МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

В.Ф. Сторчай, Л.С. Коряшкіна

ГОТУЄМОСЬ ДО ОЛІМПІАДИ. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2018

УДК 517.965(076)
С 82

Рекомендовано до видання вченою радою Національного технічного університету «Дніпровська політехніка» (протокол № 6 від 08.05.2018).

Рецензенти:
В.О. Капустян, д-р фіз.-мат. наук, проф.;
С.А. Ус, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Сторчай В.Ф.
С 82 Готуємось до олімпіади. Функціональні рівняння / В.Ф. Сторчай, Л.С. Коряшкіна / М-во освіти і науки України; Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Д.: НТУ «ДП», 2018. – 148 с.

ISBN 978-966-350-690-6

Викладено основні відомості про функціональні рівняння і методи їх розв'язання. Особливу увагу приділено методиці розв'язання функціональних рівнянь, у тому числі запропонованих в різні періоди як завдання математичних олімпіад або опублікованих в спеціальній науковій літературі. Велика кількість наведених прикладів сприяє розвитку математичного і логічного мислення, підвищенню інтересу до дослідницької роботи, рівня математичної культури.

Посібник буде корисним студентам, учням гімназій, ліцеїв, шкіл, а також викладачам, які готують команди до математичних олімпіад.

УДК 517.965(076)

ISBN 978-966-350-690-6

Зміст

ПЕРЕДМОВА

Історія функціональних рівнянь налічує понад два століття. Вперше функціональні рівняння з’являються в роботах д'Аламбера, Ейлера, Кондорсе, Лапласа. Сьогодні є велика кількість робіт, присвячених вивченню функціональних рівнянь та пошуку оригінальних методів їх розв'язання. Якщо в ранніх працях містяться лише окремі такі рівняння, то останні десятиліття характеризуються дослідженнями цілих класів рівнянь у самих різних напрямках. Це пояснюється не тільки внутрішньої привабливістю функціональних рівнянь, а й тим, що вирішення багатьох питань математики, механіки, фізики і т.д. зводиться до вивчення саме рівнянь, в яких невідомими є функції однієї чи багатьох змінних (деякі з таких рівнянь носять імена Коші, Абеля та інших відомих вчених).

Часто функціональні рівняння включають до завдань математичних олімпіад. Такі рівняння можна знайти у розділах «Задачі» науково-популярних журналів «Квант» і «У світі математики», в інших виданнях. Розв’язування кожного функціонального рівняння, навіть у випадку успішно застосованого методу, перетворюється на невелике самостійне дослідження, яке розвиває творчі здібності особистості. Вивчення функціональних рівнянь сприяє глибшому засвоєнню таких понять, як функція, композиція функцій, границя послідовності й функції, неперервність та ін., що включені до програми курсу вищої математики або математичного аналізу. Функціональні рівняння вимагають творчого використання знань математики, глибокого логічного мислення, неформального опанування основними методами розв'язування.

Загальновизнано, що розв'язання задач є найважливішим засобом формування у студентів системи основних математичних знань, умінь і навичок, провідною формою навчальної діяльності у процесі вивчення математичних дисциплін.

Посібник містить велику кількість прикладів теоретичного характеру, знайомить читача з практичним застосуванням основних методів розв'язання функціональних рівнянь, у тому числі і завдань, які раніше були запропоновані на математичних олімпіадах різних рівнів. Розв'язання окремих функціональних рівнянь потребує тонкого розуміння основних питань математичного аналізу і вишуканого їх застосування.

У посібнику розглядаються як добре відомі методи розв’язування функціональних рівнянь – підстановок, граничного переходу, Коші, так і менш відомі – невизначених коефіцієнтів, відокремлення змінних та інші. При розв'язанні деяких функціональних рівнянь використовуються такі важливі поняття математичного аналізу і алгебри, як неперервність, диференційовність, матриці, визначники, системи лінійних алгебраїчних рівнянь, групи і т. д.

Посібник покликаний допомогти викладачеві у підготовці учнів чи студентів до участі у математичних олімпіадах, проведенні факультативних занять з тими, хто зацікавлений досконало, поглиблено і всебічно вивчати математику. Орієнтуючи студентів на пошук красивих, витончених розв'язків складних математичних задач, викладач тим самим сприяє естетичному вихованню студентів і підвищенню їх математичної культури.

Як відомо, на превеликий жаль, за програмою ні учні, ні студенти не вивчають функціональні рівняння. Але у той самий час вони входять у завдання майже кожної учнівської чи студентської олімпіади з математики. Тому посібник буде корисним для самостійної роботи студентів, для гурткових і семінарських занять, пов’язаних з розв'язанням нестандартних задач, в ході підготовки до математичних змагань. Окремі задачі можуть бути використані викладачами на лекціях і практичних заняттях, при комплектуванні індивідуальних завдань.

I. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Поняття про функціональне рівняння

Нагадаємо визначення функції, яке майже збігається з сучасним і наводиться у підручниках з математики початку 19-го століття. За його основу взяті трактування поняття функції, які належать російському математику М.І. Лобачевському[1] і німецькому П.Г. Діріхле[2].

Визначення. Якщо кожному числу $x \in X \subseteq R$ за певним законом f поставлено у відповідність одне дійсне число $y \in Y \subseteq R$, то кажуть, що на множині X задано функцію f і записують $y = f(x)$. При цьому множина X називається областю визначення функції, Y –областю значень; x називається незалежною змінною або аргументом функції, y – залежною змінною, f – законом відповідності, $f(x)$ – значенням функції в точці x.

Із визначення випливає, що для задання функції потрібно вказати закон відповідності, область визначення й область значень. Якщо функція задана аналітично і не вказані область визначення і область значень, то під областю визначення функції розуміють область допустимих значень аналітичного виразу, а під областю значень – певну підмножину $\{f(x)\}$ множини дійсних чисел. Функцію $y = f(x)$ можна розглядати як відображення множини X у множину Y: $X \xrightarrow{f} Y$ або $f : X \to Y$. Тоді y називають образом елемента x, а x – прообразом елемента y.

Визначення. Якщо функція g відображує множину X в множину U: $u = g(x)$, а функція f – множину U в множину Y: $y = f(u)$, то функція $y = f(g(x))$, яка відображує множину X в множину Y, називається **складеною функцією (композицією**

---

[1] Микола Іванович Лобачевський (1. 12. 1792 – 24. 02. 1856) – російський математик, засновник неевклідової геометрії. У 1827 − 1846 роках – ректор Казанського університету.

[2] Йоганн Петер Густав Лежен Діріхле (13.02.1805 − 05.05.1859) − німецький математик, вніс істотний внесок в математичний аналіз, теорію функцій і теорію чисел. Член Берлінської і багатьох інших академій наук, в тому числі Петербурзької (1837)

функцій f і g, яка позначається $f \circ g$); функція g називається внутрішньою, f – зовнішньою.

Оскільки функцію задають область визначення, область значень і закон відповідності, то стосовно функції, заданої аналітично, можна розглядати три типи задач:

− обчислення значення функції за заданим значенням аргументу,

− знаходження значення незалежної змінної за заданим значенням функції (розв’язування рівняння),

− встановлення закону відповідності за заданими областю визначення і областю значень.

Задачі перших двох типів успішо розв’язуються в шкільній математиці, задачі третього типу пов’язані з функціональними рівняннями.

Функціональні рівняння виникають в самих різних областях математики, часто у тих випадках, коли потрібно описати всі функції, що володіють заданими властивостями. Термін функціональне рівняння, як правило, використовується для рівнянь, які не можуть бути зведені тим чи іншим способом до алгебраїчних. Вказана властивість найчастіше обумовлена тим, що аргументами невідомої функції в рівнянні є не самі незалежні змінні, а деякі функції від них.

Зі шкільного курсу відомі, наприклад, рівняння:

$$f(x) = f(-x); \quad f(x) = -f(-x); \quad f(x+T) = f(x),$$

які пов’язані, відповідно, з визначеннями парності, непарності, періодичності функцій.

Взагалі кажучи, визначення функціонального рівняння досить складне, це одне з основних понять, що інтенсивно розвивається в області математики − функціональному аналізі. У науковій літературі є декілька визначень функціонального рівняння. Наведемо найпоширеніші з них.

Функціональним є таке рівняння, яке містить одну або кілька невідомих функцій (із заданими областями визначення і значень).

Функціональним називається рівняння, в якому невідома функція пов’язана з відомими за допомогою арифметичних дій та операції утворення складеної функції.

Функціональним рівнянням називається співвідношення, що виражає певну властивість, якою володіє деякий клас функцій (деяка функція).

Функціональним називається таке рівняння, з якого необхідно визначити невідому функцію $f(x)$ на основі заданих співвідношень між значеннями цієї функції при деяких значеннях її аргументів.

Найбільшого поширення зазнали функціональні рівняння, у складених функціях яких шуканими є зовнішні функції, а внутрішніми – або відомі функції, або поєднання за допомогою арифметичних операцій відомих функцій і шуканої. Часто невідомі зовнішні є функціями однієї змінної, а внутрішні можуть залежати як від одної, так і від кількох змінних. Тоді одну з них вважають незалежною, а інші називають вільними змінними.

Теоретичні й практичні застосування саме таких рівнянь спонукали видатних математиків до їхнього вивчення. Досить лише навести такі приклади:

− рівняння Коші[3]

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \tag{1.1}$$

яке використовується у проективній геометрії і теорії ймовірностей;

− рівняння д'Ааламбера[4]

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y), \tag{1.2}$$

до якого прийшов вчений, розв'язуючи проблему паралелограма сил;

− рівняння

$$f^2(x)=f(x+y)f(x-y), \tag{1.3}$$

використане Лобачевським при визначенні кута паралельності у своїй геометрії.

До класу функціональних рівнянь належать, наприклад, такі співвідношення:

$$f(x^2+f(y))=(x-y)^2 f(x+y), \tag{1.4}$$

$$2f(x)+f(1-x)=x^2. \tag{1.5}$$

У кожному з рівнянь (1.1) − (1.4) $f: R \to R$ – невідома функція однієї змінної, $x+y$, $x-y$ – відомі функції двох змінних, x – незалежна змінна, y – вільна змінна.

Визначення. Розв'язком функціонального рівняння називається функція, яка на заданій множині перетворює рівняння на тотожність.

---

[3] Огюстен Луї Коші (21.8.1789 – 23.5.1857) – французький математик, член Паризької АН (1816), Петербурзької АН (1831).

[4] Жан Лерон д'Аламбер (16.11.1717 – 29.10.1783) – французький математик, механік і філософ, член Паризької АН (1741), Петербурзької АН (1764) та ін. академій

Функціональне рівняння вважається розв'язаним, якщо знайдені всі його розв'язки або доведено, що їх немає.

Прикладом функціонального рівняння, для якого розв'язків не існує, є наступне:

$$f(x+f(y))=y^2+f(x).$$

Дійсно, підстановка $y=0$ перетворює це рівняння на таке: $f(x+f(0))=f(x)$, звідки випливає, що $f(0)=0$. Поклавши у рівнянні $x=0$, отримаємо: $f(f(y))=y^2$, тобто при будь-яких ненульових значеннях змінної функція $f(x)$ має набувати лише додатні значення. Якщо ж припустити, що $y\neq 0$, і замінити в заданому рівняння x на $-f(y)$, то $f(0)=y^2+f(f(y))$, звідки, з урахуванням вищезазначеної рівності $f(0)=0$, випливає, що $f(f(y))=-y^2<0$, а це суперечить попередньому висновку.

Рівняння Коші, навпаки, має безліч розв'язків, які задаються наступною формулою: $f(x)=cx,\ c$ − довільна стала (нижче в п. 2.5 буде наведене розв'язання цього рівняння).

Рівняння (1.4) має два розв'язки: $f(x)=0,\ f(x)=-x^2$, а рівняння (1.5) − один єдиний розв'язок, яким є функція $f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right)$.

Кожна з указаних функцій на множині дійсних чисел перетворює відповідне рівняння на тотожність.

У випадку, коли функціональне рівняння не має жодного іншого розв'язку, крім функції, властивість якої і привела до такого рівняння, говорять, що функціональне рівняння є *функціональною характеристикою* відповідної функції. Так, наприклад, функціональними характеристиками прямої пропорційності, показникової і логарифмічної функцій є відповідно такі функціональні рівняння:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in R;$$

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in R;$$

$$f(xy)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in R_+.$$

Іноді для функціональних рівнянь визначають поняття ***порядку***. Під ним розуміють порядок шуканої функції, що включена до рівняння. Як приклад розглянемо наступні два рівняння:

$$f(x+1)=(x+3)f(x),$$

$$f(f(y))=y.$$

Це − рівняння відповідно першого та другого порядку з огляду на те, що перше не містить суперпозиції невідомої функції, а в другому рівнянні така суперпозиція є.

Зазначимо, що багато з функціональних рівнянь містять декілька змінних. Всі вони, якщо на них не накладені якісь обмеження, є незалежними. Завжди чітко має бути обумовлено, на якій множині функціональне рівняння задається, тобто якою є область визначення кожної невідомої функції. Загальний розв'язок функціонального рівняння може залежати від цієї множини. Крім області визначення функцій, важливо знати, в якому класі функцій шукається розв'язок. Кількість і поведінка розв'язків строго визначається цим класом.

Отже, на складність розв’язування функціонального рівняння впливає не тільки залежність невідомої і заданих функцій у рівнянні, а й область визначення та область значень невідомої функції.

1.2. Деякі відомі приклади функціональних рівнянь, їх розв’язки та галузі використання

Функціональні рівняння з'явилися майже одночасно із зародженням теорії функцій. Їх розв'язання є однією з найстаріших задач в математичному аналізі. Перший справжній розквіт цієї дисципліни пов'язаний з проблемою паралелограма сил. Ще в 1769 році д’Аламбер звів обґрунтування закону складання сил до розв’язування функціонального рівняння (1.2). Те саме рівняння і з тією самою метою було розглянуто Пуассоном[5] в 1804 году за припущенням аналітичності шуканої функції, між тим як у 1821 році Коші, припускаючи лише неперервність $f(x)$, знайшов наступні загальні розв'язки зазначеного рівняння: $f(x) \equiv 0$, $f(x) = \cos ax$, $f(x) = ch(ax) = \dfrac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$, a − довільна стала.

Навіть відома формула неевклідової геометрії для кута паралельності $\Pi(x)$ на площині Лобачевського з кривизною, яка дорівнює -1, а саме, $f(x) = tg\dfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}$, була отримана

[5] Сімеон-Дені Пуассон (21.06.1781 − 25.04.1840) − французький фізик і математик, член Паризької академії наук (1812), почесний член Петербурзької академії наук (1826).

М. І. Лобачевским з рівняння (1.3), яке він розв'язав за допомогою способу, що є аналогічним до методу Коші. Це рівняння можна привести до наступного вигляду:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Ряд геометричних задач, що приводять до функціональних рівнянь, розглядав Ч. Беббідж[6]. Він вивчав, наприклад, періодичні криві другого порядку, що визначаються наступною властивістю для будь-якої пари точок кривої: якщо абсциса другої точки дорівнює ординаті першої, то ордината другої точки дорівнює абсцисі першої. Нехай така крива є графіком функції $y=f(x)$; $(x, f(x))$ − довільна її точка. Тоді згідно з умовою точка з абсцисою $f(x)$ має ординату x. Отже,

$$f(f(x))=x. \tag{1.6}$$

Функціональне рівняння (1.6) задовольняють, зокрема, такі функції: $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}, x\in[0;|a|]$; $f(x)=\dfrac{a}{x}, a\neq 0.$

Разом з рівнянням (1.1) Коші у своєму **Курсі Аналізу**, виданому в 1821 році, детально вивчив такі найпростіші функціональні рівняння:

$$f(x+y)=f(x)f(y), \tag{1.7}$$

$$f(xy)=f(x)+f(y), \tag{1.8}$$

$$f(xy)=f(x)f(y). \tag{1.9}$$

Неперервні розв'язки цих трьох основних рівнянь мають відповідно такий вигляд: $f(x)=a^x$; $f(x)=\log_a x$; $f(x)=x^a$, $x>0$.

У класі розривних функцій можливі й інші розв'язки.

Зазначимо, що рівняння (1.1) раніше розглядалося Лежандром[7] та Гауссом[8] під час виведення основної теореми проективної

[6] Ча́рлз Бе́ббідж (26.12.1792 − 18.10.1871) − англійський математик і економіст, винахідник першої обчислювальної машини з програмним управлінням, принципи якої на ціле століття випередили науку і техніку, а в наш час знайшли втілення в ЕОМ.

[7] Адріе́н Марі́ Лежа́ндр (18.09.1752 − 10.01.1833) − французький математик, з 1783 р. Член Французької академії наук, кавалер ордену Почесного легіону. Дав перший послідовний і повний виклад теорії чисел, обґрунтував і розвинув теорію геодезичних вимірювань і першим відкрив і застосував в обчисленнях метод найменших квадратів.

геометрії і при дослідженні гауссівського закону розподілу ймовірностей.

Функціональне рівняння (1.1) було застосовано також Г. Дарбу[9] до вирішення проблеми паралелограма сил і до основної теореми проективної геометрії. Головне досягнення математика − значне послаблення припущень. Як вже зазначалося, рівняння Коші (1.1) характеризує у класі неперервних функцій лінійну однорідну функцію $f(x)=cx, c$ − довільна стала. Г. Дарбу довів, що будь-який розв'язок, що є непрервним хоча б в одній точці або ж обмежений зверху (чи знизу) в довільному малому інтервалі, також має набувати вигляду $f(x)=cx$. Подальші результати щодо послаблення припущень слідували швидко один за другим (інтегровність, вимірність на множині додатної міри і, навіть, обмеженість вимірної функції).

Знаходження ще хоча б однієї аддитивної функції (що задовольняє (1.1), відмінної від лінійної однорідної, виявляється не такою легкою задачею. Далі буде показано, що за раціональних значень змінної x значення довільної аддитивної функції мають збігатися із значеннями деякої лінійної однорідної функції, тобто $f(x)=cx$ для $x \in Q$. Здавалося б, що тоді $f(x)=cx$ для усіх дійсних x. Якщо функція $f(x)$ − неперервна, то це дійсно так, якщо ж дане припущення відкинути − то ні. Перший приклад відмінного від $f(x)=cx$ розривного розв'язку функціонального рівняння (1.1) побудував у 1905 році Г. Гамель[10] за допомогою введеного ним базису дійсних чисел.

Багато з функціональних рівнянь не визначають конкретну функцію, а задають широкий клас функцій, тобто висвітлюють властивість, що характеризує той чи інший клас функцій. Наприклад, функціональне рівняння $f(x)=f(x+1)$ характеризує клас функцій, які мають період 1, а рівняння $f(x-1)=f(1-x)$ − клас функцій, симетричних відносно прямої $x=1$, і т. д.

---

[8] Йога́нн Карл Фрі́дріх Га́усс (30.04.1777 − 23.02.1855) − німецький математик, астроном, геодезист та фізик.

[9] Жан Ґасто́н Дарбу́ (14.08.1842 − 23.02.1917) − французький математик, член французької Академії наук з 1884, член Геттінгенської академії наук з 1916 р.

[10] Георг Гамель (12.09.1877 − 04.10.1954) − видатний німецький математик і механік, член Берлінської АН з 1938, Баварської АН, Німецької академії натуралістів «Леопольдіна».

Важливі функціональні рівняння були вивчені норвежським математиком Абелем[11], який зводив їх до диференціальних.

Особливе місце в теорії функціональних рівнянь займають різницеві рівняння, роль яких є великою з огляду на те, що багато задач прикладної математики зводяться саме до їх розв'язання.

Взагалі для функціональних рівнянь, які не зводяться до диференціальних або інтегральних, відомо дуже мало загальних методів розв'язання. Далі розглянемо основні методи, що допомагають знайти розв'язки функціональних рівнянь та їх систем.

II. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Основні методи розв'язання функціональних рівнянь

Наведемо тут найпоширеніші методи, що використовуються при розв’язанні функціональних рівнянь.

- *Підстановка конкретних значень змінних*. Найчастіше при першій спробі можна підставити константи (наприклад, 0 або 1), після чого (якщо можливо) використовувати підстановку виразів, які можуть перетворити будь-яку частину рівняння на константу. Наприклад, якщо в рівнянні присутній вираз $f(x+y)$ і знайдене значення $f(0)$, то можна зробити підстановку $y=-x$. У більш складних завданнях підстановки будуть менш очевидними.

- *Математична індукція*. За допомогою цього методу, знаючи $f(1)$, знаходимо $f(n)$ для будь-якого натурального n. Далі знаходимо $f(1/n)$ і $f(r)$ для раціональних r. Даний підхід застосовується в ситуаціях, коли функції визначені на Q, і є дуже корисним, особливо в нескладних задачах.

---

[11] Нільс Ге́нрік А́бель (05.08.1802 – 06.04.1829) – норвезький математик, довів необхідну умову розв'язності в радикалах загальних алгебраїчних рівнянь. Відкрив еліптичні і гіпереліптичні функції. Дослідив інтеграли, названі на його честь абелевими. Інші важливі праці Абеля пов’язані з теорією рядів.

• *Знаходження нерухомих точок або нулів функцій*. Кількість задач, що використовують даний метод, є значно меншою ніж тих, де застосовується будь-який з попередніх підходів.

• *Використання функціонального рівняння Коші і рівнянь, що зводяться до нього*. Для розв'язування функціональних рівнянь, які містять вільні змінні, у тому числі, коли розв'язок шукається у класі неперервних функцій, використовується метод Коші. При цьому спочатку послідовно знаходяться розв'язки рівняння на множинах N, Z, Q. Далі для довільного значення змінної $x \in R$ будується послідовність раціональних чисел $\{x_n\} \subset Q$, що збігається до x, і відповідна послідовність значень функцій $\{f(x_n)\}$. Оскільки в класі неперервних функцій можливий граничний перехід під знаком неперервної функції, то справедлива рівність

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$

тим самим знаходиться розв'язок функціонального рівняння на множині R.

• *Врахування монотонності або неперервності функції*. Неперервність, як правило, дається як додаткова умова і часто використовується при зведенні задачі до рівняння Коші. В іншому випадку мають справу з більш складним рівнянням.

• *Метод диференціювання*. Він полягає в тому, що для знаходження розв'язку функціонального рівняння в класі диференційовних функцій доцільно продиференціювати обидві його частини, за умови, що похідна шуканої функції існує. В результаті дістанемо диференціальне рівняння, яке містить ще й похідну невідомої функції. Розв'язуючи отримане рівняння, як функціональне відносно похідної, дістанемо, що шукана функція є однією з первісних для цієї похідної.

• *Припущення, що в деякій точці функція приймає більше або менше значення, ніж функція, про яку має бути доведений той факт, що вона є розв'язком*. Найчастіше це використовується як продовження методу математичної індукції і працює в тих завданнях, де область значень обмежена зверху і знизу.

• *Дослідження множини значень аргументу, при яких функція збігається з передбачуваним розв'язком*. Мета полягає у тому, щоб довести, що описана множина в точності збігається з областю визначення функції.

- *Функціональна підстановка.* Цей метод зазвичай використовується для спрощення рівняння і рідко має вирішальне значення.

- *Використання апарату теорії груп.* Суть цього методу полягає в наступному [2]. Нехай у функціональному рівнянні

$$a_1 f(g_1) + a_2 f(g_2) + ... + a_n f(g_n) = b$$

вирази, які стоять під знаком шуканої функції $f(x)$, є елементами групи G, яка складається з n функцій: $g_1(x) = x, g_2(x), ..., g_n(x)$, причому коефіцієнти $a_1, a_2, ..., a_n$ та b − деякі функції. Припустимо, що рівняння, що розглядається, має розв'язок. Замінемо $x \to g_2(x)$. В результаті послідовність $g_1, g_2, ..., g_n$ перейде в послідовність $g_1 \circ g_2, g_2 \circ g_2, ..., g_n \circ g_2$, яка знову таки складається з усіх елементів групи G. Тому «невідомі» $f(g_1), f(g_2), f(g_n)$ поміняються лише місцями і матимемо нове лінійне рівняння. Далі в заданому рівнянні зробимо заміни $x \to g_3(x)$, $x \to g_4(x), \ldots$, $x \to g_n(x)$, після чого дістанемо систему лінійних рівнянь, яку слід розв'язати. Якщо розв'язок існує, його слід перевірити, чи задовольняє він задане рівняння.

Більш детально застосування елементів теорії груп до розв'язування функціональних рівнянь проілюстровано, наприклад, в [3]. Взагалі, поняття групи дозволяє в ряді випадків знайти доцільні підстановки під час пошуку розв'язків функціональних рівнянь.

- *Представлення функції як суми парної і непарної функцій*. Відомо, що будь-яка функція може бути представлена сумою парної і непарної функцій, і це може виявитися дуже корисним при розгляді «лінійних» функціональних рівнянь, що містять багато функцій.

- *Використання рекурентних співвідношень*. Цей метод зазвичай застосовується в тих випадках, коли область значень обмежена або потрібно знайти зв'язок між $f(f(n)), f(n)$ і n.

- *Використання числових систем з основою, що є відмінною від 10*. Звичайно, це може бути застосовано тільки у тому випадку, коли областю визначення є множина натуральних чисел.

- *Дуже важливо вгадати розв'язок з самого початку*. Це може сильно допомогти у знаходженні відповідних підстановок. У кінці виконання завдання обов'язково слід перевірити, що знайдений розв'язок задовольняє умови задачі.

Взагалі, перевірка отриманого розв'язку є невід'ємною частиною розв'язування кожного функціонального рівняння, оскільки, по-перше, всі перетворення, які виконують у ході розв'язання, мають зміст лише за умови, що існує функція, котра задовольняє задане функціональне рівняння. По-друге, коли розв'язок рівняння визначається лише на основі конкретного співвідношення між її аргументами, сама рівність не обов'язково має справджуватись, якщо таке співвідношення виявиться іншим.

2.2. Найпростіші функціональні рівняння та нерівності

Розглянемо декілька простих функціональних рівнянь та нерівностей, які містять функції з певними властивостями, і продемонструємо, як ці властивості можуть бути використані при розв'язанні задач.

Приклад 1. Нехай функція $y = f(x)$ зростає на R і виконується рівність $f(3x+2) = f(4x^2+x)$. Знайти всі значення x, які задовольняють цьому рівнянню.

Розв'язання. $f(3x+2) = f(4x^2+x)$. З курсу математичного аналізу відомо, якщо функція $y = f(x)$ зростає на проміжку X, то кожне своє значення вона приймає лише в одній точці. Тому:

$$3x+2 = 4x^2+x.$$
$$4x^2-2x-2=0;$$
$$x_1 = 1; \quad x_2 = -0,5.$$

Відповідь: $x_1 = 1; \quad x_2 = -0,5.$

Приклад 2. Нехай функція $y = f(x)$ зростає на R і виконується співвідношення $f(3x-48) \le f(-x^2+x)$. Знайти всі значення x, які задовольняють цю нерівність.

Розв'язання. $f(3x-48)\le f(-x^2+x)$. З тих самих міркувань, що і в попередньому прикладі:

$$3x-48\le -x^2+x;$$
$$x^2+2x-48\le 0;$$
$$(x+8)(x-6)\le 0;$$
$$x\in[-8;6].$$

Відповідь: $x\in[-8;6]$.

Приклад 3. Знайти всі функції $f:R\to R$, які при всіх x задовольняє рівнянню

$$f((x+1)^2)=(x-1)^2. \tag{2.7}$$

Розв'язання. Графіком функції $y=(x+1)^2$ є парабола з віссю симетрії $x=-1$. Тому в точках, симетричних відносно $x=-1$, вираз $(x+1)^2$ приймає рівні значення. Але в будь-яких точках, симетричних відносно прямої $x=-1$, вираз $(x-1)^2$ приймає різні значення.

Наприклад, підставимо по черзі $x=0$ та $x=-2$, отримаємо відповідно $f(1)=1$ і $f(1)=9$, звідси випливає, що шуканої функції не існує.

Вправи. Знайти всі функції $f:R\to R$, які при всіх x задовольняє заданому рівнянню:

1. $f(x^2-4x+7)=x$.
2. $f(x+2y)=2x+y$.
3. $f(\cos x)=\sin x$.

2.3. Розв'язання функціональних рівнянь, що не містять вільних змінних

2.3.1. Метод підстановок

Метод підстановок є найпоширенішим способом розв’язування функціональних рівнянь і має широкий спектр застосувань.

Його ідея полягає у наступному. Замінюючи деякі змінні функціонального рівняння певними конкретними значеннями, або будь-якими іншими виразами, намагаються або спростити це рівняння, або привести його до такого виду, що подальше розв'язання стане очевидним. Часто доводиться робити декілька підстановок і комбінувати рівняння, отримані в результаті заміни змінних, з вихідним рівнянням, зводячи тим самим задачу до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомої функції та її композиції з відомими функціями. Особливістю цього методу є той факт, що в ряді випадків він дозволяє відшукати розв'язок в класі певних функцій.

Реалізація методу підстановок багато в чому визначається структурою рівнянь.

Розглянемо, наприклад, таке рівняння:

$$f\left(\varphi(x)\right) = F(x), \tag{2.1}$$

де $\varphi(\cdot), F(\cdot)$ − відомі функції, визначені в деякій області $D \subset R$, а функція $f(\cdot)$ є невідомою. Якщо $\varphi(x)$ у своїй області визначення має обернену функцію $\varphi^{-1}(z)$, то підстановка в рівняння (2.1) замість x функції нової змінної $z : x = \varphi^{-1}(z)$ приводить до наступної рівності:

$$f(z) = F(\varphi^{-1}(z)).$$

Замінюючи тут z на x, отримуємо розв'язок рівняння (2.1):

$$f(x) = F(\varphi^{-1}(x)).$$

Більш складним за (2.1) є рівняння такого вигляду:

$$a(x) f\left(\varphi(x)\right) + b(x) f(x) = F(x), \tag{2.2}$$

де $a(x), b(x), \varphi(x), F(x)$ − відомі функції, визначені в деякій області $D \subset R$, а функція $f(x)$ є невідомою. Якщо функція $\varphi(x)$ у своїй області визначення має обернену функцію $\varphi^{-1}(x)$, крім того $\varphi^{-1}(x)$ збігається з $\varphi(x)$, що еквівалентно $\varphi(\varphi(x)) = x$, то замінюючи в рівнянні (2.1) x на $\varphi(x)$, можна отримати наступне рівняння:

$$a(\varphi(x)) f(x) + b(\varphi(x)) f(\varphi(x)) = F(\varphi(x)). \tag{2.3}$$

Рівняння (2.3) і (2.2) в сукупності складають систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій $f(x)$ та $f(\varphi(x))$. Якщо ця система розв’язна, то, виключаючи з неї функцію $f(\varphi(x))$, можна знайти шукану функцію $f(x)$.

Описаний спосіб може бути застосований до рівняння (2.2) і у випадку, коли $\varphi^{-1}(x) \neq \varphi(x)$, але k-кратна композиція функції $\varphi(x)$ дорівнює x, тобто $\varphi(\varphi(\varphi(...(\varphi(x))))) = x$. Нехай, для конкретності,

$$\varphi(\varphi(x)) = x. \qquad (2.4)$$

Тоді, замінюючи в рівнянні (2.2) x на $\varphi(x)$, отримаємо рівняння (2.3), а замінюючи в (2.3) x на $\varphi(x)$, отримаємо наступне рівняння:

$$a(\varphi(\varphi(x)))f(\varphi(\varphi(\varphi(x)))) + b(\varphi(\varphi(x)))f(\varphi(\varphi(x))) = F(\varphi(\varphi(x))). \qquad (2.5)$$

Враховучи рівність (2.4), можна стверджувати, що рівняння (2.2), (2.3), (2.5) складають систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій $f(x)$, $f(\varphi(x))$ та $f(\varphi(\varphi(x)))$. Якщо ця система розв’язна, то, виключаючи з неї функції $f(\varphi(x))$ та $f(\varphi(\varphi(x)))$, можна знайти шукану функцію $f(x)$.

Приклад 4. Знайти $f(x)$, що задовольняє рівнянню

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2.$$

Розв'язання. Функція $\varphi(x) = \dfrac{x}{x+1}$ визначена в області $(-\infty,-1) \cup (-1,\infty)$. Оберненою до неї є функція $\varphi^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-x}$, що визначена в області $(-\infty,1) \cup (1,\infty)$.

Замінюючи в рівнянні змінну x новою змінною z за формулою $z = \dfrac{x}{x+1}$, отримаємо $f(z) = \left(\dfrac{z}{1-z}\right)^2$ або $f(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2$ − функцію, яка визначена на множині $(-\infty,1) \cup (1,\infty)$.

Перевірка. $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=\left(\dfrac{\dfrac{x}{x+1}}{1-\dfrac{x}{x+1}}\right)^2=\left(\dfrac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x+1-x}{x+1}}\right)^2=x^2.$

Відповідь. $f(x)=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2.$

Приклад 5. Знайти функцію $f(x)$, визначену при $x\neq 0$, яка при $x\neq 0$ задовольняє рівнянню

$$f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=2^x.$$

Розв'язання. Функція $\varphi(x)=1/x$ визначена в області $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, і така, що $\varphi(\varphi(x))=\dfrac{1}{1/x}=x$. Замінюючи в рівнянні змінну x на $\dfrac{1}{x}$, отримаємо наступне рівняння:

$$f\left(1/x\right)-2f(x)=2^{\frac{1}{x}},$$

яке разом із заданим складають систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій $f(x)$ та $f\left(1/x\right)$. Виключаючи з цієї системи $f\left(1/x\right)$, отримаємо шукану функцію в такому вигляді: $f(x)=-\dfrac{1}{3}(2^x+2^{\frac{1}{x}+1}).$

Перевірка. $f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{3}(2^x+2^{\frac{1}{x}+1})+\dfrac{2}{3}(2^{\frac{1}{x}}+2^{x+1})=$

$$=2^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)+2^x\left(-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)=2^x.$$

Відповідь. $f(x)=-\dfrac{1}{3}(2^x+2^{\frac{1}{x}+1}).$

Приклад 6. Знайти функцію $f(x)$, яка при $x\neq 1$ задовольняє рівнянню

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x.$$

Розв'язання. Тут функція $\varphi(x)=1/(1-x)$, $\varphi(\varphi(x))=(x-1)/x$, $\varphi(\varphi(\varphi(x)))=x.$ Тому замінюючи в заданому рівнянні змінну x на $1/(1-x)$, отримаємо таке рівняння

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{1-x},$$

а звідси, підставляючи замість x $\varphi(x)$, отримуємо рівняння:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(x\right)=\frac{x-1}{x}.$$

Отже маємо систему трьох алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій $f\left(x\right)$, $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$, $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$:

$$\begin{cases} f(x)+f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=x, \\ f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=\dfrac{1}{1-x}, \\ f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x}. \end{cases}$$

З цієї системи, віднімаючи друге рівняння від суми першого та третього, знаходимо шукану функцію:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1+x-\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\right).$$

Перевіркою легко переконатися, що ця функція дійсно є розв'язком заданого рівняння.

Відповідь. $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(1+x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1-x}\right).$

Розглянемо тепер більш загальний випадок:

$$a(x)\,f\left(\varphi(x)\right)+b(x)\,f(\psi(x))=F(x), \tag{2.6}$$

де $a(\cdot), b(\cdot), \varphi(\cdot), \psi(\cdot), F(\cdot)$ − відомі функції, визначені в деякій області $D \subset R$, а функція $f(\cdot)$ є невідомою.

Якщо функція $\varphi(x)$ (або $\psi(x)$) у своїй області визначення має обернену функцію, то легко показати, що рівняння (2.6) зводиться до рівняння (2.2).

В багатьох випадках в рівнянні (2.6) функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ мають безпосередні зв'язки, наприклад:

а) $\varphi(x) = -\psi(x)$; б) $\varphi(x) = \dfrac{1}{\psi(x)}$; в) $\varphi(-x) = \psi(x)$ і т.п.

В цих випадках перехід від рівняння (2.6) до вигляду (2.2) значно спрощується. Так, наприклад, при виконанні умов а) чи б) достатньо використати підстановку $z = \varphi(x)$. У випадку в) рівняння (2.6) записується так:

$$a(x) f\left(\varphi(x)\right) + b(x) f(\varphi(-x)) = F(x).$$

Замінюючи тут x на $-x$, отримаємо рівняння

$$a(-x) f\left(\varphi(-x)\right) + b(-x) f(\varphi(x)) = F(-x),$$

яке в сукупності з попереднім рівнянням дає можливість виключити $f(\varphi(-x))$ і найти вираз для $f(\varphi(x))$, тобто прийти до рівняння вигляду (2.1).

Приклад 7. Знайти всі функції $f(x)$, визначені на множині $\left(-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right)$, які задовольняють рівнянню

$$(x-1) f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x.$$

Розв'язання. Придамо x значення $\dfrac{x+1}{x-1}$. Тоді

$$\left(\frac{x+1}{x-1} - 1\right) f\left(\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}\right) - f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x+1}{x-1},$$

звідки

$$\frac{2}{x-1} f\left(x\right) - f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Отже, шукану функцію $f(x)$ знайдемо із системи рівнянь

$$\begin{cases}(x-1)f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)-f(x)=x,\\ \dfrac{2}{x-1}f(x)-f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\dfrac{x+1}{x-1}.\end{cases}$$

Звідси, складаючи перше рівняння системи з другим, помноженим на $(x-1)$, отримаємо, що $f(x)=2x+1.$

Перевіркою легко переконатися, що дійсно така функція є розв’язком заданого рівняння.

Відповідь. $f(x)=2x+1.$

Приклад 8. Знайти всі функції $f(x)$, які визначені при $x\neq-1, x\neq-2$ і задовольняють рівнянню $f\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)=x.$

Розв'язання. Нехай $z=\dfrac{x-2}{x+1}$, тоді після заміни $x=\dfrac{z+2}{1-z}$, $z\neq 1$, $z\neq 0$ рівняння набуде такого вигляду:

$$f\left(\frac{1}{z}\right)+2f(z)=\frac{z+2}{1-z}.$$

Звідси, замінюючи z на $1/z$, отримаємо наступне рівняння:

$$f(z)+2f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\frac{1}{z}+2}{1-\frac{1}{z}},$$

або (після перетворень у правій частині):

$$f(z)+2f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1+2z}{z-1}.$$

Отже, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{z}\right)+2f(z)=\dfrac{z+2}{1-z},\\ f(z)+2f\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1+2z}{z-1},\end{cases}$$

знаходимо, що шукана функція − $f(z)=\dfrac{4z+5}{3-3z}.$

Перевіркою переконуємось, що дійсно функція $f(x)=\dfrac{4x+5}{3-3x}$ є розв’язком заданого рівняння.

Відповідь. $f(x)=\dfrac{4x+5}{3-3x}$.

Функціональне рівняння може бути зведене до системи трьох і більше рівнянь. В окремих випадках вибір підстановок і подальше розв'язання можна здійснювати за певними схемами.

Розглянемо, наприклад, таке рівняння:

$$af(x)+bf(g(x))=c, \quad x\in X\subset R, \tag{2.7}$$

де a, b, c − відомі сталі або змінні величини, $g(x)$ − відома, $f(x)$ − шукана функція.

Виберемо довільне $x_1\in X$ і побудуємо рекурентну послідовність $\{x_n\}$, члени якої, починаючи з другого, визначаємо за формулою $x_n=g(x_{n-1})$. Якщо ця послідовність періодична з періодом $p,\ p>1$, то за допомогою підстановок $x=x_n,\ n=\overline{1,p}$, функціональне рівняння зводиться до системи p лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_1 f(x_1)+b_1 f(x_2)=c_1, \\ a_2 f(x_2)+b_2 f(x_3)=c_2, \\ \ldots \\ a_p f(x_p)+b_p f(x_1)=c_p, \end{cases} \tag{2.8}$$

де $a_n=a(x_n), b_n=b(x_n), c_n=c(x_n), n=\overline{1,p}$, якщо a, b, c залежать від x; у випадку, коли a, b, c − сталі, $a_n=a, b_n=b, c_n=c, n=\overline{1,p}$.

Найзручніше систему (2.8) розв'язувати за допомогою правила Крамера:

$$f(x_1)=\frac{\Delta_1(x_1,x_2,\ldots,x_p)}{\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_p)}.$$

Якщо $\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_p)\neq 0$, де $\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ і $\Delta_1(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ − визначники p-го порядку:

$$\Delta(x_1,x_2,...,x_p)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{p-1} & b_{p-1} \\ b_p & . & . & ... & 0 & a_p \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{розкладаємо}\\ \text{за елементами}\\ \text{першого рядка}\end{matrix}\right\}=$$

$$=a_1a_2...a_{p-1}a_p-(-1)^p b_1b_2...b_{p-1}b_p;$$

$$\Delta_1(x_1,x_2,...,x_p)=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ c_{p-1} & 0 & 0 & ... & a_{p-1} & b_{p-1} \\ c_p & . & . & ... & 0 & a_p \end{vmatrix}.$$

Значення $\Delta_1(x_1,x_2,...,x_p)$ можна обчислити за індукцією, використовуючи формулу розкладання визначника за елементами рядка або стовпця.

Приклад 9. Розв'язати функціональне рівняння

$$2xf(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=2x,\ x\neq 0,\ x\neq 1. \qquad (2.9)$$

Розв'язання. Побудуємо послідовність, у якій x_1 − довільне дійсне число, відмінне від 0 і 1, а $x_n=\dfrac{1}{1-x_{n-1}}, n=2,3,...$ Після обчислень декількох з елементів послідовності, отримаємо:

$$x_2=\frac{1}{1-x_1},\ x_3=\frac{x_1-1}{x_1},\ x_4=x_1,\ x_5=x_3,...$$

Отже, вказана послідовність виявилася періодичною з періодом 3. Якщо у функціональному рівнянні покласти $x=x_1, x=x_2, x=x_3$, то можна скласти наступну систему з трьох лінійних рівнянь відносно $f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3)$:

$$\begin{cases} 2x_1 f(x_1) + f(x_2) = 2x_1, \\ 2x_2 f(x_2) + f(x_3) = 2x_2, \\ 2x_3 f(x_3) + f(x_1) = 2x_3. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему за допомогою правила Крамера, отримуємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 & 1 \\ 1 & 0 & 2x_3 \end{vmatrix} = 8x_1x_2x_3 + 1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 2x_2 & 2x_2 & 1 \\ 2x_3 & 0 & 2x_3 \end{vmatrix} = 8x_1x_2x_3 + 2x_3 - 4x_2x_3;$$

$$f(x_1) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8x_1x_2x_3 + 2x_3 - 4x_2x_3}{8x_1x_2x_3 + 1} =$$

$$= \frac{8x_1 \cdot \dfrac{1}{1-x_1} \cdot \dfrac{x_1 - 1}{x_1} + 2\dfrac{x_1-1}{x_1} - 4\dfrac{1}{1-x_1} \cdot \dfrac{x_1-1}{x_1}}{8x_1 \cdot \dfrac{1}{1-x_1} \cdot \dfrac{x_1-1}{x_1} + 1} = .$$

$$= \frac{-8 + 2\dfrac{x_1-1}{x_1} + 4 \cdot \dfrac{1}{x_1}}{-7} = \frac{-6 + 2 \cdot \dfrac{1}{x_1}}{-7} = \frac{6x_1 - 2}{7x_1}.$$

Перевіркою переконуємось, що функція $f(x) = \dfrac{6x-2}{7x}$ дійсно є розв'язком функціонального рівняння (2.9).

Відповідь. $f(x) = \dfrac{6x-2}{7x}$.

Вправи. Розв'язати функціональне рівняння:

1. $2f(x) + f(1-x) = x^2$.
2. $3f\left(\dfrac{x-1}{2-3x}\right) - 5f\left(\dfrac{1-x}{x-2}\right) = \dfrac{8}{x-1}$, $x \neq 1$; $x \neq 1{,}5$; $x \neq 2$.

2.3.2. Розв'язання функціональних рівнянь в класі неперервних функцій

При розв'язанні функціонального рівняння результат часто залежить від того, чи має бути неперервною шукана функція. Отже, не зайвим буде нагадати деякі властивості неперервних функцій:

− якщо дві неперервні функції, задані на дійсній осі, збігаються в усіх раціональних точках, то вони збігаються всюди;

− якщо неперервна функція взаємно однозначна, то вона строго монотонна (правильним є і зворотне);

− неперервна на відрізку функція обмежена;

− якщо неперервна на відрізку $[a,b]$ функція в точках $x=a$ і $x=b$ приймає різні значення, то будь-яке проміжне між ними значення приймається функцією хоча б в одній точці відрізку $[a,b]$ (теорема Больцано[12]– Коші про проміжне значення).

Розглянемо декілька прикладів, в яких ключовим моментом є використання властивості неперервних функцій при розв'язанні функціональних рівнянь.

Приклад 10. Функція $f:R\to R$ задовольняє рівнянню

$$f(f(x))=x$$

для всіх x. Довести, що рівняння має хоча б один розв’язок, якщо $f(x)$ – неперервна на всій дійсній осі.

Розв'язання. Розглянемо функцію $g(x)=f(x)-x$. Припустимо, що $f(x)\neq x$ для всіх x. Тоді $g(x)\neq 0$ для всіх x. Тому функція $g(x)$ або усюди додатна, або усюди від’ємна, бо у протилежному випадку знайшлися б такі a та b, що $g(a)<0, g(b)>0$, і, за теоремою Больцано – Коші, функція мала б набувати усі проміжні між $g(a)$ та $g(b)$ значення, у тому числі і нуль, що є неможливим.

Нехай для визначеності, $g(x)<0$, тобто $f(x)<x$. Позначимо, $y=f(x), y<x$. Оскільки $f(f(x))=x$, то $f(y)=x>y$, звідки

[12] Больцано Бернард (05.10.1781 − 18.12.1848) − чеський математик, філософ, логік. Встановив сучасне поняття збіжності рядів. Уточнив поняття границі та неперервності, вперше строго довів теорему про проміжні значення функції. Зробив спробу побудови теорії дійсних чисел, яка після деяких уточнень співпала з теорією Кантора.

$g(y) = f(y) - y > 0$, що суперечить припущенню. Отже, за деякого значення x має місце $f(x) = x$.

Приклад 11. Довести, що жодна неперервна на множині всіх дійсних чисел R функція не може бути розв'язком функціонального рівняння

$$f(x+1)f(x) + f(x+1) + 1 = 0. \tag{2.10}$$

Розв'язання. Нехай $f(x)$ − неперервний розв'язок рівняння (2.10). Перепишемо задане рівняння в такому вигляді:

$$f(x+1)(f(x)+1) = -1. \tag{2.11}$$

Звідси випливає, що $f(x+1) \neq 0 \ \forall x \in R$, а, отже, за властивістю неперервних функції $f(x)$ зберігає свій знак і $f(x) \neq 0 \ \forall x \in R$.

Якщо $f(x+1) > 0 \ \forall x \in R$, то з рівності (2.11) маємо нерівність $f(x)+1 < 0$, чого не може бути, бо тоді функція $f(x)$ в деяких двох точках приймала б значення різних знаків, і за теоремою Больцано – Коші існувала б точка c, в якій $f(c) = 0$. А це суперечить рівності $f(x+1) \neq 0 \ \forall x \in R$. Отже, $f(x+1) < 0 \ \forall x \in R$. У цьому випадку маємо систему нерівностей

$$\begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x)+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < f(x) < 0, \forall x \in R.$$

Тепер перепишемо рівняння (2.11) так:

$$(f(x+1)+1)(f(x)+1) = f(x).$$

Ця рівність, враховуючи здобуту нерівність $-1 < f(x) < 0$, не може справджуватись, тому що її ліва частина − додатна, а права − від’ємна.

Отже, задане рівняння (2.10) в класі функцій, неперервних на множині всіх дійсних чисел, розв'язків немає.

Відповідь. Розв'язків немає.

Далі розглянемо ще один спосіб розв'язання функціональних рівнянь в класі неперервних функцій, який використовує ще одну властивість неперервних функцій, а саме можливість граничного переходу під знаком функції.

2.3.3. Методи математичного аналізу. Граничний перехід

З курсу математичного аналізу відомо, що в класі неперервних функцій можливий граничний перехід під знаком неперервної функції, тобто якщо $f(x)$ − неперервна функція, і послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є збіжною, то має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Ця властивість дозволяє в деяких випадках користуватися методом послідовних підстановок.

Розглянемо рівняння

$$f(x) = F(x)\cdot f(q(x)) + p(x), \tag{2.12}$$

де $F(x), q(x), p(x)$ − відомі функції, неперервні в області $D \subseteq R$. З метою спрощення подальших викладень будемо припускати, що $D \equiv R$, а функція $f(x)$ − шукана.

Позначимо $F_1(x) = F(x), q_1(x) = q(x),\ p_1(x) = p(x)$,

$$\begin{aligned} &q_n(x) = q_{n-1}(q(x)),\\ &p_n(x) = p_{n-1}(q(x)),\\ &F_n(x) = F_{n-1}(q(x)),\ n = 2,3,4,\ldots \end{aligned} \tag{2.13}$$

В рівнянні (2.12) зробимо підстановку $x = q(z)$ і, замінюючи після цього z на x, отримаємо

$$f(q(x)) = F_2(x)\cdot f(q_2(x)) + p_2(x). \tag{2.14}$$

З рівності (2.14) підставимо вираз $f(q(x))$ в праву частину рівняння (2.12) і отримаємо наступну рівність:

$$f(x) = F_1(x)F_2(x)\cdot f(q_2(x)) + F_1(x)p_2(x) + p_1(x). \tag{2.15}$$

Далі, замінюючи в рівності (2.15) x на $q(x)$, знайдемо

$$f(q_2(x)) = F_3(x)\cdot f(q_3(x)) + p_3(x).$$

Підставляючи цей вираз $f(q_2(x))$ в праву частину рівняння (2.15), отримаємо наступну рівність:

$$f(x) = F_1(x)F_2(x)F_3(x)\cdot f(q_3(x)) + F_1(x)F_2(x)p_3(x) + F_1(x)p_2(x) + p_1(x).$$

За допомогою методу математичної індукції можна довести, що для будь-якого натурального n виконується рівність

$$f(x)=F_1(x)\cdot F_2(x)\cdot\ldots\cdot F_n(x)\cdot f(q_n(x))+F_1(x)\cdot F_2(x)\cdot\ldots\cdot F_{n-1}(x)p_n(x)+$$
$$+F_1(x)\cdot F_2(x)\cdot\ldots\cdot F_{n-2}(x)\cdot p_{n-1}(x)+\ldots+F_{n-1}(x)p_2(x)+p_1(x).$$

Коротко цю рівність можна записати так:

$$f(x)=\left(\prod_{r=1}^{n}F_r(x)\right)\cdot f(q_n(x))+\sum_{s=1}^{n}\left(\prod_{r=1}^{s-1}F_r(x)\right)p_s(x). \tag{2.16}$$

Якщо існують такі границі:

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{r=1}^{n}F_r(x)=\Phi(x),\ \ \lim_{n\to+\infty}\sum_{s=1}^{n}\prod_{r=1}^{s-1}F_r(x)p_s(x)=A(x),\ \ \lim_{n\to+\infty}q_n(x)=b(x),$$

то здійснивши перехід до границі в рівності (2.16), отримаємо

$$f(x)=\Phi(x)\cdot f(b(x))+A(x).$$

У випадку, коли $b(x)=C(const)$, ця рівність визначає розв'язок рівняння (2.12):

$$f(x)=\Phi(x)\cdot f(C)+A(x),$$

де $f(C)=\dfrac{A(C)}{1-\Phi(C)}, (\Phi(C)\neq 1).$

Якщо $b(x)=x$, то $f(x)=\dfrac{A(x)}{1-\Phi(x)}.$

Слід зазначити, що пошук розв'язку рівняння (2.12) значно спрощується, коли $F(x)=1$ або $p(x)=0.$

Якщо у процесі побудови послідовностей функцій (2.13) виявиться, що $\lim\limits_{n\to+\infty}q_n(x)=\infty,$ то рівняння заздалегідь має бути перетворене за допомогою відповідної підстановки до такого, щоб побудована для нього послідовність функцій $\{q_n(x)\}$ мала скінченну границю. Так, наприклад, в рівнянні $f(2x+1)=f(x)$ функція $q(x)=2x+1,$ а $q_n(x)=2^n x+2^n-1$ і $\lim\limits_{n\to+\infty}q_n(x)=+\infty.$ Зробимо заміну виразу $2x+1$ на x. Тоді рівняння прийме такий вигляд: $f(x)=f\left(\dfrac{x-1}{2}\right).$ Для нього: $q(x)=\dfrac{x-1}{2},$ $q_n(x)=\dfrac{x-(2^n-1)}{2^n}$ і $\lim\limits_{n\to+\infty}q_n(x)=-1.$

Проілюструємо ідею методу граничного переходу при розв'язанні функціональних рівнянь на наступних прикладах.

Приклад 12. Знайти усі неперервні функції $f(x)$, що задовольняють співвідношенню $f(2x)=f(x)$ за будь-яких $x\in R$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)$ визначена для усіх x, то в рівнянні, яке розглядається, можна зробити заміну x на $\frac{x}{2}$. Тоді рівняння запишеться так: $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$. Зробивши аналогічну операцію декілька разів, отримуємо таку послідовність:

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{4}\right);\ f\left(\frac{x}{4}\right)=f\left(\frac{x}{8}\right);\ f\left(\frac{x}{8}\right)=f\left(\frac{x}{16}\right);\ldots$$

Отже, $f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{4}\right)=f\left(\frac{x}{8}\right)\ldots=\ldots f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\ldots$ для будь-якого натурального n. Враховуючи неперервність шуканої функції в точці 0, маємо:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x}{2^n}\right)=f(0).$$

А це означає, що $f(x)=C,$ де $C=f(0),$ тобто шукана функція є константою: $f(x)=Const$.

Відповідь. $f(x)=Const$.

Приклад 13. Розв'язати рівняння

$$f(2x)=\left(e^{x^2}\cos x\right)f(x),$$

за умови $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$

Розв'язання. В заданому рівнянні: $q(x)=2x,\quad q_n(x)=2^n x$, і, отже, $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n(x)=+\infty.$ Тому зробимо заміну x на $\frac{x}{2}$, в результаті чого отримаємо таке рівняння:

$$f(x)=\left(e^{\frac{x^2}{4}}\cos\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Тут $F(x)=e^{\frac{x^2}{4}}\cos\frac{x}{2}$, $q(x)=\frac{x}{2}$, $p(x)=0$. При цьому

$$F_n(x)=e^{\frac{x^2}{2^{2r}}}\cos\frac{x}{2^r},\qquad \prod_{r=1}^{n}e^{\frac{x^2}{2^{2r}}}=e^{x^2\left(\frac{1}{2^{2\cdot1}}+\frac{1}{2^{2\cdot2}}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}\right)},\quad \lim_{n\to\infty}\prod_{r=1}^{n}e^{\frac{x^2}{2^{2r}}}=e^{\frac{x^2}{3}}.$$

Позначимо $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{r=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^r}\right)=V(x)$. Така границя існує, оскільки $\left|\cos\left(\frac{x}{2^r}\right)\right|\le 1$. Крім того,

$$V(2x)=\lim_{n\to\infty}\prod_{r=1}^{n}\cos\left(\frac{2x}{2^r}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{r=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^{r-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{r=0}^{n-1}\cos\left(\frac{x}{2^r}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{r=1}^{n-1}\cos x\cdot\cos\left(\frac{x}{2^r}\right)=\cos x\cdot\lim_{n\to\infty}\prod_{r=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^r}\right)=\cos xV(x).$$

Залишилось відзначити, що $\lim\limits_{n\to+\infty}f(q_n(x))=\lim\limits_{n\to+\infty}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=1$ (за умовою задачі).

Отже, рівняння (2.16) в інтерпретації розглянутих в даному прикладі функцій записується так:

$$f(x)=e^{\frac{x^2}{3}}V(x)$$

і визначає шукану функцію, у чому можна переконатися звичайною перевіркою.

Приклад 14. Довести, що рівняння

$$f\left(\frac{x}{1+x}\right)-f(x)=x,\quad x\in[0,\infty) \tag{2.17}$$

не має неперервних розв'язків.

Розв'язання. Припустимо, що існує неперервна функція $f(x)$, яка задовольняє рівняння (2.17). Після підстановки в (2.17) замість x виразу $\frac{x}{1+x}$ (якщо $x\in[0,\infty)$, то і $\frac{x}{1+x}\ge 0$), отримаємо таке функціональне рівняння:

$$f\left(\frac{x}{1+2x}\right)-f\left(\frac{x}{1+x}\right)=\frac{x}{1+x}. \tag{2.18}$$

Тепер зробимо таку саму заміну в рівнянні (2.18):

$$f\left(\frac{x}{1+3x}\right)-f\left(\frac{x}{1+2x}\right)=\frac{x}{1+2x}. \qquad (2.19)$$

Описану операцію здійснюємо ще декілька разів. На n-му кроці отримуємо:

$$f\left(\frac{x}{1+nx}\right)-f\left(\frac{x}{1+(n-1)x}\right)=\frac{x}{1+(n-1)x}. \qquad (2.20)$$

Складаємо усі отримані вирази, починаючи з (2.17) і закінчуючи (2.20) (усього n виразів), і після приведення подібних доданків, отримуємо наступну рівність:

$$f\left(\frac{x}{1+nx}\right)-f(x)=x+\frac{x}{1+x}+\frac{x}{1+2x}+\ldots+\frac{x}{1+(n-1)x}. \qquad (2.21)$$

Рівність (2.21) є правильною для будь-якого натурального n. Зафіксуємо x, а n спрямуємо до нескінченності. З огляду на неперервність шуканої функції $f(x)$ у точці $x=0$, знаходимо:

$$f(0)-f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{1+kx}, \qquad (2.22)$$

де $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x}{1+kx}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x}{1+kx}.$

Ліва частина (2.22) при конкретному (фіксованому) x перетворюється на константу, а це означає, що при заданому x ряд у правій частині (2.22) має збігатися до цієї константи. Але вказаний ряд розбігається для будь-якого значення $x>0$. Дійсно, для довільного натурального k і $x>0$ правильною є нерівність

$$\frac{x}{1+kx}\geq\frac{x}{k+kx}=\frac{x}{k(1+x)},$$

і, отже,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{1+kx}=x+\frac{x}{1+x}+\frac{x}{1+2x}+\ldots+\frac{x}{1+nx}\geq$$

$$\geq x+\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1}{1}+\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1}{2}+\ldots+\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1}{n}=x+\frac{x}{1+x}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

З курсу математичного аналізу відомо, що гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є необмеженим і зростаючим, внаслідок чого

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{1+kx}=\infty.$$

Це означає, що ліва частина рівності (2.22) не може набувати конкретних значень за певних значень змінної x, а отже, припущення про існування неперервного розв'язку рівняння (2.18) є хибним.

Приклад 15. Знайти всі неперервні функції $f:R\to R$, такі що рівність

$$f(x)=f\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

виконується для всіх x, відмінних від 1.

Розв'язання. Побудуємо послідовність $\{x_n\}$, у якій x_1 – довільне дійсне число, відмінне від 1, а $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{1-x_n}, n\in N$. Якщо додатково вимагати, щоб перший елемент послідовності $x_1\neq\dfrac{1}{n}$, $n=2,3,...$, то легко переконатися, що $x_{n+1}=\dfrac{x_1}{1-nx_1}, n\in N$.

Побудована послідовність за будь-яких $x_1\neq\dfrac{1}{n}, n=2,3,...$ є збіжною, і її границя дорівнює нулю:

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_1}{1-nx_1}=0.$$

Якщо у функціональному рівнянні покласти послідовно $x=x_1, x=x_2,..., x=x_{n-1}$, то дістанемо наступну систему з $(n-1)$-го рівняння відносно n невідомих $f(x_1), f(x_2),..., f(x_n)$:

$$\begin{cases} f(x_1)=f(x_2),\\ f(x_2)=f(x_3),\\ \ldots\\ f(x_{n-1})=f(x_n).\end{cases}$$

Отже, $f(x_1)=f(x_n)$. Оскільки за умовою задачі функція $f(x)$ є неперервною, а послідовність $\{x_n\}$ збіжною і має границю, що дорівнює нулю, то для всіх $x_1 \neq \frac{1}{n}, n = 2,3,...$ має місце такий ланцюжок рівностей:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_1) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \Rightarrow f(x_1) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \Rightarrow f(x_1) = f(0).$$

У випадку, коли $x_1 = \frac{1}{k}$, для будь-якого натурального n сума $\frac{1}{k} + \frac{\sqrt{2}}{n}$ є ірраціональним числом. Оскільки $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \frac{1}{k}$, то

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{k}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{k} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} f(0) = f(0).$$

Отже, $f(x_1) = C,$ де $C = f(0)$ для всіх $x_1 \neq 1.$

Відповідь: $f(x) = C, C-$ довільна стала.

Приклад 16. Знайти всі неперервні функції, які задовольняють рівняння

$$f(x) + f\left(\frac{2}{3}x\right) = \frac{3}{5}x.$$

Розв'язання. Покладаючи в рівнянні $x = 0$, дістанемо $f(0) = 0$. В силу неперервності шуканої функції для будь-якої послідовності $\{x_n\}$, такої що $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

Побудуємо послідовність $\{x_n\}$, у якій $x_1 = a$ − довільне дійсне число, а $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n, n \in N$. Оскільки $x_n = a\left(2/3\right)^{n-1}$, $n \in N$, то $\lim_{n\to\infty} x_n = a\lim_{n\to\infty}\left(2/3\right)^{n-1} = 0.$

Замінюючи послідовно у функціональному рівнянні x на $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, дістанемо систему лінійних рівнянь відносно n невідомих $f(x_1),\ f(x_2), ..., f(x_n)$:

$$\begin{cases} f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{3}{5}x_1, \\ f(x_2)+f(x_3)=\dfrac{3}{5}x_2, \\ \ldots \\ f(x_{n-1})+f(x_n)=\dfrac{3}{5}x_{n-1}. \end{cases}$$

Оскільки в системі невідомих більше, ніж рівнянь, виразимо $f(x_1)$ через $f(x_n)$. Для цього кожне рівняння системи помножимо на $(-1)^{k+1}$, де k − номер рівняння, і всі отримані рівняння додамо:

$$f(x_1)+(-1)^n f(x_n)=\frac{3}{5}\left(x_1-x_2-\ldots+(-1)^n x_{n-1}\right).$$

Після перетворень у правій частині цієї рівності, використовуючи формулу суми членів геометричної прогресії, отримаємо:

$$x_1-x_2-\ldots+(-1)^n x_{n-1}=\frac{3}{5}a\left(1+(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right).$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_1)+(-1)^n f(x_n)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{25}a\left(1+(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right),$$

то, враховуючи, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n f(x_n)\right)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right)=0$ і $x_1=a$, дістанемо рівність $f(a)=9a/25$ для довільного дійсного a.

Відповідь: $f(x)=9x/25$.

Вправи. Знайти розв'язки рівнянь у класі неперервних функцій:

1. $f(x)=f\left(\dfrac{x}{2}\right)+x(1+x)$. 2. $f(x)=2^x f\left(\dfrac{x}{5}\right)$.

3. $f(x)-\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{x}{2}\right)=x-x^2$.

2.3.4. Спосіб невизначених коефіцієнтів

Якщо за зовнішнім виглядом функціонального рівняння можна встановити загальний вигляд шуканої функції, то останню можна відновити за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. При цьому корисно пам'ятати, що для цілих і дробово-раціональних функцій $f(x)$ та $p(x)$ цілими і дробово-раціональними відповідно є функції $g(x) = af(x) + bp(x)$, де a, b − довільні сталі, і $q(x) = f(p(x))$.

У випадку, коли $f(x)$ і $p(x)$ є лінійними або дробово-лінійними, функції $g(x), q(x)$ також лінійні або дробово-лінійні. Так, при $f(x) = ax + b$, $p(x) = cx + d$, де a, b, c, d – дійсні числа, функція $q(x)$ набуває наступного вигляду:

$$q(x) = f(p(x)) = f(cx + d) = a(cx + d) + b = acx + (ad + b).$$

І отже, композиція двох лінійних функцій є лінійною функцією.

Розглянемо декілька прикладів розв'язання функціональних рівнянь за допомогою способу невизначених коефіцієнтів.

Приклад 17. Знайти всі функції $f : R \to R$, які при всіх x задовольняють рівняння

$$f(f(x)) = f(x) + x. \tag{2.23}$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у такий спосіб:

$$f(f(x)) - f(x) = x. \tag{2.24}$$

В (2.24) над шуканою функцією виконуються дві дії − операція утворення композиції функцій і віднімання. Враховуючи те, що праворуч в (2.24) стоїть лінійна функція, доречно функцію $f(x)$ шукати серед лінійних: $f(x) = ax + b$, де a, b − невизначені коефіцієнти. Після підстановки цієї функції в (2.24) отримуємо рівняння $(a^2 - a)x + ab = x$, звідки, прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях змінної в лівій і правій частинах рівняння, дістанемо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} a^2 - a = 1, \\ ab = 0, \end{cases}$$

яка має такі розв'язки: $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; b = 0$.

Отже, маємо дві неперервні функції $f(x)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$; $f(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x$, які є розв'язками функціонального рівняння (2.23).

Перевірка. Нехай, наприклад, $f(x)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$. Тоді

$$f(f(x))=\frac{1+\sqrt{5}}{2}f(x)=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}x=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{4}x=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}x=$$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{2}x=\frac{2+\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+x=f(x)+x.$$

Аналогічно можна переконатися, що і функція $f(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x$ – розв'язок рівняння (2.23).

Приклад 18. Довести, що існує функція $f:R_+\to R_+$, така, що:

$$\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{n}=1+x+2\sqrt{x}. \qquad (2.25)$$

Розв'язання. Оскільки $1+x+2\sqrt{x}=\left(1+\sqrt{x}\right)^2$, то функцію $f(x)$ будемо шукати серед функцій $f(x)=\left(a+b\sqrt{x}\right)^2$. Спочатку визначимо коефіцієнти a і b так, щоб виконувалась рівність

$$f\left(f(x)\right)=\left(1+\sqrt{x}\right)^2. \qquad (2.26)$$

Враховуючи, що

$$f\left(f(x)\right)=f\left(\left(a+b\sqrt{x}\right)^2\right)=\left(a+b\sqrt{\left(a+b\sqrt{x}\right)^2}\right)^2=\left(a+ab+b^2\sqrt{x}\right)^2,$$

рівність (2.26) буде виконуватися для всіх невід'ємних x, якщо $a+ab=1,\ b^2=1$. Звідси: $a=1/2, b=1$ і $f(x)=\left(1/2+\sqrt{x}\right)^2$.

Припустимо, що функція вигляду $f(x)=\left(1/n+\sqrt{x}\right)^2$ має задовольняти рівність (2.25). Доведемо цю гіпотезу методом математичної індукції. Оскільки база індукції − $f(x)=\left(1/n+\sqrt{x}\right)^2$, то

$$f\left(f(x)\right)=\left(1/n+\sqrt{\left(1/n+\sqrt{x}\right)^2}\right)^2=\left(2/n+\sqrt{x}\right)^2.$$

Припустимо, що для $k,\ 2<k<n$, рівність

$$\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{k}=\left(k/n+\sqrt{x}\right)^2 \qquad (2.27)$$

виконується для всіх $x>0$. Тоді

$$\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{k+1}=f\left(\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{k}\right)=f\left(\left(k/n+\sqrt{x}\right)^2\right)=$$

$$=\left(1/n+\sqrt{\left(k/n+\sqrt{x}\right)^2}\right)^2=\left((k+1)/n+\sqrt{x}\right)^2.$$

Тобто рівність (2.27) виконується для $k+1$. Отже, за методом математичної індукції рівність (2.27) справджується для всіх $k=1,2,\ldots,n$. Якщо $k=n$, то з рівності (2.27) випливає рівність (2.25).

Відповідь: $f(x)=\left(1/n+\sqrt{x}\right)^2$.

Отже, метод невизначених коефіцієнтів дає можливість будувати окремі розв'язки тих функціональних рівнянь, за зовнішнім виглядом яких можна передбачити загальний вигляд шуканих функцій. Іноді цього достатньо для повного розв'язування поставленої задачі, іноді можна знайти усі розв'язки функціонального рівняння.

Вправи.

1. Доведіть, що існує функція $f(x)$, визначена на множині невід'ємних чисел, і така що $\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{n}=\dfrac{x}{1+x}$.
2. Нехай a,b,c,d − дійсні числа, $b\neq 0$. Знайти всі функції $f:R\to R$, які задовольняють рівняння

$$f(x+df(y))=ax+by+c \quad \forall x\in R, \forall y\in R.$$

2.4. Розв'язання функціональних рівнянь з вільними змінними

2.4.1. Особливості застосування методу підстановок для рівнянь з вільними змінними

Будемо розглядати функціональні рівняння, в яких невідомою, як правило, є функція однієї змінної, хоча саме рівняння містить дві (або більше) незалежних змінних.

Як і для рівнянь, що не містять вільних змінних, при розв'язанні рівнянь з вільними змінними провідним, найбільш поширеним, є метод підстановок. Цей метод дозволяє замінити деякими новими функціями (у тому числі і сталими) одну чи обидві незалежні змінні.

В найпростіших випадках заміна однієї змінної зводить функціональне рівняння, в якому є вільні змінні, до рівняння, що не містить вільних змінних, а його розв'язок можна отримати безпосередньо.

В більш складних випадках заміна однієї змінної на сталу величину приводить до рівняння, що не містить вільних змінних, але, у свою чергу, може бути розв'язане за допомогою методу підстановок.

Покладаючи, що одна змінна дорівнює сталій величині, тим самим вводиться до розгляду одне із значень невідомої функції. Іноді це значення вдається визначити. Однак в багатьох випадках його знайти не вдається, і тому отриманий розв'язок, як правило, залежить від довільної сталої.

У зв’язку з цим доцільно у кожному випадку встановлювати безпосередньою перевіркою, за яких значень сталої знайдена функція є розв'язком функціонального рівняння.

Слід зазначити, що пошук вдалої підстановки для заміни на деякі функції однієї чи більше незалежних змінних вимагає певного мистецтва і досвіду.

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 19. Знайти всі функції $f: R \to R$, які за будь-яких x, y задовольняють рівність

$$f\left(x+y\right) = x + yf(x) + (1-x)y. \qquad (2.28)$$

Розв'язання. Нехай $f:R\to R$ − функція, що задовольняє рівняння (2.28). Оскільки (2.28) виконується при будь-яких значеннях змінних x, y, то воно буде справедливим і за певних їх значень. Так, припускаючи, що $y=0$, отримуємо $f(x)=x$ при будь-якому x.

Отже, з (2.28) випливає, що $f(x)\equiv x$, або, іншими словами, жодна функція, крім тотожної $f(x)\equiv x$, не може задовольняти рівняння (2.28). Проте цей факт ще не доводить, що тотожна функція є розв'язком рівняння (2.28). Лише безпосередньою перевіркою можна переконатися у тому, що $f(x)\equiv x$ − розв'язок рівняння (2.28), а це легко зробити:

$$f\left(x+y\right)=x+y;$$

$$x+yf(x)+(1-x)y=x+yx+(1-x)y=x+xy+y-xy=x+y.$$

Відповідь: $f(x)=x$.

Далі наведемо приклад, який демонструє необхідність виконання перевірки знайденного розв'язку функціонального рівняння.

Приклад 20. Знайти всі функції $f:R\to R$, які за будь-яких x, y задовольняють рівність

$$f\left(x+y\right)=x+yf(x)+(1-\sin x)y. \qquad (2.29)$$

Розв'язання. Нехай $f:R\to R$ − функція, яка задовольняє рівняння (2.29). Припустимо в (2.29), що $y=0$, тоді $f(x)=x$ при будь-якому x. Однак, якщо безпосередньо підставити $f(x)\equiv x$ в (2.29), останнє не перетвориться на тотожність. При $x=0$ отримуємо рівняння вигляду $f\left(y\right)=yf(0)+y$, звідки $f\left(y\right)=Cy, C$ − деяка стала. Але перевіркою переконуємося, що за будь-яких значень сталої така функція також не задовольняє рівняння (2.29). Отже, робимо висновок, що це рівняння не є розв’язним.

Відповідь: Розв'язків немає.

Приклад 21. Знайти всі функції $f:R\to R$, які за будь-яких x, y задовольняють рівність

$$f(x+y^2+2y+1)=y^4+4y^3+2xy^2+5y^2+4xy+2y+x^2+x+1. \qquad (2.30)$$

Розв'язання. Оскільки маємо отримати вираз для функції $f: R \to R$, спробуємо позбутися доданку $y^2 + 2y + 1$ під знаком функції. Рівняння $y^2 + 2y + 1 = 0$ має лише один розв'язок $y = -1$. Підставляючи це значення в рівняння (2.30), отримуємо $f(x) = x^2 - x + 1$. Залишається лише зробити перевірку і переконатися у тому, що це і є розв'язок рівняння (2.30).

Перевірка:

$$f(x + y^2 + 2y + 1) = \left(x + y^2 + 2y + 1\right)^2 - \left(x + y^2 + 2y + 1\right) + 1 =$$

$$= x^2 + y^4 + \underline{4y^2} + 1 + 2xy^2 + 4xy + \underline{\underline{2x}} + 4y^3 + \underline{2y^2} + 4y - \underline{\underline{x}} - 2y \underline{- y^2} - 1 + 1 =$$

$$= y^4 + 4y^3 + 2xy^2 + 5y^2 + 4xy + 2y + x^2 + x + 1.$$

Відповідь: $f(x) = x^2 - x + 1$.

Приклад 22. Знайти всі функції $f: R \to R$, які за будь-яких x, y задовольняють рівність

$$f((x^2 + 6x + 6)y) = y^2(x^4 + 12x^3 + 48x^2 + 72x + 36) - 24xy - 24y. \quad (2.31)$$

Розв'язання. Як і у попередньому випадку, будемо намагатися отримати вільну змінну (x або y) під знаком функції. Найпростіше, очевидно, отримати y. Отже, розв’язуючи рівняння $(x^2 + 6x + 6)y = y$ відносно x, отримуємо $x_1 = -1; x_2 = -5$. Підстановка будь-якого з цих значень в рівняння приводить до рівності $f(y) = y^2$. Перевірка свідчить, що ця функція − розв'язок рівняння (2.31).

Відповідь: $f(x) = x^2$.

Приклад 23. Знайти всі функції $f: R \to R$, які за будь-яких x, y задовольняють рівняння

$$f(x + y) = xy. \quad (2.32)$$

Розв'язання. Переформулюємо цю задачу так: знайти такі функції, які за сумою двох дійсних чисел відновлюють їх добуток. Із визначення функції випливає, що це неможливо, адже сума і добуток двох чисел є незалежними.

Для доведення відсутності розв'язків рівняння (2.32) достатньо підставити в нього дві пари чисел x, y з рівною сумою та різними добутками. Наприклад, підстановка $x=0; y=2$ дає $f(2)=0$, а підстановка $x=y=1$ дає $f(2)=1$. Отже, шуканих функцій f не існує.

Відповідь: Розв'язків немає.

Далі продемонструємо застосування методу заміни змінних до розв’язання функціональних рівнянь з декількома змінними.

Приклад 24. Знайти всі функції $f: R \to R$, які за будь-яких x, y задовольняють рівнянню

$$f(x-y)+f(y-x)=f(x)-f(y). \qquad (2.33)$$

Розв'язання. Ліва частина рівняння (2.33) є симетричною відносно x, y (тому що не змінює свій вигляд при будь-яких перестановках x, y), а права − ні. Скористуємося цим фактом, зробимо заміну $x \to y, y \to x$:

$$f(x-y)+f(y-x)=f(y)-f(x).$$

Порівнюючи отримане рівняння з вихідним, заключаємо, що $f(x)-f(y)=f(y)-f(x)$, $f(x)-f(y)\equiv 0$, тобто функція $f(x)\equiv C$, де C − стала, не змінює свій вигляд при будь-яких перестановках. Перевірка показує, що лише при $C=0$ знайдена функція є розв'язком рівняння (2.33).

Відповідь: $f(x)\equiv 0$.

Приклад 25. Знайти всі функції $f: R \to R$, які за будь-яких x, y задовольняють рівняння

$$f(2x+y)=(f(x))^2+(f(y))^2.$$

Розв'язання. Зробимо заміну $x \to y, y \to x$:

$$f(2y+x)=(f(x))^2+(f(y))^2.$$

Звідси випливає, що функція f є константою. Для доведення цього факту достатньо показати, що існують такі x, y, що $a = 2x + y, b = 2y + x$ і $f(a) = f(b)$. Дійсно, система рівнянь

$$\begin{cases} a = 2x + y, \\ b = 2y + x, \end{cases}$$

за будь-яких $a, b \in R$ має такий розв’язок: $x = \dfrac{2a - b}{3}, y = \dfrac{2b - a}{3}$. В силу довільності параметрів a і b, а також, рівності $f(a) = f(b)$, заключаємо, що $f(x) = C$, C − стала.

Відповідь: $f(x) = C$, C − стала.

Приклад 26. Знайти всі функції $f : R \to R$, які за будь-яких x, y, z задовольняють рівняння

$$\sin(x - y^2) + \sin(y - z^2) + \sin(z - x^2) = f(x) + 2f(y) + 3f(z). \qquad (2.34)$$

Розв'язання. Нагадаємо, що вираз називається циклічним відносно змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, якщо він не змінює свій вигляд при циклічній заміні змінних $x_1 \to x_2, x_2 \to x_3, ..., x_n \to x_1$.

Ліва частина рівняння (2.34) є симетричною відносно x, y, а права − ні. Скористуємося цим фактом, зробимо циклічну заміну $x \to y, y \to z, z \to x$:

$$\sin(y - z^2) + \sin(z - x^2) + \sin(x - y^2) = f(y) + 2f(z) + 3f(x).$$

Порівнюючи отримане рівняння із заданим, заключаємо, що

$$f(y) + 2f(z) + 3f(x) = f(x) + 2f(y) + 3f(z),$$

звідки $f(y) = 2f(x) - f(z)$. Тепер достатньо підставити $x = y = 0$ і переконатися, що $f(z) = f(0) = const$.

Нехай $f(0) = C$, тоді рівняння (2.34) перетвориться на таке:

$$\sin(x - y^2) + \sin(y - z^2) + \sin(z - x^2) = 6C,$$

а ця рівність не може справджуватися за будь-яких x, y, z.

Отже, константа не задовольняю рівняння (2.34), тому і розв'язків у нього не має.

Відповідь: Розв'язків немає.

Приклад 27. Знайти усі функції $f:R\to R$, які за будь-яких x,y задовольняють рівняння

$$f(x+y)=\max\left(f(x),y\right)+\min\left(x,f(y)\right). \qquad (2.35)$$

Розв'язання. Покладемо в рівності (2.35) спочатку $x=t,\ y=0$, а потім $x=0,\ y=t$, і дістанемо такі дві рівності:

$$f(t)=\max\left(f(t),0\right)+\min\left(t,f(0)\right);$$
$$f(t)=\max\left(f(0),t\right)+\min\left(0,f(t)\right).$$

Додамо ці рівності, враховуючи, що $\max\left(a,b\right)+\min\left(a,b\right)=a+b$:

$$2f(t)=\max\left(f(t),0\right)+\min\left(t,f(0)\right)+\max\left(f(0),t\right)+\min\left(0,f(t)\right)=$$
$$\left(\max\left(f(t),0\right)+\min\left(0,f(t)\right)\right)+\left(\min\left(t,f(0)\right)+\max\left(f(0),t\right)\right)=$$
$$=f(t)+0+t+f(0)=f(t)+t+f(0).$$

Звідси випливає, що $f(t)=t+a;\ a=f(0)$. Для визначення сталої a підставимо здобуту функцію у рівність (2.35):

$$x+y+a=\max\left(x+a,y\right)+\min\left(x,y+a\right). \qquad (2.36)$$

Для $y=x-a$ з рівності (2.36) маємо:

$$2x=\max\left(x+a,x-a\right)+\min\left(x,x\right)=\max\left(x+a,x-a\right)+x,$$

тобто $x=\max\left(x+a,x-a\right)$, звідки $a=0$.

Відповідь: $f(x)=x$.

Приклад 28. Знайти усі функції $f:R\to R$, які за будь-яких $x\in R$ задовольняють рівняння

$$f(x)=\max_{y\in R}\left(xy-f(y)\right). \qquad (2.37)$$

Розв'язання. Оскільки $f(x)$ є найбільшим значенням виразу $xy - f(y)$ для всіх $y \in R$, то $xy - f(y) \le f(x)\ \forall x, y \in R$. Поклавши тут $x = y$, отримаємо нерівність $y^2 - f(y) \le f(y)\ \forall y \in R,$ або

$$f(y) \ge 0,5y^2 \quad \forall y \in R. \tag{2.38}$$

Враховуючи (2.38), можна оцінити вираз $xy - f(y)$:

$$xy - f(y) \le xy - 0,5y^2 = -0,5(x-y)^2 + 0,5x^2 \le 0,5x^2.$$

Отже, $xy - f(y) \le 0,5x^2\ \forall x, y \in R$. Тому

$$f(x) = \max_{y \in R}\left(xy - f(y)\right) \le \max_{y \in R}\left(0,5x^2\right) = 0,5x^2,\ x \in R. \tag{2.39}$$

З нерівностей (2.38) і (2.39) випливає, що $f(x) = 0,5x^2.$

Перевірка. $\max\limits_{y \in R}\left(xy - 0,5y^2\right) = \max\limits_{y \in R}\left(-0,5(y^2 - 2xy + 1) + 0,5\right) =$

$$= \max_{y \in R}\left(-0,5(y^2 - 2xy + x^2) + 0,5x^2\right) =$$

$$= \max_{y \in R}\left(-0,5(y-x)^2 + 0,5x^2\right) = 0,5x^2.$$

Відповідь: $f(x) = 0,5x^2.$

Приклад 29. Знайти усі функції $f : R \to R$, які за будь-яких $x \in R$ задовольняють рівняння

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = y + \left(f(x)\right)^2. \tag{2.40}$$

Розв'язання. Припустимо, що існує таке число $a \in R$, що $f(a) = 0$. Виконуючи такі заміни: $x \to a, y \to a$ і $x \to -a, y \to a$, дістанемо рівності:

$$f\left(a^2 + f(a)\right) = a + \left(f(a)\right)^2 \quad \text{і} \quad f\left(a^2 + f(a)\right) = a + \left(f(-a)\right)^2.$$

З цих співвідношень маємо: $\left(f(a)\right)^2 = \left(f(-a)\right)^2$, і отже, з урахуванням вищезазначеного припущення, $f(-a) = 0$. Якщо в рівності (2.40) покласти $y = a$ і $y = -a$, то здобудемо рівності:

$$f\left(x^2\right) = a + \left(f(x)\right)^2, \quad f\left(x^2\right) = -a + \left(f(x)\right)^2,$$

з яких випливає, що $a=0$. Отже, для шуканої функції виконується рівність

$$f(0)=0.$$

Замінимо тепер в рівності (2.40) $x\to -x$:

$$f\left(x^2+f(y)\right)=y+\left(f(-x)\right)^2. \qquad (2.41)$$

З (2.40) і (2.41) маємо:

$$\left(f(x)\right)^2=\left(f(-x)\right)^2 \Leftrightarrow \left(f(x)-f(-x)\right)\left(f(x)+f(-x)\right)=0,\ x\in R. \quad (2.42)$$

Варто наголосити, що рівність (2.42) не дає підстав для висновку про парність чи непарність функції $f(x)$. Таку рівність, зокрема, задовольняє функція

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\notin N, \\ -x, & x\in N, \end{cases}$$

яка є ні парною, ні непарною.

Нехай $A=\{x\in R: f(-x)=f(x)\}$, $B=\{x\in R: f(-x)=-f(x)\}$. Тоді $R=A\cup B\cup\{0\}$. Якщо $x\in R, y\in A$, то з рівностей

$$f\left(x^2+f(y)\right)=y+\left(f(x)\right)^2 \text{ і } f\left(x^2+f(y)\right)=-y+\left(f(x)\right)^2$$

дістанемо таку суперечність: $y=-y$, але ж $y\neq 0$. Отже, A є порожньою множиною, і, відповідно, функція $f(x)$ є непарною.

Якщо $y=0$, то для довільного x маємо:

$$f(x^2)=f^2(x),$$

а рівність (2.41), у випадку, коли $y=x^2$, набуває такого вигляду:

$$f\left(x^2+f(x^2)\right)=x^2+f(x^2).$$

Тому $f(z)=z$ при $z=x^2+f(x^2)\geq 0$. З того, що і знайдена, і шука-на функції є непарними, випливає, що $f(z)=z$ для будь-яких $z\in R$. Перевіркою переконуємося, що $f(x)=x$ − розв'язок рівняння (2.40).

Відповідь: $f(x)=x, x\in R$.

Значна кількість функціональних рівнянь, які допускають підстановки певного вигляду, наведені в роботі [17]. Розглянемо лише деякі з них.

1) Рівняння вигляду

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=G\big(f(x),f(y)\big), \tag{2.43}$$

де $G(x,y)$ − деяка функція, може розглядатися як узагальнення рівняння

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{2.44}$$

Такі рівняння приводяться до простого вигляду за допомогою заміни змінної x на вираз $(x+y)$, а змінної y на нуль.

Застосуємо ці підстановки до рівняння (2.44). В результаті отримаємо рівняння

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x+y)+f(0)}{2}. \tag{2.45}$$

Прирівнюючи праві частини рівнянь (2.44) і (2.45), приходимо до рівняння

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-a, \quad a=f(0).$$

Останнє рівняння за рахунок підстановки $\varphi(x)=f(x)-a$ зводиться до рівняння Коші

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),$$

розв'язок якого $\varphi(x)=Cx$, і, отже, $f(x)=Cx+a.$

2) Для розв'язання рівнянь вигляду

$$H\big(f(x+y),f(x-y),f(x),x,y\big)=0 \tag{2.46}$$

можуть бути використані різні способи. Один з них розглянемо на прикладі розв'язування наступного рівняння:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y. \tag{2.47}$$

Зробимо в рівнянні (2.47) послідовно такі підстановки:

$$x=0,\ y=t;\ \ x=\frac{\pi}{2}+t,\ y=\frac{\pi}{2};\ \ x=\frac{\pi}{2},\ y=\frac{\pi}{2}+t$$

і введемо позначення: $f(0)=a,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=b$:

$$f(0+t)+f(0-t)=2f(0)\cos t\ \Rightarrow\ f(t)+f(-t)=2a\cos t;$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}+t+\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}+t-\frac{\pi}{2}\right)=2f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cos\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ f(t+\pi)+f(t)=0;$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+t\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+t\right)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(t+\pi)+f(-t)=-2b\sin t.$$

В результаті отримаємо систему з трьох алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими $f(t),\ f(-t),\ f(t+\pi)$:

$$\begin{cases} f(t)+f(-t)=2a\cos t, \\ f(t+\pi)+f(t)=0, \\ f(t+\pi)+f(-t)=-2b\sin t. \end{cases}$$

Віднімаючи останнє рівняння цієї системи із суми двох попередніх, знаходимо $f(t)=a\cos t+b\sin t.$ Безпосередня перевірка підтверджує, що для будь-яких a,b така функція дійсно є розв'язком рівняння (2.47).

У розглянутому прикладі суттєву роль зіграв той факт, що при $y=\pi/2$ функція $2f(x)\cos y$ приймала нульове значення. Тому для того, щоб описаний метод можна було застосовувати на випадок інших рівнянь типу (2.46), має існувати таке значення $y=y_0$, для якого виконувалася б рівність

$$H\left(z_1,z_2,z_3,x,y_0\right)=h\left(z_1,z_2,x\right), \qquad (2.48)$$

де $h\left(z_1,z_2,x\right)$ − деяка функція, яка явно не залежить від z_3.

Якщо ця умова виконана, то застосовуючи в рівнянні (2.46) такі підстановки: $x\to 0,\ y\to t;$ $x=y_0+t,\ y=y_0;$ $x=y_0,\ y=y_0+t$ і, використовуючи позначення $f(0)=a,\ f\left(y_0\right)=b$, можна отримати систему з трьох алгебраїчних рівнянь відносно $f(t), f(-t), f(t+2y_0)$, з якої знайти шукану функцію $f(t)$.

Якщо умова (2.48) не виконується, то можна для розв'язання рівняння (2.46) застосувати такі підстановки: $x=0, y=t;$ $x=t, y=2t;$ $x=t, y=-2t$. У цьому випадку отримуємо систему з трьох рівнянь відносно $f(t), f(-t), f(3t)$, і, якщо ця система має розв'язок, то шукана функція $f(t)$ буде знайдена.

3) Для розв'язання рівняння вигляду

$$H\big(f(x+y), f(x-y), f(x), f(y), x, y\big)=0 \tag{2.49}$$

можна послідовно застосувати наступні підстановки:

$$x=0,\ y=t;\ \ x=t,\ y=2t;\ \ x=2t,\ y=t;\ \ x=t,\ y=t.$$

В результаті отримаємо систему чотирьох алгебраїчних рівнянь, в яких невідомими будуть $f(t), f(-t), f(2t), f(3t)$. Якщо ця система розв'язна, то шукана функція $f(t)$ буде знайдена.

Приклад 30. Знайти усі функції $f: R \to R$, які за будь-яких x, y задовольняють рівняння

$$f(x+y)-2f(x-y)+f(x)-2f(y)=y-2.$$

Розв'язання. За допомогою вказаних вище підстановок в таке рівняння отримаємо наступну систему чотирьох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -f(t)-2f(-t)+a=t-2, \\ f(3t)-2f(-t)+f(t)-2f(2t)=2t-2, \\ f(3t)-4f(t)+f(2t)=t-2, \\ f(2t)-2a-f(t)=t-2, \end{cases}$$

де $a=f(0)$.

З цієї системи шляхом елементарних перетворень системи отримаємо $f(t)=t+\dfrac{7a-4}{3}$, або $f(t)=t+b$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що ця функція задовольняє заданому рівнянню лише за умови $b=1$:

$$f(x+y)-2f(x-y)+f(x)-2f(y)=$$
$$=x+y+b-2(x-y+b)+x+b-2y-2b=y-2b=\{b=1\}=y-2.$$

Отже, $f(t)=t+1$, при $f(0)=a=1$.

Відповідь: $f(x)=x+1$.

Вправи. Розв'язати функціональні рівняння.

1. $f(y)\sin x = f(x^2+y)-7y$.
2. $f(x)\cos y + f(\pi/2-x)\sin y = \sin(x+y)$.
3. $(x+y)f(x+y)=xf(x)+y^2$.
4. $f(x\cos y + y\sin x)=\sin^2(x)+\sin^2(y)$.
5. $f:[0,\infty)\to R$, $f(x^2+2x\sqrt{y}+y)=x+\sqrt{y}$.
6. $f(x+y^2-2y-3)=y^4-4y^3+2xy^2-3y^2-4xy+14y+x^2-7x+12$.
7. $f(x^2+y^2)=f(x)+y$.
8. $f(x^5+y^3)=(f(x))^4+(f(y))^4$.
9. $f(xf(y)+yf(z)+zf(x))=x-y+z$.

2.4.2. Спосіб відокремлення змінних

Метод заснований на простому й очевидному твердженні: якщо функціональне рівняння можна привести до рівності $P(x)=Q(y)$, яка виконується для всіх $x, y\in G\subseteq R$, то існує така стала C, що має місце співвідношення:

$$P(x)=Q(y)=C$$

для всіх $x, y\in G\subseteq R$.

Універсальних рекомендацій щодо застосування цього прийому розв’язування функціональних рівнянь немає. Процес відокремлення змінних і особливості його використання проілюструємо, розв'язуючи наступні задачі.

Приклад 31. Знайти усі функції $f: R_+ \to R_+$ (R_+ − множина всіх додатних чисел), такі що за будь-яких $x, y \in R$ виконується рівність

$$f(xy) = \left(f(x)\right)^{y^\alpha} \left(f(y)\right)^{x^\beta}, \tag{2.50}$$

де $\alpha \neq \beta$ − довільні дійсні числа.

Розв'язання. Враховуючи, що $f(xy) = f(yx)$, приходимо до рівності

$$\left(f(x)\right)^{y^\alpha} \left(f(y)\right)^{x^\beta} = \left(f(y)\right)^{x^\alpha} \left(f(x)\right)^{y^\beta}.$$

Виконавши логарифмування і тотожні перетворення, отримаємо таку рівність:

$$\left(y^\alpha - y^\beta\right)\ln f(x) = \left(x^\alpha - x^\beta\right)\ln f(y).$$

Якщо $x \neq 1, y \neq 1$, то $y^\alpha - y^\beta \neq 0$ і $x^\alpha - x^\beta \neq 0$, то

$$\frac{\ln f(x)}{\left(x^\alpha - x^\beta\right)} = \frac{\ln f(y)}{\left(y^\alpha - y^\beta\right)} = C,$$

де C − довільна стала. Звідси отримуємо:

$$\ln f(x) = C\left(x^\alpha - x^\beta\right) \Leftrightarrow f(x) = e^{C\left(x^\alpha - x^\beta\right)}.$$

Оскільки $e^{C\left(x^\alpha - x^\beta\right)} = \left(e^C\right)^{x^\alpha - x^\beta} = a^{x^\alpha - x^\beta}$, де $a = e^C$, то:

$$f(x) = a^{x^\alpha - x^\beta}, x \neq 1.$$

Якщо $x = y = 1$, то з рівності (2.50) маємо: $f(1) = f^2(1)$, звідки $f(1) = 1$ (з урахуванням того, що $f: R_+ \to R_+$).

Отже, $f(x) = a^{x^\alpha - x^\beta}, a > 0, x \in R$.

Відповідь: $f(x) = a^{x^\alpha - x^\beta}, a > 0, x \in R$

Приклад 32. Знайти усі визначені на множині дійсних чисел функції $f(x)$, які задовольняють рівність

$$f\left(xy\right)+2018=(y^2+1)f(x). \qquad (2.51)$$

Розв'язання. Нехай $x=y=1$, тоді $f(1)+2018=2f(1)$, звідки $f(1)=2018.$

Замінимо в заданому рівнянні x на y, а y на x, маємо:

$$f\left(yx\right)+2018=(x^2+1)f(y). \qquad (2.52)$$

Враховуючи, що $f\left(xy\right)=f\left(yx\right)$, з (2.51) і (2.52) випливає:

$$(y^2+1)f(x)=(x^2+1)f(y).$$

Відокремлюючи змінні, отримаємо таку рівність:

$$\frac{f(x)}{x^2+1}=\frac{f(y)}{y^2+1}=C,\ C - \text{стала.}$$

Отже, шукана функція має вигляд $f(x)=C(x^2+1)$. З того, що $f(1)=2018$, $C=1009$. Але безпосередня перевірка показує, що знайдена функція $f(x)=1009(x^2+1)$ не задовольняє рівняння (2.51):

$$1009(x^2y^2+1)+2018\neq 1009(x^2+1)(y^2+1).$$

Відповідь: таких функцій не існує.

Приклад 33. Знайти усі функції $f:R_+\to R_+$ (R_+ − множина всіх додатних чисел), такі що для будь-яких $x>0$, $y>0$ справджується рівність

$$x^2\left(f(x)+f(y)\right)=(x+y)f\left(yf(x)\right). \qquad (2.53)$$

Розв'язання. Спробуємо визначити значення шуканої функції при $x=1$, для чого у рівності (2.53) послідовно виконуємо три пари підстановок: $x=y=1$; $x=1,\ y=\dfrac{1}{f(1)}$; $x=\dfrac{1}{f(1)},\ y=1$. Після тотожних перетворень отримаємо $f(1)=1$.

Із заданої рівності можна дістати наступний ланцюжок рівностей:

$$\frac{f\left(yf(x)\right)}{x^2}=\frac{\left(f(x)+f(y)\right)}{(x+y)}=\frac{\left(f(y)+f(x)\right)}{(y+x)}=\frac{f\left(xf(y)\right)}{y^2},$$

з якого маємо

$$y^2 f\left(yf(x)\right)=x^2 f\left(xf(y)\right).$$

Звідси для довільного $x>0$ і $y=1$ дістанемо

$$f\left(f(x)\right)=x^2 f\left(x\right).$$

Запишемо рівність (2.53) для довільного $x>0$ і $y=1$ та виконаємо перетворення, враховуючи здобуті рівності:

$$x^2\left(f(x)+f(1)\right)=(x+1)f\left(f(x)\right)\Rightarrow x^2\left(f(x)+f(1)\right)=(x+1)x^2 f(x),$$

звідси

$$f(x)+f(1)=(x+1)f(x)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x}.$$

Перевірка показує, що функція $f(x)=\dfrac{1}{x}$ є розв'язком рівняння (2.53).

Відповідь: $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

В теорії функціональних рівнянь існує таке поняття, як продовження функції з однієї множини на другу. Розглянемо докладніше таке продовження, використовуючи розв'язок попередньої задачі.

Змінимо в **прикладі 33** область визначення і область значень шуканої функції. Нехай $D(g)=E(g)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ і функція $g(x)$ для будь-яких $x\neq 0$, $y\neq 0$ задовольняє рівність

$$x^2\left(g(x)+g(y)\right)=(x+y)g\left(yg(x)\right). \qquad (2.54)$$

Звідси випливає, що функція $g(x)$ − непарна, бо після заміни в (2.54) $y\to -x\neq 0$ маємо рівність $g(-x)=-g(x)$.

Зробимо в (2.54) заміну $x\to -x$:

$$x^2\left(g(-x)+g(y)\right)=(-x+y)g\left(yg(-x)\right).$$

Враховуючи непарність функції $g(x)$, запишемо еквівалентну рівність:

$$x^2\left(-g(x)+g(y)\right)=(x-y)g\left(yg(x)\right). \qquad (2.55)$$

Якщо $x\neq \pm y$, то з рівностей (2.54) і (2.55) дістанемо

$$\frac{x^2\left(g(x)+g(y)\right)}{x+y}=g\left(yg(x)\right)=\frac{x^2\left(g(y)-g(x)\right)}{x-y}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(g(x)+g(y)\right)=(x+y)\left(g(y)-g(x)\right)\Leftrightarrow xg(x)=yg(y).$$

Здобута рівність буде правильною для будь-яких $x\neq 0$, $y\neq 0$ лише тоді, коли $xg(x)=C, C$ − довільна стала. Підставляючи функцію $g(x)=\dfrac{C}{x}$ у рівність (2.54), визначимо сталу C:

$$x^2\left(\frac{C}{x}+\frac{C}{y}\right)=(x+y)C\frac{x}{Cy}\Rightarrow C=1.$$

Отже, функціональне рівняння (2.54) має єдиний розв'язок $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

Щоб використати рівняння (2.54) для розв'язання рівняння (2.53), досить утворити допоміжну функцію

$$g(x)=\begin{cases} f(x), x>0, \\ -f(x), x<0, \end{cases}$$

і розв'язати рівняння (2.54). Здобутий розв'язок на множині додатних чисел буде розв'язком рівняння (2.53).

Функція $g(x)$ називається *продовженням функції* $f(x)$ з множини усіх додатних чисел на множину чисел, відмінних від нуля.

Вправи. Знайти розв'язки функціональних рівнянь в класі неперервних функцій:

1. $f(x+y)-f(x-y)=4xy,\ x,y\in R.$
2. $f(x^y)=yf(x),\ x\in R_+, y\in R.$
3. $xf(y)+yf(x)+zf(x+y+z)=z^2+x(y+z)+y(x+z).$

2.5. Рівняння Коші. Метод Коші

Метод Коші використовують для відшукання неперервних розв'язків функціональних рівнянь з вільними змінними.

Як вже зазначалося, суть методу Коші полягає у тому, що пошук неперервної функції f, яка є розв'язком функціонального рівняння, ведеться поетапно. Заздалегідь припускається, що шукана функція справджує задану рівність, і за допомогою вдало підібраних підстановок ця функція визначається спочатку на множині натуральних чисел, потім – на множині цілих чисел і далі – на множині раціональних чисел. Після цього граничним переходом функцію визначають на множині ірраціональних чисел. Результатом пошуку є формула, яка визначає шукану функцію на заданій в задачі множині. Завершується розв'язання обов'язковою перевіркою того, що знайдена функція задовольняє саме рівняння.

Наведемо розв'язання функціонального рівняння Коші.

Задача 34. Знайти всі неперервні на R функції $f(x)$, які задовольняють умову

$$f(x+y)=f(x)+f(y). \tag{2.56}$$

Розв'язання. Легко бачити, що лінійні однорідні функції вигляду

$$f(x)=cx, c=const \tag{2.57}$$

задовольняють цю рівність:

$$c(x+y)=cx+cy. \tag{2.58}$$

Але питання постає саме в тому, чи будуть вони єдиними неперервними функціями, які задовольняють задане рівняння.

Для доведення цього факту припустимо, що деяка неперервна функція $f(x)$ задовольняє рівняння (2.56) і покажемо, що тоді вона може мати лише вигляд (2.57).

За допомогою математичної індукції легко узагальнити співвідношення (2.56) на випадок довільного числа доданків:

$$f(\underbrace{x+y+...+z}_{n})=f(x)+f(y)+...+f(z). \tag{2.59}$$

Дійсно, якщо допустити справедливість його для будь-якого числа $n\geq 2$ доданків, то воно буде правильним і для $(n+1)$-го доданку:

$$f(\underbrace{x+y+...+z}_{n}+u)=f(x)+f(y)+...+f(z)+f(u).$$

Припустимо в (2.59) $x=y=...=z$, отримаємо:

$$f\left(nx\right)=n\cdot f(x). \tag{2.60}$$

Замінюючи тут x на $\frac{1}{n}x$, дістанемо:

$$f\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{n}\cdot f(x).$$

Звідси, підставляючи mx ($m\in N$) замість x і використовуючи попередню рівність, отримаємо рівність

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m}{n}\cdot f(x). \tag{2.61}$$

Покладаючи в заданому рівнянні спочатку $x=y=0$, а потім $y=-x$, відповідно знайдемо:

$$f(0)=2f(0), \text{ тому } f(0)=0, \tag{2.62}$$

$$f(-x)=-f(x). \tag{2.63}$$

Тоді з (2.60) та (2.61) випливає, що

$$f(-nx)=-f(nx)=-n\cdot f(x), \tag{2.64}$$

і, взагалі

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}\cdot f(x). \tag{2.65}$$

Отримані рівняння (2.60) − (2.65) можуть бути об'єднані в рівність

$$f(rx)=r\cdot f(x),$$

яка виконується для будь-якого дійсного значення x, і будь-якого раціонального числа r.

Якщо покласти тут $x=1$ і позначити $f(1)$ через c, то отримаємо

$$f(r)=c\cdot r.$$

Отже, тим самим встановлено вигляд функції f, але лише для раціональних значень аргументу. При цьому було використано лише той факт, що функція задовольняє умову (2.56), не спираючись на її неперервність.

Нехай тепер α − будь-яке дійсне число. Тоді існує послідовність раціональних чисел $r_1, r_2,..., r_n,...$, така що $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\alpha$. Тоді

$f(r_n) = c \cdot r_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$, і враховуючи неперервність функції $f(x)$, після граничного переходу при $n \to \infty$ отримаємо:

$$f(\alpha) = c\alpha.$$

Отже, дійсно, шукана функція при всіх дійсних значеннях аргументу виражається формулою (2.57). Ця формула визначає загальний розв'язок равніння (2.56) в класі неперервних функцій.

2.6. Застосування методу Коші при розв'язанні функціональних рівнянь

Проілюструємо застосування методу Коші при розв’язуванні наступних прикладів.

Приклад 35. Знайти всі дійсні функції $f(x)$, які при довільних $x, y \in R$ задовольняють рівняння

$$f(x+y) = f(x) f(y). \tag{2.66}$$

Розв'язання. Знайдемо розв'язок рівняння в класі монотонних функцій, визначених на дійсній числовій прямій.

Покажемо спочатку, що функція, яка задовольняє задане рівняння і хоча б в одній точці набуває нульового значення, є тотожним нулем. Дійсно, нехай в довільній точці $x_0 \in R$ $f(x_0) = 0$. Тоді

$$f(x) = f((x - x_0) + x_0) = f(x - x_0) f(x_0) = 0.$$

Нехай тепер $f(x) \neq 0$. Зробивши в рівнянні (2.66) заміни: $x \to \frac{x}{2}, y \to \frac{x}{2}$, отримаємо:

$$f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0.$$

Отже, відмінний від нуля розв'язок рівняння (2.66) є функцією, що приймає строго додатні значення при всіх $x \in R$.

Прологарифмуємо задане рівняння у припущенні, що воно має розв'язок. Отримаємо наступну рівність:

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y).$$

Якщо $f(x)$ монотонна, то функція $g(x) = \ln f(x)$ є також монотонною. Перепишемо отриману вище рівність в такому вигляді:

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Це рівняння Коші. Його розв'язком в класі монотонних функцій є вираз $g(x) = Cx$. Тоді $\ln f(x) = Cx,$ а $f(x) = e^{Cx}$.

Перевіркою переконуємося, що при будь-якому C функція $f(x) = e^{Cx}$ – розв'язок заданого рівняння.

Відповідь. $f(x) \equiv 0;$ $f(x) = a^x$.

Слід зазначити, що аналогічно можна довести, що функція $f(x) = a^x$ є розв'язком рівняння (2.66) і в класі функцій, неперервних на всій дійсній числовій осі. Ключовим моментом в цьому випадку буде використання теореми про те, що композиція двох неперервних функцій є неперервною функцією.

Приклад 36. Знайти всі дійсні функції $f(x)$, які при довільних $x, y \in R \setminus \{0\}$ задовольняють рівняння

$$f(xy) = f(x) + f(y). \tag{2.67}$$

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок заданого рівняння в класі монотонних функцій, визначених при додатних значеннях аргумента. Нехай $x = e^t, g(t) = f(e^t)$. Звідси $t = \ln x, f(x) = g(\ln x)$. Оскільки функція $y = e^t$ є зростаючою, а функція $f(x)$ монотонна, то $g(t) = f(e^t)$ є також монотонною функцією.

Оскільки

$$g(t+u) = f(e^{t+u}) = f(e^t \cdot e^u) = f(e^t) + f(e^u) = g(t) + g(u),$$

то функція $g(t)$ адитивна. Вираз $g(t+u) = g(t) + g(u)$ − рівняння Коші. Тому його розв'язком буде функція $g(t) = Ct$, а функція $f(x) = C\ln x$ − розв'язок рівняння (2.67) за умови, що $f(x)$ є монотонною, а $x > 0$.

Припустимо, що рівняння (2.67) має розв'язок серед функцій, визначених при всіх $x \neq 0$. Тоді, покладаючи спочатку $x = y = t$, а потім $x = y = -t$, отримаємо:

$$f(t^2) = 2f(t),$$

$$f(t^2) = 2f(-t),$$

звідки випливає, що $f(t) = f(-t)$, тобто парні функції, визначені на множині $R\setminus\{0\}$, можуть задовольняти рівняння (2.67).
Якщо $f(x)$ є монотонною при $x > 0$, то, як було показано вище, $f(x) = C\ln x$ для додатних x. Якщо $x < 0$, то $f(x) = f(-x) = C\ln(-x)$. Отже, $f(x) = C\ln|x|$, $x \neq 0$.

Відповідь. $f(x) = C\ln|x|$, $x \neq 0$.

Нехай деяка неперервна функція $f(x)$ задовольняє рівняння (2.67). Покладаючи в ньому послідовно $y = x, y = x^2, \quad y = x^3, \ldots$ отримаємо окремі випадки:

$$f(x^2) = f(x \cdot x) = f(x) + f(x) = 2f(x),$$
$$f(x^3) = f(x \cdot x^2) = f(x) + f(x^2) = 3f(x) \ldots$$

Закономірність, яка спостерігається, дозволяє припустити, що має місце рівність

$$f(x^k) = kf(x). \tag{2.68}$$

За допомогою методу Коші доведемо, що будь-який розв'язок рівняння (2.67) у припущенні $x > 0, y > 0$ задовольняє рівність (2.68) при всіляких значеннях $k \in R_+$. Доведення здійснимо у три етапи.

1) Нехай $k \in N$. Застосуємо метод математичної індукції. Для $k = 1$ рівність (2.68) є очевидною. Припустимо, що вона справджується для деякого натурального k. Тоді для наступного натурального числа $k+1$ маємо:

$$f(x^{k+1}) = f(x \cdot x^k) = f(x) + f(x^k) = f(x) + kf(x) = (k+1)f(x),$$

тобто рівність (2.68) є правильною і для натурального числа ($k+1$), а, отже, і для будь-якого $k \in N$.

2) Нехай $k \in Q_+$, тобто $k = \dfrac{p}{q}$, $p, q \in N$. Тоді можна записати такі рівності:

$$f(x^p) = pf(x), \quad f\left(\left(x^{p/q}\right)^q\right) = qf\left(x^{p/q}\right),$$

звідки випливає, що $f\left(x^{p/q}\right) = \dfrac{p}{q} f(x)$, тобто рівність (2.68) справджується і при всіх $k \in Q_+$.

3) Нехай $k \in R_+$, а $k_1, k_2, ..., k_n, ...$ − послідовність додатних раціональних чисел, така що $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = k$. Тоді справедлива рівність

$$f(x^{k_n}) = k_n f(x).$$

Перейдемо в цій рівності до границі, і, враховуючи неперервність функції $f(x)$, отримаємо

$$f(x^k) = kf(x),$$

тобто рівність (2.68) справджується для всіх $k \in R_+$. Отже, якщо функція $f(x)$ є розв'язком рівняння (2.67), то вона задовольняє рівність (2.68) за будь-яких значень $k \in R_+$.

Приклад 37. Знайти всі неперервні функції $f(x)$, які задовольняють рівність

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}, \quad x, y \in R.$$

Розв'язання. Зведемо цей вираз до функціонального рівняння Коші (2.56) з неперервним розв'язком $f(x) = Cx$.

Нехай $y = 0$, тоді $f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{f(x)}{2} + \dfrac{f(0)}{2}$.

Оскільки $f(0)$ є сталою величиною, позначимо її через C_1 і отримаємо:

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2} + \frac{C_1}{2}.$$

Замінюючи в цьому рівнянні x значенням $x + y$, знайдемо:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)}{2} + \frac{C_1}{2}.$$

Звідси і із заданого рівняння випливає, що

$\dfrac{f(x)}{2} + \dfrac{f(y)}{2} = \dfrac{f(x+y)}{2} + \dfrac{C_1}{2}$, або $f(x) + f(y) = f(x+y) + C_1$.

Отже, розв'язком заданого функціонального рівняння є функція $f(x) = Cx + C_1$, де C, C_1 − довільні сталі.

Відповідь: $f(x) = Cx + C_1$.

2.7. Використання значень функції в деяких точках при розв'язанні функціональних рівнянь

Приклад 38. Знайти всі функції $f: R \to R$, які при будь-яких x, y задовольняють рівняння

$$f(x) \cdot f(y) - f(xy) = xy + x + y - 1.$$

Розв'язання. Надамо певні значення змінним.

1) Нехай $x = y = 1$. Тоді

$$f^2(1) - f(1) = 1 + 1 + 1 - 1 \text{ або } f^2(1) - f(1) - 2 = 0.$$

За теоремою Вієта маємо: $f(1) = 2$ або $f(1) = -1$.

2) Нехай тепер лише $y = 1$. Тоді

$$f(x) f(1) - f(x) = x + x + 1 - 1, \quad \text{або} \quad f(x)(f(1) - 1) = 2x.$$

а) якщо $f(1) = 2$, то $f(x) = 2x$;

б) якщо $f(1) = -1$, то $f(x) = -x$.

Зробимо перевірку:

а) $2x \cdot 2y - 2xy \neq xy + x + y - 1$;

б) $-x \cdot (-y) - xy \neq xy + x + y - 1$.

Жодна знайдена функція не є розв'язком заданого рівняння.

3) Нехай $x = y = 0$. Отримане за таких значень рівняння

$$f^2(0) - f(0) + 1 = 0$$

не є розв'язним у класі функцій дійсних змінних. Отже, робимо висновок, що задане функціональне рівняння не має розв'язків.

Відповідь. Розв'язків немає.

Приклад 39. Знайти всі такі функції, що

$$f(x^3 + y^3) = xf(x^2) + yf(y^2), \quad \forall x, y \in R$$

Розв'язання. Нехай $y = 0$, тоді

$$f(x^3) = xf(x^2), \quad \forall x \in R.$$

Отже, задане функціональне рівняння є еквівалентним такій системі рівнянь:

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y), \\ f(x^3) = xf(x^2). \end{cases}$$

Покладемо тепер $f(1) = a$. З одного боку є правильним, що

$$f((x+1)^3) = f(x^3+3x^2+3x+1) = f(x^3)+3f(x^2)+3f(x)+a =$$
$$= xf(x^2)+3f(x^2)+3f(x)+a.$$

З іншої сторони

$$f((x+1)^3) = (x+1)f((x+1)^2) = (x+1)(f(x^2)+2f(x)+a) =$$
$$= xf(x^2)+2xf(x)+ax+f(x^2)+2f(x)+a.$$

Із порівняння цих двох рівностей випливає, що

$$\cancel{xf(x^2)} + \underline{3f(x^2)} + \underline{\underline{3f(x)}} + \cancel{a} = \cancel{xf(x^2)} + 2xf(x) + ax + \underline{f(x^2)} + \underline{\underline{2f(x)}} + \cancel{a},$$

$$2f(x^2)+f(x) = 2xf(x)+ax,$$

$$f(x^2) = xf(x) + \frac{ax-f(x)}{2}.$$

Далі, використовуючи останнє рівняння, з одного боку отримуємо

$$f(x^6) = x^3 f(x^3) + \frac{ax^3 - f(x^3)}{2} = x^4 f(x^2) + \frac{ax^3 - xf(x^2)}{2},$$

а з іншого, враховуючи рівність $f(x^3) = xf(x^2)$, дістанемо:

$$f(x^6) = x^2 f(x^4) = x^2\left(x^2 f(x^2) + \frac{ax^2 - f(x^2)}{2}\right) = x^4 f(x^2) + \frac{ax^4 - x^2 f(x^2)}{2}.$$

І, отже,

$$ax^3 - xf(x^2) - ax^4 + x^2 f(x^2) = 0,$$

$$\left(ax^3 - xf(x^2)\right) - x\left(ax^3 - xf(x^2)\right) = 0,$$

$$x\left(ax^2 - f(x^2)\right)(x-1) = 0,$$

а це означає, що

$$f(x^2) = ax^2, \quad \forall x \notin \{0,1\}.$$

Звідси випливає , що $f(x) = ax, \quad \forall x \neq 1,\ x > 0.$

Можна переконатися, що при $x = 1$ ця рівність також виконується.

З того, що $f(x+y) = f(x) + f(y)$, випливає $f(0) = 0$ і $f(-x) = -f(x)$, отже, $f(x) = ax, \forall a$ − загальний розв’язок вихідного рівняння.

Відповідь. $f(x) = ax, \forall a$.

2.8. Методи математичного аналізу. Диференціювання

Пошук розв'язків функціонального рівняння у класі диференційовних функцій часто передбачає зведення функціонального рівняння до диференціального шляхом диференціювання за незалежною змінною.

Зауважимо, що слід розрізняти принципову відмінність, яка має місце при диференціюванні функціональних рівнянь, що не містять вільних змінних, і при диференціюванні функціональних рівнянь з вільними змінними. У першому випадку частіше за все можна прийти до нового функціонального рівняння, але відносно похідної $f'(x)$ невідомої функції заданого рівняння. Розв'язуючи його, спочатку знаходиться $f'(x)$, а потім функція $f(x)$ з точністю до довільної сталої.

Застосовуючи операцію диференціювання до функціонального рівняння з вільними змінними, отримують, як правило, диференціальне рівняння від тієї самої шуканої функції та її похідної.

Зрозуміло, що диференціюванням функціонального рівняння без вільних змінних намагаються останнє спростити.

Розглянемо, як приклад, таке рівняння:

$$f(x) = af\left(\frac{x}{a}\right) + p(x). \tag{2.69}$$

За допомогою диференціювання прийдемо до функціонального рівняння відносно похідної невідомої функції

$$f'(x) = f'\left(\frac{x}{a}\right) + \overline{p}(x),$$

для розв'язання якого може бути застосований, наприклад, метод граничного переходу.

Приклад 40. В класі всіх диференційовних функцій $f(x)$ знайти ті, які задовольняють рівняння

$$4f(x) = f(4x).$$

Розв'язання. Маємо окремий випадок рівняння (2.69), в якому $a = \dfrac{1}{4}$, $p(x) = 0$. Диференціювання обох частин рівності приводить до наступного функціонального рівняння:

$$f'(x) = f'(4x) \text{ або } f'(x) = f'\left(\frac{x}{4}\right),$$

де невідомою є функція $f'(x)$. Розв'язавши це рівняння методом граничного переходу, отримаємо розв'язок в класі неперервних функцій у вигляді $f'(x) = C_1$, C_1 − довільна стала. Безпосереднім інтегруванням останньої рівності знаходимо шукану функцію $f(x) = C_1 x + C_2$.

Із самого заданого рівняння випливає, що $f(0) = 0$, тому $C_2 = 0$. І, отже, $f(x) = Cx$.

Відповідь: $f(x) = Cx$.

У випадках, коли невідома в рівнянні функція залежить або від суми, або від різниці, або від добутку, або від частки незалежних змінних, тобто рівняння містить вирази $f(x+y)$, $f(x-y)$, $f(x \cdot y)$, $f(x/y)$, послідовне диференціювання стосовно кожної із двох незалежних змінних приводить до двох рівнянь, з яких виключається похідна від шуканої функції, котра містить обидві незалежні змінні, а рівність, що залишається при цьому приводить до диференціального рівняння відносно шуканої функції $f(x)$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння буде розв'язком вихідного функціонального рівняння при всіх або деяких значеннях довільних сталих, для відшукання яких іноді вдається отримати початкові умови з самого функціонального рівняння.

Проілюструємо цю ідею на прикладі розв'язання рівняння (2.66), але в класі диференційовних функцій.

Приклад 41. Знайти розв'язок рівняння

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad x, y \in R \tag{2.70}$$

в класі диференційовних функцій.

Розв'язання. Продиференціюємо рівняння спочатку стосовно x, а потім y. В результаті отримаємо два рівняння:

$$f'(x+y) = f'(x)f(y),$$

$$f'(x+y) = f(x)f'(y).$$

Оскільки ліві частини рівностей однакові, то дорівнюють одне одному і праві частини. Отже,

$$f'(x)f(y) = f(x)f'(y).$$

Припускаючи, що $f(x) \neq 0$, можна записати:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(y)}{f(y)} \quad \forall x, y \in R.$$

Тоді

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=C \Rightarrow f(x)=\bar{C}\left(e^{C}\right)^{x}=\bar{C}a^{x}.$$

Визначимо довільну сталу. З самого рівняння (2.70) при $x=y=0$ маємо $f(0)=f^{2}(0)$. Таке можливе або за умови $f(0)=1$, або при $f(0)=0$. У першому випадку отримуємо $f(x)=a^{x}$, у другому $f(x)\equiv 0$.

Тепер розглянемо приклади функціональних рівнянь, які містять вільні змінні і розв'язуються да допомогою операції диференціювання.

Приклад 42. Знайти всі дійсні диференційовні функції, які задовольняють рівняння

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)}. \tag{2.71}$$

Розв'язання. Нехай $f(x)$ задовольняє рівняння (2.71). Тоді

$$f(x)=\frac{f(x)+f(0)}{1-f(x)\cdot f(0)}, \text{ тобто } f(0)\left[f^{2}(x)+1\right]=0 \Rightarrow f(0)=0.$$

Продиференціюємо рівняння (2.71) за змінною y:

$$f'(x+y)=\frac{f'(y)\left[1-f(x)\cdot f(y)\right]+\left[f(x)+f(y)\right]f(x)f'(y)}{\left[1-f(x)\cdot f(y)\right]^{2}}.$$

Покладаючи в цій рівності $y=0$ і враховуючи, що $f(0)=0$, отримаємо таке диференціальне рівняння:

$$f'(x)=C\cdot\left(1+f^{2}(x)\right),$$

де $C=f'(0)$. Звідси маємо:

$$\int_{0}^{x}\frac{f'(x)dy}{1+f^{2}(x)}=\int_{0}^{x}Cdx, \Rightarrow \ arctgf(x)=Cx+C_{1},$$

а $f(x)=tg(Cx+C_{1})$.

Відповідь. $f(x)=tg(Cx+C_{1})$.

Приклад 43. Знайти всі функції $f(x)$, які є диференційовними в деякому околі нуля, тобто $f(x) \in C^1(O(0,\varepsilon))$, і задовольняють таким умовам:

$$\lim_{y\to 0+0}\left(\frac{f(x+y)}{f(x)}\right)^{1/y} = e^{f(-x)\sin x}, \quad f(0)=1.$$

Розв'язання. Зробимо декілька еквівалентних перетворень:

$$\lim_{y\to 0+0}\left(\frac{f(x+y)}{f(x)}\right)^{1/y} = \lim_{y\to 0+0} e^{\frac{1}{y}\ln\left(\frac{f(x+y)}{f(x)}\right)} =$$

$$= \lim_{y\to 0+0} e^{\left(\frac{\ln f(x+y)-\ln f(x)}{y}\right)} = e^{\lim\limits_{y\to 0+0}\left(\frac{\ln f(x+y)-\ln f(x)}{y}\right)} = e^{(\ln f(x))'}.$$

Отже, задане рівняння зводиться до такого диференціального рівняння:

$$(\ln f(x))' = f(-x)\sin x.$$

Використовуючи формулу для похідної складеної функції, отримаємо:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = f(-x)\sin x \quad \text{або} \quad f'(x) = f(x)f(-x)\sin x.$$

Замінюючи в останньому виразі x на $-x$, рівняння перетвориться на таке:

$$f'(-x) = -f(x)f(-x)\sin x.$$

З останніх двох рівностей маємо, що $f'(x) + f'(-x) = 0$, звідки випливає $f(x) - f(-x) = C$. Враховуючи умову $f(0)=1$, знаходимо, що $C=0$, а $f(x) = f(-x)$.

Отже, маємо диференціальне рівняння з відокремлювальними змінними:

$$f'(x) = f^2(x)\sin x.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є сімейство функцій вигляду

$$f(x) = \frac{1}{\cos x + C},$$

але початкову умову задовольняє тільки значення $C=0$. Отже, розв'язком заданого рівняння є функція $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

Відповідь: $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

Приклад 44. Знайти всі дійсні диференційовні функції, які задовольняють рівняння

$$f(x^y) = yf(x),\ x \in R_+,\ y \in R.$$

Розв'язання. Продиференціюємо задане рівняння за змінною y:

$$f'(x^y)x^y \cdot \ln x = f(x).$$

В цьому рівнянні покладемо $y = 1$ і знайдемо розв'язок отриманого диференціального рівняння з відокремлювальними змінними:

$$f'(x)x \cdot \ln x = f(x),$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x \cdot \ln x}, \Rightarrow \ln|f(x)| = \ln|C \ln x| \Rightarrow f(x) = C \ln x.$$

Відповідь: $f(x) = C \ln x$.

2.9. Інші способи. Комбінація різних методів

Приклад 45. Знайти функцію $f : R_+ \to R_+$, таку, що:

1) $f(xf(y)) = yf(x)\ \ \forall x, y \in R_+$;

2) $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Розв'язання. Нехай $x = 1$, тоді з умови 1 матимемо рівність $f(f(y)) = yq,\ q = f(1)$. Тому будемо шукати функцію $f(x)$ серед лінійних або дробово-лінійних функцій. Оскільки для лінійної функції $f(x) = ax + b$ маємо $f(x) \to \infty$ при $x \to +\infty$, то шукана не може бути лінійною. Отже,

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},\ ad \ne bc, c \ne 0. \qquad (2.72)$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів функції (2.72) скористаємося першою умовою задачі:

$$f(xf(y)) = \frac{a^2xy + bax + cby + bd}{acxy + cbx + cdy + d^2} = \frac{axy + by}{cx + d}. \qquad (2.73)$$

З (2.73) отримаємо таку рівність:

$$\left(a^2xy+bax+cby+bd\right)(cx+d)=\left(acxy+cbx+cdy+d^2\right)(axy+by);$$

або

$$\underline{a^2cx^2y}+abcx^2+\left(c^2b+a^2d\right)xy+(bcd+abd)x+bcdy+bd^2=$$

$$=a^2cx^2y^2+\underline{acbx^2y}+(acd+abc)xy^2+\left(ad^2+cb^2\right)xy+bcdy^2+bd^2y.$$

Прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях змінних:

$$x^2y^2: \quad a^2c=0;$$

$$x^2y: \quad a^2c-acb=0;$$

$$xy^2, x^2: \quad abc=0;$$

$$xy: \quad c^2b+a^2d-cb^2-ad^2=0;$$

$$y^2: \quad bcd=0;$$

$$x: \quad bcd+abd=0;$$

$$y: \quad bcd-bd^2=0;$$

$$1: \quad bd^2=0.$$

Відносно невідомих параметрів a, d, b, c запишемо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} a^2c=0; \\ ac(a-b)=0; \\ acb=0; \\ cb(c-b)+ad(a-d)=0; \\ bdc=0; \\ bd(c+a)=0; \\ bd(c-d)=0; \\ bd^2=0. \end{cases}$$

З першої рівності випливає, що $a=0$, бо $c\neq 0$. Тоді або $b=0$ (що неможливе), або $d=0; c=b$. У цьому випадку шукана функція матиме вигляд $f(x)=1/x$. Перевіркою переконуємося, що ця функція задовольняє усі умови задачі.

Відповідь: $f(x)=1/x$.

Приклад 46. Знайти усі періодичні функції $f(x)$, які задовольняють умову $f(x)-0,5f\left(x-\pi\right)=\sin x$ при довільних $x\in R$.

Розв'язання. Оскільки, як відомо, функція $y=\sin x$ має період $T=2\pi n,\quad n\in Z$, то цей період повинна мати функція $y=f(x)-0,5\,f\left(x-\pi\right)$. Отже, $f(x)=f(x+2\pi n)$ при всіх $x\in R$ і для будь-якого цілого n.

Пошук розв'язку заданого рівняння будемо здійснювати в такій послідовності: знайдемо період функції, і, використовуючи саме функціональне рівняння і знайдений період, отримаємо шукану функцію $f(x)$ в явному вигляді.

Запишемо такий ланцюжок рівностей:

$$f(x)=\frac{1}{2}f(x-\pi)+\sin x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}f(x-2\pi)+\sin(x-\pi)\right)+\sin x=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}f(x-2\pi)-\sin(x)\right)+\sin x=\frac{1}{2^2}f(x-2\pi)+\sin x\cdot\left(-\frac{1}{2}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2^3}f(x-3\pi)+\sin x\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right)=\ldots$$

Продовжуючи цей процес, прийдемо до висновку, що

$$f(x)=\frac{1}{2^{2n}}f(x-2\pi n)+\sin x\cdot\left(-\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{2^{2n-2}}-\ldots+1\right).$$

З урахуванням того, що $f(x)=f(x+2\pi n)$, використовуючи формули для суми членів геометричної прогресії, отримуємо:

$$f(x)\cdot\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)=\sin x\cdot\left(-\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{2^{2n-2}}-\ldots+1\right)=\sin x\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{2n}}}{1+\frac{1}{2}}.$$

Отже, $f(x)=\dfrac{2\sin x}{3}$.

Відповідь: $f(x)=\dfrac{2\sin x}{3}$.

Приклад 47. Знайти всі неперервні функції $f:R\to R$, які при всіх x,y задовольняють рівність

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+10xy. \qquad (2.74)$$

Розв’язання. Покладаючи послідовно в заданому рівнянні: $x=0$ і $y=0,\ y=x,\ y=2x,\ y=3x$, отримаємо:

$f(0)=0;$

$f(2x)=f(x)+f(x)+10xx=2f(x)+10x^2;$

$f(3x)=f(x)+f(2x)+10x\cdot 2x=f(x)+2f(x)+10x^2+2\cdot 10x^2=$

$\qquad =3f(x)+3\cdot 10x^2;$

$f(4x)=f(x)+f(3x)+10x\cdot 3x=f(x)+3f(x)+3\cdot 10x^2+3\cdot 10x^2=$

$\qquad =4f(x)+6\cdot 10x^2;$

$f(5x)=f(x)+f(4x)+10x\cdot 4x=f(x)+4f(x)+6\cdot 10x^2+4\cdot 10x^2=$

$\qquad =5f(x)+10\cdot 10x^2;$

і т.д.

Аналіз цих частинних випадків дає можливість припустити, що

$$f(nx)=nf(x)+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 10x^2. \qquad (2.75)$$

Справедливість цього припущення доведемо методом математичної індукції.

При $n=1$ з (2.74) маємо:

$$f(x+0)=f(x)+f(0)+0\cdot x=f(x),$$

а рівність (2.75) набуває вигляду $f(1\cdot x)=1\cdot f(x)$.

Припустимо справедливість рівності (2.75) для будь-якого натурального $n=k$ і покажемо, що вона справджується і для $n=k+1$ при будь-якому $x\in R$:

$$f((k+1)x)=f(kx+x)=f(x)+f(kx)+10\cdot kx^2=$$

$$=f(x)+kf(x)+\frac{k(k-1)}{2}\cdot 10x^2=(k+1)f(x)+\frac{(k+1)k}{2}\cdot 10x^2,$$

що і потрібно було довести.

Із (2.75) при $x=1$ маємо :

$$f(n)=nf(1)+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 10.$$

Позначимо $f(1)=A$. Тоді для $x\in N$ маємо розв'язки функціонального рівняння, що записуються у такий спосіб:

$$f(x)=Ax+\frac{x(x-1)}{2}\cdot 10. \qquad (2.76)$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функція (2.76) є розв'язком заданого рівняння при будь-якому A:

$$f(x+y) = A(x+y) + \frac{(x+y)(x+y-1)}{2}\cdot 10 =$$
$$= Ax + \frac{x(x-1)}{2}\cdot 10 + Ay + \frac{y(y-1)}{2}\cdot 10 + 10xy =$$
$$= f(x) + f(y) + 10xy.$$

Покажемо, що функція (2.76) є розв'язком заданого рівняння і при будь-якому $x \in Q$.

Замінюючи в (2.76) x на $\frac{1}{n}x$, отримаємо:

$$f\left(\frac{1}{n}x\right) = A\left(\frac{1}{n}x\right) + \frac{\left(\frac{1}{n}x\right)\left(\frac{1}{n}x-1\right)}{2}\cdot 10.$$

Якщо підставити mx (m − натуральне число) замість x і використати попередню рівність, то прийдемо до такого співвідношення:

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = A\left(\frac{m}{n}x\right) + \frac{\left(\frac{m}{n}x\right)\left(\frac{m}{n}x-1\right)}{2}\cdot 10. \tag{2.77}$$

Якщо ж прийняти $y = -x$, то з урахуванням того, що $f(0) = 0$, із (2.74) знаходимо:

$$f(0) = f(x) + f(-x) - 10x^2 \text{ або}$$
$$f(-x) = 10x^2 - f(x). \tag{2.78}$$

Тоді з (2.78) та (2.77) легко вивести:

$$f(-nx) = 10n^2x^2 - Anx - \frac{nx(nx-1)}{2}\cdot 10 = -Anx + \frac{2n^2x^2 - nx(nx-1)}{2}\cdot 10 =$$
$$= -Anx + \frac{n^2x^2 + nx}{2}\cdot 10 = -Anx + \frac{-nx(-nx-1)}{2}\cdot 10 =$$
$$= A(-nx) + \frac{(-nx)((-nx)-1)}{2}\cdot 10.$$

Аналогічно, взагалі

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=A\left(-\frac{m}{n}x\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{m}{n}x\right)\left(-\frac{m}{n}x-1\right)\cdot 10.$$

Отримані співвідношення можуть бути об'єднані в рівності

$$f(rx)=Arx+\frac{rx(rx-1)}{2}\cdot 10,$$

яка виконується для будь-якого дійсного значення x, і яке б не було раціональне число r. Якщо покласти тут $x=1$, то отримаємо

$$f(r)=Ar+\frac{r(r-1)}{2}\cdot 10.$$

Отже, тим самим встановлено вигляд функції f, але лише для раціональних значень аргументу. При цьому було використано лише той факт, що функція задовольняє умову (2.74), і не спираючись на її неперервність.

Нехай тепер ρ − будь-яке ірраціональне значення аргументу. Побудуємо послідовність раціональних чисел $r_1, r_2, ..., r_n, ...$ таку, що

$$\lim_{n\to\infty} r_n=\rho.$$

На елементах цієї послідовності

$$f(r_n)=Ar_n+\frac{r_n(r_n-1)}{2}\cdot 10,\quad n=1,2,3,...$$

Перейдемо тут до границі при $n\to\infty$. Враховуючи неперервність функції f, маємо:

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n)=f(\rho),$$

тому остаточно можна записати:

$$f(\rho)=A\rho+\frac{\rho(\rho-1)}{2}\cdot 10.$$

Отже, шукана функція при усіх дійсних значеннях аргументу виражається формулою (2.76). Перевірка показує, що ця формула визначає загальний розв'язок рівняння (2.74) в класі неперервних функцій.

Відповідь: $f(x) = Ax + \dfrac{x(x-1)}{2} \cdot 10,\ A$ − довільна стала.

Приклад 48. Знайти всі функції $f(x)$, визначені на множині дійсних чисел, які задовольняють умову $\left(f(x)\right)^2 = f(x)$.

Розв'язання. Нехай x_0 − деяке дійсне число. Тоді $\left(f(x_0)\right)^2 = f(x_0)$ або $\left(f(x_0) - 1\right) f(x_0) = 0$. Звідси $f(x_0) = 0$ або $f(x_0) = 1$. З цього видно, що у випадку, коли шукані функції $f(x)$ існують, то їхнім графікам мають належати точки $(x_0, 0)$ або $(x_0, 1)$. Зрозуміло, що такими функціями будуть функції $f(x) = 0$ і $f(x) = 1$, але не лише вони.

Наприклад, серед розв'язків заданого рівняння будуть такі функції:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 3, \\ 1, \text{ якщо } x > 3 \end{cases}; \quad f(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \ - \text{ раціональне}, \\ 0, \text{ якщо } x \ - \text{ ірраціональне}. \end{cases}$$

Отже, можна сконструювати безліч функцій-розв'язків даного функціонального рівняння.

Відповідь: $f(x)$ − будь-яка визначена на R функція, графік якої належить об’єднанню двох прямих $y = 0$ і $y = 1$.

Приклад 49. Знайти функцію $f: R \to R$, яка задовольняє рівняння

$$f(x) = \int_0^1 x(1 + xy) f(y) dy + \sqrt{x}.$$

Розв'язання. Праву частину цього рівняння можна зобразити у вигляді суми $x \int_0^1 f(y) dy + x^2 \int_0^1 y f(y) dy + \sqrt{x}$. Коефіцієнти при x та x^2 − це деякі константи, а, отже, можна записати $f(x) = ax^2 + bx + \sqrt{x}$. Тоді:

$$a = \int_0^1 y f(y) dy = \int_0^1 y(ay^2 + by + \sqrt{y}) dy = a/4 + b/3 + 2/5;$$

$$b=\int_0^1\left(ay^2+by+\sqrt{y}\right)dy=a/3+b/2+2/3.$$

Звідси маємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно параметрів a, b:

$$\begin{cases}\dfrac{3}{4}a-\dfrac{b}{3}=\dfrac{2}{5},\\ \dfrac{b}{2}-\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

Розв'язавши її, знаходимо, що $a=1,6; b=2,4.$

Відповідь: $f(x)=1,6x^2+2,4x+\sqrt{x}$.

Приклад 50. Знайти усі неперервні функції $f:R\to R$, які задовольняють рівняння

$$3f\left(2x+1\right)=f(x)+5x.$$

Розв'язання. Спробуємо знайти розв'язок $\overline{f}(x)$ цього рівняння у класі лінійних функцій, застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів. Нехай $\overline{f}(x)=ax+b.$ Для визначення невідомих параметрів a, b отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases}5a=5,\\ 3a+3b=b.\end{cases}$$

Звідси $a=1, b=-3/2$.

Отже, $\overline{f}(x)=x-3/2$. Покажемо, що цей розв'язок єдиний.

Припустимо, що існує ще один розв'язок заданого рівняння − функція $f(x)$. Нехай $g(x)=f(x)-\overline{f}(x)$. Тоді $g(x)\in C(R)$ і задовольняє рівняння

$$3g\left(2x+1\right)=g(x).$$

Замінимо в цьому рівнянні x на $(x-1)/2$. В отриманому рівнянні

$$g(x)=\frac{1}{3}g\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

знову ж таки зробимо заміну x на $(x-1)/2$:

$$g(\frac{x-1}{2})=\frac{1}{3}g\left(\frac{x-3}{4}\right)\text{ і т.д.}$$

Після n таких замін отримаємо

$$g(x)=\frac{1}{3^n}g\left(\frac{x-2^n+1}{2^n}\right),\quad n=1,2,\ldots$$

В силу неперервності функції $g(x)$ для будь-якого x можна встановити, що

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{x-2^n+1}{2^n}\right)=g(-1),\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}g\left(\frac{x-2^n+1}{2^n}\right)=0.$$

Тому $g(x)\equiv 0.$ Отже у заданого рівняння є лише один розв'язок $\overline{f}(x)$ в класі неперервних функцій.

Відповідь: $f(x)=x-3/2.$

Приклад 51. Знайти всі диференційовні функції, які задовольняють функціональному рівнянню

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}.$$

Розв'язання. Задане рівняння розглядалося в одному із попередніх розділів з точки зору застосування методів диференціювання при розв'язуванні функціональних рівнянь. Розглянемо тут інший спосіб зведення функціонального рівняння до диференціального.

Оскільки $f(x)=\dfrac{f(x)+f(0)}{1-f(x)f(0)}$, то звідси маємо $(1+f^2(x))f(0)=0$ і $f(0)=0$.

Розглянемо таке відношення:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(\Delta x)}.$$

Отже, при $\Delta x\to 0$ отримуємо $f(\Delta x)\to 0$, $\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}\to f'(0)=C_1$ і $f'(x)=C_1(1+f^2(x))$. Звідси випливає, що

$$\int_0^x\frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)}=\int_0^x C_1dx,\ \text{тобто}\ \operatorname{arctg} f(x)=C_1x+C_2.$$

Враховуючи умову $f(0)=0$, знайдемо $f(x)=\operatorname{tg}C_1x$.

Відповідь: $f(x)=\operatorname{tg}C_1x$.

Приклад 52. Нехай $a \neq \pm 1$ − довільне дійсне число. Знайти функцію $f(x)$, визначену при $x \neq 1$, яка задовольняє рівняння $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = af(x) + q(x)$, де $q(x)$ − задана, визначена при $x \neq 1$ функція.

Розв'язання. Позначимо $y = \frac{x}{x-1}$, тоді $x = \frac{y}{y-1}$. Тоді задане рівняння набуде такого вигляду:

$$f(y) = af\left(\frac{y}{y-1}\right) + q\left(\frac{y}{y-1}\right) = a(af(y) + q(y)) + q\left(\frac{y}{y-1}\right) =$$

$$= a^2 f(y) + aq(y) + q\left(\frac{y}{y-1}\right).$$

Звідси випливає, що $f(x) = \dfrac{aq(x) + q\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1-a^2}$.

Перевіркою переконуємося, що ця функція задовольняє заданому рівнянню за умови $x \neq 1$.

Відповідь: $f(x) = \dfrac{aq(x) + q\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1-a^2}$.

Приклад 53. Знайти усі визначені на множині додатних дійсних чисел функції $f(x)$ такі, що для будь-яких $x > 0$ виконується нерівність $f(x) > 0$ і при всіх $x > 0,\ y > 0$ справджується рівність

$$f\left(xf(y)\right) + f(x) + f(y) = f(x+y).$$

Розв'язання. Запишемо такий ланцюжок рівностей:

$$f\left(xf(y)\right) + f(x) + f(y) = f(x+y) = f(y+x) = f\left(yf(x)\right) + f(y) + f(x).$$

Отже, маємо

$$f\left(xf(y)\right) = f\left(yf(x)\right). \tag{2.79}$$

З умови задачі випливає, що нерівність $f(x+y) > f(x)$ виконується для всіх додатних x, y, а отже, функція зростає на множині додатних чисел. Тому отримана вище рівність (2.79) виконується лише тоді, коли

$$xf(y) = yf(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y} = C, \ C \text{ − деяка стала.}$$

Звідси маємо $f(x)=Cx$. Перевіримо, чи дійсно ця функція задовольняє умови задачі. Оскільки

$$f\left(xf(y)\right) + f(x) + f(y) = f(xCy) + Cx + Cy = C^2xy + Cx + Cy,$$

а, за властивістю лінійної функції

$$f(x+y) = C(x+y) = Cx + Cy,$$

то задана рівність виконуватися не може, бо $C^2xy > 0$. Отже, не існує функцій, які б задовольняли всі умови задачі.

Відповідь: такої функції не існує.

Приклад 54. Якщо функція $f: R \to R$ є строго монотонною, то що можна сказати про напрям зміни функції $f(f(x))$?

Розв'язання. Функція $f(f(x))$ є строго зростаючою. Продемонструвати це графічно і аналітично. Нехай x_1, x_2 − довільні значення змінної, такі, що $x_1 < x_2$.

Припустимо, що $f(x)$ − строго зростаюча функція, тоді $f(x_1) < f(x_2)$, а отже, й $f(f(x_1)) < f(f(x_2))$, що свідчить про строге зростання функції $y = f(f(x))$.

Якщо $f(x)$ − строго спадна функція, то $f(x_1) > f(x_2)$, а $f(f(x_1)) < f(f(x_2))$, що знову ж таки визначає строге зростання функції $y = f(f(x))$.

Продемонструємо цей факт графічно. На рис. 2.1 зображені графіки функцій $y = f(x)$ і $y = f(f(x))$ у випадку строго зростаючої функції (для спадної функції $y = f(x)$ рекомендуємо читачеві побудувати графік функції $y = f(f(x))$ самостійно).

Нагадаємо, як визначається точка $M(\overline{x}, \overline{y})$ графіка функції $y = f(f(x))$. На прямій $y = x$ для значення змінної $\overline{x}$ позначимо величину $f(\overline{x})$, відобразимо це значення на вісь Ox, на графіку функції $y = f(x)$ знаходимо значення $\overline{y} = f(f(\overline{x}))$ і ставимо його у відповідність точці $\overline{x}$.

Відповідь. Функція $f(f(x))$ є стого зростаючою.

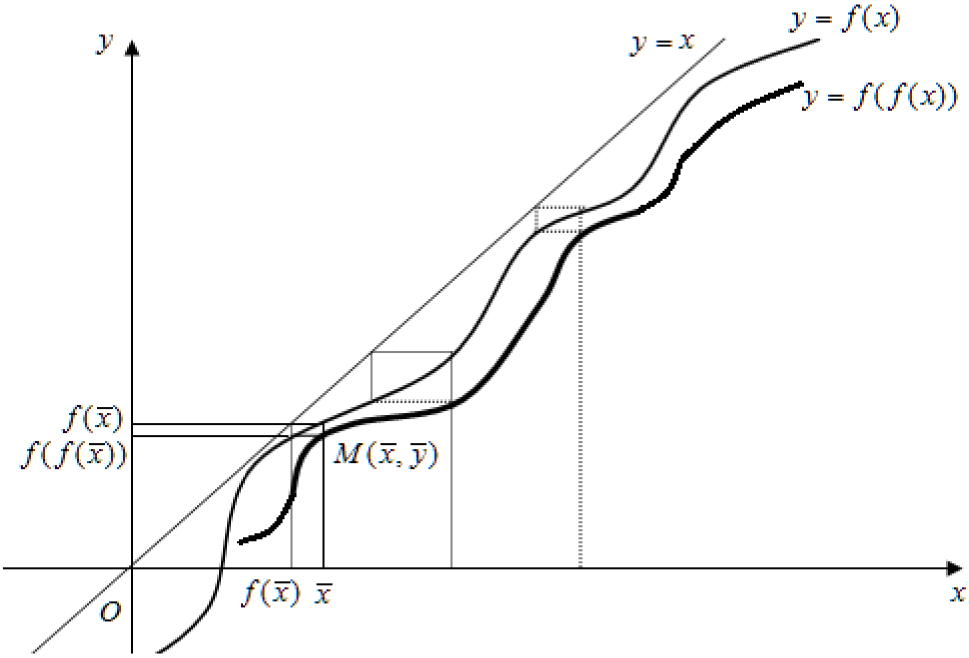

Рис. 2.1. Побудова графіка функції $y = f(f(x))$

Приклад 55. Чи існує така неперервна функція $f: R \to R$, що $f(f(x))$ є строго спадною?

Розв'язання. Ні, не існує. Дивись приклад 54.

Відповідь. Ні, не існує.

Приклад 56. Неперервна функція $f: R \to R$, така, що $f(f(x)) = -x^2$ для всіх дійсних x. Довести, що $f(x) \le 0$ для всіх дійсних x.

Розв'язання. У кожній з областей $x \ge 0$, $x \le 0$ функція $f(x)$ взаємно однозначна і за властивістю неперервної функції є строго монотонною. При цьому характер монотонності різний на двох півосях. Оскільки $f(f(x))$ необмежена знизу, то це правильно і для $f(x)$. Отже, $f(x)$ зростає при $x \le 0$ і спадає при $x \ge 0$, а тому має максимум при $x = 0$. Але, $f(0) = f(-0^2) = f(f(f(0))) = -f^2(0) \le 0$. Тому $f(x) \le 0$ для всіх дійсних x.

Приклад 57. Чи існує така неперервна функція $f: R \to R$, що $f(f(x)) = -x^2$?

Розв'язання. Враховуючи тип функції у правій частині рівняння, припустимо, що шукана функція має такий вигляд: $f(x) = -|x|^a$. Тоді, $f(f(x)) = -\left|-|x|^a\right|^a = -|x|^{a\cdot a} = -|x|^{a^2}$. Скориставшись очевидною рівністю $-x^2 = -|x|^2$, і прирівнюючи $-|x|^{a^2} = -x^2$, отримаємо $a = \sqrt{2}$. Отже, $f(x) = -|x|^{\sqrt{2}}$.

Відповідь: Так, існує. $f(x) = -|x|^{\sqrt{2}}$.

Приклад 58. Чи існує така неперервна функція $f : R \to R$, що $f(f(x)) = 1 - x^3$?

Розв'язання. Ні, не існує. Із умови задачі випливає, що функція $f(f(x))$ є строго спадною, але тоді $f(x)$ має бути строго зростаючою, а це неможливо, що випливає з результату розв’язання прикладу 54.

Приклад 59. Чи існує така неперервна функція $f : R \to R$, що $f(f(x)) = x^2 - 1/2$ для всіх дійсних x?

Розв'язання. Ні, не існує. Якщо припустити, що така функція існує, то у кожній з областей $x \le 0$, $x \ge 0$ функція $f(x)$ взаємно однозначна і за властивістю неперервної функції є строго монотонною. При цьому знак монотонності різний на двох півосях, а саме, за результатами розв'язання прикладу 56, $f(x)$ спадає при $x \le 0$ і зростає при $x \ge 0$. Тоді, в силу властивості неперервної функції при $x > 0$ функція зростає необмежено. Нехай $f(0) = a$. Тоді a − найменше значення $f(x)$, $a \ne 0$, і тому $-1/2 = f(a) > f(0) = a$. Отже, існує таке $b > 0$, що $f(b) = -1/2$. Але $b = f(c)$ для деякого $c \ne 0$, звідси випливає, що $c^2 - 1/2 = f(f(c)) = -1/2$, тобто $c = 0$. Отримали протиріччя, і, отже, не існує неперервної функції $f : R \to R$, що $f(f(x)) = x^2 - 1/2$ для всіх дійсних x.

Відповідь. Ні, не існує.

Опишемо загальну схему розв'язання рівнянь вигляду $f(f(\ldots f(x)\ldots) = x$.

Розглянемо рівняння

$$f_n(x) = x, \qquad (2.80)$$

де $f_n(x)$ – n-кратна суперпозиція функції $f(x)$, $n \geq 3$.

Разом з виразом (2.80) розглянемо рівняння

$$f(x) = x, \qquad (2.81)$$

$$f(f(x)) = x. \qquad (2.82)$$

Наведемо деякі твердження, які пов’язують ці рівняння.

1. Рівняння (2.80) є наслідком рівняння (2.81).
2. Якщо або $f(x) \leq x$ при всіх x із області допустимих значень рівняння (2.80), або $f(x) \geq x$ при всіх x із області допустимих значень виразу (2.80), то рівняння (2.80) и (2.81) рівносильні.
3. Якщо функція $f(x)$ при деякому a задовольняє одну із наступних умов:

$$\text{а) } \begin{cases} f(x) \leq x, \ x \leq a, \\ f(x) \geq x, \ x > a, \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} f(x) \geq x, \ x < a, \\ f(a) = a, \\ a \leq f(x) \leq x, \ x > a, \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x \leq f(x) \leq a, \ x < a, \\ f(a) = a, \\ f(x) \leq x, \ x > a, \end{cases}$$

то рівняння (2.80) и (2.81) рівносильні.

4. Якщо функція $f(x)$ є зростаючою, то рівняння (2.80) и (2.81) рівносильні.
5. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку і рівняння (2.81) не має розв'язків, то і вираз (2.80) їх також не має.
6. Нехай функція $f(x)$ спадає. Якщо n – непарне число, то рівняння (2.80) рівносильне виразу (2.81). Якщо n – парне число, то – рівнянню (2.82).
7. Нехай функція $f(x)$ визначена і диференційовна на інтервалі (a,b). Якщо $|f'(x)| < 1$ при будь-яких $x \in (a,b)$, або ж $|f'(x)| > 1$ при будь-яких $x \in (a,b)$, то рівняння (2.80) і (2.81) – рівносильні.

З рівнянням (2.80) природним образом пов’язана система рівнянь

$$\begin{cases} f(x_1) \le x_2, \\ f(x_2) \le x_3, \\ \ldots \\ f(x_n) \le x_1 \end{cases} \qquad (2.83)$$

і рівняння

$$f(x_{n-1}) \le f^{-1}(x),$$

де $f^{-1}(x)$ – функція, обірнена до $f(x)$.

Приклад 60. Розв'язати рівняння

$$1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{\cfrac{\ldots}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{x}}}}} = x.$$

Розв'язання. Поклавши $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x}$, помічаємо, що це рівняння вигляду (2.80). Оскільки суперпозиція двох дробово-лінійних функцій є дробово-лінійною функцією, то $f_n(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, де a, b, c, d – деякі числа. При цьому може виявитися, що функція тотожно дорівнює x. В цьому випадку будь-яке число буде розв'язком заданого рівняння. Ясно, що $x = 1$ не є розв'язком заданого рівняння ($f_n(1) > 1$), тому $f_n(x) \ne x$. Звідси випливає, що розв'язання заданого рівняння зводиться до розв'язання квадратного або лінійного рівняння, і, отже, не може мати більше двох розв'язків. Рівняння (2.81) при цьому запишеться у вигляді $1 + \dfrac{3}{x} = x$. За твердженням 1 його розв'язками будуть $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Відповідь. $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Приклад 61. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sin x_1 \le x_2, \\ \sin x_2 \le x_3, \\ ... \\ \sin x_n \le x_1. \end{cases}$$

Розв'язання. Система має вигляд (2.83), причому $f(x) = \sin x$. Тому, якщо упорядкований набір $(x_1, x_2, ..., x_n)$ – розв'язок системи, $|x_i| \le 1, i = 1, 2, ..., n$, і $D(f) = [-1,1]$, то функція функція $f(x) = \sin x$ буде зростаючою і, отже, за твердженням 4 рівняння (2.80) рівносильне рівнянню (2.81), тобто

$$\sin x = x. \qquad (2.84)$$

Цілком зрозуміло, що $x = 0$ – розв'язок рівняння (2.84). Оскільки функція $\varphi(x) = x - \sin x$ – строго зростаюча ($\varphi'(x) = 1 - \cos x$), то других розв'язків воно не може мати. Звідси випливає, що задана система рівнянь має єдиний розв'язок – $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Відповідь. $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Іноді буває неможливо знайти підстановку, яка б значно спрощувала вигляд рівняння. Однак, якщо зафіксувати одну з вільних змінних, деякі члени рівняння можуть також виявитися фіксованими. Для них можна ввести зручні позначення і використовувати при розв'язанні як звичайні константи. Якщо ці константи увійдуть у відповідь, перевірка покаже, які їх значення є допустимими.

Приклад 62. Знайти всі такі функції, що

$$f(x + f(y)) = xy \quad \forall x, y \in R.$$

Розв'язання. Підстановка $y = 0$ приводить до $f(x + f(0)) = 0$. Позначимо $f(0) = c$, тоді $f(x + c) = 0$. Зробимо заміну $t = x + c$ і отримаємо $f(t) = 0$. Але така функція, вочевидь, не задовольняє вихідному рівнянню, тому заключаємо, що рівняння не має розв'язків.

Відповідь. Розв'язків немає.

Приклад 63. Знайти всі такі функції, що

$$f(x + f(y)) = x + y \quad \forall x, y \in R.$$

Розв'язання. Підстановка $y = 0$ приводить до $f(x + f(0)) = x$. Позначимо $f(0) = c$, тоді $f(x + c) = x$. Зробимо заміну $t = x + c$ і отримаємо $f(t)=t-c$. Залишилось лише визначити сталу c. Для цього підставимо знайдену функцію у вихідне рівняння (разом з цим зробимо перевірку):

$$f(x+f(y))=x+f(y)-c=x+y-c-c=x+y-2c.$$

Звідси випливає, що вихідне рівняння справджується лише за умови, коли c = 0. Тому, розв'язком рівняння є функція $f(x)=x$.

Відповідь. $f(x)=x$.

III. ГРАФІЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Приклад 64. Розв'язати функціональне рівняння

$$f(x)=f(f(x)) \tag{3.1}$$

в класі неперервних функцій на числовій осі.

Розв'язання. Спочатку нагадаємо, як отримати графічно точку з ординатою $f(f(x))$, припускаючи відомим розміщення графіка функції $y=x$ − ординати точки M_3 (рис. 3.1).

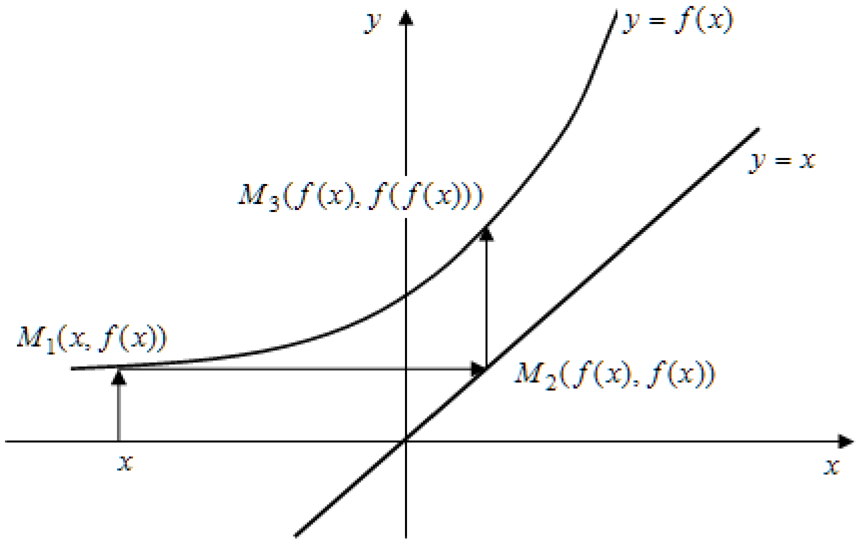

Рис. 3.1. Образ ординати точки графіка на прямій $y=x$

На рис. 3.1 ординати точок M_2 та M_3 за умовою мають збігатися, а оскільки збігаються їхні абсциси, то M_2 = M_3. Отже, кожній точці графіка $y=f(x)$, що не лежить на прямій $y=x$, відповідає точка графіка, яка належить прямій $y=x$ і має таку саму ординату.

З цього можна зробити такий висновок: якщо функція $y = f(x)$ неперервна на всій числовій осі і задовольняє рівняння (3.1), то частинами її графіка обов'язково є частини прямої $y = x$ (або вся пряма, або її промінь, або її відрізок, або її точка), а сам графік має один з п'яти виглядів, зображених на рис. 3.2.

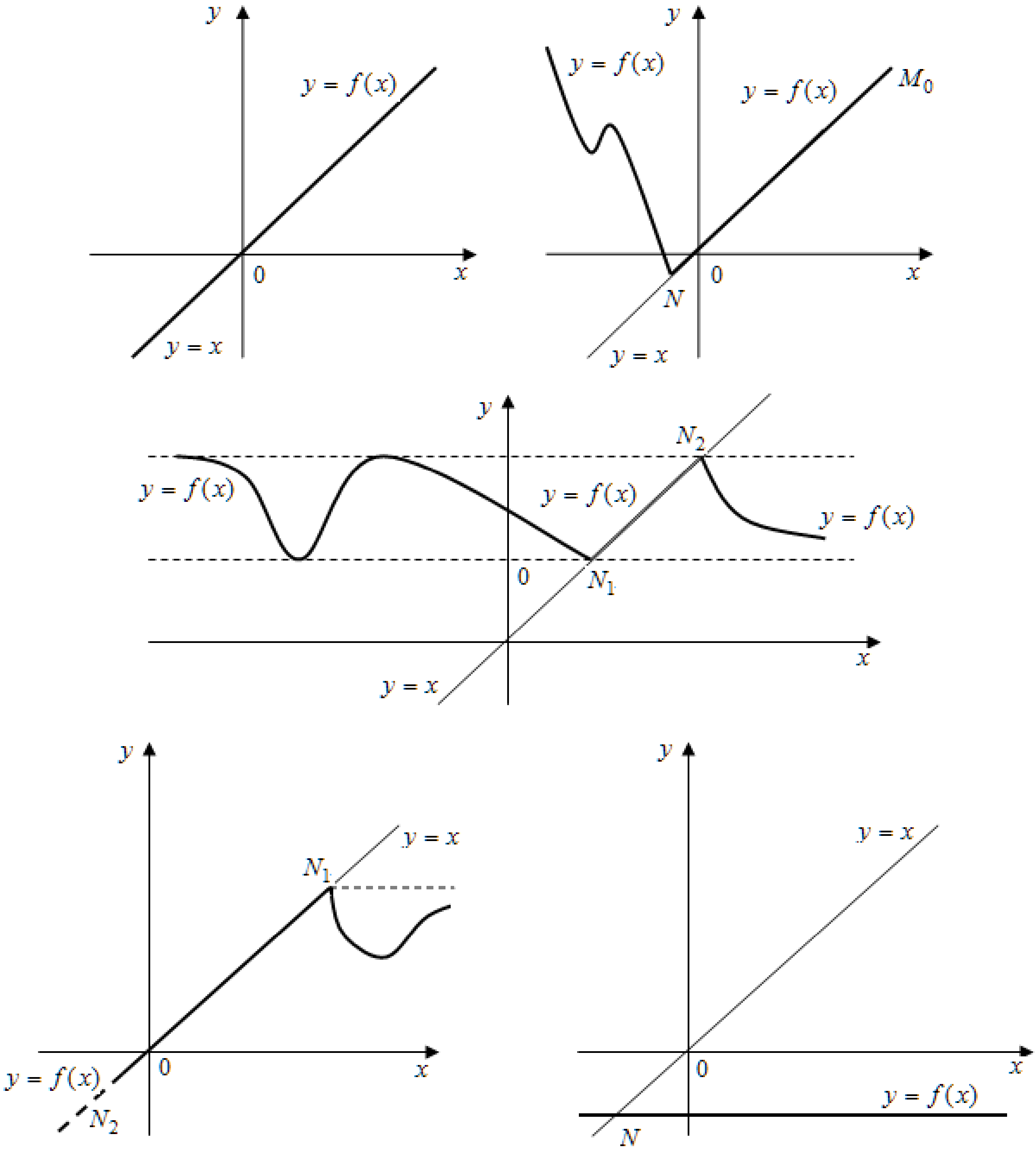

Рис. 3.2. Частини прямої $y = x$, що відповідають графіку $y = f(x)$

Для обґрунтування цього висновку оберемо дві точки графіка функції $y = f(x)$, які належать прямій $y = x$: $N_1(x_1, f(x_1))$ і $N_2(x_2, f(x_2))$. За теоремою Больцано – Коші значення функції $y = f(x)$ в силу її неперервності заповнюють на осі Oy весь відрізок з кінцями $f(x_1)$ та $f(x_2)$. А цьому відрізку на прямій $y = x$ будуть відповідати відрізок N_1N_2 графіка $y = f(x)$ (рис. 3.3).

Отже, на прямій $y = x$ графіку функції $y = f(x)$ належить множина, яка містить або тільки одну точку, або, поряд з довільними двома різними точками, й весь відрізок, що їх з'єднує. Слід звернути увагу на те, що в силу неперервності функції $y = f(x)$ на всій числовій осі множині, що розглядається, належать її граничні точки.

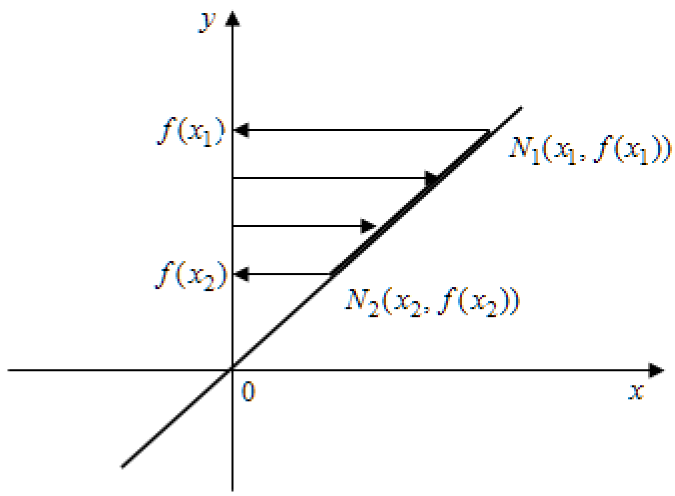

Рис. 3.3. Відповідність відрізка прямої $y = x$ частині графіку $y = f(x)$

Частина графіка $y = f(x)$, що лежить на прямій $y = x$, визначає верхню і нижню границі для частин графіка, які не лежать на прямій (рис. 3.3). Для решти ці частини довільні − настільки, наскільки можуть бути довільними частини графіка функції, неперервної на всій числовій осі, оскільки для будь-якої неперервної функції, графік якої належить до одного з п'яти зображених на рис. 3.2 виглядів, справджується рівність (3.1).

Аналогічні міркування можна застосувати і до наступного узагальнення розглянутого функціонального рівняння

$$f(x) = f(g(f(x))),$$

де функція $g(x)$ − неперервна, строго монотонна на всій числовій осі.

Приклад 65. Розв'язати графічно функіональне рівняння

$$\psi(x) = f(f(x)), \qquad (3.2)$$

де $\psi(x)$ − задана функція, якщо відоме одне значення шуканої функції $f(x_0) = \alpha$.

Розв'язання. На рис. 3.4 зображено графічний спосіб розв'язування рівняння (3.2), який дозволяє знайти значення функції $f(x)$, якщо відоме хоча б одне значення $f(x_0) \neq x_0$.

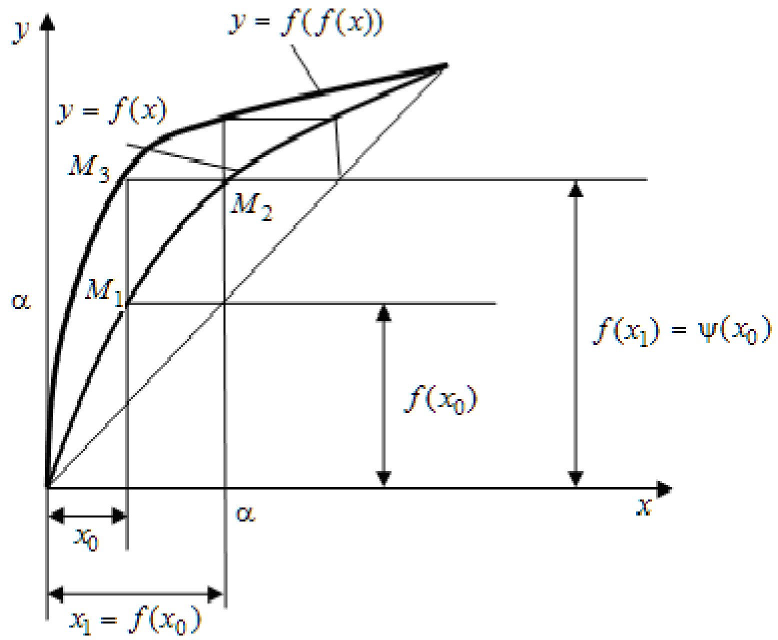

Рис. 3.4. Графічний спосіб розв'язання функціонального рівняння (3.2): $\psi(x)$ − задана функція, $f(x_0) = \alpha$.

Нехай точка $M_1(x_0, f(x_0))$ належить графіку невідомої функції $y = f(x)$. За допомогою прямої $y = x$ відкладаємо значення $x_1 = f(x_0)$ на осі абсцис. Далі знаходимо точку $M_2(f(x_0), f(f(x_0)))$, де $f(f(x_0)) = \psi(x_0)$, яка також належить графіку шуканої функції $y = f(x)$. Відповідно точка $M_3(x_0, f(f(x_0)))$ належатиме графіку суперпозиції $y = f(f(x))$.

IV. РОЗВ’ЯЗАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЗАДАНИХ НА ДИСКРЕТНИХ МНОЖИНАХ

Розглянемо декілька прикладів розв'язування функціональних рівнянь на дискретних множинах. У випадках, коли шукані функції визначені на множинах натуральних, цілих невід’ємних, цілих або раціональних чисел для отримання розв'язків таких рівнянь можуть бути застосовані методи невизначених коефіцієнтів, підстановок, математичної індукції, принцип крайнього та інші.

Приклад 66. Множина цілих невід'ємних чисел − область визначення і значень функції f. Для будь-якого n з цієї множини має місце рівність

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3. \qquad (4.1)$$

Знайти значення $f(2017)$.

Розв'язання. Після підстановки $n = 0$ в (4.1) отримаємо

$$f(f(0)) + f(0) = 3,$$

звідки $f(0) \le 3$. Розглянемо усі можливі випадки.

Якщо $f(0) = 0$, тоді $f(f(0)) + f(0) = f(0) + 0 = 0 \ne 3$.

Нехай $f(0) = 1$. Методом математичної індукції доведемо, що $f(n-1) = n, \forall n \in N$.

Справді, для $n = 1$ це твердження справедливе і у випадку, коли для будь-якого $k \in N$ виконується рівність $f(k-1) = k$, а із (4.1) отримаємо

$$f(f(k-1)) + f(k-1) = 2(k-1) + 3;$$
$$f(k) + k = 2k + 1,$$

що і завершує доведення.

Якщо $f(0) = 2$, то з того, що $f(f(0)) + f(0) = 3$, маємо $f(2) + 2 = 3$, звідки $f(2) = 1$. Тоді з (4.1) знаходимо:

$$f(f(2)) + f(2) = 7, \quad f(1) + 1 = 7, \quad f(1) = 6;$$

$f(f(1)) + f(1) = 5, \quad f(6) + 6 = 5, \quad f(6) = -1$, а це неможливе за умови задачі.

Останній випадок $f(0) = 3$ так само неможливий, оскільки з рівності $f(f(0)) + f(0) = 3$ отримуємо $f(3) + 3 = 3$, тобто $f(3) = 0$, але ж з (4.1) тоді випливає $f(f(3)) + f(3) = 9, \quad f(0) + 0 = 3 \ne 9$.

Відповідь. $f(n) = n + 1, \forall n \in N$; $f(2017) = 2018$.

Приклад 67. Чи існує функція $f : N \to N$, при якій рівність

$$f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1)) \qquad (4.2)$$

виконується для всіх $n = 2, 3, \ldots$

Розв'язання. Припустимо, що така функція існує. Оскільки її значеннями є натуральні числа, то при деякому натуральному n_0 вона набуває свого найменшого значеня $m_0 \geq 1$:

$$f(n) \geq f(n_0) = m_0 \quad \forall n \in N. \tag{4.3}$$

Оскільки $n_0 \geq 2$, то з рівності (4.2), враховуючи (4.3), отримуємо нерівність

$$m_0 = f(n_0) = f(f(n_0 - 1)) + f(f(n_0 + 1)) \geq m_0 + m_0 = 2m_0,$$

яка не може виконуватись, бо $m_0 > 0$.

Отже, функції, яка б задовольняла умови задачі, не існує.

Приклад 68. Знайти функцію $f(x)$, що визначена на множині натуральних чисел і задовольняє умову $f(x+1) = f(x) + d$, де d − деяке натуральне число.

Розв'язання. Будемо розв'язувати це рівняння за алгоритмом методу Коші.

Підставляючи значення $x = 1, 2, 3, \ldots$ в задане рівняння, отримаємо:

$$f(2) = f(1) + d;$$

$$f(3) = f(2) + d = f(1) + 2d;$$

$$f(4) = f(3) + d = f(1) + 3d.$$

Звідси випливає припущення, що $f(n) = f(1) + (n-1)d$, де $n \in N$.

Перевіримо, чи дійсно виконується рівність $f(x) = f(1) + (x-1)d$, де $n \in N$. Застосуємо для цього метод математичної індукції.

1. Перевіримо, чи виконується рівність при $x = 1$: $f(1) = f(1)$ − правильно.

2. Припустимо, що рівність є правильною при $x = n$, де $n \geq 2, n \in N$, тобто $f(n) = f(1) + (n-1)d$ − є правильною.

3. Доведемо, що з цього випливає рівність для $x = n+1$. Дійсно, скориставшись справедливістю попереднього твердження, маємо:

$$f(n+1) = f(n) + d = f(1) + (n-1)d + d = f(1) + nd.$$

Отже, рівність є правильною для будь-якого натурального n, і розв'язком заданого рівняння є функція $f(x) = f(1) + (x-1)d$, де $f(1)$ − довільне число.

Відповідь: $f(x) = f(1) + (x-1)d$.

Вправи:

1. Знайдіть усі функції $f: N \to N$, для яких виконується рівність

$$f(f(n)) + \left(f(n)\right)^2 = n^2 + 3n + 3.$$

2. Знайдіть усі функції $f: N \to N$, для яких $f(1) = 1$ і рівність

$$f\left(x + y\right) = f\left(x\right) + f(y) + xy$$

виконується за будь-яких $x, y \in N$.

3. Знайти всі функції $f: N \to R$, які задовольняють наступні умови:
   а) $f(1) = 3;$
   б) $f(2) = 7;$
   в) $f(n) = 3f(n-1) - 2f(n-2)$ при всіх $n \in N, n > 2$.
4. Знайдіть всі функції $f: N \to R$, які при всіх $n \in N$ задовольняють рівняння

$$f(n+2) = f(n) \ .$$

V. СИСТЕМИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Приклад 69. Знайти усі неперервні функції $f(x), g(x)$, якщо відомо, що вони для будь-яких x, y задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\, g(y), \\ g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)\, f(y). \end{cases} \tag{5.1}$$

Розв'язання. Покладемо в заданій системі $y = 0$:

$$\begin{cases} 2f(x) = 2f(x)\, g(0), \\ 2g(x) = 2g(x)\, f(0). \end{cases}$$

З першого рівняння отримаємо, що або $f(x) \equiv 0$, або $g(0) \equiv 1$. Якщо $f(x) \equiv 0$, зокрема $f(0) = 0$, то з другого рівняння випливає, що $g(x) \equiv 0$. Якщо ж $g(0) \equiv 1$, то, підставляючи в друге рівняння $x = 0$, знаходимо $f(0) = 1$.

Отже, виключаючи тривіальний розв'язок $f(x) = g(x) \equiv 0$, отримаємо

$$f(0) = g(0) \equiv 1. \tag{5.2}$$

Покладемо тепер в (5.1) $x=0$. З урахуванням (5.2) отримаємо наступне:

$$\begin{cases} f(y)+f(-y)=2\,g(y), \\ g(y)+g(-y)=2\,f(y). \end{cases} \tag{5.3}$$

Якщо в (5.3) замінити y на $-y$, то ліві частини рівнянь залишаться незмінними, а в правих частинах $f(y)$ зміниться на $f(-y)$, а $g(y)$ − на $g(-y)$. Отже, $f(y)=f(-y)$ і $g(y)=g(-y)$, тобто функції $f(x), g(x)$ є парними. Більш того, з системи (5.3) випливає, що $2f(y)=2\,g(y)$, і можна зробити висновок про рівність самих функцій $f(x)$ та $g(x)$.

З метою пошуку неперервних функцій $f(x), g(x)$, що задовольняють систему (5.1), розв'яжемо наступне функціональне рівняння:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\,f(y). \tag{5.4}$$

Оскільки $f(0)=1>0$, то знайдеться таке число $c>0$, при якому функція $f(x)>0$ на всьому проміжку $[0,c]$. Тоді або $0<f(c)\le 1$, або $f(c)>1$. В першому випадку знайдеться таке число θ, для якого

$$f(c)=\cos\theta,\ \theta\in[0,\pi/2),$$

У другому випадку знайдеться таке θ, для якого

$$f(c)=\mathrm{c}h\theta,\ \theta>0.$$

Обидва випадки досліджуються аналогічно. Далі зупинемося лише на першому з них.

Підставимо в (5.4) $x=y=c/2$ і отримаємо наступне:

$$f^2\left(\frac{c}{2}\right)=\frac{f(c)+f(0)}{2}=\frac{\cos\theta+1}{2}=\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Враховуючи, що $f(x)>0$ при $0<x<\pi/2$ і $\cos x>0$ при $0\le x\le\theta$, маємо

$$f\left(\frac{c}{2}\right)=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Аналогічно, підставляючи в (5.4) $x=y=c/2^2$, будемо мати наступне:

$$f^2\left(\frac{c}{2^2}\right)=\frac{f(c/2)+f(0)}{2}=\frac{\cos(\theta/2)+1}{2}=\cos^2\left(\frac{\theta}{2^2}\right),$$

$$f\left(\frac{c}{2^2}\right)=\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right).$$

Продовжуючи реалізовувати цей алгоритм далі, за індукцією встановлюємо, що

$$f\left(\frac{c}{2^n}\right)=\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right).$$

Перепишемо рівняння (5.4) так:

$$f(x+y)=2f(x)\,f(y)-f(x-y).$$

Покладаючи в ньому послідовно

$$x=\frac{1}{2^n}c,\ y=\frac{1}{2^n}c;$$

$$x=\frac{2}{2^n}c,\ y=\frac{1}{2^n}c;$$

$$x=\frac{3}{2^n}c,\ y=\frac{1}{2^n}c;$$

....

$$x=\frac{m}{2^n}c,\ y=\frac{1}{2^n}c;$$

з урахуванням формули

$$2\cos\big((m-1)\theta\big)\cos(\theta)-\cos\big((m-2)\theta\big)=\cos(m\theta)$$

отримуємо:

$$f\left(\frac{2}{2^n}c\right)=2\left[f\left(\frac{1}{2^n}c\right)\right]^2-f(0)=2\left[\cos\left(\frac{1}{2^n}\theta\right)\right]^2-1=\cos\left(\frac{2}{2^n}\theta\right);$$

$$f\left(\frac{3}{2^n}c\right)=2f\left(\frac{2}{2^n}c\right)f\left(\frac{1}{2^n}c\right)-f\left(\frac{1}{2^n}c\right)=$$

$$=2\cos\left(\frac{2}{2^n}\theta\right)\cos\left(\frac{1}{2^n}\theta\right)-\cos\left(\frac{1}{2^n}\theta\right)=\cos\left(\frac{3}{2^n}\theta\right);$$

....

$$f\left(\frac{m}{2^n}c\right)=\cos\left(\frac{m}{2^n}\theta\right).$$

Отже, для будь-яких x, які можуть бути представлені у вигляді дробу $\frac{m}{2^n}$, має місце рівність

$$f(cx)=f\left(\frac{m}{2^n}c\right)=\cos(\theta x).$$

Для недвоїчних значень x, використовуючи неперервність $f(x)$, за допомогою граничного переходу отримаємо:

$$f(cx)=\lim_{d_n\to x} f\left(\frac{m}{2^n}d_n\right)=\lim_{d_n\to x}\cos(\theta d_n)=\cos(\theta x).$$

Замінимо тут x на x/c, а θ/c на a, тоді

$$f(x)=\cos(ax).$$

Оскільки функція $y=\cos x$ парна, то

$$f(t)=f(-t)=\cos(-at)=\cos(at).$$

Справедливість формули для $x=0$ випливає з (5.3).

Отже, в розглянутому першому випадку неперервним розв'язком рівняння (5.4) є функція $f(x)=\cos(ax)$.

У другому випадку, який допускає аналогічну трактовку, можна отримати розв'язок рівняння (5.4) у такому вигляді:

$$f(x)=\mathrm{c}h(ax).$$

Сталий розв'язок $f(x)\equiv 1$ є граничним випадком цих розв'язків для $a=0$. Крім того, функція $f(x)\equiv 0$ також задовольняє рівнянню (5.4), у чому можна переконатися звичайною перевіркою.

Відповідь. $g(x)=f(x)=\cos(ax)$, $g(x)=f(x)=\mathrm{c}h(ax)$, $a=const$, $g(x)=f(x)\equiv 0$.

Приклад 70. Знайти всі неперервні функції $f(x), g(x)$, якщо відомо, що вони для будь-яких x, y задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(2x)+2g(2x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x}, \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+x+1}{x}. \end{cases} \tag{5.5}$$

Розв'язання. Покладаючи в першому рівнянні системи $2x=\dfrac{1}{z}$, отримаємо

$$\frac{2x^2+x+1}{x}=\frac{2z^2+z+1}{z},$$

а саме рівняння набуде такого вигляду:

$$f\left(\frac{1}{z}\right)+2g\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{2z^2+z+1}{z}$$

або

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+2g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x^2+x+1}{x}.$$

Отже, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2x^2+x+1}{x}, \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+x+1}{x}, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, знаходимо, що $f(x)=x+1;\ g(x)=\dfrac{1}{x}$.

Перевірка:

$$\begin{cases} 2x+1+2\cdot\dfrac{1}{2x}=\dfrac{2x^2+x+1}{x}; \\ \dfrac{1}{x}+1+x=\dfrac{x^2+x+1}{x}. \end{cases}$$

Відповідь: $f(x)=x+1;\ g(x)=\dfrac{1}{x}$.

VI. РОЗВ'ЯЗАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Задача 71. Знайти функції $f(x)$, визначені на всій числовій прямій, для яких нерівність

$$f(y)\cos(x-y)\le f(x) \tag{6.1}$$

виконується за будь-яких x, y.

Розв'язання. Підставимо в (6.1) замість y вираз $x-\dfrac{\pi}{2}$:

$$f(x-\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2})\le f(x) \Leftrightarrow f(x)\ge 0.$$

Покладемо в нерівності (6.1) $y=x+t$ і отримаємо:

$$f(x+t)\cos(t)\le f(x).$$

Звідси, з урахуванням очевидної нерівності $\cos(t)\ge\left(1-t^2/2\right)$ (див. рис. 6.1) і враховуючи, що функція $f(x)$ невід'ємна, тим паче виконується нерівність:

$$f(x+t)\left(1-\frac{t^2}{2}\right)\le f(x). \tag{6.2}$$

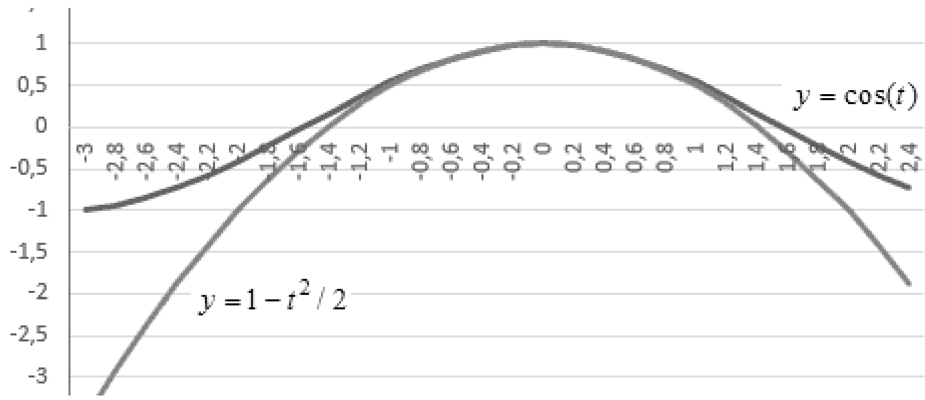

Рис. 6.1 Графіки функцій $y=\cos(t)$ та $y=1-t^2/2$

Нехай $t\in(-\sqrt{2};\sqrt{2})$. Тоді $\left(1-t^2/2\right)>0$, і нерівність (6.2) можна поділити на $\left(1-t^2/2\right)$:

$$f(x+t)\le\frac{f(x)}{1-t^2/2}. \tag{6.3}$$

Аналогічно до попереднього кроку, підставимо в (6.2) замість x вираз $x-t$, а далі − замість t вираз $-t$, і запишемо:

$$f(x)\left(1-\frac{t^2}{2}\right)\le f(x+t). \qquad (6.4)$$

Віднімаючи з обох частин нерівностей (6.3) та (6.4) вираз $f(x)$, отримаємо наступну подвійну нерівність:

$$f(x)\left(-\frac{t^2}{2}\right)\le f(x+t)-f(x)\le f(x)\frac{t^2}{2-t^2},\ t\in(-\sqrt{2};\sqrt{2}).$$

Отже, можна також записати, що

$$\left|f(x+t)-f(x)\right|\le f(x)\frac{t^2}{2-t^2},\ t\in(-\sqrt{2};\sqrt{2}).$$

Якщо додатково припустити, що $t\neq 0$, то ця нерівність після ділення на $|t|$ перетвориться на таку:

$$\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|\le f(x)\frac{|t|}{2-t^2},\ t\in(-\sqrt{2};\sqrt{2}),\ t\neq 0. \qquad (6.5)$$

Тепер зафіксуємо x і спрямуємо змінну t до нуля. У припущенні, що функція $f(x)$ обмежена і неперервна на інтервалі $x\in(-\sqrt{2};\sqrt{2})$, то права частина нерівності (6.5) при $t\to 0$ прямує до нуля, а в силу теореми про затиснуту змінну можна стверджувати, що існує границя $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$ і вона дорівнює нулю. Це означає, що $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=f'(x)$. Отже, доведено, що $f'(x)=0$ за будь-яких x, звідки випливає така рівність:

$$f(x)\equiv c,\ c\ge 0. \qquad (6.6)$$

Залишилось лише показати, що функція (6.6) дійсно задовольняє нерівність (6.1). Справді, $c\cos(x-y)\le c$ для будь-якого невід’ємного числа c.

Відповідь: $f(x)\equiv c,\ c\ge 0.$

Задача 72. Знайти усі такі функції $f(x)$, що для будь-яких чисел x, y виконується нерівність

$$f(x)-f(y)\le(x-y)^2.$$

Розв'язання. Поміняємо місцями змінні x та y, отримаємо:

$$f(y)-f(x)\le(x-y)^2 \Leftrightarrow .f(x)-f(y)\ge-(x-y)^2.$$

Отже, маємо подвійну нерівність

$$-(x-y)^2\le f(x)-f(y)\le(x-y)^2.$$

Припустимо, що $x\ne y$, і розділимо цю нерівність на $(x-y)$, тоді:

$$-(x-y)\le\frac{f(x)-f(y)}{(x-y)}\le(x-y),\ \text{при}\ (x-y)>0,$$

$$(y-x)\ge\frac{f(x)-f(y)}{(x-y)}\ge-(y-x),\ \text{при}\ (x-y)<0.$$

Тобто, для будь-яких дійсних x, y $(x\ne y)$ виконуються нерівності

$$-|x-y|\le\frac{f(x)-f(y)}{(x-y)}\le|x-y|.$$

Тепер зафіксуємо, наприклад, змінну x, а значення y спрямуємо до x. Тоді в отриманій подвійній нерівності вирази, що стоять і праворуч, і ліворуч в нерівності, будуть прямувати до нуля, а між знаками отримуємо визачення похідної функції $f(x)$:

$$0=\lim_{y\to x}\left(-|x-y|\right)\le\lim_{y\to x}\frac{f(x)-f(y)}{(x-y)}\le\lim_{y\to x}|x-y|=0.$$

Отже, встановили існування похідної функції $f(x)$ в будь-якій точці x, причому $f'(x)=0$. Звідси випливає, що функція $f(x)$ − константа.

Відповідь: $f(x)\equiv C, C-const.$

VII. РІЗНІ ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

Приклад 73. Довести, що $f(x)=x^{\alpha}$ $(\alpha - const, 0<x<\infty)$ $f(x)\neq 0$ − єдина неперервна функція, яка при всіх додатних x і y задовольняє рівність

$$f\left(xy\right)=f(x)\cdot f(y). \tag{7.1}$$

Доведення. Нехай $f(x)$ неперервна функція, яка задовольняє умову (7.1) при будь-яких x і y, більших за нуль, $x=e^t$, $g(t)=f(e^t)$. Тоді $t=\ln x$, $f(x)=f(e^t)=g(\ln x)$, а рівняння при таких позначеннях набуває вигляду:

$$g(t+u)=f(e^{t+u})=f(e^t\cdot e^u)=f(e^t)\cdot f(e^u)=g(t)\cdot g(u).$$

Оскільки $g(t)\neq 0$, то отримаємо $g(t)=a^t$ $(a>0)$, тобто

$$f(x)=a^{\ln x}=a^{\frac{\log_a x}{\log_a e}}=a^{\log_a x\ln a}=\left(a^{\log_a x}\right)^{\ln a}=x^{\alpha}\ (\alpha=\ln a).$$

Перевіркою можна переконатися, що $f(x)=x^{\alpha}$ ($f(x)\neq 0$) − єдиний розв'язок рівняння (7.1).

Відповідь. $f(x)=x^{\alpha}$.

Приклад 74. Знайти всі неперервні функції $f(x)$, $:\left[0,1\right]\to R$, що задовольняють рівність

$$3f\left(2uv\right)+4f(u^2-v^2)=2uv,\quad u^2+v^2=1, u\geq v\geq 0. \tag{7.2}$$

Розв'язання. З умови задачі випливає, що $0\leq 2uv\leq u^2+v^2=1$, $0\leq u^2-v^2\leq 1$.

Нехай $2uv=x$. Тоді, оскільки $u^2+v^2=1$, то

$$\left(u^2-v^2\right)^2=\left(u^2\right)^2+\left(v^2\right)^2-2u^2v^2=\left(u^2+v^2\right)^2-4u^2v^2=1-x^2,$$

і тому $u^2-v^2=\sqrt{1-x^2}$.

Отже, задане рівняння набуває такого вигляду:

$$3f\left(x\right)+4f(\sqrt{1-x^2})=x.$$

Зробимо у цьому рівнянні заміну x на $\sqrt{1-x^2}$ і отримаємо таке рівняння:

$$3f\left(\sqrt{1-x^2}\right)+4f(x)=\sqrt{1-x^2}\,.$$

З останніх двох рівнянь знаходимо: $f(x)=\dfrac{4}{7}\sqrt{1-x^2}-\dfrac{3}{7}x$.

Перевіркою переконуємося, що ця функція дійсно є розв'язком рівняння (7.2).

Відповідь. $f(x)=\dfrac{4}{7}\sqrt{1-x^2}-\dfrac{3}{7}x$.

Приклад 75. Знайти значення $f(2017), f(-2016)$ для функції, яка задовольняє умовам:

1) для всіх $n=1,2,3,\ldots$ $\quad f(f(n))=n;$

2) для всіх $n\in Z$ $\quad f(f(n+2)+2)=n;$

3) $f(0)=1$.

Розв’язання. Після підстановки $n=0$ в першу умову, враховуючи початкову умову 3, отримаємо $f(1)=0$. З умови 2, враховуючи 1, маємо для всіх $n\in Z$ рівність

$$f(f(n+2)+2)=n=f(f(n)).\ \text{Тобто}\ \ f(n+2)=f(n)-2.$$

З умови 1 випливає, що при $n\neq m$ $f(n)\neq f(m)$. Якщо шукати серед лінійних функцій $f(n)=an+b$, то достатньо використати значення $f(0)=1$, $f(1)=0$, і отримати $f(n)=1-n$.

Перевіримо, що ця функція задовольняє усі умови задачі. Справді,

$$f(f(1-n))=f(f(-n)-1)=f(-n-1)=f(-n)+1=1-n;$$

$$f(f(1-n+2)+2)=f(f(-n)-3+2)=f(f(-n)-1)=f(-n-1)=$$

$$=f(-n)-1=1-n.$$

Тоді: $f(2017)=-2016,\ f(-2016)=2017$.

Відповідь. $f(2017)=-2016,\ f(-2016)=2017$.

Приклад 76. Знайти функцію $f:R\to R$, яка при будь-яких $x>0$ задовольняє рівність

$$\sin\left(\int_0^x f(u)du\right)=\frac{x}{1+x}.$$

Розв’язання. Знайдемо похідну лівої і правої чистини рівності:

$$\cos\left(\int_0^x f(u)du\right) f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Тепер піднесемо до квадрату отриману рівність:

$$\cos^2\left(\int_0^x f(u)du\right) f^2(x) = \frac{1}{(1+x)^4}. \qquad (7.3)$$

Помножимо обидві частини заданої рівності на $f(x)$, піднесемо отримане співвідношення до квадрату і складемо з (7.3):

$$\left[\sin^2\left(\int_0^x f(u)du\right) + \cos^2\left(\int_0^x f(u)du\right)\right] f^2(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2} f^2(x) + \frac{1}{(1+x)^4}.$$

Тобто

$$f^2(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2} f^2(x) + \frac{1}{(1+x)^4},$$

звідки

$$\frac{1+2x}{(1+x)^2} f^2(x) = \frac{1}{(1+x)^4} \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{1}{(1+2x)(1+x)^2}.$$

Отже,

$$f(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{(1+2x)}(1+x)}, \ x \ge 0.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функція $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1+2x)}(1+x)}$ не задовольняє задане співвідношення.

Відповідь: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+2x)}(1+x)}, \ x \ge 0.$

Приклад 77. Знайти функції $f(x)$, які при $x \neq 0$ та $x \neq 1$ задовольняють тотожність

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2(1-2x)}{x(1-x)}. \qquad (7.4)$$

Розв'язання. Підставимо замість x вираз $\frac{1}{1-x}$ в задане рівняння і отримаємо наступну рівність:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{2(1-x^2)}{x}. \qquad (7.5)$$

У цьому рівнянні зробимо знову заміну x на вираз $\frac{1}{1-x}$:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f(x)=\frac{2x(x-2)}{1-x}. \qquad (7.6)$$

З системи рівнянь (7.4) − (7.6) відносно невідомих $f(x)$, $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$, $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ шляхом виключення останніх двох, знаходимо: $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

Зробимо перевірку:

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x+1}{x-1}+\frac{\frac{1}{1-x}+1}{\frac{1}{1-x}-1}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{2-x}{x}=\frac{4x-2}{x(x-1)}=\frac{2(1-2x)}{x(1-x)}.$$

Отже, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ − розв'язок заданого рівняння.

Відповідь. $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

Приклад 78. Знайти всі дійсні функції $f(x)$, які задовольняють рівняння:

$$f\left(x+y\right)-f(x-y)=4xy.$$

Розв’язання. Нехай $x+y=u, x-y=v$, тоді $x=\frac{u+v}{2}$; $y=\frac{u-v}{2}$. Задане рівняння в нових змінних запишеться у такий спосіб: $f\left(u\right)-f(v)=u^2-v^2$. Звідси випливає, що $f\left(u\right)=u^2+a, a=const$.

Перевірка показує, що знайдена функція є розв'язком заданого рівняння за будь-якого значення $a\in R$.

Відповідь: $f\left(u\right)=u^2+a, a=const$.

Приклад 79. Знайти всі дійсні функції $f(x)$, які задовольняють рівняння:

$$f\left(x+y\right)+f(x-y)=2x^2+2y^2.$$

Розв'язання. Нехай $x+y=u, x-y=v$, тоді $x=\frac{u+v}{2}; y=\frac{u-v}{2}$.
Задане рівняння в нових змінних запишеться у такий спосіб:

$$f\left(u\right)+f(v)=u^2+v^2.$$

Покладемо в отриманому рівнянні $v=0$ і отримаємо $f\left(u\right)+f(0)=u^2$ або $f\left(x\right)=u^2+a, a=const$.

Перевірка показує, що знайдена функція є розв'язком заданого рівняння, коли $a=0$.

Відповідь: $f\left(x\right)=x^2$.

Приклад 80. $f\left(x\right)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Знайти суму

$$f\left(0\right)+f\left(\frac{1}{2018}\right)+f\left(\frac{2}{2018}\right)+...+f\left(\frac{2017}{2018}\right)+f\left(1\right).$$

Розв'язання. Задана сума складається із 2019-ти значень функції, аргументи якої складають арифметичну прогресію

$$0, \frac{1}{2018}, \frac{2}{2018}, \ldots, \frac{2017}{2018}, 1.$$

Оскільки $x_k+x_{n-k}=1$, тобто суми рівновіддалених від середини членів прогресії дорівнюють одиниці, то обчислимо суму

$$f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4/4^x}{4/4^x+2}=1.$$

Отже,

$$f\left(0\right)+f\left(\frac{1}{2018}\right)+f\left(\frac{2}{2018}\right)+...+f\left(\frac{2017}{2018}\right)+f\left(1\right)=\frac{2019}{2}=1009,5.$$

Взагалі, сума значень заданої функції на елементах арифметичної прогресії $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1$ при будь-якому n дорівнюватиме $\frac{n+1}{2}$:

$$f\left(0\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+...+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(1\right)=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

Відповідь. 1009,5.

Приклад 81. Знайти всі дійсні функції $f(x)$, які для будь-яких дійсних чисел x, y, z задовольняють рівняння:

$$\left(f\left(x-y\right)\right)^{2003}+\left(f(y-z)\right)^{2003}+\left(f(z-x)\right)^{2003}=0;$$

$$\left(f\left(x-y\right)\right)^{2005}+\left(f(y-z)\right)^{2005}+\left(f(z-x)\right)^{2005}=0.$$

Розв’язання. Нехай в першій рівності $x=y=z=0$. Тоді $f(0)=0$. Якщо у цьому рівнянні покласти лише $y=z=0$, то отримаємо $\left(f\left(x\right)\right)^{2003}+\left(f(-x)\right)^{2003}=0$, звідки $f\left(x\right)=-f\left(-x\right)$, тобто шукана функція − непарна.

Підставимо в обидва рівняння $y=-x, z=0$, і враховуючи отримані вище результати, матимемо:

$\left(f(2x)\right)^{2003}=2\left(f(x)\right)^{2003}$, $\left(f(2x)\right)^{2005}=2\left(f(x)\right)^{2005}$.

Отже,

$$\left(\left(f(2x)\right)^{2003}\right)^{2005}=\left(2\left(f(x)\right)^{2003}\right)^{2005}=2^{2005}\left(\left(f(x)\right)^{2003}\right)^{2005}=$$

$$=2^{2005}\left(\left(f(x)\right)^{2005}\right)^{2003}=4\left(2\left(f(x)\right)^{2005}\right)^{2003}=4\left(\left(f(2x)\right)^{2005}\right)^{2003}.$$

Звідки випливає, що $f(x)\equiv 0$.

Відповідь. $f(x)\equiv 0$.

Приклад 82. Чи існує така $f(x)$, яка визначена і диференційовна на всій множині дійсних чисел і задовольняє таким вимогам:

1) при всіх дійсних x виконується нерівність $f(x)\geq f(x+\cos x)$;

2) рівняння $f'(x)=0$ має скінченну кількість розв'язків?

Розв'язання. Припустимо, що така функція існує. Тоді

$$g(x)=f(x)-f(x+\cos x)\geq 0,$$

а

$$g\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)-f\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right)=0.$$

Отже, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ − точки мінімуму функції $g(x)$. Оскільки функція $g(x)$ диференційована як різниця двох диференційованих функцій на всій множині дійсних чисел, то $g'\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=0$. Але

$$g'(x)=f'(x)-f'(x+\cos x)(1-\sin x)$$

і

$$g'\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)-f'\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right)$$

$$=f'\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=0,\ n\in Z.$$

Отримана рівність суперечить другій умові задачі.

Відповідь. Такої функції не існує.

Приклад 83. Знайти всі функції $f:(0;\infty)\to(0;\infty)$, які при всіх $x,\ y>0$ задовольняють рівність

$$f(xf(y))=f(xy)+x.$$

Розв'язання. Спочатку у заданому рівнянні поміняємо місцями x та y, а потім в ньому зробимо підстановку $f(x)$ замість x. Маємо:

$$f(yf(x))=f(xy)+y, \qquad (7.7)$$

$$f(f(x)f(y))=f(f(x)y)+f(x) \text{ або}$$

$$f(yf(x))=f(f(x)f(y))-f(x). \qquad (7.8)$$

Із (7.7) і (7.8) випливає, що

$$f(f(y)f(x))=f(xy)+f(x)+y.$$

У цьому рівнянні ліва частина не зміниться, якщо x замінити на y. Тоді, враховуючи, що права частина має володіти тією самою властивістю, отримуємо:

$$f(xy)+f(x)+y=f(xy)+f(y)+x.$$

Отже, $f(x)-x=f(y)-y.$ Звідси випливає, що функція $f(x)-x$ є сталою на множині $(0;\infty)$, а шукані функції мають вигляд

$$f(x)=x+a, \text{ де } a - \text{деяке дійсне число.}$$

Зробимо перевірку:

$$f(xf(y))=xf(y)+a=x(y+a)+a=(xy)+ax+a;$$

$$f(xy)+x=xy+a+x.$$

Порівнюючи ці рівняння, отримуємо: $(xy)+ax+a=xy+a+x$, тобто $(a-1)x=0$ для усіх $x>0$. Отже, $a=1$, і функція $f(x)=x+1$ є єдиним розв'язком заданого рівняння.

Відповідь. $f(x)=x+1$.

Приклад 84. Знайти всі дійсні функції $f(x)$, які при всіх $x, y \in R$ задовольняють рівняння:

$$f\left(x+y\right)+f(x-y)=2x^3+6xy^2.$$

Розв'язання. Нехай $x+y=u, x-y=v$, тоді $x=\dfrac{u+v}{2}$; $y=\dfrac{u-v}{2}$. Задане рівняння в нових змінних запишеться у такий спосіб: $f\left(u\right)+f(v)=u^3+v^3$. Звідси випливає, що $f\left(u\right)=u^3+a, a=const$.

Перевірка показує, що знайдена функція є розв'язком заданого рівняння лише при $a=0$.

Відповідь: $f\left(x\right)=x^3$.

Приклад 85. Нехай функція $f:R\to R$ задовольняє співвідношення

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)} \quad \forall x\in R, \tag{7.9}$$

де $a\neq 0$ − деяке дійсне число. Довести, що $f(x)$ − періодична.

Розв'язання. Оскільки підкореневий вираз не може бути від'ємним, то із нерівності $f(x)-f^2(x)\geq 0$ випливає, що для всіх $x\in R$ має місце нерівність $0\leq f(x)\leq 1$. Але, враховуючи той факт, що $f(x)$ задовольняє заданому рівнянню (7.9), можна уточнити:

$$1/2\leq f(x)\leq 1 \text{ для всіх } x\in R. \tag{7.10}$$

Зробимо в (7.9) очевидні перетворення:

$$\left(f(x+a)-\frac{1}{2}\right)^2=f(x)-f^2(x),$$

$$f^2(x+a)-f(x+a)=f(x)-f^2(x)-\frac{1}{4},$$

$$-f^2(x+a)+f(x+a)=\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2. \tag{7.11}$$

Тоді із (7.9), враховуючи (7.10) і (7.11), маємо $\forall x \in R$:

$$f(x+2a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - f^2(x+a)} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} + \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = f(x).$$

А це свідчить про періодичність функції $f(x)$, причому найменший період дорівнює $2a$.

Відповідь. $f(x)$ − періодична з періодом $2a$.

Приклад 86. Знайти всі функції $f: R \to R$, які при будь-яких x, y задовольняють рівність

$$f(xf(x) + f(y)) = y + x^2.$$

Розв'язання. Покладемо у заданому рівнянні $x = 0$ і отримаємо, що за будь-яких $y \in R$ $\quad f(f(y)) = y$.

Далі, враховуючи отриману рівність, можна записати:

$$f(xf(x) + f(y)) = \{x = f(f(x))\} = f(f(f(x))f(x) + f(y)) = f^2(x) + y.$$

Порівнюючи цю рівність із заданою, маємо:

$$f^2(x) + y = x^2 + y,$$

отже: $|f(x)| = |x|$, тобто шуканими функціями є $f(x) = x$ і $f(x) = -x$. Перевірка переконує, що обидві функції є розв'язками заданого рівняння.

Відповідь. $f(x) = x$ і $f(x) = -x$.

Приклад 87. Знайти всі функції $f: R \to R$, які при всіх x, y задовольняють рівність

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2.$$

Розв'язання. Підставимо в заданому рівняння замість y спочатку $f(x)$, а потім $-x^2$, отримаємо:

$$f(x^2 + f(x)) + f(0) = 2f(f(x)) + 2f^2(x);$$

$$f(0) + f(x^2 + f(x)) = 2f(f(x)) + 2x^4,$$

Звідки отримаємо, що при всіх $x, y \in R$ $\ |f(x)| = x^2$, а $f(0) = 0$. Тоді при $x = 0$ за будь-яких $y \in R$ задане рівняння набуває вигляду:

$$f(y) + f(-y) = 2y^2.$$

Далі, $f(y)\le y^2$; $f(-y)\le y^2$, тому що $|f(x)|=x^2$, і, отже, отримуємо: $f(y)=y^2$ при всіх $y\in R$.

Для перевірки підставимо $f(x)=x^2$ в ліву частину заданого рівняння:

$$f(x^2+y)+f(f(x)-y)=(x^2+y)^2+(x^2-y)^2=2x^4+2y^2;$$

$$2f(f(x))+2y^2=2\left(x^2\right)^2+2y^2=2x^4+2y^2,$$

отже $f(x)=x^2$ − розв’язок рівняння.

Відповідь. $f(x)=x^2$.

Приклад 88. Знайти всі функції $f:R\to R$, які при всіх x, y задовольняють рівність

$$f(f(x)-y^2)=(x-y)^2 f(x+y).$$

Розв’язання. Підставимо в заданому рівняння $-y$ замість y, отримаємо:

$$f(f(x)-y^2)=(x+y)^2 f(x-y).$$

Порівняємо цю рівність із заданою:

$$(x-y)^2 f(x+y)=(x+y)^2 f(x-y).$$

Підставимо в отриману рівність $x=\dfrac{t+1}{2}, y=\dfrac{t-1}{2}$ і знаходимо, що $f(t)=t^2 f(1)$ при всіх $t\in R$. Звідси випливає, що необхідно шукати функцію у вигляді $f(x)=ax^2, a\in R$ − деяка константа.

Задана рівність при такій функції набуває вигляду:

$$a(ax^2-y^2)-(x-y)^2(x+y)^2=0.$$

Оскільки ця рівність за умовою виконується для будь-яких x, y, то поклавши $x=y=a$, знаходимо: $a=0, a=1$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функції $f(x)=x^2$ і $f(x)=0$ задовольняють задане рівняння.

Відповідь. $f(x)=x^2$, $f(x)=0$.

Приклад 89. Знайти всі функції $f:[0,1]\to R$, що задовольняють рівність

$$2f(\sin x)+3f(\cos x)=\sin x \quad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Розв'язання. Підставимо в заданому рівняння $x=\frac{\pi}{2}-y$ і отримаємо:

$$2f(\cos y)+3f(\sin y)=\cos y \quad \forall y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Отже, маємо систему з двох рівнянь:

$$\begin{cases}2f(\sin x)+3f(\cos x)=\sin x,\\ 2f(\cos x)+3f(\sin x)=\cos x,\end{cases}$$

звідси випливає, що

$$f(\sin x)=\frac{3}{5}\cos x-\frac{2}{5}\sin x.$$

Після заміни $t=\sin x$ при $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ остаточно маємо:

$$f(t)=\frac{3}{5}\sqrt{1-t^2}-\frac{2}{5}t \quad \forall t\in[0,1].$$

Зробимо перевірку:

$$2f(\sin x)+3f(\cos x)=\frac{6}{5}\sqrt{1-\sin^2 x}-\frac{4}{5}\sin x+\frac{9}{5}\sqrt{1-\cos^2 x}-\frac{6}{5}\cos x=$$

$$=\sin x.$$

Відповідь. $f(x)=\frac{3}{5}\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{5}x \quad \forall x\in[0,1].$

Приклад 90. Знайти всі диференційовні функції $f:(0,\infty)\to R$, які при всіх допустимих $f(x)$ задовольняють рівність

$$f(xy)=f(x)\cdot f(y).$$

Розв'язання. Очевидно, що це рівняння має тривіальний розв'язок $f(x)\equiv 0$. Будемо шукати таку функцію $f(x)$, яка задовольняє задане рівняння і, крім того, $f(x)\neq 0$. Нехай в деякій точці $x^*>0$ $f(x^*)\neq 0$ і $y=x^*/x$. Тоді із заданого рівняння маємо:

$$f(x)\cdot f\left(\frac{x^*}{x}\right)=f\left(x\cdot\frac{x^*}{x}\right)=f(x^*)\neq 0,$$

звідки видно, що $f(x)\neq 0$ при всіх допустимих значеннях x. Крім того, функція $f(x)$ строго додатна на своїй області визначення, оскільки підставивши в задане рівняння $\sqrt{x}$ замість x і y, отримаємо:

$$f(x) = f^2(x) > 0.$$

Покладемо в заданому рівнянні $x = 1$, тоді, з урахуванням попереднього висновку:

$$f(y) = f(1) \cdot f(y) \Leftrightarrow f(y) \cdot (1 - f(1)) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1.$$

Оскільки шукана функція є диференційованою, задовольняє задане рівняння і $f(1) = 1$, то для довільного x маємо:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x(1 + \Delta x / x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) f(1 + \Delta x / x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x)}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x / x) - 1}{\Delta x / x} =$$

$$= \frac{f(x)}{x} f'(1) = \alpha \frac{f(x)}{x}, \alpha = f'(1),$$

тобто виконується рівність:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{x}, \Leftrightarrow \ln f(x) = \alpha \ln x + C, \text{ де } C - \text{довільна константа.}$$

З умови $f(1) = 1$ отримуємо, що $C = 0$. Отже, шуканим розв'язком є функція $f(x) = x^{\alpha}$, де $\alpha \in R$.

Відповідь. $f(x) = x^{\alpha}$, де $\alpha \in R$.

Приклад 91. Знайти всі функції $f: R \to R$, які при всіх x, y задовольняють рівність

$$f(y^2 + x) = f(x^2) + f(y).$$

Розв'язання. Підставимо в заданому рівнянні послідовно $x = y = 0$; $x = 0$; $x = -y^2$ і отримаємо:

$$f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0;$$

$$f(y^2) = f(y);$$

$$f(0) = f(y^2 - y^2) = f(y^4) + f(y) = f(y^2) + f(y) = 2f(y).$$

Звідси випливає, що $f(x) \equiv 0$.

Відповідь. $f(x) \equiv 0$.

Приклад 92. Знайти всі функції $f: R \to R$, які при всіх x, y задовольняють рівність

$$f(0{,}5y - f(x)) = 4 - x - 0{,}5y.$$

Розв'язання. Нехай $y = 2x + 2f(x)$, тоді задане рівняння буде мати такий вигляд:

$$f(x) = 4 - x - x - f(x),$$

тобто $f(x) = 2 - x.$

Перевіркою переконуємося, що ця функція дійсно є розв'язком заданого рівняння.

Відповідь: $f(x) = 2 - x.$

Приклад 93. Знайти функцію $f : R \to R$, яка задовольняє рівність

$$\int_0^x e^u f(x-u)du = \sin x, \quad x \in R.$$

Розв'язання. Після очевидних перетворень маємо:

$$\int_0^x e^u f(x-u)du = \int_0^x e^{x-x+u} f(x-u)du = e^x \int_0^x e^{-(x-u)} f(x-u)du =$$

$$= e^x \int_0^x e^{-t} f(t)dt.$$

Отже, для будь-яких $x \in R$

$$\int_0^x e^{-t} f(t)dt = e^{-x} \sin x.$$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності, знаходимо:

$$e^{-x} f(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x,$$

звідки $f(x) = \cos x - \sin x.$

Відповідь: $f(x) = \cos x - \sin x.$

Приклад 94. Знайти функцію $f : R \to R$, яка задовольняє рівність

$$f'(\sin^2 2x) = \sin^8 x + \cos^8 x.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x =$$

$$= \left((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x\right)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x = 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x,$$

то, позначаючи через $t = \sin^2 2x$, отримаємо

$$f'(t) = 1 - t + \frac{1}{8}t^2.$$

Звідси знаходимо, що $f(t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^3 + C.$

Перевіркою переконуємося, що ця функція дійсно є розв'язком заданого рівняння.

Відповідь: $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + C.$

Приклад 95. Чи існує неперервно-диференційовна функція $f : R \to R$, яка задовольняє умовам

$$|f(x)| < 2, \quad f(x) f'(x) \ge \sin x, \quad \forall x \in R?$$

Розв'язання. Не існує, бо

$$f^2(x) - f^2(0) = \int_0^x 2 f(t) f'(t) dt \ge 2\int_0^x \sin t dt = 2(1 - \cos x).$$

Відповідь: Не існує.

Приклад 96. Знайти функцію $f : R \to R$, якщо

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Розв'язання. Нехай $t = x + \frac{1}{x}$, тоді $f(t) = t^2 - 2$. Це розв'язок при $|t| \ge 2$, бо з умови випливає, що $f(x) > 0$. При $|t| < 2$ може бути будь-яка функція, оскільки $t = x + \frac{1}{x}$ не приймає таких значень.

Відповідь: $f(x) = x^2 - 2$.

Приклад 97. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умовам: $f(x) \in C^2(-\infty;\infty)$ і для будь-яких x, h $f(x+h) - f(x) = hf'\left(x + \frac{h}{2}\right)$.

Довести, що функцію $f(x)$ можна зобразити в вигляді $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Розв'язання. Після диференціювання обох частин тотожності по h отримаємо:

$$f'(x+h) = f'\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} f''\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Звідси при $x = -\frac{h}{2}$ випливає рівність

$$f'\left(\frac{h}{2}\right) = f'(0) + \frac{h}{2} f''(0).$$

Позначимо $\tilde{x} = \frac{h}{2}$. Тоді $f'(\tilde{x}) = f'(0) + \tilde{x} f''(0)$, тобто функція $f'(\tilde{x})$ є лінійною. Це означає, що функція $f(\tilde{x})$ − квадратична і може бути записана у вигляді $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Приклад 98. Знайти всі неперервно диференційовані функції $f: R \to R$, які при всіх x, y задовольняють умови

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy\left(\frac{x^2}{3} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{3}\right), \quad f(2) = -2.$$

Розв'язання. При $x = 0$ і $y = 0$ маємо $f(0) = f(0) + f(0)$, звідки $f(0) = 0$. Перепишемо рівняння в такому вигляді:

$$f(x+y) - f(x) = f(y) - f(0) + xy\left(\frac{x^2}{3} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{3}\right).$$

Поділимо його на y:

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{f(y) - f(0)}{y} + x\left(\frac{x^2}{3} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{3}\right)$$

і перейдемо до границі в отриманій рівності при $y \to 0$:

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} + \lim_{y \to 0} x\left(\frac{x^2}{3} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{3}\right).$$

Звідси маємо диференціальне рівняння

$$f'(x) = f'(0) + \frac{x^3}{3}.$$

Позначимо $f'(0) = a$, тоді $f'(x) = f + \frac{x^3}{3}$. Отже,

$$f(x) = \int \left(a + \frac{x^3}{3} \right) dx = ax + \frac{x^4}{12} + C.$$

Оскільки $f(0) = 0$, то $C = 0$.

Знайдемо параметр a із умови $f(2) = -2$:

$$2a + \frac{2^4}{12} = -2, \text{ або } a = -\frac{5}{3}.$$

Отже, якщо розв'язок існує, то він має набувати такого вигляду:

$$f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{x^4}{12}.$$

Перевіркою переконуємося, що ця функція дійсно є розв'язком заданого рівняння.

Відповідь: $f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{x^4}{12}$.

Приклад 99. Знайти всі диференційовні функції $f : R \to R$, які при всіх x, y задовольняють умовам:

$$f(x+y) \le f(x) + f(y),\ f(0) = 0.$$

Розв'язання. Враховуючи першу умову задачі, маємо:

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \le f(x) + f(\Delta x) - f(x) = f(\Delta x).$$

Після ділення цієї нерівності на Δx>0 і переходу до границі отримуємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x},\quad f'_+(x) \le f'_+(0).$$

Цілком аналогічно дістанемо нерівність

$$f'_-(x) \ge f'_-(0).$$

Оскільки за умовою функція $f(x)$ диференційовна, то праві і ліві похідні збігаються. Тоді

$$f'(0) \le f'(x) \le f'(0).$$

Звідси випливає, що $f'(x) = C$. Отже, $f(x) = Cx$ (з урахуванням другої умови задачі).

Перевіркою переконуємося, що перша умова задачі виконується для всіх функцій такого вигляду.

Відповідь: $f(x) = Cx$.

Приклад 100. Довести, що у випадку, коли функція $f : R \to R$ не дорівнює тотожно нулю, задовольняє рівність $f(x)f(y) = f(x+y)$ при всіх x, y і диференційовна в точці $x = 0$, вона нескінченно диференційовна в будь-якій точці $x \in R$.

Розв'язання. При $x = y = 0$ тотожність дає $f(0)(f(0)-1) = 0$, тобто $f(0) = 0$ або $f(0) = 1$. Якщо $f(0) = 0$, то із тотожності ($y = 0$) $f(x)f(0) = f(x)$, $x \in R$, випливає, що $f(x) \equiv 0$, а це суперечить умові задачі. Тому $f(0) = 1$.

Доведемо, що функція $f(x)$ диференційовна на всій числовій осі. Дійсно, для будь-якого $x \in R$ маємо:

$$f(x)f(y) = f(x+y) \quad (y \in R),$$

Звідки знаходимо, що

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = f(x) \lim_{y \to 0} \frac{f(y) - 1}{y} = f(x) \lim_{y \to 0} \frac{f(y) - f(0)}{y}.$$

Оскільки за умовою функція диференційовна в точці $x = 0$, то існує границя, тобто похідна в довільній точці $x \in R$, причому

$$f'(x) = f(x)f'(0).$$

Нехай $f'(x) = a$. Тоді $f'(x) = af(x)$. Функція $f(x)$ диференційовна будь-яку кількість разів, бо

$$f''(x) = af'(x) = a^2 f(x), \quad f'''(x) = af''(x) = a^3 f(x) \text{ і т. д.}$$

Тобто при будь-якому $x \in R$ маємо $f^{(n)}(x) = a^n f(x)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти всі диференційовані функції $f: R \to R$, які задовольняють тотожність
$$f\left(x+y\right) \equiv f(x)+f(y)+xy(x+y).$$

2. Виконується рівність $f\left(x+y\right) \equiv f(x)+f(y)+80xy$, причому $f(1/4)=2$. Знайти $f(4/5)=?$

3. Знайти всі функції $f: R \to R$, які задовольняють рівняння
$$f\left(x\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2.$$

4. Знайти всі функції $f: R \to R$, які задовольняють рівняння
$$f\left(x\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x-x^2$$

5. Знайти пари функцій $f(x)$ і $g(x)$, визначених на множині всіх дійсних чисел, при яких для будь-яких x, y виконується рівність
$$f(x)+f(y)+g(x)-g(y)=x^3+\sqrt[3]{y}.$$

6. Знайти всі такі функції, $f: R \to R$, що задовольняють рівняння
$$f\left(2x+1\right)=4x^2+14x+7.$$

7. Знайти всі такі функції, $f: R \to R$, що задовольняють рівняння
$$2f\left(x\right)+f(x-1)=x^2.$$

8. Знайти функцію, про яку відомо , що
$$f\left(x\right)=\begin{cases} xf\left(\dfrac{2x+3}{x-2}\right)+3, & \text{якщо } x \neq 2, \\ 0, \quad \text{якщо} & x=2. \end{cases}$$

9. Знайти всі функції $f: R \to R$, які задовольняють рівняння
$$f(x+y)=f(x)\cdot e^y.$$

10. Знайти функції $f(x)$, які при $x \neq 0$ задовольняють рівність

$$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x.$$

11. Знайти функції $f(x)$, що при $x\neq 0$ та $x\neq 1$ задовольняють рівності:

1) $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x;$

2) $2f(x)-f\left(\frac{x-1}{x}\right)=x;$

3) $x^2 f(x)-xf\left(\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}\right)=1;$

4) $f(x)-2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=x,\ x\neq -1.$

12. Знайти функції $f(x)$, які при $x\neq 0$ та $x\neq 1$ задовольняють тотожність

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x.$$

13. Знайти $f(x)$, якщо $f'(x^2)=\frac{1}{x}, (x>0).$

14. Знайти функції $f(x)$, що при $x\neq 0$ задовольняють рівність

$$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3-x^2}{x}.$$

15. Знайти функції $f:R\setminus\{0\}\to R$, які задовольняють рівняння

$$xf(x)+2f\left(-\frac{1}{x}\right)=3.$$

16. Знайти всі функції $f:R\to R$, які за будь-яких x,y задовольняють рівність

$$-x\big(f(-x)+f(x)+4\big)+2f(-x)=0.$$

17. Знайти функції $f(x)$, що при $x\neq 0$ та $x\neq \pm 1$ задовольняють тотожність $xf(x)+2f\left(\frac{x-1}{1+x}\right)=1.$

18. Знайти всі диференційовні на $(0;\infty)$ функції $f(x)$, які за будь-яких x, y задовольняють рівність

$$f\left(xy\right)=yf(x)+xf(y).$$

19. Знайти всі функції $f: R \to R$, які за будь-яких x, y задовольняють рівняння

$$f\left(x+y\right)+f(x-y)-2f(x)(1+y)=2xy(3y-x^2).$$

20. Знайти функцію $f: R \to R$, яка задовольняє умови

$$\begin{cases} f'\left(x\right)=f'(x-1), \\ f\left(x\right)+f(x-1)=x. \end{cases}$$

21. Знайти дійсну функцію $f: R \to R$, яка задовольняє умову

$$2f\left(x+2\right)+f(-x-1)=(x+2)^2.$$

22. Розв'язати функціональне рівняння $f(x)=f(2x)$ в класі неперервних функцій.

23. Знайти всі дійсні функції $f(x)$, які задовольняють рівняння:

$$f\left(x+y\right)+f(x-y)=2x^3+6x^2y.$$

24. Знайти обмежену в точці $x=0$ функцію, що задовольняє рівняння

$$f(x)-\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})=x^2.$$

25. Знайти неперервні функції $f(x)$, які задовольняють рівняння

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$$

за будь-яких x_1 та x_2.

26. Знайти усі неперервні на $[a,b]$ функції $\varphi(x)$, які задовольняють співвідношення $\varphi(x)=\int\limits_a^b \varphi(x)dx+\psi(x)$, де $\psi(x)$ − деяка неперервна на $[a,b]$ функція.

27. Знайти функції $f: R\setminus\{0\} \to R$ при яких для всіх $x \neq 0$ виконується рівність

$$3f(-x)+f(1/x)+f(x)=x.$$

28. Знайти функції $f: R \to R$, які за будь-яких $x, y \in R$ задовольняють рівність

$$f\left(x-f(y)\right)=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$$

29. Функція $f(x)$ визначена і задовольняє співвідношення

$$(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-f(x)=x$$

при всіх $x\neq 1$. Знайти всі такі функції.

30. Знайдіть усі функції $f:R\to R$, для яких рівність

$$f\left(x+y\right)=f(x)\cos y+f(y)\cos x$$

виконується за будь-яких $x,y\in R$.

31. Знайдіть всі неперервні функції $f:R\to R$, що за будь-яких x задовольняють рівняння

$$f(x^2)+f(x)=x^2+x.$$

32. Знайти функції $f:R\setminus\{0\}\to R$, які задовольняють рівняння

$$(x-1)f(x)+f(1/x)=1/x,\ x\neq 0.$$

33. Знайти функції $f:R\setminus\{0\}\to R$, які задовольняють рівняння

$$af(x)+f(1/x)=ax.$$

34. Знайти усі періодичні функції $f(x)$, які задовольняють умову

$$f(x)-3f\left(x-\pi\right)=\cos x$$

при довільних $x\in R$.

35. Знайдіть усі функції $f:R\to R$, для яких рівність

$$f\left(x+y\right)-f(x-y)=2f(y)\cos x$$

виконується за будь-яких $x,y\in R$.

36. Функція f задовольняє такі вимоги:

1) визначена на множині дійсних чисел, крім нуля;
2) існує таке y, при якому $f(y)=0,5$;
3) для всіх $x\neq 0,\ y\neq 0$ виконується рівність

$$f\left(x\right)-f(y)=f\left(x\right)f\left(1/y\right)-f(y)f\left(1/x\right).$$

Знайти $f\left(-1\right)=?$

37. В класі диференційовних функцій $f(x)$ розв'язати рівняння:

$$f\left(x+y\right)+2f(x-y)=3f(x)-y.$$

38. Знайти всі функції $f:R\to R,$ що за будь-яких x,y задовольняють рівність

$$f\left(x+y\right)=f(x)+f(y)+2xy.$$

39. Знайдіть всі функції $f:R\to R,$ що за будь-яких x,y задовольняють рівняння

$$f(x)f(x+y)=\left(f(y)\cdot f(x-y)\right)^2 e^{y+4}.$$

40. Знайдіть всі функції $f:R\to R,$ що за будь-яких x,y задовольняють рівняння

$$f\left(x+y\right)-2f(x-y)+f(x)-2f(y)=y-2.$$

41. Знайдіть всі функції $f:R_+\to R,$ що за будь-яких x,y задовольняють рівняння

$$f\left(xy\right)+2f(x/y)=3f(x)-\ln y.$$

42. Знайдіть всі функції $f:R\to R$, які задовольняють рівняння

$$2f\left(x+2y\right)+f(x)=f(x+y)\cdot\left(2e^y+e^{-y}\right).$$

43. В наведених нижче прикладах знайдіть усі функції $f:R\to R,$ для яких при довільних $x,y\in R$ виконується рівність

1) $f\left(x-f(y)\right)=1-x-y;$

2) $f\left(x^2+f(y)\right)=\left(x-y\right)^2 f(x+y).$

44. Знайдіть всі неперервні функції $f:R\to R,$ що за будь-яких x,y задовольняють рівняння

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)\cdot f(y).$$

45. Знайдіть всі функції $f:R\to R$, які є неперервними в точці $x=0$ і задовольняють рівняння

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy.$$

46. Знайти всі неперервні функції на множині дійсних чисел, що задовольняють рівність:

$$f(x+y)+f(xy)+1=f(x)+f(y)+f(xy+1), \quad \forall x,y\in R^2$$

47. Знайдіть всі функції $f: R\to R$, що за будь-яких x, y задовольняють рівняння

$$f\left(x+y\right)+f(y-x)=2f(x)\cdot f(y).$$

48. Знайти всі періодичні функції $y=f(x)$, які задовольняють рівняння

$$f(x+\pi)-7f(x)=-4\cos x.$$

49. Знайти всі функції $f: R\to R$, що диференційовані в точці 0 і за будь-яких $x, y\in R$ задовольняють рівність

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy.$$

50. Знайти всі функції $f: R\to R$, що за будь-яких $x\neq 0,\ y\neq 0,\ x+y\neq 0$ задовольняють рівність

$$f\left(\frac{1}{x+y}\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{y}\right).$$

51. Знайти всі функції $f: R\to R$, що за будь-яких $x, y, z\in R$ задовольняє нерівність

$$f(x+y)+f(z+y)+f(x+z)\geq 3f(x+2y+3z).$$

52. Чи існує обмежена функція $f: R\to R$, при якій $f(1)>0$ і за будь-яких $x, y\in R$ задовольняє нерівність

$$f^2(x+y)\geq f^2(x)+2f(xy)+f^2(y)?$$

53. Чи існує функція $f(x)$, що визначена при всіх $x\in R$ і за будь-яких $x, y\in R$ задовольняє нерівність

$$\left|f(x+y)+\sin x+\sin y\right|<2?$$

54. Знайти усі функції $f(x)$, які задовольняють умови: $f(x)\leq x$; $f\left(x+y\right)\leq f(x)+f(y)$ за будь-яких $x, y\in R$.

55. Знайти всі функції $f(x)$, визначені при всіх додатних x, що приймають додатні значення і задовольняють за будь-яких додатних $x, y\in R$ рівність

$$f(x^y)=f(x)^{f(y)}.$$

56. Обчислити $f(2018)$, якщо функція $f: R \to R$ задовольняє умову $f(2) = 2$ і тотожність

$$f(x) = f(x-1)f(x+1).$$

57. Знайти всі функції $f: R \to R$, що за будь-яких $x, y \in R$ задовольняють рівняння

$$f(x^2 + y) = f(x) + f(y^2).$$

58. Знайти всі функції $f: R \to R$, що не дорівнюють тотожно нулю і за будь-яких $x, y \in R$ задовольняють рівняння

$$f(x)f(y) = f(x-y).$$

59. Розв'язати функціональне рівняння

$$x^2 f(y) + yf(x^2) = f(xy) + a \quad \forall x \in R, \forall y \in R$$

для кожного $a \in R$, де функція $f: R \to R$.

60. Знайдіть всі функції $f: R \to R$, які задовольняють рівняння

$$x(f(x) + f(-x) + 2) + 2f(-x) = 0 \quad \forall x \in R.$$

61. Знайти всі функції $f: R^+ \to R$, що за будь-яких $x, y \in R$ задовольняють рівняння

$$f\left((x+y)^2\right) = f(x^2) + f(y^2) + 2xy.$$

62. У кожному з прикладів знайти всі функції $f: R \to R$, що за будь-яких $x, y \in R$ задовольняють рівняння

а) $f(x^3 - y^3) = f^3(x+y)$;

б) $f(x-y) = f(x^3 - y^3)$.

63. Знайти всі неперервні функції $f: R \to R$, які задовольняють рівняння

$$f^2(x) + f(x)f(y) = x^2 + xy \quad \forall x \in R, \forall y \in R.$$

64. Знайти всі функції $f: [0,1] \to R$, які задовольняють рівняння

$$2f(\sin x) + 3f(\cos x) = \sin x \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

65. Знайти диференційовну на $(0;\infty)$ функцію, яка задовольняє рівняння

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

66. Знайти $f(1)$, якщо $f'(x) = f(1-x)$, $f(0) = 1$.

67. Нехай $f : R \to R$ – гладка функція, яка задовольняє рівняння

$$\left(f'(x)\right)^2 = f(x)f''(x) \quad \forall x \in R.$$

Знайти всі можливі значення $f'(0)$, якщо $f(0) = 1$, $f^{(4)} = 9$.

68. Функція $f : R \to R$ задовольняє умови:

а) $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x \in R, \forall y \in R$;

б) $f(1) = 1$;

в) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{f(x)}{x^2} \quad \forall x \in R \setminus \{0\}$.

Довести, що $f(x) = x$ для всіх $x \in R$.

ВІДПОВІДІ, ВКАЗІВКИ, РОЗВ'ЯЗКИ

Завдання до п. 2.2

1. *Відповідь.* Функції не існує. *Вказівка.* Див. приклад 3 п. 2.2

2. *Відповідь*. Функції не існує. *Вказівка*. Покласти $x = -3y$ і $y = -x$

3. *Відповідь*. Функції не існує. *Вказівка*. Розглянути з точки зору властивостей тригонометричних функцій і врахувати області визначення і значень шуканої функції

Завдання до п. 2.3.1

1. *Відповідь.* $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 1)$. *Вказівка*: використати підстановки: $x = a,\ x = 1 - a$

2. *Відповідь.* $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ *Вказівка*. Зробити в заданому рівнянні такі заміни: $x \to \frac{x-1}{2-3x}$; $x \to \frac{-x}{1+4x}$, з отриманої системи рівнянь, яка містить і задане рівняння, знайти шукану функцію

Завдання до п. 2.3.3

1. **Відповідь**: $f(x) = \frac{4}{3}x^2 + 2x + a$, a – довільна стала. *Вказівка*. Позначимо $f(0) = a$. Зробивши в заданому рівнянні заміну $x \to \frac{x}{2}$, дістанемо:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + x(1+x). \qquad (*)$$

Використовуючи цю ж заміну, послідовно отримаємо ланцюжок таких рівнянь:

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2^2}\right) + \frac{x}{2}\left(1 + \frac{x}{2}\right),$$

$$f\left(\frac{x}{2^2}\right) = f\left(\frac{x}{2^3}\right) + \frac{x}{2^2}\left(1 + \frac{x}{2^2}\right),$$

…

$$f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)+\frac{x}{2^{n-1}}\left(1+\frac{x}{2^{n-1}}\right).$$

Просумуємо отримані рівняння, після приведення подібних дістанемо наступну рівність:

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)+\left(x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2^2}+...+\frac{x}{2^{n-1}}\right)+\left(x^2+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^2}{2^4}+...+\frac{x^2}{2^{2(n-1)}}\right).$$

Використовуючи формулу для суми n членів геометричної послідовності, запишемо:

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)+x\cdot\left(\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2}\right)+x^2\cdot\left(\frac{1-(1/4)^n}{1-1/4}\right).$$

Враховуючи неперервність функції f, при будь-якому фіксованому x, матимемо:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)+x\cdot\left(\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2}\right)+x^2\cdot\left(\frac{1-(1/4)^n}{1-1/4}\right)\right);$$

$$f(x)=f(0)+2x+\frac{4}{3}x^2=a+2x+\frac{4}{3}x^2.$$

2. *Відповідь:* $f(x)=b\cdot 2^{5x/4}$, b – довільна стала. *Вказівка.* Покласти в заданому рівнянні $x=a$. Далі послідовно використати підстановки $x\to\frac{a}{5}, x\to\frac{a}{5^2}$, $x\to\frac{a}{5^3}, ..., x\to\frac{a}{5^{n-1}}$. З отриманих рівнянь можна дістати наступне:

$$f(a)=2^{a+\frac{a}{5}+\frac{a}{25}+...+\frac{a}{5^{n-1}}}\cdot f\left(\frac{a}{5^n}\right)=2^{\frac{5a}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)}\cdot f\left(\frac{a}{5^n}\right).$$

Використовуючи неперервність шуканої функції, дістати:

$$f(a)=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{5a}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)}\cdot f\left(\frac{a}{5^n}\right)=2^{\frac{5a}{4}}\cdot b, b=f(0).$$

3. *Відповідь.* $f(x)=\frac{4}{3}x-\frac{8}{7}x^2$. *Вказівка.* Скористатися методом розв'язання попереднього прикладу.

Завдання до п. 2.3.4

1. *Відповідь.* $f(x)=\dfrac{nx}{x+n}$. *Вказівка.* Скористатися методом розв'язання приклада 18.

2. *Відповідь.* $f(x)=\begin{cases} ax+\dfrac{c}{ad+1}, \text{ якщо } a^2d=b, ad\neq 1; \\ ax, \text{ якщо } b=-a, ad=-1, c=0; \end{cases}$. В інших випадках розв'язків немає. *Вказівка*. Нехай $y=0$, $z=x+d\cdot f(0)$. Тоді

$$f(z)=a(z-d\cdot f(0))+c=az+(c-d\cdot f(0)).$$

Оскільки $x\in R$, то й z може набувати довільного значення з множини R. Тому розв'язок даного функціонального рівняння має сенс шукати в класі лінійних функцій вигляду $f(x)=ax+c_1$. Підставивши цю функцію в задане рівняння, отримаємо:

$$a(x+d(ay+c_1))+c_1=ax+by+c;$$

$$(a^2d-b)y+(ad+1))c_1-c=0 \quad \forall y\in R.$$

Тоді $c_1=\dfrac{c}{ad+1}$, і $b=a^2d$.

Завдання до п. 2.4.1

1. *Відповідь*. Розв'язків немає. *Вказівка.* Відносно змінної x зліва в рівнянні функція є непарною, а в правій частині − парною.

2. *Відповідь*. $f(x)=\sin x$. *Вказівка.* Підібрати вдалу підстановку.

3. *Відповідь*. Розв'язків немає. *Вказівка.* Покласти $x=0$, а потім показати, що отримана функція $f(y)=y$ не є розв'язком заданого рівняння. Якщо в рівнянні задати $y=-x$, то можна отримати функцію $f(x)=-x$, яка також не задовольняє рівняння.

4. *Відповідь*. Розв'язків немає. *Вказівка.* Покласти $y=0$, а потім показати, що отримана функція $f(x)=\sin^2 x$ не є розв'язком заданого рівняння.

5. *Відповідь*. $f(x)=\sqrt{x}$.

6. *Відповідь.* $f(x) = x^2 - x$. *Вказівка.* Скористатися методом розв'язання прикладу 21

7. *Відповідь*. Розв'язків немає. *Вказівка.* Помітити, що ліва частина рівняння є парною відносно x і y, чого не можна сказати про функцію праворуч.

8. *Відповідь.* $f(x) = 1/\sqrt[3]{2}$, $f(x) = 0$. *Вказівка.* Покласти в заданому рівнянні спочатку $x = 0$, потім $y = 0$. З отриманої системи рівнянь дістати $f(x^3) = f(x^5)$, що можливе лише при $f(x) = C$. Підставивши цю функцію в задане рівняння, знайдемо, що константа може бути такою: $C = 0,\ C = 1/\sqrt[3]{2}$.

9. *Відповідь*. Розв'язків немає. *Вказівка.* Зробити в заданому рівнянні циклічну заміну: $x \to y,\ y \to z,\ z \to x$ і, додаючи отримане рівняння до заданого, дістати $f(xf(y) + yf(z) + zf(x)) = x$. З останнього при $y = z = x$ можна отримати таку рівність: $f(3xf(x)) = x$. Враховуючи вигляд правої частини цього співвідношення, припустити, що шукана функція є лінійною. Методом невизначених коефіцієнтів довести, що такої функції не існує.

Завдання до п. 2.4.2

1. *Відповідь*:. $f(x) = C + x^2$. *Вказівка.* Заміна $x + y = u;\ x - y = v$.
2. *Відповідь.* $f(x) = C\ln x$. *Вказівка.* Використати заміну $y = \log_x z$.
3. *Відповідь.* $f(x) = x$. *Вказівка.* Покласти $z = 0$.

Завдання до розділу IV

1. *Відповідь.* $f(n) = n + 1$. *Вказівка*. Нехай $f(x)$ − шукана функція. Тоді за умови, що $n = 1$, маємо рівність $f(f(1)) + \left(f(1)\right)^2 = 7$. Оскільки $f(f(1))$ − деяке натуральне число, то $\left(f(1)\right)^2 < 6$, а тому натуральне число $f(1) < 3$. Якщо $f(1) = 1$, то $f(f(1)) + \left(f(1)\right)^2 = f(1) + 1 = 2 \neq 7$.
Тому $f(1) = 2$. При цьому $f(f(1)) + \left(f(1)\right)^2 = f(2) + 4 = 7 \Rightarrow f(2) = 3$.
Припустимо, що $f(n) = n + 1$. Тоді
$n^2 + 3n + 3 = f(f(n)) + \left(f(n)\right)^2 = f(n+1) + (n+1)^2 = f(n+1) + n^2 + 2n + 1$.

З порівняння лівої і правої частин рівняння випливає, що $f(n+1)=n+2=(n+1)+1$. Отже, згідно з методом математичної індукції, $f(n)=n+1, \forall n \in N$.

2. *Відповідь.* $f(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$. *Вказівка.* Підставити послідовно в заданому рівнянні: $y=x, y=2x, y=3x$ і отримати за індукцією $f(nx)=nf(x)+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot x^2$. В цьому рівнянні покласти $x=1$.

3. *Відповідь.* $f(n)=2^{n+1}-1$. *Вказівка.* Скористатися методом математичної індукції.

4. Відповідь. $f(n)=a+b\cdot(-1)^n$, де $a=const, b=const$. *Вказівка.* Скористатися методом рекурентних співвідношень

Завдання для самостійної роботи

1. *Відповідь.* $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+bx, b-$ довільна стала. *Вказівка.* Довести, що шукана функція є непарною. Зробити послідовно заміни: $y=x, y=2x,$ $y=3x,$ припустити $f(x)=ax^3+bx$.

2. *Відповідь***.** $f(4/5)=24$. *Вказівка.* Зробити послідовну заміну $y=x,$ $y=2x, y=3x, y=4x,$ Знайти $f(1)$.

3. *Відповідь***.** $f(x)=\dfrac{8}{9}x^2$. *Вказівка.* Скористатися методом невизначених коефіцієнтів.

4. *Відповідь.* $f(x)=-\dfrac{8}{9}x^2+\dfrac{4}{5}x$. *Вказівка.* Скористатися методом невизначених коефіцієнтів.

5. *Відповідь.* $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^3+\sqrt[3]{x}\right); g(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^3-\sqrt[3]{x}\right)+a, a\in R$. *Вказівка.* Покласти $x=y$.

6. *Відповідь.* $f(x)=x^2+5x+1$. *Вказівка.* Скористатися методом невизначених коефіцієнтів.

7. *Відповідь.* $f(x)=\dfrac{9x^2+6x-1}{27}$. *Вказівка.* Скористатися методом невизначених коефіцієнтів.

8. *Відповідь.* $f(x)=\dfrac{3(x+1)(2-x)}{2(x^2+x+1)}$. *Вказівка.* Скористатися заміною $x\to\dfrac{2x+3}{x-2}$ і розв'язати отримане рівняння разом із заданим.

9. *Відповідь.* $f(x)=ae^x$, де $a=const$. *Вказівка.* Поклавши $x=0$, дістанемо $f(y)=f(0)e^y$. Позначимо $a=f(0)$. Перевіркою переконуємося, що функція $f(x)=ae^x$ є розв'язком заданого рівняння при будь-яких значеннях константи a.

10. *Відповідь.* $f(x)=\dfrac{2}{3x}-\dfrac{x}{3}$. *Вказівка.* Замінити в рівнянні $x\to\dfrac{1}{x}$, і розв'язати отримане рівняння разом із заданим.

11. 1) *Відповідь.* $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. *Вказівка.* Врахувати, що вирази $x,\dfrac{x-1}{x}$, які стоять під знаком невідомої функції f, є елементами групи $G=\left\{x,\dfrac{x-1}{x},\dfrac{1}{1-x}\right\}$ відносно операції «$\circ$» (композиції функцій). Тому, замінивши послідовно в заданому рівнянні x на $\dfrac{x-1}{x}$, $\dfrac{1}{1-x}$, дістанемо систему відносно «невідомих» $f(x),\ f\left(\dfrac{x-1}{x}\right),\ f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$. За допомогою правила Крамера (або іншого методу) знаходимо $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. Перевіркою переконуємося, що ця функція є розв'язком рівняння.

2) *Відповідь.* $f(x)=\frac{1}{7}\left(2+4x-\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}\right)$. *Вказівка.* Скористатися методом розв'язання попереднього прикладу.

3) *Відповідь.* $f(x)=\frac{1}{2x^2}+\frac{x^3+x-1}{2\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}$. *Вказівка.* Замінити послідовно x виразами $\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}, -\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$, отримати систему рівнянь, з якої знайти шукану функцію.

4) *Відповідь.* $f(x)=\frac{1}{15}\left(6-x+\frac{24x^2+12x-4}{x^3-x}\right)$. *Вказівка.* Скористатися тим, що вирази $x, \frac{x-1}{x+1}$ є елементами групи $G=\left\{x, \frac{x-1}{x+1}, -\frac{1}{x}, \frac{x+1}{1-x}\right\}$ відносно операції «$\circ$».

12. *Відповідь.* $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x-1}{x}-\frac{1}{1-x}\right)$. *Вказівка.* Скористатися методом розв'язання попереднього прикладу.

13. *Відповідь.* $f(x)=2\sqrt{x}+C,\quad C-$ константа. *Вказівка.* Замінивши x на $\sqrt{x}$, розв'язати отримане диференціальне рівняння.

14. *Відповідь.* $f(x)=\frac{7x^2-5}{3x}$. *Вказівка.* Скористатися заміною $x\to\frac{1}{x}$. Розв'язати систему з отриманого і заданого рівнянь.

15. *Відповідь.* $f(x)=\frac{3+6x}{5x}$. *Вказівка.* Скористатися заміною $x\to-\frac{1}{x}$. Розв'язати систему з отриманого і заданого рівнянь.

16. *Відповідь.* $f(x)=-2x$. *Вказівка.* Довести, що шукана функція є непарною і скористатися цією властивістю.

17. *Відповідь.* $f(x)=\dfrac{4x^2-x+1}{5x(x-1)}$. *Вказівка*. Скористатися методом розв'язання прикладу 11.4.

18. *Відповідь.* $f(x)=ax\ln x$, де $a=const$. *Вказівка*. Очевидно, що рівняння має тривіальний розв'язок $f(x)\equiv 0$. Знайдемо інші розв'язки. Нехай $\forall x\in R$ $f(x)\neq 0$. При $x=1, y=1$ маємо $f(1)=1\cdot f(1)+1\cdot f(1)$, що можливо тільки у випадку, коли $f(1)=0$.

За умовою задачі існує $f'(x)\ \forall x$:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)-f(x)}{h}.$$

Скористаємося підстановкою $y=1+\dfrac{h}{x}$ і отримаємо наступну рівність:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)f(x)+xf\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{x}f(x)+xf\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)-1\right)f(x)}{x\cdot\frac{h}{x}}+\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}}=$$

$$=\frac{f(x)}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\left((1+h/x)-1\right)}{h/x}+\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+h/x\right)-f(1)}{h/x}=\frac{f(x)}{x}+f'(1).$$

Позначимо $f'(1)=a$ і розв'яжемо отримане лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x}+a,$$

застосовуючи, наприклад, метод Лагранжа (варіації довільної змінної). Знайдемо $f(x)=ax\ln x+bx$. З урахуванням того, що $f(1)=0$, константа $b=0$.

19. *Відповідь.* $f(x) = x^3$. *Вказівка.* Зробимо послідовно такі підстановки: $x = t,\ y = t;\quad x = t,\ y = -t$ і отримаємо систему рівнянь відносно невідомих $f(t),\ f(2t),\ f(0)$. Віднімаючи одне від другого, дістаємо рівняння відносно $f(t)$.

20. *Відповідь.* $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. *Вказівка.* Продиференціювавши друге рівняння, отримати систему рівнянь, з якої знайти $f'(x)$, а далі, проінтегрувавши, – шукану функцію $f(x)$.

21. *Відповідь.* $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{3}$. *Вказівка.* Спочатку зробити заміну $x + 2 = z$ і дістати рівняння $2f(z) + f(1 - z) = z^2$. В ньому замінити $z \to 1 - z$. Розв'язуючи отримане рівняння разом з попереднім, знайдемо $f(z) = \frac{z^2 + 2z - 1}{3}$.

22. *Відповідь.* $f(x) = const$. *Вказівка.* Дивись приклад 12 п. 2.3.3.

23. *Відповідь.* $f(x) = x^3$. *Вказівка.* Скористатися заміною $x + y = u;\ x - y = v$ і в отриманому рівнянні покласти $v = u$. Або просто в заданому рівнянні підставити $y = 0$.

24. *Відповідь.* $f(x) = \frac{8x^2}{7}$. *Вказівка.* Скористатися методом розв'язання вправи 1 до п. 2.3.3.

25. *Відповідь.* $f(x) = a^x,\ a > 0;\ f(x) = 0$. *Вказівка.* Дивись приклад 35 п. 2.6

26. *Відповідь.* $\varphi(x) = \psi(x) + \frac{1}{1 + a - b}\int_a^b \psi(x)dx$. *Вказівка.* Позначити $\int_a^b \varphi(x)dx = C$, тоді $\varphi(x) = \psi(x) + C$. Невідому константу C знаходимо, задовольняючи функцією $\varphi(x) = \psi(x) + C$ задане рівняння.

27. *Відповідь.* $f(x) = -\frac{2x}{3} - \frac{1}{3x}$. *Вказівка.* Підставити замість x послідовно вирази $-x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}$, отримати систему чотирьох рівнянь, з якої знайти шукану функцію.

28. *Відповідь.* $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. *Вказівка.* Покласти послідовно в заданому рівнянні $x = 0, x = f(y)$. З отриманих рівностей дістати наступне співвідношення: $f(-f(y)) = 3f(f(y)) + f^2(y) - 2$, або, замінивши $f(y) = z$, записати $f(-z) = 3f(z) + z^2 - 2$. В останній рівності замінити $z \to -z$ і розв’язати отримане рівняння сумісно з попереднім.

29. *Відповідь.* $f(x) = 1 + 2x$. *Вказівка.* Скористатися підстановкою $x \to \frac{x+1}{x-1}$ і розв'язати отримане рівняння разом із заданим.

30. *Відповідь.* $f(x) = a\sin x, a$ – довільне дійсне число. *Вказівка.* Підстановка $y = \frac{\pi}{2}$; в отриманому рівнянні покласти $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$ і використати заміну $x \to \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

31. *Відповідь.* $f(x) = x$. *Вказівка.* Введемо до розгляду функцію $g(x) = f(x) - x$, тоді рівняння запишеться у вигляді:

$$g(x^2) = -g(x). \qquad (*)$$

Нехай $x > 0$. Виконавши в рівнянні (*) n разів заміну $x \to \sqrt{x}$, матимемо:

$$g(x) = -g(\sqrt{x}),$$

$$-g(\sqrt{x}) = -g(\sqrt[4]{x}),$$

…

$$(-1)^{n-1} \cdot g(\sqrt[2^{n-1}]{x}) = (-1)^n \cdot g(\sqrt[2^n]{x}).$$

Додавши ці рівняння, дістанемо: $g(x)=(-1)^n g(\sqrt[2^n]{x})$. Нехай $n=2m$, тоді: $g(x)=g(\sqrt[4^m]{x})$.

Враховуючи, що $x>0$, матимемо: $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty} g(\sqrt[4^n]{x})=g(e^0)=g(1)$.

Із (*) знаходимо, що $g(1)$=0, $g(0)=0$, тобто при $x\geq 0$ $\quad g(x)=0$. Оскільки функція $g(x)$ є парною, то $g(x)=0$ при всіх дійсних значеннях змінної. Отже, $f(x)=x$ − єдина функція, яка є розв'язком заданого рівняння.

32. *Відповідь.* $f(x)=\dfrac{x^3+x-1}{x^3-x^2+x}$. *Вказівка*. Скористатися заміною $x\to 1/x$.

33. *Відповідь.* $f(x)=\dfrac{a^2x^2-a}{x(a^2-1)}$. *Вказівка*. Скористатися заміною $x\to 1/x$.

34. *Відповідь.* $f(x)=\dfrac{\cos x}{4}$. *Вказівка*. Спочатку отримати рівняння $f(x)=\dfrac{1}{3}f(x+\pi)+\dfrac{1}{3}\cos x$, а потім застосувати метод розв'язання прикладу 46 (див. п. 2.9).

35. *Відповідь.* $f(x)=a\sin x,\ a$ − довільне дійсне число.

36. *Відповідь.* $f(-1)=0,5$. *Вказівка*. Підстановка $y=1/x$.

37. *Відповідь.* $f(x)=x+a,\ a$ − довільне дійсне число. *Вказівка*. Продиференціювати рівняння за змінною y. Покласти в отриманій рівності $y=0$, знайти розв'язок диференціального рівняння.

38. *Відповідь.* $f\left(x\right)=x^2+ax,\ a$ − довільна стала. *Вказівка.* Ввести допоміжну функцію $g(x)=f(x)-x^2$. Тоді задане рівняння зведеться до рівняння Коші вигляду $g\left(x+y\right)=g(x)+g(y)$, розв'язок якого отриманий в п. 2.5.

39. *Відповідь.* $f(x)=\pm e^{x-2}$, $f(x)\equiv 0$. *Вказівка*. Виконайте дві підстановки: 1) $x=0, y=t$; 2) $x=0, y=-t$. З отриманих рівностей дістати $f(x)=ae^{x}$. Значення константи a знайти, задовольняючи задане рівняння цією функцією.

40. *Відповідь.* $f(x)=x+1$. *Вказівка*. Виконати чотири підстановки: 1) $x=0, y=t$; 2) $x=t, y=2t$; 3) $x=2t, y=t$; 4) $x=t, y=t$. Позначити $f(0)=a$ і з системи чотирьох рівнянь відносно невідомих $f(t), f(-t), f(2t), f(3t)$ дістати шукану функцію. Константу a знайти, підставляючи отриману функцію в задане рівняння.

41. *Відповідь.* $f(x)=a+\ln x, a$ – довільне дійсне число. *Вказівка*. Використати підстановки: 1) $x=1, y=t$; 2) $x=t, y=t^2$; 3) $x=t, y=1/t^2$. Знайти функцію з отриманої системи трьох рівнянь. Виконати перевірку.

42. *Відповідь.* $f(x)=ae^{x}, a$ – довільне дійсне число. *Вказівка*. Спочатку в заданому рівнянні зробити заміну: $x+y=t; y=z$ і дістати рівняння $2f\left(t+z\right)+f(t-z)=f(t)\cdot\left(2e^{z}+e^{-z}\right)$. В ньому виконати наступні підстановки: 1) $t=0, z=u$; 2) $t=u, z=2u$; 3) $t=u, z=-2u$. Розв'язати отриману систему трьох рівнянь. Перевірити, що знайдена функція задовольняє задане рівняння.

43. 1) *Відповідь.* $f(x)=-x+0{,}5$. *Вказівка*. Підстановка $x=f(y)$ приводить до такої рівності: $f(y)=C-y$. Задовольняючи цією функцією задане рівняння, дістанемо $C=0{,}5$.

2) *Відповідь.* $f(x)=-x^2$, $f(x)\equiv 0$. *Вказівка*. Довести, що шукана функція є парною. Далі покласти $y=-x$.

44. *Відповідь.* $f(x)=-1$, $f(x)=(1+a)^{x}-1, a$ – довільне дійсне число. *Вказівка*. Скористаємося методом Коші. Підставляючи послідовно в задане рівняння: $y=x, y=2x, y=3x$, отримаємо:

$$f(2x)=2f(x)+f^2(x)=(f(x)+1)^2-1;$$

$$f(3x)=3f(x)+3f^2(x)+f^3(x)=(f(x)+1)^3-1;$$

$f(4x)=(f(x)+1)^4-1;$ … і т.д.

Методом математичної індукції доведемо, що $\forall x\in R, n\in N$

$$f(nx)=(f(x)+1)^n-1. \qquad (*)$$

Із (*) при $x=1$ маємо : $f(n)=(f(1)+1)^n-1.$

Позначимо $f(1)=A$. Тоді для $x\in N$ маємо розв'язки функціонального рівняння у такому вигляді: $f(n)=(A+1)^n-1.$ Замінюючи в (*) x на $\frac{m}{n}$, отримаємо:

$$f(m)=\left(f\left(\frac{m}{n}\right)+1\right)^n-1;\ m,n\in N.$$

Звідси, враховуючи, що $f(m)=(A+1)^m-1$, а також, що $1+f(x)=(f(x/2)+1)^2\geq 0$, маємо: $f\left(\frac{m}{n}\right)=\left(A+1\right)^{m/n}-1.$

Отже, тим самим встановлено вигляд функції f, але лише для додатних раціональних значень аргументу. Нехай тепер ρ − будь-яке додатне ірраціональне число. Відомо, що існує збіжна до нього послідовність раціональних чисел $r_1, r_2, ..., r_n, ...$

На елементах цієї послідовності

$$f(r_n)=\left(A+1\right)^{r_n}-1,\ \ n=1,2,3,...$$

Перейдемо тут до границі при $n\to\infty$; маємо:

$$f(\rho)=\lim_{n\to\infty} f\left(r_n\right)=(A+1)^{\rho}-1.$$

Отже, $f(x)=(A+1)^x-1,\ x>0,\ x\in R$. Поклавши в умову $x=0$, дістанемо $f(y)=f(0)+f(y)-f(0)f(y)$. Тобто $f(0)=-1$ або $f(0)=0$.

Якщо $f(0)=0$, то при $y=-x,\ x>0$ з умови знаходимо

$$0=f(0)=f(x-x)=$$

$$=(A+1)^x-1+f(-x)+((A+1)^x-1)\cdot f(-x)=(A+1)^x-1+(A+1)^x f(-x).$$

Звідси $f(-x)=(A+1)^{-x}-1,\ x>0$. Тобто $f(x)=(A+1)^x-1,\ x<0.$

У випадку $f(0)=-1$, отримаємо $f(x)=-1$. Здійснивши перевірку, переконуємося, що ця функція є розв'язком заданого рівняння.

45. *Відповідь.* $f(x)=ax+\frac{x(x+1)}{2}$, a − довільне дійсне число. *Вказівка*. Попередньо доведіть, що шукана функція є неперервною при всіх дійсних значеннях змінної. Далі скористайтеся методом розв’язання прикладу 47.

46. *Відповідь.* $f(x)=ax^2+bx+1-a-b.$ a,b − довільні дійсні числа. *Вказівка*. Отримати $f(1)=1$ і виділити в заданному рівнянні два рівняння Коші, що надає аргументи для пошуку функції у вигляді $f(x)=ax^2+bx+c$.

47. *Відповідь.* $f(x)=0,\ f(x)=\cos ax,\ f(x)=\text{ch}ax,\ a\in R$ − довільне дійсне число. *Вказівка*. Перевіркою переконуємося, що $f(x)\equiv 0$ є розв'язком рівняння. Припустимо, що $f(y_0)\neq 0$ для деякого $y_0\in R$. Підставимо в задане рівняння $x=0,\ y=y_0$ і отримаємо $f(y_0)=f(0)\cdot f(y_0)$, звідки $f(0)=1$. При $y=0$ задане рівняння набуває вигляду $f(x)=f(-x)$, тобто шукана функція є парною. Оскільки функція $f(x)$ неперервна в точці 0, то існує таке число $c>0$, що для всіх $x\in[0,c]$ виконується нерівність $f(x)>0$. Розглянемо два випадки:

а) якщо $f(c)\le 1$, то існує таке $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, що $f(c)=\cos\alpha$. Перепишемо задане рівняння у вигляді

$$f\left(x+y\right)=2f(x)\cdot f(y)-f(x-y). \qquad (*)$$

Для розв'язання отриманого рівняння (*) застосуємо метод Коші. Зробимо в рівнянні (*) послідовно підстановки $x=y=c;\ x=c,\ y=2c;\ x=c,\ y=3c$, отримаємо:

$$f\left(2c\right)=2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha;$$

$$f\left(3c\right)=2\cos\alpha\cos 2\alpha-\cos\alpha=\cos 3\alpha;$$

$$f\left(4c\right)=2\cos\alpha\cos 3\alpha-\cos 2\alpha=\cos 4\alpha.$$

Далі методом математичної індукції доведемо, що $f\left(nc\right)=\cos n\alpha.$ Припустимо, що $f\left((n-1)c\right)=\cos\left(n-1\right)\alpha.$ Тоді

$$f\left(nc\right)=f\left(c+(n-1)c\right)=2f\left((n-1)c\right)f\left(c\right)-f\left((n-2)c\right)=$$
$$=2\cos(n-1)\alpha\cdot\cos\alpha-\cos(n-2)\alpha=\cos n\alpha.$$

Підставляючи в задане рівняння $x=y=\frac{1}{2}c$, отримаємо

$$\left(f\left(\frac{c}{2}\right)\right)^2=\frac{f(0)+f(c)}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Методом математичної індукції доведемо, що

$$f\left(\frac{c}{2^n}\right)=\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right),\ f\left(\frac{mc}{2^n}\right)=\cos\left(\frac{m\alpha}{2^n}\right)\quad \forall m\in N, \forall n\in N.$$

Оскільки довільне число x можна подати як границю послідовності чисел $\frac{m\alpha}{2^n}$, де $m\in N, n\in N$, то, враховуючи неперервність та парність функції $f(x)$, матимемо $f\left(cx\right)=\cos\alpha x\ \forall x\in R.$ Пряма перевірка показує, що кожна функція $f\left(x\right)=\cos ax$ для фіксованого $a\in R$ є розв'язком заданого рівняння.

б) якщо $f(c)>1$, то існує таке α, для якого $f(c)=\text{ch}\alpha$. За допомогою аналогічних міркувань можна довести, що всі розв'язки заданого рівняння у цьому випадку можна записати формулою $f(x)=\text{ch}ax$.

48. *Відповідь.* $f(x)=\frac{1}{2}\cos x$. *Вказівка.* Враховуючи лінійність правої частини рівняння відносно $\cos x$, шукати функцію у вигляді $f(x)=a\cos x+b$. Крім того, можна скористатися методом розв'язання прикладу 46 (п. 2.9).

49. *Відповідь.* $f(x)=x^2+ax$. *Вказівка.* При $x=y=0$ отримаємо $f(0)=2f(0)$, звідки $f(0)=0$. Оскільки за умови функція диференційовна,

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)+2xy}{y}=f'(0)+2x.$$

Тоді $f(x)=x^2+f'(0)x+C$. Зважаючи на те, що $f(0)=0$, перевіркою встановлюємо, що довільна функція вигляду $f(x)=x^2+ax$ є розв'язком рівняння.

50. *Відповідь.* $f(x)=a/x, a$ – довільне дійсне число. *Вказівка*. Ввести функцію $g(x)=f(1/x)$ і отримати функціональне рівняння Коші, для якого розв'язком є функція $g(x)=ax$.

51. *Відповідь.* $f(x)=a, a$ – довільне дійсне число. *Вказівка*. Замінюючи в нерівності $x\to y;\ y\to z;\ z\to x$, дістанемо:

$$f(y+x)+f(z+x)+f(y+x)\geq 3f(y+2z+3x).$$

Віднімаючи цю нерівність із заданої, отримуємо:

$$f(x+2y+3z)\le f(y+2z+3x).$$

Послідовно підставимо сюди $x=0,\ y=0;\ x=0,\ z=0;\ y=0,\ z=0$ і набудемо такої подвійної нерівності $f(3z)\le f(z)\le f(3z)$, звідки $f(z)=f(3z)$, а з цього в свою чергу випливає, що шукана функція є константою.

52. *Відповідь.* Не існує. *Вказівка*. Нехай $x_1\ne 0$ і використаємо підстановку $y_1=1/x_1$. Тоді нерівність набуде вигляду:

$$f^2(x_1+y_1)\ge f^2(x_1)+2f(1)+f^2(y_1)\ge f^2(x_1)+a,$$

де $a=2f(1)>0$ (за умовою задачі). З цієї нерівності, поклавши послідовно $x_n=x_{n-1}+y_{n-1},\ y_n=1/x_n,\ n\ge 2$, отримаємо:

$$f^2(x_n+y_n)\ge f^2(x_n)+a=f^2(x_{n-1}+y_{n-1})+a\ge f^2(x_{n-1})+2a\ge\ldots\ge$$
$$\ge f^2(x_1)+na.$$

Оскільки послідовність $\{f(x_n)\}$ необмежена, то не існує функції, яка задовольняла б умовам задачі.

53. *Відповідь.* Не існує. *Вказівка*. Припустимо, що така функція існує. Якщо в нерівності покласти $x=\pi/2,\ y=\pi/2$, то отримаємо $\left|f(\pi)+2\right|<2$, тобто $f(\pi)<0$. У той же час при $x=3\pi/2,\ y=-\pi/2$ нерівність набуває вигляду $\left|f(\pi)-2\right|<2$, що означає $f(\pi)>0$. Отримали протиріччя, отже, шуканої функції не існує.

54. *Відповідь.* $f(x)=x$. *Вказівка*. Довести, що $f(0)=0$. Далі − ланцюжок нерівностей: $f(x)\ge f(x+(-x))-f(-x)=-f(-x)\ge-(-x)=x$. Звідси та з нерівності $f(x)\le x$ випливає, що $f(x)=x$.

55. *Відповідь.* $f(x)=x,\ f(x)\equiv 1\ \forall x>0$. *Вказівка*. Перевіркою переконуємося, що $f(x)\equiv 1$ є розв'язком заданого рівняння. Припустимо, що $f(a)\ne 1$ для деякого $a>0$. Тоді зробивши в заданому рівнянні заміни $x\to a,\ y\to xy$; в отриманому виразі вважаючи $x\to a^x,\ y=y$, і, нарешті, в останньому − $x\to a,\ y=f(x)$, отримаємо:

$$\left(f(a)\right)^{f(xy)}=f(a^{xy})=\left(f(a^x)\right)^{f(y)}=\left(f(a)\right)^{f(x)f(y)},$$

звідки

$$f(xy)=f(x)\cdot f(y). \qquad (*)$$

Тобто функція $f(x)$ повинна бути як мультиплікативною, так і адитивною. Враховуючи умову $f(x)>0$, маємо $f(x)=ax$. Підставляючи $f(x)=ax$ у рівність (*) , отримаємо $axy=a^2xy$, звідки $a=a^2$, тобто $a=0$ або $a=1$. Оскільки $f(x)>0$, то розв'язками заданого рівняння є лише функції $f(x)=x$, $f(x)\equiv 1$ для всіх $x>0$. *Зауваження*: в [7] наведений хід розв'язання задачі за умови неперервності шуканої функції.

56. *Відповідь.* $f(2018)=2$. *Вказівка*. Обчислити $f(x+1)$, $f(x+2)$, $f(x+3)$, $f(x+6)$, послідовно використовуючи задану тотожність:

$$f(x+1)=\frac{f(x)}{f(x-1)};$$

$$f(x+2)=\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{f(x)}{f(x)f(x-1)}=\frac{1}{f(x-1)};$$

$$f(x+3)=\frac{1}{f(x)};$$

$$f(x+6)=f((x+3)+3)=\frac{1}{f(x+3)}=f(x).$$

Функція $f(x)$ виявляється періодичною з періодом 6. Тому $f(2018)=f(336\cdot 6+2)=f(2)=2$.

57. *Відповідь.* $f(x)\equiv 0$. *Вказівка*. Зробивши підстановку $x\to -x$, отримаємо $f(x^2+y)=f(-x)+f(y^2)$. Прирівнюючи праві частини заданого і отриманого співвідношень, дістанемо $f(x)=f(-x)$, тобто шукана функція є парною. За допомогою підстановки $x=y=0$ отримаємо $f(0)=0$. Заміною в заданому рівнянні $y\to -y$ дістанемо вираз $f(x^2-y)=f(x)+f(y^2)$, права частина якої збігається з правою частиною заданого рівняння. Отже, $f(x^2+y)=f(x^2-y)$, звідки при $y=x^2$ випливає $f(2x^2)=f(0)=0$. Оскільки функція $f(x)$ є парною, то $f(x)\equiv 0$ – єдиний розв'язок рівняння.

58. *Відповідь.* $f(x)\equiv 1$. *Вказівка.* Підставити $y\to\frac{x}{2}$, отримати: або $f(x/2)=0$, або $f(x)=1$, і довести за допомогою заданого рівняння, що у випадку, коли $f(x_0)=0$ для деякої точки x_0 виявляється $f(x)=0\ \forall x\in R$, що суперечить умові.

59. *Відповідь.* При $a=0$ $f(x)=0$. При $a\neq 0$ розв'язків немає. *Вказівка.* Підставивши в рівняння $x=1, y=0$, одержимо $f(0)+0\cdot f(1)=f(0)+a$, звідки $a=0$. Тоді рівняння набуде вигляду:

$$x^2 f(y)+yf(x^2)=f(xy). \qquad (*)$$

Підставимо в (*) $y=x$ і отримаємо:

$$x^2 f(x)+xf(x^2)=f(x^2). \qquad (**)$$

З (**) при $x=1$ одержимо: $f(1)=0$. Якщо в (*) зробити заміну: $x\to -x,\ y\to x$, то дістанемо рівність

$$x^2 f(x)+xf(x^2)=f(-x^2). \text{ Отже, } f(x)=f(-x)\ .$$

Якщо в (*) покласти $y=-x$, то отримаємо $x^2 f(-x)-xf(x^2)=f(-x^2)$, або

$$x^2 f(x)-xf(x^2)=f(x^2)\ \forall x\in R.$$

Віднімаючи останню рівність від (**), отримаємо $2xf(x^2)=0$. Звідси, враховуючи, що $f(0)=0$ і парність шуканої функції, то для всіх $x\in R$ виконується рівність $f(x)\equiv 0$.

60. *Відповідь.* $f(x)=x, \forall x\in R$. *Вказівка.* Довести, що шукана функція є непарною.

61. *Відповідь.* $f(x)=x,\ \forall x\in R^+$. *Вказівка.* Підставити $x=y=0$, отримати $f(0)=0$. Замінити $y\to -y$, дістати

$$f((x-y)^2)=f(x^2)+f(y^2)-2xy\ \ \forall x\in R, \forall y\in R.$$

Віднімаючи отриману рівність від заданої, одержати:

$$f((x+y)^2)-f((x-y)^2)=4xy\ \ \forall x\in R, \forall y\in R.$$

Якщо в цьому співвідношенні покласти $y=x$, то рівність набуде вигляду:

$f(4x^2)-f(0)=4x^2$, тобто $f(x)=x\ \forall x\in R^+$.

62. *Відповідь.* а) $f(x)\equiv 0,\ f(x)\equiv 1,\ f(x)\equiv -1.$ *Вказівка.* Підставивши в рівняння $x=y=0$, отримуємо: або $f(0)=0,$ або $f(0)=1,$ або $f(0)=-1.$ Якщо покласти $y=-x$, то з рівняння дістанемо: $f(2x^3)=f^3(0)\ \forall x\in R$, тобто $f(z)=f(0)\ \forall z\in R$. Перевіркою переконуємося, що рівняння має три розв'язки $f(x)\equiv 0,\ f(x)\equiv 1,\ f(x)\equiv -1.$

б) $f(x)=\begin{cases} c_1,\ x<0; \\ c_2,\ x=0; \\ c_3,\ x>0, \end{cases}$ де c_1, c_2, c_3 – довільні сталі. *Вказівка.* Нехай $x-y=a$.

Тоді $f(a)=f(3ay^2+3a^2y+a^3)$. Зафіксуємо $a>0$. Оскільки квадратична функція $z=3ay^2+3a^2y+a^3$ досягає свого найменшого значення $a^3/4$ в точці $y=-a/2$, то її множина значень $E(z)=\left[a^3/4;\infty\right)$. Оскільки $a>0$ довільне, якомога мале число, то $f(z)=f(a)$ для всіх $z>0$. Отже функція f є сталою на $(0;\infty)$. Зафіксувавши $a<0$, аналогічно встановлюємо, що функція f є сталою на $(-\infty;0)$. Перевіркою переконуємося, що функції вигляду $f(x)=\begin{cases} c_1,\ x<0; \\ c_2,\ x=0; \\ c_3,\ x>0, \end{cases}$ де $c_1,\ c_2,\ c_3$ – довільні сталі, задовольняють умову задачі.

63. *Відповідь.* $f(x)=x,\ f(x)=-x$. *Вказівка.* Підставивши в рівняння $x=y=0$, отримати $f(0)=0$. Якщо $y=0$, то $f^2(x)=x^2$, тобто $|f(x)|=|x|$. З чотирьох функцій : 1) $f(x)=x$, 2) $f(x)=-x$, 3) $f(x)=|x|$, 4) $f(x)=-|x|$ лише 1 і 2 задовольняють умову задачі.

64. *Відповідь.* $f(x)=\frac{3}{5}\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{5}x,\ \forall x\in[0,1]$. *Вказівка.* Підставити $y=\frac{\pi}{2}-x$ і розв'язати систему з двох рівнянь – отриманого і заданого – відносно невідомих $f(\sin x)$ і $f(\cos x)$. Далі виконати заміну: $t=\sin x$, $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-t^2}$.

65. *Відповідь.* $f(x)=C\ln x$. *Вказівка.* Після диференціювання за x і y заданого рівняння отримаємо систему

$$yf'(xy) = f'(x),$$
$$xf'(xy) = f'(y),$$

з якої випливає рівність $xf'(x) = yf'(y)$ для будь-яких x і y. Отже, $xf'(x) = C,\ \ f'(x) = \dfrac{C}{x},\ \ f(x) = C\ln x + C_1$.

Перевірка показує, що $C_1 = 0$, тобто $f(x) = C\ln x$.

66. *Відповідь.* $f(1) = \sec 1 + \mathrm{tg} 1$. *Вказівка*. Оскільки $f''(x) = -f'(1-x)$, а із умови задачі маємо $f'(1-x) = f(x)$, то отримаємо рівняння $f''(x) + f(x) = 0$. Звідси знаходимо, що $f(x) = A\cos x + B\sin x$.

Враховуючи умову $f(0) = 1$, маємо: $f(x) = \cos x + B\sin x$, а $f(x) = -\sin x + B\cos x$. Запишемо $f(1-x)$ таким чином:

$$f(1-x) = \cos(1-x) + B\sin(1-x) =$$
$$= \cos 1\cos x + \sin 1\sin x + B\sin 1\cos x - B\cos 1\sin x =$$
$$= (\cos 1 + B\sin 1)\cos x + (\sin 1 - B\cos 1)\sin x.$$

Тоді в рівності $f'(x) = f(1-x)$, прирівнюючи коефіцієнти при $\sin x$ і $\cos x$ в лівій і правій частинах, знаходимо, що $B = \cos 1 + B\sin 1$ і $-1 = \sin 1 - B\cos 1$, звідки маємо

$$B = \frac{\cos 1}{1-\sin 1} = \frac{1+\sin 1}{\cos 1} = \sec 1 + \mathrm{tg} 1.$$

67. *Відповідь.* $f'0) = C = \pm\sqrt{3}$. *Вказівка*. Перепишемо рівняння таким чином:

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Інтегруючи обидві частини, отримаємо $\ln f'(x) = \ln\left(f(x)\right) + C_1$; $f'(x) = Cf(x)$. Отже, маємо розв'язок $f(x) = Ae^{Cx}$, де *A*, *C* − довільні константи. З того, що $f(0) = 1$, знайдемо *A* = 1, і диференціюванням функції, знайдемо $C^4 = f^{(4)}(0) = 9$, звідки $f'(0) = C = \pm\sqrt{3}$.

68. *Відповідь.* $f(x) = x$. *Вказівка*. Оскільки функція f є адитивною, то $f(0) = 0$ і f є непарною.

Із рівностей а) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, б) $f(1) = 1$, в) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ для $x \neq 0,\ x \neq 1$ маємо

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}\,f(1-x)=\frac{1-f(x)}{(1-x)^2}$$ з одного боку,

а з іншого –

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)=f\left(1+\frac{x}{1-x}\right)=1+f\left(\frac{x}{1-x}\right)=1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 f\left(\frac{1-x}{x}\right)=$$

$$=1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)=1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\frac{1}{x^2}\,f(x)-\left(\frac{x}{1-x}\right)^2=$$

$$=\frac{1-2x+f(x)}{(1-x)^2}.$$

Прирівнюючи два отримані вирази, дістанемо $f(x)=x$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андреев А.А. Функциональные уравнения. Учебное издание. Серия А: Математика. Вып. 3. / А.А. Андреев, Ю.Н. Кузьмин, А.Н.Савин. – Самара: Пифагор, 1997. – 45 с.

2. Ясинський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування / В.А. Ясинський. − Тернопіль: Богдан, 2006. − 208 с.

3. Бродский Я. С. Функциональные уравнения / Я.С. Бродский, А.К. Слипенко. – К.: Вища школа, 1983. – 96 с.

4. Ильин В.А. Методы решения функциональных уравнений / В.А. Ильин // Соросовский образовательный журнал. – 2001. – № 2. – С. 116 – 120.

5. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения / Л.М. Лихтарников.– СПб.: Лань, 1997. – 160 с.

6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах: том 1. / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1968. − С. 157 – 162.

7. Вороний М.О. Функціональні рівняння в олімпіадній математиці: Методичний посібник / М.О. Вороний. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2010. – 68 с.

8. Заочные математические олимпиады / Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер, Ж.М. Раббот, А.Л. Тоом. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 176 с.

9. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике / Н.В. Горбачев. – М.: МЦНМО, 2004. – 560 с.

10. Данилин А.Р. Студенческие математические олимпиады ВУЗов России (теоретические туры) и математические олимпиады УГТУ 1997 − 2000 гг: Учебное пособие для студентов вузов по курсу «Математика» / А.Р. Данилин, Ю.Б. Мельников, Г.Л. Ходак. – Екатеринбург: Изд-во УГТУ − УПИ, 2004. − 110 с.

11. Зарубежные математические олимпиады. / С.В. Конягин, Г.Я. Тоноян, И.Ф. Шарыгин, и др.; под ред. И.Н. Сергеева. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 416 с.

12. Зюбин С.А. Сборник олимпиадных задач по высшей математике: учебное пособие. / С.А. Зюбин, Т.В. Тарбокова, В.М. Шахматов. – Томск: Изд-во ТПУ, 2005. – 107 с.

13. Максимов В.П. Сборник задач для подготовки студентов к олимпиадам по математике: Учебное пособие (для проведения спецкурсов и факультативов) / В.П. Максимов, Т.Э. Захарова. – Новосибирск: СибГУТИ. – 2008. − 144 с.

14. Кузин Г.А. Нестандартные задачи по курсу высшей математики.

Методические рекомендации для студентов I и II курсов дневного отделения / Г.А. Кузин. – Новосибирский государственный технический университет. – Новосибирск, 2003. – 95 с.

15. Фалин Г. Функциональные уравнения и неравенства / Г. Фалин, А. Фалин // Квант. − 2006. − № 6. − С. 34 − 39.

16. Садовничий В.А. Задачи студенческих олимпиад по математике / В.А. Садовничий, А.С. Подколзин. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1977. – 207 с.

17. Студенческие олимпиады УГТУ-УПИ по математике: учебное пособие / Б.М. Веретенников, Л.П. Мохрачева, А.Б. Соболев, Г.Л. Ходак. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006. − 223 с.

18. Ацель Я. Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений / Я. Ацель. – Успехи математических наук, 1956. − Т. XI, вып. 3 (69). − С. 1 − 68.

19. The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985–2000 Problems, Solutions, and Commentary. − The Mathematical Association of America. − 351 p.

20. Федак І.В. Готуємося до олімпіади з математики / І.В. Федак. − Кам'янець-Поділ.: Абетка, 2006. − 420 с.

21. Пенцак Є. Функційні рівняння: Методичний посібник / Є. Пенцак. − Львів: Ред.-вид. відділ Львів. Ун-ту, 1998. − 112 с.

22. Попов И.Ю. Задачи повышенной трудности в курсе высшей математики: учебное пособие / И.Ю. Попов. − СПб.: ИТМО. − 2008. − 214 с.

Навчальне видання

Сторчай Володимир Федорович
Коряшкіна Лариса Сергіївна

ГОТУЄМОСЬ ДО ОЛІМПІАДИ. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ
Навчальний посібник

Видано за редакцією авторів

Підп. до друку 14.09.2018. Формат 30х42/4.
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 8,5.
Обл.-вид. арк. 10,8 Тираж пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видрукувано
в Національному технічному університеті
«Дніпровська політехніка»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842.
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.