

**Висновок.** Використання в середовищі Ni LabVIEW підпрограм та циклової структури істотно скорочує тривалість розрахунків та побудови графіків досліджуваних процесів.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Дербаба В.А. Моделирование влияния погрешностей измерения общих нормалей зубьев на показатели разбраковки / В.А. Дербаба. // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – Харьков. – 2013. – 6/4(66). – С.48–52. Режим доступа: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/18935/17117>
2. Derbaba V.A. Evaluation of the adequacy of the statistical simulation modeling method while investigating the components presorting processes / В.А. Дербаба, В.В. Зіль, С.Т. Пацера // Науковий вісник Національного гірничого університету – Д.: НГУ, 2014. – № 5 (143). – С.45–50. Режим доступа: <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-84914695179&partnerID=MN8TOARS>
3. Пацера С.Т. Алгоритм имитационно-статистического моделирования случайных погрешностей измерения и контроля толщины зубьев и его программная реализация в Ni LabVIEW / С.Т. Пацера, В.І. Корсун, В.А. Дербаба, П.А. Ружин // Системи обробки інформації. «Метрологія, інформаційно-вимірjuвальні технології та системи» №6(143) – Харків. – 2016. – С. 116–119 (входить до наукометричних баз даних).

УДК 378:512:004

## ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

**О.Е. Корнійчук**

кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра загальнотехнічних та природничих дисциплін, Житомирський агротехнічний коледж, м. Житомир, Україна, e-mail: [elena.k.02@i.ua](mailto:elena.k.02@i.ua)

**Анотація.** У статті проведено дослідження і аналіз механічної системи, яка описує вільні загасаючі коливання, складається з тіла, пружини й амортизатора та не піддається впливу зовнішніх сил. Модель побудовано на основі теорії диференціальних рівнянь з використанням комп'ютерної графічної інтерпретації розв'язку.

*Ключові слова:* загасаючі коливання, диференціальне рівняння, амплітуда, амортизатор.

## STUDY OF DIFFERENTIAL MODELS OF MECHANICAL SYSTEMS

**Olena Korniiichuk**

Ph.D., Associate Professor, Department of General Technical and Natural Sciences, Zhytomyr Agro-technical College, Zhytomyr, Ukraine, e-mail: [elena.k.02@i.ua](mailto:elena.k.02@i.ua)

**Abstract.** The article investigates and analyzes a mechanical system that describes free damped oscillations, consists of a body, a spring, a shock absorber and is not influenced by



external forces. The model is constructed on the basis of the theory of differential equations using computer graphic interpretation of the solution.

*Keywords: damped oscillations, differential equation, amplitude, shock absorber.*

**Вступ.** Нові вимоги до вищої освіти вимагають впровадження розвиваючих технологій навчання, перегляду змісту математичної освіти з точки зору її професійного спрямування. Зокрема, вивчення диференціальних рівнянь у курсі вищої математики в основному орієнтується на формальне розв'язування стандартних типів рівнянь. Задачі прикладного змісту та комп'ютерні засоби змінюють уявлення про диференціальні рівняння, їх роль та можливості застосувань у науці та інженерній справі.

**Мета роботи:** розширити діапазон реальних застосувань вищої математики, поглиблення теоретичних знань студентів та їх компетенцій щодо математичного моделювання, яке необхідне для вивчення спеціальних дисциплін, сприяє підвищенню рівня підготовки майбутніх фахівців, а саме у галузі агроінженерії та енергетики.

**Виклад матеріалу.** Важливим аспектом у моделюванні механічних конструкцій і систем є диференціальні рівняння. Простим прикладом коливань, що виникають у більш складних механічних системах є рух фізичного тіла, яке з'єднане з пружиною. Для багатьох подібних систем задача дослідження коливань зводиться до розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо тіло масою  $m$ , що з'єднане з одного боку зі звичайною пружиною, яка надає опору як розтягненню, так і стисканню, а з іншого – з амортизатором (пристроєм, що поглинає удари). Тіло може рухатися вперед або назад, без тертя, по горизонтальній площині.

Нехай  $x$  – відстань від тіла до положення рівноваги. За законом Гука зворотня сила  $F_R$  (*reverse force*), з якою пружина діє на тіло:  $F_R = -kx$ , де  $k$  – коефіцієнт жорсткості пружини. Сила  $F_D$ , з якою діє амортизатор (*damping force*), пропорційна швидкості  $v = \frac{dx}{dt}$  руху тіла:

$$F_D = -cv = -c \frac{dx}{dt} = -cx',$$

де  $c$  – коефіцієнт поглинання. Якщо крім сил  $F_R$  та  $F_D$  на тіло діє й зовнішня сила (*external force*)  $F_E = F(t)$ , то рівнодіюча сил, що діють на тіло:  $F = F_R + F_D + F_E$ .

Використовуючи другий закон Ньютона  $F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = mx''$ , отримаємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку, яке описує рух тіла:

$$mx'' + cx' + kx = F(t). \quad (1)$$



Якщо амортизатор відсутній (або ми нехтуємо силами опору), то у рівнянні (1) коефіцієнт  $c = 0$  – коливання *незагасаючі*. При  $c > 0$  – коливання *загасаючі*. Якщо на систему зовнішні сили не діють, то вважаємо  $F(t) = 0$ , а коливання *вільними*. У випадку  $F(t) \neq 0$  – коливання *вимушені*.

Однорідне рівняння (2) описує вільні коливання системи, яка складається з тіла, пружини й амортизатора та не піддається впливу зовнішніх сил:

$$mx'' + cx' + kx = 0 \quad (2)$$

Рівняння загасаючих коливань (2) можна подати у вигляді:

$$x'' + 2px' + w_0^2 x = 0, \quad (3)$$

де  $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – кругова частота незагасаючих коливань і  $p = \frac{c}{2m} > 0$ . Тоді

$r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - w_0^2}$  – корені відповідного характеристичного рівняння:

$$r^2 + 2pr + w_0^2 = 0. \quad (4)$$

Дійсними або комплексними будуть ці корені залежить від знаку підкореневого виразу:

$$p^2 - w_0^2 = \frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \frac{c^2 - 4km}{4m^2}.$$

Критичне загасання  $c_{кр}$  відбувається у разі, коли  $c^2 - 4km = 0$ , а отже  $c_{кр} = \sqrt{4km}$ . Можливі три випадки:  $c > c_{кр}$  – закритичне загасання,  $c = c_{кр}$  – критичне,  $c < c_{кр}$  – загасаючі коливання (рис. 1).

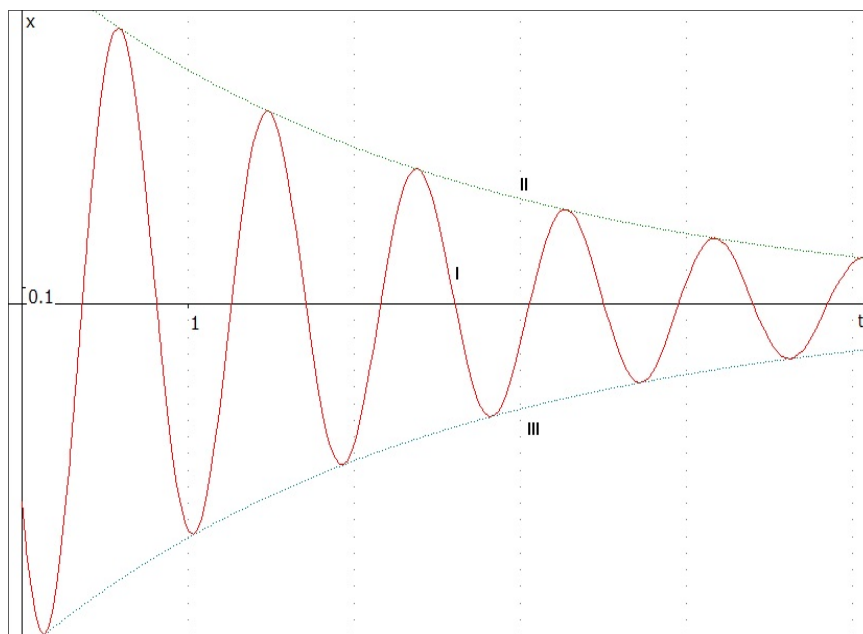


Рис. 1 – Загасаючі коливання  $x(t) = Ce^{-pt} \cos(w_1 t - \alpha)$

Розглянемо розв'язок характеристичного рівняння (4) у випадку загасаючих коливань (докритичного загасання):  $c < c_{кр}$  або  $c^2 < 4km$ . Це два комплексних спряжених кореня:

$$r_{1,2} = -p \pm i \frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m} = -p \pm i \sqrt{w_0^2 - p^2} = -p \pm iw_1. \quad (5)$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$x(t) = e^{-pt}(A \cos(w_1 t) + B \sin(w_1 t)) \text{ або}$$

$$x(t) = Ce^{-pt} \left( \frac{A}{C} \cos(w_1 t) + \frac{B}{C} \sin(w_1 t) \right), \text{ звідки}$$

$$x(t) = Ce^{-pt} (\cos \alpha \cdot \cos(w_1 t) + \sin \alpha \cdot \sin(w_1 t)),$$

де  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ ,  $\cos \alpha = \frac{A}{C}$ ,  $\sin \alpha = \frac{B}{C}$ .

За формулою косинуса суми кутів:

$$x(t) = Ce^{-pt} \cos(w_1 t - \alpha). \quad (6)$$

Розв'язок (6) відображує експоненціально загасаючі коливання матеріальної точки біля положення рівноваги. Геометричну інтерпретацію цього розв'язку проведено за допомогою пакету *GRAN1* (рис. 1). Дослідження моделей та аналіз геометричного змісту параметрів можливо проводити й у більш потужних системах комп'ютерної математики, таких, як *MATLAB*, *Mathematika*, *Maple*, *MathCAD* та ін. Деякі приклади застосувань цих технологій наведено у роботах [1-12].

Графік (I), зображеної на рис. 1 функції  $x(t)$ , міститься між обмежувачими амплітуду кривими  $x(t) = Ce^{-pt}$  (II) та  $x(t) = -Ce^{-pt}$  (III). Такі коливання не є гармонічними, а рух не є періодичним. Проте, і в цьому випадку,  $w_1$  називається круговою частотою загасаючих коливань,  $\alpha$  – фазою,  $T_1 = \frac{2\pi}{w_1}$  – умовним періодом загасаючих коливань, а  $Ce^{-pt}$  – амплітудою загасаючих коливань. З виразу (5) видно, що  $w_1$  менше за кругову частоту незагасаючих коливань  $w_0$ , тому  $T_1$  більше за період  $T = \frac{2\pi}{w_0}$  коливань тіла такої самої маси, що з'єднане з такою самою пружиною, але без амортизатора.

Отже, дія амортизатора проявляється, принаймні, у двох явищах.

1. Амортизатор гасить коливання і вони експоненціально загасають (це виражається в залежності (зменшенні) амплітуди від часу).
2. Амортизатор уповільнює рух, а саме зменшує частоту коливань.

На практиці механічна система з малим загасанням під дією резонансних коливань може зруйнуватися. Наступним важливим кроком постає задача розробки та дослідження диференціальних моделей задля визначення власної частоти системи і запобігання руйнівній силі резонансних явищ.

**Висновки.** Демонстрація широти тематики і застосувань диференціальних рівнянь спонукає студентів до самостійної роботи, до поглибленого вивчення математичних методів, до побудови і досліджень моделей у самих різних галузях знань – як природничо-наукових (механіка, фізика, хімія, біологія), так і гуманітарних (соціологія, статистика).

## ЛІТЕРАТУРА

1. Корнійчук О.Е. GRAN–ілюстрація та прогнози обчислення еколого-економічної моделі / О.Е. Корнійчук // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. № 2. Комп'ютерно орієнтовані системи навчання. – Київ : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2007. – Вип. 5 (12). – С. 131-136.
2. Корнійчук О. Мотивація в системі навчання математичних дисциплін / О. Корнійчук // Витоки педагогічної майстерності. Сер. Педагогічні науки. – Полтава : ПНПУ ім. В. Г. Короленка, 2012. – Вип. 10. – С. 144-148.
3. Корнійчук О.Е. Взаємодія між дисциплінами фундаментальної і професійної підготовки в процесі вивчення компонент інтелектуальної системи / О.Е. Корнійчук, Є.Ю. Тімченко // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2012. – № 7 (103). – С. 15-19.
4. Корнійчук О.Е. Новітні методи і прийоми навчання математичного моделювання та дослідження організації виробництва / О.Е. Корнійчук // Освіта та педагогічна наука. – Луганськ : ЛНПУ ім. Т. Шевченка, 2012. – № 3 (152). – С. 54-61.
5. Корнійчук О.Е. Методи інтегрального числення та GRAN-застосування для розв'язування задач економічного змісту / О. Е. Корнійчук // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2012. – № 8 (104). – С. 12-16.
6. Корнійчук О.Е. Професійно орієнтований тренінг у формуванні математичних компетентностей інженерів еколого-природознавчого напрямку / О. Е. Корнійчук // Гуманітарний вісник ДВНЗ «Переяслав-Хмельницький ДПУ ім. Г. Сковороди». Сер. Педагогіка. Психологія. Філософія. – 2013. – Вип. 28, т. 2. – С. 439-445.
7. Корнійчук О.Е. Формування професійного інтелекту в процесі моделювання систем штучного інтелекту / О.Е. Корнійчук // Зб. наук. праць К-ПНУ ім. І. Огієнка. Сер. педагогічна. – Кам'янець-Подільський : К-ПНУ ім. І. Огієнка, 2014. – Вип. 20. – С. 90-93.
8. Корнійчук О.Е. Пропедевтика математичного моделювання в курсі вищої математики / О. Е. Корнійчук // Сб. научных трудов междун. конф. «Современные инновационные технологии подготовки инж. кадров для горной промышленности и транспорта 2016». – Днепропетровск, ГВУЗ «НГУ», 2016. – С. 431-440.
9. Корнійчук О.Е. Вивчення похідної разом із Maple / О.Е. Корнійчук // Фізико-математична освіта. – Суми : СДПУ ім. А. С. Макаренка, 2016. – № 3(9). – С. 61-69.
10. Корнійчук О.Е. Графічне трактування лінійних програм засобом GRAN / О.Е. Корнійчук // Сборник научных трудов междун. конф. «Современные инновационные технологии подготовки инженерных кадров для горной промышленности и транспорта 2017». – Днепр, Национальный горный университет, 2017. – С. 568-575.
11. Корнійчук О.Е. Моделі динаміки у задачах менеджменту лісового та мисливського господарства / О.Е. Корнійчук // Фізико-математична освіта. – Суми : СДПУ ім. А.С. Макаренка, 2017. – Вип. 1(11). – С. 62-67.
12. Корнійчук О.Е. Візуалізація екстремальних значень лінійної форми / О.Е. Корнійчук // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2017. – №3(13). – С. 72-77.