МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

В.М. Горєв
О.Й. Соколовський

СКОРОЧЕНИЙ ОПИС НЕРІВНОВАЖНИХ СИСТЕМ З УРАХУВАННЯМ НЕГІДРОДИНАМІЧНИХ СТУПЕНІВ СВОБОДИ

Монографія

Дніпро
НТУ «ДП»
2018

УДК 533.9, 533.72
Г 67

Рекомендовано до видання вченою радою Національного технічного університету «Дніпровська політехніка» (протокол № 8 від 13.06.2018).

Рецензенти:

Ю.В. Слюсаренко, д-р фіз.-мат. наук, професор, академік НАН України, начальник відділу статистичної фізики та квантової теорії поля інституту теоретичної фізики ім. О.І. Ахієзера Національного наукового центру «Харківський фізико-технічний інститут» НАН України;

М.О. Алексєєв, д-р техн. наук, професор, декан факультету інформаційних технологій Національного технічного університету «Дніпровська політехніка».

Горєв В.М.

Г 67 Скорочений опис нерівноважних систем з урахуванням негідродинамічних ступенів свободи : монографія / В.М. Горєв, О.Й. Соколовський ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2018. – 124 с.

ISBN 978-966-350-685-2

Наведено результати досліджень, які узагальнюють метод Чемпена – Енскога на етапи еволюції, більш ранні за гідродинамічний етап. Розроблено загальну теорію просторово-однорідних релаксаційних процесів в околі гідродинамічних станів шляхом розгляду цих процесів на етапі їх завершення. Досліджено задачу Греда в однокомпонентному газі та повністю іонізованій плазмі, знайдено поправки до відомих у літературі результатів. Проаналізовано релаксацію швидкостей і температур компонент просторово-однорідної плазми та обчислено поправки до результатів наближення локальної рівноваги. Досліджено гідродинаміку плазми при наявності в ній релаксаційних процесів, отримано відповідні кінетичні коефіцієнти та моди двокомпонентної плазми.

Для науковців, викладачів, аспірантів і студентів старших курсів, які навчаються за спеціальностями 104 Фізика та астрономія, 125 Кібербезпека, 172 Телекомунікації та радіотехніка.

УДК 533.9, 533.72

ISBN 978-966-350-685-2

ЗМІСТ

ВСТУП

Дослідження нерівноважних процесів є центральною задачею статистичної фізики. Таке дослідження можливе лише на основі скороченого опису нерівноважних станів, у рамках якого система описується відносно вузьким набором параметрів – параметрів скороченого опису (ПСО). Скорочений опис при цьому будується на основі рівняння Ліувілля або кінетичних рівнянь (Больцмана, Ландау тощо) [1]. Сучасною тенденцією є розширення стандартних наборів ПСО з метою врахування нових ступенів свободи системи (див., наприклад, [2, 3]). Тут в першу чергу слід згадати опис релаксаційних процесів у вузькому розумінні цього терміну як процесів, які можуть проходити в просторово-однорідних станах системи. Біля рівноваги ці процеси відповідають кінетичним модам системи та релаксаційним ступеням свободи. Класичні дослідження цих процесів належать Ландау, який дослідив [4] релаксацію температур компонент плазми, і Греду [5], який розробив теорію максвеллівської релаксації. Ідеї цих робіт і до теперішнього часу є робочим знаряддям новітніх досліджень. Важливим недоліком цих теорій є відсутність у них малого параметра і розв'язання на його основі кінетичного рівняння [6], а також неврахування порушення локальної рівноваги в системах при наявності релаксаційних процесів (див., наприклад, [7, 8]). Усунення цих недоліків є важливою задачею сучасної теорії нерівноважних процесів.

Основою сучасної теорії нерівноважних процесів без сумніву вважається метод скороченого опису нерівноважних систем Боголюбова, який ґрунтується на його ідеї функціональної гіпотези [9]. На відміну від ідеї нормальних розв'язків Гільберта, вона виходить з наявності у системи низки етапів природної еволюції, на яких реалізується можливість скороченого опису. Окремим випадком цього метода можна вважати метод Чепмена–Енскога [10], який за Боголюбовим теж базується на функціональній гіпотезі. За своїм походженням метод Чепмена–Енскога орієнтовний на дослідження стандартних гідродинамічних станів, в яких рідина описується густинами компонент, масовою швидкістю та температурою. Сучасною задачею теорії нерівноважних процесів є його узагальнення на випадок наявності в системі релаксаційних процесів у вузькому розумінні цього терміну. Центральною проблемою при цьому є дослідження просторово-однорідних станів, які не є станами локальної рівноваги. Обчислити відповідні функції розподілу в рамках методу Чепмена-Енскога не дозволяє відсутність малого параметра. Монографія пропонує підхід до розв'язання цієї проблеми на основі кінетичного рівняння й використовує його для дослідження нерівноважних станів газів (зокрема, плазми). Фактично при цьому йдеться про узагальнення методів Чепмена–Енскога та Греда. В літературі зазначається актуальність цієї задачі. Використання цих нових результатів для дослідження гідродинамічних станів плазми з урахуванням релаксаційних процесів є важливою задачею теорії нерівноважних процесів, і тому їй у монографії приділяється велика увага.

Монографія присвячена узагальненню методу Чемпена–Енскога на випадок наявності в системі релаксаційних процесів його застосуванню до кінетики однокомпонентного газу та повністю іонізованої плазми.

РОЗДІЛ 1
УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ ЧЕПМЕНА–ЕНСКОГА ТА ЙОГО РОЛЬ У СУЧАСНІЙ СТАТИСТИЧНІЙ ФІЗИЦІ

Однією з ключових проблем статистичної фізики є проблема скороченого опису систем. При скороченому описі система повністю описується деякими параметрами, які називають параметрами скороченого опису (ПСО) системи. Ідея скороченого опису є основною ідеєю теорії нерівноважних процесів, зокрема процесів переносу [11].

На наш час важливою галуззю теорії нерівноважних процесів є теорія, яка базується на кінетичному рівнянні Больцмана [10, 12]. Найбільш розвинутими методами розв'язання кінетичного рівняння Больцмана є методи Греда [5] та Чемпена–Енскога [9, 10]. Хоча зазначена теорія має деякі обмеження (оскільки застосовна до розріджених газів), вона широко використовується як для класичних, так і для квантових газів [13 – 15]. Наприклад, відомі її застосування до теорії плазми [4, 16, 17], до теорії твердого тіла (опис взаємодії електронів та фононів, [8, 18, 19]), до досліджень кінетики фотонів у рівноважній плазмі [20], до досліджень транспортних властивостей суспензії твердих частинок у в`язкому газі [21], до досліджень гадронного газу [22], пружних та непружних зіткнень у релятивістських газах [23], до досліджень процесів, що можуть мати місце на великому гадронному колайдері [24 – 26], до досліджень властивостей гранулярних матеріалів [27 – 29], до досліджень релятивістських газів у гравітаційних полях у рамках загальної теорії відносності [30, 31] тощо.

Історично першим задачу побудови гідродинаміки (зокрема теорії процесів переносу) на основі кінетичного рівняння Больцмана поставив у загальному вигляді Гільберт [32]. Він ввів концепцію нормальних розв'язків (тобто того, що функція розподілу (ФР) залежить від часу через посередність ПСО гідродинамічного стану) та знайшов ФР у головному порядку теорії збурень за малими градієнтами в системі. У подальшому Чемпен та Енског розвинули його ідеї [33], [10, 34] : їм вдалося знайти ФР у першому порядку за градієнтами та рівняння гідродинаміки з урахуванням дисипативних процесів. Зауважимо, що для знаходження ФР на основі методу Чемпена–Енскога з інтегральних рівнянь теорії доцільно використовувати ортогональні поліноми (у випадку класичної механіки – поліноми Соніна), що вперше було запропоновано Барнеттом [35]. Зараз ідея застосування поліномів Соніна дуже широко використовується для отримання наближених аналітичних розв'язків кінетичних рівнянь як у просторово-однорідному [8, 36, 37], так і в просторово-неоднорідному випадку [38 – 40].

Барнетт також отримав ФР в другому порядку за градієнтами та відповідні часові рівняння для ПСО. Як відомо [41, 42], результати барнетівського наближення не обов'язково покращують результати наближення Нав'є–Стокса (тобто часові рівняння для ПСО з урахуванням ФР, які отримані з точністю до першого порядку за градієнтами), хоча відомі випадки, коли рівняння Барнетта дійсно поправляють рівняння Нав'є–Стокса (див. [43, 44]). Можливо, проблема полягає в тому, що при побудові рівнянь Барнетта слід враховувати нелокальність інтегралу зіткнень, а в рамках методу Чемпена–Енскога використовують локальні інтеграли зіткнень. Наприклад, відоме врахування нелокальності інтегралу зіткнень у роботах [45, 46].

Визначальний внесок до статистичної фізики вніс Боголюбов [1], сформулювавши метод скороченого опису (МСО), окремим випадком якого є метод Чепмена–Енскога. Він висунув ідею функціональної гіпотези та сформулював і обґрунтував думку, що виникнення нормальних розв'язків є результатом природної еволюції системи [47]. Згідно з ідеями Боголюбова [1], кількість ПСО зменшується з плином еволюції та на фінальному (гідродинамічному) етапі еволюції система описується такими ПСО: густинами компонент, масовою швидкістю та температурою.

Боголюбовим також було виведено ланцюжок часових рівнянь для багаточастинкових функцій розподілу (ланцюжок Боголюбова–Борна–Гріна–Івона–Кірквуда), що дозволило покращити математичне обґрунтування теорії нерівноважних процесів. На основі своєї функціональної гіпотези, відповідно до якої з плином еволюції багаточастинкові ФР починають залежати від часу через одночастинкову ФР, він вивів кінетичні рівняння Больцмана (у випадку малої густини) та Ландау–Власова (у випадку малої взаємодії) для одночастинкової ФР. Зазначимо, що в оригінальній роботі Больцмана [48] його кінетичне рівняння було виведено з феноменологічних міркувань. Ланцюжок Боголюбова та його узагальнення активно використовуються в статистичній фізиці. Узагальнення цього ланцюжка застосовується в теорії густих газів у рамках методу Зубарєва [49]. Відомі застосування ланцюжка до моделі твердих сфер [50], для отримання немарківських кінетичних рівнянь [51, 52], для виведення квантових кінетичних рівнянь на математичному рівні строгості [53, 54], для дослідження кореляцій у квантових системах [55], для дослідження систем у зовнішніх стохастичних полях [56], для дослідження сумішей непружних твердих сфер [57], для отримання рівнянь гідродинаміки для мікроскопічної фазової густини [58] тощо.

Відповідно до функціональної гіпотези Боголюбова [1], скорочений опис систем починається з деякого характерного часу, а не з часу $t = 0$. При цьому ефективні початкові умови, тобто початкові умови, які можна отримати на основі продовження часових рівнянь МСО до $t=0$, та реальні початкові умови для ПСО не обов'язково збігаються. Наприклад, навіть для системи з слабкою просторовою неоднорідністю у випадку, коли початковий стан системи є максвелівським локально-рівноважним станом, ефективні та реальні початкові умови будуть відрізнятись на величину порядку квадрату малих градієнтів [59].

Основною задачею МСО є пошук нерівноважної ФР та часових рівнянь для ПСО. Можна стверджувати, що МСО вдається реалізувати, якщо розв'язки базових рівнянь методу вдається знайти і обчислити ФР та часові рівняння для ПСО. На жаль, знайти розв'язки вдається лише в деякій теорії збурень (хоча є окремі випадки точно розв'язуваних моделей, наприклад, точно розв'язуваним є кінетичне рівняння для нерівноважного газу броунівських частинок у рівноважному середовищі [60, 61]). В деяких досить поширених випадках є «рецепт» як вибирати ПСО так, щоб МСО Боголюбова можна було реалізувати. Наприклад, він реалізується в кінетиці повільних змінних, окремим випадками якої є є стандартна гідродинаміка слабко неоднорідних станів системи. В такому разі малим параметром, за яким будується теорія збурень, є той параметр, який характеризує малість часових похідних ПСО (в рамках методу Чепмена–Енскога цим малим параметром є градієнти). Ще один дуже поширений випадок – модель Пелетмінського–Яценка [9]. Вона використовується тоді, коли гамільтоніан системи можна представити як суму головного внеску та малої поправки до нього за умови, що головний внесок веде до лінійного рівняння для ПСО. Модель Пелетмінського–Яценка використовується для дослідження кореляцій електромагнітного поля у плазмі, яка знаходиться на гідродинамічному етапі еволюції [62, 63]; для дослідження моделі Дікке [64 – 66]; для дослідження динаміки кореляцій електромагнітного поля у рівноважному середовищі [67] тощо. Проте зауважимо, що загального «рецепту» вибору ПСО системи у зв'язку з відповідною теорією збурень, на жаль, не існує. Для кожного випадку ПСО і малі параметри теорії «викристалізовуються» в процесі експериментального та теоретичного дослідження системи.

Однією з найважливіших задач сучасної теорії нерівноважних процесів є узагальнення методу Чемпена–Енскога для опису етапів еволюці, більш ранніх за гідродинамічний [68]. Ця задача є актуальною як для слабко, так і для сильно нерівноважних систем. В монографії пропонується узагальнення методу Чемпена–Енскога для урахування впливу релаксаційних ступенів свободи системи на гідродинамічні процеси. При цьому вивчаються стани систем, які знаходяться в околі стандартного гідродинамічного стану. Особливу увагу приділено дослідженню на цій основі властивостей повністю іонізованої двокомпонентної електрон-іонної плазми, а також узагальненню метода Греда. В наш час метод Греда та його модифікації активно застосовується до фізики плазми [69 – 71], до теорії гранулярних матеріалів [72, 73], до дослідження структури ударних хвиль [74], до побудови релятивістської гідродинаміки [75, 76], та до інших систем і задач.

Окремим випадком такого узагальнення методу Чемпена–Енскога є задача релаксації температур та швидкостей компонент повністю іонізованої плазми в просторово-однорідному випадку. Це узагальнення базується на ідеї функціональної гіпотези Боголюбова [1]. Задачу релаксації температур компонент плазми у просторово-однорідному випадку вперше розглянув Ландау [4] на основі виведеного ним кінетичного рівняння для опису плазми. Зауважимо, що у роботі [4] Ландау вивів своє рівняння з кінетичного рівняння Больцмана, врахувавши деякі особливості кулонівських зіткнень, хоча інтеграл зіткнень Ландау можна безпосередньо отримати в МСО на основі наближення малої взаємодії [1, 9]. При розгляді задачі релаксації температури Ландау базувався на наближенні, що просторово-однорідні функції розподілу компонент (ФРК) є максвелівськими з залежними від часу температурами компонент, тобто це зроблено у наближенні локальної рівноваги (НЛР). Ним було отримано час релаксації температури в головному порядку за малим відношенням мас електрона до іона. Пізніше Спітцер [77] отримав поправку до цього результату в більш високому порядку за відношенням мас. Задача релаксації швидкостей розглянута в книзі [16] на основі НЛР, при цьому час релаксації швидкостей знайдено в головному порядку за відношенням мас. НЛР досить широко використовується в літературі. Наприклад, на ньому базувався Брагінський у своїх піонерських дослідженнях гідродинаміки плазми [39, 78]. На ньому базується дослідження процесів переносу в багатокомпонентній плазмі [79]. Воно використовується в дослідженні релаксації гарячих точок у плазмі, яка згенерована лазерним випромінением [80 – 82]. НЛР також є основою дослідження потоків та кінетичних коефіцієнтів плазми у випадку градієнтів довільної величини [40, 83, 84]. Воно є основою методу Чепмена–Енскога в наближені часу релаксації [85]. НЛР широко використовується не лише у фізиці плазми. Наприклад, релаксація в просторово-однорідній двокомпонентній електрон-фононній системі на основі наближення локальної рівноваги розглядається в роботі [86]. Воно використовується в кінетичній теорії частинок, які взаємодіють із гідродинамічним середовищем [87]. У роботі [88] зазначено, що НЛР взагалі має використовуватися для опису стандартних гідродинамічних станів системи.

Проте відомі роботи, де підіймається проблема порушення НЛР. Наприклад, така проблема обговорюється в теорії полярона [2, 7, 8]. Проблема порушення НЛР підіймається в роботі [89], яка присвячена релаксації поступальної та обертальної енергії в просторово-однорідній системі. Проблема необхідності пошуку просторово-однорідних розв’язків без припущення про НЛР є важливою проблемою в теорії гранулярних систем [90]. Для плазми задача отримання поправок до НЛР також є актуальною [91]. Тому задача отримання ФРК у просторово-однорідному випадку безпосередньо з кінетичного рівняння та порівняння результатів з НЛР є важливою задачею статистичної фізики. У монографії ця задача вирішується для просторово-однорідних станів системи у випадку, коли відхилення ПСО від їх рівноважних значень малі. Це дає змогу реалізувати метод скороченого опису Боголюбова як кінетику повільних змінних.

Зауважимо, що в статистичній фізиці дуже часто НЛР є наближенням одного полінома Соніна та поправки до нього можна шукати в більшій кількості поліномів. Наприклад, такі результати отримані в роботі [8], присвяченій застосуванню методу Чемпена–Енскога до теорії полярона. Аналогічні ідеї відмічені в роботі [92], присвяченій дослідженню суміші гранулярних компонент. При цьому розв’язок кінетичного рівняння в наближенні одного полінома повністю визначається додатковими умовами до рівнянь теорії, тобто означеннями ПСО системи в термінах ФРК.

Зауважимо також, що у роботах попередників фактично вивчалась лінійна теорія релаксації, тобто розглядались лише такі внески в часові рівняння для ПСО, які є лінійними за відхиленнями ПСО від їх рівноважних значень. В цій роботі додатково вивчається квадратична теорія релаксації, тобто вивчаються й квадратичні за малими відхиленнями внески до ФРК та до часових рівнянь для ПСО. Задача дослідження квадратичної релаксації є цікавою, оскільки внески, які є квадратичними за малими відхиленнями, але головного порядку за відношенням мас, на деякому етапі еволюції можуть бути порівняні з внесками більш високого порядку за відношенням мас в рамках лінійної теорії релаксації.

У сучасній статистичній фізиці є досить поширеною ідея будувати теорію збурень у рамках МСО Боголюбоова не лише за малими градієнтами, але й за додатковими малими параметрами. Наприклад, такі ідеї застосовуються для опису впливу релаксації на гідродинаміку поляронного газу в теорії твердого тіла [93, 94], в задачі кінетики фотонів у рівноважному плазмовому середовищі [95, 96]. Теорія просторово-неоднорідних станів частинок, що слабко взаємодіють із гідродинамічним середовищем, будується на основі кінетики повільних змінних за двома малими параметрами [97 – 99]: малою взаємодією та малими градієнтами. Фізично така теорія може застосовуватись для опису поширення нейтронів у середовищі без розмноження та захвату.

Запропоноване в цій роботі узагальнення методу Чемпмена–Енскога базується на використанні теорії збурень за двома малими параметрами, перший з яких описує малі відхилення ПСО від їх стандартних гідродинамічних значень, а другий – малі градієнти в системі. При цьому маємо кінетику повільних змінних: ФРК і часові рівняння для ПСО шукаються в теорії збурень за вищезазначеними двома малими параметрами. В рамках цієї теорії збурень теорія нульового порядку за відхиленнями є стандартною гідродинамікою, а теорія нульового порядку за градієнтами є теорією просторово-однорідного стану, в рамках якої (див. вище) отримуються поправки до НЛР. У роботі також вивчається перший порядок одночасно і за відхиленнями, і за градієнтами, що дає змогу дослідити вплив поправок до НЛР на гідридинаміку системи. При цьому актуальною задачею є вивчення впливу релаксаційних процесів на потоки та кінетичні коефіцієнти системи. В теорії плазми релаксаційні внески в потоки та кінетичні коефіцієнти раніше не вивчались ні у випадку малих градієнтів [39, 78], ні у випадку градієнтів довільної величини [40, 83, 84].

У монографії ставиться також і задача дослідження мод плазми. Як відомо, ідеї скороченого опису широко використовуються для отримання мод системи. Загально відомий та дуже широко вживаний метод отримання мод: отримати матрицю лінеаризованих рівнянь для ПСО та дослідити власні значення та власні функції цієї матриці [100 – 102]. У випадку виходу за звичайну гідродинаміку використовують узагальнену гідродинамічну матрицю. На основі цих ідей отримують моди також для систем, на які діє випадкова зовнішня сила [103]. Схожі ідеї використовує львівська школа статистичної фізики в рамках методу узагальнених колективних мод [3]. Цей метод передбачає використання в якості ПСО системи стандартних гідродинамічних ПСО та їх часових похідних для дослідження часових кореляційних функцій. Відомі застосування цього методу до дослідження властивостей розплавів солей [104], густих рідин та газів [105 – 107], рідких металів та сплавів [108, 109].

Як відомо [9, 100,110], на основі кінетичного рівняння Власова із самоузгодженим членом отримуються плазмові моди, фізичний зміст яких – коливання заряду під дією самоузгодженого поля. Однак, звичайно плазмові моди отримуються на основі методу діелектричної проникності без використання скороченого опису. Зауважимо також, що при розгляді задачі мод плазми широко застосовується модель желе, тобто підсистема іонів вважається рівноважною. Оскільки наявність інтегралу зіткнень у просторово-однорідному випадку описує релаксаційні кінетичні моди системи [16], логічно очікувати, що розгляд мод на основі кінетичного рівняння дасть релаксаційне згасання плазмових хвиль. Відоме отримання плазмових мод в роботі [101], але часові рівняння для ПСО в ній виписуються феноменологчіно, а не отримуються строго на базі кінетичного рівняння, і в основі розгляду лежить модель желе. Тому актуальною є задача пошуку мод плазми на основі методу скороченого опису Боголюбова з урахуванням відхилення ФР іонів від рівноважної. У монографії така задача розглядається для кінетичного рівняння Ландау та кінетичного рівняння Ландау–Власова. Також досліджується релаксаційне згасання плазмових хвиль, фізична причина якого – процес релаксації швидкості, та проводиться порівняння з відомим результатами, стосовними згасання Ландау [111]. Зауважимо, що задача знаходження мод кінетичного рівняння Ландау, яка розглядається в роботі, є важливим етапом побудови кінетичної теорії та мод плазми на основі рівняння Ліувілля та гамільтоніану, отриманого в роботі [112], тому що вона дає змогу зменшити розмірність задачі.

Зауважимо, що крім методів, які є узагальненнями методу Чемпена–Енскога, у сучасній статистичній фізиці широко використовуються методи, які ґрунтуються на рівнянні Ліувілля або відповідному ланцюжку функцій розподілу, зокрема метод нерівноважного статистичного оператора (нерівноважної функції розподілу) Зубарєва [88, 113, 114]. Цей метод теж базуэться на ідеї скороченого опису. Він полягає в узагальненні рівноважної теорії Гіббса на нерівноважний випадок і побудові на цій основі нерівноважного статистичного оператора системи, який дозволяє отримати кінетичні рівняння, рівняння переносу та кінетичні коефіцієнти системи. Цей метод є досить популярним у статистичній фізиці, оскільки його можна, формально кажучи, використовувати як для сильно, так і для слабко нерівноважних систем. Наприклад, його широко застосовує львівська школа статистичної фізики [115 – 117].

Ще одним методом, який досить широко використовується в сучасній статистичній фізиці, є метод функцій Гріна [11, 118]. Наприклад, за його допомогою можна отримати плазмові хвилі [67, 119].

Проте метод, який розвинено в монографії, є простішим та зручнішим для опису станів систем, які знаходяться поблизу стандартного гідродинамічного стану. Він без складної операторної техніки та методів теорії поля дозволяє отримати релаксаційні поправки до потоків та кінетичних коефіцієнтів системи. Більш того, за його допомогою зручно враховувати поправки до НЛР та їх вплив на гідродинамічні процеси.

Висновки до розділу 1

Питання, які розглядаються у монографії є актуальними та використання в роботі методу скороченого опису нерівноважних станів Боголюбова для їх дослідження є доцільним.

РОЗДІЛ 2
МЕТОД ЧЕМПЕНА–ЕНСКОГА
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КІНЕТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Цей розділ присвячено опису відомого в літературі стандартного методу Чемпена–Енскога. Розглянемо метод на прикладі кінетичного рівняння Больцмана [48], яке є фундаментом теорії нерівноважних процесів. У загальному випадку класичної механіки для газу однакових частинок, які взаємодіють за допомогою парних центральних сил, воно має вигляд

$$\frac{\partial \mathrm{f}_p(x,t)}{\partial t} = -\frac{p_n}{m}\frac{\partial \mathrm{f}_p(x,t)}{\partial x_n} + I_p(\mathrm{f}(x,t)), \tag{2.1}$$

де інтеграл зіткнень визначається формулою

$$\frac{\partial \mathrm{f}_p(x,t)}{\partial t} = -\frac{p_n}{m}\frac{\partial \mathrm{f}_p(x,t)}{\partial x_n} + I_p(\mathrm{f}(x,t)) \tag{2.2}$$

(див., наприклад, [9]). Тут $\sigma(|\vec{q}|,\vec{n}\vec{q})$ – диференціальний переріз розсіяння частинок, $\vec{p}_1'$, $\vec{p}_2'$ – імпульсі частинок після зіткнення частинок з імпульсами $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$

$$\vec{p}_1' = \frac{\vec{p}_1+\vec{p}_2}{2} + \frac{|\vec{p}_{12}|}{2}\vec{n}\,,\ \vec{p}_2' = \frac{\vec{p}_1+\vec{p}_2}{2} - \frac{|\vec{p}_{12}|}{2}\vec{n}\ \ (\vec{p}_{12} \equiv \vec{p}_1 - \vec{p}_2). \tag{2.3}$$

Важливі властивості інтеграла зіткнень (2) стають очевидними при записі його у вигляді

$$\begin{gathered} I_p(\mathrm{f}) = \int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 d^3p_4 W(\vec{p}_1,\vec{p}_2;\vec{p}_3,\vec{p}_4)\times \\ \times\{\delta(\vec{p}-\vec{p}_1)+\delta(\vec{p}-\vec{p}_2)-\delta(\vec{p}-\vec{p}_3)-\delta(\vec{p}-\vec{p}_4)\}\{\mathrm{f}_3\mathrm{f}_4-\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2\}\times \\ \times\delta(\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{p}_3-\vec{p}_4)\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4), \\ W(\vec{p}_1,\vec{p}_2;\vec{p}_3,\vec{p}_4) \equiv \frac{1}{m^2}\sigma\Big(\sqrt{|\vec{p}_{12}||\vec{p}_{34}|},\frac{\vec{p}_{12}\vec{p}_{34}}{|\vec{p}_{12}||\vec{p}_{34}|}\Big), \end{gathered} \tag{2.4}$$

де заради стислості позначено $\mathrm{f}_i \equiv \mathrm{f}_{p_i}$, $\varepsilon_i \equiv \varepsilon_{p_i}$, $\varepsilon_p \equiv p^2/2m$, $\vec{p}_{34} \equiv \vec{p}_3 - \vec{p}_4$. Дві останні δ-функції виражають собою закони збереження імпульсу і енергії при парних зіткненнях.

Інтеграл зіткнень (2.4) має властивості

$$\int d^3p I_p(\mathrm{f}) = 0,\ \int d^3p p_l I_p(\mathrm{f}) = 0,\ \int d^3p \varepsilon_p I_p(\mathrm{f}) = 0, \tag{2.5}$$

які дозволяють вивести з кінетичного рівняння закони збереження маси, імпульсу і енергії в диференціальній формі

$$\frac{\partial\sigma(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial\pi_n(x,t)}{\partial x_n},\ \frac{\partial\pi_l(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial t_{ln}(x,t)}{\partial x_n},\ \frac{\partial\varepsilon(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial q_n(x,t)}{\partial x_n}. \tag{2.6}$$

Тут густини маси $\sigma(x,t)$, імпульсу $\pi_l(x,t)$ і енергії $\varepsilon(x,t)$ визначаються формулами

$$\sigma(x,t) = m\int d^3p\mathrm{f}_p(x,t)\,,\ \ \pi_l(x,t) = \int d^3pp_l\mathrm{f}_p(x,t)\,,\ \ \varepsilon(x,t) = \int d^3p\varepsilon_p\mathrm{f}_p(x,t)\,, \qquad (2.7)$$

а густини потоків енергії $q_n(x,t)$, імпульсу $t_{nl}(x,t)$ даються виразами

$$t_{ln}(x,t) \equiv \int d^3pp_l\frac{p_n}{m}\mathrm{f}_p(x,t)\,, \qquad q_n(x,t) \equiv \int d^3p\varepsilon_p\frac{p_n}{m}\mathrm{f}_p(x,t)\,. \qquad (2.8)$$

Відомо, що рівняння гідродинаміки (газодинаміки) можна записати в формі (6) при визначенні локальної швидкості $\upsilon_l(x,t)$ і температури $T(x,t)$ газу формулами

$$\pi_l(x,t) = \sigma(x,t)\upsilon_l(x,t)\,,\ \varepsilon(x,t) = \frac{3}{2m}\sigma(x,t)T(x,t) + \frac{1}{2}\sigma(x,t)\upsilon(x,t)^2\,. \qquad (2.9)$$

Перша формула є стандартним означення не тільки для газу, а і для рідини. Запроваджена нею швидкість називається ще масовою, оскільки її можна розуміти як швидкість центра мас елементу об'єму рідини $\pi_l dV = \upsilon_l\sigma dV$. Друга формула справедлива тільки для газу, оскільки перший доданок в ній є густина енергії ідеального рівноважного газу в системі відліку, де він покоїться (іншими словами, у супутній системі відліку), а другий доданок – це наслідок перетворення Галілея.

Крім того встановлено, інтеграл зіткнень Больцмана обертається в нуль тільки при підстановці в нього розподілу Максвелла $w_p(\xi)$

$$I_p(w(\xi)) = 0\,,\ \ w_p(\xi) = w^o_{p-m\upsilon}(\xi)\,,\ \ w^o_p(\xi) \equiv \frac{n}{(2\pi mT)^{3/2}}e^{-\frac{\varepsilon_p}{T}} \qquad (2.10)$$

($\xi_\mu : T\,, \upsilon_l\,, n$). Означення локальної температури (2.9) показує, що при розрахунку густини енергії рідини формулою (2.7) можна використовувати розподіл Максвелла $w_p(\xi(x,t))$. Це означає, що рідина перебуває у стані локальної рівноваги. Далі буде показано, що локально-рівноважна функція розподілу в гідродинаміці не є точним розв'язком кінетичного рівняння при наявності в ній релаксаційних процесів, які можуть відбуватися як у просторово-неоднорідних, так і у просторово-однорядних станах системи. Такі процеси далі називаються релаксаційними в вузькому розумінні цих слів, оскільки звичайно всі нерівноважні процеси називають релаксаційними.

Використання в формулах (2.7), (2.8) в якості функції розподілу $\mathrm{f}_p(x,t)$ локального розподілу Максвелла $w_p(\xi(x,t))$ приводить (2.6) до рівнянь гідродинаміки ідеальної рідини (з термодинамікою ідеального газу). На основі цього факту Гільберт запропонував досліджувати розв'язки рівняння Больцмана, вводячи в нього формальний малий параметр g

$$\frac{\partial \mathrm{f}_p(x,t)}{\partial t} = -\frac{p_n}{m}\frac{\partial \mathrm{f}_p(x,t)}{\partial x_n} + \frac{1}{g} I_p(\mathrm{f}(x)) \tag{2.11}$$

Розвинута Гілбертом теорія [32] не дозволила отримати рівняння гідродинаміки реальної рідини, тобто рівняння гідродинаміки з урахуванням дисипативних процесів в'язкості, теплопровідності та дифузії (див. обговорення в [120]). Малий параметр g може бути введений шляхом переходу в рівнянні Больцмана до безрозмірних змінних на основі оцінок

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathrm{f}_p}{\partial t} \sim \frac{\mathrm{f}_p}{\tau}, \quad \frac{\partial \mathrm{f}_p}{\partial x_l} \sim \frac{\mathrm{f}_p}{l}, \quad I_p(\mathrm{f}) \sim \frac{\mathrm{f}_p - w_p}{\tau_\mathrm{f}}, \quad p_l \sim m\upsilon_T, \\ l \sim \upsilon_T \tau, \qquad l_\mathrm{f} \sim \upsilon_T \tau_\mathrm{f}; \quad g = l_\mathrm{f}/l,\end{gathered} \tag{2.12}$$

де $\upsilon_T \equiv (T/m)^{1/2}$ – характернее значення теплової швидкості, τ – характерний час еволюції системи, l – характерний розмір неоднорідностей в системі, τ_f, l_f – час і довжина вільного пробігу. Цей параметр g ще називається числом Кнудсена і дає можливість формально оцінити малість градієнтів гідродинамічних змінних формулою

$$\partial^s \xi_\mu / \partial x_{l_1} \ldots \partial x_{l_s} \sim g^s . \tag{2.13}$$

Метод Гільберта був вдосконалений Чепменом і Енскогом. Відповідно до [10], де взятий за основу підхід Енскога [34], вони шукали розв'язок рівняння Больцмана у формі функціоналу від гідродинамічних змінних $\mathrm{f}_p(x,\xi(t))$, вважаючи, що таку структуру функція розподілу $\mathrm{f}_p(x,t)$ набуває після перебігу деякого перехідного процесу. Цей розв'язок був названий нормальним. Дослідження Гільберта теж показали, що гідродинамічні стани системи описуються саме нормальним розв'язком, але у нього не було ідеї, що таку структуру функція розподілу набуває в природній еволюції. У просторово-однорідному випадку розподіл Максвелла встановлюється відповідно до (2.12) за час вільного пробігу τ_f. У неоднорідному випадку після перебігу часу τ_f система описується нормальним розв'язком. В літературі розв'язки кінетичного рівняння структури $\mathrm{f}_p(x,\xi(t))$ найчастіше називають нормальними розв'язками Гільберта.

Метод Чепмена–Енскога був розвинутий Боголюбовим в рамках його ідеї функціональної гіпотези, яка була покладена ним в основу його методу скороченого опису нерівноважних процесів [1] (див. також [9]). Функциональна гіпотеза, яка лежить в основі метода Чепмена–Енскога, записується у вигляді

$$\mathrm{f}_p(x,t) \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} \mathrm{f}_p(x,\xi(t,\mathrm{f}_0)), \quad \mathrm{f}_{p0}(x) \equiv \mathrm{f}_p(x,t=0), \tag{2.14}$$

з додаванням означень гідродинамічних параметрів

$$\begin{gathered} \int d^3 p \mathrm{f}_p(x,\xi) = n(x), \; \int d^3 p p_l \mathrm{f}_p(x,\xi) = mn(x)\upsilon_l(x), \\ \int d^3 p \varepsilon_p \mathrm{f}_p(x,\xi) = \frac{3}{2} n(x) T(x) + \frac{1}{2} mn(x) \upsilon(x)^2. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Співвідношення (2.14) показує, що функція розподілу за великих часів $t \gg \tau_0$ залежить від часу тільки через посередність параметрів скороченого опису $\xi_\mu(x,t,\mathrm{f}_0)$: $T(x,t,\mathrm{f}_0)$, $\upsilon_l(x,t,\mathrm{f}_0)$, $n(x,t,\mathrm{f}_0)$. За часів $t \gg \tau_0$ інформація про початковий стан системи $\mathrm{f}_{p0}(x)$ зберігається тільки в цих параметрах, а функціонал $\mathrm{f}_p(x,\xi)$ не залежить від $\mathrm{f}_{p0}(x)$. Формули (2.15) є точними означеннями параметрів скороченого опису. Характерний час τ_0 залежить від початкового стану системи $\mathrm{f}_{p0}(x)$ і звичайно оцінюється як час вільного пробігу τ_f. Стрілка в функціональній гіпотезі символізує те, що функція $\mathrm{f}_p(x,\xi(t,\mathrm{f}_0))$ є асимптотичне значення функції розподілу $\mathrm{f}_p(x,t)$. Процедура обчислення асимптотики передбачається такою, що при $t \gg \tau_0$ функція $\mathrm{f}_p(x,\xi(t,\mathrm{f}_0))$ задовольняє кінетичне рівняння точно

$$\frac{\partial \mathrm{f}_p(x,\xi(t,\mathrm{f}_0))}{\partial t} = -\frac{p_n}{m}\frac{\partial \mathrm{f}_p(x,\xi(t,\mathrm{f}_0))}{\partial x_n} + I_p(\mathrm{f}_p(x,\xi(t,\mathrm{f}_0))). \tag{2.16}$$

Кінетичне рівняння (2.1) разом з функціональною гіпотезою (2.14) і означеннями (2.15) веде до замкнутих рівнянь гідродинаміки виду

$$\frac{\partial \xi_\mu(x,t,\mathrm{f}_0)}{\partial t} = L_\mu(x,\mathrm{f}(\xi(t,\mathrm{f}_0))). \tag{2.17}$$

Ці рівняння справедливі при $t \gg \tau_0$, однак їх розв’язок можна продовжити до моменту $t=0$. При цьому параметри скороченого опису $\xi_\mu(x,t,\mathrm{f}_0)$ за часів $0 \le t \le \tau_0$ фізичного сенсу не мають. Однак це продовження дозволяє визначити корисні для теорії величини $\xi_\mu(x,t=0,\mathrm{f}_0)$, які називаються ефективними початковими умовами. Після такого продовження рівняння (2.16) також буде виконуватись при $0 \le t < \infty$.

Рівняння (2.16), (2.17) дають таке рівняння для функціонала $\mathrm{f}_p(x,\xi)$

$$\sum_\mu \int dx' \frac{\delta \mathrm{f}_p(x,\xi)}{\delta \xi_\mu(x')} L_\mu(x',\mathrm{f}(\xi)) = -\frac{p_n}{m}\frac{\partial \mathrm{f}_p(x,\xi)}{\partial x_n} + I_p(\mathrm{f}(x,\xi)), \tag{2.18}$$

яке слід розв’язувати в теорії збурень за градієнтами разом з додатковими умовами (2.15). В результаті знайдемо

$$\mathrm{f}_p(x,\xi)=w_p^o(\xi)\left\{1+A(\beta\varepsilon_p)p_l\frac{\partial T}{\partial x_l}+B(\beta\varepsilon_p)\delta_{nl}(p)\frac{\partial\upsilon_n}{\partial x_l}\right\}\Bigg|_{p\to p-m\upsilon}+O(g^2)\,, \qquad (2.19)$$

де $w_p^o(\xi)$ – розподіл Максвелла (10), $\delta_{nl}(p)\equiv p_n p_l-\delta_{nl}p^2/3$, $\beta\equiv T^{-1}$ (справа заради стислості не вказана залежність величин $\xi_\mu(x)$ від x). Скалярні функції $A(u)$, $B(u)$ задовольняють інтегральні рівняння Фредгольма І роду

$$\hat{K}A(\beta\varepsilon_p)p_l=-\frac{\beta}{m}(\beta\varepsilon_p-5/2)p_l,\quad \hat{K}B(\beta\varepsilon_p)\delta_{nl}(p)=-\frac{\beta}{m}\delta_{nl}(p) \qquad (2.20)$$

і додаткові умови

$$\langle A(\beta\varepsilon_p)\varepsilon_p\rangle=0,\quad \langle g_p\rangle\equiv\int d^3p\,w_p^o(\xi)g_p\,, \qquad (2.21)$$

g_p – довільна функція. Оператор лінеаризованого інтегралу зіткнень $\hat{K}$ у рівняннях (2.20) визначається формулами

$$\hat{K}g_p\equiv\int d^3p'K(p,p',\xi)g_{p'}\,,\qquad K(p,p'\xi)=-w_p^o(\xi)^{-1}M(p,p',\xi)w_p^o(\xi)\,,$$

$$M(p,p',\xi)=\frac{\delta I_p(\mathrm{f})}{\delta\mathrm{f}_{p'}}\Bigg|_{\mathrm{f}\to w^o(\xi)}. \qquad (2.22)$$

Функція розподілу (2.19) дає звичайні вирази для густини енергії і густин потоків енергії та імпульсу однокомпонентної рідини

$\varepsilon=\varepsilon^o+\sigma\upsilon^2/2$, $\sigma\equiv mn$;

$$q_l=q_l^o+t_{ln}^o\upsilon_n+(\varepsilon^o+\sigma\upsilon^2/2)\,,\quad t_{nl}=t_{nl}^o+\sigma\upsilon_n\upsilon_l;\;\; q_l^o=-\kappa\frac{\partial T}{\partial x_l}+O(g^2)\,,$$

$$t_{nl}^o=p\delta_{nl}-\eta\left(\frac{\partial\upsilon_n}{\partial x_l}+\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x_n}-\frac{2}{3}\delta_{nl}\frac{\partial\upsilon_m}{\partial x_m}\right)-\zeta\delta_{nl}\frac{\partial\upsilon_m}{\partial x_m}+O(g^2)\,, \qquad (2.23)$$

де q_l^o, t_{nl}^o – густини потоків в супутній системі відліку. До виразів (2.23) також входять тиск p, густина енергії в супутній системі відліку ε^o, зсувна η, об'ємна ζ в'язкості і теплопровідність κ, які даються формулами

$$p=nT\,,\;\varepsilon^o=3nT/2\,;\;\;\kappa=-\frac{2}{3}\langle\varepsilon_p^2A(\beta\varepsilon_p)\rangle\,,\;\;\eta=-\frac{4}{15}m\langle\varepsilon_p^2B(\beta\varepsilon_p)\rangle\,,\;\zeta=0\,. \qquad (2.24)$$

Функції $A(u)$, $B(u)$ обернено пропорційні густині газу n, а також залежать від температури T.

Рівняння гідродинаміки можуть бути записані в звичайному вигляді

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=-\upsilon_l\frac{\partial\sigma}{\partial x_l}-\sigma\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x_l}\,,\;\frac{\partial\upsilon_n}{\partial t}=-\upsilon_l\frac{\partial\upsilon_n}{\partial x_l}-\frac{1}{\sigma}\frac{\partial t_{nl}^o}{\partial x_l}\,, \qquad (2.25)$$

$$\frac{\partial \varepsilon^o}{\partial t} = -\upsilon_l \frac{\partial \varepsilon^o}{\partial x_l} - \varepsilon^o \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l} - \frac{\partial q_l^o}{\partial x_l} - t_{nl}^o \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l}.$$

Останнє рівняння з урахуванням виразу (2.24) для ε^o дає рівняння для температури

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\upsilon_l \frac{\partial T}{\partial x_l} - \frac{2}{3n}\left(\frac{\partial q_l^o}{\partial x_l} + t_{nl}^o \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l} \right). \tag{2.26}$$

Рівняння (2.20) для функцій $A(u)$, $B(u)$ можуть бути розв'язані тільки наближено. Барнетту [35] належить метод пошуку їх розв'язків шляхом їх розкладення за ортогональними поліномами Соніна $S_\alpha^n(x)$. Вибір саме цих поліномів у значній мірі пов'язаний з їх ортогональністю з ваговою функцією типу розподілу Максвелла

$$\int_0^{+\infty} dx x^\alpha e^{-x} S_\alpha^k(x) S_\alpha^{k'}(x) = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!}\delta_{kk'}, \quad S_\alpha^0(x) = 1, \tag{2.27}$$

що, наприклад, дає

$$\int d^3 p w_p^o(\xi)(\beta\varepsilon_p)^{\alpha-1/2} S_\alpha^k(\beta\varepsilon_p) S_\alpha^{k'}(\beta\varepsilon_p) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!}\delta_{kk'}. \tag{2.28}$$

Вибір величини α дозволяє спростити врахування додаткових умов (2.21) і отримати прості формули для кінетичних коефіцієнтів. Звичайно використовуються розкладення [100]

$$A(u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k S_{3/2}^k(u), \quad B(u) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k S_{5/2}^k(u). \tag{2.29}$$

При цьому додаткові умови (2.21) зводяться тільки до вимоги, що $a_0 = 0$, а вирази (2.24) для кінетичних коефіцієнтів набувають вигляду

$$k = 5T^2 n a_1 / 2, \quad \eta = m^2 T^2 n b_0. \tag{2.30}$$

Рівняння для коефіцієнтів розкладень (2.29) можна записати відповідно до (2.20), (2.29) у вигляді

$$\sum_{k'=1}^{\infty} A_{kk'} a_{k'} = \frac{15}{2} n\,\delta_{k,1}, \quad \sum_{k'=0}^{\infty} B_{kk'} b_{k'} = -10\,\frac{nm}{\beta}\delta_{k,0} \tag{2.31}$$

де

$$A_{kk'} = \{S_{3/2}^k(\beta\varepsilon_p) p_l, S_{3/2}^{k'}(\beta\varepsilon_p) p_l\}, \quad B_{kk'} = \{S_{5/2}^k(\beta\varepsilon_p)\Delta_{ln}(p), S_{5/2}^{k'}(\beta\varepsilon_p)\Delta_{ln}(p)\}. \tag{2.32}$$

Ці коефіцієнти виражені через білінійну форму, яка визначається формулами

$$\begin{aligned} \{g_p, h_p\} &= \langle g_p \hat{K} h_p \rangle = \int d^3 p d^3 p' w_p^o(\xi) K(p, p', \xi) g_p h_{p'} = \\ &= \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 W(\vec{p}_1, \vec{p}_2; \vec{p}_3, \vec{p}_4) w_{p_1}^o(\xi) w_{p_2}^o(\xi) \times \\ &\times \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4)\delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \times \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\times\{g_{p_1}+g_{p_2}-g_{p_3}-g_{p_4}\}\{h_{p_1}+h_{p_2}-h_{p_3}-h_{p_4}\}$$

(g_p, h_p – довільні функції). Форми такого типу широко використовуються в теорії кінетичних рівнянь [121], оскільки мають корисні властивості

$$\{g_p,h_p\}=\{h_p,g_p\},\quad \{g_p,g_p\}\ge 0,\quad \{g_p,g_p\}\{h_p,h_p\}\le\{g_p,h_p\}^2. \tag{2.34}$$

Інтегральні рівняння (2.20) з додатковими умовами (2.21) дають такі вирази для кінетичних коефіцієнтів

$$\kappa=\frac{1}{3\beta^2}\{A(\beta\varepsilon_p)p_l,A(\beta\varepsilon_p)p_l\},\ \ \eta=\frac{1}{10\beta}\{B(\beta\varepsilon_p)\Delta_{ln}(p),B(\beta\varepsilon_p)\Delta_{ln}(p)\}, \tag{2.35}$$

з яких є очевидна їх додатність.

Системи рівнянь (2.31) розв'язують наближено, залишаючи в рядах (2.29) відмінними від нуля тільки декілька перших членів. Наприклад, у наближенні s поліномів покладають, що

$$A^{[s]}(u)=\sum_{k=1}^{s}a_k^{[s]}S_{3/2}^k(u),\quad B^{[s]}(u)=\sum_{k=0}^{s-1}b_k^{[s]}S_{5/2}^k(u), \tag{2.36}$$

куди входять коефіцієнти, які задовольняють рівняння

$$\sum_{k'=1}^{s}A_{kk'}a_{k'}^{[s]}=\frac{15}{2}n\,\delta_{k,1},\qquad \sum_{k'=0}^{s-1}B_{kk'}b_{k'}^{[s]}=-10\,\frac{nm}{\beta}\delta_{k,0}. \tag{2.37}$$

Цей підхід будемо називати методом обірваного розвинення за ортогональними поліномами.

Збіжність цієї процедури випливає з варіаційного принципу, який є наслідок властивостей (2.34) оператора лінеаризованого інтеграла зіткнень $\hat{K}$ і встановлений Колером [122]. Інтегральні рівняння (2.20) для деякої функції Φ_p разом з додатковими умовами (2.21) мають структуру

$$\hat{K}\Phi_p=F_p,\ \ \langle\Phi_p\Phi_{ip}\rangle=0, \tag{2.38}$$

де F_p – відома функція. Тут Φ_{ip} – гідродинамічні моди системи, тобто власні функції оператора $\hat{K}$, які відповідають нульовим власним значенням

$$\hat{K}\Phi_{ip}=0 \tag{2.39}$$

Введемо до розгляду функцію ψ_p, яка задовольняє умови

$$\{\psi_p,\psi_p\}=\langle\psi_pF_p\rangle,\ \langle\psi_p\Phi_{ip}\rangle=0. \tag{2.40}$$

Тоді справедливі твердження

$$\{\psi_p,\psi_p\}\le\{\Phi_p,\Phi_p\};\ \{\psi_p,\psi_p\}=\{\Phi_p,\Phi_p\}\Rightarrow\psi_p=\Phi_p. \tag{2.41}$$

Таким чином, розв’язок Φ_p інтегрального рівняння (2.38) можна шукати як максимум функції $\{\psi_p,\psi_p\}$ при додаткових умовах (2.40). Нехай $\{u_{kp};1 \le k < \infty\}$ – деяка повна система функцій. Оберемо функцію ψ_p у формі

$$\psi_p = \sum_{k=1}^{s} c_k u_{kp} \tag{2.42}$$

(виконання другої умови з (2.40) можна забезпечити вже на рівні цього виразу). Тоді пошук максимуму величини $\{\psi_p,\psi_p\}$ за допомогою метода множників Лагранжа дає таке рівняння для коефіцієнтів c_k

$$\sum_{k'=1}^{s} \{u_{kp},u_{k'p}\} c_{k'} = \langle u_{kp} F_p \rangle \tag{2.43}$$

Воно повністю аналогічне рівнянням (2.37) і випливає з (2.38) підстановкою в нього виразу (2.42). Збільшення кількості функцій s у розкладенні (2.42) при виборі коефіцієнтів c_k відповідно до (2.43) веде до збільшення величини $\{\psi_p,\psi_p\}$, що забезпечує збіжність процедури обчислення при збільшенні s.

Зазвичай, при розв’язуванні інтегральних рівнянь теорії в методі обірваного розвинення за ортогональними поліномами обмежуються наближеннями одного та двох поліномів [9, 10, 121].

Висновки до розділу 2

У розділі описано відомий у літературі метод Чемпена–Енскога для стандартного гідродинамічного стану системи. В основі метода Чепмена–Енскога за Боголюбовим лежить його ідея функціональної гіпотези. Ця ідея дозволяє узагальнити метод з метою врахування негідродинамічних ступенів свободи системи. Вона є основою метода скороченого опису нерівноважних процесів Боголюбова – загального метода дослідження нерівноважних систем.

РОЗДІЛ 3
ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ РЕЛАКСАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В ОКОЛІ СТАНДАРТНОГО ГІДРОДИНАМІЧНОГО СТАНУ

Цей розділ присвячено загальній теорії релаксаційних процесів в околі стандартного гідродинамічного стану системи, яка описується кінетичним рівнянням типу Больцмана:

$$\frac{\partial f_p}{\partial t}+\frac{p_n}{m}\frac{\partial f_p}{\partial x_n}=I_p\left(f\right) \tag{3.1}$$

де f_p – ФР системи та I_p – інтеграл зіткнень. Для простоти в цьому розділі будуть розглядатись однокомпонентні системи. Як буде видно в подальшому, хоча розгляд двокомпонентних систем (наприклад, повністю іонізованої плазми) має деякі особливості, типи рівнянь у різних порядках теорії збурень для однокомпонентних та двокомпонентних систем збігаються.

Опис стандартного гідродинамічного стану є широко відомим у літературі. Як відомо [10, 12], параметрами стандартного гідродинамічного стану системи є густина числа частинок n, швидкість υ_n та температура T. Позначимо набір цих параметрів таким чином (далі ПСО стандартного гідродинамічного стану будемо нумерувати грецькими індексами)

$$\xi=\left\{n,\upsilon_n,T\right\};\ \xi_0=T,\ \xi_n=\upsilon_n,\ \xi_4=n. \tag{3.2}$$

Уперше задачу пошуку ФР у стандартному гідродинамічному стані розглядав Гільберт [32]. Він уперше ввів поняття нормальних розв'язків (тобто він уперше розглянув ФР як функціонал від ПСО) та запропонував шукати розв'язок у вигляді теорії збурень за малими градієнтами. Проте Гільберту вдалося знайти лише головний порядок цієї теорії збурень. В роботах Чемпена та Енскога [34], [10] отримано ФР у першому порядку за градієнтами та розглянуто дисипативні процеси. Зауважимо, що ідея використання поліномів Соніна в рамках методу Чемпена–Енскога належить Барнетту [35]. Боголюбов у своїй роботі [1] запропонував розгляд методу Чемпена–Енскога на основі ідеї функціональної гіпотези, яка підкреслює, що виникнення «нормальних» розв'язків – це не просто математичний «трюк», а результат природної еволюції системи. Як відомо [12], побудована на основі методу Чемпена–Енскога теорія переносу є в наш час найбільш розвиненою. Проте задача узагальнення методу Чемнена–Енскога для опису систем на етапах еволюції, які передують гідродинамічному, є дуже актуальною задачею теоретичної фізики [68].

Як відомо [1, 6], кількість ПСО зменшується з плином еволюції та на гідродинамічному етапі маємо ПСО, наведені в (3.2). На кінетичному етапі еволюції, який передує гідродинамічному, параметрів скороченого опису може бути більше, ніж параметрів скороченого опису гідродинамічного стану. Позначимо додаткові ПСО системи як θ_i (нумерувати додаткові параметри будемо латинськими індексами). Вони на гідродинамічному етапі еволюції повністю задаються параметрами ξ_μ. Щодо кінетичного етапу, то позначимо їх відхилення від своїх стандартних гідродинамічних значень як φ_i:

$$\theta_i = \varphi_i + \theta_i^h\left(\xi\right). \tag{3.3}$$

Будемо розглядати кінетичний етап еволюції біля його завершення, тобто відхилення φ_i будемо вважати малими.

У деяких випадках, які досить широко зустрічаються, є стандартні процедури вибору ПСО. Так, в якості ПСО стандартного гідродинамічного стану завжди вибираються параметри (3.2); у випадку, коли гамільтоніан системи є сумою головної частини та поправки до неї в деякій теорії збурень, використовують модель Пететмінського–Яценка [9], де ПСО мають задовольняти деяким комутаційним співвідношенням. Наприклад, така ситуація має місце при побудові флуктуаціонної електродинаміки класичного електромагнітного поля в рівноважному середовищі [123], при дослідженні кінетики електромагнітного поля в рівноважній плазмі [124], при дослідженні моделі Дікке [125 – 127] та в багатьох інших випадках.

Однак зауважимо, що загального «рецепту» вибору ПСО системи не існує та для кожної системи окремо набір ПСО «викристалізовується» в ході її експериментального та теоретичного дослідження. Означення ПСО в термінах ФР такі:

$$n \equiv \int d^3 p f_p \,;\; \pi_n = m n \upsilon_n \equiv \int d^3 p p_n f_p \,,\; \varepsilon = \frac{3}{2} n T + \frac{1}{2} m n \upsilon^2 \equiv \int d^3 p \varepsilon_p f_p \,,$$
$$\theta_i \equiv \int d^3 p \theta_{ip} f_p \,,\; \varepsilon_p \equiv \frac{p^2}{2m}, \tag{3.4}$$

де π_n – густина імпульсу системи, ε – густина енергії системи та θ_{ip} – мікроскопічні значення параметрів θ_i.

Ми маємо два малі параметри – малий параметр μ, який описує відхилення додаткових ПСО від їх стандартних гідродинамічних значень, та малий параметр g, який описує градієнти:

$$\varphi_i \sim \mu \,,\quad \frac{\partial^s \xi_\alpha}{\partial x_{n_1} \partial x_{n_2 \ldots} \partial x_{n_s}} \sim g^s \,,\quad \frac{\partial^s \varphi_i}{\partial x_{n_1} \partial x_{n_2 \ldots} \partial x_{n_s}} \sim \mu g^s \,. \tag{3.5}$$

Перший з двох наведених нижче підрозділів присвячено побудові рівнянь для частин ФР у різних порядках теорії збурень за μ та g, другий – застосуванню отриманих результатів до тринадцятимоментної задачі Греда [5]. У цій роботі показано, що відомі результати Греда [5] є наближенням одного полінома Соніна при розв'язанні просторово-однорідного кінетичного рівняння та що у наближенні більш високого числа поліномів можна отримати поправки до цих результатів.

3.1. Побудова загальної теорії збурень за малими додатковими параметрами та малими градієнтами

Цей підрозділ присвячено побудові рівнянь для частин ФР у теорії збурень за μ та g в загальному випадку. Розгляд базується на ідеї функціональної гіпотези Боголюбова:

$$f_p(x,t) \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} f_p(x,\xi(t),\varphi(t)),\ \xi = \{\xi_\mu\},\ \varphi = \{\varphi_i\}, \tag{3.6}$$

де τ_0 – деякий характерний час, який може залежати від початкового стану системи, проте зазвичай оцінюється як час зіткнення. На основі (3.6) перепишемо кінетичне рівняння (3.1):

$$\begin{gathered}\sum_\alpha \int d^3x' \frac{\delta f_p(x,\xi,\varphi)}{\delta \xi_\alpha(x')} M_\alpha(x',\xi,\varphi) + \sum_i \int d^3x' \frac{\delta f_p(x,\xi,\varphi)}{\delta \varphi_i(x')} L_i(x',\xi,\varphi) + \\ + \frac{p_n}{m}\frac{\partial f_p(x,\xi,\varphi)}{\partial x_n} = I_p(f(x,\xi,\varphi)),\end{gathered} \tag{3.7}$$

де M_α та L_i – часові похідні від ПСО, явні вирази для яких можна отримати на основі рівняння (3.1) та означень (3.4) (індекс o зверху величини означає, що вона взята в системі відліку $\upsilon_n = 0$):

$$\begin{gathered}\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t} \equiv M_\alpha(x,\xi,\varphi),\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \equiv L_i(x,\xi,\varphi), \\ M_0(x,\xi,\varphi) = -\upsilon_n \frac{\partial T}{\partial x_n} - \frac{2}{3n}\left(\frac{\partial q_n^o}{\partial x_n} + t_{nl}^o \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_n}\right), \\ M_n(x,\xi,\varphi) = -\frac{1}{mn}\frac{\partial t_{nl}^o}{\partial x_l} - \upsilon_l \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l}, \quad M_4(x,\xi,\varphi) = -\frac{\partial n\upsilon_l}{\partial x_l}, \\ L_i(x,\xi,\varphi) = -\sum_\alpha \int d^3x' \frac{\delta \theta_i(x,\xi)}{\delta \xi_\alpha(x')} M_\alpha(x',\xi,\varphi) - \frac{\partial}{\partial x_l}\int d^3p \frac{p_l}{m}\theta_{ip} f_p(x,\xi,\varphi) + \\ + \int d^3p\, \theta_{ip} I_p(f(x,\xi,\varphi)),\end{gathered} \tag{3.8}$$

У виразах для M_α використані потоки імпульсу та енергії

$$t_{nl} \equiv \int d^3 p \frac{p_n}{m} p_l f_p\left(x,\xi,\varphi\right),\; q_n \equiv \int d^3 p \frac{p_n}{m} \varepsilon_p f_p\left(x,\xi,\varphi\right). \quad (3.9)$$

Також при виводі виразів для M_α використано такі властивості інтегралу зіткнень, що відповідають законам збереження:

$$\int d^3 p I_p\left(f\right) = 0,\; \int d^3 p p_n I_p\left(f\right) = 0,\; \int d^3 p \varepsilon_p I_p\left(f\right) = 0. \quad (3.10)$$

Як відомо, мета методу скороченого опису Боголюбова – знайти ФР та часові рівняння для ПСО. У цьому підрозділі ці величини визначаються в теорії збурень за μ та g. У подальшому будуть використані такі визначення для порядків теорії збурень

$$U^{(m,n)} \sim \mu^m g^n, \quad (3.11)$$

де U – довільна величина, яка розглядається в теорії. Додатковими умовами до кінетичного рівняння (3.7) є означення (3.4). На основі (3.8) можна показати, що мають місце такі співвідношення:

$$\forall n \geq 0 \quad M_\alpha^{(n,0)} = 0,\; L_\alpha^{(0,n)} = 0. \quad (3.12)$$

Очевидно, що головний порядок теорії збурень для ФР – це максвелівська ФР

$$f_p^{(0,0)} = w_p,\; w_p \equiv \frac{n}{\left(2\pi mT\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\left(p - m\upsilon\right)^2}{2mT}\right). \quad (3.13)$$

Вона задовольняє додатковим умовам (3.4), і рівняння (3.7) у порядку $\mu^0 g^0$ є тотожністю, бо мають місце такі співвідношення:

$$M_\alpha^{(0,0)} = 0,\; L_i^{(0,0)} = 0,\; I_p\left(f^{(0,0)}\right) = 0. \quad (3.14)$$

Функції розподілу в різних порядках теорії збурень шукаємо у вигляді

$$\begin{gathered} f_p^{(0,1)} = w_p^o \left(A_p p_n \frac{\partial T}{\partial x_n} + B_p h_{nlp} \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l}\right)\Bigg|_{p\to p-m\upsilon},\; f_p^{(1,0)} = w_p \sum_i a_{ip}\varphi_i, \\ f_p^{(2,0)} = w_p \sum_{i,i'} b_{ii'p}\varphi_i\varphi_{i'},\; f_p^{(1,1)} = w_p\left(\sum_i c_{inp}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} + \sum_{i,\alpha} d_{i\alpha np}\varphi_i \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_n}\right). \end{gathered} \quad (3.15)$$

Зауважимо, що конкретний вигляд функцій $f_p^{(0,1)}$ є відомим з досліджень стандартного гідродинамічного стану [10, 69]: вони не містять градієнта густини та дельта-частини при градієнті швидкості (зауважимо, що у випадку двокомпонентних систем з'являється залежність від градієнту густини). Щодо результатів для M_α, то маємо на основі (3.8):

$$M_0^{(0,1)} = -\upsilon_n \frac{\partial T}{\partial x_n} - \frac{2}{3} T \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_n},\; M_n^{(0,1)} = -\frac{1}{mn} T \frac{\partial n}{\partial x_l} - \frac{1}{m}\frac{\partial T}{\partial x_l} - \upsilon_l \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l},\; M_4^{(0,2)} = 0, \quad (3.16)$$

$$M_4^{(0,1)} = -\frac{\partial n\upsilon_l}{\partial x_l},\ M_0^{(0,2)} = -\frac{2}{3n}\left(\frac{\partial q_n^{o(0,1)}}{\partial x_n} + t_{nl}^{o(0,1)}\frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l}\right),\ M_n^{(0,2)} = -\frac{1}{mn}\frac{\partial t_{nl}^{o(0,1)}}{\partial x_l},$$

$$M_0^{(1,1)} = -\frac{2}{3n}\left(\frac{\partial q_n^{o(1,0)}}{\partial x_n} + t_{nl}^{o(1,0)}\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_n}\right),\ M_n^{(1,1)} = -\frac{1}{mn}\frac{\partial t_{nl}^{o(1,0)}}{\partial x_l},\ M_4^{(1,1)} = 0,$$

$$M_0^{(1,2)} = -\frac{2}{3n}\left(\frac{\partial q_n^{o(1,1)}}{\partial x_n} + t_{nl}^{o(1,1)}\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_n}\right),\ M_n^{(1,2)} = -\frac{1}{mn}\frac{\partial t_{nl}^{o(1,1)}}{\partial x_l},\ M_4^{(2,1)} = 0.$$

Результати для $M_\alpha^{(0,1)}$ та $M_\alpha^{(0,2)}$ є відомими результатами стандартної гідродинаміки [10, 69]; явний вираз результатів для $M_\alpha^{(1,1)}$ та $M_\alpha^{(1,2)}$ можна отримати на основі (3.9) при конкретних параметрах θ_{ip}. Як бачимо, щоб отримати M_α у другому порядку за градієнтами, треба знати лише відповідну ФР першого порядку за градієнтами.

Як при розгляді стандартної гідродинаміки, так і при розгляді кінетичного етапу еволюції нам знадобиться лінеаризований інтегральний оператор зіткнень $\hat{K}$, який задається стандартним означенням

$$\hat{K}g_p \equiv \int d^3 p K_{pp'} g_{p'},\ \ w_p K_{pp'} \equiv -M_{pp'} w_{p'},\ \ M_{pp'} \equiv \left.\frac{\delta I_p}{\delta f_{p'}}\right|_{f\to w}. \tag{3.17}$$

На основі цього оператора вводяться інтегральні дужки:

$$\left\{g_p, h_p\right\} = \int d^3 p d^3 p' w_p K_{pp'} g_p h_{p'}, \tag{3.18}$$

які мають такі властивості:

$$\left\{g_p, h_p\right\} = \left\{h_p, g_p\right\},\ \left\{g_p, g_p\right\} \ge 0,\ \left\{g_p, g_p\right\} = 0 \Leftrightarrow g_p = 1, p_n, \varepsilon_p. \tag{3.19}$$

Часові похідні L_i нульвого порядку за градієнтами шукаємо у вигляді

$$L_i^{(1,0)} = -\sum_{i'} \mu_{ii'}\varphi_{i'},\quad L_i^{(2,0)} = -\sum_{i',i''} \nu_{ii'i''}\varphi_{i'}\varphi_{i''}. \tag{3.20}$$

На основі рівняння (3.7) та додаткових умов (3.4) маємо:

$$\begin{gathered}\mu_{ii'} = \left\{\theta_{ip}, a_{i'p}\right\},\quad \nu_{ii'i''} = \left\{\theta_{ip}, b_{i'i''p}\right\} + \frac{1}{2}\int d^3 p d^3 p' d^3 p'' w_p \theta_{ip} K_{pp'p''} a_{i'p'} a_{i''p''},\\ w_p K_{pp'p''} = -M_{pp'p''} w_{p'} w_{p''},\ \ K_{pp'p''} = \left.\frac{\delta I_p(f)}{\delta f_{p'}\delta f_{p''}}\right|_{f\to w}.\end{gathered} \tag{3.21}$$

Щодо рівнянь для ФР у просторово-однорідному випадку, то маємо такі рівняння з додатковими умовами:

$$\begin{gathered}\hat{K}a_{ip} = \sum_{i'} a_{i'p}\mu_{ii'},\ \ \left\langle a_{ip}, \zeta_{\alpha p}\right\rangle = 0,\ \left\langle a_{ip}, \theta_{i'p}\right\rangle = \delta_{ii'},\\ \zeta_{0p} = \varepsilon_p,\ \ \zeta_{np} = p_n,\ \ \zeta_{4p} = 1,\ \left\langle g_p\right\rangle \equiv \int d^3 p w_p g_p,\end{gathered} \tag{3.22}$$

$$\hat{K}b_{i'i''p} = \sum_i a_{ip}\nu_{ii'i''} + \sum_i \left(b_{ii'p}\mu_{ii''} + b_{ii''p}\mu_{ii'}\right) - \frac{1}{2}\int d^3pd^3p'K_{pp'p''}a_{i'p'}a_{i''p''},$$
$$\left\langle b_{i'i''p}, \zeta_{\alpha p}\right\rangle = 0,\ \left\langle b_{i'i''p}, \theta_{ip}\right\rangle = 0.$$

Як бачимо з (3.22), кінетичне рівняння (3.7) у порядку $\mu^1 g^0$ є рівнянням на власні функції та власні значення лінеаризованого оператора зіткнень. З цим загальним фактом добре узгоджуються рівняння (4.28). Покажемо, що відхилення φ_i є лінійними комбінаціями кінетичних мод системи та має місце релаксація системи до стандартного гідродинамічного стану, тобто φ_i згасають із часом. Введемо праві та ліві власні функції матриці $\mu_{ii'}$ (ліві власні функції, взагалі кажучи, не є транспонованими правими, бо матриця $\mu_{ii'}$ не обов'язково є ермітовою)

$$\sum_{i'} \mu_{ii'}u_{i'\alpha} = \lambda_\alpha u_{i\alpha},\ \sum_i \phi_{i\alpha}\mu_{ii'} = \lambda_\alpha \phi_{i'\alpha}. \tag{3.23}$$

У матричному вигляді праві власні функції u_α є стовпцями, а ліві ϕ_α – рядками. Грецький індекс нумерує власні функції та значення, латинські індекси є матричними. Умови нормування та повноти мають вигляд:

$$\sum_i \phi_{i\alpha}u_{i\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'},\quad \sum_\alpha \phi_{i\alpha}u_{i'\alpha} = \delta_{ii'}. \tag{3.24}$$

На основі цих властивостей маємо

$$\varphi_i = \sum_\alpha \varphi_\alpha u_{i\alpha},\quad \varphi_\alpha \equiv \sum_i \phi_{i\alpha}\varphi_i. \tag{3.25}$$

Тоді з (3.20) та (3.21) випливає

$$\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial t} \equiv -\lambda_\alpha\varphi_\alpha + O\left(\mu^2, g^1\right), \tag{3.26}$$

тобто величина φ_α згасає за часовим законом $e^{-\lambda_\alpha t}$ – вона є кінетичною модою системи. Як бачимо (3.25), відхилення φ_i є лінійними комбінаціями кінетичних мод φ_α. Залишилось довести, що ми дійсно маємо згасання, тобто $\lambda_\alpha > 0$. На основі (3.22) маємо

$$\begin{gathered}\hat{K}a_{\alpha p} = \lambda_\alpha a_{\alpha p},\quad \left\langle a_{\alpha p}, \zeta_{\mu p}\right\rangle = 0,\quad \left\langle a_{\alpha p}, \theta_{\alpha' p}\right\rangle = \delta_{\alpha\alpha'},\\ a_{\alpha p} \equiv \sum_i a_{ip}u_{i\alpha},\quad \theta_{\alpha p} \equiv \sum_i \phi_{i\alpha}\theta_{ip}.\end{gathered} \tag{3.27}$$

З першого рівняння в (3.27) отримаємо

$$\left\{a_{\alpha p}, a_{\alpha p}\right\} = \lambda_\alpha \int d^3p w_p \left(a_{\alpha p}\right)^2. \tag{3.28}$$

Очевидно, що інтеграл у правій частині (3.28) є додатним. Ліва частина (3.28) є додатною згідно з властивостями (3.19). Тоді очевидно, що виконується нерівність $\lambda_\alpha > 0$, тож дійсно маємо просторово-однорідну релаксацію до стандартного гідродинамічного стану системи.

На основі кінетичного рівняння (3.7) та додаткових умов (3.4) з урахуванням вищеотриманих результатів можна показати, що часові рівняння для відхилень φ_i в порядку $\mu^1 g^1$ мають вигляд

$$\begin{gathered}L_i^{(1,1)} = -\sum_\alpha M_\alpha^{(1,1)} \frac{\partial \left\langle \theta_{ip} \right\rangle}{\partial \xi_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_n} \int d^3 p \theta_{ip} \frac{p_n}{m} f_p^{(1,0)} + \int d^3 p d^3 p' \theta_{ip} M_{pp'} f_{p'}^{(1,1)} + \\ + \int d^3 p d^3 p' d^3 p'' \theta_{ip} M_{pp'p''} f_{p'}^{(1,0)} f_{p''}^{(0,1)} .\end{gathered} \tag{3.29}$$

На основі кінетичного рівняння (3.7), додаткових умов (3.4) та результатів для часових рівнянь (3.16), (3.20), (3.21), (3.29) можна отримати таку структуру рівнянь для ФР у порядку $\mu^1 g^1$:

$$\begin{gathered}\hat{K} c_{inp} = \sum_{i'} c_{i'np} \mu_{i'i} + \sum_{i'} a_{i'p} \left\{ \theta_{i'p,} c_{inp} \right\} + \varsigma_{inp} , \\ \hat{K} d_{i\alpha np} = \sum_{i'} d_{i'\alpha np} \mu_{i'i} + \sum_{i'} a_{i'p} \left\{ \theta_{i'p,} d_{i\alpha np} \right\} + \varsigma_{i\alpha np}\end{gathered} \tag{3.30}$$

де ς_{inp} та $\varsigma_{i\alpha np}$ – дуже громіздкі, проте відомі функції (тобто ς_{inp} не містить c_{inp} та $\varsigma_{i\alpha np}$ не містить $d_{i\alpha np}$), при цьому $\varsigma_{i\alpha np}$ залежить від c_{inp}. Самі функції ς_{inp} та $\varsigma_{i\alpha np}$ через свою надмірну громіздкість тут не виписані. Зауважимо, що, як буде видно в подальшому, таку саму структуру рівнянь ми матимемо при розгляді повністю іонізованої плазми в порядку $\mu^1 g^1$. Отримано такі додаткові умови до рівнянь (3.30):

$$\begin{gathered}\left\langle \zeta_{\mu p} c_{inp} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \theta_{ip} c_{inp} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \zeta_{\mu p} \varsigma_{inp} \right\rangle = 0, \\ \left\langle \zeta_{\mu p} d_{i\alpha np} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \theta_{ip} d_{i'\alpha np} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \zeta_{\mu p} \varsigma_{i\alpha np} \right\rangle = 0.\end{gathered} \tag{3.31}$$

Для подальшого отримання часових рівнянь для ПСО та ФР необхідна конкретизація додаткових параметрів θ_i та явного вигляду інтегралу зіткнень. Наступний підрозділ буде присвячено модифікації задачі Греда на основі побудованої тут теорії.

3.2. Застосування загальної теорії до модифікованої задачі Греда

Цей підрозділ присвячено застосуванню загальної теорії, яка розвинута в попередньому підрозділі, до модифікованої задачі Греда [5]. Як відомо, в тринадцятимоментному наближенні Греда система описується стандартними гідродинамічними параметрами, а також потоком енергії q_n^o та безслідовим потоком імпульсу π_{nl}^o, взятими в супутній системі відліку:

$$q_n^o = \int d^3 p \frac{p_n}{m} \varepsilon_p f_{p+m\upsilon}, \quad \pi_{nl}^o = t_{nl}^o - \frac{1}{3} t_{mm}^o = \int d^3 p \frac{h_{nlp}}{m} f_{p+m\upsilon}. \tag{3.32}$$

На основі кінетичного рівняння (3.1) можна отримати такі часові рівняння для потоків:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial q_n^o}{\partial t} = R_n - \frac{\partial q_{nl}}{\partial x_l} + \frac{1}{mn}\left(\pi_{nl}^o + \frac{5nT}{2}\delta_{nl}\right)\frac{\partial nT}{\partial x_l} + \frac{5T}{2m}\frac{\partial \pi_{nl}^o}{\partial x_l} + \pi_{nl}^o \frac{1}{mn}\frac{\partial \pi_{lm}^o}{\partial x_m} - \\
-\upsilon_l \frac{\partial q_n^o}{\partial x_l} - q_n^o \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l} - \frac{5}{3} q_l^o \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l} - \pi_{nl,m}\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_m}, \\
\frac{\partial \pi_{nl}^o}{\partial t} = R_{nl} - \frac{\partial \pi_{nl,m}}{\partial x_m} - \frac{\partial \upsilon_m \pi_{nl}^o}{\partial x_m} - \left(\pi_{nm}^o \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_m} + \pi_{ml}^o \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_m} - \frac{2}{3}\delta_{nl}\pi_{ms}^o \frac{\partial \upsilon_s}{\partial x_m}\right) - \\
-nT\left(\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_n} + \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l} - \frac{2}{3}\delta_{nl}\frac{\partial \upsilon_m}{\partial x_m}\right),
\end{gathered} \tag{3.33}$$

$$R_{nl} = \int d^3 p \frac{h_{nlp}}{m} I_{p+m\upsilon}(f), \quad R_n = \int d^3 p \frac{p_n}{m}\varepsilon_p I_{p+m\upsilon}(f),$$

$$\pi_{nl,m} = \frac{1}{m^2}\int d^3 p p_m h_{nl}(p) f_{p+m\upsilon}, \quad q_{nl} = \frac{1}{m^2}\int d^3 p \varepsilon_p p_n p_l f_{p+m\upsilon}.$$

З рівнянь (3.33) маємо

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \delta q_n^o}{\partial t} = \delta R_n - \frac{\partial \delta q_{nl}}{\partial x_l} + \frac{\delta \pi_{nl}^o}{mn}\frac{\partial nT}{\partial x_l} + \frac{5T}{2m}\frac{\partial \delta \pi_{nl}^o}{\partial x_l} + \frac{1}{mn}\delta\pi_{nl}^o \frac{\partial \delta \pi_{lm}^o}{\partial x_m} - \upsilon_l \frac{\partial \delta q_n^o}{\partial x_l} + \\
+\frac{1}{mn}\delta\pi_{nl}^o \frac{\partial \pi_{lm}^{oh}}{\partial x_m} + \frac{1}{mn}\pi_{nl}^{oh}\frac{\partial \delta \pi_{lm}^o}{\partial x_m} - \delta q_n^o \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l} - \frac{5}{3}\delta q_l^o \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l} - \delta \pi_{nl,m}\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_m}, \\
\frac{\partial \delta \pi_{nl}^o}{\partial t} = \delta R_{nl} - \frac{\partial \delta \pi_{nl,m}}{\partial x_m} - \frac{\partial \upsilon_m \delta \pi_{nl}^o}{\partial x_m} - \left(\delta\pi_{nm}^o \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_m} + \delta\pi_{ml}^o \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_m} - \frac{2}{3}\delta_{nl}\delta\pi_{ms}^o \frac{\partial \upsilon_s}{\partial x_m}\right), \\
\delta q_n^o = q_n^o - q_n^{oh}, \quad \delta \pi_{nl}^o = \pi_{nl}^o - \pi_{nl}^{oh}, \quad \delta q_{nl} = q_{nl} - q_{nl}^h, \\
\delta \pi_{nl,m} = \pi_{nl,m} - \pi_{nl,m}^h, \quad \delta R_n = R_n - R_n^h, \quad \delta R_{nl} = R_{nl} - R_{nl}^h.
\end{gathered} \tag{3.34}$$

Для простоти розглянемо просторово-однорідний випадок. У цьому випадку рівняння (3.34) набудуть вигляду:

$$\frac{\partial \delta q_n^o}{\partial t} = \delta R_n, \quad \frac{\partial \delta \pi_{nl}^o}{\partial t} = \delta R_{nl}. \tag{3.35}$$

ФР шукаємо у вигляді:

$$f_p = w_p^o \left(1 + a_{np}\delta q_n^o + a_{nlp}\delta \pi_{nl}^o\right)\Big|_{p \to p - m\upsilon} + O\left(\mu^2, g^1\right). \tag{3.36}$$

Для функцій a_{np} та b_{nlp} згідно з міркуваннями обертальної інваріантності маємо:

$$a_{np} = p_n a_p , \quad a_{nlp} = h_{nlp} b_p . \tag{3.37}$$

a_{nlp} не має δ-частини, бо $\delta\pi^o_{nl}$ є безслідовим, а згортка безслідового тензора з символом Кронекера є нульовою. На основі (3.33)–(3.35) можна отримати такі часові рівняння в порядку $\mu^1 g^0$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \delta q^o_n}{\partial t} = -\lambda_q \delta q^o_n , \quad \frac{\partial \delta \pi^o_{nl}}{\partial t} = -\lambda_\pi \delta \pi^o_{nl} , \\
\lambda_q = \frac{1}{3m}\left\{\varepsilon_p p_n , a_p p_n\right\}^o , \quad \lambda_\pi = \frac{1}{5m}\left\{p_n p_l , h_{nlp} b_b\right\}^o .
\end{gathered} \tag{3.38}$$

У подальшому будемо використовувати для простоти систему відліку $\upsilon_n = 0$ та не писати індекс o над величиною. Для ФР у порядку $\mu^1 g^0$ маємо такі рівняння та додаткові умови:

$$\begin{gathered}
\hat{K} a_p p_n = \lambda_q p_n a_p , \quad \hat{K} b_p h_{nlp} = \lambda_\pi b_p h_{nlp} , \\
\left\langle \varepsilon_p a_p \right\rangle = 0 , \quad \left\langle \varepsilon_p^2 a_p \right\rangle = \frac{3}{2} , \quad \left\langle \varepsilon_p^2 b_p \right\rangle = \frac{15}{8m} .
\end{gathered} \tag{3.39}$$

Вирази для λ_q, λ_π з (3.38) не є необхідними для розв'язання рівнянь (3.39), тому що їх виконання забезпечується додатковими умовами. Функції a_p та b_p шукаємо у вигляді розвинення за поліномами Соніна:

$$a_p = \sum_{s\ge 0} a_s S_s^{3/2}\left(\beta\varepsilon_p\right) , \quad b_p = \sum_{s\ge 0} b_s S_s^{5/2}\left(\beta\varepsilon_p\right) . \tag{3.40}$$

Додаткові умови (3.39) накладають такі обмеження на коефіцієнти при поліномах:

$$a_0 = 0 , \quad a_1 = -\frac{2\beta^2}{5n} , \; b_0 = \frac{\beta^2}{2mn} . \tag{3.41}$$

Інтегральні рівняння (3.39) мають такий матричний вигляд:

$$\begin{gathered}
\sum_{s'\ge 1} A_{ss'} \tilde{a}_{s'} = \tilde{\lambda}_q \tilde{a}_s , \quad \sum_{s'\ge 0} B_{ss'} \tilde{b}_{s'} = \tilde{\lambda}_\pi \tilde{b}_s , \\
A_{ss'} = \left\{ p_n S_s^{3/2}\left(\beta\varepsilon_p\right), p_n S_{s'}^{3/2}\left(\beta\varepsilon_p\right)\right\}\left(x_s x_{s'}\right)^{-1/2} , \\
\tilde{a}_s = a_s x_s^{1/2} , \quad \tilde{\lambda}_q = 2mnT\lambda_q , \quad x_s = \frac{2}{\sqrt{\pi} s!}\Gamma\left(s+\frac{5}{2}\right) , \\
B_{ss'} = \left\{ h_{nlp} S_s^{5/2}\left(\beta\varepsilon_p\right), h_{nlp} S_{s'}^{5/2}\left(\beta\varepsilon_p\right)\right\}\left(y_s y_{s'}\right)^{-1/2} , \\
\tilde{b}_s = b_s y_s^{1/2} , \quad \tilde{\lambda}_\pi = \frac{8}{3} n m^2 T^2 \lambda_\pi , \quad y_s = \frac{2}{\sqrt{\pi} s!}\Gamma\left(s+\frac{7}{2}\right) .
\end{gathered} \tag{3.42}$$

На основі (3.41) та (3.42) в наближеннях одного та двох поліномів маємо:

$$a_0^{[1]} = a_0^{[2]} = 0\,,\quad a_1^{[1]} = a_1^{[2]} = a_1\,,\quad b_0^{[1]} = b_0^{[2]} = b_0\,,$$

$$a_2^{[2]} = \frac{2}{\sqrt{7}} \frac{\tilde{\lambda}_q^{[2]} - A_{11}}{A_{12}} a_1\,,\quad b_1^{[2]} = \sqrt{\frac{2}{7}} \frac{\tilde{\lambda}_\pi^{[2]} - B_{00}}{B_{01}} b_0\,,$$

$$\lambda_q^{[1]} = \frac{2}{15nmT^3}\left\{\varepsilon_p p_n, \varepsilon_p p_n\right\},\quad \lambda_\pi^{[1]} = \frac{1}{10n\left(mT\right)^2}\left\{h_{nlp}, h_{nlp}\right\}, \tag{3.43}$$

$$\lambda_q^{[2]} = \frac{1}{4mnT}\left\{\left(A_{11} + A_{22}\right) - \sqrt{\left(A_{11} - A_{22}\right)^2 + 4A_{12}^2}\right\},$$

$$\lambda_\pi^{[2]} = \frac{3\beta^2}{16m^2 n}\left(\left(B_{00} + B_{11}\right) - \sqrt{\left(B_{00} - B_{11}\right)^2 + 4B_{10}^2}\right)$$

де індекс $\left[n\right]$ означає, що величина взята в наближенні n поліномів.

Як бачимо, результати наближення одного полінома збігаються з результатами роботи [5] та ФР у цьому наближенні повністю задається додатковими умовами. Зауважимо, що не лише для задачі Греда ФР у наближенні одного полінома повністю задаються додатковими умовами в порядку $\mu^1 g^0$ – така ситуація зустрічається в багатьох задачах фізики. Наприклад, вона зустрічається в теорії плазми (див. розділ 4) та в теорії полярона [8]. Знайдені ФР та часи релаксації потоків у наближенні двох поліномів є поправками до відомих результатів Греда.

Наприкінці скажемо пару слів про результати для часів релаксації потоків у наближенні одного полінома. Як відомо [10, 69], у наближенні одного полінома стандартна гідродинаміка дає такі результати для в’язкості та теплопровідності системи:

$$\eta^{[1]} = \frac{10n^2 m^2 T^3}{\left\{h_{nlp}, h_{nlp}\right\}},\quad \kappa^{[1]} = \frac{75}{4} \frac{n^2 T^2}{\left\{p_n S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_p\right), p_n S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_p\right)\right\}}, \tag{3.44}$$

звідки

$$\lambda_q^{[1]} = \frac{5}{2} \frac{nT}{m\kappa^{[1]}},\quad \lambda_\pi^{[1]} = \frac{nT}{\eta^{[1]}}. \tag{3.45}$$

Як відомо [10], $\eta^{[1]}$ та $\kappa^{[1]}$ пов’язані між собою як

$$\kappa^{[1]} = \frac{15\eta^{[1]}}{4m}, \tag{3.46}$$

звідки на основі (3.45) можна отримати таке співвідношення між часами релаксації потоків у наближенні одного полінома:

$$\lambda_q^{[1]} = \frac{2}{3}\lambda_\pi^{[1]}. \tag{3.47}$$

Висновки до розділу 3

Побудовано узагальнення методу Чемпена–Енскога з урахуванням релаксаційних процесів. Під терміном «релаксація» розуміється процес, який може мати місце в просторово-однорідній системі. Побудоване в роботі узагальнення базується на ідеї функціональної гіпотези Боголюбова. Це узагальнення дозволяє описати стани системи, що знаходяться в околі стандартного гідродинамічного стану. В якості параметрів скороченого опису системи використовуються параметри скороченого опису стандартного гідродинамічного стану та відхилення додаткових параметрів, що описують стан системи, від їх стандартних гідродинамічних значень. Розглядаються стани системи, які близькі до стандартного гідродинамічного стану, тобто ці відхилення вважаються малими. Такий розгляд дозволяє застосувати кінетику повільних змінних. Будується теорія збурень за вищезазначеними малими відхиленнями та малими градієнтами. Досліджено структуру рівнянь для функції розподілу та часових рівнянь для параметрів скороченого опису системи в різних порядках теорії збурень. Зокрема, показано, що в рамках лінійної за відхиленнями просторово-однорідної задачі рівняння для функції розподілу є рівнянням на власні функції та власні значення лінеаризованого оператора зіткнень. Показано, що самі відхилення є лінійними комбінаціями кінетичних мод газу. Розроблене узагальнення може вживатись для опису релаксації різноманітних класичних систем до їх стандартного гідродинамічного стану біля завершення процесів релаксації. На відміну від відомих методів дослідження нерівноважних систем (наприклад, методу Зубарєва), розвинений у цій роботі метод є відносно простим: він не потребує складної операторної техніки.

Задача Греда, в якій система описується параметрами скорочено опису стандартного гідродинамічного стану, а також потоком енергії та безслідовим потоком імпульсу, досліджена на основі узагальненного в монографії методу Чепмена–Енскога. Для простоти розглянуто лише просторово-однорідний випадок. Отримано функцію розподілу та часи релаксації потоків. Показано, що в наближенні одного полінома Соніна результати для функції розподілу та для часів релаксації потоків збігаються з відомими результатами Греда та функція розподілу повністю задається додатковими умовами. Також отримано поправки до результатів для функції розподілу та часів релаксації потоків у наближенні двох поліномів. Отримані результати є загальними: при виводі цих результатів явний вигляд інтегралу зіткнень не конкретизується. Для кожної окремої системи можна отримати функцію розподілу та часи релаксації потоків на основі отриманих у роботі результатів, якщо конкретизувати інтеграл зіткнень.

Результати розділу 3 опубліковано у нашій роботі [128].

РОЗДІЛ 4
ПОШУК ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ ТА ШВИДКОСТЕЙ РЕЛАКСАЦІЇ В ПРОСТОРОВО–ОДНОРІДНОМУ ВИПАДКУ

Цей розділ присвячено дослідженню просторово-однорідного стану плазми. У цьому розділі отримуються функції розподілу та швидкості релаксації на основі ідеї узагальнення методу Чепмена–Енскога, розвинутої в попередньому розділі.

Вперше задачу релаксації в повністю іонізованій однорідній плазмі розглядав Ландау в своїй відомій статті [4]. У цій статті він отримав відоме кінетичне рівняння Ландау, а також розглянув задачу температурної релаксації на основі наближення, що функції розподілу є максвелівськими з залежною від часу температурою компонент. Ним було отримано швидкість релаксації температури в основному порядку за малим параметром σ

$$\sigma = \sqrt{m_e / m_i}\,, \tag{4.1}$$

де m_e та m_i – маса електронів та іонів відповідно. Пізніше Спітцер [77] отримав поправку до цього результату в більш високих порядках за σ. Релаксація швидкості була розглянута в книзі [16] на основі наближення локальної рівноваги (НЛР), тобто наближення, що просторово-однорідні функції розподілу компонент є максвелівськими з залежними від часу температурами та швидкостями компонент. Наближення локальної рівноваги широко використовується в літературі у фізиці плазми та не лише у фізиці плазми (див., наприклад, [39, 79, 81, 86]).

Проте досить актуальною проблемою є проблема порушення локальної рівноваги (див., наприклад, [2, 8, 89]). Тому дуже важливою задачею є безпосереднє обчислення ФРК на основі кінетичного рівняння Ландау в просторово-однорідному випадку. ФРК та часові рівняння для ПСО отримані на основі кінетичного рівняння Ландау в рамках лінійної та квадратичної теорії релаксації,та результати порівняні з результатами НЛР.

4.1. Базові рівняння теорії

У цій монографії ФРК повністю іонізованої просторово-однорідної двокомпонентної електрон-іонної плазми досліджуються на основі кінетичного рівняння Ландау

$$\frac{\partial f_{ap}}{\partial t} = I_{ap}\left(f\right), \tag{4.2}$$

де f_{ap} – ФР a-ї компоненти ($a = e, i$) та I_{ap} – інтеграл зіткнень Ландау [4]:

$$I_{ap}(f) = 2\pi e_a^2 L \sum_c e_c^2 \frac{\partial}{\partial p_n} \int d^3 p' \left\{ f_{cp'} \frac{\partial f_{ap}}{\partial p_k} - f_{ap} \frac{\partial f_{cp'}}{\partial p'_k} \right\} D_{nk} \left(\frac{p}{m_a} - \frac{p'}{m_c} \right),$$
$$D_{nk}(u) = \left(u^2 \delta_{nk} - u_n u_k \right) / u^3 . \tag{4.3}$$

Зауважимо, що часто плазму розглядають на основі кінетичного рівняння Ландау–Власова із самоузгодженим членом [100, 101]. Проте в просторово-однорідному випадку самоузгоджений член відсутній. Більш того, як відомо [101], самоузгоджений член не впливає на кінетичні коефіцієнти системи, тому гідродинаміку плазми будують на основі кінетичного рівняння Ландау без самоузгодженого члена, див. [39, 78].

Температури, швидкості та густини числа частинок компонент вводяться за стандартними визначеннями в термінах ФРК [9, 69]:

$$n_a \equiv \int d^3 p f_{ap} \quad , \quad \pi_{an} = m_a n_a \upsilon_{an} \equiv \int d^3 p p_n f_{ap} \,,$$
$$\varepsilon_a = \frac{3}{2} m_a n_a T_a + \frac{1}{2} m_a n_a \upsilon_a^2 \equiv \int d^3 p \varepsilon_{ap} f_{ap} \,, \quad \varepsilon_{ap} = p^2 / 2m_a \,, \tag{4.4}$$

де m_a, n_a, π_{an}, υ_{an}, ε_a, T_a – відповідно маса частинок, густина кількості частинок, густина імпульсу, швидкість, густина енергії та температура a-ї компоненти. Зауважимо, що в цій роботі температура вимірюється в енергетичних одиницях.

Введемо масову швидкість υ_n та температуру T за такими означеннями [69]:

$$\pi_n = \sum_a \pi_{an} \equiv \upsilon_n \sum_a m_a n_a \,, \; \varepsilon = \sum_a \varepsilon_a = \frac{3}{2} T \sum_a m_a n_a + \frac{1}{2} \upsilon^2 \sum_a m_a n_a \,. \tag{4.5}$$

У просторово-неоднорідному випадку фізичний зміст цих величин полягає в тому, що вони є ПСО системи в стандартному гідродинамічному стані [69]. У просторово–однорідному випадку вони, як буде показано нижче, є постійними рівноважними температурою та швидкістю системи. На основі рівнянь (4.2)–(4.4) можна отримати

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = \int d^3 p I_{ap}(f), \quad \frac{\partial \pi_{an}}{\partial t} = R_{an}(f), \quad \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t} = Q_a(f), \tag{4.6}$$

де R_{an} та Q_a – джерела імпульсу та енергії відповідно:

$$R_{an}(f) \equiv \int d^3 p p_n I_{ap}(f), \quad Q_a(f) \equiv \int d^3 p \varepsilon_{ap} I_{ap}(f) \,. \tag{4.7}$$

На основі явного вигляду інтегралу зіткнень Ландау (4.3) рівняння (4.6), (4.7) дають

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = 0 \,, \; \sum_a Q_a(f) = 0 \,, \; \sum_a R_{an}(f) = 0 \,, \tag{4.8}$$

звідки випливає, що в просторово-однорідному випадку величини n_a, υ_n, T є константами, тобто вони є відповідно рівноважними густинами компонент, швидкістю та температурою системи. У подальшому в цьому розділі ми будемо працювати в системі відліку $\upsilon_n = 0$.

Введемо параметри u_n, τ, фізичний зміст яких – відхилення швидкості та температури електронів від рівноважних значень:

$$u_n \equiv \upsilon_{en} \quad , \quad \tau \equiv T_e - T . \tag{4.9}$$

Релаксаційні процеси в цій роботі досліджуються біля свого завершення, тому відхилення u_n, τ вважаються малими та оцінюються малим параметром μ:

$$\tau \sim \mu T \quad , \quad u_n \sim \mu\sqrt{T/m_e} \ , \ \mu \ll 1. \tag{4.10}$$

На основі визначень (4.4), (4.5) та (4.9) можна показати, що відхилення іонної температури та швидкості від рівноважних значень виражаються в термінах u_n, τ як

$$T_i - T = -z\tau - \frac{1}{3}m_e z u^2\left(1 + z\sigma^2\right), \ \ \upsilon_{in} = -z\sigma^2 u_n ; \tag{4.11}$$

зауважимо, що тут і надалі в цьому розділі результати приводяться з урахуванням електронейтральності плазми:

$$n_e = z n_i , \tag{4.12}$$

де z – зарядове число іона.

Як відомо [11], однією з центральних задач статистичної фізики є задача скороченого опису системи. Набір параметрів, які повністю описують стан системи при скороченому описі, називають ПСО системи. Основна мета методу скороченого опису – знайти в деякій теорії збурень ФР (у квантовому випадку – статистичний оператор) системи та часові рівняння для ПСО. Зауважимо також, що схожі ідеї застосовуються не лише в статистичній фізиці, але й в інших галузях фізики (див., наприклад, [129]). Починаючи з піонерських робіт Брагінського [39, 78], за параметри скороченого опису системи обирають густини кількості частинок n_a, швидкості υ_{an} та температури T_a компонент. Як бачимо, температури та швидкості компонент можуть бути виражені в термінах параметрів u_n, τ, T та υ_n. Тому що n_a, υ_n та T є постійними рівноважними параметрами, в якості ПСО системи можемо обрати малі відхилення u_n, τ. Такий вибір параметрів є зручним для опису релаксаційних процесів у системі. Подальше дослідження базується на ідеї функціональної гіпотези Боголюбова [1, 9]:

$$f_{ap}\left(t\right) \xrightarrow[t \gg \tau_o]{} f_{ap}\left(u_n\left(t\right), \tau\left(t\right)\right), \tag{4.13}$$

де τ_0 – деякий характерний час: $\tau_0 \ll \tau_u \ll \tau_T$, τ_u – час релаксації швидкості, τ_T – час релаксації температури. Згідно з цією ідеєю, для великих часів ФРК починають залежати від часу через параметри скороченого опису. Зауважимо, що ця ідея є більш загальною, ніж просто дослідження «нормальних розв'язків» у рамках стандартного методу Чемпена–Енскога [10, 102], бо вона підкреслює той факт, що така залежність ФРК для великих часів є результатом природної еволюції системи. На основі (4.13) перепишемо кінетичне рівняння Ландау (4.2):

$$\frac{\partial f_{ap}\left(u_l,\tau\right)}{\partial u_n}L_n\left(u_l,\tau\right)+\frac{\partial f_{ap}\left(u_l,\tau\right)}{\partial \tau}L_0\left(u_l,\tau\right)=I_{ap}\left(f\left(u_l,\tau\right)\right),$$
$$L_0\equiv\frac{\partial\tau}{\partial t},\quad L_n\equiv\frac{\partial u_n}{\partial t}. \tag{4.14}$$

Рівняння (4.14) справедливе для часів $t \gg \tau_0$, а саме такі часи й досліджуються в цій роботі. У подальшому рівняння (4.14) досліджується в теорії збурень за малим параметром μ з додатковим використанням малості відношення мас σ. Додатковими умовами до рівнянь (4.14) є означення ПСО в термінах ФРК (4.4). Вони накладають певні обмеження на ФРК. Часові рівняння для ПСО можуть бути отримані на основі виразів (4.2)–(4.4):

$$L_0\left(u_l,\tau\right)=\frac{2}{3n_e}Q_e\left(f\left(u_l,\tau\right)\right),\ L_n\left(u_l,\tau\right)=\frac{1}{m_e m_e}R_{en}\left(f\left(u_l,\tau\right)\right). \tag{4.15}$$

Очевидно, що в нульовому порядку за μ ФРК мають вигляд

$$f_{ap}^{(0)}=w_{ap}\equiv\frac{n_a}{\left(2\pi m_a T\right)^{3/2}}\exp\left(-\beta\varepsilon_{ap}\right),\quad \beta\equiv T^{-1}, \tag{4.16}$$

індекс зверху в круглих дужках означає порядок за μ. Цей факт має місце, бо функції (4.16) задовольняють додатковим умовам (4.4) в порядку μ^0:

$$n_a=\int d^3p f_{ap}^{(0)},\quad 0=\int d^3p\, p_n f_{ap}^{(0)},\quad \frac{3}{2}n_a T=\int d^3p\,\varepsilon_{ap}f_{ap}^{(0)}, \tag{4.17}$$

та на основі явного вигляду інтегралу зіткнень Ландау (4.3) можна показати, що

$$I_{ap}^{(0)}\left(f\right)=I_{ap}\left(w\right)=0,\quad Q_a^{(0)}=Q_a\left(w\right)=0,\quad R_{an}^{(0)}\left(f\right)=R_{an}\left(w\right)=0, \tag{4.18}$$

звідки з урахуванням (4.15) бачимо, що в порядку μ^0 рівняння (4.14) є тотожністю.

З (4.18) і випливає очевидний результат для часових рівнянь для ПСО в порядку μ^0:

$$L_0^{(0)}=0,\quad L_n^{(0)}=0. \tag{4.19}$$

Зауважимо, що в порядку μ^0 результати роботи збігаються з результатами НЛР, які, як зазначено вище, базуються на таких ФРК:

$$f_{ap}^{L} = \frac{n_a}{\left(2\pi m_a T_a\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\left(p - m_a \upsilon_a\right)^2}{2 m_a T_a}\right). \tag{4.20}$$

Подальші підрозділи цього розділу присвячені отриманню результатів для ФРК та часових рівнянь для ПСО в більш високих порядках за μ. У цій роботі результати отримано з точністю до членів порядку μ^2 та зроблено їх порівняння з результатами НЛР (вони, як зазначено раніше, базуються на ФРК (4.20)).

4.2. Лінійна теорія релаксації

Цей підрозділ присвячено пошуку ФРК та часових рівнянь для ПСО в рамках лінійної теорії релаксації, тобто в першому порядку μ^1. Зауважимо, що всі дослідження попередників [4, 16, 77] стосуються саме лінійної теорії релаксації. Функції $f_{ap}^{(1)}$ шукаємо у вигляді

$$f_{ap}^{(1)} = w_{ap}\left(A_a\left(p\right)\tau + B_{an}\left(p\right)u_n\right), \tag{4.21}$$

де структура невідомих функцій $A_a\left(p\right)$, $B_{an}\left(p\right)$ визначається міркуваннями обертальної інваріантності:

$$A_a\left(p\right) = A_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right), \;\; B_{an}\left(p\right) = p_n B_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right) . \tag{4.22}$$

Перш ніж обчислювати $f_{ap}^{(1)}$, наведемо результат для ФРК, який дає НЛР. Цей результат отримується на основі розвинення ФРК (4.20) у ряд Тейлора за малими відхиленнями u_n, τ:

$$\begin{gathered} A_e\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) = -\beta S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right), \quad A_i\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = z\beta S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right), \\ B_e\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) = \beta, \quad B_i\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = -z\beta\sigma^2 . \end{gathered} \tag{4.23}$$

Тут і надалі використовуються ортогональні поліноми Соніна:

$$\begin{gathered} S_n^{\alpha}\left(x\right) \equiv \frac{1}{n!} e^{x} x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x} x^{\alpha+n}\right), \\ \int_0^{\infty} dx x^{\alpha} \exp\left(-x\right) S_n^{\alpha}\left(x\right) S_{n'}^{\alpha}\left(x\right) = \frac{1}{n!}\Gamma\left(n + \alpha + 1\right)\delta_{nn'} . \end{gathered} \tag{4.24}$$

Зауважимо, що поліноми Соніна широко використовуються для отримання наближених розв’язків кінетичних рівнянь (див. [10, 39, 40, 78]).

У подальшому $f_{ap}^{(1)}$ та $f_{ap}^{(2)}$ (див. наступний підрозділ) обчислюються за таким алгоритмом, який дає змогу отримати наближений розв’язок:

1) отримати для кожної частини ФРК точне інтегральне рівняння на основі рівнянь (4.14) та (4.15);

2) дослідити отримане рівняння в теорії збурень за σ – виписати рівняння в різних порядках за σ;

3) додатково використати розвинення за поліномами Соніна для отриманих у пункті 2 рівнянь, якщо вони не мають очевидного точного розв'язку.

Підставивши (4.21) та (4.22) до означення джерел (4.7), можна отримати

$$R_{en}^{(1)} = -m_e n_e \lambda_u u_n, \quad Q_e^{(1)} = -\frac{3}{2} n_e \lambda_T \tau;$$
$$\lambda_u = \frac{1}{3m_e n_e} \sum_a \left\{ p_n, p_n B_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right) \right\}_{ea}, \; \lambda_T = \frac{2}{3n_e} \sum_a \left\{ \varepsilon_{ep}, A_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right) \right\}_{ea}. \tag{4.25}$$

Інтегральні дужки $\left\{ g_p, h_p \right\}_{ab}$ визначаються так:

$$\left\{ g_p, h_p \right\}_{ab} \equiv -\int d^3p d^3p' M_{ab}\left(p, p'\right) w_{bp'} g_p h_{p'};$$
$$M_{ab}\left(p, p'\right) \equiv \delta I_{ap}\left(f\right) / \delta f_{bp'} \Big|_{f \to w}, \tag{4.26}$$

де $M_{ab}\left(p, p'\right)$ – ядро інтегралу зіткнень. Введемо лінеаризований оператор зіткнень $\hat{K}_{ab}$:

$$\hat{K}_{ab} g_p \equiv \int d^3p K_{ab}\left(p, p'\right) g_{p'}, \quad w_{ap} K_{ab}\left(p, p'\right) = -M_{ab}\left(p, p'\right) w_{bp'}. \tag{4.27}$$

Тоді на основі виразів (4.14), (4.15), (4.25)–(4.27) можна отримати такі інтегральні рівняння відносно функцій $A_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)$ та $B_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)$:

$$\sum_c \hat{K}_{ac} A_c\left(\beta\varepsilon_{cp}\right) = \lambda_T A_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right), \; \sum_c \hat{K}_{ac} p_n B_c\left(\beta\varepsilon_{cp}\right) = \lambda_u p_n B_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right). \tag{4.28}$$

Як бачимо, маємо задачу на власні функції та власні значення лінеаризованого оператора зіткнень. З виразів (4.15) та (4.25) бачимо, що часові рівняння для ПСО набудуть вигляду

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = -\lambda_u u_n, \; \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\lambda_T \tau, \tag{4.29}$$

звідки фізичний зміст величин λ_u та λ_T – відповідно швидкість релаксації швидкості та температури компонент.

Додаткові умови (4.4) накладають такі обмеження на функції $A_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)$ та $B_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)$:

$$\int d^3p w_{ap} A_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right) = 0, \; \int d^3p w_{ap} \varepsilon_{ap} A_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right) = \frac{3}{2} n_e \left(\delta_{ae} - \delta_{ai}\right),$$
$$\int d^3p w_{ap} \varepsilon_{ap} B_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right) = \frac{3}{2} n_e \left(\delta_{ae} - \sigma^2 \delta_{ai}\right). \tag{4.30}$$

Зауважимо, що для розв'язання рівнянь (4.28) необов'язково знати вирази (4.25) для λ_u та λ_T: за рахунок додаткових умов вирази (4.25) будуть виконуватись автоматично, якщо λ_u, λ_T, $A_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)$ та $B_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)$ задовольняють рівнянню (4.28). Проте вирази (4.25) можуть бути корисними для спрощення громіздких обчислень. Наприклад, обчислимо температурну частину ФРК у порядку μ^1 з використанням (4.25), а швидкісну частину – без.

У подальшому, згідно з наведеним алгоритмом, функції $A_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)$ та $B_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)$ обчислюються в теорії збурень за σ. Теорія збурень за σ будується на основі стандартних оцінок [39, 40, 78, 85]:

$$p_{en} \sim \sqrt{m_e T}\,, \quad p_{in} \sim \sqrt{m_i T} \sim \sqrt{m_e T}\sigma^{-1}. \tag{4.31}$$

Результати $\hat{K}_{ac}$ у різних порядках теорії збурень за σ наведено в Додатку1. Зауважимо також, що можна довести додатність швидкостей релаксації λ_u та λ_T ще до їх розрахунку в теорії збурень за σ. Довести це можна на основі таких виразів:

$$\begin{gathered}
\left\{A(p), A(p)\right\} = \lambda_T \sum_a \int d^3 p w_{ap} \left(A_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)\right)^2, \\
\left\{B_n(p), B_n(p)\right\} = \lambda_u \sum_a \int d^3 p w_{ap} p^2 \left(B_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)\right)^2, \quad \left\{g_p, h_p\right\} \equiv \sum_{a,b} \left\{g_p, h_p\right\}_{ab}.
\end{gathered} \tag{4.32}$$

Ці вирази є наслідком (4.28). На основі (4.3) та (4.26) можна довести, що

$$\left\{g_p, g_p\right\} \geq 0. \tag{4.33}$$

Очевидно, що інтеграли в правих частинах (4.32) є невід'ємними, тому з урахуванням (4.33) маємо

$$\lambda_u \geq 0\,, \ \lambda_T \geq 0\,. \tag{4.34}$$

4.2.1. Температурна частина

У цьому пункті отримуються результати для $A_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)$ та λ_T у різних порядках теорії збурень за σ на основі рівнянь (4.25) та (4.28).

У порядку σ^0 перше рівняння з (4.28) має з урахуванням (4.25) та результатів, наведених у Додатку1, такий вигляд:

$$\begin{gathered}
\hat{K}_{ee}^{(0)} A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) = \lambda_T^{(0)} A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right), \quad \lambda_T^{(0)} A_i^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = 0\,; \\
\lambda_T^{(0)} = \frac{2}{3n_e}\left\{\varepsilon_{ep}, A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)\right\}_{ee}^{(0)} = 0\,.
\end{gathered} \tag{4.35}$$

Тут та в подальшому в цьому підрозділі індекс у круглих дужках зверху означатиме порядок за σ. Остання рівність у (4.35) – наслідок явного вигляду інтегральних дужок. Як бачимо, тоді друге рівняння в (4.35) стає тотожністю, а перше набуває вигляду

$$\hat{K}_{ee}^{(0)} A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=0. \tag{4.36}$$

Шукаємо його розв'язок у вигляді розвинення за поліномами Соніна:

$$A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\sum_{s\geq 0} g_{es}^{(0)} S_s^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right), \tag{4.37}$$

тут та в подальшому вибір поліномів для просторово–однорідної задачі обґрунтовується тим, що перші декілька коефіцієнтів при поліномах визначаються додатковими умовами. У матричному вигляді рівняння (4.36) має вигляд

$$\sum_s g_{es}^{(0)} H_{ek,es}^{(0)}=0,\ H_{ak,bs}\equiv\left\{S_k^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right),S_s^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{bp}\right)\right\}_{ab}. \tag{4.38}$$

Для $k=0,1$ рівняння (4.38) є тотожністю, бо з явного вигляду інтегральних дужок випливає

$$H_{e0,es}^{(0)}=H_{e1,es}^{(0)}=H_{es,e1}^{(0)}=H_{es,e0}^{(0)}=0. \tag{4.39}$$

З (4.39) бачимо, що для $k\geq 2$ рівняння має (4.38) вигляд

$$\sum_{s\geq 2} g_{es}^{(0)} H_{ek,es}^{(0)}=0, \tag{4.40}$$

що є тривіальною системою рівнянь на коефіцієнти $g_{es\geq 2}^{(0)}$, звідки $g_{es\geq 2}^{(0)}=0$. Додаткові умови (4.30) визначають перші два коефіцієнти в розвиненні (4.37):

$$g_{e0}^{(0)}=0,\ g_{e1}^{(0)}=-\beta. \tag{4.41}$$

Тож для функції $A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$ маємо точний розв'язок:

$$A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=-\beta S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right). \tag{4.42}$$

Як бачимо, функція $A_e\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$ задається НЛР у головному порядку за σ. Поправки до НЛР у більш високих порядках буде отримано нижче.

У порядку σ^1 з урахуванням попередніх результатів перше рівняння з (4.28) має такий вигляд:

$$\hat{K}_{ee}^{(0)} A_e^{(1)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\lambda_T^{(1)} A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right),\ \ \lambda_T^{(1)} A_i^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\hat{K}_{ii}^{(1)} A_i^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right);\ \ \lambda_T^{(1)}=0, \tag{4.43}$$

Остання рівність в (4.43) є наслідком (4.25) та явного вигляду інтегральних дужок. Тоді (4.43) матиме вигляд

$$\hat{K}_{ee}^{(0)} A_e^{(1)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=0,\ \ \hat{K}_{ii}^{(1)} A_i^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0. \tag{4.44}$$

Перше рівняння у (4.44) має розв'язок

$$A_e^{(1)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=0. \tag{4.45}$$

В цьому легко переконатися, провівши обчислення, аналогічні обчисленням для $A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$, але додаткові умови занулять перші два коефіцієнти в розвиненні. Щодо другого рівняння у (4.44), аналогічні обчислення можна провести на основі таких рівностей

$$H^{(1)}_{i0,is} = H^{(1)}_{is,i0} = H^{(1)}_{i1,is} = H^{(1)}_{is,i1}, \tag{4.46}$$

що дає

$$A_i^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = z\beta S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right), \tag{4.47}$$

де коефіцієнт при поліномі задається додатковими умовами (4.30). Як бачимо, $A_i\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)$ також задається НЛР у головному порядку за σ, проте в більш високих порядках за σ до цього результату будуть отримані поправки (див. нижче).

У порядку σ^2 перше рівняння з (4.28) має з урахуванням (4.25) та вже отриманих результатів такий вигляд:

$$\begin{gathered}
\lambda_T^{(2)} A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) = \hat{K}^{(0)}_{ee} A_e^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) + \hat{K}^{(2)}_{ee} A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) + \hat{K}^{(2)}_{ei} A_i^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right), \\
\lambda_T^{(2)} A_i^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) = \hat{K}^{(2)}_{ie} A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) + \hat{K}^{(1)}_{ii} A_i^{(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) + \hat{K}^{(2)}_{ii} A_i^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right), \\
\lambda_T^{(2)} = \frac{2}{3n_e}\left(\left\{\varepsilon_{ep}, A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)\right\}^{(2)}_{ee} + \left\{\varepsilon_{ep}, A_i^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)\right\}^{(2)}_{ei}\right).
\end{gathered} \tag{4.48}$$

З останнього рівняння в (4.48) отримаємо

$$\lambda_T^{(2)} = \frac{2^{7/2} z^2 (z+1)}{3} \frac{n_i e^4 L\sqrt{\pi}}{m_e^{1/2} T^{3/2}} \sigma^2. \tag{4.49}$$

Цей результат збігається з відомим результатом Ландау [4, 16]; як бачимо, він отриманий на основі НЛР, тому що останнє рівняння в (4.48) містить функції $A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$ та $A_i^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)$, які є результатами НЛР. Розв'язки перших двох рівнянь у (4.48) шукаємо як розвинення за поліномами Соніна:

$$A_e^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) = \sum_{s\ge 0} g^{(2)}_{es} S_s^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right), \quad A_i^{(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = \sum_{s\ge 0} g^{(1)}_{is} S_s^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right). \tag{4.50}$$

У матричному вигляді перші два рівняння з (4.48) мають вигляд:

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{2} n_e \beta \lambda_T^{(2)} \delta_{k1} &= \sum_{s\ge 2} g^{(2)}_{es} H^{(0)}_{ek,es} - \beta H^{(2)}_{ek,e1} + z\beta H^{(2)}_{ek,i1}, \\
\frac{3}{2} n_i \lambda_T^{(2)} z\beta\delta_{k1} &= -\beta H^{(2)}_{ik,e1} + \sum_{s\ge 2} g^{(1)}_{is} H^{(1)}_{ik,is} + z\beta H^{(2)}_{ik,i1}.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

У (4.51) розвинення починається з другого полінома, а не з нульового, оскільки додаткові умови (4.30) накладають такі обмеження:

$$g^{(2)}_{e0} = g^{(2)}_{e1} = 0, \; g^{(1)}_{i0} = g^{(1)}_{i1} = 0. \tag{4.52}$$

Перше рівняння у (4.51) для $k = 0{,}1$ дає тотожності ($0 = 0$ для $k = 0$ та вираз (4.49) для $k = 1$). Для $k \ge 2$ на його основі отримується розв'язок для $A_e^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$. Цей розв'язок для простоти шукаємо в наближенні одного полінома:

$$g_{e2}^{(2)} = \frac{\beta H_{e2,e1}^{(2)} - z\beta H_{e2,i1}^{(2)}}{H_{e2,e2}^{(0)}} = 3\sqrt{2}z\left(z+1\right)\beta\sigma^2 . \qquad (4.53)$$

Друге рівняння з (4.51) дає тотожності аналогічно випадку $k = 0,1$. Через рівності

$$H_{ik,i1}^{(2)} = 0,\; H_{ik,e1}^{(2)} = 0 \qquad (4.54)$$

для $k \geq 2$ друге рівняння з (4.51) є рівнянням із тривіальним розв'язком. Тож маємо

$$A_e^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) = 3\sqrt{2}z\left(z+1\right)\beta\sigma^2 S_2^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right),\; A_i^{(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = 0 . \qquad (4.55)$$

Як бачимо, отримано поправку до результату НЛР для функції $A_e^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$ у другому порядку за σ .

У третьому порядку перше рівняння з (4.28) з урахуванням (4.25) та вже отриманих результатів має вигляд

$$\begin{gathered} \hat{K}_{ee}^{(0)} A_e^{(3)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) = \lambda_T^{(3)} A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right),\; \hat{K}_{ii}^{(1)} A_i^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = \lambda_T^{(3)} A_i^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right), \\ \lambda_T^{(3)} = \frac{2}{3n_e}\left\{\varepsilon_{ep}, A_e^{(3)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)\right\}_{ee}^{(0)} = 0 . \end{gathered} \qquad (4.56)$$

Остання рівність у (4.56) є наслідком явного вигляду інтегральних дужок. Додаткові умови (4.30) занулять перші два коефіцієнти при поліномах у функціях $A_e^{(3)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$ та $A_i^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)$. Тоді аналогічно попереднім викладкам отримаємо

$$A_e^{(3)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) = 0,\; A_i^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = 0 . \qquad (4.57)$$

У четвертому порядку перше рівняння з (4.28) з урахуванням (4.25) та отриманих вище результатів має вигляд:

$$\begin{gathered} \hat{K}_{ee}^{(0)} A_e^{(4)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) + \hat{K}_{ee}^{(2)} A_2^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{cp}\right) + \hat{K}_{ee}^{(4)} A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) + \hat{K}_{ei}^{(4)} A_i^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = \\ = \lambda_T^{(2)} A_e^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) + \lambda_T^{(4)} A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right), \\ \hat{K}_{ii}^{(1)} A_i^{(3)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) + \hat{K}_{ii}^{(4)} A_i^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) + \hat{K}_{ie}^{(4)} A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) + \hat{K}_{ie}^{(2)} A_e^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) = \\ = \lambda_T^{(4)} A_i^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right), \\ \lambda_T^{(4)} = \frac{2}{3n_e}\left(\left\{\varepsilon_{ep}, A_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)\right\}_{ee}^{(4)} + \left\{\varepsilon_{ep}, A_i^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)\right\}_{ei}^{(2)} + \left\{\varepsilon_{ep}, A_i^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)\right\}_{ei}^{(4)}\right). \end{gathered} \qquad (4.58)$$

З останнього рівняння у (4.58) отримаємо

$$\lambda_T^{(4)} = -2^{5/2} z^2\left(z+1\right)\frac{ne^4 L\sqrt{\pi}}{m_e^{1/2} T^{3/2}}\sigma^4 - 24z^3\left(z+1\right)\frac{ne^4 L\sqrt{\pi}}{m_e^{1/2} T^{3/2}}\sigma^4 . \qquad (4.59)$$

Перший член у (4.59) дає НЛР. Він збігається з результатом Спітцера [77], який також було отримано в НЛР. Другий член у (4.59) є наслідком поправки

(4.55) до НЛР. Як бачимо, отримана поправка до НЛР суттєво впливає на швидкість релаксації температури в четвертому порядку за σ, тому що ця поправка у $3z\sqrt{2}$ разів більша за член, який дає НЛР у порядку σ^4. Розв'язок другого рівняння у (4.58) шукаємо розвиненням за поліномами Соніна:

$$A_i^{(3)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=\sum_s g_{is}^{(3)}S_s^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right). \tag{4.60}$$

Додаткові умови (4.30) занулять перші два коефіцієнти в розвиненні (4.60). Матричний вигляд другого рівняння з (4.58):

$$\sum_{s\geq 2} g_{is}^{(3)}H_{ik,is}^{(1)}+z\beta H_{ik,i1}^{(4)}-\beta H_{ik,e1}^{(4)}+g_{e2}^{(2)}H_{ik,e2}^{(2)}=\frac{3}{2}n_i z\beta\lambda_T^{(4)}\delta_{k1}. \tag{4.61}$$

Для $k=0,1$ рівняння (4.61) з урахуванням (4.59) дає тотожності; $k\geq 2$ дає розв'язок цього рівняння для функції $A_i^{(3)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)$. Для простоти отримаємо розв'язок у наближенні одного полінома:

$$g_{i2}^{(3)}=\frac{\beta H_{i2,e1}^{(4)}-z\beta H_{i2,i1}^{(4)}-g_{e2}^{(2)}H_{i2,e2}^{(2)}}{H_{i2,i2}^{(1)}}=2^{3/2}\left(1+z^{-1}\right)\beta\sigma^3. \tag{4.62}$$

Тож маємо

$$A_i^{(3)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=2^{3/2}\left(1+z^{-1}\right)\beta\sigma^3 S_2^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right). \tag{4.63}$$

Отриманий результат (4.63) є поправкою до результату НЛР для функції $A_i\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)$ у порядку σ^3.

Перше рівняння з (4.58) дає змогу отримати $A_e^{(4)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$, проте обмежимось обчисленням головною за σ поправкою до результатів НЛР. Тож остаточно для температурної частини маємо такий результат:

$$\begin{gathered}
A_e\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=-\beta S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+3\sqrt{2}z(z+1)\beta\sigma^2 S_2^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+O\left(\sigma^4\right),\\
A_i\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=z\beta S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)+2^{3/2}\left(1+z^{-1}\right)\beta\sigma^3 S_2^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)+O\left(\sigma^4\right),\\
\lambda_T=2^{5/2}\left(\frac{2}{3}-\sigma^2-3\sqrt{2}z\sigma^2\right)z^2(z+1)\frac{ne^4L\sqrt{\pi}}{m_e^{1/2}T^{3/2}}\sigma^2+O\left(\sigma^5\right).
\end{gathered} \tag{4.64}$$

Основний порядок за σ у ФР та λ_T є результатом НЛР [4, 16, 77], проте отримано поправки до результатів НЛР для ФР. Щодо результату для λ_T у порядку σ^4, то його частина, яка отримується на основі НЛР, збігається з відомими результатами [77], проте суттєвий внесок у $\lambda_T^{(4)}$ дає поправка $A_e^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$. Зауважимо також, що фактично НЛР є наближенням одного полінома Соніна та повністю визначається додатковими умовами. Така ситуація має місце не лише у фізиці плазми (див., наприклад, [8]).

4.2.2. Швидкісна частина

У цьому пункті обчислюються $B_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)$ та λ_u у теорії збурень за σ на основі рівнянь (4.25) та (4.28).

У порядку σ^{-1} друге рівняння з (4.28) має такий вигляд:

$$\lambda_u^{(0)} p_n B_i^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0, \tag{4.65}$$

електронне ж рівняння в порядку σ^{-1} є тотожністю. Тут та в подальшому в цьому підрозділі індекс у круглих дужках зверху означатиме порядок за σ. Як відомо [16], $\lambda_u^{(0)} \neq 0$, тому рівняння (4.65) дасть

$$B_i^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0. \tag{4.66}$$

У порядку σ^0 друге рівняння з (4.28) з урахуванням вищеотриманих результатів має вигляд:

$$\left(\hat{K}_{ee} p_n\right)^{(0)} B_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\lambda_u^{(0)} p_n B_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right),\ \ \lambda_u^{(0)} p_n B_i^{(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0. \tag{4.67}$$

Друге рівняння з (4.67) відразу дає

$$B_i^{(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0. \tag{4.68}$$

Розв’язок першого рівняння з (4.67) шукаємо у вигляді розвинення за поліномами Соніна:

$$B_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\sum_s h_{es}^{(0)} S_s^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right). \tag{4.69}$$

Для простоти шукаємо розв’язок у наближенні одного полінома. У цьому наближенні $B_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$ повністю задається додатковими умовами (4.30), які визначають коефіцієнт при нульовому поліномі:

$$h_{e1}^{(0)}=\beta,\ B_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\beta. \tag{4.70}$$

Зауважимо, що отримана величина $B_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$ збігається з результатом НЛР, проте НЛР дає лише головний порядок функції $B_e\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$ за σ. У цій роботі отримано поправки до цього результату в більш високих порядках за σ (див. нижче). Перше рівняння з (4.67) має такий матричний вигляд:

$$\begin{gathered}\sum_{s\geq 0} h_{es}^{(0)} G_{ek,es}^{(0)}=\lambda_u^{(0)}\frac{4n_e}{\sqrt{\pi}}\frac{m_e T}{k!}\Gamma\left(k+\frac{5}{2}\right)h_{ek}^{(0)},\\ G_{ak,bs}\equiv\left\{p_l S_k^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right), p_l S_s^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{bp}\right)\right\}_{ab},\end{gathered} \tag{4.71}$$

на основі чого маємо в наближенні одного полінома

$$\lambda_u^{(0)}=\frac{1}{3n_e m_e T}G_{e0,e0}^{(0)}=\frac{2^{5/2}}{3}z^2\frac{ne^4 L\sqrt{\pi}}{m_e^{1/2}T^{3/2}}. \tag{4.72}$$

Як бачимо, результат (4.72) отримано на основі НЛР та він збігається з відомим результатом [16]. Проте в роботі отримано поправки до λ_u в більш високих порядках за σ (див. нижче).

У першому порядку за σ з урахуванням вищеотриманих результатів друге рівняння з (4.28) має вигляд:

$$\begin{gathered}\lambda_u^{(1)} p_n B_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+\lambda_u^{(0)} p_n B_e^{(1)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\left(\hat{K}_{ee} p_n\right)^{(0)} B_e^{(1)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right), \\ \lambda_u^{(0)} p_n B_i^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=\left(\hat{K}_{ie} p_s\right)^{(1)} B_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right).\end{gathered} \tag{4.73}$$

З другого рівняння у (4.73), використавши явний вигляд оператора $\left(\hat{K}_{ie} p_s\right)^{(1)}$ та (4.70), маємо точний розв’язок:

$$B_i^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=-z\beta\sigma^2. \tag{4.74}$$

Результат (4.74) є точним розв’язком у рамках НЛР. Він збігається з [16] та чудово узгоджується з додатковими умовами (4.30). Зауважимо, однак, що в цій роботі отримано корекції до цього результату в більш високому порядку за σ (див. нижче). Розв’язок першого рівняння з (4.73) шукаємо у вигляді розвинення за поліномами Соніна:

$$B_e^{(1)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\sum_s h_{es}^{(1)} S_s^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right). \tag{4.75}$$

У матричній формі перше рівняння з (4.73) має вигляд

$$\lambda_u^{(1)} \frac{4n_e m_e}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\delta_{k0}=\sum_{s\geq1} h_{es}^{(1)}\left(G_{ek,es}^{(0)}-\lambda_u^{(0)}\frac{4n_e m_e T}{\sqrt{\pi}s!}\Gamma\left(s+\frac{5}{2}\right)\delta_{ks}\right), \tag{4.76}$$

сума в правій частині рівняння (4.76) починається з 1, тому що $h_{es}^{(0)}$ зануляється додатковими умовами (4.30). $k=0$ у (4.76) дає такий вираз:

$$3n_e m_e \lambda_u^{(1)}=\sum_{s\geq1} h_{es}^{(1)} G_{e0,es}^{(0)} \tag{4.77}$$

(зазначимо, що $G_{e0,es}^{(0)}\neq0$), а $k\geq1$ у (4.76) дає таку систему рівнянь:

$$\sum_{s\geq1} h_{es}^{(1)}\left(G_{ek,es}^{(0)}-\lambda_u^{(0)}\frac{4n_e m_e T}{\sqrt{\pi}s!}\Gamma\left(s+\frac{5}{2}\right)\delta_{ks}\right)=0, \tag{4.78}$$

яка, очевидно, має тривіальний розв’язок. Тому з урахуванням (4.77) маємо

$$\lambda_u^{(1)}=0,\quad B_e^{(1)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=0. \tag{4.79}$$

У другому порядку за σ з урахуванням вищеотриманих результатів друге рівняння з (4.28) має вигляд:

$$\begin{gathered}\left(\hat{K}_{ee} p_n\right)^{(0)} B_e^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+\left(\hat{K}_{ee} p_n\right)^{(2)} B_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+\left(\hat{K}_{ei} p_n\right)^{(2)} B_i^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)= \\ =\lambda_u^{(0)} p_n B_e^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+\lambda_u^{(2)} p_n B_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right),\end{gathered} \tag{4.80}$$

$$\lambda_u^{(0)} p_n B_i^{(3)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = \left(\hat{K}_{ii} p_n\right)^{(0)} B_i^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right).$$

Друге рівняння в (4.80) з урахуванням явного вигляду оператора $\left(\hat{K}_{ii} p_n\right)^{(0)}$ відразу дає

$$B_i^{(3)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = 0. \tag{4.81}$$

Розв’язок першого рівняння в (4.80) шукаємо у вигляді розвинення за поліномами Соніна:

$$B_e^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) = \sum_s h_{es}^{(2)} S_s^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right). \tag{4.82}$$

У матричному вигляді перше рівняння з (4.80) записується як

$$\begin{gathered}\sum_{s\geq 1} h_{es}^{(2)}\left(G_{ek,es}^{(0)} - \lambda_u^{(0)}\frac{4n_e m_e T}{\sqrt{\pi}s!}\Gamma\left(s+\frac{5}{2}\right)\delta_{ks}\right) + \beta G_{ek,e0}^{(2)} - z\beta\sigma^2 G_{ek,i0}^{(0)} = \\ = \lambda_u^{(2)} 3n_e m_e \delta_{k0}.\end{gathered} \tag{4.83}$$

Сума в лівій частині (4.83) починається з 1, тому що додаткові умови (4.30) занулять $h_{es}^{(2)}$. $k=0$ у (4.83) дає

$$\sum_{s\geq 1} h_{es}^{(2)} G_{e0,es}^{(0)} + \beta G_{e0,e0}^{(2)} - z\beta\sigma^2 G_{e0,i0}^{(0)} = \lambda_u^{(2)} 3n_e m_e, \tag{4.84}$$

а $k \geq 1$ у (4.83) дає таку систему рівнянь:

$$\sum_{s\geq 1} h_{es}^{(2)}\left(G_{ek,es}^{(0)} - \lambda_u^{(0)}\frac{4n_e m_e T}{\sqrt{\pi}s!}\Gamma\left(s+\frac{5}{2}\right)\delta_{ks}\right) + \beta G_{ek,e0}^{(2)} - z\beta\sigma^2 G_{ek,i0}^{(0)} = 0, \tag{4.85}$$

з якої можна отримати $B_e^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$. Для простоти отримаємо цю функцію в наближенні одного полінома:

$$\begin{gathered}h_{e1}^{(2)} = \left(z\beta\sigma^2 G_{e1,i0}^{(0)} - \beta G_{e1,e0}^{(2)}\right)\left(G_{e1,e1}^{(0)} - \frac{15}{2}\lambda_u^{(0)} n_e m_e T\right)^{-1} = -\frac{3z(2z-1)}{3z+4\sqrt{2}}\beta\sigma^2, \\ B_e^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) = -\frac{3z(2z-1)}{3z+4\sqrt{2}}\beta\sigma^2 S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right).\end{gathered} \tag{4.86}$$

Отримана функція (4.86) – це поправка більш високого порядку за σ до результату для $B_e\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$ в рамках НЛР. На основі (4.86) з (4.85) отримаємо

$$\begin{gathered}\lambda_u^{(2)} = \frac{1}{3n_e m_e}\left(h_{e1}^{(2)} G_{e0,e1}^{(0)} + \beta G_{e0,e0}^{(2)} - z\beta\sigma^2 G_{e0,i0}^{(0)}\right) = \\ = \left(\frac{4z-2}{3} - 6z\frac{2z-1}{3z+4\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{2\pi} n_i z^2 e^4 L}{m_e^{1/2} T^{3/2}}\sigma^2.\end{gathered} \tag{4.87}$$

Перший член у (4.87) отримується на основі НЛР, а другий є наслідком урахування поправки (4.86) до НЛР. Як бачимо, урахування цієї поправки суттєво змінює λ_u у другому порядку за σ.

У порядку σ^3 друге рівняння з (4.28) має з урахуванням вищеотриманих результатів такий вигляд:

$$\begin{gathered}\left(\hat{K}_{ee}p_n\right)^{(0)}B_e^{(3)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\lambda_u^{(3)}p_nB_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+\lambda_u^{(0)}p_nB_e^{(3)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right),\\ \left(\hat{K}_{ii}p_n\right)^{(1)}B_i^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)+\left(\hat{K}_{ie}p_n\right)^{(3)}B_e^{(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+\left(\hat{K}_{ie}p_n\right)^{(1)}B_e^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\\ =\lambda_u^{(0)}p_nB_i^{(4)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+\lambda_u^{(2)}p_nB_i^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right).\end{gathered} \tag{4.88}$$

Перше рівняння з (4.88) розв'язується аналогічно першому рівнянню з (4.73), що дає:

$$\lambda_u^{(3)}=0\,,\quad B_e^{(3)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=0\,. \tag{4.89}$$

Шукаємо розв'язок другого рівняння з (4.88) у вигляді

$$B_i^{(4)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=\sum_s h_{is}^{(4)}S_s^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right). \tag{4.90}$$

Друге рівняння з (4.88) з урахуванням (4.89) має такий матричний вигляд:

$$-z\beta\sigma^2G_{ik,i0}^{(0)}+\beta G_{ik,e0}^{(2)}+h_{e1}^{(2)}G_{ik,e1}^{(0)}=\lambda_u^{(0)}\frac{4n_i\,m_iT}{\sqrt{\pi}k!}\Gamma\left(k+\frac{5}{2}\right)h_{ik}^{(4)}-\lambda_u^{(2)}3n_i\,m_e z\delta_{k0}\,. \tag{4.91}$$

При $k=0$ рівняння (4.91) стає тотожністю (див. (4.87) та (4.30)). При $k\geq 1$ з нього можна отримати розв'язок для $B_i^{(4)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)$. Для простоти знайдемо розв'язок у наближенні одного полінома:

$$h_{i1}^{(4)}=\frac{2}{15n_i\,m_eT\lambda_u^{(0)}}\left(-z\beta\sigma^2G_{i1,i0}^{(0)}+\beta G_{i1,e0}^{(2)}+h_{e1}^{(2)}G_{i1,e1}^{(0)}\right)\sigma^2=-\frac{3}{5}z\beta\sigma^4\,. \tag{4.92}$$

Тож маємо

$$B_i^{(4)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=-\frac{3}{5}z\beta\sigma^4S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right). \tag{4.93}$$

Результат (4.93) є поправкою більш високого порядку за σ до результату для $B_i\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)$ у рамках НЛР.

Розглядаючи друге рівняння в (4.28) у більш високих порядках за σ, можемо отримувати поправки ще більш високих порядків, проте обмежимось головною за σ поправкою до результатів НЛР для $B_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)$ та λ_u. Остаточно випишемо результат для швидкісної частини:

$$B_e\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\beta-\frac{3z\left(2z-1\right)}{3z+4\sqrt{2}}\beta\sigma^2S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+O\left(\sigma^4\right), \tag{4.94}$$

$$B_i\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=-z\beta\sigma^2-\frac{3}{5}z\beta\sigma^4S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)+O\left(\sigma^5\right),$$

$$\lambda_u=\left(\frac{4}{3}+\frac{4z-2}{3}\sigma^2-6z\frac{2z-1}{3z+4\sqrt{2}}\sigma^2\right)\frac{\sqrt{2\pi}n_iz^2e^4L}{m_e^{1/2}T^{3/2}}+O\left(\sigma^4\right).$$

У головному порядку за σ ці величини задаються НЛР, проте до НЛР знайдено поправки. Другий член у виразі для λ_u – це поправка порядку σ^2 в рамках НЛР, а третій член є наслідком урахування поправки другого порядку за σ до $B_e\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$. Як бачимо, він суттєво змінює $\lambda_u^{(2)}$.

Наприкінці підрозділу, присвяченому лінійній теорії релаксації для просторово-однорідної плазми, зазначимо, що результати (4.64) та (4.94) наведено з урахуванням електронейтральності плазми. Для просторово-однорідного випадку це зручно, тому що густини числа частинок компонент просто є рівноважними константами. Проте в подальших розділах монографії буде вивчатись просторово-неоднорідний випадок, і для нього твердження, що в кожній точці простору $n_e\left(x,t\right)=zn_i\left(x,t\right)$, не є вірним. При лінеаризації теорії біля рівноважних значень ПСО $n_e=zn_i$ виконується для рівноважних значень густин, але не для відхилень густин від рівноважних значень. Тому наведемо результати (4.64) та (4.94) без урахування електронейтральності:

$$A_e\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=-\beta S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+\left(1+\frac{n_i}{n_e}\right)3\sqrt{2}z^2\beta\sigma^2S_2^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+O\left(\sigma^4\right),$$

$$A_i\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=\frac{n_e}{n_i}\beta S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)+\frac{2^{3/2}}{z^2}\left(\frac{n_e}{n_i}+1\right)\frac{n_e}{n_i}\beta\sigma^3S_2^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)+O\left(\sigma^4\right),$$

$$\lambda_T=\left(\frac{2}{3}\left(n_i+n_e\right)-n_i\left(1+\frac{n_e}{n_i}+\left(1+\frac{n_i}{n_e}\right)3\sqrt{2}z^2\right)\sigma^2\right)\frac{2^{5/2}\sqrt{\pi}z^2e^4L\sigma^2}{m_e^{1/2}T^{3/2}}+O\left(\sigma^5\right),$$

$$B_e\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\beta-\frac{6n_e-3n_i}{4\sqrt{2}n_e+3z^2n_i}z^2\beta\sigma^2S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+O\left(\sigma^4\right),\tag{4.95}$$

$$B_i\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=-\frac{n_e}{n_i}\beta\sigma^2-\frac{3n_e}{5n_i}\beta\sigma^4S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)+O\left(\sigma^5\right),$$

$$\lambda_u=\frac{2^{3/2}\pi^{1/2}n_iz^2e^4L}{3m_e^{1/2}T^{3/2}}\left[2+\left(2\frac{n_e}{n_i}-1-9z^2\frac{2n_e-n_i}{4\sqrt{2}n_e+3z^2n_i}\right)\sigma^2\right]+O\left(\sigma^4\right).$$

У такому вигляді вони зручні для дослідження впливу релаксації на гідродинамічні процеси.

4.3. Квадратична теорія релаксації

У попередньому підрозділі були отримані поправки більш високого порядку за σ до відомих результатів НЛР. Вони були отримані в рамках лінійної теорії релаксації, тобто в першому порядку малості за μ. З рівнянь (4.29) бачимо, що оскільки відхилення u_n, τ згасають з часом, то з деякого часу саме лінійний порядок за μ дасть основний внесок до ФРК та до швидкості релаксації. Саме лінійній теорії релаксації й присвячені роботи попередників. Тим не менш, на деякому етапі еволюції системи поправки до НЛР більш високого порядку за σ в рамках лінійної теорії релаксації можуть бути порівняні з поправками з квадратичної теорії релаксації (тобто в порядку малості μ^2), проте отриманими в головному порядку за σ. Тому дослідження квадратичної теорії релаксації є важливим та актуальним.

ФРК в рамках квадратичної теорії релаксації шукаємо у вигляді

$$f_{ap}^{(2)} = w_{ap}\left(A_a^{\tau\tau}(p)\tau^2 + A_{an}^{\tau u}(p)\tau u_n + A_{anl}^{uu}(p)u_n u_l\right), \tag{4.96}$$

де верхній індекс у дужках означає порядок по μ. З міркувань обертальної інваріантності випливає, що частини функції розподілу у (4.96) мають вигляд:

$$A_a^{\tau\tau}(p) = A_a^{\tau\tau}(\beta\varepsilon_{ap}),\ A_{an}^{\tau u}(p) = p_n A_a^{\tau u}(\beta\varepsilon_{ap}),$$

$$A_{anl}^{uu}(p) = A_{a\delta}^{uu}(\beta\varepsilon_{ap})\delta_{nl} + A_{aTr}^{uu}(\beta\varepsilon_{ap})h_{nlp},\ h_{nlp} \equiv p_n p_l - \frac{1}{3}p^2\delta_{nl}. \tag{4.97}$$

Зауважимо, що для тензора другого рангу використовується розкладання на незвідні тензори [130].

Перш ніж проводити обчислення функцій (4.96) та квадратичних за μ внесків до часових рівнянь для ПСО, наведемо результат НЛР для $f_{ap}^{(2)}$. Цей результат отримується розвиненням ФРК (4.20) у ряд Тейлора за малими відхиленнями u_n, τ:

$$\begin{gathered} A_e^{\tau\tau}(\beta\varepsilon_{ep}) = \beta^2 S_2^{1/2}(\beta\varepsilon_{ep}),\ A_i^{\tau\tau}(\beta\varepsilon_{ip}) = z^2\beta^2 S_2^{1/2}(\beta\varepsilon_{ip}), \\ A_e^{\tau u}(\beta\varepsilon_{ep}) = -\beta^2 S_1^{3/2}(\beta\varepsilon_{ep}),\ A_i^{\tau u}(\beta\varepsilon_{ip}) = -z^2\beta^2\sigma^2 S_1^{3/2}(\beta\varepsilon_{ip}), \\ A_{e\delta}^{uu}(\beta\varepsilon_{ep}) = -\frac{1}{3}m_e\beta S_1^{1/2}(\beta\varepsilon_{ep}),\ A_{eTr}^{uu}(\beta\varepsilon_{ep}) = \frac{\beta^2}{2}, \\ A_{i\delta}^{uu}(\beta\varepsilon_{ip}) = \frac{z}{3}m_e\beta S_1^{1/2}(\beta\varepsilon_{ip}),\ A_{iTr}^{uu}(\beta\varepsilon_{ip}) = \frac{z^2\beta^2\sigma^4}{2}. \end{gathered} \tag{4.98}$$

Функції (4.96) обчислюються за вищенаведеним алгоритмом. Спочатку треба отримати точні інтегральні рівняння на кожну з функцій (4.97) на основі рівнянь (4.14) та (4.15). Як бачимо, для цього необхідно мати вирази для часових рівнянь для ПСО в порядку μ^2. На основі (4.3), (4.7) та (4.15) отримаємо

$$L_n^{(2)} = \frac{G_{nl}^{u\tau}}{m_e n_e}\tau u_n, \quad L_0^{(2)} = \frac{2}{3n_e}G^{\tau\tau}\tau^2 + \frac{2}{3n_e}G_{nl}^{uu}u_n u_l + \frac{2m_e}{3}\lambda_u u^2, \tag{4.99}$$

де коефіцієнти $G_{nl}^{u\tau}$, $G^{\tau\tau}$ та G_{nl}^{uu} виражаються в термінах ФРК:

$$G_{nl}^{u\tau} = 2\pi e^2 L\sum_c e_c^2\left(V_{ecl}\left(1, A_n^{u\tau}(p)\right) + V_{ecl}\left(A(p), B_n(p)\right)\right),$$

$$G^{\tau\tau} = 2\pi e^2 L\sum_c e_c^2\left(W_{ec}\left(1, A^{\tau\tau}(p)\right) + \frac{1}{2}W_{ec}\left(A(p), A(p)\right)\right),$$

$$G_{nl}^{uu} = 2\pi e^2 L\sum_c e_c^2\left(W_{ec}\left(1, A_{nl}^{uu}(p)\right) + \frac{1}{2}W_{ec}\left(B_n(p), B_l(p)\right)\right);$$

$$\Theta_{aclp}\left(h_p, g_p\right) \equiv \int d^3p' w_{ap} w_{cp'}\left(h_{ap}\frac{\partial g_{cp'}}{\partial p'_k} - h_{cp'}\frac{\partial g_{ap}}{\partial p_k} + g_{ap}\frac{\partial h_{cp'}}{\partial p'_k} - g_{cp'}\frac{\partial h_{ap}}{\partial p_k}\right)\times \tag{4.100}$$

$$\times D_{lk}\left(\frac{p}{m_a} - \frac{p'}{m_c}\right), \quad V_{acl}\left(h_p, g_p\right) \equiv \int d^3p\,\Theta_{aclp}\left(h_p, g_p\right),$$

$$W_{ac}\left(h_p, g_p\right) \equiv \int d^3p\,\frac{p_l}{m_a}\Theta_{aclp}\left(h_p, g_p\right).$$

З урахуванням цих результатів можна отримати точні інтегральні рівняння відносно функцій (4.96):

$$\frac{2}{3n_e}A_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)G^{\tau\tau} - 2\lambda_T A_a^{\tau\tau}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right) = -\sum_c \hat{K}_{ac}A_c^{\tau\tau}\left(\beta\varepsilon_{cp}\right) -$$

$$-\pi e_a^2 L w_{ap}^{-1}\sum_c e_c^2\frac{\partial\Theta_{acnp}\left(A(p), A(p)\right)}{\partial p_n},$$

$$\frac{1}{m_e n_e}B_{an}(p)G_{ln}^{u\tau} - \left(\lambda_u + \lambda_T\right)A_{al}^{u\tau}(p) = -\sum_c \hat{K}_{ac}A_{cl}^{u\tau}(p) -$$

$$-2\pi e_a^2 L w_{ap}^{-1}\sum_c e_c^2\frac{\partial}{\partial p_n}\Theta_{acnp}\left(A(p), B_l(p)\right), \tag{4.101}$$

$$-2\lambda_u A_{anl}^{uu}(p) + A_a(p)\left(\frac{2G_{nl}^{uu}}{3n_e} + \frac{2}{3}m_e\lambda_u\delta_{nl}\right) = -\sum_c \hat{K}_{ac}A_{cnl}^{uu}(p) -$$

$$-\pi e_a^2 L w_{ap}^{-1}\sum_c e_c^2\frac{\partial}{\partial p_m}\Theta_{acmp}\left(B_n(p), B_l(p)\right)$$

де $A_a(p)$ та $B_{an}(p)$ – отримані вище ФРК (4.21) у рамках лінійної теорії релаксації, які містять поправки до НЛР більш високого порядку за σ; оператор Θ_{acnp}

визначено в (4.100). Як бачимо, рівняння (4.99)–(4.101) містять поправки до НЛР, отримані у попередньому підрозділі, і хоча у цьому підрозділі ми отримаємо лише головний за σ порядок ФРК (4.96) та часових рівнянь для ПСО (4.99), ці поправки принципово дають змогу отримати ці величини не лише в головному, але й у більш високих порядках за σ.

Додаткові умови (4.4) в рамках квадратичної теорії релаксації набудуть вигляду

$$\int d^3 p w_{ap} A_a^{\tau\tau}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)=0, \quad \int d^3 p w_{ap} A_a^{\tau\tau}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)\varepsilon_{ap}=0,$$

$$\int d^3 p w_{ap} p_n p_l A_a^{u\tau}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)=0, \tag{4.102}$$

$$\int d^3 p w_{ap} A_{a\delta}^{uu}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)=0, \quad \frac{m_e n_e}{2}\left(\delta_{ae}-\delta_{ai}\right)=\int d^3 p w_{ap} A_{a\delta}^{uu}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)\varepsilon_{ap}.$$

Зауважимо, що додаткові умови для функції $A_{aTr}^{uu}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)$ виконуються автоматично. У подальших пунктах цього підрозділу ФРК (4.96) отримуються в теорії збурень за σ.

4.3.1. Функції при τ^2

Цей пункт присвячено пошуку функцій $A_a^{\tau\tau}\left(p\right)$ у теорії збурень за σ на основі отриманих для них точних інтегральних рівнянь (4.101).

Перше рівняння з (4.101) у порядку σ^0 має для $a=e$ такий вигляд:

$$w_{ep}\hat{K}_{ee}^{(0)} A_e^{\tau\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=$$

$$=-2\pi e^4 L\beta^3 \frac{\partial}{\partial p_n}\int d^3 p' w_{ep} w_{ep'}\left\{S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep'}\right)p_k - S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)p'_k\right\}D_{nk}\left(p-p'\right), \tag{4.103}$$

для $a=i$ воно є тотожністю $0=0$. Тут і надалі верхній індекс в круглих дужках означає порядок за σ. При виведенні (4.103) використовується явний вигляд результатів (4.64) та факт

$$G^{\tau\tau(0)}=0, \tag{4.104}$$

який можна отримати на основі (4.64) та (4.97). Як бачимо, рівняння (4.103) є рівнянням Фредгольма першого роду, тому що права його частина – відома функція, а ліва має вигляд ліанеризованного оператора зіткнень, який діє на невідому функцію. Розв’язок рівняння (4.103) шукаємо у вигляді

$$A_e^{\tau\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\sum_{s\geq 2} g_{es}^{\tau\tau(0)} S_s^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right). \tag{4.105}$$

Сума у (4.105) починається з 2, тому що додаткові умови (4.102) занулять коефіцієнти при першому та нульовому поліномах. Рівняння (4.103) має матричний вигляд:

$$\sum_s g_{es}^{\tau\tau(2)} H_{ek,es}^{(0)} = \pi e^4 L\beta^3 \int d^3 p d^3 p' w_{ep} w_{ep'} \left(\frac{\partial S_k^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)}{\partial p_n} - \frac{\partial S_k^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep'}\right)}{\partial p'_n} \right) \times$$
$$\times \left\{ S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep'}\right) p_l - S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) p'_l \right\} D_{nl}\left(p - p'\right). \tag{4.106}$$

Для простоти знайдемо $A_e^{\tau\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$ у наближенні одного полінома. Для $k = 0{,}1$ рівняння (4.106) є тотожністю внаслідок (4.39). Для $k = 2$ маємо:

$$g_{e2}^{\tau\tau(2)} = \frac{\pi e^4 L\beta^3}{H_{e2,e2}^{(0)}} \int d^3 p d^3 p' w_{ep} w_{ep'} \left(\frac{\partial S_2^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)}{\partial p_n} - \frac{\partial S_2^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep'}\right)}{\partial p'_n} \right) \times$$
$$\times \left\{ S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep'}\right) p_l - S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) p'_l \right\} D_{nl}\left(p - p'\right) = \beta^2, \tag{4.107}$$

звідки

$$A_e^{\tau\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) = \beta^2 S_2^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right). \tag{4.108}$$

Як бачимо, в наближенні одного полінома $A_e^{\tau\tau}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$ у головному порядку за σ задається НЛР, проте до цього результату можна отримувати поправки в більш великому числі поліномів та в більш високих порядках за σ.

У першому порядку за σ для $a = i$ перше рівняння у (4.101) з урахуванням отриманих вище результатів набуде вигляду:

$$-2\pi z^4 e^4 L\beta^3 z^2 \frac{\partial}{\partial p_n} \int d^3 p' w_{ip} w_{ip'} \left\{ S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip'}\right) p_k - S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) p'_k \right\} D_{nk}\left(p - p'\right) =$$
$$= w_{ip} \hat{K}_{ii}^{(1)} A_i^{\tau\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right). \tag{4.109}$$

Рівняння (4.109) є рівнянням Фредгольма першого роду для функції $A_i^{\tau\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)$. Перше рівняння в (4.101) в порядку σ^1 для $a = e$ дозволяє отримати $A_a^{\tau\tau}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)$ у більш високих порядках за σ, проте обмежимось головним порядком. Зауважимо, що при виведенні (4.109) враховується

$$G^{\tau\tau(1)} = 0, \tag{4.110}$$

цей факт можна отримати на основі (4.100). Шукаємо розв'язок рівняння (4.109) у вигляді розвинення за поліномами Соніна:

$$A_i^{\tau\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = \sum_{s\geq 2} g_{is}^{\tau\tau(0)} S_s^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right). \tag{4.111}$$

Сума в (4.111) починається з 2, тому що додаткові умови (4.102) занулять перші два коефіцієнти в розвинені. Матричний вигляд рівняння (4.109):

$$\pi z^4 e^4 L\beta^3 z^2 \int d^3 p d^3 p' \left(\frac{\partial S_k^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)}{\partial p_n} - \frac{\partial S_k^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep'}\right)}{\partial p'_n} \right) w_{ip} w_{ip'} \times$$
$$\times \left\{ S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip'}\right) p_l - S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) p'_l \right\} D_{nl}\left(p - p'\right) = \sum_{s\geq 2} g_{is}^{\tau\tau(0)} H_{ik,is}^{(1)} . \tag{4.112}$$

Для простоти знайдемо розв'язок у наближенні одного полінома. Для $k = 0{,}1$ рівняння є тотожністю внаслідок (4.46). Для $k = 2$ маємо:

$$g_{i2}^{\tau\tau(0)} = \frac{\pi z^4 e^4 L\beta^3 z^2}{H_{i2,i2}^{(1)}} \int d^3 p d^3 p' \left(\frac{\partial S_k^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)}{\partial p_n} - \frac{\partial S_k^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep'}\right)}{\partial p'_n} \right) w_{ip} w_{ip'} \times$$
$$\times \left\{ S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip'}\right) p_l - S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) p'_l \right\} D_{nl}\left(p - p'\right) = z^2\beta^2 . \tag{4.113}$$

Тож маємо

$$A_i^{\tau\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = z^2\beta^2 S_2^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right). \tag{4.114}$$

Як бачимо, в головному порядку за σ в наближенні одного полінома функція $A_i^{\tau\tau}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)$ задається НЛР, хоча до цього результату можна шукати поправки в більш високих порядках за σ та в більш великій кількості поліномів.

Тож для функцій $A_a^{\tau\tau}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)$ маємо

$$A_e^{\tau\tau}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) = \beta^2 S_2^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) + O(\sigma),\ A_i^{\tau\tau}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = z^2\beta^2 S_2^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) + O(\sigma). \tag{4.115}$$

Обидві ці функції отримано в наближенні одного полінома, в такому наближенні вони збігаються з НЛР.

4.3.2. Функції при τu_n.

Цей підрозділ присвячено отриманню функцій $A_a^{u\tau}\left(p\right)$ у теорії збурень за σ на основі точних інтегральних рівнянь (4.101).

Друге рівняння в (4.101) в порядку σ^{-1} для $a = e$ є тотожністю, а для $a = i$ має вигляд:

$$w_{ip}\lambda_u^{(0)} p_l A_i^{u\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = 0, \tag{4.116}$$

звідки

$$A_i^{u\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = 0. \tag{4.117}$$

У порядку σ^0 друге рівняння з (4.101) дає:

$$w_{ep}p_n\frac{G_{nl}^{u\tau(0)}}{m_e n_e T}+w_{ep}\lambda_u^{(0)}p_l A_e^{u\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=w_{ep}\left(\hat{K}_{ee}p_l\right)^{(0)}A_e^{u\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+$$

$$+2\pi e^4 Lm_e\frac{\partial}{\partial p_n}\int d^3p'w_{ep}w_{ep'}\left\{\frac{p'_m p_l-p_m p'_l}{m_e T^3}+\frac{\delta_{ml}}{T^2}\left(S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep'}\right)-S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)\right)\right\}\times \tag{4.118}$$

$$\times D_{nm}\left(p-p'\right),\quad w_{ip}\lambda_u^{(0)}p_l A_i^{u\tau(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0\,.$$

Друге рівняння з (4.118) одразу дає

$$A_i^{u\tau(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0\,. \tag{4.119}$$

Розв’язок першого рівняння в (4.118) шукаємо у вигляді розвинення за поліномами Соніна:

$$A_e^{u\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\sum_{s\geq 1}g_{es}^{u\tau(0)}S_s^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right). \tag{4.120}$$

Сума в (4.120) починається з 1, тому що додаткові умови (4.102) занулять коефіцієнт при нульовому поліномі. Матричний вигляд першого рівняння з (4.118):

$$G_{nn}^{u\tau(0)}\delta_{k0}+\frac{4n_e m_e T\lambda_u^{(0)}}{\sqrt{\pi}k!}\Gamma\left(k+\frac{5}{2}\right)g_{ek}^{u\tau(0)}=\sum_{s\geq 1}g_{es}^{u\tau(0)}G_{ek,es}^{(0)}-$$

$$-\pi e^4 Lm_e\int d^3p\,d^3p'\left(\frac{\partial S_k^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)p_l}{\partial p_n}-\frac{\partial S_k^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep'}\right)p'_l}{\partial p'_n}\right)w_{ep}w_{ep'}\times \tag{4.121}$$

$$\times\left\{\frac{p'_m p_l-p_m p'_l}{m_e T^3}+\frac{\delta_{ml}}{T^2}\left(S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep'}\right)-S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)\right)\right\}D_{nm}\left(p-p'\right).$$

Для $k=0$ рівняння (4.121) має вигляд

$$G_{nn}^{u\tau(0)}=\sum_{s\geq 1}g_{es}^{u\tau(0)}G_{e0,es}^{(0)}, \tag{4.122}$$

що є тотожністю, тому що такий саме вираз можна отримати на основі (4.120) та (4.100). Це свідчить про те, що процедура обчислення не є суперечливою. Для простоти отримаємо розв’язок рівняння (4.121) у наближенні одного полінома. При $k=1$ маємо з (4.121):

$$\frac{15}{2}n_e m_e T\lambda_u^{(0)}g_{e1}^{u\tau(0)}=g_{e1}^{u\tau(0)}G_{e1,e1}^{(0)}-$$

$$-\pi e^4 Lm_e\int d^3p\,d^3p'\left(\frac{\partial S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)p_l}{\partial p_n}-\frac{\partial S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep'}\right)p'_l}{\partial p'_n}\right)w_{ep}w_{ep'}\times \tag{4.123}$$

$$\times\left\{\frac{p'_m p_l - p_m p'_l}{m_e T^3} + \frac{\delta_{ml}}{T^2}\left(S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep'}\right) - S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)\right)\right\} D_{nm}\left(p - p'\right).$$

звідки

$$g_{e1}^{u\tau(0)} = -\frac{\beta^2}{1 + \dfrac{3z}{4\sqrt{2}}}. \tag{4.124}$$

Тож у наближенні одного полінома маємо

$$A_e^{u\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) = -\frac{\beta^2}{1 + \dfrac{3z}{4\sqrt{2}}} S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right). \tag{4.125}$$

Як бачимо, функція $A_e^{u\tau}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$ не задається НЛР навіть у наближенні одного полінома в головному порядку за σ. Від результату НЛР результат (4.125) відрізняється наявністю другого доданку в знаменнику. Отриманий результат (4.125) є дуже важливим: він показує, що НЛР не є розв’язком кінетичного рівняння в рамках квадратичної теорії релаксації навіть у головному порядку за σ та в наближенні одного полінома.

У порядку σ^1 для $a = i$ друге рівняння з (4.101) після нескладних перетворень, які пов’язані з використанням явного вигляду оператора Θ_{acnp} та виразу (4.125), набуває вигляду

$$\lambda_u^{(0)} p_l A_i^{u\tau(2)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{z^2 e^4 L n_e^2 \sigma^2}{n_i \sqrt{m_e T}} \beta^3 p_l S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right), \tag{4.126}$$

звідки отримаємо такий точний розв’язок:

$$A_i^{u\tau(2)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = -z^2 \beta^2 \sigma^2 S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right). \tag{4.127}$$

Результат (4.127) збігається з НЛР.

Тож для функцій $A_{al}^{u\tau}\left(p\right)$ маємо

$$\begin{gathered} A_{el}^{u\tau}\left(p\right) = -\frac{4\sqrt{2}\beta^2}{4\sqrt{2} + 3z} p_l S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) + O\left(\sigma\right), \\ A_{il}^{u\tau}\left(p\right) = -z^2 \beta^2 \sigma^2 p_l S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) + O\left(\sigma^2\right). \end{gathered} \tag{4.128}$$

Функцію $A_{el}^{u\tau}\left(p\right)$ отримано в наближенні одного полінома. Зауважимо, що навіть у наближенні одного полінома в головному порядку за σ НЛР не дає коректного результату для цієї функції. Для функції $A_{il}^{u\tau}\left(p\right)$ у головному порядку за σ отримано точний розв'язок.

4.3.3. Функції при $u_n u_l$.

Цей підрозділ присвячено отриманню функцій $A_{anl}^{uu}\left(p\right)$ у теорії збурень за σ на основі точних інтегральних рівнянь (4.101). Зауважимо, що на відміну від першого та другого рівнянь з (4.101), які є скалярним та векторним рівняннями відповідно, третє рівняння з (4.101), яке розв'язується в цьому підрозділі, є рівнянням для тензора другого рангу. Тому його, згідно з розкладанням на незвідні тензори [130], необхідно розбити на рівняння для безслідової частини та рівняння для δ-частини (див. розвинення (4.97)). Зауважимо, що на основі міркувань обертальної інваріантності $G_{nl}^{uu} \sim \delta_{nl}$.

У порядку σ^{-2} рівняння для безслідової частини для $a = i$ має вигляд

$$w_{ip} A_{iTr}^{uu(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) h_{nlp} \lambda_u^{(0)} = 0\,, \tag{4.129}$$

звідки одразу маємо

$$A_{iTr}^{uu(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = 0\,. \tag{4.130}$$

Для $a = e$ аналогічне рівняння є тотожністю $0 = 0$. Такий же самий вигляд воно матиме для $a = e$ в порядку σ^{-1}, для $a = i$ в порядку σ^{-1} воно з урахуванням отриманих вище результатів має вигляд

$$w_{ip} A_{iTr}^{uu(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) h_{nlp} \lambda_u^{(0)} = 0\,, \tag{4.131}$$

звідки

$$A_{iTr}^{uu(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = 0\,. \tag{4.132}$$

У порядку σ^{0} рівняння для безслідової частини має вигляд

$$\begin{gathered} 2w_{ep}\lambda_u^{(0)} h_{nlp} A_{eTr}^{uu}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) = w_{ep}\left(\hat{K}_{ee}h_{nlp}\right)^{(0)} A_{eTr}^{uu(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) + \\ +2\pi e^4 L m_e \beta^2 \frac{\partial}{\partial p_q}\int d^3p' w_{ep} w_{ep'}\left\{p_n - p'_n\right\} D_{ql}\left(p - p'\right), \\ w_{ip}\lambda_u^{(0)} h_{nlp} A_{iTr}^{uu(2)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = 0\,. \end{gathered} \tag{4.133}$$

З другого рівняння у (4.133) одразу маємо

$$A_{iTr}^{uu(2)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = 0\,. \tag{4.134}$$

Шукаємо розв'язок першого рівняння у (4.133) у вигляді розвинення за поліномами Соніна:

$$A_{eTr}^{uu(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\sum_{s\geq 0} g_{esTr}^{uu(0)} S_s^{5/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right). \tag{4.135}$$

На основі (4.134) маємо такий матричний вигляд першого рівняння в (4.133)

$$\begin{gathered}\frac{32\lambda_u^{(0)}}{3\sqrt{\pi}k!}n_e\left(m_eT\right)^2\Gamma\left(k+\frac{7}{2}\right)g_{ekTr}^{uu(0)}=\sum_s g_{esTr}^{uu(0)}W_{ek,es}^{(0)}-\\ -\pi e^4Lm_e\beta^2\int d^3pd^3p'\left(\frac{\partial h_{nlp}S_k^{5/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)}{\partial p_q}-\frac{\partial h_{nlp'}S_k^{5/2}\left(\beta\varepsilon_{ep'}\right)}{\partial p'_q}\right)w_{ep}w_{ep'}\times\\ \times\left\{p_n-p'_n\right\}D_{ql}\left(p-p'\right),\ W_{ak,bs}=\left\{h_{nlp}S_k^{5/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right),h_{nlp}S_s^{5/2}\left(\beta\varepsilon_{bp}\right)\right\}_{ab}.\end{gathered} \tag{4.136}$$

Для простоти знайдемо розв'язок рівняння (4.136) у наближенні одного полінома. Для $k=0$ у рівнянні (4.136) маємо

$$\begin{gathered}20\lambda_u^{(0)}n_e\left(m_eT\right)^2g_{e0Tr}^{uu(0)}=g_{e0Tr}^{uu(0)}W_{e0,e0}^{(0)}-\\ -\pi e^4Lm_e\beta^2\int d^3pd^3p'\left(\frac{\partial h_{nlp}}{\partial p_q}-\frac{\partial h_{nlp'}}{\partial p'_q}\right)w_{ep}w_{ep'}\left\{p_n-p'_n\right\}D_{ql}\left(p-p'\right),\end{gathered} \tag{4.137}$$

звідки

$$g_{e0Tr}^{uu(0)}=\frac{3}{2}\frac{\beta^2}{3-2\sqrt{2}z},\quad A_{eTr}^{uu(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\frac{3}{2}\frac{\beta^2}{3-2\sqrt{2}z}. \tag{4.138}$$

Як бачимо, для функції $A_{eTr}^{uu}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$ НЛР не дає коректного результату навіть у наближенні одного полінома та в головному порядку за σ. Результат (4.138) відрізняється від відповідного результату НЛР наявністю другого доданку в знаменнику.

У порядку σ^1 рівняння для безслідових частин має для $a=i$ вигляд

$$w_{ip}\lambda_u^{(0)}h_{nlp}A_{iTr}^{uu(3)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0, \tag{4.139}$$

звідки

$$A_{iTr}^{uu(3)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0. \tag{4.140}$$

Зауважимо, що для $a=e$ рівняння для безслідових частин у порядках σ^1 та вище необхідне для пошуку $A_{eTr}^{uu}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$ у більш високих порядках за σ. У цій роботі обмежимось обчисленням головного порядку.

У порядку σ^2 для $a=i$ рівняння для безслідових частин має з урахуванням отриманих вище результатів такий вигляд:

$$2w_{ip}\lambda_u^{(0)}h_{nlp}A_{iTr}^{uu(4)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=\left(\hat{K}_{ie}h_{nlp}\right)^{(2)}A_{eTr}^{uu(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+\frac{2^{5/2}\sqrt{\pi}}{3}\frac{z^2e^4Ln_e^2\sigma^4}{T^3n_i\sqrt{m_eT}}h_{nlp}w_{ip}\,, \quad (4.141)$$

Шукаємо розв'язок цього рівняння у вигляді розвинення за поліномами Соніна:

$$A_{iTr}^{uu(4)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=\sum_{s\geq 0}g_{isTr}^{uu(4)}S_s^{5/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right). \quad (4.142)$$

Матричний вигляд рівняння (4.141):

$$\frac{32\lambda_u^{(0)}}{3\sqrt{\pi}k!}n_i\left(m_iT\right)^2\Gamma\left(k+\frac{7}{2}\right)g_{ikTr}^{uu(4)}=g_{e0Tr}^{uu(0)}W_{ik,e0}^{(0)}+$$
$$+\frac{5\cdot 2^{7/2}\sqrt{\pi}}{3}z^2e^4Ln_e^2\left(m_eT\right)^{3/2}\beta^3\delta_{k0}\,, \quad (4.143)$$

звідки в наближенні одного полінома

$$g_{ikTr}^{uu(4)}=\frac{1}{20\lambda_u^{(0)}n_i\left(m_iT\right)^2}\left(g_{e0Tr}^{uu(0)}W_{i0,e0}^{(0)}+\frac{5\cdot 2^{7/2}\sqrt{\pi}}{3}z^2e^4Ln_e^2\left(m_eT\right)^{3/2}\beta^3\right)=$$
$$=-\frac{2}{5}zg_{eTr}^{uu(0)}\sigma^4+\frac{1}{2}z^2\beta^2\sigma^4,\; A_{iTr}^{uu(4)}=-\frac{2}{5}zg_{eTr}^{uu(0)}\sigma^4+\frac{1}{2}z^2\beta^2\sigma^4\,. \quad (4.144)$$

Як бачимо, НЛР не дає вірного результату для $A_{iTr}^{uu}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)$ навіть у головному порядку за σ в наближенні одного полінома. Результат (4.144) відрізняється від відповідного результату для НЛР наявністю другого доданку.

Перейдемо до дослідження δ-частин. У порядку σ^0 рівняння для δ-частин мають вигляд

$$w_{ep}\lambda_u^{(0)}\left\{2A_{e\delta}^{uu(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+\frac{2m_e}{3T}S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)\right\}=\hat{K}_{ee}^{(0)}A_{e\delta}^{uu(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right),$$
$$w_{ip}\lambda_u^{(0)}\left\{-2A_{i\delta}^{uu(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)+\frac{2m_ez}{3T}S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)\right\}=0\,. \quad (4.145)$$

Рівняння (4.145) виписані з урахуванням того, що на основі (4.100) можна показати

$$G_{nl}^{uu(0)}=0\,. \quad (4.146)$$

Друге рівняння з (4.145) має точний розв'язок

$$A_{i\delta}^{uu(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=\frac{1}{3}m_e z\beta S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right), \qquad (4.147)$$

який, як бачимо, збігається з НЛР; більш того, він чудово узгоджується з додатковими умовами (4.102). Розв'язок першого рівняння з (4.145) шукаємо у вигляді розвинення за поліномами Соніна:

$$A_{e\delta}^{uu(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\sum_{s\geq 1}g_{es\delta}^{uu(0)}S_s^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right). \qquad (4.148)$$

Сума у (4.148) починається з 1, тому що додаткові умови (4.102) занулять коефіцієнт при нульовому поліномі. Зауважимо, що вони також зададуть коефіцієнт при першому поліномі, проте незалежно від них такий самий коефіцієнт буде також отримано з рівняння (4.145) (див. нижче). Матричний вигляд першого рівняння з (4.145):

$$\lambda_u^{(0)}\frac{4\pi n_e}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{k!}\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)g_{ek\delta}^{(0)}+m_e n_e\beta\lambda_u^{(0)}\delta_{k1}=\sum_{s\geq 1}g_{ek\delta}^{(0)}H_{ek,es}^{(0)}. \qquad (4.149)$$

Для простоти знайдемо розв'язок рівняння (4.149) у наближенні одного полінома.

З (4.39) маємо, що рівняння (4.149) є тотожністю для $k=0$, а для $k=1$ отримаємо:

$$3\lambda_u^{(0)}n_e g_{ek\delta}^{(0)}+m_e n_e\beta\lambda_u^{(0)}=0, \qquad (4.150)$$

звідки

$$g_{ek\delta}^{(0)}=-\frac{1}{3}m_e\beta,\quad A_{e\delta}^{uu(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=-\frac{1}{3}m_e\beta S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right). \qquad (4.151)$$

Результат (4.151) збігається з НЛР та чудово узгоджується з додатковими умовами (4.102).

Тож для функцій $A_{anl}^{uu}\left(p\right)$ маємо

$$A_{enl}^{uu}\left(p\right)=-\frac{1}{3}m_e\beta S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)\delta_{nl}+\frac{3}{2}\frac{\beta^2}{3-2\sqrt{2}z}h_{nlp}+O\left(\sigma\right),$$
$$A_{inl}^{uu}\left(p\right)=\frac{1}{3}m_e z\beta S_1^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)\delta_{nl}+O\left(\sigma\right). \qquad (4.152)$$

Як бачимо, δ-частини в наближенні одного полінома в головному порядку за σ задаються НЛР; більш того, вони повністю задаються додатковими умовами (4.102). Проте безслідові частини відрізняються від результату НЛР навіть у головному порядку за σ та в наближенні одного полінома.

Знайдемо також часові рівняння ПСО в рамках квадратичної теорії релаксації. Для цього підставимо результати (4.115), (4.128) та (4.152) до (4.100). Отримаємо:

$$L_l^{(2)} = 16\frac{z^2 e^4 L n_i^2 \sqrt{\pi}}{T^{5/2} m_e^{1/2}\left(4\sqrt{2}+3z\right)}\tau u_l + O(\sigma),$$

$$L_0^{(2)} = \left(4\sqrt{2\pi}z^2(z+1)\frac{e^4 L n_i}{T^{5/2}\sqrt{m_e T}}\sigma^2 + O\left(\sigma^3\right)\right)\tau^2 + \left(\frac{2m_e}{3}\lambda_u^{(0)} + O(\sigma)\right)u^2. \tag{4.153}$$

Порівнюючи результат (4.153) з результатом (4.29) та прийнявши до уваги (4.34), бачимо, що внески від квадратичної теорії релаксації уповільнюють процес релаксації температури та швидкості компонент системи.

Висновки до розділу 4

На основі ідеї узагальнення методу Чемпена–Енскога, запропонованої в цій роботі, отримано функції розподілу компонент повністю іонізованої електрон-іонної двокомпонентної плазми в просторово-однородному випадку на основі кінетичного рівняння Ландау в рамках лінійної теорії релаксації. При цьому відхилення температур та швидкостей компонент від їх рівноважних значень вважаються малими та вивчаються лише лінійні за відхиленнями внески до функції розподілу компонент та часових рівнянь для параметрів скороченого опису. У просторово-однорідному випадку параметрами скороченого опису системи є відхилення температури та швидкості електронів від їх рівноважних значень. Показано, що відхилення температури та швидкості іонів можуть бути виражені в термінах відхилень електронної температури та швидкості. Показано, що широко вживане в літературі наближення локальної рівноваги є розв’язком для функцій розподілу компонент тільки в головному порядку за малим відношенням мас електрона та іона. Отримано поправки до результатів наближення локальної рівноваги більш високого порядку за відношенням мас. Отримано часи релаксації швидкості та температури. Доведено додатність часів релаксації без безпосереднього обчислення їх у теорії збурень. Показано, що головний порядок часів релаксації за малим відношенням мас збігається з відомими результатами на основі наближення локальної рівноваги, проте отримані поправки до результатів наближення локальної рівноваги для функцій розподілу компонент суттєво впливають на часи релаксації в більш високих порядках (внески від поправок чисельно є більшими за відповідні члени, обчислені тільки з використанням наближення локальної рівноваги). Зрозуміло, що отримані внески від наближення локальної рівноваги до часів релаксації збігаються з відомими в літературі результатами. Зауважимо, що в лінійній теорії релаксації наближення локальної рівноваги фактично є наближенням одного полінома в розв'язку кінетичного рівняння Ландау та повністю задається додатковими умовами, тобто означеннями параметрів скороченого опису системи в термінах функцій розподілу компонент.

Також на основі ідеї узагальнення методу Чемпена–Енскога, запропонованої в монографії, розглянуто квадратичну теорію релаксації, тобто знайдено квадратичні за малими відхиленнями внески до функцій розподілу компонент та часових рівнянь для параметрів скороченого опису. Ці внески знайдено в головному наближенні за відношенням мас. Показано, що, взагалі кажучи, наближення локальної рівноваги не є розв'язком кінетичного рівняння Ландау в рамках квадратичної теорії релаксації навіть у наближенні одного полінома. Встановлено, що навіть у наближенні одного полінома наближення локальної рівноваги є вірним розв'язком лише для функції при квадраті відхилення температури електронів від її рівноважного значення. Показано, що квадратичні внески до часових рівнянь для параметрів скороченого опису уповільнюють процеси релаксації температури та швидкості.

Результати розділу 4 опубліковано у наших роботах [131 – 136] .

РОЗДІЛ 5
ГІДРОДИНАМІКА ПЛАЗМИ З УРАХУВАННЯМ РЕЛАКСАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

Цей розділ присвячено дослідженню впливу релаксаційних процесів на гідродинаміку плазми. Розгляд базується на ідеї узагальнення методу Чемпена–Енскога, запропонованої в другому розділі. Нагадаємо, що термін «релаксація» розуміється в роботі як процес, який може мати місце в просторово-однорідній системі. Основну увагу в цьому розділі буде приділено пошуку кінетичних коефіцієнтів системи. На відміну від попереднього розділу, у цьому розділі вивчаються просторово-неоднорідні стани системи. Як зазначено у [12], найбільш розвинутою теорією на цей час є теорія, яка побудована на основі рівняння Больцмана, хоча вона має такі обмеження: її можна застосовувати для розрідженого газу, якщо градієнти в системі малі. Гідродинаміка плазми в цій роботі досліджується на основі кінетичного рівняння Ландау [4].

$$\frac{\partial f_{ap}}{\partial t}+\frac{p_n}{m_a}\frac{\partial f_{ap}}{\partial x_n}=I_{ap}\left(f\right), \tag{5.1}$$

де $I_{ap}\left(f\right)$ – інтеграл зіткнень Ландау (4.3). У порівнянні з просторово-однорідним випадком (4.2), в просторово-неоднорідному з’являється другий доданок у лівій частині. Зауважимо, що кінетичне рівняння Ландау отримано на основі кінетичного рівняння Больцмана з урахуванням особливостей кулонівської взаємодії [4]. Плазму часто розглядають на основі кінетичного рівняння Ландау–Власова [100, 101], яке містить також і самоузгоджений член. Цей член є дуже важливим для дослідження мод плазми [100, 104, 105]. Проте, як відомо, [101], самоузгоджений член не впливає на кінетичні коефіцієнти системи. Тому дослідження кінетичних коефіцієнтів плазми основане саме на кінетичному рівнянні Ландау [39, 78]. Дослідження мод системи з урахуванням самоузгодженого члену наведено в наступному розділі монографії.

Як відомо [11], головною ідеєю будь-якої теорії процесів переносу є ідея скороченого опису. Дуже важливою задачею сучасної статистичної фізики є узагальнення методу Чемпена–Енскога [68], ця задача є актуальною й для досліджень як слабко, так і сильно нерівноважних систем. У цій роботі метод Чемпена–Енскога розглядається в рамках теорії скороченого опису Боголюбова [1]. Як відомо [10, 102], стандартний метод Чемпена–Енскога застосовується до опису стандартного гідродинамічного стану компонент. У стандартному гідродинамічному стані система описується густинами компонент, а також масовою швидкістю й однією температурою [69]. При цьому в часових рівняннях цих параметрів відсутні просторово-однорідні члени. Узагальнення методу Чемпена–Енскога, яке пропонується в роботі, базується на збільшенні числа ПСО: розглядається релаксація температури та швидкості компонент до їх гідродинамічних значень, та додатковими ПСО вважаються відхилення температур та швидкостей компонент від їх значень в рамках стандартної гідродинаміки. Оскільки ці процеси розглядаються в роботі біля їх завершення, вищезгадані відхилення вважаються малими. Зауважимо, що такі ідеї узагальнення методу Чемпена–Енскога в наш час відомі не лише у фізиці плазми, але й у інших галузях фізики: теорії полярона [2, 8], кінетиці фотонів у рівноважному плазмовому середовищі [95, 96] тощо.

Теорія, яка побудована в цьому розділі, містить два малі параметри – малі відхилення швидкостей і температур компонент від їх гідродинамічних значень та малі градієнти. Зауважимо, що ряд сучасних досліджень [40, 81, 84] присвячено пошуку потоків та кінетичних коефіцієнтів плазми у випадку не обов'язково малих градієнтів. Проте всі ці роботи, як і присвячені випадку малих градієнтів піонерські роботи Брагінського [39, 78], основані на НЛР та не враховують релаксаційні внески до потоків. Тому, незважаючи на те, що ця робота присвячена випадку малих градієнтів, вона є актуальною, бо в ній досліджуються релаксаційні поправки до потоків та кінетичних коефіцієнтів стандартного гідродинамічного стану системи. Отримані в роботі точні інтегральні рівняння для ФРК містять поправки до НЛР, отримані в попередньому розділі, й тому вони дозволяють коректно отримувати ФРК не лише в головному, але й у більш високих порядках за σ.

5.1. Параметри скороченого опису та базові рівняння теорії

Починаючи з піонерських робіт Брагінського [39, 78], в якості ПСО системи вибирають такі параметри: густини кількості частинок компонент n_a, швидкості компонент υ_{an} та температури компонент T_a; стандартне означення цих величин у термінах ФРК надано в (4.4). Масова швидкість υ_n та температура T, що є параметрами скороченого опису в стандартному гідродинамічному стані системи, задаються в термінах ФРК [69] стандартними означеннями (4.5). Зауважимо, що в стандартному гідродинамічному стані системи швидкості компонент відрізняються від масової швидкості на дифузійний потік [69]:

$$\upsilon_{an}^{h} = \upsilon_n + \frac{1}{m_a n_a}\pi_{an}^{oh}, \quad \sum_a \pi_{an}^{oh} = 0\,, \tag{5.2}$$

де верхній індекс h означає, що величина взята в стандартному гідродинамічному стані системи, а верхній індекс o означає, що величина взята в системі відліку $\upsilon_n = 0$. Величини π_{an}^{oh} названі дифузійними потоками, бо вони описують дифузію в системі. Можна показати, що $\pi_{an}^{oh} \sim g$, де g – малий параметр, який описує градієнти (див. його означення нижче). Щодо температур компонент у стандартному гідродинамічному стані, то можна показати що

$$T_a^h = T + O\left(g^2\right), \tag{5.3}$$

де поправка порядку g^2 у (5.3) залежить лише від ПСО стандартного гідродинамічного стану. Вирази (5.2) та (5.3) можна отримати на основі перетворення Галілея з лабораторної системи відліку в систему відліку, де $\upsilon_n = 0$. Зауважимо, що в цій роботі розглядається гідродинаміка в порядку малості не більше за g^1.

Введемо малі відхилення швидкості та температури електронів від їх стандартних гідродинамічних значень:

$$u_n \equiv \upsilon_{en} - \upsilon_{en}^h, \quad \tau \equiv T_e - T_e^h. \tag{5.4}$$

На основі (4.4), (4.5), (5.2) – (5.4) можна отримати

$$\begin{gathered} \upsilon_{in} = \upsilon_{in}^h - \frac{m_e n_e}{m_i n_i} u_n, \\ T_i = T - \frac{n_e}{n_i}\tau - \frac{m_e n_e}{3n_i}\left(1 + \frac{m_e n_e}{m_i n_i}\right)u^2 - \frac{2}{3n_i} u_n \pi_{en}^{oh}\left(1 + \frac{m_e n_e}{m_i n_i}\right) + O\left(g^2\right), \end{gathered} \tag{5.5}$$

де поправка $O\left(g^2\right)$ залежить лише від ПСО стандартного гідродинамічного стану. Зауважимо, що вирази (5.5) переходять у (4.11) у просторово-однорідному випадку. З (5.5) бачимо, що іонна температура та швидкість можуть бути виражені в термінах параметрів n_a, υ_n, T, u_n, τ. Те, що електронна температура та швидкість виражаються в термінах цих параметрів, очевидно з (5.4). Тому саме такий набір параметрів можна вибрати в якості ПСО системи:

$$\begin{gathered} \xi_{1,2}\left(x,t\right) = n_{e,i}\left(x,t\right), \quad \xi_{2+n}\left(x,t\right) = \upsilon_n\left(x,t\right), \quad \xi_6\left(x,t\right) = T\left(x,t\right), \\ \xi_{6+n}\left(x,t\right) = u_n\left(x,t\right), \quad \xi_{10}\left(x,t\right) = \tau\left(x,t\right). \end{gathered} \tag{5.6}$$

На основі кінетичного рівняння (5.1) та означень (4.4), (4.5) можна отримати такі рівняння гідродинаміки (тобто часові рівняння для ПСО):

$$\begin{gathered} \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{1}{m_a}\frac{\partial \pi_{an}}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial \upsilon_n}{\partial t} = \frac{1}{m_e n_e + m_i n_i}\left(\upsilon_n \frac{\partial \pi_l}{\partial x_l} - \frac{\partial t_{nl}}{\partial x_l}\right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2}{3\left(n_e + n_i\right)}\left(-\frac{\partial q_n}{\partial x_n} + \frac{3}{2}T\sum_a \frac{1}{m_a}\frac{\partial \pi_{an}}{\partial x_n} + \upsilon_n \frac{\partial t_{nl}}{\partial x_l} - \frac{1}{2}\upsilon^2 \frac{\partial \pi_n}{\partial x_n}\right), \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{R_{en}}{m_e n_e} + \frac{1}{m_e n_e}\left(\upsilon_{en}\frac{\partial \pi_{el}}{\partial x_l} - \frac{\partial t_{enl}}{\partial x_l}\right) - \frac{\partial \upsilon_{en}^h}{\partial t}, \end{gathered} \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{2\left(Q_e-R_{en}\upsilon_{en}\right)}{3n_e}+\frac{2}{3n_e}\left(-\frac{\partial q_{en}}{\partial x_n}+\frac{3T_e}{2m_e}\frac{\partial\pi_{en}}{\partial x_n}+\frac{\partial t_{enl}}{\partial x_l}\upsilon_{en}-\frac{\upsilon_e^2}{2}\frac{\partial\pi_{en}}{\partial x_n}\right)-\frac{\partial T_e^h}{\partial t},$$

де джерела задані в (4.7), а потоки за означеннями задаються в термінах ФРК:

$$t_{anl}\equiv\int d^3p\frac{p_n}{m}p_l f_{ap}\,,\quad q_{an}\equiv\int d^3p\frac{p_n}{m}\varepsilon_{ap}f_{ap}\,,\ t_{nl}\equiv\sum_a t_{anl}\,,\ q_n\equiv\sum_a q_{an}\,, \qquad (5.8)$$

t_{anl} та q_{an} – потік імпульсу та енергії a-ї компоненти відповідно.

Як бачимо, лише рівняння для u_n, τ містять внески, що в просторово-однорідному випадку відмінні від нуля, часові рівняння ПСО стандартного гідродинамічного стану таких внесків не містять. Це розкриває зміст фрази, що термін «релаксація» в роботі вжито у вузькому сенсі як процес, який може мати місце в просторово-однорідній системі. У роботі досліджується процес релаксації системи до її стандартного гідродинамічного стану, тобто такий процес, який може проходити у просторово-однорідному випадку. При цьому релаксаційні процеси досліджуються біля їх завершення. Зауважимо, що отримані рівняння гідродинаміки (5.7) переходять у рівняння (4.6) для просторово-однорідної системи. У просторово-однорідному випадку ПСО стандартного гідродинамічного стану є постійними рівноважними параметрами системи та релаксація йде до рівноважного, а не до стандартного гідродинамічного стану системи.

Розвинута в роботі теорія містить два малі параметри. Перший з них – це введений у попередньому розділі малий параметр μ, за яким оцінюються малі відхилення u_n, τ (див. (4.10)). Єдина відмінність від (4.10) полягає у фізичному змісті параметрів u_n, τ: тепер вони є відхиленнями швидкості та температури електронів від їх стандартних гідродинамічних значень, а не відхиленнями швидкості та температури електронів від рівноважних значень у просторово-однорідному випадку. Другий малий параметр g описує малі градієнти в системі:

$$\frac{\partial^s\xi_{1-6}}{\partial x_{n_1}\partial x_{n_2}...\partial x_{n_s}}\sim g^s\,,\ \ \frac{\partial^s\xi_{7-10}}{\partial x_{n_1}\partial x_{n_2}...\partial x_{n_s}}\sim\mu g^s\,. \qquad (5.9)$$

Також додатково враховується малий параметр σ.

В основі розгляду лежить ідея функціональної гіпотези Боголюбова [9]:

$$f_{ap}\left(x,t\right)\xrightarrow[t\gg\tau_0]{}f_{ap}\left(x,\xi\left(t\right)\right);\ \ \xi\equiv\left\{\xi_\alpha\right\},\ \alpha=1,2,...,10\,, \qquad (5.10)$$

τ_0 – деякий характерний час, $\tau_0\ll\tau_u\ll\tau_T$. Згідно з (5.10), перепишемо кінетичне рівняння Ландау (5.1):

$$\sum_\alpha \int d^3x' \frac{\delta f_{ap}(x,\xi)}{\partial \xi_\alpha(x')} L_\alpha(x', f(\xi)) + \frac{p_n}{m_a}\frac{\partial f_{ap}(x,\xi)}{\partial x_n} = I_{ap}(f(x,\xi)),$$
$$L_\alpha(x, f(\xi(t))) \equiv \frac{\partial \xi_\alpha(x,t)}{\partial t}. \tag{5.11}$$

У подальшому це рівняння розв'язується за алгоритмом, який схожий на алгоритм із попереднього розділу, проте на відміну від попереднього розділу, де застосовувалась теорія збурень за μ, у цьому розділі маємо теорію збурень за двома малими параметрами: μ та g. Для будь-якої величини U надалі будуть застосовані такі позначення:

$$U^{(m,n)} \sim \mu^m g^n, \; U^{(n)} \sim \sigma^n. \tag{5.12}$$

Додатковими умовами до рівняння (5.11) є означення ПСО в термінах ФРК, які є наслідками (4.4), (4.5), (5.2)–(5.4):

$$n_a = \int d^3 p f_{ap}, \quad \upsilon_n \sum_a n_a m_a = \sum_a \int d^3 p p_n f_{ap},$$
$$\frac{3}{2} T \sum_a n_a + \frac{1}{2}\upsilon^2 \sum_a m_a n_a = \sum_a \int d^3 p f_{ap} \varepsilon_{ap},$$
$$n_e m_e (u_n + \upsilon_n) + n_e m_e \pi_{en}^{oh} = \int d^3 p p_n f_{ep},$$
$$\frac{3}{2} n_e (T + \tau) + \frac{m_e n_e}{2}(u^2 + \upsilon^2 + 2u_n\upsilon_n) + \pi_{en}^{oh}(u_n + \upsilon_n) + O(g^2) = \int d^3 p f_{ep}\varepsilon_{ep}, \tag{5.13}$$
$$n_i m_i \upsilon_n - m_e n_e u_n - \pi_{en}^{oh} = \int d^3 p p_n f_{ip},$$
$$\frac{3}{2} n_i T - \frac{3}{2} n_e \tau - \frac{1}{2} m_e n_e u^2 - (u_n + \upsilon_n)\pi_{en}^{oh} + \frac{m_i n_i}{2}\upsilon^2 - m_e n_e u_n \upsilon_n = \int d^3 p f_{ip}\varepsilon_{ip}$$

Вибір поліномів Соніна для ФРК, які досліджуються в цьому розділі, обґрунтований двома критеріями:

1) декілька перших коефіцієнтів при поліномах задаються додатковими умовами;

2) потоки виражаються в термінах декількох перших коефіцієнтів при поліномах (зауважимо, що кількість тих коефіцієнтів, через які виражаються потоки, не обов'язково збігається з кількістю тих коефіцієнтів, які задаються додатковими умовами).

Очевидно, що в порядку $\mu^0 g^1$ розв'язком рівняння (5.11) є максвелівська ФР з гідродинамічними ПСО:

$$f_{ap}^{(0,0)} = w_{a,p-m_a\upsilon}, \tag{5.14}$$

де функція w_{ap} задана в (4.16). Функція (5.14) обертає рівняння (5.11) у порядку $\mu^0 g^1$ у тотожність $0=0$ та задовольняє додаткові умови (5.13) у порядку $\mu^0 g^1$. Наступні підрозділи цього розділу присвячені пошуку ФРК у більш високих порядках за μ та g.

5.2. Стандартна гідродинаміка

Цей підрозділ присвячено знаходженню ФРК та потоків у рамках стандартної гідродинаміки, тобто в порядку $\mu^0 g^1$, тому що, як вже підкреслено раніше, наближення Барнетта в цій роботі не розглядається. Функції $f_{ap}^{(0,1)}$ шукаємо у вигляді

$$f_{ap}^{(0,1)} = w_{ap} \left(A_{an}^{T}(p) \frac{\partial T}{\partial x_n} + \sum_b A_{an}^{N_b}(p) \frac{\partial n_b}{\partial x_n} + A_{anl}^{\upsilon}(p) \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l} \right)\Bigg|_{p \to p - m_a \upsilon} . \tag{5.15}$$

Додатковими умовами для функцій $f_{ap}^{(0,1)}$ є перші три вирази з (5.13); для отриманих нижче функцій $f_{ap}^{(0,1)}$ інші вирази з (5.13) виконаються автоматично. Для кожної частини з (5.15) можна отримати такі точні інтегральні рівняння на основі (5.11):

$$\begin{gathered} \sum_c \hat{K}_{ac} A_{cn}^{N_b}(p) = p_n \left(\frac{1}{m_e n_e + m_i n_i} - \frac{1}{m_a n_a} \delta_{ab} \right), \\ \sum_c \hat{K}_{ac} A_{cn}^{T}(p) = \frac{p_n}{m_a T} \left(\frac{3}{2} + \frac{(n_e + n_i) m_a}{m_e n_e + m_i n_i} - \beta \varepsilon_{ap} \right), \quad \sum_c \hat{K}_{ac} A_{cnl}^{\upsilon}(p) = -\frac{h_{nlp}}{m_a T}. \end{gathered} \tag{5.16}$$

Рівняння (5.16) записані в системі відліку $\upsilon_n = 0$. З міркувань обертальної інваріантності та зі структури рівнянь (5.16) маємо

$$\begin{gathered} A_{an}^{N_b}(p) = p_n A_a^{N_b}(\beta\varepsilon_{ap}), \; A_{an}^{T}(p) = p_n A_a^{T}(\beta\varepsilon_{ap}), \; A_{anl}^{\upsilon}(p) = h_{nlp} A_a^{\upsilon}(\beta\varepsilon_{ap}), \\ A_a^{N_b}(\beta\varepsilon_{ap}) = \sum_{n,s\ge 0} g_{as}^{N_b(n)} S_s^{3/2}(\beta\varepsilon_{ap}), \; A_a^{T}(\beta\varepsilon_{ap}) = \sum_{n,s\ge 0} g_{as}^{T(n)} S_s^{3/2}(\beta\varepsilon_{ap}), \\ A_a^{\upsilon}(\beta\varepsilon_{ap}) = \sum_{n,s\ge 0} g_{as}^{\upsilon(n)} S_s^{5/2}(\beta\varepsilon_{ap}). \end{gathered} \tag{5.17}$$

Додаткові умови (5.13) накладають такі обмеження на коефіцієнти при поліномах:

$$m_e n_e g_{e0}^{N_b(m)} + m_i n_i g_{i0}^{N_b(m+2)} = 0, \; m_e n_e g_{e0}^{T(m)} + m_i n_i g_{i0}^{T(m+2)} = 0 \tag{5.18}$$

Зауважимо, що в наступниих пунктах розгляд ведеться в системі відліку $\upsilon_n = 0$.

5.2.1. Функції при градієнті температури

У головному порядку за σ рівняння для функції при градієнті температури має вигляд

$$p_n \frac{\beta}{m_e}\left\{\beta\varepsilon_{ep}-\frac{3}{2}\right\}=-\left(\hat{K}_{ee}p_n\right)^{(0)} A_e^{T(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)-\left(\hat{K}_{ei}p_{in}\right)^{(0)} A_i^{T(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right),$$

$$\left(K_{ii}p_{in}\right)^{(0)} A_i^{T(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0. \tag{5.19}$$

У матричній формі друге рівняння в (5.19) має вигляд

$$\sum_{s\geq 1} g_{is}^{T(0)}G_{ik,is}^{(-1)}=0. \tag{5.20}$$

Сума у (5.20) починається з 1, тому що

$$G_{i0,is}^{(-1)}=G_{is,i0}^{(-1)}=0. \tag{5.21}$$

Система рівнянь (5.20) є системою з тривіальним розв’язком. З додаткових умов (5.18) маємо $g_{i0}^{T(0)}=0$. Тому

$$A_i^{T(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0. \tag{5.22}$$

З (5.22) маємо, що перше рівняння в (5.19) має такий вигляд:

$$p_n \frac{\beta}{m_e}\left\{\beta\varepsilon_{ep}-\frac{3}{2}\right\}=-\left(\hat{K}_{ee}p_n\right)^{(0)} A_e^{T(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right). \tag{5.23}$$

Матричний вигляд цього рівняння:

$$3n_e\delta_{k0}-\frac{15}{2}n_e\delta_{k1}=-\sum_{s\geq 0} g_{es}^{T(0)}G_{ek,es}^{(0)}. \tag{5.24}$$

Рівняння (5.24) розв’яжемо в наближенні трьох поліномів, щоб результати для кінетичних коефіцієнтів збіглися з результатами Брагінського (детальніше про це див. нижче). Явні вирази для самих коефіцієнтів при поліномах є досить громіздкими, тому надамо деякі їх числові значення (значення надані з урахуванням електронейтральності плазми):

Таблиця 5.1. Значення коефіцієнтів при поліномах у функції $A_e^{T(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$

z	$g_{e0}^{T(0)}\cdot n_i e^4 L\sqrt{\frac{m_e}{T}}$	$g_{e1}^{T(0)}\cdot n_i e^4 L\sqrt{\frac{m_e}{T}}$	$g_{e2}^{T(0)}\cdot n_i e^4 L\sqrt{\frac{m_e}{T}}$
1	-0,998	0,662	-0,157
2	-0,331	0,266	-0,076
3	-0,169	0,15	-0,047
4	-0,104	0,097	-0,032

У першому порядку за σ рівняння для функцій розподілу при градієнті температури має для $a = i$ такий вигляд:

$$p_n \frac{\beta}{m_i}\left\{\beta\varepsilon_{ip} - \frac{5}{2} - \frac{n_e}{n_i}\right\} = -\left(\hat{K}_{ie} p_n\right)^{(1)} A_e^{T(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) - \left(\hat{K}_{ii} p_n\right)^{(0)} A_i^{T(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right). \tag{5.25}$$

Матричний вигляд цього рівняння:

$$\frac{15}{2} n_i \delta_{k1} - 3 n_e \delta_{k0} = -\sum_{s=0}^{2} g_{es}^{T(0)} G_{ik,es}^{(0)} - \sum_{s\ge 1} g_{is}^{T(1)} G_{ik,is}^{(-1)} . \tag{5.26}$$

Сума в другому доданку у (5.26) починається з 1 внаслідок (5.21). Для $a = e$ друге рівняння з (5.16) у порядку σ^1 дозволяє отримати функцію $A_e^T\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$ у першому порядку за σ, проте в цій роботі обмежимось головним порядком. Для $k = 0$ рівняння (5.26) збігається з рівнянням (5.24) для $k = 0$. Для $k \ge 1$ з рівняння (5.26) можна отримати функцію $A_i^{T(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)$. Зауважимо, що додаткові умови (5.13) занулять коефіцієнт $g_{i0}^{T(1)}$.

Таблиця 5.2. Значення коефіцієнтів при поліномах у функції $A_i^{T(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)$

z	$g_{i1}^{T(1)} \cdot n_i e^4 L\sqrt{\frac{m_e}{T}}$	$g_{i2}^{T(1)} \cdot n_i e^4 L\sqrt{\frac{m_e}{T}}$
1	-0,661	0,176
2	-0,041	0,011
3	-0,008	0,002
4	-0,0025	0,0007

Тож маємо такі результати для функцій при градієнті температури:

$$\begin{aligned} A_{en}^T(p) &= p_n\left(g_{e0}^{T(0)} + g_{e1}^{T(0)} S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) + g_{e2}^{T(0)} S_2^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)\right) + O(\sigma), \\ A_{in}^T(p) &= p_n\left(g_{i1}^{T(1)} S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) + g_{i2}^{T(1)} S_2^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)\right) + O(\sigma). \end{aligned} \tag{5.27}$$

Числові значення коефіцієнтів у (5.27) надані в таблицях 1 та 2.

5.2.2. Функції при градієнті густини електронів

Для $b = e$ перше рівняння в (5.16) у порядку σ^0 має вигляд:

$$\begin{aligned} p_n \frac{1}{n_e m_e} &= -\left(\hat{K}_{ee} p_n\right)^{(0)} A_e^{N_e(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right) - \left(\hat{K}_{ei} p_n\right)^{(0)} A_i^{N_e(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right), \\ &\left(\hat{K}_{ii} p_n\right)^{(0)} A_i^{N_e(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right) = 0 . \end{aligned} \tag{5.28}$$

Друге рівняння в (5.28) аналогічно викладкам із попереднього підрозділу дасть

$$A_i^{N_e(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0\,. \tag{5.29}$$

Тоді перше рівняння з (5.28) набуде вигляду

$$p_n\frac{1}{n_e m_e}=-\left(\hat{K}_{ee}p_n\right)^{(0)}A_e^{N_e(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right). \tag{5.30}$$

Матричний вигляд цього рівняння:

$$3T\delta_{k0}=-\sum_s g_{es}^{N_e(0)}G_{ek,es}^{(0)}\,. \tag{5.31}$$

Розв'язок шукаємо в наближенні трьох поліномів, щоб результати для кінетичних коефіцієнтів збіглися з результатами Брагінського. Явні вирази для коефіцієнтів при поліномах досить громіздкі, тому надамо деякі їх числові значення:

Таблиця 5.3. Значення коефіцієнтів при поліномах у функції $A_e^{N_e(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$

z	$g_{e0}^{N_e(0)}\cdot\dfrac{e^4Ln_i^2}{T}\sqrt{\dfrac{m_e}{T}}$	$g_{e1}^{N_e(0)}\cdot\dfrac{e^4Ln_i^2}{T}\sqrt{\dfrac{m_e}{T}}$	$g_{e2}^{N_e(0)}\cdot\dfrac{e^4Ln_i^2}{T}\sqrt{\dfrac{m_e}{T}}$
1	-0,583	0,166	0,019
2	-0,087	0,031	0,0012
3	-0,028	0,011	-0,000072
4	-0,012	0,005	-0,00019

У порядку σ^1 перше рівняння з (5.16) для $b=e$ з урахуванням вже обчислених результатів має вигляд

$$\begin{gathered}0=-\left(K_{ee}p_{en}\right)^{(0)}A_e^{N_e(1)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)-\left(K_{ei}p_{in}\right)^{(0)}A_i^{N_e(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right),\\ -\frac{p_n}{m_i n_i}=-\left(\hat{K}_{ie}p_n\right)^{(1)}A_e^{N_e(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)-\left(\hat{K}_{ii}p_{in}\right)^{(0)}A_i^{N_e(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right).\end{gathered} \tag{5.32}$$

Матричний вигляд рівнянь (5.32):

$$\begin{gathered}0=-\sum_{s\geq 0}g_{es}^{N_e(1)}G_{ek,es}^{(0)}-\sum_{s\geq 0}g_{is}^{N_e(1)}G_{ek,is}^{(0)},\\ -3T\delta_{k0}=-\sum_{s=0}^{2}g_{es}^{N_e(0)}G_{ik,es}^{(0)}-\sum_{s\geq 1}G_{ik,is}^{(-1)}g_{is}^{N_e(1)}\,.\end{gathered} \tag{5.33}$$

Додаткові умови (5.13) занулять коефіцієнт $g_{i0}^{N_e(1)}$. На основі явного вигляду інтегральних дужок можна довести, що

$$\forall s\geq 1\quad G_{ek,is}^{(0)}=0,\ G_{is,ek}^{(0)}=0\,. \tag{5.34}$$

З додаткових умов та (5.34) бачимо, що в першому рівнянні з (5.33) друга сума в правій частині занулиться. Тоді воно стане просто рівнянням із тривіальним розв'язком:

$$A_e^{N_e(1)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=0. \tag{5.35}$$

Для $k=0$ друге рівняння з (5.33) збігається з рівнянням (5.31). Для $k\geq 1$ внаслідок (5.34) маємо, що друге рівняння в (5.33) є системою рівнянь із тривіальним розв'язком, тож

$$A_i^{N_e(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0. \tag{5.36}$$

У порядку σ^2 з урахуванням вже отриманих результатів маємо, що перше рівняння в (5.16) для $b=e$ та $a=i$ має вигляд

$$\left(\hat{K}_{ii}p_n\right)^{(0)}A_i^{N_e(2)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0. \tag{5.37}$$

З рівняння (5.37) функція $A_i^{N_e(2)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)$ обчислюється аналогічно функції $A_i^{T(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)$ з рівняння (5.19) за єдиною відмінністю, що додаткові умови (5.13) задають такий коефіцієнт при нульовому поліномі:

$$g_{i0}^{N_e(2)}=-\frac{n_e}{n_i}g_{e0}^{N_e(0)}\sigma^2. \tag{5.38}$$

Тож для функцій $A_{an}^{N_e}\left(p\right)$ маємо

$$\begin{gathered}A_{en}^{N_e}\left(p\right)=p_n\left(g_{e0}^{N_e(0)}+g_{e1}^{N_e(0)}S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+g_{e2}^{N_e(0)}S_2^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)\right)+O\left(\sigma^2\right)\\ A_{in}^{N_e}\left(p\right)=-p_n g_{e0}^{N_e(0)}\frac{n_e}{n_i}\sigma^2+O\left(\sigma^3\right).\end{gathered} \tag{5.39}$$

Числові значення коефіцієнтів у (5.39) надано в таблиці 3.

5.2.3. Функції при градієнті густини іонів

Для $b=i$ перше рівняння в (5.16) має в порядку σ^0 вигляд

$$\begin{gathered}0=\left(\hat{K}_{ee}p_n\right)^{(0)}A_e^{N_i(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+\left(\hat{K}_{ei}p_n\right)^{(0)}A_i^{N_i(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right),\\ 0=\left(\hat{K}_{ii}p_n\right)^{(0)}A_i^{N_i(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right),\end{gathered} \tag{5.40}$$

Друге рівняння в (5.40) розв'язується аналогічно другому рівнянню в (5.19):

$$A_i^{N_i(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0, \tag{5.41}$$

тоді з урахуванням (5.41) перше рівняння в (5.40) розв'язується аналогічно першому рівнянню з (5.33):

$$A_e^{N_i(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=0. \tag{5.42}$$

З урахуванням отриманих результатів перше рівняння в (5.16) для $b=i$ в порядку σ^1 має вигляд

$$\begin{gathered}\left(K_{ee}p_{en}\right)^{(0)} A_e^{N_i(1)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+\left(K_{ei}p_{in}\right)^{(0)} A_i^{N_i(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0,\\ \left(\hat{K}_{ii}p_{in}\right)^{(0)} A_i^{N_i(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0,\end{gathered} \tag{5.43}$$

звідки, аналогічно попереднім викладкам,

$$A_e^{N_i(1)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=0,\quad A_i^{N_i(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0. \tag{5.44}$$

У другому порядку за σ з урахуванням отриманих вище результатів перше рівняння в (5.16) для $b=i$ має вигляд

$$\begin{gathered}-p_{en}\frac{1}{m_e n_i}\sigma^2=-\left(K_{ee}p_{en}\right)^{(0)} A_e^{N_i(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)-\left(K_{ei}p_{ei}\right)^{(0)} A_i^{N_i(2)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right),\\ 0=\left(K_{ii}p_{in}\right)^{(0)} A_i^{N_i(2)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right).\end{gathered} \tag{5.45}$$

Друге рівняння аналогічно вищенаведеним викладкам дає

$$A_i^{N_i(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=0. \tag{5.46}$$

Тоді перше рівняння в (5.45) набуває вигляду

$$-p_{en}\frac{1}{m_e n_i}\sigma^2=-\left(K_{ee}p_{en}\right)^{(0)} A_e^{N_i(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right). \tag{5.47}$$

Рівняння (5.47) має такий матричний вигляд:

$$-3T\delta_{k0}\frac{n_e}{n_i}\sigma^2=-\sum_{s\geq 0} g_{es}^{N_i(2)}G_{ek,es}^{(0)}. \tag{5.48}$$

Розв’язок системи рівнянь (5.48) шукаємо в наближенні трьох поліномів, числові значення коефіцієнтів при поліномах наведено в таблиці 4:

Таблиця 5.4. Значення коефіцієнтів при поліномах у функції $A_e^{N_i(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$

z	$g_{e0}^{N_i(0)}\cdot\frac{e^4 L n_i^2}{T}\sqrt{\frac{m_e}{T}}$	$g_{e1}^{N_i(0)}\cdot\frac{e^4 L n_i^2}{T}\sqrt{\frac{m_e}{T}}$	$g_{e2}^{N_i(0)}\cdot\frac{e^4 L n_i^2}{T}\sqrt{\frac{m_e}{T}}$
1	0,583	-0,166	-0,019
2	0,174	-0,063	-0,0024
3	0,084	-0,034	0,00021
4	0,05	-0,022	0,00078

У третьому порядку за σ з урахуванням отриманих вище результатів перше рівняння в (5.16) для $b=i$ має вигляд

$$\left(\hat{K}_{ee}p_n\right)^{(0)} A_e^{N_i(3)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+\left(\hat{K}_{ei}p_n\right)^{(0)} A_i^{N_i(3)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0,$$
$$\frac{p_n}{m_i}\frac{n_e}{n_i^2}\sigma^2=-\left(\hat{K}_{ie}p_n\right)^{(1)} A_e^{N_i(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)-\left(\hat{K}_{ii}p_{in}\right)^{(0)} A_i^{N_i(3)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right). \tag{5.49}$$

Рівняння (5.49) розв’язується аналогічно рівнянню (5.32):

$$A_e^{N_i(3)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=0,\ \ A_i^{N_i(3)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0. \tag{5.50}$$

У четвертому порядку за σ з урахуванням отриманих вище результатів перше рівняння в (5.16) для $b=i$ та $a=i$ має вигляд

$$\left(K_{ii}p_n\right)^{(0)} A_i^{N_i(4)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0, \tag{5.51}$$

Рівняння (5.51) розв’язується аналогічно рівнянню (5.37):

$$A_i^{N_i(4)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=-\frac{n_e}{n_i}g_{e0}^{N_e(2)}\sigma^2. \tag{5.52}$$

Тож маємо такі результати для функцій $A_{an}^{N_i}\left(p\right)$:

$$A_{en}^{N_i}\left(p\right)=p_n\left(g_{e0}^{N_i(2)}+g_{e1}^{N_i(2)}S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+g_{e2}^{N_i(2)}S_2^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)\right)+O\left(\sigma^4\right)$$
$$A_{in}^{N_i}\left(p\right)=-p_n g_{i0}^{N_e(2)}\frac{n_e}{n_i}\sigma^2+O\left(\sigma^5\right). \tag{5.53}$$

Числові значення коефіцієнтів у (5.53) надано в таблиці 4.

5.2.4. Функції при градієнті масової швидкості

Додаткові умови (5.13) для функцій $A_{anl}^{\upsilon}\left(p\right)$ виконуються автоматично. Останнє рівняння в (5.16) у порядку σ^{-1} має такий вигляд для $a=i$ (для $a=e$ воно є тотожністю):

$$\left(\hat{K}_{ii}h_{nlp}\right)^{(-1)} A_i^{\upsilon(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0. \tag{5.54}$$

Матричний вигляд рівняння (5.54):

$$\sum_{s\geq 0} g_{is}^{\upsilon(0)}W_{ik,is}^{(-3)}=0. \tag{5.55}$$

Система рівнянь (5.55) є системою рівнянь із тривіальним розв’язком, тож

$$A_i^{\upsilon(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0. \tag{5.56}$$

Останнє рівняння в (5.16) у порядку σ^0 має такий вигляд з урахуванням отриманих вище результатів:

$$\frac{1}{m_eT}h_{nlp}=-\left(\hat{K}_{ee}h_{nlp}\right)^{(0)} A_e^{\upsilon(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right),\ \ \frac{1}{m_iT}h_{nlp}=-\left(K_{ii}h_{nlp}\right)^{(-1)} A_i^{\upsilon(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right). \tag{5.57}$$

Матричний вигляд рівнянь (5.57):

$$10 n_i m_i T \delta_{k0} = -\sum_s W_{ik,is}^{(-3)} g_{is}^{\upsilon(1)}, \ 10 n_e m_e T = -\sum_s W_{ek,es}^{(0)} g_{es}^{\upsilon(0)}. \tag{5.58}$$

Як буде видно в подальшому, непоганий збіг з результатами Брагінського дає й наближення одного полінома в (5.58), тому для простоти обмежимось наближенням одного полінома. Маємо

$$g_{e0}^{\upsilon(0)} = -\frac{5}{2^3\left(n_e + \sqrt{2} n_i z^2\right)} \frac{T^{1/2}}{e^4 L\left(\pi m_e\right)^{1/2}}, \quad g_{i0}^{\upsilon} = -\frac{5}{2^3 z^4 n_i} \frac{T^{1/2}}{e^4 L\left(\pi m_e\right)^{1/2}} \sigma, \tag{5.59}$$

звідки отримаємо такі результати для $A_{anl}^{\upsilon}\left(p\right)$:

$$\begin{gathered} A_{enl}^{\upsilon}\left(p\right) = -\frac{5}{2^3\left(n_e + \sqrt{2} n_i z^2\right)} \frac{T^{1/2}}{e^4 L\left(\pi m_e\right)^{1/2}} h_{nlp} + O\left(\sigma\right), \\ A_{inl}^{\upsilon}\left(p\right) = -\frac{5}{2^3 z^4 n_i} \frac{T^{1/2}}{e^4 L\left(\pi m_e\right)^{1/2}} h_{nlp} \sigma^{-1} + O\left(\sigma\right). \end{gathered} \tag{5.60}$$

5.2.5. Кінетичні коефіцієнти стандартного гідродинамічного стану

Цей пункт присвячено пошуку кінетичних коефіцієнтів стандартного гідродинамічного стану системи. Згідно зі стандартним означенням [69], кінетичні коефіцієнти стандартного гідродинамічного стану системи вводяться так:

$$\begin{gathered} t_{nl}^{o(1)} = -\eta\left(\frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l} + \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_n} - \frac{2}{3}\delta_{nl}\frac{\partial \upsilon_m}{\partial x_m}\right) - \zeta \delta_{nl} \frac{\partial \upsilon_m}{\partial x_m}, \\ \pi_{en}^{o(1)} \equiv -D_e^T \frac{\partial \ln T}{\partial x_n} - \frac{n^2 m_e m_i}{m_e n_e + m_i n_i} D_{ei} d_n, \ \pi_{in}^{o(1)} \equiv -D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial x_n} - \frac{n^2 m_e m_i}{m_e n_e + m_i n_i} D_{ie} d_n, \\ q_n^{o(1)} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_n} + T\left(\frac{\xi}{D_{ei}} + \frac{5}{2}\frac{1-\sigma^2}{m_e}\right)\pi_{en}^{o(1)}, \end{gathered} \tag{5.61}$$

де

$$\begin{gathered} d_n = \frac{n_e n_i \left(m_i - m_e\right)}{\left(m_e n_e + m_i n_i\right)\left(n_e + n_i\right)} \frac{\partial \ln T}{\partial x_n} + \\ + \frac{n_e n_i m_i}{\left(m_e n_e + m_i n_i\right)\left(n_e + n_i\right)}\left(\frac{\partial \ln n_e}{\partial x_n} - \sigma^2 \frac{\partial \ln n_i}{\partial x_n}\right). \end{gathered} \tag{5.62}$$

У формулах (5.61) κ – теплопровідність системи, D_a^T та D_{ab}^T – коефіцієнти термодифузії та дифузії, η та ζ – зсувна та об’ємна в’язкість та ξ – додатковий кінетичний коефіцієнт.

На основі означень (4.4) та (5.8) маємо з рівнянь (5.61):

$$D_{ei} = -D_{ie} = -\frac{n_i n_e}{n_e + n_i} T g_{e0}^{N_e(0)} + O(\sigma), \quad \xi = \frac{5 n_i n_e T}{2 m_e (n_e + n_i)} g_{e1}^{N_e(0)} + O(\sigma),$$

$$D_e^T = -D_i^T = T\left(m_e n_e^2 g_{e0}^{N_e(0)} - n_e m_e T g_{e0}^{T(0)}\right) + O(\sigma), \quad \zeta = 0, \tag{5.63}$$

$$\kappa = \frac{5}{2} n_e T^2 \left(g_{e1}^{T(0)} - \frac{g_{e1}^{N_e(0)}}{g_{e0}^{N_e(0)}} g_{e0}^{T(0)} \right) + O(\sigma), \quad \eta = -n_i m_i T^2 g_{i0}^{\upsilon(0)} + O(\sigma^0).$$

Щодо в'язкості, то маємо такий числовий результат у головному порядку за σ:

$$\eta^{(-1)} = 0,353 \frac{T^{5/2} m_e^{1/2}}{e^4 z^4 L} \sigma^{-1}, \tag{5.64}$$

Результат Брагінського для в'язкості

$$\eta_{Brag}^{(-1)} = 0,406 \frac{T^{5/2} m_e^{1/2}}{e^4 z^4 L} \sigma^{-1}. \tag{5.65}$$

Як бачимо, результати (5.64) та (5.65) відрізняються менш ніж на 14%, що є досить добрим збігом, тому в цій роботі можемо для простоти обмежитись наближенням одного полінома в (5.60). Щодо результатів для теплопровідності, маємо такі числові значення:

Таблиця 5.5. Порівняння результатів для теплопровідності з результатами Брагніського

z	$\kappa^{(0)} \cdot \frac{e^4 L m_e^{1/2}}{T^{5/2}}$, наш результат	$\kappa^{(0)} \cdot \frac{e^4 L m_e^{1/2}}{T^{5/2}}$, результат Брагінського
1	0,946	0,945
2	0,732	0,733
3	0,605	0,608
4	0,518	0,516

Як бачимо з таблиці 5, збіг з результатами Брагінського є чудовим. Щодо виразів для коефіцієнтів дифузії та термодифузії, вирази для яких наведені в (5.63), то ці коефіцієнти в явному вигляді в роботі Брагінського не виписувалися. Вагомим аргументом щодо правильності їх отримання є те, що вони отримані на основі тих же самих функцій, що й теплопровідність, а теплопровідність чудово збігається з відомими результатами. Зауважимо, що результат для частин ФРК при градієнтах густин та температури в наближенні двох поліномів має якісно таку ж поведінку, як і результат, отриманий у наближенні трьох поліномів, проте чисельно відрізняється від нього більш ніж у 2 рази. Тому наближення двох поліномів для цих функцій не є достатнім.

5.3. Вплив релаксаційних процесів на гідродинаміку плазми

У цьому підрозділі досліджується вплив релаксації на стандартну гідродинаміку системи. При виводі формул цього підрозділу важливу роль відіграють ФРК у порядках $\mu^1 g^0$ (див. (4.21), (4.22) та (4.95)) та результати для ФРК у порядку $\mu^0 g^1$, наведені в попередньому підрозділі. Зауважимо, що результати для ФРК у порядку $\mu^1 g^0$ наведені в системі відліку $\upsilon_n = 0$, у лабораторній системі відліку формули (4.21) та (4.22) мали б такий вигляд:

$$f_{ap}^{(1,0)} = w_{ap}\left(A_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)\tau + B_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)p_n u_n \right)\Big|_{p\to p-m_a\upsilon}. \tag{5.66}$$

Однією з основних задач цього підрозділу є пошук ФРК у порядку $\mu^1 g^1$. У цьому порядку ФРК мають вигляд

$$\begin{gathered} f_{ap}^{(1,1)} = w_{ap}\left(A_{an}^{\tau}(p)\frac{\partial\tau}{\partial x_n} + A_{an}^{\tau T}(p)\tau\frac{\partial T}{\partial x_n} + \sum_b A_{an}^{\tau N_b}(p)\tau\frac{\partial n_b}{\partial x_n} + A_{anl}^{\tau\upsilon}(p)\tau\frac{\partial\upsilon_n}{\partial x_l} + \right. \\ \left. + A_{anl}^{u}(p)\frac{\partial u_n}{\partial x_l} + A_{anl}^{uT}(p)u_n\frac{\partial T}{\partial x_l} + \sum_b A_{anl}^{uN_b}(p)u_n\frac{\partial n_b}{\partial x_l} + A_{anlm}^{u\upsilon}(p)u_n\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x_m} \right)\Bigg|_{p\to p-m_a\upsilon}. \end{gathered} \tag{5.67}$$

Рівняння (5.67) розв'язується за вищенаведеним алгоритмом. Як бачимо, воно містить такі невідомі функції:

1) вектори $A_{an}^{\tau}(p)$, $A_{an}^{\tau T}(p)$, $A_{an}^{\tau N_b}(p)$
2) тензори другого рангу $A_{anl}^{\tau\upsilon}(p)$, $A_{anl}^{u}(p)$, $A_{anl}^{uT}(p)$, $A_{anl}^{uN_b}(p)$
3) тензор третього рангу $A_{anlm}^{u\upsilon}(p)$.

З міркувань обертальної інваріантності та з вищенаведених міркувань щодо вибору поліномів вектори шукаємо у вигляді

$$V_{an}(p) = p_n \sum_{m,s\ge 0} g_{as}^{(m)} S_s^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right), \tag{5.68}$$

тензори другого рангу шукаємо у вигляді розкладання на незвідні тензори

$$V_{anl}(p) = \delta_{nl}\sum_{m,s\ge 0} g_{as\delta}^{(m)} S_s^{1/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right) + h_{nlp}\sum_{m,s\ge 0} g_{asTr}^{(m)} S_s^{5/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right). \tag{5.69}$$

Щодо тензора третього рангу $A_{anlm}^{u\upsilon}(p)$, то на основі (5.11) можна показати, що в головному порядку за σ цей тензор має такі властивості:

$$A_{anlm}^{u\upsilon(0)}(p) = A_{anml}^{u\upsilon(0)}(p),\; A_{anll}^{u\upsilon(0)}(p) = 0. \tag{5.70}$$

Як відомо [130], незвідний тензор – це такий тензор, що згортка його за будь-якою парою індексів дає нуль. Очевидно, що такий тензор ортогональний дельта-символам. Будь-який тензор $\mathbf{T}$ можна розкласти на незвідний тензор та δ-частину:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{irreducible} + \mathbf{T}_{\delta}. \tag{5.71}$$

У випадку довільного тензора T_{nml} третього рангу маємо:

$$T_{nml} = \overline{T}_{nml} + A_n\delta_{ml} + B_m\delta_{nl} + C_l\delta_{nm}, \tag{5.72}$$

де $\overline{T}_{nml}$ – незвідний тензор. У конкретному випадку, який нас цікавить, маємо

$$T_{nml} = T_{nlm},\ \ T_{nll} = 0, \tag{5.73}$$

звідки незвідний тензор $\overline{T}_{nml}$ повинен мати властивості

$$\overline{T}_{nlm} = \overline{T}_{nml},\ \ \overline{T}_{nll} = \overline{T}_{lnl} = \overline{T}_{lln} = 0. \tag{5.74}$$

На основі властивостей (5.74) знаходимо тензор $\overline{T}_{nlm}$ та вектори A_n, B_m, C_l:

$$\begin{gathered} T_{nml} = \overline{T}_{nml} + T^{\delta}_{nml},\ \overline{T}_{lnm} = T_{lnm} + \frac{1}{5}T_{qql}\delta_{nm} - \frac{3}{10}T_{qqn}\delta_{ml} - \frac{3}{10}T_{qqm}\delta_{nl}, \\ T^{\delta}_{lnm} = -\frac{1}{5}T_{qql}\delta_{nm} + \frac{3}{10}T_{qqn}\delta_{ml} + \frac{3}{10}T_{qqm}\delta_{nl}. \end{gathered} \tag{5.75}$$

На основі розкладу (5.75) маємо

$$\begin{gathered} A^{u\upsilon(0)}_{anlm}(p) = y_{nlmp}\sum_{n,s\geq 0} g^{u\upsilon(n)}_{as\delta} S^{3/2}_s\left(\beta\varepsilon_{ap}\right) + Y_{nlmp}\sum_{n,s\geq 0} g^{u\upsilon(n)}_{asIr} S^{3/2}_s\left(\beta\varepsilon_{ap}\right), \\ y_{mnlp} = p_l\delta_{nm} + p_n\delta_{ml} - \frac{2}{3}p_m\delta_{nl}, \\ Y_{mnlp} = p_n p_m p_l - \frac{1}{5}p^2\left(p_n\delta_{ml} + p_m\delta_{nl} + p_l\delta_{nm}\right). \end{gathered} \tag{5.76}$$

Подальше виведення ФРК $f^{(1,1)}_{ap}$ за вищенаведеним алгоритмом є досить громіздким, тому не будемо його надавати детально. Як приклад, наведемо тут відносно негроміздке виведення функцій $A^{\tau}_{an}(p)$. Явний вигляд результатів для ФРК $f^{(1,1)}_{ap}$ надано в Додатку 2.

З (5.13) на основі отриманих вище результатів можна отримати точні інтегральні рівняння для функцій $A^{\tau}_{an}(p)$ (вони наведені в системі відліку $\upsilon_n = 0$) :

$$\begin{gathered} \frac{p_l}{m_e}\left(-\beta\vartheta_a S^{3/2}_1\left(\beta\varepsilon_{ap}\right) - \tilde{B}_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right) + \tilde{A}_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)\phi_a\right) - A^{\tau}_{al}(p)\left(\lambda^{(2)}_T + \lambda^{(4)}_T\right) + \\ +\left(\beta\vartheta_a + \tilde{B}_a\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)\right)\frac{p_n}{m_e n_e}G^{\tau}_{ln} = -\sum_c \hat{K}_{ac}A^{\tau}_{cl}(p), \end{gathered} \tag{5.77}$$

$$\tilde{B}_e\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=B_e^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right),\ \ \tilde{B}_i\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=B_i^{(4)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right),$$
$$\tilde{A}_e\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=A_e^{(2)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right),\ \ \tilde{A}_i\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=A_i^{(3)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right),$$
$$G_{ln}^{\tau}=\sum_b\left\{p_l,A_{bn}^{\tau}(p)\right\}_{eb},\ \vartheta_e=1,\ \vartheta_i=-\frac{n_e}{n_i}\sigma^2,\ \phi_e=1,\ \phi_i=\sigma^2.$$

Як бачимо, рівняння (5.77) містять поправки до результатів НЛР, отримані в (4.95), тож вони дозволяють отримувати коректні результати не лише в головному порядку за σ, проте в цій роботі обмежимось обчисленням лише головного порядку. Зауважимо, що ті частини ФРК $f_{ap}^{(1,1)}$, які містять градієнти τ та u_n, присутні в лінеаризованій теорії (тобто в теорії, яка є лінійною за малими відхиленнями ПСО від їх постійних рівноважних значень) та вони є важливими не лише для потоків та кінетичних коефіцієнтів системи, але й для мод.

У порядку σ^0 рівняння (5.77) має вигляд
$$\frac{p_n\beta G_{ln}^{\tau(0)}}{m_e n_e}-\frac{\beta p_l}{m_e}S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=-\left(\hat{K}_{ee}p_l\right)^{(0)}A_e^{\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)-\left(\hat{K}_{ei}p_l\right)^{(0)}A_i^{\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right),$$
$$\left(\hat{K}_{ii}p_l\right)^{(0)}A_i^{\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0. \tag{5.78}$$

Додаткові умови (5.13) накладають таке обмеження на коефіцієнти при поліномах:
$$\forall n\geq 0\quad g_{a0}^{\tau(n)}=0. \tag{5.79}$$

З урахуванням (5.79) аналогічно вищенаведеним викладкам маємо
$$A_i^{\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=0. \tag{5.80}$$

Тоді перше рівняння з (5.78) набуде вигляду
$$\frac{p_n\beta G_{ln}^{\tau(0)}}{m_e n_e}-\frac{\beta p_l}{m_e}S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=-\left(\hat{K}_{ee}p_l\right)^{(0)}A_e^{\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right), \tag{5.81}$$

Матричний вигляд рівняння (5.81):
$$\delta_{k0}G_{nn}^{\tau(0)}-\frac{15}{2}n_e\delta_{k1}=-\sum_{s\geq 1}g_{es}^{\tau(0)}G_{ek,es}^{(0)}. \tag{5.82}$$

При $k=0$ рівняння (5.82) є тотожністю, ще можна показати на основі явного вигляду інтегральних дужок, а також означення G_{ln}^{τ} (див. (5.77)). Це свідчить про те, що наша обчислювальна процедура не є суперечливою. При $k\geq 1$ можна отримати розв'язок рівняння (5.82); для простоти отримаємо його в наближені одного полінома:
$$g_{e1}^{\tau(0)}=\frac{15n_e}{2G_{e1,e1}^{(0)}}=\frac{15}{2\left(4\sqrt{2}n_e+13z^2n_i\right)}\frac{1}{e^4L}\sqrt{\frac{T}{2\pi m_e}}, \tag{5.83}$$

тож маємо

$$A_e^{\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)=\frac{15}{2\left(4\sqrt{2}n_e+13z^2n_i\right)}\frac{1}{e^4L}\sqrt{\frac{T}{2\pi m_e}}S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right). \quad (5.84)$$

У порядку σ^1 рівняння (5.77) для $a=i$ має вигляд

$$\begin{gathered}-\frac{\beta}{n_i m_i}p_n G_{ln}^{\tau(0)}+\frac{n_e\beta}{m_i n_i}p_l S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)=\\=-\left(\hat{K}_{ie}p_l\right)^{(1)}A_e^{\tau(0)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)-\left(\hat{K}_{ii}p_l\right)^{(0)}A_i^{\tau(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right).\end{gathered} \quad (5.85)$$

Рівняння (5.77) у порядку σ^1 для $a=e$ необхідне для пошуку $A_e^{\tau(1)}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)$, проте обмежимось пошуком лише головного порядку функцій $A_a^{\tau}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)$ за σ. Матричний вигляд рівняння (5.85):

$$-\delta_{k0}G_{nn}^{\tau(0)}+\frac{15}{2}n_e\delta_{k1}=-g_{e1}^{\tau(0)}G_{ik,e1}^{(0)}-\sum_{s\geq 1}g_{is}^{\tau(1)}G_{ik,is}^{(-1)}. \quad (5.86)$$

Для $k=0$ рівняння (5.86) є тотожністю, для $k\geq 1$ маємо систему рівнянь для коефіцієнтів при поліномах у функції $A_i^{\tau(1)}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)$. Для простоти отримаємо розв'язок у наближенні одного полінома. Використовуючи (5.34), маємо

$$g_{is}^{\tau(1)}=-\frac{15n_e}{2G_{i1,i1}^{(-1)}}=-\frac{15n_e}{16\pi z^4e^4Ln_i^2}\sqrt{\frac{\pi T}{m_e}}\sigma. \quad (5.87)$$

Тож для функцій $A_{an}^{\tau}\left(p\right)$ маємо

$$\begin{gathered}A_{en}^{\tau}\left(p\right)=\frac{15}{2\left(4\sqrt{2}n_e+13z^2n_i\right)}\frac{1}{e^4L}\sqrt{\frac{T}{2\pi m_e}}p_nS_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+O\left(\sigma\right),\\A_{in}^{\tau}\left(p\right)=-\frac{15n_e}{16\pi z^4e^4Ln_i^2}\sqrt{\frac{\pi T}{m_e}}\sigma p_nS_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)+O\left(\sigma\right).\end{gathered} \quad (5.88)$$

Щодо інших функцій з (5.67), їх виведення й результати для них є набагато більш громіздкими. Результати для них надані в Додатку 2.

На основі отриманих ФРК $f_{ap}^{(1,1)}$ маємо такі результати для потоків. Потік імпульсу електронів:

$$\begin{gathered}t_{eqw}^{o(1,1)}=\left[g_{e0Tr}^{\tau\upsilon(0)}\Phi_{qnwl}^{e}+O\left(\sigma\right)\right]\tau\frac{\partial\upsilon_n}{\partial x_l}+\left[g_{e0Tr}^{u(0)}\Phi_{qnwl}^{e}+O\left(\sigma^2\right)\right]\frac{\partial u_n}{\partial x_l}+\\+\left[g_{e0Tr}^{uT(0)}\Phi_{qnwl}^{e}+\frac{2}{3}n_em_eTg_{e0}^{T(0)}\delta_{nl}\delta_{qw}+O\left(\sigma\right)\right]u_n\frac{\partial T}{\partial x_l}+\end{gathered} \quad (5.89)$$

$$+\left[g_{e0Tr}^{uN_e(0)}\Phi_{qnwl}^{e}+\frac{2}{3}n_e m_e T g_{e0}^{N_e(0)}\delta_{nl}\delta_{qw}+O(\sigma)\right]u_n\frac{\partial n_e}{\partial x_l}+$$

$$+\left[g_{e0Tr}^{uN_i(0)}\Phi_{qnwl}^{e}+O(\sigma)\right]u_n\frac{\partial n_i}{\partial x_l},\ \ \Phi_{qnwl}^{a}\equiv\left(\delta_{qn}\delta_{wl}+\delta_{ql}\delta_{wn}-\frac{2}{3}\delta_{qw}\delta_{nl}\right)n_a m_a T^2;$$

потік імпульсу іонів:

$$t_{iqw}^{o(1,1)}=\left[g_{i0Tr}^{\tau\upsilon(1)}\Phi_{qnwl}^{i}+O\left(\sigma^0\right)\right]\tau\frac{\partial\upsilon_n}{\partial x_l}+\left[g_{i0Tr}^{u(4)}\Phi_{qnwl}^{i}+O\left(\sigma^3\right)\right]\frac{\partial u_n}{\partial x_l}+$$
$$+\left[-\frac{2}{3}n_e m_e T g_{e0}^{T(0)}\delta_{qw}\delta_{nl}+O(\sigma)\right]u_n\frac{\partial T}{\partial x_l}+$$
$$\left[-\frac{2}{3}n_e m_e T g_{e0}^{N_e(0)}\delta_{qw}\delta_{nl}+O(\sigma)\right]u_n\frac{\partial n_e}{\partial x_l}+ \qquad (5.90)$$
$$+\left[g_{i0Tr}^{uN_i(4)}\Phi_{qnwl}^{i}-\frac{2}{3}n_e m_e T g_{e0}^{N_i(2)}\delta_{qw}\delta_{nl}+O\left(\sigma^3\right)\right]u_n\frac{\partial n_i}{\partial x_l};$$

потік енергії електронів:

$$q_{ew}^{o(1,1)}=\left[\Phi_e g_{e1}^{\tau(0)}+O(\sigma)\right]\frac{\partial\tau}{\partial x_n}+\left[\Phi_e g_{e1}^{\tau T(0)}\delta_{nw}+O(\sigma)\right]\tau\frac{\partial T}{\partial x_n}+$$
$$+\left[\Phi_e g_{e1}^{\tau N_e(0)}\delta_{nw}+O(\sigma)\right]\tau\frac{\partial n_e}{\partial x_n}+\left[\Phi_e g_{e1}^{\tau N_i(2)}\delta_{nw}+O\left(\sigma^3\right)\right]\tau\frac{\partial n_i}{\partial x_n}+ \qquad (5.91)$$
$$+\left(\Phi_e g_{e1\delta}^{u\upsilon(0)}\left(\delta_{nw}\delta_{lm}+\delta_{mw}\delta_{nl}-\frac{2}{3}\delta_{lw}\delta_{mn}\right)+O(\sigma)\right)u_n\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x_m},\ \Phi_a\equiv-\frac{5}{2}n_a T^2;$$

потік енергії іонів:

$$q_{iw}^{o(1,1)}=\left[\Phi_i g_{i1}^{\tau(1)}\delta_{nw}+O\left(\sigma^2\right)\right]\frac{\partial\tau}{\partial x_n}+\left[\Phi_i g_{i1}^{\tau T(1)}\delta_{nw}+O\left(\sigma^2\right)\right]\tau\frac{\partial T}{\partial x_n}+$$
$$+\left[\Phi_i g_{i1}^{\tau N_e(1)}\delta_{nw}+O\left(\sigma^2\right)\right]\tau\frac{\partial n_e}{\partial x_n}+\left[\Phi_i g_{i1}^{\tau N_i(1)}\delta_{nw}+O\left(\sigma^2\right)\right]\tau\frac{\partial n_i}{\partial x_n}+ \qquad (5.92)$$
$$+\left(\Phi_i g_{i0\delta}^{u\upsilon(1)}\left(\delta_{mw}\delta_{nl}+\delta_{nw}\delta_{ml}-\frac{2}{3}\delta_{wl}\delta_{nl}\right)+O\left(\sigma^2\right)\right)u_n\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x_m}.$$

Зауважимо, що не всі члени в (5.89)–(5.92) мають аналоги в стандартній гідродинаміці. Як бачимо, завдяки релаксації швидкості потоки імпульсу містять градієнти густин та температури, а потоки енергії – градієнт масової швидкості. Такі внески в рамках стандартної гідродинаміки відсутні. Також зауважимо, що хоча наші поправки (4.95) є поправками більш високого порядку за σ, вони дають внески до деяких результатів з (5.89)–(5.92) навіть у головному порядку за σ (див. Додаток 2).

Випишемо на основі (5.89) та (5.90) сумарний потік імпульсу в головному порядку за σ:

$$t_{nl}^{o(1,1,\sigma^{-1})} = g_{i0Tr}^{\tau\upsilon(1)} n_i m_i T^2 \tau \left(\frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l} + \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_n} - \frac{2}{3}\delta_{nl} \frac{\partial \upsilon_m}{\partial x_m} \right). \tag{5.93}$$

Для $g_{i0Tr}^{\tau\upsilon(1)}$ можна отримати такий результат:

$$g_{i0Tr}^{\tau\upsilon(1)} = \frac{n_e}{16 z^4 e^4 Ln_i^2 \sqrt{\pi m_e T}} \left(10 + \frac{15}{2z^4} \right) \sigma . \tag{5.94}$$

Аналогічний результат стандартної гідродинаміки:

$$t_{nl}^{o(0,1,\sigma^{-1})} = g_{i0}^{\upsilon(1)} n_i m_i T^2 \left(\frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l} + \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_n} - \frac{2}{3}\delta_{nl} \frac{\partial \upsilon_m}{\partial x_m} \right). \tag{5.95}$$

Тож у головному порядку за σ маємо релаксаційну поправку до в’язкості стандартного гідродинамічного стану згідно з означенням (5.61):

$$\eta = \eta_h^{(-1)} - n_i m_i T^2 g_{i0Tr}^{\tau\upsilon(1)} \tau + O\left(\sigma^0\right), \tag{5.96}$$

Тобто релаксаційна поправка (5.96) зменшує в’язкість.

Випишемо на основі (5.91) та (5.92) сумарний потік енергії в головному порядку за σ:

$$\begin{aligned} q_n^{o(1,1,\sigma^0)} = &-\frac{5}{2} n_e T^2 g_{e1}^{\tau T(0)} \tau \frac{\partial T}{\partial x_n} - \frac{5}{2} n_e T^2 g_{e1}^{\tau N_e(0)} \tau \frac{\partial n_e}{\partial x_n} - \frac{5}{2} n_e T^2 g_{e1}^{\tau(0)} \frac{\partial \tau}{\partial x_n} - \\ &-\frac{5}{2} n_e T^2 g_{e1\delta}^{u\upsilon(0)} \left(u_n \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l} + u_l \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_n} - \frac{2}{3} u_l \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l} \right). \end{aligned} \tag{5.97}$$

Явні вирази для коефіцієнтів у (5.97) досить громіздкі, тому наведемо деякі їх числові значення:

Таблиця 5.6. Чилові значення коефіцієнтів у потоці енергії $q_n^{o(1,1,\sigma^0)}$

z	$g_{e1}^{\tau(0)} \cdot e^4 Ln_i \sqrt{\frac{m_e}{T}}$	$g_{e1}^{\tau N_e(0)} \cdot e^4 Ln_i^2 \sqrt{\frac{m_e}{T}}$	$g_{e1}^{\tau T(0)} \cdot e^4 Ln_i \sqrt{m_e T}$	$g_{e1\delta}^{u\upsilon(0)} \cdot e^4 Ln_i \sqrt{\frac{1}{m_e T}}$
1	0,946	0,343	0,577	0,188
2	0,732	0,039	0,14	0,069
3	0,605	0,011	0,06	0,036
4	0,518	0,004	0,033	0,022

Як бачимо, до потоку енергії внески, які не мають аналогів у стандартній гідродинаміці, увійдуть вже в головному порядку за σ. Перші два внески в правій частині (5.97) мають аналоги в стандартній гідродинаміці, а останні два – ні. На їх основі можна вводити нові кінетичні коефіцієнти. Якщо перші два внески в правій частині (5.97) зібрати згідно з означенням (5.61), то матимемо релаксаційну поправку до теплопровідності стандартного гідродинамічного стану в головному порядку за σ :

$$\kappa = \kappa_h^{(0)} + \frac{5}{2} n_e T \left(g_{e1}^{\tau T(0)} - \frac{g_{e1}^{\tau N_e(0)}}{g_{e0}^{N_e(0)}} g_{e0}^{T(0)} \right) \tau + O(\sigma). \qquad (5.98)$$

З (5.98) та таблиці 6 бачимо, що релаксаційна поправка (5.98) до теплопровідності стандартного гідродинамічного стану зменшить теплопровідність.

Щодо коефіцієнтів дифузії та термодифузії, можна показати, що релаксація їх не змінить внаслідок додаткових умов (5.13).

Висновки до розділу 5

На основі ідеї узагальнення методу Чемпена–Енскога, запропонованої в цій роботі, досліджено вплив релаксаційних процесів на гідродинаміку плазми. Плазма описується параметрами скороченого опису стандартного гідродинамічного стану (густинами компонент, масовою швидкістю та температурою), а також відхиленнями температури та швидкості електронів від їх стандартних гідродинамічних значень. Показано, що цей набір параметрів можна використовувати замість стандартного набору параметрів, якими є густини, температури та швидкості компонент, оскільки він є більш зручним для опису релаксаційних процесів у просторово-неоднорідній плазмі. Показано, що отримані в монографії результати для кінетичних коефіцієнтів стандартної гідродинаміки добре узгоджуються із відомими результатами Брагінського.

Також отримано рівняння для функцій розподілу компонент у першому порядку за малими відхиленнями та малими градієнтами. При цьому враховано поправки до результатів наближення локальної рівноваги, які отримані в просторово-однорідному випадку. Одержані рівняння для простоти розв’язані в наближенні одного полінома Соніна. Хоча отримані поправки до наближення локальної рівноваги є поправками більш високого порядку за відношенням мас, в деякі частини дослідженої ці поправки дадуть внесок у головному порядку за відношенням мас. Знайдено потоки енергії та імпульсу компонент у першому порядку за відхиленнями та градієнтами, тобто на відміну від відомих у літературі результатів ураховано релаксаційні внески в потоках. Показано, що не всі члени з цих потоків мають аналоги в стандартній гідродинаміці: завдяки релаксації швидкості потоки імпульсу містять градієнти густин та температури, а потоки енергії – градієнт масової швидкості. Отримано релаксаційні поправки до кінетичних коефіцієнтів стандартної гідродинаміки плазми на основі тих членів у потоках, які мають аналоги в рамках стандартної гідродинаміки. Показано, що ці поправки зменшують в’язкість та теплопровідність стандартного гідродинамічного стану системи.

Результати розділу 5 опубліковано в наших роботах [137 – 139].

РОЗДІЛ 6
ГІДРОДИНАМІЧНІ ТА РЕЛАКСАЦІЙНІ МОДИ ПОВНІСТЮ ІОНІЗОВАНОЇ ПЛАЗМИ

Цей розділ присвячено пошуку гідродинамічних та кінетичних мод повністю іонізованої плазми. У цьому розділі вивчаються моди рівнянь Власова та Ландау–Власова. Нагадаємо, що, як відомо [3], моди називають кінетичними, якщо в гідродинамічному наближенні їх дисперсійний закон $\lambda\left(k=0\right)\neq 0$, та гідродинамічними, якщо $\lambda\left(k=0\right)=0$. В роботі розглядається задача дослідження мод кінетичних рівнянь Ландау та Ландау–Власова.

Зауважимо, що зазвичай моди плазми вивчаються на основі рівнянь Власова [100] або Ландау–Власова [101] та, як відомо, самоузгоджений член має більш вагомий вплив на моди, ніж інтеграл зіткнень. Результати, які отримуються в дослідженні задачі на основі кінетичного рівняння Власова, відомі – це так звані плазмові моди. Їх можна отримати як безпосередньо з кінетичного рівняння [100, 101], так і на основі рівняння Ліувілля та методу функцій Гріна [119]. Проте задача пошуку мод на основі кінетичного рівняння Ландау, яке не містить самоузгоджений член, є важливою. Отримані в рамках цієї задачі результати показують, який вплив має саме інтеграл зіткнень на моди системи. Як буде видно в подальшому, на основі кінетичного рівняння Ландау будуть отримані релаксаційні моди, які, як і плазмові моди, є кінетичними модами. Ще одна вагома причина досліджувати моди кінетичного рівняння Ландау є такою. Кінетичне рівняння Ландау описує лише короткодіючу частину кулонівської взаємодії в плазмі. Далекодіючу взаємодію можна описати за допомогою самоузгодженого електромагнітного поля. При цьому доцільною є ідея опису плазми як взаємодіючих поля та системи заряджених частинок з короткодіючою взаємодією [112, 140]. Цікавою є ідея побудови кінетичної теорії та мод плазми на основі рівняння Ліувілля та гамільтонінану, отриманого в роботі [112]. У рамках такої теорії пошук мод кінетичного рівняння Ландау є актуальним, бо він дозволяє зменшити розмірність задачі. Зауважимо, що аналогічні ідеї використовуються не лише для плазми, аде й для інших систем (див. [141–143]).

Альтернативним підходом є дослідження задачі на основі кінетичного рівняння Ландау–Власова. Моди системи будуються на основі стандартного підходу в рамках методу Чемпена–Енскога [102, 120]. Наше дослідження мод кінетичного рівняння Ландау–Власова є важливим, бо наш метод дозволяє вийти за відому модель «желе» [100], в якій підсистема іонів вважається рівноважною.

6.1. Гідродинамічні та релаксаційні моди кінетичного рівняння Ландау

Цей підрозділ присвячено дослідженню мод плазми на основі кінетичного рівняння Ландау. Для побудови мод системи потрібно лінеаризувати теорію поблизу рівноважного стану системи. Будується лінійна теорія за малими відхиленнями ПСО системи від їх рівноважних значень; підкреслимо, що саме рівноважних, а не стандартних гідродинамічних значень. Будемо працювати в системі відліку, де рівноважне значення масової швидкості дорівнює нулю:

$$
\begin{gathered}
n_a(x,t)=n_a^{eq}+\delta n_a(x,t),\ T(x,t)=T^{eq}+\delta T(x,t),\\
\upsilon_n(x,t)=\delta\upsilon_n(x,t),\ \tau(x,t)=\delta\tau(x,t),\ u_n(x,t)=\delta u_n(x,t),
\end{gathered}
\tag{6.1}
$$

де ξ_α^{eq} – рівноважне постійне значення ПСО ξ_α, а $\delta\xi_\alpha(x,t)$ – мале відхилення ПСО ξ_α від рівноважного значення. У подальшому для простоти позначень індекс «eq» опускаємо.

Для дослідження мод потрібні часові рівняння для ПСО в рамках лінеаризованої теорії – у правих частинах рівнянь (5.7) залишимо лише лінійні за $\delta\xi_\alpha(x,t)$ члени. Після нескладних перетворень отримаємо:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\delta n_e}{\partial t}=\gamma_{eN_e}\frac{\partial^2\delta n_e}{\partial x_n\partial x_n}+\gamma_{eN_i}\frac{\partial^2\delta n_i}{\partial x_n\partial x_n}-n_e\frac{\partial\delta\upsilon_n}{\partial x_n}+\gamma_{eT}\frac{\partial^2\delta T}{\partial x_n\partial x_n}-n_e\frac{\partial\delta u_n}{\partial x_n},\\
\gamma_{eN_e}=-n_eTg_{e0}^{N_e(0)}+O(\sigma),\quad \gamma_{eN_i}=-n_eTg_{e0}^{N_i(2)}+O(\sigma^3),\\
\gamma_{eT}=-n_eTg_{e0}^{T(0)}+O(\sigma);\\
\frac{\partial\delta n_i}{\partial t}=\gamma_{iN_e}\frac{\partial^2\delta n_e}{\partial x_n\partial x_n}+\gamma_{iN_i}\frac{\partial^2\delta n_i}{\partial x_n\partial x_n}-n_i\frac{\partial\delta\upsilon_n}{\partial x_n}+\gamma_{iT}\frac{\partial^2\delta T}{\partial x_n\partial x_n}+\sigma^2n_e\frac{\partial\delta u_n}{\partial x_n},\\
\gamma_{iN_e}=-n_iTg_{e0}^{N_e(2)}+O(\sigma^3),\ \gamma_{iN_i}=-n_iTg_{i0}^{N_i(4)}+O(\sigma^5),\\
\gamma_{iT}=-n_iTg_{i0}^{T(2)}+O(\sigma^3);\\
\frac{\partial\delta\upsilon_n}{\partial t}=\beta_N\frac{\partial\delta n_e}{\partial x_n}+\beta_N\frac{\partial\delta n_i}{\partial x_n}+\eta_\upsilon\left[\frac{1}{3}\frac{\partial^2\delta\upsilon_l}{\partial x_n\partial x_l}+\frac{\partial^2\delta\upsilon_n}{\partial x_l\partial x_l}\right]+\beta_T\frac{\partial\delta T}{\partial x_n}+\\
+\eta_u\left[\frac{\partial^2u_n}{\partial x_l\partial x_l}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2u_l}{\partial x_l\partial x_n}\right],\ \beta_N=-\frac{T}{m_en_i}\sigma^2+O(\sigma^4),\\
\eta_u=-zg_{e0Tr}^{u(0)}T^2\sigma^2+O(\sigma^4),\ \eta_\upsilon=-T^2g_{i0}^{\upsilon(1)}+O(\sigma^2);\\
\frac{\partial\delta T}{\partial t}=\alpha_{N_e}\frac{\partial^2\delta n_e}{\partial x_n\partial x_n}+\alpha_{N_i}\frac{\partial^2\delta n_i}{\partial x_n\partial x_n}-\frac{2}{3}T\frac{\partial\delta\upsilon_n}{\partial x_n}+\alpha_T\frac{\partial^2\delta T}{\partial x_n\partial x_n}+\\
+\alpha_u\frac{\partial\delta u_n}{\partial x_n}+\alpha_\tau\frac{\partial^2\delta\tau}{\partial x_n\partial x_n},\ \alpha_{N_e}=\frac{2zT^2}{3(z+1)}\left(\frac{5}{2}g_{e1}^{N_e(0)}-g_{e0}^{N_e(0)}\right)+O(\sigma),
\end{gathered}
\tag{6.2}
$$

$$\alpha_{N_i} = \frac{2zT^2}{3(z+1)}\left(\frac{5}{2}g_{e1}^{N_i(2)} - g_{e0}^{N_i(2)}\right) + O(\sigma^3),\ \alpha_\tau = \frac{5z}{3(z+1)}g_{e1}^{\tau(0)}T^2 + O(\sigma),$$

$$\alpha_T = \frac{2zT^2}{3(z+1)}\left(\frac{5}{2}g_{e1}^{T(0)} - g_{e0}^{T(0)}\right) + O(\sigma),\ \alpha_u = -\frac{2zT}{3(z+1)} + O(\sigma);$$

$$\frac{\partial \delta\tau}{\partial t} = -\lambda_T \delta\tau + \theta_u \frac{\partial \delta u_n}{\delta x_n} + \theta_\tau \frac{\partial^2 \delta\tau}{\partial x_n \partial x_n},$$

$$\theta_u = -\frac{2T}{3(z+1)} + O(\sigma), \quad \theta_\tau = \frac{5}{3}\frac{T^2}{z+1}g_{e1}^{\tau(0)} + O(\sigma);$$

$$\frac{\partial \delta u_n}{\partial t} = -\lambda_u \delta u_n + \tilde{\chi}_u \frac{\partial^2 \delta u_l}{\partial x_n \partial x_l} + \chi_u \frac{\partial^2 \delta u_n}{\partial x_l \partial x_l} + \chi_\tau \frac{\partial \delta\tau}{\partial x_n},$$

$$\chi_\tau = -\frac{1}{m_e}\left(1 + 2z^2 e^4 Ln_i \sqrt{\frac{2\pi m_e}{T}} g_{e1}^{\tau(0)}\right) + O(\sigma),$$

$$\chi_u = -g_{e0Tr}^{u(0)}T^2 - 2z^2 e^4 Ln_i g_A \sqrt{\frac{2\pi}{m_e T}} + O(\sigma),\ \ g_A = \frac{6g_{e0Tr}^{u(0)} n_e m_e T^2}{2G_{e1,e1}^{(0)} - 15 n_e m_e T \lambda_u^{(0)}},$$

$$\tilde{\chi}_u = -\frac{1}{3}T^2 g_{e0Tr}^{u(0)} - 4z^2 e^4 Ln_i g_B \sqrt{\frac{2\pi}{T m_e}} + O(\sigma),$$

$$g_B = \left\{\frac{T g_{e0Tr}^{u(0)}}{15} + \frac{Tz g_{e1}^{T(0)}}{3(z+1)} + \frac{n_e g_{e1}^{N_e(0)}}{2} + \frac{T g_{e1}^{\tau(0)}}{3(z+1)}\right\}\frac{60 n_e m_e T}{U_{e1,e1}^{(0)} - 60\lambda_u^{(0)} n_e m_e T},$$

$$U_{ak,bs} = \left\{\left(p_l \delta_{mn} + p_m \delta_{nl}\right) S_k^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right), \left(p_l \delta_{mn} + p_m \delta_{nl}\right) S_s^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{bp}\right)\right\}_{ab}.$$

Зауважимо, що на вирази для χ_u та $\tilde{\chi}_u$ має вплив джерело R_{en} у порядку $\mu^1 g^2$, у порядку σ^0 таке джерело не є нульовим (внески, які містять g_A та g_B). Отримання результату для цього джерела проводиться методом, аналогічним попередньому розділу, проте досліджується теорія в порядку $\mu^1 g^2$ у рамках барнетівського наближення без урахування нелокальності інтегралу зіткнень. Як відомо, на барнетівські внески істотний вплив справляє нелокальність інтегралу зіткнень, тому для більш адекватного обчислення χ_u та $\tilde{\chi}_u$ ця нелокальність повинна бути врахована, проте її врахування планується зробити у подальших дослідженнях. Як буде видно в подальшому, ці коефіцієнти входять у вирази для згасаючих релаксаційних мод не в головному порядку за малим хвильовим вектором, тому на головний порядок релаксаційних мод урахування нелокальності інтегралу зіткнень не вплине. Також зауважимо, що на вираз для θ_τ також впливає джерело Q_e у порядку $\mu^1 g^2$, проте можна довести, що воно нульове в нульовому порядку за σ. Усі інші коефіцієнти в (6.2) обчислені на основі результатів попереднього розділу, тобто на них урахування нелокальності інтегралу зіткнень ніяк не вплине. Результати (6.2) виписані з урахуванням електронейтральності плазми, бо для постійних рівноважних значень густин компонент умова електронейтральності має виконуватись.

Для подальшого дослідження зробимо перетворення Фур'є:

$$\delta\xi_\alpha(k,t) = \int d^3x e^{-ik_n x_n} \delta\xi_\alpha(x,t) \tag{6.3}$$

та виберемо систему координат так, щоб вісь Ox була співнапрямлена з хвильовим вектором k. Тоді в термінах Фур'є-компонент рівняння (6.2) набудуть вигляду

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \delta n_e}{\partial t} = -\gamma_{eN_e} k^2 \delta n_e - \gamma_{eN_i} k^2 \delta n_e - ikn_e \delta\upsilon_x - \gamma_{eT} k^2 \delta T - ikn_e \delta u_n, \\
\frac{\partial \delta n_i}{\partial t} = -\gamma_{iN_e} k^2 \delta n_e - \gamma_{iN_i} k^2 \delta n_i - ikn_i \delta\upsilon_x - \gamma_{iT} k^2 \delta T + ikn_e \sigma^2 \delta u_x, \\
\frac{\partial \delta\upsilon_x}{\partial t} = ik\beta_N \delta n_e + ik\beta_N \delta n_i - \frac{4}{3} k^2 \eta_\upsilon \delta\upsilon_x + ik\beta_T \delta T - \frac{4}{3} k^2 \eta_u \delta u_x, \\
\frac{\partial \delta\upsilon_y}{\partial t} = -\eta_\upsilon k^2 \delta\upsilon_y - \eta_u k^2 \delta u_y, \quad \frac{\partial \delta\upsilon_z}{\partial t} = -\eta_\upsilon k^2 \delta\upsilon_z - \eta_u k^2 \delta u_z \\
\frac{\partial \delta T}{\partial t} = -\alpha_{N_e} k^2 \delta n_e - \alpha_{N_i} k^2 \delta n_i - \frac{2}{3} ikT \delta\upsilon_x - \alpha_T k^2 \delta T + ik\alpha_u \delta u_x - \alpha_\tau k^2 \delta\tau, \\
\frac{\partial \delta\tau}{\partial t} = -\lambda_T \delta\tau + ik\theta_u \delta u_x - \theta_\tau k^2 \delta\tau, \quad \frac{\partial \delta u_y}{\partial t} = -\chi_u k^2 \delta u_y \\
\frac{\partial \delta u_x}{\partial t} = -\lambda_u \delta u_n - (\tilde{\chi}_u + \chi_u) k^2 \delta u_x + ik\chi_\tau \delta\tau, \quad \frac{\partial \delta u_z}{\partial t} = -\chi_u k^2 \delta u_z,
\end{gathered} \tag{6.4}$$

коефіцієнти в (6.4) наведені в (6.2).

Рівняння (6.4) можна переписати в матричному вигляді:

$$\frac{\partial \delta\xi}{\partial t} = M(k)\delta\xi \tag{6.5}$$

де $\delta\xi$ – стовпець з ПСО $\delta\xi_\alpha(k,t)$, а матриця $M(k)$ є узагальненою гідродинамічною матрицею (узагальненою, тому що це матриця 10х10 з гідродинамічними та релаксаційними ПСО, а не матриця 6х6 у рамках стандартної гідродинаміки). У подальшому дослідження проводиться з урахуванням малості хвильового вектора k (хвильовий вектор є малим, бо малі градієнти в системі). Матриця $M(k)$ не є ермітовою, тому вона має праві $\phi_n(k)$ та ліві $\tilde{\phi}_n(k)$ власні функції:

$$M(k)\phi_n(k) = \lambda_n(k)\phi_n(k), \; \tilde{\phi}_n(k)M(k) = \lambda_n(k)\tilde{\phi}_n(k), \tag{6.6}$$

власні значення $\lambda_n\left(k\right)$ є однаковими для правих та лівих власних функцій. Праві власні функції матриці $M\left(k\right)$ є стовпцями, а ліві – рядками. Зауважимо, що ні сама матриця $M\left(k\right)$, ні її власні функції та власні значення не залежать від часу. Нормування власних функцій таке:

$$\tilde{\phi}_m\left(k\right)\phi_n\left(k\right)=\delta_{mn}. \tag{6.7}$$

Власні значення $\lambda_n\left(k\right)$ є дисперсійними законами для мод. Вони отримуються на основі рівняння

$$\det\left|M-\lambda I\right|=0. \tag{6.8}$$

Рівняння (6.8) містить детермінант 10х10, та, відповідно, має 10 розв'язків. Ці розв'язки отримуються на основі явного вигляду матриці $M\left(k\right)$, який заданий рівняннями (6.4) та (6.5). Для дисперсійних законів для мод отримано такі результати:

$$\begin{gathered}
\lambda_{1,2}=g_{i0}^{\upsilon(1)}T^2k^2+O\left(\sigma k^2,k^3\right);\\
\lambda_{3,4}=\pm i\sqrt{\frac{5\left(z+1\right)}{3}\frac{T}{m_e}}k\sigma-\frac{b_1(z)}{a_1(z)}k^2+O\left(\sigma^2k,\sigma k^2,k^3\right),\\
a_1\left(z\right)=-\frac{10\left(z+1\right)}{3}\frac{T}{m_e}\sigma^2,\\
b_1(z)=\left(\frac{10z}{9}\frac{T^3}{m_e}\left(g_{e1}^{T(0)}-g_{e0}^{T(0)}\right)+\frac{5}{3}z^2\left(g_{e1}^{N_e(0)}-g_{e0}^{N_e(0)}\right)\frac{n_iT^2}{m_e}\right)\sigma^2;\\
\lambda_{5,6}=\frac{-b(z)\pm\sqrt{b^2\left(z\right)-4a\left(z\right)c\left(z\right)}}{2a(z)}k^2+O\left(\sigma k^2,k^3\right), \qquad (6.9)\\
a\left(z\right)=\frac{5T}{3}\frac{z+1}{m_e},\quad b(z)=\frac{5zT^3}{3m_e}g_{e1}^{T(0)}-\left(\frac{5}{3}zg_{e0}^{N_e(0)}+\frac{5}{3}z^2g_{e1}^{N_e(0)}\right)\frac{n_i^2T^2}{m_e},\\
c\left(z\right)=\frac{5n_iz^2T^4}{3m_e\left(z+1\right)}\left(g_{e1}^{N_e(0)}g_{e0}^{T0)}-g_{e1}^{T(0)}g_{e0}^{N_e(0)}\right);\\
\lambda_{7,8}=-\lambda_u-\chi_uk^2+O\left(k^3\right);\\
\lambda_9=-\lambda_u+\left(-\left(\chi_u^{(0)}+\tilde{\chi}_u^{(0)}\right)+\theta_u^{(0)}\chi_\tau^{(0)}\lambda_u^{-1}\right)k^2+O\left(\sigma k^2,k^3\right);\\
\lambda_{10}=-\lambda_T+\left(-\theta_\tau^{(0)}-\theta_u^{(0)}\chi_\tau^{(0)}\lambda_u^{-1}\right)k^2+O\left(\sigma k^2,k^3\right).
\end{gathered}$$

Моди λ_{1-6} є гідродинамічними модами системи; зауважимо, що кількість гідродинамічних мод збігається з кількістю ПСО стандартного гідродинамічного стану системи. Можна показати, що рівняння для мод λ_{1-6} та λ_{7-10} розділяться, тобто отримані тут гідродинамічні моди є стандартними гідродинамічними модами системи. Моди λ_{7-10} є кінетичними релаксаційними модами системи.

Вектор $\delta\xi$ розкладемо на власні функції матриці $M\left(k\right)$:

$$\delta\xi\left(t\right)=\sum_{n=1}^{10}\theta_n\left(t\right)\phi_n\,, \tag{6.10}$$

на основі (6.5) та (6.7) отримаємо

$$\theta_n\left(t\right)=\tilde{\phi}_n\delta\xi\left(t\right),\;\; \theta_n\left(t\right)=e^{\lambda_n t}\theta_n\left(0\right), \tag{6.11}$$

тобто величина $\theta_n\left(t\right)$ залежить від часу за законом $e^{\lambda_n t}$. Величина $\theta_n\left(t\right)$ називається модою системи, її фізичний зміст – колективний рух параметрів скороченого опису за часовим законом $e^{\lambda_n t}$. Як бачимо, для отримання мод необхідно отримати власні функції матриці M . У цій роботі функції ϕ_n та $\tilde{\phi}_n$ отримані в головному порядку за малим хвильовим вектором. На основі цих результатів можна показати, що

$$\begin{gathered}\theta_1\sim\delta\upsilon_y,\;\;\theta_2\sim\delta\upsilon_z,\;\theta_{3,4}\sim\beta_N\left(\delta n_e+\delta n_i\right)\pm c_s\delta\upsilon_x+\beta_T\delta T\,,\\ \theta_{5,6}\sim\delta T+a_{5,6}\delta n_e+b_{5,6}\delta n_i,\;\theta_7\sim\delta u_y,\;\theta_8\sim\delta u_z,\;\theta_9\sim\delta u_x,\;\theta_{10}\sim\delta\tau\,,\\ c_s=\sqrt{\frac{5\left(z+1\right)}{3}\frac{T}{m_e}\sigma}\,,\end{gathered} \tag{6.12}$$

коефіцієнти $a_{5,6}$ та $b_{5,6}$ є дуже громіздкими, тому вони тут не виписані. Як бачимо з (6.9) та (6.12), моди $\lambda_{1,2}$ описують згасання поперечних компонент масової швидкості, моди $\lambda_{3,4}$ є звуковими модами та моди $\lambda_{5,6}$ є тепловою та дифузійною модами. Як бачимо, у звукових модах беруть участь густини компонент, температура та повздовжня частина масової швидкості, а в дифузійній та тепловій моді – лише густини та температура. Моди $\lambda_{7,8}$ описують згасання поперечних компонент відхилення u_n, мода λ_9 описує згасання повздовжньої компоненти відхилення u_n, а мода λ_{10} описує згасання параметра τ.

6.2. Релаксаційне згасання плазмових хвиль

Цей підрозділ присвячено дослідженню мод системи на основі кінетичного рівняння Ландау–Власова. Як відомо [9, 101], це рівняння має вигляд

$$\frac{\partial f_{ap}}{\partial t}+\frac{p_n}{m_a}\frac{\partial f_{ap}}{\partial x_n}+e_aE_n\left(f\right)\frac{\partial f_{ap}}{\partial p_n}=I_{ap}\left(f\right), \tag{6.13}$$

де $E_n\left(f\right)$ – самоузгоджене електричне поле, $I_{ap}\left(f\right)$ – інтеграл зіткнень Ландау. Поле $E_n\left(f\right)$ задовольняє рівнянню Максвелла–Пуассона:

$$\frac{\partial E_n}{\partial x_n} = 4\pi\left(-en_e + zen_i\right). \tag{6.14}$$

З (6.14) бачимо, що з урахуванням електронейтральності системи в просторово-однорідному рівноважному стані самоузгоджене поле відсутнє: поле $E_n(f)$ є лінійним за малими відхиленнями $\delta\xi_\alpha$. Зауважимо, що самоузгоджене магнітне поле не враховується в рівнянні (6.13), бо його внесок зникне в лінеаризованій теорії. На основі рівняння (6.13) отримаємо, що часові рівняння для ПСО системи мають вигляд

$$\begin{gathered}
\frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{1}{m_a}\frac{\partial \pi_{an}}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial \upsilon_n}{\partial t} = \frac{1}{m_e n_e + m_i n_i}\left(\upsilon_n \frac{\partial \pi_l}{\partial x_l} - \frac{\partial t_{nl}}{\partial x_l} + E_n\left(zen_i - en_e\right)\right), \\
\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2}{3\left(n_e + n_i\right)}\left(-\frac{\partial q_n}{\partial x_n} + \frac{3}{2}T\sum_a \frac{1}{m_a}\frac{\partial \pi_{an}}{\partial x_n} + \upsilon_n \frac{\partial t_{nl}}{\partial x_l} - \frac{1}{2}\upsilon^2 \frac{\partial \pi_n}{\partial x_n}\right), \\
\frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{R_{en}}{m_e n_e} + \frac{1}{m_e n_e}\left(\upsilon_{en}\frac{\partial \pi_{el}}{\partial x_l} - \frac{\partial t_{enl}}{\partial x_l}\right) - \frac{\partial \upsilon_{en}^h}{\partial t} - \frac{e}{m_e}E_n, \\
\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{2\left(Q_e - R_{en}\upsilon_{en}\right)}{3n_e} + \frac{2}{3n_e}\left(-\frac{\partial q_{en}}{\partial x_n} + \frac{3T_e}{2m_e}\frac{\partial \pi_{en}}{\partial x_n} + \frac{\partial t_{enl}}{\partial x_l}\upsilon_{en} - \frac{\upsilon_e^2}{2}\frac{\partial \pi_{en}}{\partial x_n}\right) - \frac{\partial T_e^h}{\partial t}.
\end{gathered} \tag{6.15}$$

Як бачимо, рівняння (6.15) збігаються з рівняннями (5.7) за винятком часових рівнянь для υ_n та u_n.

На жаль, реалізація методу Чемпена–Енскога з послідовною побудовою теорії збурень за малими параметрами μ та g для рівняння (6.13) є важкою задачею. Зауважимо, що стандартним піходом у літературі до рівняння з самоузгодженим членом є побудова ліанеризованої теорії без використання методу Чемпена–Енскога. Проте в рамках методу Чемпена–Енскога можна дослідити моди в бездисипативному наближенні. Зауважимо, що врахування процесів дисипації (в'язкості, теплопровідності, дифузії) базується на вивченні потоків у першому порядку за g; рівняння гідродинаміки, які можна отримати на основі просторово-однорідної ФР, називають рівняннями бездисипативної (ідеальної) гідродинаміки. Тому «бездисипативним наближенням» при дослідженні мод системи в монографії називається наближення, яке ґрунтується на використанні просторово-однорідних ФРК. При цьому в рамках ліанеризованої теорії бездисипативне наближення дає такі лінійні часові рівняння для ПСО:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \delta n_e}{\partial t} = -n_e \frac{\partial \delta \upsilon_n}{\partial x_n} - n_e \frac{\partial \delta u_n}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial \delta n_i}{\partial t} = -n_i \frac{\partial \delta \upsilon_n}{\partial x_n} + \sigma^2 n_e \frac{\partial \delta u_n}{\partial x_n}, \\
\frac{\partial \delta \upsilon_n}{\partial t} = \beta_N \frac{\partial \delta n_e}{\partial x_n} + \beta_N \frac{\partial \delta n_i}{\partial x_n} + \beta_T \frac{\partial \delta T}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial \delta T}{\partial t} = -\frac{2}{3}T\frac{\partial \delta \upsilon_n}{\partial x_n} + \alpha_u \frac{\partial \delta u_n}{\partial x_n},
\end{gathered} \tag{6.16}$$

$$\frac{\partial \delta\tau}{\partial t} = -\lambda_T \delta\tau + \theta_u \frac{\partial \delta u_n}{\delta x_n},$$

$$\frac{\partial \delta u_n}{\partial t} = \varsigma_T \frac{\partial \delta T}{\partial x_n} + \varsigma_{N_e} \frac{\partial \delta n_e}{\partial x_n} + \varsigma_{N_i} \frac{\partial \delta n_i}{\partial x_n} - \lambda_u \delta u_n - \frac{1}{m_e}\frac{\partial \delta\tau}{\partial x_n} - \frac{e}{m_e} E_n,$$

$$\varsigma_T = -\frac{1}{m_e} + O\left(\sigma^2\right),\ \varsigma_{N_e} = -\frac{T}{n_e m_e} + O\left(\sigma^2\right),\ \varsigma_{N_i} = \frac{T}{m_e n_i}\sigma^2 + O\left(\sigma^4\right);$$

ті коефіцієнти, що не визначені в (6.16), визначені в (6.2). Зауважимо, що внески, які містять градієнти густин та температури в часовому рівнянні для u_n у попередньому підрозділі компенсуються внесками від джерела R_{en} у порядку $\mu^0 g^1$, проте в цьому підрозділі ми не вивчаємо ФРК у порядку $\mu^0 g^1$. Дослідження дисперсійних законів для мод та самих мод проводиться аналогічно попередньому підрозділу. Врешті-решт для дисперсійних законів отримаємо такі результати:

$$\lambda_{1,2} = O\left(k^2\right),\ \lambda_{3,4} = \pm ikc_s + O\left(\sigma^2 k, k^2\right),\ \lambda_5 = O\left(k^2\right),$$

$$\lambda_{6,9} = -\frac{\lambda_u}{2} \pm i\sqrt{\omega_p^2 - \frac{\lambda_u^2}{4}} + O\left(\sigma^2, k^2\right),\ \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}; \qquad (6.17)$$

$$\lambda_{7,8} = -\lambda_u + O\left(k^2\right),\ \lambda_{10} = -\lambda_T + O\left(k^2\right),$$

де c_s – швидкість звуку, визначена в (6.12), ω_p – плазмова частота, а величина λ_u в (6.17) взята в головному порядку за σ. Для самих мод отримано такі результати:

$$\theta_{3,4} \sim \beta_N\left(\delta n_e + \delta n_i\right) \pm c_s \delta\upsilon_x + \beta_T \delta T,$$
$$\theta_{6,9} \sim e\left(z\delta n_i - \delta n_e\right),\ \theta_7 \sim \delta u_y,\ \theta_8 \sim \delta u_z,\ \theta_{10} \sim \delta\tau. \qquad (6.18)$$

Як бачимо, фізичний зміст мод $\theta_{3,4,7,8,10}$ такий самий, як і в попередньому розділі. Моди $\theta_{6,9}$ описують релаксаційне згасання плазмових хвиль, їх фізичний зміст – коливання зарядів під дією самоузгодженого поля (див. (6.18)). Зауважимо, що такий самий фізичний зміст мають плазмові хвилі, отримані на основі рівняння Власова [9, 100]. Результати (6.17) та (6.18) узгоджуються з принципом відповідності. Якщо в них покласти $\omega_p = 0$ (тобто якщо з них викинути ту величину, яку в них приніс самоузгоджений член), то отримуємо результати для мод кінетичного рівняння Ландау, а якщо в них покласти $\lambda_u = \lambda_T = 0$, то отримаємо моди кінетичного рівняння Власова (тобто плазмові хвилі та звукові моди; зауважимо, що звукові моди в бездисипативному наближенні мають однаковий вигляд для кінетичних рівнянь Власова, Ландау та Ландау–Власова).

Детальніше поговоримо про моди релаксаційного згасання. Як бачимо з (6.17), їх декремент згасання γ_R та частота ω відповідно дорівнюють

$$\gamma_R = \frac{\lambda_u}{2}, \quad \omega = \sqrt{\omega_p^2 - \frac{\lambda_u^2}{4}}. \tag{6.19}$$

Як бачимо, фізично за релаксаційне згасання плазмових хвиль відповідає процес релаксації швидкості. Порівняємо наше релаксаційне згасання з відомим у літературі [100] згасанням Ландау. Як відомо, декремент згасання Ландау дорівнює

$$\gamma_L = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p}{\left(kr_D\right)^3} \exp\left(-\frac{1}{2k^2 r_D^2} - \frac{3}{2}\right) \tag{6.20}$$

де r_D – радіус Дебая. Як бачимо, хоча в повністю іонізованій плазмі $\lambda_u \ll \omega_p$, проте $\gamma_R = const$, а $\gamma_L \xrightarrow[k \to 0]{} 0$. Тому при малих хвильових векторах релаксаційне згасання є значно більш вагомим за згасання Ландау. Деякі числові характеристики для різних повністю іонізованих плазм надані в таблиці 7:

Таблиця 6.1. Коефіцієнти згасання для деяких повністю іонізованих плазм

Плазма	n_e, см$^{-3}$	T, K	γ_R / ω_p	ϖ
токамак	$10^{14} \div 10^{15}$	10^8	$\left(0,3 \div 1,5\right) \cdot 10^{-8}$	$0,146 \div 0,152$
міжпланента плазма	$10^{-2} \div 10^{1}$	10^4	$\left(0,03 \div 1,5\right) \cdot 10^{-9}$	$0,133 \div 0,144$
сонячна корона	$10^4 \div 10^8$	$10^6 \div 10^8$	$3 \cdot 10^{-14} \div 1,5 \cdot 10^{-9}$	$0,119 \div 0,148$

Таблицю 7 побудовано з урахуванням того, що кулонівський логарифм оцінюється як $L \sim 10 \div 15$ [16]. Величина ϖ – це таке значення kr_D, що при $kr_D < \varpi$ $\gamma_R > \gamma_L$. Зауважимо, що схожі результати відомі в моделі желе [100], проте результати цієї роботи є більш загальними. По-перше, реалізовано вихід за модель желе, тобто враховано відхилення функції розподілу іонів від рівноваги. По-друге, з'ясовано фізичний зміст релаксаційного згасання – фізичною основою релаксаційного згасання плазмових хвиль є процес релаксації швидкості.

Висновки до розділу 6

На основі ідеї узагальнення методу Чемпена–Енскога, запропонованої в монографії, отримано моди кінетичних рівнянь Ландау та Ландау–Власова. Зауважимо, що в літературі розгляд звичайно базується на кінетичному рівнянні

Власова без інтегралу зіткнень та розглядається модель желе. У цій роботі враховано відхилення ФР іонів від її рівноважного значення, тобто розглядається випадок, який є більш загальним за модель желе. Задача знаходження мод на основі кінетичного рівняння Ландау без самоузгодженого члена є важливою тому, що описує вплив інтегралу зіткнень на моди, а також дозволяє зменшити розмірність задачі при опису плазми в термінах взаємодіючих електромагнітного поля та частинок з близькодіючою взаємодією.

В рамках цієї задачі отримано шість гідродинамічних мод (кількість гідродинамічних мод дорівнює кількості параметрів скороченого опису стандартного гідродинамічного стану: густини двох компонент, масова швидкість і температура) та чотири релаксаційні моди. Серед гідродинамічних мод маємо зсувну, теплову моду (вони є згасаючими модами другого порядку за малим хвильовим вектором, в них входять густини та температура стандартного гідродинамічного стану), дві звукові моди та дві моди, які описують згасання поперечних компонент масової швидкості. З чотирьох релаксаційних мод дві описують згасання поперечних компонент відхилення швидкості від стандартного гідродинамічного значення, одна – згасання повздовжньої компоненти відхилення швидкості та одна – згасання відхилення температури. Всі релаксаційні моди є кінетичними модами системи.

Щодо задачі знаходження мод на основі кінетичного рівняння Ландау–Власова, то, на жаль, реалізувати теорію збурень за малими відхиленнями та малими градієнтами в рамках методу Чемпена–Енскога в повному обсязі не вдається, цей метод адаптований до кінетичних рівнянь без самоузгоджених членів. Проте можна отримати моди в бездисипативному наближенні, тобто взявши функції розподілу компонент лише у нульового порядку за градієнтами. Моди рівняння Ландау–Власова розраховані в роботі саме в такому наближенні. Отримано три гідродинамічні моди другого порядку за малим хвильовим вектором, дві релаксаційні моди, які описують згасання поперечних компонент відхилення швидкості, одну релаксаційну моду, яка описує згасання відхилення температури, дві звукові моди та дві моди, які описують релаксаційне згасання плазмових хвиль. Наведено числові значення діапазону хвильових векторів, для яких релаксаційне згасання є більш вагомим за згасання Ландау. Встановлено, що фізичною причиною релаксаційного згасання плазмових хвиль є процес релаксації повздовжньої компоненти відхилення швидкості електронів від свого стандартного гідродинамічного значення.

Результати розділу 6 опубліковано у наших роботах [144 – 148].

РОЗДІЛ 7
ЗАДАЧА ГРЕДА У ПОВНІСТЮ ІОНІЗОВАНІЙ ПЛАЗМІ

Цей розділ присвячено тринадцятимоментній задачі Греда у повністю іонізованій двокомпонентній просторово-однорідній електрон-іонній плазмі. Тринадцятимоменте наближення Греда описує формування дисипативних потоків, тому саме йому придуліена увага у монографії.

Як відомо [69], в рамках тринадцятимоментної задачі Греда незалежними параметрами скороченого опису є густини кількості частинок компонент n_a, швидкості компонент υ_{an}, температури компонент T_a а також потоки енергії компонент q^o_{an} та безслідові потоки імпульсу компонент π^o_{anl}, взяті у системі відліку, яка є супутною до a-ї компоненти, $a = e, i$. Визначення цих параметрів в термінах однокомпонентної функції розподілу є стандартним:

$$n_a = \int d^3 p f_{ap}\,, \quad n_a m_a \upsilon_{an} \equiv \int d^3 p p_n f_{ap}\,, \; \frac{3}{2} n_a T_a + \frac{1}{2} n_a m_a \upsilon_a^2 = \int d^3 p \varepsilon_{ap} f_{ap}\,,$$

$$\pi^o_{anl} \equiv \int d^3 p \frac{h_{nlp}}{m_a} f_{a,p+m_a\upsilon_a}\,, \; q^o_{an} \equiv \int d^3 p \frac{p_n \varepsilon_{ap}}{m_a} f_{a,p+m_a\upsilon_a}\,, \tag{7.1}$$

$$h_{nlp} = p_n p_l - \frac{1}{3} p^2 \delta_{nl}\,, \; \varepsilon_{ap} = \frac{p^2}{2m_a},$$

температура записана в енергетичних одиницях.

Розгляд базується на відомому кінетичному рівнянні Ландау [4], що у просторово-однорідному випадку має вигляд

$$\frac{\partial f_{ap}}{\partial t} = I_{ap}(f),$$

$$I_{ap}(f) = 2\pi e_a^2 L \sum_c e_c^2 \frac{\partial}{\partial p_n} \int d^3 p' \left\{ f_{cp'} \frac{\partial f_{ap}}{\partial p_k} - f_{ap} \frac{\partial f_{cp'}}{\partial p'_k} \right\} D_{nk}\left(\frac{p}{m_a} - \frac{p'}{m_c} \right), \tag{7.2}$$

$$D_{nk}(u) = \left(u^2 \delta_{nk} - u_n u_k \right) / u^3 .$$

У літературі загальновживаним є підхід, в якому функція розподілу в даній задачі постулюється у наступному вигляді [69], [70]:

$$f_{ap} = f^L_{ap} \left[1 + \frac{h_{nlp}}{2 n_a m_a T_a^2} \pi^o_{anl} - \frac{p_n}{n_a T_a^2} \left(1 - \frac{p^2}{5 m_a T_a} \right) q^o_{an} \right], \tag{7.3}$$

де f^L_{ap} – локально-рівноважна максвелівська функція розподілу з залежними від часу температурами та швидкостями компонент:

$$f_{ap}^{L}=\frac{n_a}{\left(2\pi m_a T_a\right)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\left(p-m_a\upsilon_a\right)^2}{2m_a T_a}\right). \qquad (7.4)$$

У рамках стандартного підходу до задачі Греда [69] функцію розподілу шукають у вигляді добутко локально-рівноважної функції розподілу та деякої комбінації з потоків, яку шукають за допомогою розвинення у ряд за поліномами Ерміта [69]. При цьому коефіцієнти при поліномах вибирають такими, щоб виконувались додаткові умови (7.1). Фактично [69], функцію розподілу постулюють у вигляді (7.3), бо цей, безсумнівно, логічний вигляд не суперечить означенням (7.1), а отримати функцію розподілу безпосередньо з кінетичного рівняння в загальному випадку є дуже складною задачею.

Метою даного розділу є вивести функцію розподілу на основі кінетичного рівняння. Для простоти розглядаємо лише просторово-однорідний випадок, та досліджуємо стани системи, які знаходяться в околі рівноважного стану системи. Як відомо [6], недоліком методу Греда є відсутність малого параметру, що не дозволяє отримати функцію розподіл безпосередньо з кінетичного рівняння. Розгляд станів системи в околі рівноважного стану дозволяє ввести малий релаксаційний параметр і розв'язувати кінетичне рівняння у теорії збурень за цим малим параметром. Відповідний малий параметр μ введемо із розмірних міркувань:

$$\tau\sim\mu T\,,\ u_n\sim\mu\sqrt{T/m_e}\,,\ \pi_{anl}^{o}\sim\mu nT\,,\ q_{an}^{o}\sim\mu n_i T\sqrt{T/m_e}\,,\quad \mu\ll 1, \qquad (7.5)$$

де τ та u_n є, відповідно, малими відхиленнями швидкості та температури електронів від їх рівноважних значень:

$$\tau=T_e-T\,,\ u_n=\upsilon_{en}\,, \qquad (7.6)$$

T – рівноважна температура системи. У цьому розділі використовується система відліку, де рівноважна швидкість системи дорівнює нулю.

Як показано у розділі 4, мають місце наступні співвідношення:

$$\begin{gathered}\upsilon_{an}=r_a u_n\,,\quad r_a=\delta_{ae}-z\sigma^2\delta_{ai}\,,\ T_a=T+s_a\tau+y_a u^2\,,\\ s_a=\delta_{ae}-z\delta_{ai}\,,\ y_a=-m_e z\left(1+z\sigma^2\right)\delta_{ai}/3\,,\end{gathered} \qquad (7.7)$$

де σ – корінь з малого відношення мас електрона та іона:

$$\sigma=\sqrt{m_e/m_i}\ll 1. \qquad (7.8)$$

і z – заряд іона. Також тут і надалі враховується умова електронейтральності

$$n_i=zn_e. \qquad (7.9)$$

Як бачимо із співвідношень (7.7), температури та швидкості компонент виражаються в термінах параметрів τ, u_n. Також у четвертому розділі показано, що густини кількості числа частинок у просторово-однорідному випадку є рівноважними константами, що дає змогу вибрати наступний набір параметрів скороченого опису для нашої задачі: $\xi \equiv \{\tau, u_n, \pi^o_{anl}, q^o_{an}\}$. Відповідно, ми можемо записати функціональну гіпотезу

$$f_{ap}(t) \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} f_{ap}\left(\xi(t)\right), \;\; \xi \equiv \left\{\tau, u_n, \pi^o_{anl}, q^o_{an}\right\}, \tag{7.10}$$

де τ_0 – деякий характерний час, який менший за часи релаксації параметрів скороченого опису. Слід зауважити, що на відміну від [69], [70], ми не припускаємо, що функція розподілу a-ї компоненти залежить лише від потоків a-ї компоненти.

На основі функціональної гіпотези (7.10) кінетичне рівняння (7.2) можна переписати як

$$\sum_i \frac{\partial f_{ap}}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = I_{ap}(f), \tag{7.11}$$

з цього рівняння треба знайти функції розподілу компонент, а також часові рівняння для параметрів скороченого опису.

Та шукати розв’язки рівняння (7.11) у вигляді розвинення за малим параметром μ:

$$\begin{gathered} f_{ap} = f^{(0)}_{ap} + f^{(1)}_{ap} + O\left(\mu^2\right), \quad f^{(n)}_{ap} \sim \mu^n, \\ \partial_t \xi_i = \left(\partial_t \xi_i\right)^{(1)} + O\left(\mu^2\right), \;\; \left(\partial \xi_i / \partial t\right)^{(n)} \sim \mu^n, \end{gathered} \tag{7.12}$$

означення (7.1) є додатковими умовами до рівняння (7.11). Очевидно, що у головному (нульовому) порядку за малим параметром μ функції розподілу компонент є максвеллівськими з рівноважними температурою та швидкістю системи (рівноважні максвеллівські функції):

$$f^{(0)}_{ap} = w_{ap}, \quad w_{ap} = \frac{n_a}{\left(2\pi m_a T\right)^{3/2}} \exp\left(-\beta \varepsilon_{ap}\right), \quad \beta = T^{-1}. \tag{7.13}$$

Прямим обчисленням можна перевірити, що функції розподілу (7.13) задовольняють кінетичне рівняння (7.11) у головному порядку за μ, бо

$$I_{ap}(w) = 0. \tag{7.14}$$

З цього випливає на основі (7.1) та (7.2), що дійсно часові похідні від параметрів скороченого опису у нульовому порядку за μ дорівнюють нулю.

7.1. Функції розподілу компонент у лінійній теорії релаксації

Цей підрозділ присвячено пошуку функцій розподілу компонент у першому порядку за малим релаксаційним параметром μ. Відповідну функцію розподілу шукаємо у вигляді

$$f_{ap}^{(1)} = w_{ap}\left(A_{ap}^{\tau}\tau + B_{anp}^{u}u_n + \sum_b A_{anlp}^{\pi_b}\pi_{bnl}^{o} + \sum_b B_{anp}^{q_b}q_{bn}^{o} \right), \tag{7.15}$$

де A_{ap}^{τ}, B_{anp}^{u}, $A_{anlp}^{\pi_b}$, $B_{anp}^{q_b}$ – деякі невідомі функції. На основі (7.1), (7.2), (7.11) та (7.15) можна отримати наступні рівняння на ці функції:

$$\begin{gathered}
\lambda_T A_{ap}^{\tau} = \sum_b \hat{K}_{ab}A_{bp}^{\tau}, \quad \sum_b \lambda_{nl,rs}^{\pi_b\pi_c}A_{anlp}^{\pi_b} = \sum_b \hat{K}_{ab}A_{brsp}^{\pi_c}, \\
B_{anp}^{u}\lambda_{nl}^{u} + \sum\nolimits_b B_{anp}^{q_b}\lambda_{nl}^{q_b u} = \sum\nolimits_b \hat{K}_{ab}B_{blp}^{u}, \quad B_{anp}^{u}\lambda_{nl}^{uq_c} + \sum\nolimits_b B_{anp}^{q_b}\lambda_{nl}^{q_b q_c} = \sum\nolimits_b \hat{K}_{ab}B_{bnp}^{q_c},
\end{gathered} \tag{7.16}$$

де лінеаризований оператор зіткнень вводиться за означенням:

$$\begin{gathered}
\hat{K}_{ab}h_p \equiv \int d^3p' K_{ab}\left(p,p'\right)h_{p'}, \quad M_{ab}\left(p,p'\right)w_{bp'} \equiv -w_{ap}K_{ab}\left(p,p'\right), \\
M_{ab}\left(p,p'\right) \equiv \left(\delta I_{ap} / \delta f_{bp'}\right)\Big|_{f_p = w_p}
\end{gathered} \tag{7.17}$$

та часові рівняння на параметри скороченого опису мають вигляд

$$\begin{gathered}
\left(\partial_t \tau\right)^{(1)} = -\lambda_T \tau, \quad \lambda_T = \frac{2}{3n_e}\sum_a \left\{\varepsilon_{ep}, A_{ap}^{\tau}\right\}_{ea}, \\
\left(\partial_t \pi_{anl}^{o}\right)^{(1)} = -\sum_b \lambda_{nl,rs}^{\pi_a\pi_b}\pi_{brs}^{o}, \quad \lambda_{nl,rs}^{\pi_a\pi_b} = \frac{1}{m_a}\sum_c \left\{h_{nlp}, A_{crsp}^{\pi_b}\right\}_{ac}, \\
\left(\partial_t u_n\right)^{(1)} = -\lambda_{nl}^{u}u_l - \sum_b \lambda_{nl}^{uq_b}q_{bl}^{o}, \quad \lambda_{nl}^{uq_b} = \frac{1}{m_e n_e}\sum_a \left\{p_n, B_{alp}^{q_b}\right\}_{ea}, \\
\lambda_{nl}^{u} = \frac{1}{m_e n_e}\sum_a \{p_n, B_{alp}^{u}\}_{ea}, \quad \left(\partial_t q_{an}^{o}\right)^{(1)} = -\lambda_{nl}^{q_a u}u_l - \sum_b \lambda_{nl}^{q_a q_b}q_{bl}^{o}, \\
\lambda_{nl}^{q_a u} = \frac{1}{m_a}\sum_b \left\{\varepsilon_{ap}p_n, B_{blp}^{u}\right\}_{ab} - \frac{5}{2}r_a n_a T\lambda_{nl}^{u}, \\
\lambda_{nl}^{q_a q_b} = \frac{1}{m_a}\sum_c \left\{\varepsilon_{ap}p_n, B_{clp}^{q_b}\right\}_{ac} - \frac{5}{2}r_a n_a T\lambda_{nl}^{uq_b};
\end{gathered}$$

Текст і

інтегральні дужки вводяться за означенням як

$$\left\{g_p, h_p\right\} \equiv \int d^3p w_{ap} g_p \hat{K}_{ab}h_p . \tag{7.19}$$

На основі (7.1) та (7.7) додаткові умови можна переписати у вигляді

$$\begin{gathered}
n_a = \int d^3p f_{ap}, \quad m_a n_a r_a u_n = \int d^3p p_n f_{ap}, \\
\frac{3}{2}n_a\left(T + s_a\tau + y_a u^2\right) + \frac{1}{2}m_a n_a r_a^2 u^2 = \int d^3p \varepsilon_{ap} f_{ap}, \\
\pi_{anl}^{o} + m_a n_a r_a^2\left(u_l u_n - \frac{1}{3}u^2\delta_{nl}\right) = \frac{1}{m_a}\int d^3p h_{nlp} f_{ap}, \\
q_{an}^{o} + \frac{3}{2}r_a u_n n_a\left(T + s_a\tau + y_a u^2\right) - \frac{1}{2}r_a^3 m_a n_a u^2 u_n =
\end{gathered} \tag{7.20}$$

$$= \frac{1}{m_a} \int d^3 p p_n \varepsilon_{ap} f_{ap} - \frac{r_a u_l}{m_a} \int d^3 p p_n p_l f_{ap} \ .$$

З міркувань обертальної інваріантності шукаємо невідомі функції $A^{\tau}_{ap}, B^{u}_{anp}$, $A^{\pi_b}_{anlp}$, $B^{q_b}_{anp}$ у вигляді

$$\begin{gathered} A^{\tau}_{ap} = \sum_{n,s} g^{\tau(n)}_{as} S^{1/2}_s \left(\beta \varepsilon_{ap}\right), \ B^{u}_{anp} = p_n \sum_{n,s} g^{u(n)}_{as} S^{3/2}_s \left(\beta \varepsilon_{ap}\right), \\ B^{q_b}_{anp} = p_n \sum_{n,s} g^{q_b(n)}_{as} S^{3/2}_s \left(\beta \varepsilon_{ap}\right), \ A^{\pi_b}_{anlp} = h_{nlp} \sum_{n,s} g^{\pi_b(n)}_{as} S^{5/2}_s \left(\beta \varepsilon_{ap}\right), \ \ g^{(n)} \sim \sigma^n , \end{gathered} \tag{7.21}$$

де $S^{\alpha}_n(x)$ – поліноми Соніна. Зауважимо, що хоча в загальному випадку функції з двома векторними індексами шукаються у вигляді дельта- та безслідової частини, ми не шукаємо дельта-частину функцій $A^{\pi_b}_{anlp}$, так як вона не увійде до функції розподілу (7.15), бо π^{o}_{bnl} є безслідовим тензором. Вибір поліномів Соніна у (7.21) є зручним, бо він дозволяє обчислити декілька перших коефіцієнтів розвинення безпосередньо з додаткових умов (7.20):

$$\begin{gathered} g^{\tau(n\geq 0)}_{a0} = 0, \ \ g^{\tau(0)}_{e1} = -\beta, \ \ g^{\tau(n\geq 1)}_{e1} = 0, \ \ g^{\tau(0)}_{i1} = z\beta, \ g^{\tau(n\geq 1)}_{i1} = 0, \ \ g^{u(0)}_{e0} = \beta, \\ g^{u(n\geq 1)}_{e0} = 0, \ \ g^{u(2)}_{i0} = -z\beta\sigma^2, \ g^{u(n\neq 2)}_{i0} = 0, \ g^{u(n\geq 0)}_{a1} = 0, \ g^{q_b(n\geq 0)}_{a0} = 0, \\ g^{q_b(0)}_{a1} = -2\delta_{ab}\beta^2 / 5n_a, \ g^{q_b(n\neq 0)}_{a1} = 0, \ g^{\pi_e(0)}_{e0} = \beta^2 / 2n_e m_e, \ g^{\pi_e(n\geq 1)}_{e0} = 0, \\ g^{\pi_i(n\geq 0)}_{e0} = g^{\pi_e(n\geq 0)}_{i0} = 0, \ g^{\pi_i(2)}_{i0} = \beta^2\sigma^2 / 2n_i m_e, \ g^{\pi_i(n\neq 2)}_{i0} = 0. \end{gathered} \tag{7.22}$$

Розв’язання рівнянь (7.16) у теорії збурень за малим параметром σ дає після громіздких обчислень:

$$\begin{gathered} B^{u}_{elp} = \beta p_l + g^{u(2)}_{e2} p_l S^{3/2}_2 \left(\beta \varepsilon_{ep}\right) + O\left(\sigma^4\right), \\ B^{u}_{ilp} = -z\beta\sigma^2 p_l + O\left(\sigma^5\right), \ B^{q_e}_{ilp} = O\left(\sigma^5\right), \\ B^{q_e}_{elp} = -\frac{2p_l}{5n_e T^2} S^{3/2}_1 (\beta \varepsilon_{ep}) + g^{q_e(2)}_{e2} p_l S^{3/2}_2 (\beta \varepsilon_{ep}) + O\left(\sigma^4\right), \\ B^{q_i}_{ilp} = -\frac{2p_l}{5n_i T^2} S^{3/2}_1 (\beta \varepsilon_{ip}) + g^{q_i(3)}_{i2} p_l S^{3/2}_2 (\beta \varepsilon_{ip}) + O(\sigma^3), \\ B^{q_i}_{elp} = g^{q_i(2)}_{e2} p_l S^{3/2}_2 (\beta \varepsilon_{ep}) + g^{q_i(3)}_{e2} p_l S^{3/2}_2 (\beta \varepsilon_{ep}) + O(\sigma^4), \\ A^{\pi_e}_{enlp} = \frac{h_{nlp}}{2n_e m_e T^2} + g^{\pi_e(2)}_{e1} h_{nlp} S^{5/2}_1 (\beta \varepsilon_{ep}) + O\left(\sigma^4\right), \\ A^{\pi_i}_{inlp} = \frac{h_{nlp}}{2n_i m_i T^2} + g^{\pi_i(5)}_{i1} h_{nlp} S^{5/2}_1 (\beta \varepsilon_{ip}) + O\left(\sigma^4\right), \\ A^{\pi_i}_{enlp} = g^{\pi_i(2)}_{e1} h_{nlp} S^{5/2}_1 (\beta \varepsilon_{ep}) + g^{\pi_i(3)}_{e1} h_{nlp} S^{5/2}_1 (\beta \varepsilon_{ep}) + O(\sigma^4), \end{gathered} \tag{7.23}$$

$$A_{inlp}^{\pi_e} = g_{i1}^{\pi_e(6)} S_1^{5/2}(\beta\varepsilon_{ip}) h_{nlp} + O(\sigma^5),$$

$$A_{ep}^{\tau} = -\beta S_1^{1/2}(\beta\varepsilon_{ep}) + 3\sqrt{2} z(z+1)\beta S_2^{1/2}(\beta\varepsilon_{ep})\sigma^2 + O(\sigma^4),$$

$$A_{ip}^{\tau} = z\beta S_1^{1/2}(\beta\varepsilon_{ip}) + 2\sqrt{2}(1+z^{-1})\beta S_2^{1/2}(\beta\varepsilon_{ip})\sigma^3 + O(\sigma^4).$$

у кожному порядку теорії збурень за σ ми для простоти обмежуємось наближенням одного полінома. Тут індекс у дужках означає порядок за σ. Явні вирази для коефіцієнтів у (7.23) можна отримати на основі явних виразів для лінеаризованого оператору зіткнень, навеених у додатку 1. Вони є досить громіздкими, тому у таблиці 7.1 наведено їх чисельні значення.

Таблиця 7.1. Явні вирази для коефіцієнтів у (7.23)

z	$\dfrac{n_i g_{e2}^{q_e(2)}}{\beta^2\sigma^2}$	$\dfrac{n_i g_{i2}^{q_i(3)}}{\beta^2\sigma^3}$	$\dfrac{n_i g_{e2}^{q_i(2)}}{\beta^2\sigma^2}$	$\dfrac{n_i g_{e2}^{q_i(3)}}{\beta^2\sigma^3}$	$\dfrac{n_i m_e T^2 g_{i1}^{\pi_e(6)}}{\sigma^6}$
1	38,558	4,193	–0,356	–0,082	–0,167
2	0,998	2,096	–0,437	–0,494	–0,211
3	0,325	1,398	–0,473	–1,301	–0,231
4	0,1	1,048	–0,493	–2,515	–0,243
z	$\dfrac{n_i m_e g_{e1}^{\pi_e(2)}}{\beta^2\sigma^2}$	$\dfrac{n_i m_e g_{i1}^{\pi_i(5)}}{\beta^2\sigma^5}$	$\dfrac{n_i m_e g_{e1}^{\pi_i(2)}}{\beta^2\sigma^2}$	$\dfrac{n_i m_e g_{e1}^{\pi_i(3)}}{\beta^2\sigma^3}$	$T g_{e2}^{u(2)}\sigma^{-2}$
1	0,097	–3,211	0,138	0,047	–39,293
2	0,061	–1,605	0,174	0,298	–2,777
3	0,045	–1,07	0,19	0,806	–1,971
4	0,035	–0,803	0,2	1,581	–1,608

Слід зауважити, що рівняння для A_{ap}^{τ} відокремлюється від інших рівнянь у (7.16), та результат для A_{ap}^{τ} співпадає з відповідним результатом, отриманим у розділі 4. Рівняння для B_{anp}^{u} та $B_{anp}^{q_b}$ пов'язані одне з одним та не є незалежними. Рівняння для $A_{anlp}^{\pi_b}$ також відокремлюються у (7.16).

У головному порядку за σ результати для A_{ap}^{τ}, B_{alp}^{u}, $A_{enlp}^{\pi_e}$, $A_{inlp}^{\pi_i}$, $B_{enp}^{q_e}$, $B_{inp}^{q_i}$ співпадають з відповідними результатами (7.3). Тим не менш, нами отримано поправки до цих результатів у більш високих порядках за σ (7.23). Більш того, у стандартному результаті (7.3) вважається, що функції $A_{enlp}^{\pi_i}$, $A_{inlp}^{\pi_e}$, $B_{enp}^{q_i}$, $B_{inp}^{q_e}$ дорівнюють нулю. Нами показано, що хоча $A_{enlp}^{\pi_i} \ll A_{enlp}^{\pi_e}$, $A_{inlp}^{\pi_e} \ll A_{inlp}^{\pi_i}$, $B_{enp}^{q_i} \ll B_{enp}^{q_e}$ та $B_{inp}^{q_e} \ll B_{inp}^{q_i}$, ці функції є ненульовими, тобто на відміну від стандартного результату, функція розподілу електронів залежить від іонних потоків та навпаки.

7.2. Часові рівняння для параметрів скороченого опису у лінійній теорії релаксації

Цей підрозділ присвячено пошуку відповідних часових рівнянь та дослідженню стабільності системи. На основі (7.23) та (7.18) можна показати, що у головному та наступному після головного порядками за σ часові рівняння у лінійній теорії релаксації мають вигляд

$$\partial_t u_n = -\sum_{s=0,2} \lambda_{nl}^{u(s)} u_l - \sum_{s=0,2} \lambda_{nl}^{uq_e(s)} q_{el}^o - \lambda_{nl}^{uq_i(2)} q_{il}^o ,$$

$$\partial_t q_{en}^o = -\sum_{s=0,2} \lambda_{nl}^{q_e u(s)} u_l - \sum_{s=0,2} \lambda_{nl}^{q_e q_e(s)} q_{el}^o - \lambda_{nl}^{q_e q_i(2)} q_{il}^o ,$$

$$\partial_t q_{in}^o = -\sum_{s=1,2} \lambda_{nl}^{q_i q_i(s)} q_{il}^o , \quad \partial_t \tau = -\sum_{s=2,4} \lambda_T^{(s)} \tau , \tag{7.24}$$

$$\partial_t \pi_{enl}^o = -\sum_{s-0,2} \lambda_{nl,rs}^{\pi_e \pi_e(s)} \pi_{ers}^o - \lambda_{nl,rs}^{\pi_a \pi_i(2)} \pi_{irs}^o ,$$

$$\partial_t \pi_{inl}^o = -\lambda_{nl,rs}^{\pi_i \pi_e(2)} \pi_{ers}^o - \sum\nolimits_{s=1,2} \lambda_{nl,rs}^{\pi_i \pi_i(s)} \pi_{irs}^o ,$$

де

$$\lambda_{nl}^{u(0)} = 4\sqrt{2} z^2 \Lambda \delta_{nl} / 3T , \ \lambda_{nl}^{uq_e(0)} = -4\sqrt{2} z^2 \Lambda \delta_{nl} / 5 n_e T^2 ,$$

$$\lambda_{nl}^{u(2)} = \left[(4z-2) \sigma^2 / 3T + 5 g_{e2}^{u(2)} / 2 \right] \sqrt{2} z^2 \Lambda \delta_{nl} ,$$

$$\lambda_{nl}^{uq_e(2)} = \left(6\sigma^2 / 5 n_e T^2 + 5 g_{e2}^{q_e(2)} / 2 \right) \sqrt{2} z^2 \Lambda \delta_{nl} ,$$

$$\lambda_{nl}^{uq_i(2)} = \left(4\sigma^2 / 5 n_i T^2 + 5 g_{e2}^{q_i(2)} / 2 \right) \sqrt{2} z^2 \Lambda \delta_{nl} , \ \lambda_{nl}^{q_e u(0)} = -2\sqrt{2} n_e z^2 \Lambda \delta_{nl} ,$$

$$\lambda_{nl}^{q_e q_e(0)} = 2\Lambda \left(8z + 13\sqrt{2} z^2 \right) \delta_{nl} / 15T ,$$

$$\lambda_{nl}^{q_e u(2)} = (3-2z) \sqrt{2} z^3 n_i \Lambda \sigma^2 \delta_{nl} - z^2 g_{e2}^{u(2)} T \left(23 \cdot 2^{-3/2} z + 2 \right) n_i \Lambda \delta_{nl} ,$$

$$\lambda_{nl}^{q_e q_e(2)} = -11\sqrt{2} z^2 \Lambda \delta_{nl} \sigma^2 / 5T - g_{e2}^{q_e(2)} \left(23 \cdot 2^{-3/2} z + 2 \right) z^2 n_i T \Lambda \delta_{nl} ,$$

$$\lambda_{nl}^{q_e q_i(2)} = -58\sqrt{2} z^3 \Lambda \sigma^2 \delta_{nl} / 25T - \left(23 \cdot 2^{-3/2} z + 2 \right) g_{e2}^{q_i(2)} n_i T z^2 \Lambda \delta_{nl} , \tag{7.25}$$

$$\lambda_{nl}^{q_i q_i(1)} = 16 z^4 \Lambda \sigma \delta_{nl} / 15T , \ \lambda_{nl}^{q_i q_i(2)} = 4\sqrt{2} z^3 \Lambda \sigma^2 \delta_{nl} / T ;$$

$$\lambda_{nl,rs}^{\pi_a \pi_b} = \frac{1}{10} \left(\delta_{nr} \delta_{ls} + \delta_{ns} \delta_{lr} - \frac{2}{3} \delta_{nl} \delta_{rs} \right) \lambda_{mq,mq}^{\pi_a \pi_b} ,$$

$$\lambda_{nl,nl}^{\pi_e \pi_e(0)} = 8\Lambda z \left(1 + \sqrt{2} z \right) / T ,$$

$$\lambda_{nl,nl}^{\pi_e \pi_e(2)} = 4 z^2 \sqrt{2} \Lambda \sigma^2 / 3T + 12 z^2 \left(1 + 2\sqrt{2} z \right) n_i m_e T \Lambda g_{e1}^{\pi_e(2)} ,$$

$$\lambda_{nl,nl}^{\pi_e \pi_i(2)} = -16\sqrt{2} z^3 \Lambda \sigma^2 / 3T + 12 \left(1 + 2\sqrt{2} z \right) z^2 n_i m_e T \Lambda g_{e1}^{\pi_i(2)} ,$$

$$\lambda_{nl,nl}^{\pi_i \pi_i(1)} = 8 z^4 \Lambda / T , \ \ \lambda_{nl,nl}^{\pi_i \pi_i(2)} = 40\sqrt{2} z^3 \Lambda \sigma^2 / 3T ,$$

$$\lambda_{nl,nl}^{\pi_i\pi_e(2)} = -16\sqrt{2}z^2\Lambda\sigma^2\big/3T\,,\ \lambda_T^{(2)} = 8\sqrt{2}\left(z+1\right)z^2\Lambda\sigma^2\big/3T\,,$$

$$\lambda_T^{(4)} = -4\sqrt{2}\left(z+1\right)z^2\Lambda\sigma^4\big/T - 24\left(z+1\right)z^3\Lambda\sigma^4\big/T\,,\ \Lambda \equiv n_i e^4 L\sqrt{\pi/m_e T}\,,$$

індекс у дужках означає порядок за σ.

Як бачимо, головні за σ внески у (7.24), а саме $\lambda_{nl}^{u(0)}$, $\lambda_{nl}^{uq_e(0)}$, $\lambda_{nl}^{q_eq_e(0)}$, $\lambda_{nl}^{q_eu(0)}$, $\lambda_{nl}^{q_iq_i(1)}$, $\lambda_{nl,rs}^{\pi_e\pi_e(0)}$, $\lambda_{nl,rs}^{\pi_i\pi_i(1)}$, $\lambda_T^{(2)}$, повністю задаються результатом (7.3), та співпадають з відомими результатами у відомих в літературі випадках (див. обговорення температурної релаксації у [4], [77] та релаксації швидкостей у [16]. Щодо поправок більш високого порядку за σ, маємо наступне. Величини $\lambda_{nl}^{q_iq_i(2)}$, $\lambda_{nl,rs}^{\pi_i\pi_i(2)}$, $\lambda_{nl,rs}^{\pi_i\pi_e(2)}$ повністю задаються результатом (7.3), тож часові рівняння для π_{inl}^o та q_{in}^o до членів другого порядку за σ повністю задаються стандартним результатом (7.3).

Але наші поправки (7.23) мають суттєвий вплив на поправочні члени у часових рівняннях для τ, u_n, π_{enl}^o та q_{en}^o. Перші члени у $\lambda_{nl}^{u(2)}$, $\lambda_{nl}^{uq_e(2)}$, $\lambda_{nl}^{uq_i(2)}$, $\lambda_{nl}^{q_eq_e(2)}$, $\lambda_{nl}^{q_eu(2)}$, $\lambda_{nl}^{q_eq_i(2)}$, $\lambda_{nl,rs}^{\pi_e\pi_e(2)}$, $\lambda_{nl,rs}^{\pi_e\pi_i(2)}$, $\lambda_T^{(4)}$ отримані на основі (7.3), а другі – на основі наших поправок до результату (7.3), виписаних у (7.23). Чисельне порівняння відповідних членів можна проілюструвати наступною таблицею

Таблиця 7.2. Порівняння поправочних членів, які є наслідками стандартного результату (7.3) (позначені одним штрихом) та наших поправок (7.23) до цього результату (позначені двома штрихами).

Величина	Порівняння
$\lambda_T^{(4)}$	$\lambda_T^{(4)\prime\prime} > \lambda_T^{(4)\prime}$
$\lambda_{nn}^{uq_i(2)}$	$\lambda_{nn}^{uq_i(2)\prime\prime} > \lambda_{nn}^{uq_i(2)\prime}$
$\lambda_{nl,nl}^{\pi_e\pi_e(2)}$	$\lambda_{nl,nl}^{\pi_e\pi_e(2)\prime\prime} > \lambda_{nl,nl}^{\pi_e\pi_e(2)\prime}$
$\lambda_{nn}^{u(2)}$	$\lambda_{nn}^{u(2)\prime\prime} > \lambda_{nn}^{u(2)\prime}$ для $z=1,2,3$
$\lambda_{nn}^{uq_e(2)}$	$\lambda_{nn}^{uq_e(2)\prime\prime} > \lambda_{nn}^{uq_e(2)\prime}$ для $z=1,2,3$
$\lambda_{nl}^{q_eu(2)}$	$\lambda_{nn}^{q_eu(2)\prime\prime} > \lambda_{nn}^{q_eu(2)\prime}$ для $z=1,2,3,4,5$
$\lambda_{nn}^{q_eq_e(2)}$	$\lambda_{nn}^{q_eq_e(2)\prime\prime} > \lambda_{nn}^{q_eq_e(2)\prime}$ для $z=1,2,3,4$
$\lambda_{nn}^{q_eq_i(2)}$	$\lambda_{nn}^{q_eq_i(2)\prime\prime} < \lambda_{nn}^{q_eq_i(2)\prime}$, проте ці величини близькі за значеннями
$\lambda_{nl,nl}^{\pi_e\pi_i(2)}$	$\lambda_{nl,nl}^{\pi_e\pi_i(2)\prime\prime} < \lambda_{nl,nl}^{\pi_e\pi_i(2)\prime}$, проте ці величини близькі за значеннями

Слід зауважити, що для $z=1$ (випадок електрон-протонної плазми) наші поправки мають найбільш суттєвий вплив для часових рівнянь для u_n та q_{en}^o. Хоча для електрон-протонної плазми $\sigma^2 \sim 5{,}5\cdot 10^{-4}$, наші результати дають, що

$$\lambda_{nn}^{u(2)} \big/ \lambda_{nn}^{u(0)} \approx -4\cdot 10^{-2},\ \lambda_{nn}^{uq_e(2)} \big/ \lambda_{nn}^{uq_e(0)} \approx -2{,}2\cdot 10^{-2},$$
$$\lambda_{nn}^{q_e u(2)} \big/ \lambda_{nn}^{q_e u(0)} \approx -2{,}6\cdot 10^{-2},\ \lambda_{nn}^{q_e q_e(2)} \big/ \lambda_{nn}^{q_e q_e(0)} \approx -2\cdot 10^{-2}, \tag{7.26}$$

тобто відповідні відношення мають порядок 10^{-2}, а не 10^{-4}.

Проілюструємо також, що дана система є стабільною, тобто в системі дійсно має місце релаксаційний процес до рівноважного стану. Рівняння (7.24) у головному порядку за σ мають наступний вигляд:

$$\partial_t \tau = -\frac{2^{7/2}\sqrt{\pi}}{3} z^2 (z+1)\sigma^2 \lambda\tau, \quad \partial_t \pi_{inl}^o = -\frac{8\sqrt{\pi}}{5} z^4 \sigma\lambda\pi_{inl}^o,$$
$$\partial_t \pi_{enl}^o = -\frac{8\sqrt{\pi}}{5}(1+\sqrt{2}z) z\lambda\pi_{enl}^o, \quad \partial_t q_{in}^o = -\frac{16\sqrt{\pi}}{15} z^4 \sigma\lambda q_{in}^o,$$
$$\partial_t u_l = -\lambda_u u_l - \lambda_{uq_e} q_{el}^o, \quad \partial_t q_{el}^o = -\lambda_{q_e u} u_l - \lambda_{q_e} q_{el}^o, \tag{7.27}$$
$$\lambda_u = \frac{4\sqrt{2\pi}\, z^2}{3}\lambda, \qquad \lambda_{q_e} = \frac{2\sqrt{\pi}}{15}(8+13\sqrt{2}z) z\lambda,$$
$$\lambda_{uq_e} = -\frac{4\sqrt{2\pi}}{5}\frac{z}{n_i T}\lambda, \qquad \lambda_{q_e u} = -2\sqrt{2\pi}\, z^3 n_i T\lambda, \quad \lambda \equiv n_i e^4 L / m_e^{1/2} T^{3/2}.$$

З (7.27) очевидно, що параметри τ, π_{inl}^o, π_{enl}^o, q_{in}^o згасають з часом. Щодо параметрів u_l та q_{el}^o бачимо, що не всі релаксаційні константи для них у рівняннях (7.27) додатні. Однак характеристичне рівняння для них

$$\begin{vmatrix} \lambda_u - \alpha & \lambda_{uq_e} \\ \lambda_{q_e u} & \lambda_{q_e} - \alpha \end{vmatrix} = 0 \tag{7.28}$$

має два дійсні від'ємні корені α, тому звідки очевидно, що параметри u_l та q_{el}^o також згасають з часом, тобто система є стабільною та дійсно стан системи з часом прямує до рівноважного.

Висновки до розділу 7

Розглянуто тринадцятимоментну задачу Греда у повністю іонізованій двокомпонентній просторово-однорідній плазмі. Система розглядається біля завершення релаксаційних процесів, тобто відхилення параметрів скороченого опису системи від рівноважних значень можна вважати малими. Це дає змогу ввести в теорію малий релаксаційний параметр, який дає змогу розв'язати кінетичне рівняння у теорії збурень та отримати функцію розподілу компонент та часові рівняння для параметрів скороченого опису. Це є суттєвою перевагою запропонованого розгляду у порівнянні зі стандартним підходом до методу Греда [69], бо в рамках стандартного підходу функція розподілу, фактично, постулюється, бо немає змоги розв'язати кінетичне рівняння через відсутність малого параметра у теорії.

Теорію збурень за малим релаксаційним параметром реалізовано у нульовому та першому порядках малості, тобто для простоти розглянуто лише лінійну теорію релаксації. Отримано, що стандартні функції розподілу (7.3) є функціями розподілу у головному порядку за малим відношенням мас електрона та іона, проте поправки до цього результату отримано у більш високих порядках за цим відношенням мас. Показано, що наші поправки мають дуже суттєвий вплив на поправочні члени у часових рівняннях для параметрів скороченого опису.

Результати розділу 7 опубліковано у наших роботах [149 – 151].

ВИСНОВКИ

1. На основі кінетичного рівняння вперше розроблено загальну теорію релаксаційних процесів в околі гідродинамічних станів (узагальнений метод Чепмена–Енскога) шляхом розгляду цих процесів біля їх завершення (в роботі релаксаційними називаються процеси, які можуть відбуватися в просторово-однорідній системі).

2. За допомогою узагальненого методу Чепмена–Енскога вперше досліджено максвеллівську релаксацію в однокомпонентному газі. Показано, що відомі результати Греда для функції розподілу та часів релаксації потоків відповідають наближенню одного полінома Соніна, та знайдено вирази для відповідних величин у наближенні двох поліномів. На основі узагальненого методу Чемпена–Енскога вперше досліджено тринадцятимоментну задачу Греда у повністю іонізованій плазмі, та знайдено поправки до відомих у літературі результатів для функції розподілу компонент та часових рівнянь для параметрів скороченого опису у більш вискоих порядках за малим відношенням мас електрона та іона.

3. На основі узагальненого методу Чемпена–Енскога вперше досліджено релаксаційні процеси в повністю іонізованій плазмі біля їх завершення. Розроблено метод розв'язування отриманих інтегральних рівнянь у теорії збурень за малим відношенням мас електрона та іона з подальшими обчисленнями методом обірваних розвинень за поліномами Соніна. Показано, що наближення локальної рівноваги дає вірні результати лише в головному порядку за відношенням мас та в рамках лінійної теорії релаксації. Отримано поправки до цього наближення в теорії збурень за відношенням мас у лінійній та квадратичній (з квадратичною нелінійністю) теоріях релаксації. У відповідних членах теорії збурень за відношенням мас показано, що отримані в монографії вирази більші за внески наближення локальної рівноваги.

4. Досліджено гідродинамічні процеси в плазмі при наявності в ній релаксаційних процесів. При цьому враховано вищезазначені поправки до наближення локальної рівноваги. Отримано потоки енергії та імпульсу й кінетичні коефіцієнти плазми з урахуванням процесів релаксації швидкостей та температур компонент.

5. На основі кінетичних рівнянь Ландау та Ландау–Власова досліджено моди двокомпонентної плазми в гідродинамічних станах при наявності релаксаційних процесів. При цьому в рамках теорії збурень за відношенням мас послідовно враховано динаміку іонної компоненти. Отримано моди релаксаційного

згасання плазмових хвиль та вказано діапазон значень хвильового вектора, коли релаксаційне згасання є вагомішим за згасання Ландау.

Ідея нашого узагальненого методу Чемпена–Енскога та деякі його застосування описані у нашій оглядовій статті [152]. За матеріалами розділів 1 та 3–6 захищено кандидатську дисертацію [153].

Результати монографії можуть бути застосовані при створенні нової елементної бази сучасної електроніки та дослідженні нових підходів до створення систем зв’язку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Боголюбов Н. Н. Собрание научных трудов в 12-ти томах. Статистическая механика. Том 5 : Неравновесная статистическая механика / Н. Н. Боголюбов. – Москва : Наука, 2006. – 804 с.
2. Sokolovsky S. A. Hydrodynamic states of phonons in insulators / S. A. Sokolovsky // Condensed Matter Physics. – 2012. – V. 15, № 4. – P. 43007.
3. Mryglod I. M. Generalized statistical hydrodynamics of fluids: Approach of generalized collective modes / I. M. Mryglod // Condensed Matter Physics. –1998. – Vol. 1, № 4. – P. 753 – 796.
4. Ландау Л. Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия / Л. Д. Ландау // Собрание трудов : в 2 т. Т. 1 / Л. Д. Ландау. – Москва : Физматлит, 2008. – С. 199 – 207.
5. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases / H. Grad // Commun. on Pure and Appl. Math. – 1949. – V. 2, № 4. – P. 331 – 407.
6. Jou D. Extended Irreversible Thermodynamics / D. Jou, J. Casas-Vazquez, G. Lebon. – Springer, 2010. – 483 p.
7. Bogolubov N. N. Aspects of Polaron Theory. Equilibrium and Nonequilibrium Problems / N. N. Bogolubov, N. N. Bogolubov Jr. – Singapore : World Scientific, 2008. – 178 p.
8. Соколовский С. А. К кинетике полярона в методе сокращенного описания Боголюбова / С. А. Соколовский // Теоретическая и математическая физика. – 2011. – Т. 168, № 2. – С. 341 – 353.
9. Akhiezer A. I. Methods of Statistical Physics / A. I. Akhiezer, S. V. Peletminsky. – Oxford : Pergamon Press, 1981. – 376 p.
10. Chapman S. The mathematical theory of non-uniform gases / S. Chapman, T. Cowling . – Cambridge : University Press, 1991. – 448 p.
11. Spicka V. Electron systems out of equilibrium: Nonequilibrium Green's function approach / V. Spicka, B. Velicky, A. Kalvova // International Journal of Modern Physics B. – 2014. – V. 28, № 23. – P. 1430013.
12. Kuzemsky A. L. Electronic transport in metallic systems and generalized kinetic equations / A. L. Kuzemsky // International Journal of Modern Physics B. – 2011. – V. 25, № 23 & 24. – P. 3071 – 3183.
13. Liboff R. L. Kinetic Theory: Classical, Quantum, and Relativistic Description / R. L. Liboff. – New York : Springer-Verlag, 2003. – 572 p.
14. VanVliet C. M. Equilibrium and Non-equilibrium Statistical Mechanics / C. M. VanVliet. – Singapore : World Scientific, 2008. – 992 p.
15. Jakobsen Hugo A. Chemical Reactor Modeling: Multiphase Reactive Flows / Hugo A. Jakobsen. – Springer International Publishing, 2014. – 1535 p.

16. Rukhadze A. A. Priciples of Plasma Electrodynamics / A. A. Rukhadze, A. F. Alexandrov, L. S. Bogdankevich. – Moscow : URSS, 2013. – 504 p.
17. Sigeneger F. Spatial Electron Relaxation: Comparison of Monte Carlo and Boltzmann Equation Results / F. Sigeneger, N. A. Dyatko, R. Winkler // Plasma Chemistry and Plasma Processing. – 2003. – V. 23, № 1. – С. 103 – 116.
18. Соколовский С. А. Кинетическое уравнение для сильнонеоднородных состояний электрона в кристалле / С. А. Соколовский, И. М. Черненко // Вісник Дніпропетровського університету. Серія Фізика. Радіоелектроніка. – 2003. – Выпуск 10. – С. 152 – 159.
19. Guo Y. Phonon hydrodynamics and its applications in nanoscale heat transport / Y. Guo, M. Wang // Physics Reports. – 2015. – Vol. 595. – P. 1 – 44.
20. Orlovsky G. G. On photon kinetics in equilibrium plasma medium / G. G. Orlovsky, A. I. Sokolovsky, A. O. Pevzner // Вісник Дніпропетровського університету. Серія Фізика. Радіоелектроніка – 2014. – Т. 22, Випуск 21, № 1. – С. 42 – 49.
21. Transport coefficients of solid particles immersed in a viscous gas / V. Garzo, W. D. Fullmer, C. M. Hrenya, X. Yin // Physical Review E. – 2016. – V. 92. – P. 012905 (19 pages).
22. Moroz O. Shear and bulk viscocities of a hadron gas within relaxation time approximation and its test / O. Moroz // Ukranian Journal of Physics. – 2013. – V. 58, № 12. – С. 1127 – 1131.
23. Moroz O. Analytical formulas for shear and bulk viscosities in relativistic gaseous mix-tures with constant cross sections / O. Moroz // Computers & Fluids. – 2014. – V. 90. – P. 9 – 20.
24. Relativistic quantum transport coefficients for second-order viscous hydrodynamics / W. Florkowski, A. Jaiswal, E. Maksymiuk, R. Ryblewski, M. Strickland // Physical Review C. – 2015. – Vol. 91. – P. 054907 (9 pages).
25. Bhalerao R. S. Collective flow in event-by-event partonic transport plus hydrodynamics hybrid approach / R. S. Bhalerao, A. Jaiswal, S. Pal // Physical Review C. – 2015. – Vol. 92. – P. 014903 (8 pages).
26. Modeling early stages of relativistic heavy ion collisions: Coupling relativistic transport theory / M. Ruggieri, A. Puglisi, L. Oliva, S. Plumari, F. Scardina, V. Greco // Physical Review C. – 2015. – Vol. 92. – P. 064904 (12 pages).
27. Kremer G. Transport coefficients of a granular gas of inelastic rough hard spheres / G. Kremer, A. Santos, V. Garzo // Physical Rewiew E. – 2014. – V. 90. – P. 022205 (16 pages).
28. Khalil N. Transport coefficients for driven granular mixtures at low density / N. Khalil, V. Garzo // Physical Rewiew E. – 2013. – V. 88. – P. 052201 (19 pages).

29. Garzo V. Diffusion transport coefficients for granular binary mixtures at low density: Thermal diffusion segregation / V. Garzo, J. A. Murray, F. V. Reyes // Physics of Fluids. – 2013. – Vol. 25. – P. 043302 (28 pages).
30. Kremer G. M. The Boltzmann equation in special and general relativity / G. M. Kremer // 28th International Symphosium on rerefied gas dynamics, July, 9 – 13, 2012, Zaragosa, Spain : Proceedings. – Zaragoza, 2012. – V. 1501. – P. 160 – 167.
31. Moratto V. Mixtures of relativistic gases in gravitational fields: Combined Chapman–Enskog and Grad method and the Onsager relations / V. Moratto, G. M. Kremer // Physical Review E. – 2015. – Vol. 91. – P. 052139 (12 pages).
32. Foundations of the Kinetic Theory of Gases / D. Hilbert // Kinetic Theory. The Chapman–Enskog solution of the transport equation for moderately dense gases. In 3 v. V. 3. // S. G. Brush. – Oxford : Pregamon Press, 1972. – P. 89 – 101.
33. Chapman S. The Kinetic Theory of Simple and Composite Monatomic Gases: Viscosity, Thermal Conduction, and Diffusion / S. Chapman, F. W. Dootson. // Kinetic theory. The Chapman–Enskog solution of the transport equation for moderately dense gases. In 3 v. V. 3. // S.G. Brush, D. ter Haar. – Oxford : Pergamon Press, 1972. – P. 102 – 119.
34. Enskog David. Kinetic Theory of Processes in Dilute Gases / David Enskog // Kinetic Theory. The Chapman–Enskog solution of the transport equation for moderately dense gases. In 3 v. V. 3. // S.G. Brush, D. ter Haar. – Oxford : Pregamon Press, 1972. – P. 125 – 225.
35. Burnet D. The distribution of velocities in a slightly non-uniform gas / D. Burnet // Proc. London Math. Soc. – 1935. – V. 39. – P. 385 – 430.
36. Santos A. The second and third Sonine coefficients of a freely cooling granular gas revisited / Andres Santos, Jose Maria Montanero // Granular Matter. – 2009. – V. 11. – P. 157 – 168.
37. Santos A. Sonine approximation for collisional moments of granular gases of inelastic rough spheres / A. Santos, G. Kremer, M. dos Santos // Physics of Fluids. – 2011. – V. 23. – P. 030604 (13 pages).
38. Kremer G. Entropy, entropy flux and entropy rate of granular materials / G. Kremer // Physica A. – 2010. – V. 389. – P. 4018 – 4025.
39. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме / С. И. Брагинский // Вопросы теории плазмы / под редакцией М. А. Леонтовича. – Москва : Госатомиздат, 1963. – С. 183 – 272.
40. Nonlocal transport model in equilibrium two-component plasmas / Zhen Zheng, W. Rozmus, V. Yu. Bychenkov, A. V. Brantov, C. E. Capjack // Physics of plasmas. – 2009. – V. 16. – P. 102301.

41. Cercignani C. Mathematical methods in kinetic theory // C. Cercignani. – New York : Springer, 1990. – 252 p.
42. Бобылев А. В. Точные решения нелинейного уравнения Больцмана и теория релаксации максвелловского газа / А. В. Бобылев // Теоретическая и математическая физика. – 1984. – Т. 60, № 2. – С. 280 – 310.
43. Garcia-Colin L. S. Beyond the Navier–Stokes equations: Burnett hydrodynamics / L. S. Garcia-Colin, R. M. Velasco, F. J. Uribe // Physics Reports. – 2008. – V. 465. – P. 149 – 189.
44. Uribe F. J. Burnett description for plane Poiseuille flow / F. J. Uribe, A. L. Garcia // Physical Rewiew E. – 1999. – V. 60. – P. 4063 – 4078.
45. Sokolovsky S. A. Conductivity of a solid in a strong nonuniform state / S. A. Sokolovsky // 12-th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, June, 29 – July, 02, 2008, Odessa, Ukraine : Proceedings. – Odessa, 2008. – P. 265 – 267.
46. Sokolovsky S. A. Kinetic equation for electron in polar crystal in the presense of strong electric field [Electronic recourse] / S. A.Sokolovsky // 13th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, September, 6 – 8, 2010, Kyiv, Ukraine : Proceedings. – Kyiv, 2010 г. – 1 compact disc (DVD).
47. Kuzemsky A. L. Thermodynamic limit in stastistical physics / A. L. Kuzemsky // International Journal of Modern Physics B. – 2014. – V. 28, № 9. – P. 1430004 (28 pages).
48. Boltzmann Ludwig Further Studies on the Thermal Equilibrium of Gas Molecules / Ludwig Boltzmann // The Kinetic Theory of Gases. An Anthology of Classic Papers with Historical Commentary / Nancy S. Hall, Stephen G. Brush. – London : Imperial College Press, 2003. – P. 262 – 349.
49. Зубарев Д. Н. Формулировка граничных условий к цепочке Боголюбова с учетом локальных законов сохранения / Д. Н. Зубарев, В. Г. Морозов // Теоретическая и математическая физика. – 1984. – Т. 60, № 2. – С. 270 – 279.
50. Petrina D. Ya. Stochastic Dynamics and Boltzmann Hierarchy / D. Ya. Petrina. – Berlin : Walter de Gruyter, 2009. – P. 14 – 43.
51. Gerasimenko V. I. From BBGKY Hierarchy to Non-Markovian Evolution Equations / V. I. Gerasimenko, V. I. Shtyk, A. G. Zagorodny // Ukranian Journal of Physics. – 2009. – V. 54, № 8–9. – P. 795 – 807.
52. Gerasimenko V. I. On the non-Markovian Enskog equation for granular gases / V. I. Gerasimenko and M. S. Borovchenkova // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2014. – V. 47. – P. 035001 (18pages).
53. Gerasimenko V. I. Approaches to Derivation of Quantum Kinetic Equations / V. I. Gerasimenko // Ukranian Journal of Physcis. – 2009. – V. 54, № 8–9. – C. 834 – 846.

54. Gerasimenko V. I. A description of the evolution of quantum states by means of the kinetic equation / V. I. Gerasimenko, Zh. A. Tsvir // Journal of Physics A : Mathematical and theoretical. – 2010. – V. 43. – P. 485203 (19 pages).
55. Gerasimenko V. I. A nonperturbative solution of the nonlinear BBGKY hierarchy for marginal correlation operators / V. I. Gerasimenko, D. O. Polishchuk / Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2013. – V. 36, № 17. – P. 2311 – 2328.
56. Sliusarenko O. Yu. The Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon hierarchy and Fokker–Planck equation for many-body dissipative randomly driven systems / O. Yu. Sliusarenko, A. V. Chechkin, Yu. V. Slyusarenko // Journal of Mathematical Physics. – 2015. – V. 56. – P. 043302.
57. Santos A. Energy Production Rates in Fluid Mixtures of Inelastic Rough Hard Spheres / A. Santos, G. Kremer, V. Garzo // Progress of Theoretical Physics Supplement. – 2010. – № 184. – P. 31 – 48.
58. Gerasimenko V. Hydrodynamic equations for microscopic phase densities / V. Gerasimenko, V. Shtyk, A. Zagorodny // Central European Journal of Physics. – 2011. – V. 9, № 1. – P. 71 – 77.
59. Sokolovsky A. I. To the problem of calculation of the effective initial conditions for hydrodynamoc equations / A. I. Sokolovsky, Z. Yu. Chelbaevsky // Visinik Dnipropetrovs'kogo universitetu. Seria Fizika. Radioelectronika. – 2014. – V. 22, Issue 21, № 1. – P. 34 – 41.
60. Соколовский А. И. Формирование сокращенного описания в модели броуновского движения / А. И. Соколовский, З. Ю. Челбаевский, С. А. Яненко // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Фізика. Радіоелектроніка». – 2012. – Т. 20, Выпуск19, № 2. – С. 25 – 31.
61. Sokolovsky A. I. Basic ideas of the Bogoliubov reduced description method and exact solvable model for Brownian motion / A. I. Sokolovsky, Z. Yu. Chelbaevsky, S. A. Yanenko // New Physics and Quantum Chromodynamics at External Conditions : International School-seminar, May, 22 – 24, 2013, Dnipropetrovsk, Ukraine : Proceedings – Dnipropetrovsk, 2013. – P. 131 – 134.
62. Sokolovsky A. Equations of electrodynamics with nonequilibrium fluctuations in many-component hydrodynamic medium / A. Sokolovsky, A. Stupka // 10th Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Sept., 14 – 17, 2004, Dnipropetrovsk, Ukraine : Proceedings. – Dnipropetrovsk, 2004. – P. 234 – 236.
63. Sokolovsky A. Waves of electromagnetic field correlations in hydrodynamic plasma / A. Sokolovsky, A. Stupka // 11 Int. Conf. on Mathematical Methods in

Electromagnetic Theory, June, 26 – 29, Kharkiv, Ukraine : Proceedings. – Kharkiv, 2006. – P. 494 – 496.
64. Lyagushyn S. F. Kinetics of pulsed electromagnetic generators based on superfluorescense with taking into account medium and cavity / S. F. Lyagushyn, Yu. M. Salyuk, A. I. Sokolovsky // 11 Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, June, 26 – 29, Kharkiv, Ukraine : Proceedings. – Kharkiv, 2006. – P. 560 – 562.
65. Lyagushyn S. F. To kinetics of emitters in a crystal taking into account their motion / S. F. Lyagushyn, Yu. M. Salyuk, A. I. Sokolovsky // Вісник Дніпропетровського Університету. Серія «Фізика. Радіоелектроніка». – 2009. – Т. 16. – С. 64 – 69.
66. Lyagushyn S. F. Electromagnetic waves in medium consisting of two-level emitters / S. F. Lyagushyn, Yu. Salyuk, A. Sokolovsky // 14th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, August, 28–30, 2012, Kharkiv, Ukraine : Proceedings. – Kharkiv, 2012. – P. 205 – 208.
67. Соколовський О. Й. Перенормована кінетика електромагітного поля у рівноважному середовищі / О. Й. Соколовський, А. А. Ступка // Вісник Дніпропетровського університету. Серія "Фізика. Радіоелектроніка". – 2008. – Т. 16, Выпуск15, № 2. – С. 13 – 23.
68. Vannucchi F. Thermo-ststistical theory of kinetic and relaxation processes / F. Vannucchi, A. R. Vasconcellos, R. Luzzi // International Journal of Modern Physics B. – 2009. – V. 23, № 27. – P. 5283 – 5305.
69. Силин В. П. Введение в кинетическую теорию газов / В. П. Силин. – Москва : УРСС, 2013. – 344 с.
70. Zhdanov V. M. Electron transport coefficients in molecular and atomic plasmas with account for inelastic collisions / V. M. Zhdanov, A. A. Stepanenko // Physics Procedia. – 2015. – Vol. 71. – P. 110 – 115.
71. Zhdanov V. M. Kinetic theory of transport processes in partially ionized reactive plasma, I: General transport equations / V. M. Zhdanov, A. A. Stepanenko // Physica A. – 2016. – Vol. 446. – P. 35 – 53.
72. Garzo V. Grad's moment method for a low-density granular gas. Navier-Stokes transport coefficients / V. Garzo // AIP Conference Proceedings. – 2012. – Vol. 1501. – P. 1031 – 1037.
73. Garzo V. Grad's moment method for a granular fluid at moderate densities: Navier-Stokes transport coefficients / V. Garzo // Physics of Fluids. – 2013. – Vol. 25. – P. 043301 (22 pages).
74. Study of the shock wave structure by regularized Grad's set of equations / M. Yu. Timokhin, Ye. A. Bondar, A. A. Kokhanchik, M. S. Ivanov, I. E. Ivanov, I. A. Kryukov // Physics of Fluids. – 2015. – Vol. 27. – P. 037101 (17 pages).

75. Relativistic third-order viscous corrections to the entropy four-current from kinetic theory / C. Chattopadhyay, A. Jaiswal, S. Pal, R. Ryblewski // Physical Review C. – 2015. – Vol. 91. – P. 024917 (9 pages).
76. Derradi de Souza R. Hydrodynamic approaches in relativistic heavy ion reactions. / R. Derradi de Souza, T. Koide, T. Kodamaa // Progress in Particle and Nuclear Physics. – 2016. – Vol. 86. – P. 35 – 85.
77. Ishimaru S. Basic principles of plasma physics. A statistical approach / S. Ishimaru. – N.-Y. : Addison-Wesley Publ. Company, Inc., 1980. – 324 p.
78. Брагинский С. И. Явления переноса в полностью ионизированной двухтемпературной плазме / С. И. Брагинский // ЖЭТФ. – 1957. – Т. 33. – С. 459 – 472.
79. Жданов В. М. Процессы переноса в многокомпонентной плазме / В. М. Жданов. – Москва : Физматлит, 2009. – 280 с.
80. Brantov A. V. Relaxation of a Thermal Perturbation in a Collisional Plasma / A. V. Brantov, V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus // Plasma Physics Reports. – 2006. – V. 32, № 4. – P. 337 – 343.
81. Brantov A. V. Nonlocal Transport in Hot Plasma. Part I / A. V. Brantov, V. Yu. Bychenkov // Plasma Physics Reports. – 2013. – V. 39, № 9. – P. 698 – 744.
82. Brantov A. V. Nonlocal Transport in Hot Plasma. Part II / A. V. Brantov, V. Yu. Bychenkov // Plasma Physics Reports. – 2014. – V. 40, № 7. – P. 505 – 563.
83. Брантов А. В. Электроннный перенос и диэлектрическая проницаемость в плазме с произвольным зарядом ионов / А. В. Брантов, В. Ю. Быченков, В. Розмус // ЖЭТФ. – 2008. – Т. 133, № 5. – С. 1123 – 1139.
84. Brantov A. V. Nonstationary Kinetic Theory of Ion Transport in Plasma with Small Perturbations / A. V. Brantov, V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus // Plasma Physics Reports. – 2013. – V. 39, № 5. – P. 364 – 373.
85. Загородний А. Г. Введение в физику плазмы / А. Г. Загородний, О. К. Черемных. – Киев : Наукова Думка, 2014. – 694 с.
86. Singh Navinder Two-temperature model of nonequilibrium electron relaxation: a rewiew / Singh Navinder // International Journal of Modern Physics B. – 2010. – V. 24, № 9. – P. 1141 – 1158.
87. Nikolayenko S. O. Theory of macroscopic fluctuations in systems of particles, interacting with hydrodynamic and gaslike media / S. O. Nikolayenko, Yu. V. Slyusarenko // Journal of Mathematical Physics. – 2010. – T. 51. – P. 113301 (23 pages).

88. Kuzemsky A. L. The theory of transport processes and the method of the nonequilibrium statistical operator / A. L. Kuzemsky // International Journal of Modern Physics B. – 2007. – V. 21, № 11. – P. 2821 – 2949.
89. Sizhuk A. S. Relaxation of Spatially Uniform Distribution Function in the Case on Non-Uniform Energy Distribution / A. S. Sizhuk, S. M. Yezhov // Ukranian Journal of Physics. – 2012. – V. 57, № 12. – P. 1250 – 1256.
90. Garzo V. Transport properties for driven granular fluids in situations close to homogeneous steady states / V. Garzo, M. Chamorro, F. Vega Reyes // Physical Rewiew E. – 2013. – V. 87. – P. 032201 (18 pages).
91. Bobylev A. V. Relaxation of two-temperature plasma / A. V. Bobylev, I. F. Potapenko, P. H. Sakanaka // Physical Rewiew E. – 1997. – V. 56, № 2. – P. 2081 – 2093.
92. Barrat A. Lack of energy equipartition in homogeneous heated binary granular mixtures / A. Barrat, E. Trizac // Granular Matter. – 2002. – V. 4. – P. 57 – 63.
93. Sokolovsky S. A. On theory of conductivity taking into account relaxation phenomena / S. A. Sokolovsky // 14th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, August, 28 – 30, Kharkiv, Ukraine : Proceedings. – Kharkiv, 2012. – P. 213 – 216.
94. Sokolovsky S. A. On the hydrodynamics of polaron gas in the Bogolyubov reduced description method / S. A. Sokolovsky // Problems of atomic science and technology. Series : Nuclear Physics Investigations (57). – 2012. – № 1. – P. 217 – 220.
95. Orlovsky G. G. Weak Nonequilibrium States of Photons in Equilibrium Plasma / G. G. Orlovsky, A. I. Sokolovsky, A. O. Pevzner // 15-th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, August, 26 – 28, 2014, Dnipropetrovsk : Proceedings. – Dnipropetrovsk, 2014. – P. 71 – 74.
96. Orlovsky G. G. To kinetics of photons in equilibrium medium / G. G. Orlovsky, A. O. Pevzner, A. I. Sokolovsky // New Physics and Quantum Chromodynamics at External Condition : International School-seminar, May, 22 – 24, Dnipropetrovsk, Ukraine : Proceedings. – Dnipropetrovsk, 2013. – P. 127 – 130.
97. Nikolayenko S. O. On the Kinetics of Spatially Non-uniform States of Particles Weakly Interacting with a Hydrodynamic Medium / S. O. Nikolayenko, S. V. Peletminskii, Yu. V. Slyusarenko // Ukranian Journal of Physics. – 2007. – V. 52, № 3. – P. 281 – 294.
98. Ніколаєнко С. О. Метод скороченого опису в динамічній теорії частинок, що слабко взаємодіють з гідроинамічним середовищем / С. О. Ніколаєнко, Ю. В. Слюсаренко // Журнал фізичних досліджень. – 2007. – Т. 11, № 1. – С. 74 – 88.

99. Nikolayenko S. O. Microscopic theory of relaxation processes in systems of particles interacting with the hydrodynamic medium / S. O. Nikolayenko, Yu. V. Slyusarenko // Journal of Mathematical Physics. – 2009. – V. 50. – P. 083305 (32 pages).
100. Лифшиц Е. М. Физическая кинетика / Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. – Москва : Физматлит, 2007. – 536 с.
101. Balescu R. Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics / R. Balescu. – Malabar : Kreiger Pub Co., 1991. – 742 p.
102. Colangeli Matteo From Kinetic Models to Hydrodynamics: Some Novel Results / Colangeli Matteo. – New York : Springer, 2013. – 104 p.
103. Nikolayenko S. O. On the long-wave fluctuations in systems of particles intercating with hydrodynamic media / S. O. Nikolayenko, Yu. V. Slyusarenko // Problems of Atomic Science and Technology. – 2012. – № 1. – C. 198 – 202.
104. Bryk T. Charge density autocorrelation functions of molten salts: analytical treatment in the long-wavelength limit / T. Bryk, I. Mryglod // Journal of physics: Condensed Matter. – 2004. – V. 16. – P. 463 – 469.
105. Collective excitations in supercritical fluids: Analytical and molecular dynamics study of "positive" and "negative" dispersion / T. Bryk, I. Mryglod, T. Scopigno, G. Ruocco, F. Gorelli, M. Santoro // The journal of chemica lphysics. – 2010. – V. 133. – P. 024502.
106. Bryk T. Kinetic collective excitations in liquids: heat waves / T. M. Bryk, I. M. Mryglod // Problems of atomic science and technology. – 2007. – № 3. – P. 305 – 308.
107. Bryk T. Structural relaxation in pure liquids: Analysis of wavenumber dependence within the approach of generalized collective modes / T. Bryk, I. Mryglod // Condensed Matter Physcis. – 2008. – V. 11, № 1. – P. 139 – 154.
108. Bryk T. Collective dynamics in a disparate mass molten alloy Li4Tl: Analysis within the approach of generalized collective modes / T. Bryk, J.-F. Wax // Physical Rewiew B. – 2009. – V. 80. – P. 184206 (10 pages).
109. Bryk T. Non-hydrodynamic collective modes in liquid metals and alloys / T. Bryk // European Physical Journal. – 2011. – V. 196. – P. 65 – 83.
110. Скалозуб В. В. Класична макроскопічна електродинаміка / В. В. Скалозуб, О. В. Гулов. – Дніпропетровськ : ДНУ, 2010. – 168 с.
111. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы / Л. Д. Ландау // Собрание Трудов. В 2 т. Т. 2 / Л. Д. Ландау. – Москва : Физматлит, 2008, – С. 7 – 25.
112. Sokolovsky A. I. On the Bohm-Pines guuge for system of the charged particles / A. I. Sokolovsky, A. A. Stupka, Z. Yu.Chelbaevsky // International Conference

on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, August, 28 – 30, 2012, Kharkiv, Ukraine : Proceedings. – Kharkiv, 2012. – P. 189 –192.
113. Зубарев Д. Н. Статистическая механика неравновесных процессов. В 2 т. Т. 1 / Д. Н. Зубарев, В. Г. Морозов, Г. Рёпке. – Москва : Физматлит, 2002. – 432 с.
114. Зубарев Д. Н. Статистическая механика неравновесных процессов. В 2 т. Т. 2 / Д. Н. Зубарев, В. Г. Морозов, Г. Рёпке. – Москва : Физматлит, 2002. – 296 с.
115. Hlushak P. A. Quantum transport equations for Bose systems taking into account nonlinear hydrodynamic processes / P. A. Hlushak, M. V. Tokarchuk // Condensed Matter Physics. – 2014. – V. 17, № 2. – P. 23606 (14 pages).
116. Zubarev nonequilibrium statistical operator method in Renyi statistics. Reaction-diffusion processes / P. Kostrobij, R. Tokarchuk, M. Tokarchuk, B. Markiv // Condensed Matter Physics. – 2014. – V. 17, № 3. – P. 33005 (9 pages).
117. Markiv B. Consistent Description of Kinetics and Hydrodynamics of Weakly Nonequilibrium Processes in Simple Liquids / B. Markiv, I. Omelyan, M. Tokarchuk // Journal of Statistical Physics. – 2014. – V. 155, № 5. – P. 843 – 866.
118. Sokolovsky A. I. Reduced description of nonequilibrium processes and correlation functions. Divergences and non-analyticity / A. I. Sokolovsky // Condensed Matter Physics. – 2006. – V. 9, № 3. – P. 415 – 430.
119. Sokolovsky A. Field Oscillators in linear electromagnetic theory of plasma / A. Sokolovsky, A. Stupka // 12th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, June, 29 – July, 02, Odessa, Ukraine : Proceedings. – Odessa, 2008. – P. 262 – 264.
120. Резибуа П. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов / П. Резибуа, М. Де Ленер. – Москва : Мир, 1980. – 424 с.
121. Ферцигер Дж. Математическая теория процессов переноса в газах / Дж. Ферцигер, Г. Капер. – М.: Мир, 1976. – 554 с.
122. Kohler M. Behandlung von Nichtgleichgewichtsvorgängen mit Hilfe eines Extremalprinzipes / M. Kohler // Zs. Phys. – 1948. – Bd. 124. – P.772-789.
123. Sokolovsky A. I. Classical fluctuation electrodynamics / A. I. Sokolovsky, A. A. Stupka // Condensed Matter Physics. – 2005. – V. 8, № 4. – P. 685 – 700.
124. Sokolovsky A. I. Dispersion Relations for Waves in Plasma and Bogolyubov Ideas in Many-body Theory / A. I. Sokolovsky, A. A. Stupka, Z. Yu. Chelbaevsky // Ukranian Journal of Physics. – 2010. – V. 55, № 1. – P. 20 – 28.
125. Lyagushyn S. A way to taking into account fluctuations in superfluorescence Dicke model / S. Lyagushyn, Yu. Salynk, A. Sokolovsky // 10th Int. Conf. on

Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Sept., 14 – 17, Dnipropetrovsk, Ukraine : Proceedings. – Dnipropetrovsk, 2004. – P. 533 – 535.

126. Lyagushyn S. F. Correlation properties of electromagnetic field generated by emitters with random orientation / S. F. Lyagushyn, Yu. M. Salyuk, A. I. Sokolovsky // 12th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, June, 29 – July, 02, Odessa, Ukraine : Proceedings. – Odessa, 2008. – P. 271 – 273.

127. Lyagushyn S. F. Electromagnetic field state description with correlation functions of different nature [Electronic recourse] / S. F. Lyagushyn, A. I. Sokolovsky // 13th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, September, 6 – 8, 2010, Kyiv, Ukraine : Proceedings. – Kyiv, 2010. – 1 compact disc (DVD).

128. Gorev V. N. Investigation of nonequilibrium processes in vicinity of hydrodynamic states / V. N. Gorev, A. I. Sokolovsky // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2014. – V. 11, № 1. – P. 67 – 92.

129. Боголюбов Н. Н. Собрание научных трудов в 12-ти томах. Математика и нелинейная механика. Том 3. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов. – Москва : Наука, 2005. – 608 с.

130. Васильев А. Н. Классическая электродинамика. Краткий курс лекций / А. Н. Васильев. – Санкт-Петербург : БХВ, 2010. – 277 с.

131. Sokolovsky A. I. To the Landau theory of relaxation phenomena in plasma / A. I. Sokolovsky, V. N. Gorev, Z. Yu. Chelbaevsky // Problems of Atomic Science and Technology. Series : Nuclear Physics Investigations (57). – 2012. – № 1. – P. 230 – 234.

132. Gorev V. N. On relaxation phenomena in a two-component plasma / V. N. Gorev, A. I. Sokolovsky, Z. Yu. Chelbaevsky // Condensed Matter Physics. – 2015. – V. 18, № 3. – P. 33001 (18 pages).

133. Gorev V. N. Relaxation Processes in Spatially Homogenous Plasma with Account for Quadratic Terms [Electronic recourse] / V. N. Gorev, A. I. Sokolovsky // International Young Scientists Forum on Applied Physics 2015, September, 29 – October 2, 2015, Dnipropetrovsk, Ukraine : Proceedings. – Dnipropetrovsk, 2015. – 1 compact disc (DVD). – IEEE Catalog Number : CFP15YSF-CDR. – ISBN 978-1-4673-6976-3.

134. Gorev V. N. Non-linear relaxation in spatially uniform plasma / V. N. Gorev, A. I. Sokolovsky // Visnik Dnipropetrovs'kogo Unìversitetu. Serìa Fìzika, Radìoelektronika. – 2015. – V. 23, № 1. – P. 31 – 38.

135. Gorev V. N. Relaxation phenomena in a homogenous plasma [Electronic resourse] / V. N. Gorev, A. I. Sokolovsky // 15th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, August, 26 – 28, 2014, Dnipropet-

rovsk, Ukraine : Proceedings. – Dnipropetrovsk, 2014. – P. 217 – 220. – 1 compact disc (DVD). – IEEE Catalog Number: CFP14761-CDR. – ISBN 978-1-4479-6863-1.
136. Gorev V. N. Relaxation processes in a Coulomb plasma [Electronic recourse] / V. N. Gorev, A. I. Sokolovsky // 14th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, August, 28 – 30, 2012, Kharkiv, Ukraine : Proceedings. – Kharkiv, 2012. – P. 217 – 220. – 1 compact disc (DVD). – Catalog Number : CFP12761-CDR. – ISBN 978-1-4673-4479-1.
137. Gorev V. N. One-velocity and one-temperature hydrodynamics of plasma / V. N. Gorev, A. I. Sokolovsky // Visnyk Dnipropetrovskogo Universytetu. Fizyka. Radioelectronika. – 2013. – V. 21, Issue 20, № 2. – P. 39 – 46.
138. Gorev V. N. Plasma kinetic coefficients with account for relaxation processes / V. N. Gorev, A. I. Sokolovsky // International Journal of Modern Physics B. – 2015. – V. 29, № 30. – P. 1550233 (23 pages).
139. Gorev V. N. Plasma Hydrodynamics with Account for Relaxation Degrees of Freedom [Electronic recourse] / V. N. Gorev, A. I. Sokolovsky // International Young Scientists Forum on Applied Physics 2015, September, 29 – October, 2, 2015, Dnipropetrovsk, Ukraine : Proceedings. – Dnipropetrovsk, 2015. – 1 compact disc (DVD). – IEEE Catalog Number : CFP15YSF-CDR. – ISBN: 978-1-4673-6976-3.
140. Bohm D. A collective description of electron interactions: Coulomb Interactions in a degenerate electron gas / D. Bohm, D. Pines // Physical Rewiew. – 1953. –V. 92. – P. 609 – 625.
141. Lyagushyn S. F. Kinetics of system of emitters and nonequilibrium electromagnetic field / S. F. Lyagushyn, A. I. Sokolovsky // Physics of Particles and Nuclei. – 2010. – V. 41, № 7. – P. 1035 – 1038.
142. Lyagushyn S. F. Dispersion relation for waves of correlations of electromagnetic field in nonequilibrium emitter medium / S. F. Lyagushyn, A. I. Sokolovsky // New Physics and Quantum Chromodynamics at External Conditions : International School-seminar, May, 22 – 24, 2013, Dnipropetrovsk, Ukraine : Proceedings. – Dnipropetrovsk, 2013. – P. 139 – 142.
143. Lyagushyn S. F. Dynamics of electromagnetic field and its correlations in a medium consisting of two-level emitters / S. F. Lyagushyn, Yu. M. Salyuk, A. I. Sokolovsky // Visnyk Dnipropetrovskogo universytetu, Fizyka. Radioelectronika. – 2013. – V. 21, Issue 20, № 2. – P. 47 – 55.
144. Gorev V. N. Hydrodynamic modes of the Landau kinetic equation in the absence of relaxation / V. N. Gorev // Visnik Dnipropetrovs’kogo Unìversitetu. Serìa Fìzika, Radìoelektronika. – 2014. – V. 22, Issue 21, № 1. – P. 26 – 33.

145. Gorev V. N. Hydrodynamic, kinetic modes of plasma and relaxation damping of plasma oscillations / V. N. Gorev, A. I. Sokolovsky // Ukrainian Journal of Physics. – 2015. – V. 60, № 3. – P. 232 – 246.
146. Gorev V. N. Hydrodynamics of a completely ionized plasma taking into account relaxation phenomena / V. N. Gorev, A. I. Sokolovsky // New Physics and Quantum Chromodynamics at External Conditions : International School-seminar, May, 22 – 24, 2013, Dnipropetrovsk, Ukraine : Proceedings. – Dnipropetrovsk, 2013. – P. 135 – 138.
147. Gorev V. N. Landau equation modes of a Coulomb plasma [Electronic resourse] / V. N. Gorev, A. I. Sokolovsky // 15th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, August, 26 – 28, 2014, Dnipropetrovsk, Ukraine : Proceedings. – Dnipropetrovsk, 2014. – P. 221 – 224. – 1 compact disc (DVD). – IEEE Catalog Number: CFP14761-CDR. – ISBN 978-1-4479-6863-1.
148. Gorev V. N. Relaxation damping of plasma oscillations [Electronic resourse] / V. N. Gorev, A. I. Sokolovsky // 15th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, August, 26 – 28, 2014, Dnipropetrovsk, Ukraine : Proceedings. – Dnipropetrovsk, 2014. – P. 237 – 240. – 1 compact disc (DVD). – IEEE Catalog Number: CFP14761-CDR. – ISBN 978-1-4479-6863-1.
149. Gorev V. N. On the Grad Method in Plasma Physics [Electronic resource] / V. N. Gorev, A. I. Sokolovsky // 16th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, July, 5 –7, 2016, Lviv, Ukraine: Proceedings. – Lviv, 2016. – P. 361 – 364. – ISBN 978-1-5090-1956-4
150. Gorev V. N. On the Grad Problem in Plasma Physics [Electronic resource] / V. N. Gorev, A. I. Sokolovsky // II International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering, October, 10 – 14, 2016, Kharkiv, Ukraine: Proceedings. – Kharkiv, 2016. – P. 112–115.
151. Gorev V. N. The generalization of the Grad method in plasma physics / V. N. Gorev, A. I. Sokolovsky// Condensed Matter Physics. – 2017. – V. 20, No. 2, 23001. (10 pages)
152. Gorev V. N. New method in the theory of relaxation processes for non-uniform media / V. N. Gorev, S.A.Sokolovsky, A.I. Sokolovsky // Vìsnik Dnìpropetrovs’kogo unìversitetu. Serìâ Fìzika, radìoelektronika. – 2016 – V. 24, Issue 24. – P. 83 – 93.
153. Горєв В. М. Скорочений опис нерівноважних систем з урахуванням релаксаційних процесів : дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук [Текст] : 01.04.02 / Горєв В'ячеслав Миколайович; Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара – Дніпро, 2016. – 138 с.

Додаток 1. Вирази для лінеаризованого оператору зіткнень Ландау в різних порядках теорії збурень за відношенням мас

Явний вираз для оператору $\hat{K}_{ab}$ такий:

$$\hat{K}_{ab}h_p = 2\pi e_a^2 L w_{ap}^{-1}\frac{\partial}{\partial p_n}\sum_c e_c^2\int d^3p'\left(\delta_{bc}\frac{\partial h_{p'}}{\partial p'_l}-\delta_{ab}\frac{\partial h_p}{\partial p_l}\right)D_{nl}\left(\frac{p}{m_a}-\frac{p'}{m_c}\right)w_{ap}w_{cp'}. \quad (8.1)$$

На основі (8.1) можна отримати $\hat{K}_{ab}$ у різних порядках теорії збурень за σ. Для дії $\hat{K}_{ab}$ на парну функцію від імпульсу h_p маємо:

$$\begin{gathered}\hat{K}_{ee} = \hat{K}_{ee}^{(0)} + \hat{K}_{ee}^{(2)} + O\left(\sigma^4\right), \quad \hat{K}_{ei} = \hat{K}_{ei}^{(2)} + \hat{K}_{ei}^{(4)} + O\left(\sigma^6\right), \\ \hat{K}_{ie} = \hat{K}_{ie}^{(2)} + \hat{K}_{ie}^{(4)} + O\left(\sigma^6\right), \quad \hat{K}_{ii} = \hat{K}_{ii}^{(1)} + \hat{K}_{ii}^{(2)} + O\left(\sigma^4\right).\end{gathered} \quad (8.2)$$

Явні вирази для головних порядків у (8.2):

$$\begin{gathered}\hat{K}_{ee}^{(0)}h_p = 2\pi e^4 L m_e w_{ep}^{-1}\frac{\partial}{\partial p_n}\int d^3p' w_{ep}w_{ep'}D_{nl}\left(p-p'\right)\left(\frac{\partial h_{p'}}{\partial p'_l}-\frac{\partial h_p}{\partial p_l}\right) - \\ -2\pi z^2 e^4 L m_e n_i w_{ep}^{-1}\frac{\partial}{\partial p_n}w_{ep}D_{nl}\left(p\right)\frac{\partial h_p}{\partial p_l}, \\ \hat{K}_{ii}^{(1)}h_p = 2\pi e^4 L m_i L w_{ip}^{-1}\frac{\partial}{\partial p_n}\int d^3p'_i w_{ip}w_{ip'}D_{nl}\left(p-p'\right)\left(\frac{\partial h_{p'}}{\partial p'_l}-\frac{\partial h_p}{\partial p_l}\right), \\ \hat{K}_{ei}^{(2)}h_p = 2\pi z^2 e^4 L m_e w_{ep}^{-1}\frac{\partial}{\partial p_n}w_{ep}\int d^3p' w_{ip'}D_{nl}^{(1)}\left(p-\sigma^2 p'\right)\frac{\partial h_{p'}}{\partial p'_l}, \\ \hat{K}_{ie}^{(2)}h_p = 2\pi z^2 e^4 L m_e w_{ip}^{-1}\frac{\partial}{\partial p_n}w_{ip}\int d^3p' w_{ep'}D_{nl}^{(1)}\left(p'-\sigma^2 p\right)\frac{\partial h_{p'}}{\partial p'_l};\end{gathered} \quad (8.3)$$

вирази для більш високих порядків також отримуються на основі (8.1).

Для дії $\hat{K}_{ab}$ на функцію $p_s h_p$, де h_p – парна функція від імпульсу, маємо:

$$\begin{gathered}\hat{K}_{ee}p_s = \left(\hat{K}_{ee}p_s\right)^{(0)} + \left(\hat{K}_{ee}p_s\right)^{(2)} + O\left(\sigma^4\right), \\ \hat{K}_{ei}p_s = \left(\hat{K}_{ei}p_s\right)^{(0)} + \left(\hat{K}_{ei}p_s\right)^{(2)} + O\left(\sigma^4\right), \\ \hat{K}_{ie}p_s = \left(\hat{K}_{ie}p_s\right)^{(1)} + \left(\hat{K}_{ie}p_s\right)^{(3)} + O\left(\sigma^5\right), \\ \hat{K}_{ii}p_s = \left(\hat{K}_{ii}p_s\right)^{(0)} + \left(\hat{K}_{ii}p_s\right)^{(1)} + O\left(\sigma^3\right),\end{gathered} \quad (8.4)$$

Явні вирази для головних порядків у (8.4):

$$\left(\hat{K}_{ee}p_s\right)^{(0)}h_p = 2\pi e^4 L m_e w_{ep}^{-1}\frac{\partial}{\partial p_n}\int d^3p' w_{ep}w_{ep'}D_{nl}\left(p-p'\right)\left(\frac{\partial h_{p'}p'_s}{\partial p'_l}-\frac{\partial h_p p_s}{\partial p_l}\right) - \quad (8.5)$$

$$-2\pi z^2 e^4 L m_e n_i w_{ep}^{-1} \frac{\partial}{\partial p_n} w_{ep} D_{nl}(p) \frac{\partial p_s h_p}{\partial p_l},$$

$$\left(\hat{K}_{ii} p_s\right)^{(0)} h_p = 2\pi e^4 L m_i L w_{ip}^{-1} \frac{\partial}{\partial p_n} \int d^3 p_i' w_{ip} w_{ip'} D_{nl}(p - p') \left(\frac{\partial h_{p'} p_s'}{\partial p_l'} - \frac{\partial h_p p_s}{\partial p_l} \right),$$

$$\left(\hat{K}_{ei} p_s\right)^{(0)} h_p = 2\pi z^2 e^4 L m_e w_{ep}^{-1} \frac{\partial}{\partial p_n} \int d^3 p' w_{ep} w_{ip'} D_{nl}(p) \frac{\partial h_{p'} p_s'}{\partial p_l'},$$

$$\left(\hat{K}_{ie} p_s\right)^{(1)} h_p = 2\pi z^2 e^4 L m_e w_{ip}^{-1} \frac{\partial}{\partial p_n} w_{ip} \int d^3 p' w_{ep'} D_{nl}(p') \frac{\partial h_{p'} p_s'}{\partial p_l'};$$

вирази для більш високих порядків також отримуються на основі (8.1).

Для дії $\hat{K}_{ab}$ на функцію $p_n p_m h_p$, де h_p – парна функція від імпульсу, маємо:

$$\begin{aligned}
\hat{K}_{ee} p_n p_m &= \left(\hat{K}_{ee} p_n p_m\right)^{(0)} + \left(\hat{K}_{ee} p_n p_m\right)^{(2)} + O\left(\sigma^4\right), \\
\hat{K}_{ei} p_n p_m &= \left(\hat{K}_{ei} p_n p_m\right)^{(0)} + \left(\hat{K}_{ei} p_n p_m\right)^{(2)} + O\left(\sigma^4\right), \\
\hat{K}_{ie} p_n p_m &= \left(\hat{K}_{ie} p_n p_m\right)^{(2)} + \left(\hat{K}_{ie} p_n p_m\right)^{(4)} + O\left(\sigma^6\right), \\
\hat{K}_{ii} p_n p_m &= \left(\hat{K}_{ii} p_n p_m\right)^{(-1)} + \left(\hat{K}_{ii} p_n p_m\right)^{(0)} + O\left(\sigma^2\right),
\end{aligned} \tag{8.6}$$

Явні вирази для головних порядків у (8.6):

$$\begin{aligned}
&\left(\hat{K}_{ee} p_n p_m\right)^{(0)} h_p = -2\pi z^2 e^4 L n_i m_e w_{ep}^{-1} \frac{\partial}{\partial p_n} w_{ep} D_{nl}(p) \frac{\partial p_n p_m g_p}{\partial p_l} + \\
&2\pi e^4 L m_e w_{ep}^{-1} \frac{\partial}{\partial p_n} \int d^3 p' w_{ep} w_{ep'} D_{nl}(p - p') \left(\frac{\partial p_n' p_m' h_{p'}}{\partial p_l'} - \frac{\partial p_n p_m h_p}{\partial p_l} \right), \\
&\left(\hat{K}_{ii} p_n p_m\right)^{(-1)} h_p = \\
&= 2\pi e^4 L m_i w_{ip}^{-1} \frac{\partial}{\partial p_n} \int d^3 p' w_{ip} w_{ip'} D_{nl}(p - p') \left(\frac{\partial p_n' p_m' h_{p'}}{\partial p_{il}} - \frac{\partial p_n p_m h_p}{\partial p_l} \right), \\
&\left(\hat{K}_{ei} p_n p_m\right)^{(0)} h_p = 2\pi z^2 e^4 L m_e w_{ep}^{-1} \frac{\partial}{\partial p_n} w_{ep} \int d^3 p' w_{ip'} D_{nl}^{(1)}\left(p - \sigma^2 p'\right) \frac{\partial p_n' p_m' h_{p'}}{\partial p_l'}, \\
&\left(\hat{K}_{ie} p_n p_m\right)^{(2)} h_p = 2\pi z^2 e^4 L m_e w_{ip}^{-1} \frac{\partial}{\partial p_n} w_{ip} \int d^3 p' w_{ep'} D_{nl}^{(1)}\left(p' - \sigma^2 p\right) \frac{\partial p_n' p_m' h_{p'}}{\partial p_l'};
\end{aligned} \tag{8.7}$$

вирази для більш високих порядків також отримуються на основі (8.1).

Для дії $\hat{K}_{ab}$ на функцію $p_n p_l p_m h_p$, де h_p – парна функція від імпульсу, маємо:

$$\begin{aligned}
\hat{K}_{ee}p_n p_l p_m &= \left(\hat{K}_{ee}p_n p_l p_m\right)^{(0)} + \left(\hat{K}_{ee}p_n p_l p_m\right)^{(2)} + O\left(\sigma^4\right), \\
\hat{K}_{ei}p_n p_m p_l &= \left(\hat{K}_{ei}p_n p_m p_l\right)^{(-2)} + \left(\hat{K}_{ei}p_n p_m p_l\right)^{(0)} + O\left(\sigma^2\right), \\
\hat{K}_{ie}p_n p_m p_l &= \left(\hat{K}_{ie}p_n p_m p_l\right)^{(1)} + \left(\hat{K}_{ie}p_n p_m p_l\right)^{(3)} + O\left(\sigma^5\right), \\
\hat{K}_{ii}p_n p_m p_l &= \left(\hat{K}_{ii}p_n p_m p_l\right)^{(-2)} + \left(\hat{K}_{ii}p_n p_m p_l\right)^{(-1)} + O\left(\sigma^1\right),
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Явні вирази для головних порядків у (8.8):

$$\begin{gathered}
\left(\hat{K}_{ee}p_n p_l p_m\right)^{(0)} h_p = -2\pi z^2 e^4 L m_e w_{ep}^{-1} \frac{\partial}{\partial p_w} \int d^3 p' w_{ep} w_{ip'} D_{qw}(p) \frac{\partial p_n p_l p_m h_p}{\partial p_q} + \\
+2\pi e^4 L m_e w_{ep}^{-1} \frac{\partial}{\partial p_w} \int d^3 p' w_{ep} w_{ep'} D_{wq}(p-p') \left(\frac{\partial p'_n p'_l p'_m h_{p'}}{\partial p'_q} - \frac{\partial p_n p_l p_m h_p}{\partial p_q} \right), \\
\left(\hat{K}_{ii}p_n p_m p_l\right)^{(-2)} h_p = \\
2\pi e^4 L m_i w_{ip}^{-1} \frac{\partial}{\partial p_w} \int d^3 p' w_{ip} w_{ip'} D_{wq}(p-p') \left(\frac{\partial p'_n p'_m p'_l h_{p'}}{\partial p'_q} - \frac{\partial p_n p_m p_l h_p}{\partial p_q} \right), \\
\left(\hat{K}_{ei}p_n p_m p_l\right)^{(-2)} h_p = 2\pi z^2 e^4 L m_e w_{ep}^{-1} \frac{\partial}{\partial p_w} w_{ep} D_{wq}(p) \int d^3 p' w_{ip'} \frac{\partial p'_n p'_m p'_l h_{p'}}{\partial p'_q}, \\
\left(\hat{K}_{ie}p_n p_l p_m\right)^{(1)} h_p = 2\pi z^2 e^4 L m_e w_{ip}^{-1} \frac{\partial}{\partial p_w} w_{ip} \int d^3 p' w_{ep'} D_{qw}(p') \frac{\partial p'_n p'_l p'_m h_{p'}}{\partial p'_q};
\end{gathered} \tag{8.9}$$

вирази для більш високих порядків також отримуються на основі (8.1).

Додаток 2. Явні вирази для функцій розподілу компонент повністю іонізованої плазми $f_{ap}^{(1,1)}$

$$A_{enl}^{u}\left(p\right)=g_{e0Tr}^{u(0)}h_{nlp}+O\left(\sigma^{2}\right),\ A_{inl}^{u}\left(p\right)=g_{i0Tr}^{u(4)}h_{nlp}+O\left(\sigma^{3}\right),$$

$$g_{e0Tr}^{u(0)}=\frac{10n_em_eT}{10\lambda_u^{(0)}n_e\left(m_eT\right)^2-W_{e0,e0}^{(0)}},\ g_{i0Tr}^{uB(4)}=\frac{g_{eTr}^{u(0)}W_{i0,e0}^{(0)}}{10n_i\left(m_iT\right)^2\lambda_u^{(0)}}-\frac{n_e}{n_im_iT\lambda_u^{(0)}}\sigma^2, \tag{9.1}$$

$$W_{ak,bs}=\left\{h_{nlp}S_k^{5/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right),h_{nlp}S_s^{5/2}\left(\beta\varepsilon_{bp}\right)\right\}_{ab},\ h_{nlp}\equiv p_np_l-p^2\delta_{nl}/3.$$

Результати для $A_{anl}^{u}\left(p\right)$ отримано в наближенні одного полінома, оцінка $O\left(\sigma^{3}\right)$ є апріорною.

$$A_{en}^{\tau T}\left(p\right)=p_ng_{e1}^{\tau T(0)}S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+O\left(\sigma\right),\ A_{in}^{\tau T}\left(p\right)=p_ng_{i1}^{\tau T(1)}S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)+O\left(\sigma\right),$$

$$g_{e1}^{\tau T(0)}=\frac{1}{G_{e1,e1}^{(0)}}\left(15\frac{n_e}{T}-8\frac{n_e^2e^4L\sqrt{\pi m_e}}{T^{3/2}}g_{e0}^{T(0)}+\frac{31}{4}\frac{n_e^2e^4L\sqrt{\pi m_e}}{T^{3/2}}g_{e2}^{T(0)}\right),$$

$$g_{i1}^{\tau T(1)}=\frac{1}{G_{i1,i1}^{(-1)}}\left(-\frac{15n_e}{2T}-\frac{31}{4}\frac{n_en_iz^4e^4L\sqrt{\pi m_i}}{T^{3/2}}g_{i2}^{T(1)}\right), \tag{9.2}$$

$$G_{ak,bs}\equiv\left\{p_lS_k^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right),p_lS_s^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{bp}\right)\right\}_{ab}$$

Результати для $A_{an}^{\tau T}\left(p\right)$ отримано в наближенні одного полінома, оцінки $O\left(\sigma\right)$ є апріорними.

$$A_{en}^{\tau N_e}\left(p\right)=g_{e1}^{\tau N_e(0)}p_nS_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+O\left(\sigma\right),\ A_{in}^{\tau N_e}\left(p\right)=p_ng_{i1}^{\tau N_e(1)}S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)+O\left(\sigma\right),$$

$$g_{e1}^{\tau N_e(0)}=\frac{1}{G_{e1,e1}^{(0)}}\left(\frac{15}{2}-8\frac{n_e^2e^4L\sqrt{\pi m_e}}{T^{3/2}}g_{e0}^{N_e(0)}+\frac{31}{4}\frac{n_e^2e^4L\sqrt{\pi m_e}}{T^{3/2}}g_{e2}^{N_e(0)}\right), \tag{9.3}$$

$$g_{i1}^{\tau N_e(1)}=-\frac{15}{2}\frac{1}{G_{i1,i1}^{(-1)}}=-\frac{15}{16}\frac{1}{\pi z^4e^4Ln_i^2}\sqrt{\frac{\pi T}{m_i}}.$$

Результати для $A_{an}^{\tau N_e}\left(p\right)$ отримано в наближенні одного полінома, оцінки $O\left(\sigma\right)$ є апріорними.

$$A_{in}^{\tau N_i}\left(p\right)=p_ng_{i1}^{\tau N_i(1)}S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ip}\right)+O\left(\sigma\right),\quad g_{i1}^{\tau N_i(1)}=\frac{15}{16}\frac{n_e}{\pi z^4e^4Ln_i^3}\sqrt{\frac{\pi T}{m_i}},$$

$$A_{en}^{\tau N_i}\left(p\right)=p_ng_{e1}^{\tau N_i(2)}S_1^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ep}\right)+O\left(\sigma^3\right), \tag{9.4}$$

$$g_{e1}^{\tau N_i(2)}=\frac{1}{G_{e1,e1}^{(0)}}\left(\frac{45}{\sqrt{2}}z^2\sigma^2-\frac{15}{2}\frac{n_e}{n_i}\sigma^2+\frac{150n_ez^2}{\left(4\sqrt{2}n_e+13z^2n_i\right)}\sigma^2-\right.$$

$$-8\frac{n_e^2 e^4 L\sqrt{\pi m_e}}{T^{3/2}} g_{e0}^{N_i(2)} + \frac{31}{4}\frac{n_e^2 e^4 L\sqrt{\pi m_e}}{T^{3/2}} g_{e2}^{N_i(2)} \Bigg).$$

Перший член у дужках у виразі для $g_{e1}^{\tau N_i(2)}$ є наслідком урахування наших поправок до НЛР (4.95). Результати для $A_{an}^{\tau N_i}(p)$ отримано в наближенні одного полінома, оцінки $O(\sigma)$ є апріорними.

$$A_{enl}^{uN_e}(p) = -\frac{2}{3} m_e g_{e0}^{N_e(0)} S_1^{1/2}(\beta\varepsilon_{ep})\delta_{nl} + g_{eTr}^{uN_e(0)} h_{nlp} + O(\sigma),$$

$$A_{inl}^{uN_e}(p) = \frac{2}{3}\frac{n_e}{n_i} m_e g_{e0}^{N_e} S_1^{1/2}(\beta\varepsilon_{ip}) + O(\sigma),$$

$$g_{eTr}^{uN_e(0)} = \frac{1}{\lambda_U^L 10 n_e (m_e T)^2 - W_{e0,e0}^{(0)}}\Bigg(10 m_e T - \tag{9.5}$$

$$-\left(16 g_{e0}^{N_e} + 12 g_{e1}^{N_e} + \frac{15}{2} g_{e2}^{N_e}\right) e^4 L m_e n_e^2 \sqrt{\frac{\pi m_e}{T}}\Bigg).$$

$A_{enl}^{uN_e}(p)$ отримано в наближенні одного полінома, $A_{inl}^{uN_e}(p)$ є точним розв’язком. Оцінки $O(\sigma)$ є апріорними. Дельта-частини цих функцій були обчислені без урахування того, що перші коефіцієнти в них задаються додатковими умовами, проте отримані результати чудово узгоджуються з додатковими умовами, що свідчить про несуперечливість обчислювальної процедури. Таку саму ситуацію матимемо й для функцій $A_{enl}^{uN_i}(p)$ та $A_{enl}^{uT}(p)$.

$$A_{enl}^{uT}(p) = -\frac{2}{3} m_e g_{e0}^{T(0)} S_1^{1/2}(\beta\varepsilon_{ep})\delta_{nl} + h_{nlp} g_{eTr}^{uT(0)} + O(\sigma),$$

$$A_{inl}^{uT}(p) = \frac{2}{3} m_e \frac{n_e}{n_i} g_{e0}^{T(0)} S_1^{1/2}(\beta\varepsilon_{ip}) + O(\sigma),$$

$$g_{eTr}^{uT(0)} = \frac{1}{W_{e0,e0}^{(0)} - 10 n_e (m_e T)^2 \lambda_u^{(0)}}\Bigg(-10 n_e m_e + 10 n_e (m_e T)^2 g_{e0Tr}^{u(0)} \frac{\partial \lambda_u^{(0)}}{\partial T} + \tag{9.6}$$

$$+\left(16 g_{e0}^{T(0)} + 12 g_{e1}^{T(0)} + \frac{15}{2} g_{e2}^{T(0)}\right) e^4 L m_e n_e^2 \sqrt{\frac{\pi m_e}{T}}\Bigg).$$

$A_{enl}^{uT}(p)$ отримано в наближенні одного полінома, $A_{inl}^{uT}(p)$ є точним розв’язком, оцінки $O(\sigma)$ є апріорними.

$$A_{enl}^{uN_i}(p_e) = g_{e0Tr}^{uN_i(0)} h_{nlp} + O(\sigma),$$

$$A_{inl}^{uN_i}(p) = \frac{2}{3} T m_e g_{e0}^{N_i(2)} S_1^{1/2}(\beta\varepsilon_{ip})\delta_{nl} + g_{iTr}^{uN_i(4)} h_{nlp} + O(\sigma^3), \tag{9.7}$$

$$g_{e0Tr}^{uN_i(0)} = \frac{1}{W_{e0,e0}^{(0)} - \lambda_u^{(0)} 10 n_e \left(m_e T\right)^2} g_{e0Tr}^{u(0)} 10 n_e \left(m_e T\right)^2 \frac{\partial \lambda_u^{(0)}}{\partial n_i},$$

$$g_{iTr}^{uN_i(4)} = \frac{1}{10\lambda_u^{(0)} n_i \left(m_i T\right)^2} \left(10 \frac{n_e}{n_i} m_e T - g_{i0Tr}^{u(4)} \frac{\partial \lambda_u^{(0)}}{\partial n_i} 10 n_i \left(m_i T\right)^2 + W_{i0,e0}^{(0)} g_{e0Tr}^{uN_i(0)} \right).$$

$A_{enl}^{uN_i}\left(p\right)$ та безслідова частина $A_{inl}^{uN_i}\left(p\right)$ отримані в наближенні одного полінома, дельта-частина $A_{inl}^{uN_i}\left(p\right)$ є точним розв'язком, оцінки $O(\sigma)$ та $O\left(\sigma^3\right)$ є апріорними.

$$A_{enl}^{\tau\upsilon}\left(p\right) = g_{e0Tr}^{\tau\upsilon(0)} h_{nlp} + O(\sigma), \quad A_{inl}^{\tau\upsilon}\left(p\right) = g_{i0Tr}^{\tau\upsilon(1)} h_{nlp} + O\left(\sigma^0\right),$$

$$g_{e0Tr}^{\tau\upsilon(0)} = \frac{1}{W_{e0,e0}^{(0)}} \left(12 m_e n_e^2 e^4 L g_{e0}^{\upsilon(0)} \sqrt{\frac{\pi m_e}{T}} - 10 n_e m_e \right), \tag{9.8}$$

$$g_{i0Tr}^{\tau\upsilon(1)} = \frac{1}{W_{i0,i0}^{(-3)}} \left(10 n_e m_i - 12 \frac{n_e}{n_i} m_i n_i^2 e^4 L g_{i0}^{\upsilon(1)} \sqrt{\frac{\pi m_i}{T}} \right),$$

$A_{anl}^{\tau\upsilon}\left(p\right)$ отримані в наближенні одного полінома, оцінки $O(\sigma)$ та $O\left(\sigma^0\right)$ є апріорними.

$$A_{ilnm}^{u\upsilon}\left(p\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} g_{i0}^{\upsilon(1)} \frac{z^2 e^4 L n_e \sqrt{\pi m_e}}{\lambda_u^{(0)} T^{3/2}} \left(\frac{2}{5} y_{lnmp} S_1^{3/2}\left(\beta \varepsilon_{ip}\right) - \frac{1}{m_i T} Y_{lnmp} \right) + O(\sigma),$$

$$A_{elnm}^{u\upsilon}\left(p\right) = g_{e0Ir}^{u\upsilon(0)} Y_{lnmp} + g_{e1\delta}^{u\upsilon(0)} S_1^{3/2}\left(\beta \varepsilon_{ep}\right) y_{lnmp} + O(\sigma),$$

$$g_{e0Ir}^{u\upsilon(0)} = \frac{1}{42 n_e \left(m_e T\right)^3 \lambda_U^L - Q_{e0,e0}^{(0)}} \left(42 n_e m_e^2 T - \frac{168}{5} \sqrt{\pi} e^4 L g_{e0}^{\upsilon(0)} n_e^2 m_e^{5/2} T^{1/2} \right),$$

$$g_{e1\delta}^{u\upsilon(0)} = \frac{1}{\left(Z_{e1,e1}^{(0)} - 50 n_e m_e T \lambda_u^{(0)}\right)} \left[20 n_e m_e + \frac{32\sqrt{\pi}}{3} \frac{e^4 L g_{e0}^{\upsilon(0)} n_e^2}{\sqrt{T}} m_e^{3/2} \right], \tag{9.9}$$

$$Q_{ak,bs} \equiv \left\{ S_k^{7/2}\left(\beta \varepsilon_{ap}\right) Y_{nlmp}, S_s^{7/2}\left(\beta \varepsilon_{bp}\right) Y_{nlmp} \right\}_{ab},$$

$$Z_{ak,bs} \equiv \left\{ S_k^{3/2}\left(\beta \varepsilon_{ap}\right) y_{nlmp}, S_s^{3/2}\left(\beta \varepsilon_{bp}\right) y_{nlmp} \right\}_{ab},$$

$$y_{mnlp} = p_l \delta_{nm} + p_n \delta_{ml} - \frac{2}{3} p_m \delta_{nl},$$

$$Y_{mnlp} = p_n p_m p_l - \frac{1}{5} p^2 \left(p_n \delta_{ml} + p_m \delta_{nl} + p_l \delta_{nm} \right).$$

$A_{ilnm}^{u\upsilon}\left(p\right)$ є точним розв'язком, $A_{elnm}^{u\upsilon}\left(p\right)$ отримано в наближенні одного полінома, оцінки $O(\sigma)$ є апріорними.

Наукове видання

Горєв В'ячеслав Миколайович

Соколовський Олександр Йосипович

СКОРОЧЕНИЙ ОПИС НЕРІВНОВАЖНИХ СИСТЕМ З УРАХУВАННЯМ НЕГІДРОДИНАМІЧНИХ СТУПЕНІВ СВОБОДИ

Монографія

Видано в редакції авторів

Підписано до друку 13.06.2018. Формат 30х42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 6,9.
Обл.-вид. акр. 6,9. Тираж 100 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видрукувано
у Національному технічному університеті
«Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.

49027, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.