{ij}\|$ – стохастическая матрица.

Применительно к грохочению материала слоем, высота которого не больше десяти диаметров крупных частиц стохастическая матрица имеет вид [4]:

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} (1-p-ph) & p & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & ph \\ q & (1-q-p-ph) & p & 0 & \dots & \dots & \dots & ph \\ 0 & q & (1-q-p-ph) & p & 0 & \dots & \dots & ph \\ 0 & 0 & q & (1-q-p-ph) & p & 0 & \dots & ph \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (1-P_s-ph) & P_s & ph \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ qh & qh & qh & \dots & \dots & \dots & 0 & (1-(n-2) \cdot qh) \end{array} \right\|, \quad (3)$$

где p и q – вероятности перехода частиц вниз и вверх по высоте слоя грохотимой горной массы; ph – вероятности перехода частиц из элементарных слоев на д.э.; qh – вероятности перехода частиц с д.э. в элементарные слои; P_s – вероятность прохождения частиц через отверстия просеивающей поверхности.

Размер матрицы $R_m = (n+2) \times (n+2)$.

Элементы вектора состояния и матрицы должны удовлетворять условиям нормировки [18]

$$\sum_{i=1}^{n+2} P_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n+2} \pi_{ij} = 1. \quad (4)$$

Підготовчі процеси збагачення

Также под действием вибрации жидкость с вероятностью π_{ij}^* переходит из i -го элементарного слоя в j -тый.

Эволюция вектора состояний для жидкости описывается выражением [3, 16, 17] $\bar{P}^*(k) = \bar{P}^*(0) \|\pi_{ij}^*\|^k$

$$\bar{P}^*(k) = \bar{P}^*(0) \|\pi_{ij}^*\|^k, \quad (5)$$

где $\bar{P}^*(0)$ и $\bar{P}^*(k)$ – вектор состояний для жидкости в начале процесса грохочения и после k взаимодействий грохотимого материала с просеивающей поверхностью; $\|\pi_{ij}^*\|$ – стохастическая матрица для жидкости.

Стохастическая матрица для жидкости имеет такой же вид, как и матрица (3), только в ней вероятности переходов для частиц необходимо заменить на вероятности переходов жидкости, которые будем обозначать значком *. Также необходимо соблюдение условия нормировки (4).

Элементы стохастических матриц определяются методами, изложенными в работах [3-5, 7-9, 16, 17, 19-23].

В [10-13, 19-23] показано, что переход частиц и жидкости возможен только при условиях:

$$E_k \geq E_s, \quad (6)$$

$$E_k^* \geq E_s^*, \quad (7)$$

где E_k и E_k^* – кинетическая энергия частицы и жидкости; E_s и E_s^* – энергия, необходимая для образования новой межфазной поверхности.

В процессе грохочения меняется грансостав, количество жидкости и высота слоя.

Формула (5) позволяет определить изменение распределения мелких частиц по толщине грохотимого материала, а также вероятность $P_{n+1}(k)$ его выхода в подрешетный продукт, которую обозначим $P_-(k)$. Зная $P_-(k)$, вычислим массу просеявшегося материала (подрешетного продукта)

$$M_- = P_-(k) \dot{I}. \quad (8)$$

При этом высота контрольного объема уменьшится на такую величину [4, 24]

$$\Delta = \frac{M_- \chi_k}{b_c l_k \rho}, \quad (9)$$

Підготовчі процеси збагачення

где χ_k – эмпирический коэффициент, зависящий от грансостава грохотимого материала.

С учетом (8) имеем

$$\Delta = \frac{\chi_k P_-(k) M}{b_c l_k \rho}. \quad (10)$$

Непрерывное изменение высоты контрольного объема будем моделировать дискретным изменением с шагом, равным толщине элементарного слоя h . Договоримся нумерацию последующих элементарных слоев сохранять, а будем полагать, что поочередно устраняются слои 1, 2 и т. д. При этом высоту контрольного объема H , скорость вибротранспортирования V , количество шагов k и время t_h , через которое совершается последующий шаг, будем записывать с индексом m , равным номеру верхнего элементарного слоя, т. е. H_m, V_m, k_m и $t_{h,m}$. Вектор вероятностей состояний и вероятности переходов для H_m обозначим так: $\bar{P}(k, m)$ и $\pi_{ij}(m)$.

В начале процесса грохочения высота контрольного объема равна H_1 , и ему соответствует матрица $\|\pi_{ij}(1)\|$. По формуле (5) при последовательном изменении $k=1, 2$ и т. д. вычислим $\bar{P}(k, 1)$ и Δ . При каком-то шаге k будет справедливым условие $\Delta \geq h$, что явится сигналом к изменению высоты.

Высота контрольного объема уменьшится $H_2 = H_1 - h$. Поскольку первого элементарного слоя уже нет, то переход частиц из него и в него невозможен. Поэтому должна быть изменена структура вектора состояния и матрицы вероятностей переходов: $\bar{P}_1(0, 2)$, $\pi_{ij}(2)$ и π_{i1} необходимо принять равными нулю. Кроме того, в общем случае в момент выполнения условия $\Delta \geq h$ вероятность P_1 может быть не равна нулю. Далее этот остаток будем обозначать через ε_m , т. е. $P_1 = \varepsilon_1$. Для обеспечения условий нормировки (4) перераспределим ε_1 и $\pi_{i1}(1)$ по другим составляющим [3-5, 7-9, 16, 17, 19-23]:

$$P_i(0, 2) = \begin{cases} P_1(0, 2) = 0, \\ P_i(k_1, 1) \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{\sum_{i=2}^n P_i(k_1, 1)} \right) \quad \text{и } \delta \text{e} \quad i \geq 2. \end{cases} \quad (11)$$

Підготовчі процеси збагачення

$$\pi_{ij}(2) = \begin{cases} \pi_{ij}(1) = \pi_{i1}(1) = 0, \\ \pi_{ij}(1) \left[1 + \frac{\pi_{i1}(1)}{\sum_{j=2}^n \pi_{ij}(1)} \right] \end{cases} \quad i \neq j, i, j \geq 2. \quad (12)$$

В результате этих операций моделируется такое явление как уменьшение области, в пределах которой частицы совершают случайные переходы. Причем уменьшение высоты слоя (10) зависит от вероятности $P_-(k)$, т. е. имеем систему с подвижной границей, положение которой определяется ходом самого процесса (рисунок). Для совершения k_1 шагов потребовалось времени

$$t_1 = k_1 t_{h,1}. \quad (13)$$

Путь, пройденный контрольным объемом, равен $L_{k,1} = V_1 t_1$.

С учетом зависимости (5) вектор вероятности конечного состояния при H_2 вычисляется так:

$$\bar{P}(k_2, 2) = \bar{P}(0, 2) \|\pi_{ij}(2)\|^{k_2}, \quad (14)$$

где k_2 – шаг, при котором выполняется условие $\Delta = h$.

Время, прошедшее с начала процесса грохочения, равно

$$t = t_{h,1} k_1 + t_{h,2} k_2. \quad (15)$$

Поскольку с уменьшением высоты изменилась и скорость вибротранспортирования, то путь, пройденный контрольным объемом, вычисляется по формуле

$$L_k = V_1 t_{h,1} + V_2 t_{h,2}. \quad (16)$$

Аналогично определяются векторы конечного состояния при последующих изменениях высоты контрольного объема. Для контрольного объема высотой H_m вычисления выполняются по следующим рекуррентным формулам:

$$H_m = H_1 - (m-1)h; \quad (17)$$

$$\bar{P}(k_m, m) = \bar{P}(0, m) \|\pi_{ij}(m)\|^{k_m}; \quad (18)$$

$$P_i(0, m) = \begin{cases} 0 & \text{при } i < m \\ P_i(k_{m-1}, m-1) \left[1 + \frac{\varepsilon_{m-1}}{\sum_{i=m}^n P_i(k_{m-1}, m-1)} \right] & \text{при } i \geq m; \end{cases} \quad (19)$$

$$\pi_{ij}(m) = \begin{cases} 0 & \text{при } i, j < m \\ \pi_{ij}(m-1) \left[1 + \frac{\pi_{ij}(m-1)}{\sum_{j=m}^n \pi_{ij}(m-1)} \right] & \text{при } i, j \geq m; \end{cases} \quad (20)$$

$$t = \sum_{f=1}^m t_{h,f} k_f; \quad (21)$$

$$L_k = \sum_{f=1}^m V_f t_{h,f}. \quad (22)$$

Вычисление заканчивают при $t = T_s$ либо $L_k = L_c$, где T_s – время грохочения; L_c – длина сита.

Зависимости (1)-(22) моделируют кинетику грохочения. Они позволяют рассчитать вероятность выхода в подрешетный продукт частиц крупностью d . Выполняя аналогичные вычисления для частиц различной крупности, определяют сепарационную характеристику – закон изменения вероятности выхода в подрешетный продукт в зависимости от крупности частиц.

Поскольку стохастическая матрица для жидкости имеет такой же вид, как и матрица (3), то для перехода жидкости получаем следующие зависимости:

$$\bar{P}^*(k_m, m) = \bar{P}^*(0, m) \|\pi_{ij}^*(m)\|^{k_m}; \quad (23)$$

$$P_i^*(0, m) = \begin{cases} 0 & \text{при } i < m \\ P_i^*(k_{m-1}, m-1) \left[1 + \frac{\varepsilon_{m-1}}{\sum_{i=m}^n P_i^*(k_{m-1}, m-1)} \right] & \text{при } i \geq m; \end{cases} \quad (24)$$

Підготовчі процеси збагачення

$$\pi_{ij}^*(m) = \begin{cases} 0 & \text{при } i, j < m \\ \pi_{ij}^*(m-1) \left[1 + \frac{\pi_{ij}^*(m-1)}{\sum_{j=m}^n \pi_{ij}^*(m-1)} \right] & \text{при } i, j \geq m \end{cases}; \quad (25)$$

Извлечение частиц крупности d в подрешетный продукт равно $P_-(k_m, m)$ при $t = T_s$, т. е.

$$E = P_-(k_m, m). \quad (26)$$

Тогда производительность по подрешетному продукту

$$Q_- = \alpha Q P_-(k_m, m), \quad (27)$$

где α – содержание класса d в питании.

Масса надрешетного продукта в контрольном объеме

$$M_+ = M/\alpha - M_h - M_-, \quad (28)$$

где α – содержание мелких частиц в исходном; M_h – масса частиц на д.э.; M_- – масса частиц в подрешетном продукте.

Масса жидкости в надрешетном продукте

$$M_+^* = M^* - M_h^* - M_-^*, \quad (29)$$

где M_h^* – масса жидкости на д.э.; M_-^* – масса жидкости в подрешетном продукте.

Выражая массы M_h , M_- , M_h^* и M_-^* через вероятности, имеем

$$M_+ = M(1/\alpha - P_{n+1} - P_-), \quad (30)$$

$$M_+^* = M^*(1 - P_{n+1}^* - P_-^*). \quad (31)$$

Разделив (31) на (30), получим влажность надрешетного продукта

$$W_+ = W_0 \left(\frac{1 - P_h^* - P_-^*}{1/\alpha - P_h - P_-} \right), \quad (32)$$

где $W_0 = M^*/M$.

Підготовчі процеси збагачення

В случае, когда не используются дезинтегрирующие элементы, в полученных выражениях вероятности состояний P_i и переходов π_{ij} с индексами $i = j = n + 2$ следует принять равными нулю.

Таким образом, разработана математическая модель (1)-(32) кинетики грохочения с обезвоживанием, комплексно учитывающая начальные распределения частиц и жидкости по высоте слоя грохотимого материала, сегрегацию, перемешивание, просеивание, особенности вибротранспортирования (скорость, кратность и количество падений за период вибротранспортирования) и изменение высоты слоя.

Новизна модели заключается в учете взаимного влияния классификации по крупности и обезвоживания.

На основе модели возможно создание автоматизированного управления процессом грохочения с учетом обезвоживания.

Полученные результаты будут использованы при разработке новых вибрационных грохотов, при анализе работы существующих с целью выявления резервов для их модернизации, в учебном процессе, при создании автоматизированных систем управления грохочением.

Список литературы

1. Надутый В.П., Лапшин Е.С., Шевченко А.И. Математическое моделирование грохота с ударным возбуждением просеивающей поверхности // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні: Укр. міжвід. наук.-техн. зб. – 2011. – Вип. 45. – С. 320-324.
2. Надутый В.П., Лапшин Е.С., Шевченко А.И. Математическое моделирование виброударного движения просеивающей поверхности с учетом диссипации для повышения эффективности грохочения // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. жур. – 2012. – Вип. 1(65). – С. 106-109.
3. Лапшин Е.С., Шевченко А.И. Пути интенсификации обезвоживания минерального сырья на вибрационных грохотах // Збагачення корисних копалин: Наук.-техн. зб. – 2011. – Вип. 47(88). – С. 144-151.
4. Надутый В.П., Лапшин Е.С. Вероятностные процессы вибрационной классификации минерального сырья. – К.: Наук. думка, 2005. – 180 с.
5. Надутый В.П., Лапшин Е.С. Математическое моделирование кинетики вибрационного грохочения // Збагачення корисних копалин: Наук.-техн. зб. – 2007. – Вип. 29(70)-30(71). – С. 42-45.
6. Надутый В.П., Лапшин Е.С., Прокопишин Л.Н. Экспериментальное определение динамических параметров процесса просеивания влажного минерального сырья // Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр. ИГТМ НАН Украины. – 2008. – Вип. 74. – С. 3-7.
7. Надутый В.П., Лапшин Е.С. Математическое моделирование сегрегации при вибрационном грохочении влажного минерального сырья // Збагачення корисних копалин: Наук.-техн. зб. – 2008. – Вип.33(74). – С. 43-44.
8. Лапшин Е.С. Метод идентификации параметров кинетики грохочения // Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр. ИГТМ НАН Украины – 2008. – Вип. 74. – С. 34-39.
9. Надутый В.П., Лапшин Е.С. Кинетика вибрационного грохочения влажного сырья // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. жур. – 2008. – № 2(51). – С. 25-29.
10. Повышение эффективности удаления влаги при тонком грохочении горной массы за счет импульсного воздействия / В.П. Надутый, Е.С. Лапшин, А.И. Шевченко и др. // Науко-

Збагачення корисних копалин, 2012. – Вип. 51(92)

Підготовчі процеси збагачення

вий вісник: Наук.-техн. жур. – 2011. – Вип. 2(122). – С. 95-99.

11. Надутый В.П., Лапшин Е.С., Шевченко А.И. Определение условий прохождения жидкости через просеивающую поверхность вибрационного грохота // Збагачення корисних копалин: Наук.-техн. зб. – 2011. – Вип. 44(85). – С. 54-61.

12. Экспериментальные исследования вибрационного воздействия на отделение жидкости при грохочении материала / Е.С. Лапшин, А.И. Шевченко, Л.Н. Прокопишин и др. // Металлургическая и горнорудная промышленность. – 2011. – № 3. – С. 71-74.

13. Надутый В.П., Лапшин Е.С., Шевченко А.И. Математическое моделирование прохождения жидкости через просеивающую поверхность при вибрационном грохочении // Вібрації в техніці і технологіях: Всеукр. наук.-техн. жур. – 2011. – Вип. 3. – С. 48-54.

14. Лапшин Е.С., Шевченко А.И. Определение удельной энергии, необходимой для обезвоживания минерального сырья при вибрационном грохочении // Збагачення корисних копалин: Наук.-техн. зб. – 2012. – Вип. 50(91). – С. 179-186.

15. Лапшин Е.С., Шевченко А.И. Энергоемкость процесса обезвоживания минерального сырья при вибрационном грохочении // Металлургическая и горнорудная промышленность: Науч.-техн. и производственный жур. – 2012. – №4. – С. 124-131.

16. Лапшин Е.С., Шевченко А.И. Математическое моделирование кинетики обезвоживания при вибрационном грохочении // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. жур. – 2011. – Вип. 4(64). – С. 20-24.

17. Надутый В.П., Лапшин Е.С., Шевченко А.И. Исследование кинетики обезвоживания при вибрационном грохочении // Збагачення корисних копалин: Наук.-техн. збі. – 2012. – Вип. 49(90). – С. 112-119.

18. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. – 910 с.

19. Надутый В.П., Лапшин Е.С. Модельное представление виброперемещения сыпучего материала по сити грохота // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. начн.-техн. журн. – 2001. – № 2(18). – С. 183-186.

20. Надутый В.П., Лапшин Е.С. Модельный анализ процесса транспортирования при вибрационном грохочении // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. начн.-техн. журн. – 2002. – № 5(26). – С. 20-23.

21. Лапшин Е.С. Вероятностная оценка скорости вибротранспортирования слоя сыпучего материала // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. начн.-техн. журн. – 2004. – № 3(22). – С. 64-67.

22. Лапшин Е.С. Влияние на скорость вибротранспортирования при грохочении изменения толщины слоя сыпучего материала / Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр. ИГТМ НАН Украины. – 2004. – Вип. 50. – С. 123-128.

23. Надутый В.П., Лапшин Е.С., Прокопишин Л.Н. Экспериментальные исследования влияния параметров вибровозбуждения на процесс сегрегации // Геотехническая механика: Межвед. сб. научн. тр. ИГТМ НАН Украины. – 2003. – № 42. – С. 136-142.

24. Лапшин Е.С. Математическое моделирование процесса вибрационного грохочения марковской цепью переменной структуры // Разработка рудных месторождений: Начн.-техн. сб. – 2000. – №73. – С. 65-68.

© Лапшин Е.С., Шевченко А.И., 2012

*Надійшла до редколегії 12.07.2012 р.
Рекомендовано до публікації д.т.н. Б.О. Блюссом*