УДК 528.2: 629.195

© И.И. Мищенко, А.В. Зуска

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ АФФИННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ

© I. Mishchenko, A. Zuska

A PRIORITY EVALUATION OF THE ACCURACY OF SOME PARAMETERS OF AFFINE TRANSFORMATION OF PLANE RECTANGULAR COORDINATES

Цель. Анализ оценки точности аффинного преобразования плоских прямоугольных координат в зависимости от геометрии расположения и количества точек с использованием нормированных ковариационных матриц.

Методика. Для достижения поставленной цели предложен метод оценки точности параметров аффинного преобразования координат, методика которого заключается в определении нормированных приращений координат. Предложенный метод оценки точности преобразования продемонстрирован на идеальных моделях: аффинное преобразование полностью описывает связь между двумя системами координат; исходные точки образуют симметричные фигуры.

Результаты. На основании представленного метода оценки точности аффинного преобразования установлено, что влияние ошибок определения преобразующих параметров a и b на величину средней квадратической ошибки приращений координат определяется взаимным расположением исходных точек и их количеством, и не зависит от площади преобразования.

Научная новизна. Решение задачи состоит в применении для оценки точности параметров аффинного преобразования ковариационных матриц, полученных по нормированным приращениям координат. При этом, используя указанные приемы предложенного метода можно получить ковариационные матрицы, характеризующие нарушение симметрии расположения точек, а также проанализировать влияние неучтенных членов высшего порядка преобразования координат.

Практические значения. Результаты оценки точности параметров аффинного преобразования позволяют применить их при создании или реконструкции маркшейдерско-геодезических сетей на территориях городов и крупных населенных пунктов и на промышленных площадках, при выносе в натуру проектов сооружений и т. д. Желательно выбирать расположения исходных точек в виде квадратов и прямоугольников независимо от площади преобразования.

Ключевые слова: *преобразующие параметры, априорная оценка точности преобразующих параметров, аффинное преобразование плоских координат, нормированные приращения, средняя квадратическая ошибка, ковариационная матрица*.

Введение. При создании и реконструкции опорных и съемочных маркшейдерско-геодезических сетей на территориях городов и крупных населенных пунктов, на промышленных площадках, выносе в натуру проектов сооружений и т. д., использование глобальной спутниковой радионавигационной системы (*GPS*) приводит к необходимости преобразования координат из одной системы в другую. Для преобразования координат из одной системы в другую разработаны различные методы преобразования. Концептуальность всех методов состоит в том, чтобы преобразование (трансформирование) координат пунктов из одной системы в другую сохранило высокую точность взаимного положения их.

Проблема исследований. В маркшейдерско-геодезической практике широко распространены линейные методы преобразований координат, в частности аффинного и конформного преобразований. В то же время, несмотря на широкое применение указанных методов преобразования координат, существует еще ряд вопросов, которые требуют дополнительных исследований.

При этом проблема точности пересчета координат из одной системы в другую, особенно при использовании современных спутниковых технологий, занимает центральное место в методике преобразований.

Анализ публикаций по теме. В общем алгоритме преобразования систем координат получают параметры преобразования из одной системы в другую с последующим пересчетом координат поля необходимых точек. В работах многих авторов показаны пути не только преобразования координат, но и точность их преобразования. Большой вклад в изучение вопроса преобразования координат из одной системы в другую внесли К. Михайлович (1984 г.), В.П. Зданович (1981 г.) и др.

Так, в статье [1] предлагается для локальных геодезических съемок, осуществляемых с помощью приемников сетевых спутниковых радионавигационных систем использовать аффинное преобразование плоских координат, а также представлено достоинство использования данного метода в интеллектуальных транспортных системах при отсутствии необходимости применения высокоточной картографической основы.

Использовать нормированные координаты для получения ковариационных матриц, элементы которых характеризуют влияние различного вида ошибок при трансформировании координат, предлагается в работах [2, 3].

По сравнению с другими методами методика аффинного трансформирования координат методом конечных элементов обеспечивает высокую точность, поскольку локализует искажения геополя, заданных различными по точности пунктами геодезических сетей [4].

Целью исследований является анализ оценки точности аффинного преобразования плоских прямоугольных координат в зависимости от геометрии расположения и количества точек с использованием нормированной ковариационной матрицы.

Изложение основного текста. Аффинное преобразование координат на плоскости обычно выполняется в такой последовательности: определение преобразующих параметров на основе пунктов, координаты которых известны в обеих системах координат; преобразование координат пунктов, координаты которых существуют только в одной системе координат.

Линейные преобразования координат из одной системы в другую могут быть проведены по следующим формулам [5, 6]:

$$\left.\begin{aligned} x_i' &= f_1(x,y) = a_1 x_i + b_1 y_i + c_1 \\ y_i' &= f_2(x,y) = a_2 x_i + b_2 y_i + c_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $a_1,\ b_1,\ c_1, a_2, b_2, c_2$ – преобразующие коэффициенты (параметры преобразования); x, y – координаты точки i в исходной системе; x', y' – координаты этой же точки в искомой системе.

В геодезических задачах для повышения точности решения параметры a_i, b_i определяются по разностям координат

$$\left.\begin{aligned}\Delta x' &= a_1\Delta x + b_1\Delta y\\ \Delta y' &= a_2\Delta x + b_2\Delta y\end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

где $\Delta x' = x'_{i+j} - x'_i,\ \Delta y' = y'_{i+j} - y'_i$ – разности искомых координат;

$\Delta x = x_{i+j} - x_i,\ \Delta y = y_{i+j} - y_i$ – разности исходных координат;

$i = 1, 2, \ldots, n-1,\ j = i+1,\ i+2, \ldots, n;$ n – количество точек с известными координатами в двух системах.

При наличии 3 точек с известными координатами в двух системах число уравнений (число возможных разностей Δx, (Δy)) будет равно 3; при числе точек 4 число соответствующих уравнений увеличится в 2 раза и будет равно 6. Возможное число уравнений определяют как число комбинаций $\left(C_n^2\right)$ из n элементов по 2.

В данной статье рассмотрена задача влияния погрешностей определения параметров a и b на вычисленные значения приращения координат.

В соответствии с уравнениями (2) уравнения поправок для Δx будут иметь вид

$$A\,\delta - l = \vartheta, \qquad (3)$$

где А – матрица коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{bmatrix}\Delta x_{2-1} & \Delta x_{3-1} & \Delta x_{4-1} & \Delta x_{3-2} & \Delta x_{4-2} & \Delta x_{4-3} & \ldots & \Delta x_{(i+j)-i}\end{bmatrix}^T, \qquad (3.а)$$

$$\delta = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$ – матрица столбец неизвестных параметров, (3.б)

$$l = \begin{bmatrix}\Delta x'_{2-1} & \Delta x'_{3-1} & \Delta x'_{4-1} & \Delta x'_{3-2} & \Delta x'_{4-2} & \Delta x'_{4-3} & \ldots & \Delta x'_{(i+j)-i}\end{bmatrix}^T$$ – матрица-столбец свободных членов, (3.в)

$$\vartheta = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$$ – матрица-столбец поправок. (3.г)

Параметры a, b получают из решения системы нормальных уравнений:

$$\delta = -\left(A^T A\right)^{-1}\left(A^T l\right), \qquad (4)$$

здесь $A^T A = B$ – матрица коэффициентов при неизвестных в нормальных уравнениях; $\left(A^T A\right)^{-1} = Q$ – матрица весовых коэффициентов.

Средние квадратические ошибки параметров преобразования определяют по формулам:

$$\left.\begin{aligned} m_a &= \mu\sqrt{Q_{11}} \\ m_b &= \mu\sqrt{Q_{22}} \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где m_a, m_b – средняя квадратическая ошибка соответственно параметров *a* и *b*; μ – средняя квадратическая ошибка единицы веса; Q_{ii} – диагональные весовые коэффициенты.

Как известно, средняя квадратическая ошибка вычисленных приращений Δx, обусловленная погрешностями параметров преобразования, *a* и *b*, согласно формуле (2) будет равна

$$m^2_{\Delta x} = \mu^2\left(Q_{11}\Delta x_i^2 + 2Q_{12}\Delta y_i \Delta x_i + Q_{22}\Delta y_i^2\right). \tag{6}$$

С учетом структуры матрицы (3, а) и формулы (4) матрица коэффициентов нормальных уравнений примет вид:

$$B = \begin{bmatrix} \sum\Delta x^2 & \sum\Delta x\Delta y \\ \sum\Delta x\Delta y & \sum\Delta y^2 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

а матрица весовых коэффициентов

$$Q = \begin{bmatrix} \dfrac{\sum\Delta y^2}{D} & \dfrac{-\sum\Delta x\Delta y}{D} \\ \dfrac{-\sum\Delta x\Delta y}{D} & \dfrac{\sum\Delta x^2}{D} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где $D = \sum\Delta x^2 \sum\Delta y^2 - (\sum\Delta x\Delta y)^2$ – определитель матрицы *B*.

Тогда, с учетом выражений (6) и (8)

$$m^2_{\Delta x_i} = \mu^2\left(\frac{\sum\Delta y^2}{D}\Delta x_i^2 - 2\frac{\sum\Delta x\Delta y}{D}\Delta x_i\Delta y_i + \frac{\sum\Delta x^2}{D}\Delta y_i^2\right), \tag{9}$$

Представим разности координат Δx и Δy, как функции нормированных приращений [4, 5], т. е.

$$\Delta x = \Delta x_N N, \quad \Delta y = \Delta y_N N, \tag{10}$$

где Δx_N, Δy_N – нормированные приращения координат; величина N определяет размер площади преобразования. Например, если точки, по которым производится определение параметров a и b образуют квадрат, то за величину N можно принять значения $|\Delta x|_{\max}$ или $|\Delta y|_{\max}$.

С учетом (10) выражение (9) будет представлять абсолютно аналогичную функцию от нормированных приращений координат

$$m_{\Delta x}^2 = \mu^2 = \left(\frac{\sum \Delta y_N^2}{D_N} \Delta x_{N_i}^2 - 2\frac{\sum \Delta x_N \Delta y_N}{D_N} \Delta x_{N_i} \Delta y_{N_i} + \frac{\sum \Delta x_N^2}{D_N} \Delta y_{N_i}^2 \right), \quad (11)$$

Таким образом, $m_{\Delta x}$ вычисленных значений Δx не зависит от размера площади преобразования, а является функцией взаимного положения точек, т. е., определяется геометрической фигурой, образованной точками, для которых известны координаты в двух системах. Для подтверждения этого рассмотрим следующие схемы расположения исходных точек.

Схема 1. Исходные точки образуют квадрат, стороны которого параллельны осям X и Y (рис. а). Примем значения нормированных приращений $\left|\Delta x_N\right|_{\max} = \left|\Delta y_N\right|_{\max} = 1$. Тогда матрица A согласно формуле (3.а), составленная по нормированным приращениям будет равна

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (12)$$

На основании формулы (8) получим матрицу весовых коэффициентов

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Выражение для $m_{\Delta x}$ приращений координат согласно (11) будет иметь вид

$$m_{\Delta x_i}^2 = \mu^2 \left(0{,}25 \Delta x_{N_i}^2 + 0{,}25 \Delta y_{N_i}^2 \right). \quad (14)$$

При $\Delta x_N = \Delta y_N = 1$,

$$m_{\Delta x} = \mu \sqrt{0{,}5} = 0{,}7\mu. \quad (15)$$

Следовательно, если исходные точки образуют квадрат, стороны которого параллельны исходной системе координат (например, местная система координат), то $m_{\Delta x}$ в искомой системе координат (например, СК-42) не будет превышать $0{,}7\mu$ и матрица вида

$$K_{\delta_{ax}, \delta_{by}} = \mu^2 \begin{bmatrix} 0{,}25 \Delta x_{N_i}^2 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \Delta y_{N_i}^2 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

является ковариационной матрицей ошибок δ_{ax}, δ_{by} вычисленных приращений $\Delta x_i'$, обусловленных соответственно ошибками определения параметров a и b.

Сравнив матрицы (16) и (13) приходим к выводу, что практически матрица весовых коэффициентов (13) дает возможность судить о значении $m_{\Delta x}$ если $\Delta x_{N_i} = \Delta y_{N_i} = 1$.

Схема 2. Исходные точки образуют прямоугольник, стороны которого параллельны осям x и y (рис. б). Значения нормированных приращений $\left|\Delta x_N\right|_{\max} = 1,\ \left|\Delta y_N\right|_{\max} = 0{,}5$.

Матрица A в данном случае имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}^T, \tag{17}$$

а матрица коэффициентов нормальных уравнений и матрица весовых коэффициентов будут равны

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Отсюда, ковариационная матрица $K_{\delta_{ax},\delta_{by}}$ если $\Delta x_N = 1,\ \Delta y_N = 0{,}5$ равна

$$K_{\delta_{ax},\delta_{by}} = \mu^2 \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} \tag{19}$$

и соответственно

$$m_{\Delta x} = 0{,}7\mu. \tag{20}$$

Таким образом, $m_{\Delta x}$ вычисленных приращений $\Delta x' \left(\Delta y'\right)$ будет иметь одно и то же значение для двух схем расположения точек в виде квадрата и прямоугольника (рис. а, б). В последнем случае резко падает точность определения параметра *b*, но это компенсируется малыми значениями приращений Δy.

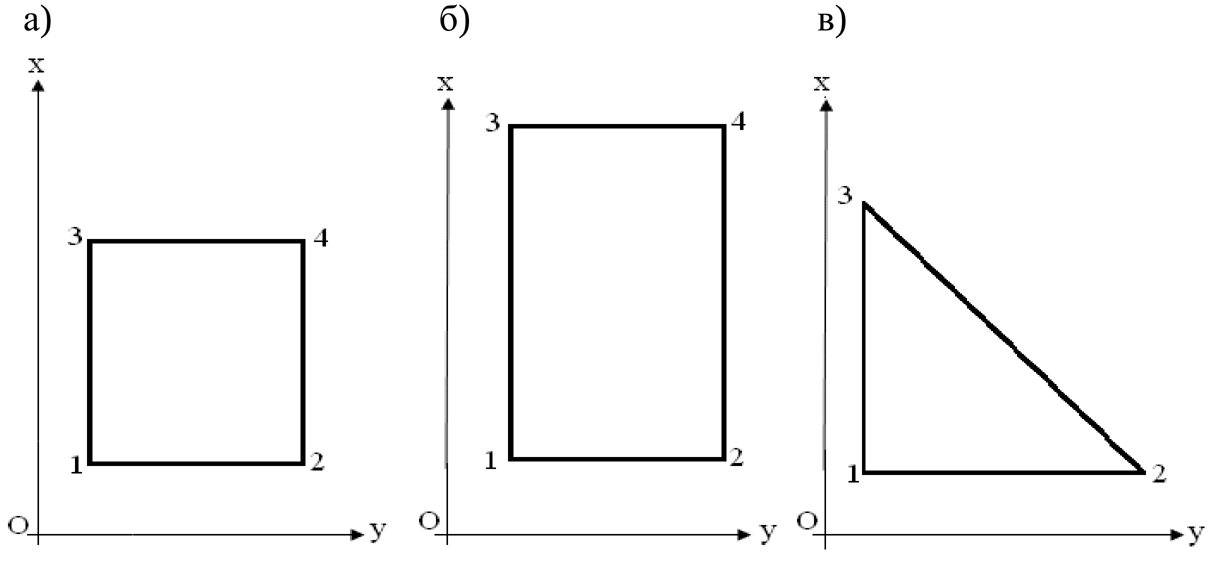

Рис. Схемы расположения исходных точек: а – квадрат; б – прямоугольник; в – треугольник

Данное утверждение справедливо для любых значений Δy_N, на что указывает анализ структур матрицы весовых коэффициентов (8) и формулы (11).

Схема 3. Исходные точки образуют треугольник, катеты которого параллельны осям x, y (рис. в).

Число уравнений поправок в этом случае будет равно 3. Матрица A соответственно примет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \tag{21}$$

Очевидно, что
$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} 0{,}67 & 0{,}33 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Ковариационная матрица

$$K_{\delta_{ax}, \delta_{by}} = \mu^2 \begin{bmatrix} 0{,}67 \Delta x_{N_i}^2 & 0{,}33 \Delta x_{N_i} \Delta y_{N_i} \\ 0{,}33 \Delta x_{N_i} \Delta y_{N_i} & 0{,}67 \Delta y_{N_i}^2 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

Поэтому, для схемы 3, по сравнению со схемами 1 и 2 точность определения приращений координат уменьшится минимум в два раза и величина $m_{\Delta x}$ будет равна

$$m_{\Delta x} = \mu \sqrt{2} = 1{,}4 \mu \; . \tag{24}$$

При этом необходимо учесть, что число уравнений поправок для данной схемы в два раза меньше по сравнению со схемами 1 и 2. В связи с этим значительно измениться значение μ, которое будет характеризоваться соответственным доверительным интервалом. Следовательно, определение параметров аффинного преобразования по трем точкам приводит к ненадежности решения задачи преобразования.

Предложенный метод априорной оценки точности преобразования координат, продемонстрирован на идеальных моделях: аффинное преобразование полностью описывает связь между двумя системами координат; исходные точки образуют симметричные фигуры. Тем не менее, используя указанные приемы, можно получить ковариационные матрицы, характеризующие нарушение симметрии расположения точек, а также проанализировать влияние неучтенных членов высшего порядка преобразования координат.

Выводы. 1. При аффинном преобразовании влияние ошибок определения параметров a и b на величину средней квадратической ошибки приращений координат определяется взаимным расположением исходных точек и их количеством и не зависит от площади преобразования.

2. Для априорной оценки точности аффинного преобразования рекомендуется использовать ковариационные матрицы, полученные по нормированным приращениям.

Перечень ссылок

1. Худяков, Г.И., Макаров, Г.В. (2013). *Использование аффинных преобразований при локальных геодезических съемках с помощью GPS приемников*. Записки горного института. т. 204. Сант-Петербург, 16-17.
2. Міщенко, І.І. (1996). *Апріорні критерії оцінки впливу систематичних спотворень знімків при фотограмметричних побудовах*. Вісник геодезії та картографії. № 2. Київ, 1996, 58-67.
3. Doroshinsky, A, Mishchenko, I. (1997). *The accuracy criterion of transformation space images info cartographic projection*. Proceeding 18-th ICA/ACI International Cartographic conference ICC-97, Stockholm, Vol 4 (pp. 1912-1917).
4. Карпінський, Ю.О. (2008). *Скінченноелементні моделі геодезичних вимірів*: автореф. дис. д-ра техн. наук: 05.24.01 КНУБА. К.:, 2013, 37 с.
5. Михайлович, К. (1984). *Геодезия*. М.: Недра, 448 с.
6. Зуска, А.В. Ищутина, А.С. (2017). *Анализ аффинного преобразования плоских прямоугольных координат из одной системы в другую*. The First International conference “Science and society”. (August 17, 2017) Graphics Communications & Publishing, Hamilton, Canada. 90-95.

АНОТАЦІЯ

Мета. Аналіз оцінки точності афінного перетворення плоских прямокутних координат залежно від геометрії розташування і кількості точок з використанням нормованих коваріаційних матриць.

Методика досліджень. Для досягнення поставленої мети запропонована методика оцінки точності афінного перетворення. Методика оцінки точності параметрів перетворення полягає у визначенні нормованих збільшень координат. Даний метод оцінки точності перетворених координат продемонстрований на ідеальних моделях: афінне перетворення, повністю описує зв'язок між двома системами координат; вихідні точки утворюють симетричні фігури.

Результати досліджень. На підставі поданого методу оцінки точності афінного перетворення встановлено, що вплив похибок визначення перетворюючих параметрів a і b на величину середньоквадратичної похибки збільшень координат визначається взаємним розташуванням вихідних точок і їх кількістю і не залежить від площі перетворення.

Наукова новизна. Рішення завдання полягає в застосуванні для оцінки точності параметрів афінного перетворення коваріаційних матриць, отриманих по нормованим збільшенням координат. Використовуючи зазначені прийоми запропонованого методу можна отримати коваріаційні матриці, що характеризують порушення симетрії розташування точок, а також проаналізувати вплив неврахованих членів вищого порядку перетворення координат.

Практичні значення. Результати оцінки точності параметрів афінного перетворення дозволяють застосувати їх при створенні або реконструкції маркшейдерсько-геодезичних мереж на територіях міст і великих населених пунктів та на промислових майданчиках, при винесенні в натуру проектів споруд і т. д. Рекомендовано вибирати розташування вихідних точок у вигляді квадратів і прямокутників незалежно від площі перетворення.

Ключові слова: параметри перетворення, апріорна оцінка точності, афінне перетворення плоских координат, середня квадратична похибка, коваріаційна матриця, нормовані збільшення.

ABSTRACT

Purpose. An analysis of the a priori estimate is to study the accuracy of affine transformation of planimetric rectangular coordinates depending upon location geometry and the number of points with the use of standard covariance matrices.

Methodology. To achieve this goal, we propose a method for estimating the accuracy of the parameters of an affine transformation. The methodology for estimating the transformation parameters is the determination of normalized coordinate increments. This method of estimating the accuracy of transformed coordinates is demonstrated on ideal models: affine transformation, fully describes the relationship between two coordinate systems; the initial points form symmetrical figures.

Findings. On the basis of the proposed method of affine transformation, it is established that the influence of errors in determining the transforming parameters a and b on the value of the mean square error of the increments of coordinates is determined by the relative location of the initial points and their number, and does not depend on the area of the transformation. To estimate the accuracy of an affine transformation, it is recommended to use covariance matrices obtained from normalized increments. The studies, concerning affine transformation parameters, have helped determine the effect of errors in the process of *a* and *b* parameters determination on the mean-square coordinate increment depending upon their positional relationship and the number of fiducial points.

The originality. The solution of the problem is to use for estimating the accuracy of the affine transformation parameters of covariance matrices obtained by normalized increase of coordinates. Using the indicated methods of the proposed method, one can obtain covariance matrices that characterize the disturbance of the symmetry of the location of the points, as well as analyze the influence of unclassified members of the higher order of the coordinate transformation.

Practical implications. The results of the studies make it possible to use them while developing or restructuring geodetic networks and urban ones.

Keywords: *conversion parameters, a priori estimation of accuracy, affine transformation of plane coordinates, mean square error, matrix of covariance, normalized increase*.