МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

Н.П. Уланова, В.В. Приходько

ПРАКТИКУМ З ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ "ДП"

2019

УДК 514.742.2 (075.8)
У 47

Рекомендовано до видання вченою радою НТУ “Дніпровська політехніка” як навчальний посібник (протокол № 9 від 05.07.2018).

Рецензенти:

В.В. Лобода – д-р фіз.-мат. наук, проф., зав. кафедри теоретичної та комп’ютерної механіки Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара;

Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. кафедри вищої математики Національного технічного університету “Дніпровська політехніка”.

Уланова Н.П.

У 47 Практикум з векторної алгебри: навч. посіб. / Н.П. Уланова, В.В. Приходько; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т “Дніпровська політехніка”. – Дніпро: НТУ “ДП”, 2019. – 69 с.

Викладено основні елементи векторної алгебри. Наведено детальне розв’язання типових задач. Запропоновано зразки аудиторних занять та завдань для самостійної роботи. Матеріал доповнено варіантами домашніх індивідуальних завдань.

Рекомендовано студентам, які вивчають відповідний розділ вищої математики.

УДК 514.742.2(075.8)

1. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

1.1. Вектор. Основні поняття

Величини, які можна охарактеризувати лише числом, називаються ***скалярними***. Приклади скалярних величин – маса, щільність, електричний заряд, температура. Величини, які визначаються не лише числовим значенням, а й напрямом у просторі, називають ***векторними***. До них належать, зокрема, сила, переміщення, швидкість, прискорення, напруженість електричного та магнітного полів.

Геометричним вектором або просто ***вектором*** називається спрямований відрізок. Якщо A – початкова точка, а B – кінцева, то вектор позначається $\overline{AB}$. Якщо початок і кінець вектора не вказуються, то його позначають малою буквою латинського алфавіту $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, … .

Вектор $\overline{BA}$ називають ***протилежним*** вектору $\overline{AB}$. Вектор $-\overline{a}$ є ***протилежним*** вектору $\overline{a}$.

Довжиною або ***модулем*** вектора називається відстань між його початком і кінцем. Модулі векторів $\overline{AB}$ і $\overline{a}$ позначаються відповідно $\left|\overline{AB}\right|$ і $\left|\overline{a}\right|$. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається ***одиничним***. Одиничний вектор того самого напряму, що й вектор $\overline{a}$, називають його ***ортом*** і позначають $\overline{a}^{\,0}$.

Вектор, у якого початок і кінець збігаються, звуть ***нульовим*** вектором і позначають як $\overline{0}$. Його довжина дорівнює нулю, а напрямок не визначений.

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих $\left(\overline{a}\parallel\overline{b}\right)$. Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому іншому вектору.

Два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають ***рівними*** $\left(\overline{a}=\overline{b}\right)$, якщо вони колінеарні, мають однакові довжини й однакові напрямки.

З визначення рівності векторів випливає, що вектори можна переносити паралельно самим собі, не порушуючи їх рівності. Такі вектори називаються вільними. Вектори, які утворюються паралельним перенесенням уздовж $\overline{a}$ і лежать з ним на одній прямій називають ***ковзаючими*** векторами. Вектор звуть

пов'язаним, якщо він має фіксовану точку початку і його не можна переносити, виходячи з фізичних причин.

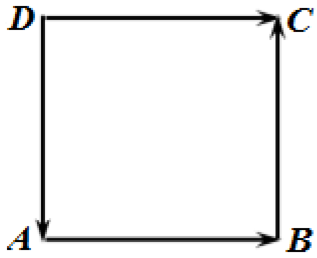


Рис. 1

Вектори називаються ***компланарними***, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Приклад. Задано квадрат *ABCD*. Очевидно, $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{DC}\right| = \left|\overline{DA}\right|$ (рис.1). Рівними є вектори $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$ $\left(\overline{AB} = \overline{DC}\right)$. Вектор $\overline{BC}$ протилежний вектору $\overline{DA}$ $\left(\overline{BC} \neq \overline{DA},\ \overline{BC} = -\overline{DA}\right)$.

1.2. Додавання і віднімання векторів

Нехай $\overline{a}$ і $\overline{b}$ – два довільних вектори. За допомогою паралельного перенесення приведемо вектор $\overline{a}$ до довільної точки *O*, а потім від кінця цього вектора відкладемо вектор $\overline{b}$. ***Сумою*** цих векторів $\overline{a} + \overline{b}$ є вектор, початок якого збігається з початком вектора $\overline{a}$, а кінець – із кінцем $\overline{b}$ (***правило трикутників***), рис.2.

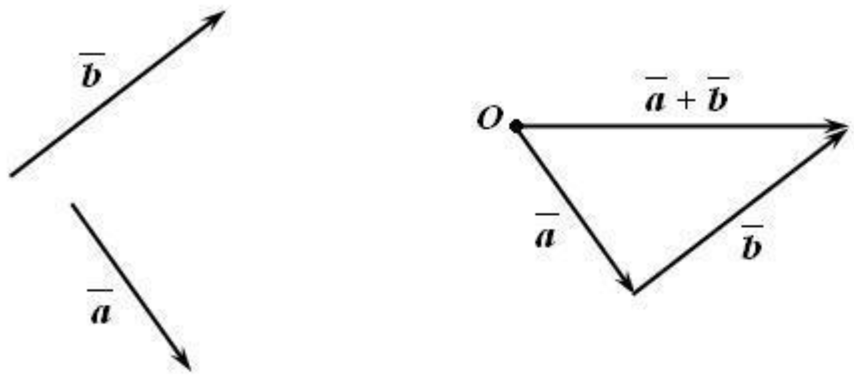


Рис.2

Для побудови суми векторів $\overline{a} + \overline{b}$ можна також користуватись ***правилом паралелограма***, згідно з яким вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ приводять до спільного початку (точки *O*) і будують на цих векторах, як на суміжних сторонах, паралелограм. Тоді його діагональ, що виходить зі спільної вершини *O*, є сумою векторів $\overline{a} + \overline{b}$ (рис.3).

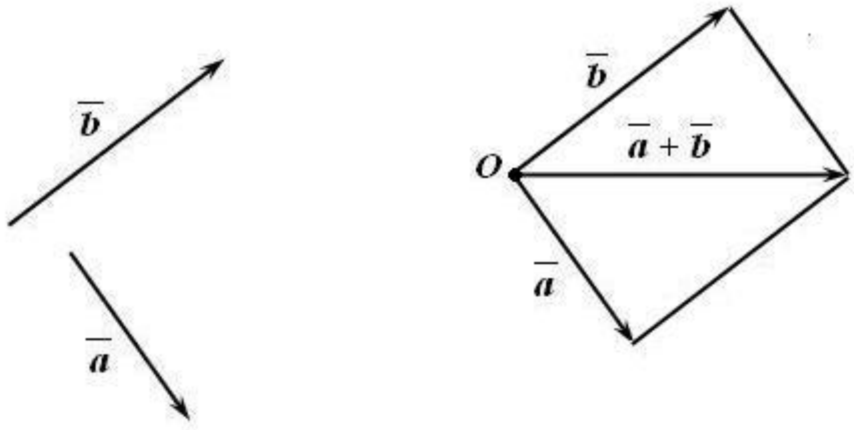


Рис.3

Для побудови суми n векторів $\overline{a_1}+\overline{a_2}+\overline{a_3}+\ldots+\overline{a_n}$ використовують ***правило замикання ламаної*** (узагальнення правила трикутників). У цьому разі до кінця вектора $\overline{a_1}$ треба приєднати вектор $\overline{a_2}$, до кінця $\overline{a_2}$ – вектор $\overline{a_3}$ і т.д. Тоді ***сумою векторів*** $\overline{a_1}+\overline{a_2}+\overline{a_3}+\ldots+\overline{a_n}$ буде вектор, початок якого співпадає з початком першого вектора $\overline{a_1}$, а кінець – із кінцем останнього $\overline{a_n}$ (рис.4).

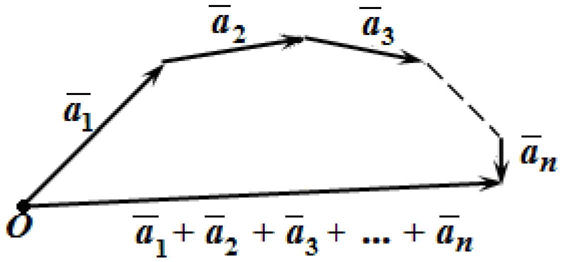


Рис.4

Якщо вектори $\overline{f_1}$, $\overline{f_2}$, … $\overline{f_n}$ – деякі сили, то одержаний сумарний вектор $\overline{f}=\overline{f_1}+\overline{f_2}+\ldots+\overline{f_n}$ називають ***рівнодійною*** цих сил.

Додавання векторів підпорядковується таким законам:

1^0. *Перемісному*: $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;

2^0. *Сполучному*: $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$.

Різницею $\overline{a}-\overline{b}$ векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є вектор $\overline{c}$, який в сумі з вектором $\overline{b}$ дає вектор $\overline{a}$.

Звідси безпосередньо випливає ***правило віднімання***: щоб від вектора $\overline{a}$ відняти вектор $\overline{b}$, треба привести їх до спільного початку O, а потім з'єднати їх кінці за допомогою вектора $\overline{c}$, спрямованого у кінець зменшуваного вектора $\overline{a}$. Одержимо $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$ (рис.5).

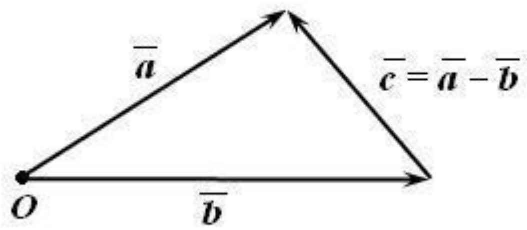
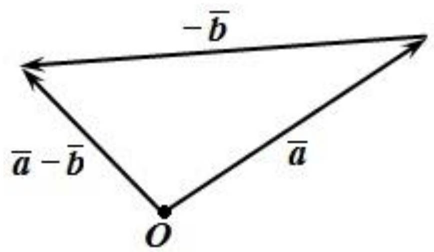


Рис.5

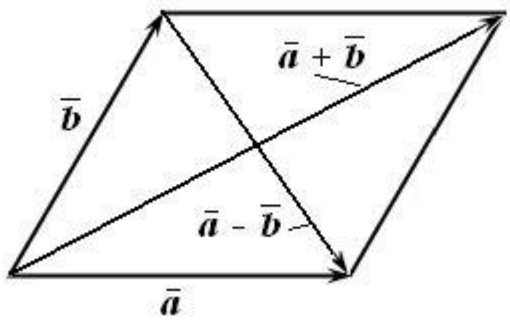
Сума вектора $\overline{a}$ і протилежного до нього вектора $-\overline{a}$ дорівнює ***нульовому*** вектору:

$$\overline{a} + \left(-\overline{a}\right) = \overline{0} .$$

Користуючись поняттям протилежних векторів, можна сформулювати інше ***правило віднімання***: щоб отримати різницю векторів $\overline{a} - \overline{b}$, потрібно до вектора $\overline{a}$ додати вектор, зворотний вектору $\overline{b}$, тобто $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + \left(-\overline{b}\right)$.



За допомогою ***правила паралелограма*** можна утворювати як ***суму***, так і ***різницю*** векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$.



1.3. Множення вектора на число

Добутком вектора $\overline{a}$ на число λ називається вектор $\lambda\overline{a}$, колінеарний вектору $\overline{a}$, який має довжину $|\lambda||\overline{a}|$ і спрямований у той самий бік, що й вектор $\overline{a}$, якщо $\lambda > 0$, і в протилежний, якщо $\lambda < 0$.

Множення вектора на число підпорядковується таким законам:

1⁰. *Переміcному* **:**

$$\lambda\overline{a} = \overline{a}\lambda;$$

2⁰. *Сполучному* **:**

$$\lambda\left(\mu\overline{a}\right) = (\lambda\mu)\overline{a};$$

3⁰. *Розподільним* **:**

$$\lambda\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} \quad \text{і}$$

$$(\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}.$$

Якщо вектор $\overline{a} = \overline{0}$ або $\lambda = 0$, то добуток вектора на число являє собою нульовий вектор:

$$0\overline{a} = \lambda\overline{0} = \overline{0}.$$

Якщо $\overline{a}$ і $\overline{b}$ – два колінеарних вектори, причому $\overline{a}$ – ненульовий вектор, то знайдеться єдине число λ, таке, що $\overline{b} = \lambda\overline{a}$.

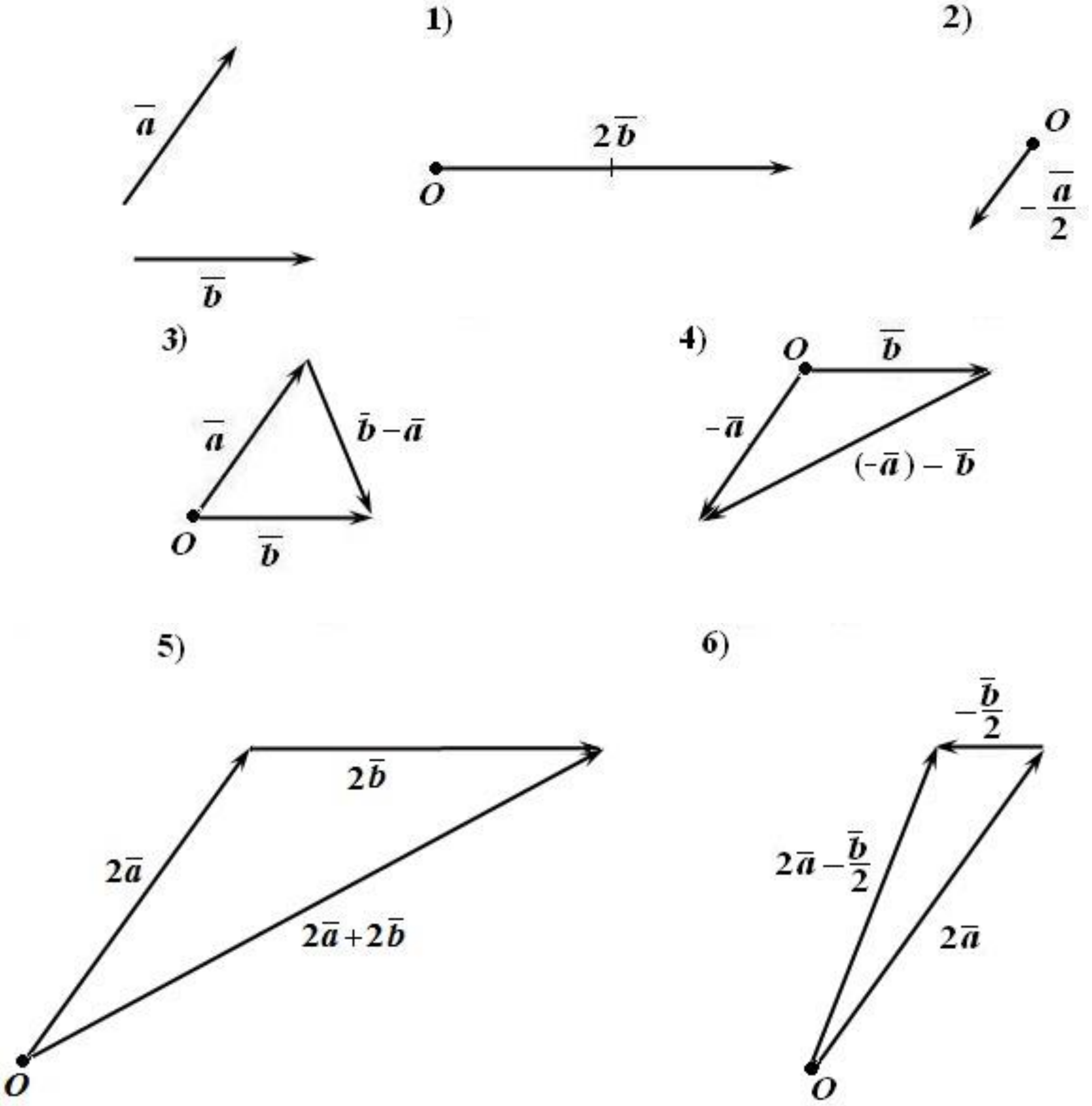
Враховуючи правило ***множення вектора на число***, будь-який вектор $\overline{a}$ можна подати у вигляді добутку його модуля на одиничний вектор того напрямку, тобто

$$\boxed{\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \overline{a}^{\,0}}. \tag{1}$$

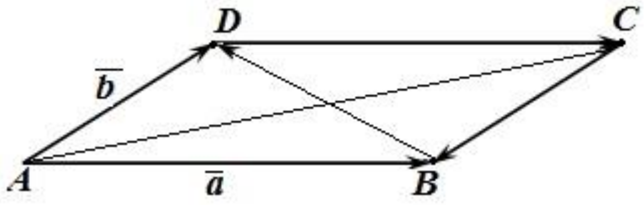
Приклад 1. За даними векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ побудувати наступні вектори:

1) $2\overline{b}$; 2) $-\dfrac{\overline{a}}{2}$; 3) $\overline{b} - \overline{a}$; 4) $-\overline{a} - \overline{b}$; 5) $2\overline{a} + 2\overline{b}$; 6) $2\overline{a} - \dfrac{\overline{b}}{2}$.

Розв’язання. Задамо на площині довільні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ та будь-яку точку O. Побудуємо вектори 1) – 6), користуючись властивостями додавання, віднімання та множення вектора на число.

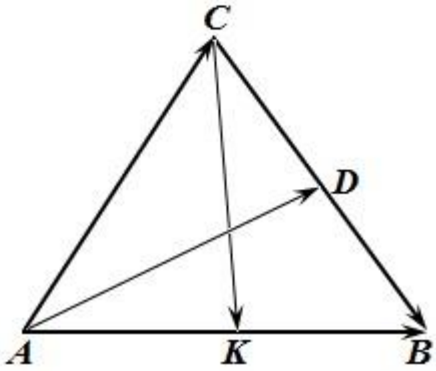


Приклад 2. Дано паралелограм $ABCD$ зі сторонами $\overline{AB}=\overline{a}$; $\overline{AD}=\overline{b}$. Записати вектори $\overline{CB}$, $\overline{DC}$, $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ через вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$.



Розв’язання. $\overline{CB} = -\overline{AD} = -\overline{b}$; $\overline{DC} = \overline{AB} = \overline{a}$; $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{a} + \overline{b}$; $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = \overline{b} - \overline{a}$.

Приклад 3. У трикутнику ABC проведено медіани AD і CK. Знайти вектори $\overline{AD}$ і $\overline{CK}$, якщо $\overline{AC} = \overline{a}$, $\overline{CB} = \overline{b}$.

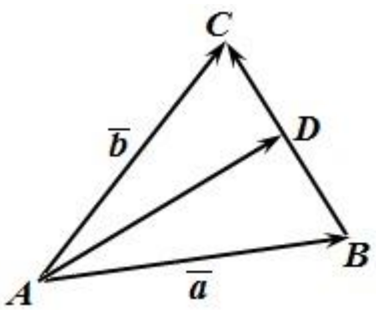


Розв’язання. Очевидно, що вектор $\overline{AD}$ є сумою векторів $\overline{AC}$ і $\overline{CD}$, тобто $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD}$. Оскільки AD – медіана трикутника ABC, то точка D є серединою сторони CB, отже, вектор $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CB} = \frac{\overline{b}}{2}$. Тоді $\overline{AD} = \overline{a} + \frac{\overline{b}}{2}$.

Вектор $\overline{CK}$ є різницею векторів $\overline{AK}$ і $\overline{AC}$, тобто $\overline{CK} = \overline{AK} - \overline{AC}$. Далі маємо $\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Вектор $\overline{AB}$ визначається як сума векторів $\overline{AC}$ і $\overline{CB}$: $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{a} + \overline{b}$, тоді $\overline{AK} = \frac{\overline{a} + \overline{b}}{2}$ і $\overline{CK} = \frac{\overline{a} + \overline{b}}{2} - \overline{a} = \frac{\overline{b} - \overline{a}}{2}$.

Приклад 4. У трикутнику ABC проведено бісектрису AD кута CAB. Записати вектор $\overline{AD}$ через вектори $\overline{AB} = \overline{a}$ і $\overline{AC} = \overline{b}$.

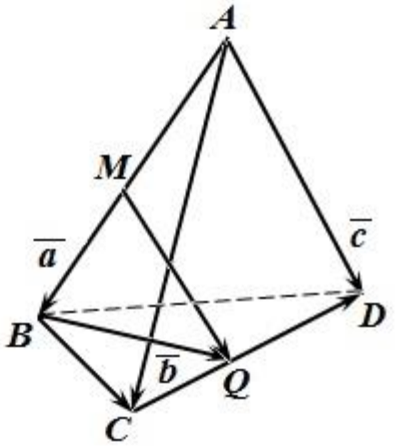
Розв’язання. З трикутників ABD і ABC, відповідно знаходимо $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$ і $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \overline{b} - \overline{a}$. Оскільки бісектриса поділяє



протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим до неї сторонам, то $\frac{BD}{DC} = \frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}$, звідки $DC = \frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|} BD$. Очевидно, що $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC}$, тоді $\overline{b}-\overline{a}=\overline{BD}+\dfrac{\left|\overline{b}\right|}{\left|\overline{a}\right|}\overline{BD}$, або $\overline{b}-\overline{a}=\left(1+\dfrac{\left|\overline{b}\right|}{\left|\overline{a}\right|}\right)\overline{BD}$, тобто $\overline{b}-\overline{a}=\dfrac{\left|\overline{a}\right|+\left|\overline{b}\right|}{\left|\overline{a}\right|}\overline{BD}$, звідки одержимо $\overline{BD}=\dfrac{\left|\overline{a}\right|}{\left|\overline{a}\right|+\left|\overline{b}\right|}\left(\overline{b}-\overline{a}\right)$.

Остаточно матимемо $\overline{AD}=\overline{a}+\dfrac{\left|\overline{a}\right|}{\left|\overline{a}\right|+\left|\overline{b}\right|}\left(\overline{b}-\overline{a}\right)$, тобто $\overline{AD}=\dfrac{\left|\overline{a}\right|\overline{b}+\left|\overline{b}\right|\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|+\left|\overline{b}\right|}$.

Приклад 5. У тетраедрі $ABCD$ ребра, що виходять з вершини A, є векторами: $\overline{AB}=\overline{a}$; $\overline{AC}=\overline{b}$, $\overline{AD}=\overline{c}$. Точки M і Q – середини ребер AB і CD відповідно. Записати вектор $\overline{MQ}$ через $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$.



Розв'язання. З трикутника BQM знаходимо $\overline{MQ}=\overline{MB}+\overline{BQ}$. Оскільки точка M – середина ребра AB, то $\overline{MB}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{\overline{a}}{2}$.

Вектор $\overline{BQ}$ визначимо з трикутника BCQ:

$\overline{BQ}=\overline{BC}+\overline{CQ}$, де $\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{b}-\overline{a}$.

Точка Q поділяє ребро CD навпіл, тобто

$$\overline{CQ}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\left(\overline{AD}-\overline{AC}\right)=\frac{\overline{c}-\overline{b}}{2} \text{ і } \overline{BQ}=\overline{b}-\overline{a}+\frac{\overline{c}-\overline{b}}{2}=\frac{\overline{b}}{2}+\frac{\overline{c}}{2}-\overline{a}.$$

Тоді $\overline{MQ}=\dfrac{\overline{a}}{2}+\dfrac{\overline{b}}{2}+\dfrac{\overline{c}}{2}-\overline{a}=\dfrac{\overline{b}+\overline{c}-\overline{a}}{2}$.

АУДИТОРНЕ ЗАНЯТТЯ 1

1. За даними векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ побудувати вектори: 1) $2\overline{a}$; 2) $-3\overline{b}$; 3) $\overline{a}+2\overline{b}$; 4) $2\overline{a}-3\overline{b}$; 5) $\overline{a}-\dfrac{\overline{b}}{2}$.

2. У трапеції $ABCD$ основа AB удвічі більша за основу DC. Виразити вектор $\overline{BC}$ через вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$.

Відповідь: $\overline{BC} = -\dfrac{\overline{AB}}{2} + \overline{AD}$.

3. У трикутнику *ABC* сторону *AB* точками M і N поділили на три рівні частини. Знайти вектор $\overline{CM}$, якщо $\overline{CA} = \overline{a}$ і $\overline{CB} = \overline{b}$.

Відповідь: $\overline{CM} = \dfrac{2\overline{a} + \overline{b}}{3}$.

4. Чотирикутник *ABCD* – паралелограм, *O* – точка перетину його діагоналей, *M* – довільна точка, відмінна від *O*. Виразити вектор $\overline{a} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}$ через вектор $\overline{MO}$.

Відповідь: $\overline{a} = 4\overline{MO}$.

5. У рівнобічній трапеції *ABCD* відомо: нижня основа $\overline{AB} = \overline{a}$, бічна сторона $\overline{AD} = \overline{b}$ і кут між ними $\angle A = \dfrac{\pi}{3}$. Розкласти за векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ вектори $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$, що утворюють решту сторін і діагоналі трапеції.

Відповідь: $\overline{BC} = -\dfrac{\left|\overline{b}\right|}{\left|\overline{a}\right|}\overline{a} + \overline{b}$; $\overline{CD} = \dfrac{\left|\overline{b}\right| - \left|\overline{a}\right|}{\left|\overline{a}\right|}\overline{a}$; $\overline{AC} = \dfrac{\left|\overline{a}\right| - \left|\overline{b}\right|}{\left|\overline{a}\right|}\overline{a} + \overline{b}$; $\overline{BD} = \overline{b} - \overline{a}$.

6. У трикутнику *ABC* проведено медіани *AD*, *BE* і *CF*. Довести, що $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{0}$.

7. Дано ромб *ABCD*. Чи будуть рівними вектори: 1) $\overline{AD}$ і $\overline{DC}$; 2) $\overline{AD}$ і $\overline{BC}$; 3) $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$?

Відповідь: 1) ні; 2) так; 3) ні.

САМОСТІЙНА РОБОТА

1. Діагоналі паралелограма *ABCD* перетинаються в точці *O*. Записати через вектори $\overline{BC} = \overline{n}$ і $\overline{BO} = \overline{k}$ вектори $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{CD}$.

2. У ромбі $ABCD$ дано діагоналі $\overline{AC} = \overline{m}$ і $\overline{BD} = \overline{p}$. Розкласти за векторами $\overline{m}$ і $\overline{p}$ вектори $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ і $\overline{DA}$, що утворюють сторони ромба.

3. У трикутнику ABC сторону AB точкою D поділено у відношенні $m : p$, тобто $\frac{\overline{BD}}{\overline{DA}} = \frac{m}{p}$. Виразити вектор $\overline{CD}$ через вектори $\overline{CA} = \overline{a}$ і $\overline{CB} = \overline{b}$.

4. У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M і N – середини ребер A_1B_1 і AD відповідно. Виразити вектор $\overline{MN}$ через вектори $\overline{CC_1}, \overline{CB}, \overline{CD}$.

5. У трикутній піраміді $ABCD$ точка O є центром маси трикутника ABC. Знайти вектор $\overline{DO}$, якщо $\overline{DA} = \overline{a}$, $\overline{DB} = \overline{b}$, $\overline{DC} = \overline{c}$.

2. РОЗКЛАДАННЯ ВЕКТОРА ЗА БАЗИСОМ. КООРДИНАТИ ВЕКТОРА

2.1. Проекція вектора на вісь

Нехай задано вектор $\overline{AB}$ і вісь l. З кінців вектора опустимо перпендикуляри на вісь (точки A_1 і B_1) і утворимо вектор $\overline{A_1B_1}$ (рис.6).

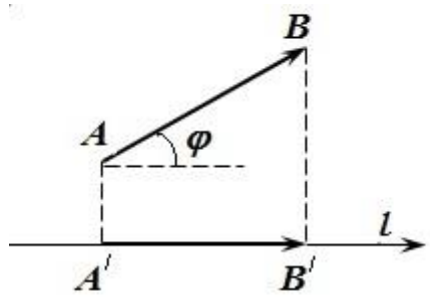


Рис.6

Проекцією вектора $\overline{AB}$ ***на вісь l*** називають довжину вектора $\overline{A_1B_1}$, взяту зі знаком “плюс”, якщо напрямки вектора $\overline{A_1B_1}$ та осі l збігаються, і зі знаком “мінус”, якщо вказані напрямки протилежні.

Проекцію вектора будемо позначати так: пр$_l\,\overline{AB}$ або пр$_{\overline{a}}\,\overline{AB}$, де $\overline{a}$ – будь-який ненульовий вектор, що задає напрямок проектування.

На рис.7 зображено різні випадки взаємного розташування вектора $\overline{a}$ і осі l.

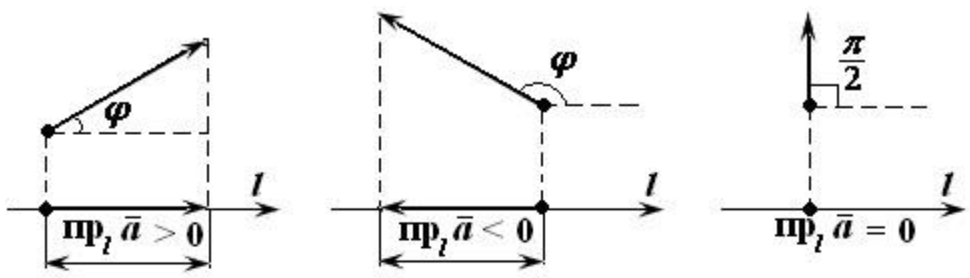


Рис.7

Властивості проекцій

1^0. Рівні вектори мають рівні проекції на одну й ту саму вісь;

2^0. Проекція суми векторів на довільну вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь:

$$\text{пр}_l\left(\bar a + \bar b + \ldots\right) = \text{пр}_l\,\bar a + \text{пр}_l\,\bar b + \ldots\ ;$$

3^0. ***Проекція вектора*** $\bar a$ ***на вісь l*** дорівнює добутку довжини вектора $\bar a$ на косинус кута між цим вектором і віссю l (рис.6):

$$\text{пр}_l\,\bar a = \left|\bar a\right|\cos\varphi\,. \qquad (2)$$

Кут φ відраховується від осі до вектора проти ходу годинникової стрілки;

4^0. Проекція вектора $\bar a$ на вісь l дорівнює ***нулю*** тоді і тільки тоді, коли вектор перпендикулярний до осі;

5^0. При множенні вектора на число його проекція множиться на те саме число:

$$\text{пр}_l\left(\lambda\bar a\right) = \lambda\,\text{пр}_l\left(\bar a\right).$$

Справедливість властивостей 1^0 і 5^0 безпосередньо випливає з формули (2). Щоб довести властивість 2^0, досить перевірити її для двох доданків (рис.8).

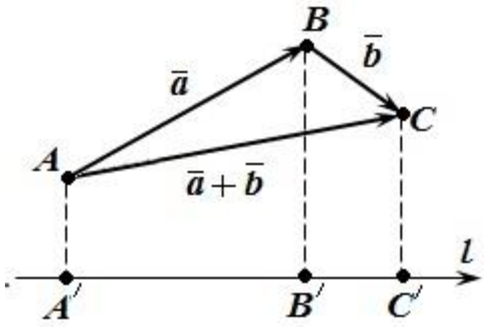


Рис.8

Приклад. Дано $\left|\overline{a}\right| = 4$; $\left|\overline{b}\right| = 3$; $\left|\overline{c}\right| = 2$. Знайти проекцію на вісь l вектора $\overline{a} - 2\overline{b} - 6\overline{c}$, якщо вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ складають з цією віссю відповідно кути $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ і π.

Розв'язання. Згідно з властивостями 2^0 і 5^0 проекцій запишемо:

$$\text{пр}_l\left(\overline{a} - 2\overline{b} - 6\overline{c}\right) = \text{пр}_l\,\overline{a} - \text{пр}_l\,2\overline{b} - \text{пр}_l\,6\overline{c} = \left|\overline{a}\right|\cos\frac{\pi}{6} -$$

$$-2\left|\overline{b}\right|\cos\frac{\pi}{3} - 6\left|\overline{c}\right|\cos\pi = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} - 6\cdot 2\cdot(-1) = 2\sqrt{3} + 9\,.$$

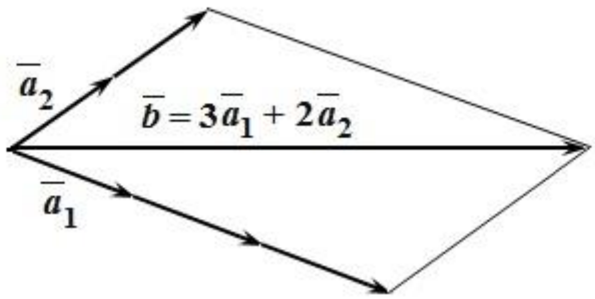
2.2. Базис на площині й у просторі

Лінійна комбінація векторів – це сума заданих векторів, помножених на деякі числа:

$$c_1\overline{a_1} + c_2\overline{a_2} + \ldots + c_n\overline{a_n} = \overline{b}\,.$$

Числа c_1, c_2, ..., c_n називають ***коефіцієнтами лінійної комбінації***.

Так, наприклад, вектор $\overline{d} = 2\overline{a} - 3\overline{b} - 0{,}5\overline{c}$ є лінійною комбінацією векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$. На рисунку нижче зображено лінійну комбінацію, представлену вектором $\overline{b} = 3\overline{a_1} + 2\overline{a_2}$.



Вектори $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ називають ***лінійно залежними***, якщо їхня лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору $\overline{0}$ за умови, що хоча б один з коефіцієнтів $c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n$ відмінний від нуля.

Вектори $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ називають ***лінійно незалежними***, якщо їхня лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору $\overline{0}$ лише у разі, коли всі коефіцієнти $c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n$ дорівнюють нулю.

Приклад. Визначити, чи будуть лінійно залежними вектори $\overline{a_1}=(2;0)$ і $\overline{a_2}=(0;3)$.

Розв'язання. За визначенням лінійної залежності треба знайти такі числа c_1 і c_2, щоб виконувалася векторна рівність

$$c_1\overline{a_1}+c_2\overline{a_2}=\overline{0}.$$

Для цього запишемо останню рівність у координатах

$$c_1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

що приводить до системи рівнянь

$$\begin{cases}2\cdot c_1+0\cdot c_2=0,\\0\cdot c_1+3\cdot c_2=0,\end{cases}$$

звідки отримаємо $c_1=0$, $c_2=0$. Таким чином, лінійна комбінація векторів $\overline{a_1}$ і $\overline{a_2}$ дорівнює нуль-вектору лише за умови, що всі її коефіцієнти дорівнюють нулю. Це означає, що задані вектори ***лінійно незалежні.***

- Необхідна і достатня умова ***лінійної залежності двох векторів*** – їхня ***колінеарність***.

- Необхідною і достатньою умовою ***лінійної залежності трьох векторів*** є ***компланарність*** цих векторів.

Базис – це система лінійно незалежних векторів.

Базис на площині утворюють будь-які два неколініарні вектори $\overline{e_1}$ і $\overline{e_2}$, розташовані в цій площині.

Теорема 1. Нехай вектои $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ утворюють базис на площині. Тоді будь-який вектор $\overline{a}$ цієї площини може бути єдиним чином поданий у вигляді лінійної комбінації базисних векторів $\overline{e_1}$ і $\overline{e_2}$:

$$\overline{a} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2}. \tag{3}$$

Рівність (3) називають ***розкладом вектора*** $\overline{a}$ ***за базисом*** $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, а числа x і y – ***координатами*** вектора $\overline{a}$ у цьому базисі. Коли x і y – координати вектора $\overline{a}$, то стисло це записують як $\overline{a} = (x; y)$.

Базисом **у** ***просторі*** називають будь-які три некомпланарні вектори $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.

Теорема 2. Нехай вектори $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ утворюють базис у просторі. Тоді будь-який вектор $\overline{a}$ може бути єдиним чином поданий у вигляді лінійної комбінації базисних векторів $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ і $\overline{e_3}$:

$$\overline{a} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2} + z\overline{e_3}. \tag{4}$$

Рівність (4) називають ***розкладом вектора*** $\overline{a}$ ***за базисом*** $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$, а числа x, y і z – ***координатами*** вектора $\overline{a}$ у даному базисі; тобто запишемо $\overline{a} = (x; y; z)$.

2.3. Дії над векторами, заданими своїми координатами

Нехай у просторі вибрано базис $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$, в якому вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ мають координати $\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\overline{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Тоді:

1) при додаванні векторів їхні відповідні координати додаються:

$$\overline{a}+\overline{b}=\left(x_1\overline{e_1}+y_1\overline{e_2}+z_1\overline{e_3}\right)+\left(x_2\overline{e_1}+y_2\overline{e_2}+z_2\overline{e_3}\right)=$$
$$=(x_1+x_2)\overline{e_1}+(y_1+y_2)\overline{e_2}+(z_1+z_2)\overline{e_3};$$

2) при множенні вектора на число його координати множаться на це число:

$$\lambda\overline{a}=\lambda\left(x_1\overline{e_1}+y_1\overline{e_2}+z_1\overline{e_3}\right)=(\lambda x_1)\overline{e_1}+(\lambda y_1)\overline{e_2}+(\lambda z_1)\overline{e_3}.$$

Зауваження. Для векторів на площині правила 1) і 2) залишаються незмінними.

Приклад 1. На площині задано два вектори $\overline{p}=(2;-3)$ і $\overline{q}=(1;2)$. Розкласти вектор $\overline{a}=(9;4)$ за базисом $\overline{p},\overline{q}$.

Розв'язання. Нехай $\overline{a}=a_1\overline{p}+a_2\overline{q}$ – розклад вектора $\overline{a}$ за базисом $\overline{p},\overline{q}$, що в координатах заданих векторів має вигляд $\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Порівнявши відповідні координати, прийдемо до системи рівнянь щодо невідомих a_1 і a_2 :

$$\begin{cases}2a_1+a_2=9,\\-3a_1+2a_2=4.\end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1\\-3&2\end{vmatrix}=7;\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}9&1\\4&2\end{vmatrix}=14;\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}2&9\\-3&4\end{vmatrix}=35;$$

$$a_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{14}{7}=2;\qquad a_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{35}{7}=5.$$

Отже, розклад вектора $\overline{a}$ за базисом $\overline{p},\overline{q}$ має вигляд: $\overline{a}=2\overline{p}+5\overline{q}$.

Приклад 2. У просторі задано три вектори $\overline{a}=(2;-2;3)$, $\overline{b}=(4;-1;1)$ і $\overline{c}=(0;3;1)$. Знайти розклад вектора $\overline{d}=(2;7;6)$ за базисом $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$.

Розв'язання. Нехай вектор $\overline{d}$ у базисі $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ має координати $\overline{d}=(m;n;p)$, тоді його можна записати у вигляді $\overline{d}=m\overline{a}+n\overline{b}+p\overline{c}$, або в координатах заданих векторів як $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Порівнявши відповідні координати, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2 = 2m + 4n + 0p, \\ 7 = -2m - n + 3p, \\ 6 = 3m + n + p. \end{cases}$$

За формулами Крамера:

$$m = \frac{\Delta_m}{\Delta}; \qquad n = \frac{\Delta_n}{\Delta}; \qquad p = \frac{\Delta_p}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 36 - 0 - 6 + 8 = 36;$$

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 72 - 0 - 6 - 28 = 36;$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 14 + 0 + 18 - 0 - 36 + 4 = 0;$$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 7 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 4 + 84 + 6 - 14 + 48 = 108.$$

Отже, координати вектора $\overline{d}$ у заданому базисі: $m = 36/36 = 1$; $n = 0/36 = 0$; $p = 108/36 = 3$, а його розклад за базисом $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ запишемо таким чином: $\overline{d} = 1 \cdot \overline{a} + 0 \cdot \overline{b} + 3 \cdot \overline{c}$, тобто $\overline{d} = \overline{a} + 3\overline{c}$.

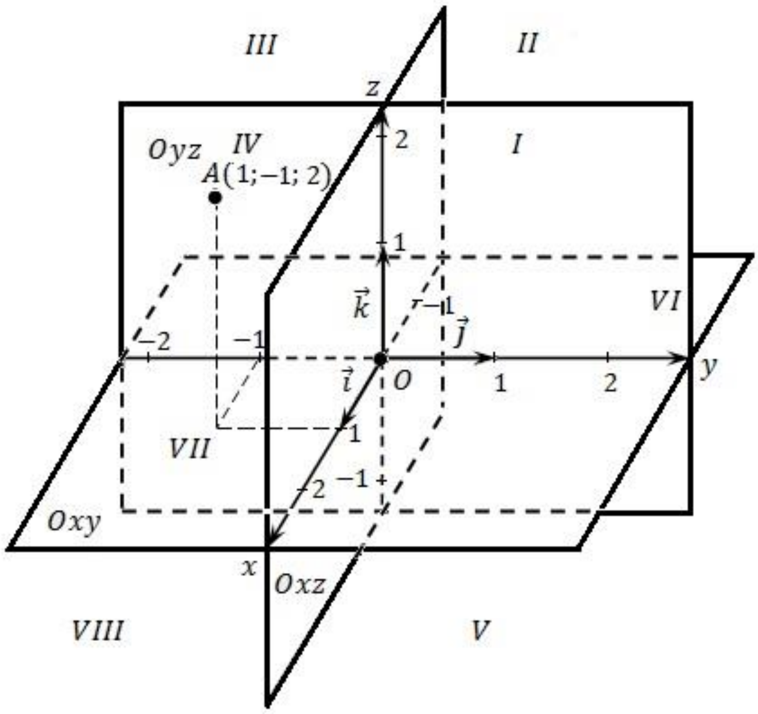
2.4. Прямокутна декартова система координат

Систему координат у просторі утворюють точка O (початок координат) і базис $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$, приведений до цієї точки.

Базис називають ***ортонормованим***, якщо його вектори попарно ортогональні (перпендикулярні) і мають одиничну довжину. Система координат з ортонормованим базисом зветься ***декартовою прямокутною***. В іншому разі систему координат називають ***загальною*** або ***косокутною*** чи ***афінною***.

Далі мова йтиме про вектори в декартовій прямокутній системі координат. Базисні вектори $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ такої системи координат позначають зазвичай літерами $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$. Через початок координат O у напрямку базисних векторів $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ проходять ***осі координат*** (абсцис, ординат, аплікат), які позначаються відповідно Ox, Oy, Oz.

Координатні площини xOy, xOz та yOz, що проходять через відповідні пари координатних осей, поділяють простір на 8 ***октантів.***



Прямокутні декартові системи координат поділяють на ***ліві*** та ***праві***. Різниця між лівою та правою системами координат у просторі аналогічна відмінності між лівим та правим гвинтами в техніці.

Якщо привести вектори $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ до спільного початку, то в правій системі координат найкоротший поворот від $\overline{i}$ до $\overline{j}$ з кінця вектора $\overline{k}$ спостерігається проти ходу годинникової стрілки. У лівій системі координат цей поворот видно за ходом годинникової стрілки (рис.9).

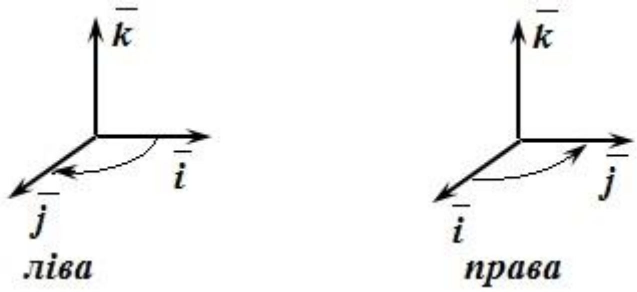


Рис. 9

Радіус-вектором точки M називається вектор $\overline{r} = \overline{OM}$, спрямований з початку координат в цю точку.

Запишемо розклад радіус-вектора $\overline{OM}$ за базисом $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$: $\overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. Тут x, y, z – координати вектора $\overline{OM}$, які являють собою проекції цього вектора на координатні осі *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Координатами точки М у заданій системі координат називають координати її радіус-вектора $\overline{OM}$.

Отже, точка M має координати x, y, z, що записують таким чином $M(x; y; z)$, рис.10.

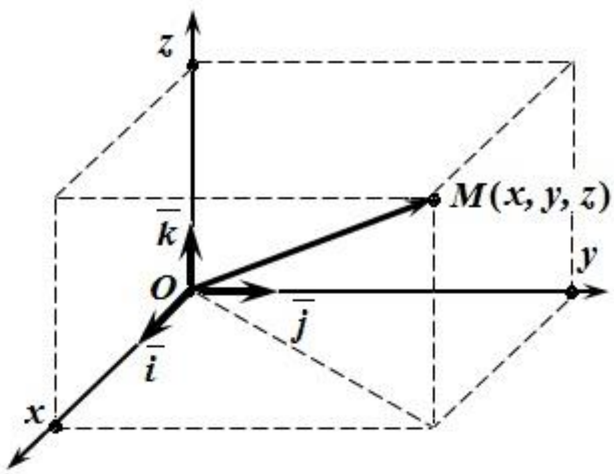


Рис.10

Розкладемо довільний вектор $\overline{a}$ за базисом $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$:

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}.$$

У прямокутній системі координати вектора a_x, a_y, a_z співпадають з його проекціями на осі *Ox*, *Oy*, *Oz* (рис.11). Дійсно,

$$\overline{a} = \overline{OA} = \overline{OB} + \overline{BC} + \overline{CA} \quad \text{або} \quad \overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k} ,$$

де $a_x = \text{пр}_{Ox} \overline{a}$, $a_y = \text{пр}_{Oy} \overline{a}$, $a_z = \text{пр}_{Oz} \overline{a}$. Таким чином, $\overline{a} = \left(a_x ; a_y ; a_z \right)$.

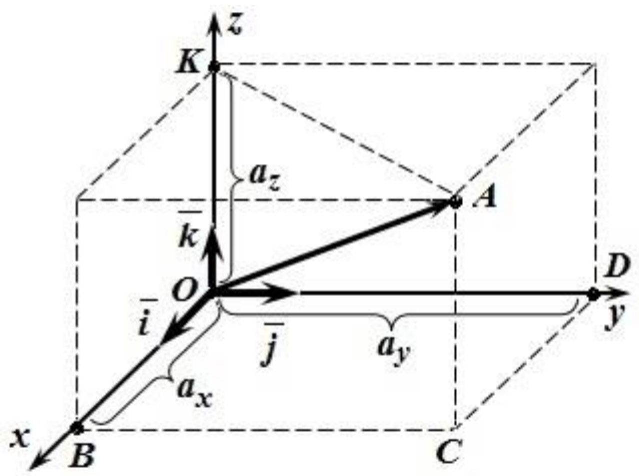


Рис.11

Якщо відомі координати точок $A\left(x_A; y_A; z_A\right)$ і $B\left(x_B; y_B; z_B\right)$, то ***координати вектора*** $\overline{AB}$ дорівнюють різницям відповідних координат його кінця B і початку A.

Насправді, враховуючи, що

$$\overline{OA} = x_A \overline{i} + y_A \overline{j} + z_A \overline{k} , \qquad \overline{OB} = x_B \overline{i} + y_B \overline{j} + z_B \overline{k} ,$$

і віднімаючи від другої рівності першу, отримаємо:

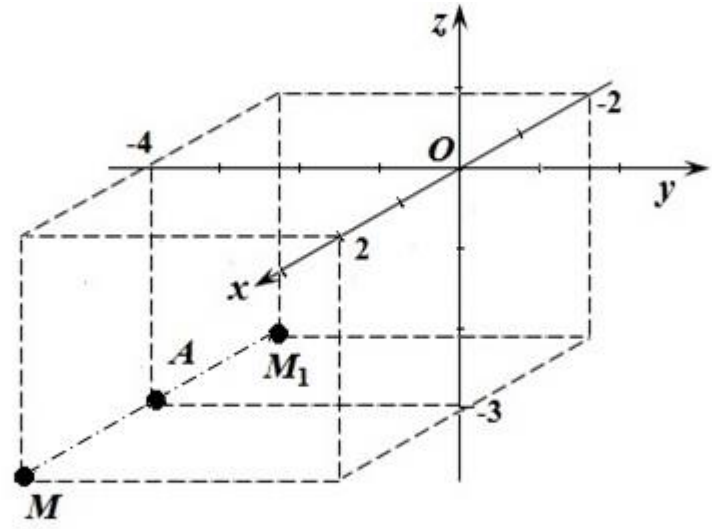
$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \left(x_B - x_A\right) \overline{i} + \left(y_B - y_A\right) \overline{j} + \left(z_B - z_A\right) \overline{k} ,$$

тобто

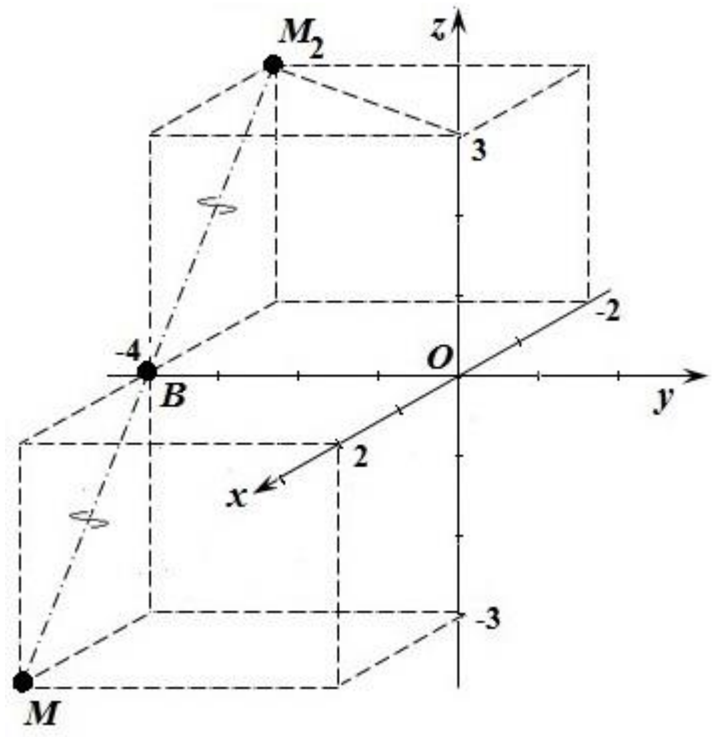
$$\boxed{\overline{AB} = \left(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\right)} . \qquad (5)$$

Приклад 1. Знайти координати точок, розташованих симетрично точці $M\left(2; -4; -3\right)$ відносно: 1) площини yOz; 2) осі Oy; 3) початку координат.

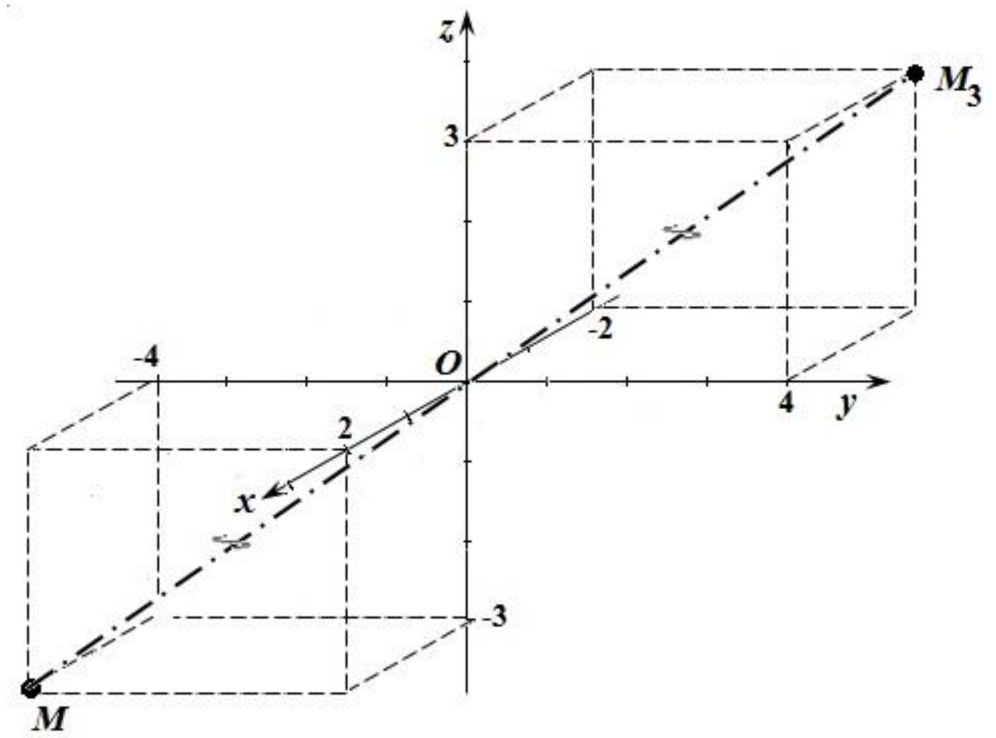
Розв'язання. 1). З точки M опустимо перпендикуляр на площину yOz, отримаємо точку $A(0;-4;-3)$ і відрізок $MA=2$ $(MA \parallel Ox)$. Далі подовжимо цей перпендикуляр на таку саму відстань та одержимо шукану точку $M_1(-2;-4;-3)$.



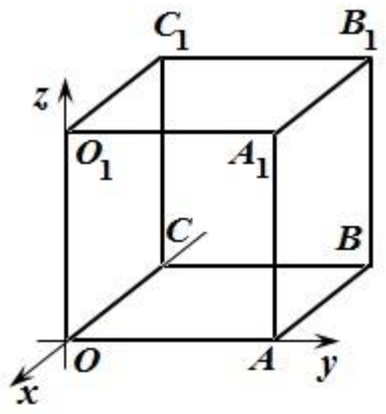
2). З точки M опустимо перпендикуляр на вісь Oy та отримаємо точку $B(0;-4;0)$ і відрізок MB. Подовживши цей відрізок далі на відстань $BM_2 = MB$, одержимо шукану точку $M_2(-2;-4;3)$.



3). Через точку $M(2;-4;-3)$ і початок координат проведемо пряму MO. Оскільки точка O поділяє відрізок MM_3 навпіл, то точка M_3 симетрична точці M відносно початку координат. Отже, $M_3(-2;4;3)$.



Приклад 2. Ребра куба $OABCO_1A_1B_1C_1$ лежать на осях координат. Знайти координати діагоналі куба $\overline{OB_1}$, якщо сам куб розташований у другому октанті, а довжина ребра дорівнює 3.



Розв'язання. Координати радіус-вектора $\overline{OB_1}$ співпадають з координатами точки $B_1(-3;3;3)$, отже, вектор $\overline{OB_1}=(-3;3;3)$.

Приклад 3. Задано точки $A(2;-3;-1)$ і $B(3;-4;-6)$. Знайти координати вектора $\overline{AB}$.

Розв'язання. Координати вектора $\overline{AB}$ визначаються за формулою (5), а саме

$$\overline{AB}=(x_B-x_A;\,y_B-y_A;\,z_B-z_A).$$

Отже, $\overline{AB}=(3-2;-4-(-3);-6-(-1))$, тобто $\overline{AB}=(1;-1;-5)$.

Приклад 4. Дано вектори $\overline{a} = (2;-3;-1)$, $\overline{b} = (-4;0;-2)$. Знайти вектор $2\overline{a} - 3\overline{b}$.

Розв'язання. При множенні вектора на число його координати множаться на це число, тобто $2\overline{a} = (4;-6;-2)$, $-3\overline{b} = (12;0;6)$. Оскільки при додаванні векторів їх відповідні координати додаються, то маємо $2\overline{a} - 3\overline{b} = (16;-6;4)$.

2.5. Довжина вектора

Нехай задано вектор $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ (рис.11), тобто $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Тоді довжина (модуль) вектора $\overline{a}$ дорівнює діагоналі *OA* паралелепіпеда, ребра якого *OB*, *OD*, *OK* дорівнюють відповідно a_x, a_y, a_z:

$$OA^2 = OB^2 + OD^2 + OK^2,$$

або

$$\left|\overline{a}\right|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Отже,

$$\boxed{\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \qquad (6)$$

Нехай задано вектор $\overline{a} = \overline{AB}$, де $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$. В цьому разі вектор $\overline{a} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, а його довжина

$$\boxed{\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}. \qquad (7)$$

Відстань між точками A і B обчислюється як довжина вектора $\overline{AB}$ за формулою (7).

Приклад 1. Знайти відстань між точками $A(5;1;7)$ і $B(1;3;3)$.

Розв'язання. За формулою (6)

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(1-5)^2 + (3-1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{16+4+16} = 6.$$

Приклад 2. Знайти центр кола, описаного навколо трикутника *ABC*, якщо $A(11;3)$, $B(10;6)$, $C(-1;9)$.

Розв'язання. Оскільки центр кола, описаного навколо трикутника *ABC,* рівновіддалений від його вершин, то для шуканої точки $M(x;\ y)$ виконуються умови $\left|\overline{MA}\right|=\left|\overline{MB}\right|$ і $\left|\overline{MA}\right|=\left|\overline{MC}\right|$. Запишемо ці умови в координатах:

$$\begin{cases}\sqrt{(x-11)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-10)^2+(y-6)^2},\\ \sqrt{(x-11)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-9)^2}.\end{cases}$$

Піднесемо кожне рівняння до квадрата і спростимо:

$$\begin{cases}x^2-22x+121+y^2-6y+9=x^2-20x+100+y^2-12y+36,\\ x^2-22x+121+y^2-6y+9=x^2+2x+1+y^2-18y+81,\end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases}-2x+6y=6,\\ -24x+12y=-48,\end{cases}\quad \text{або} \quad \begin{cases}x-3y=-3,\\ -2x+y=-4.\end{cases}$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь, знаходимо $x=3$, $y=2$. Центр описаного кола знаходиться в точці $M(3;2)$.

2.6. Ділення відрізка в заданому відношенні

Нехай у просторі задано дві точки $A(x_1;y_1;z_1)$ і $B(x_2;y_2;z_2)$. Необхідно

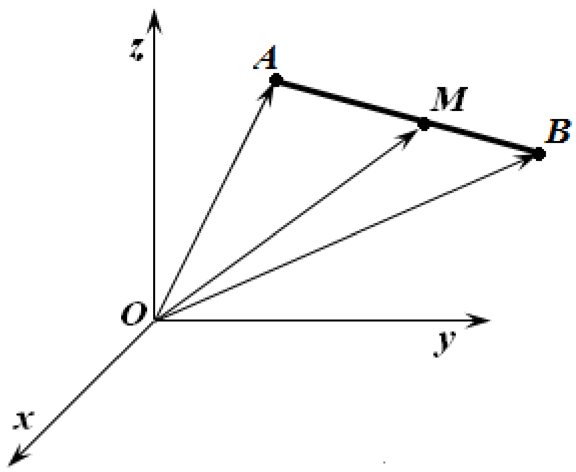


Рис.12

знайти точку $M(x;y;z)$, що поділяє відрізок AB у відношенні λ, тобто $\frac{AM}{MB}=\lambda$.

Утворимо вектори $\overline{AM}$ і $\overline{MB}$, тоді очевидна векторна рівність $\overline{AM}=\lambda\overline{MB}$. Координати утворених векторів $\overline{AM}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\overline{MB}=(x_2-x;y_2-y;z_2-z)$. Запишемо векторну рівність $\overline{AM}=\lambda\overline{MB}$ у координатах

$$x-x_1=\lambda(x_2-x);\quad y-y_1=\lambda(y_2-y);\quad z-z_1=\lambda(z_2-z)$$

та одержимо

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}}. \tag{8}$$

У разі, коли $\lambda=1$, формули (8) визначатимуть координати середини відрізка AB і матимуть вигляд:

$$\boxed{x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2};\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}}. \tag{9}$$

Це означає, що ***координати середини відрізка дорівнюють півсумі координат його початку і кінця.***

Ту ж саму задачу можна розглядати й на площині. В цьому разі кінці відрізка – точки $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$, а координати точки M визначатимуть перші дві з формул (8).

Приклад 1. Знайти координати кінців A і B відрізка, який точками $P(6;-1)$ і $Q(5;-3)$ поділяється на три рівні частини.

Розв'язання. Нехай P – точка поділу, найближча до A, тоді вона поділяє відрізок AQ навпіл, тому $\frac{AP}{PQ}=\lambda_1=1$. За першою і другою формулами (9) маємо:

$$x_P=\frac{x_A+x_Q}{2};\qquad y_P=\frac{y_A+y_Q}{2},$$

тобто

$$x_A = 2x_P - x_Q\,; \qquad y_A = 2y_P - y_Q\,;$$

$$x_A = 2 \cdot 6 - 5 = 7\,; \qquad y_A = 2 \cdot (-1) - (-3) = 1\,.$$

Для другої точки поділу Q маємо $\dfrac{PQ}{QB} = \lambda_2 = 1$;

$$x_Q = \frac{x_P + x_B}{2}\,; \qquad y_Q = \frac{y_P + y_B}{2}\,.$$

Тоді координати точки B:

$$x_B = 2x_Q - x_P\,; \qquad y_B = 2y_Q - y_P\,;$$

$$x_B = 2 \cdot 5 - 6 = 4\,; \qquad y_B = 2 \cdot (-3) - (-1) = -5\,.$$

Таким чином, кінці відрізка – точки $A(7;1)$ і $B(4;-5)$.

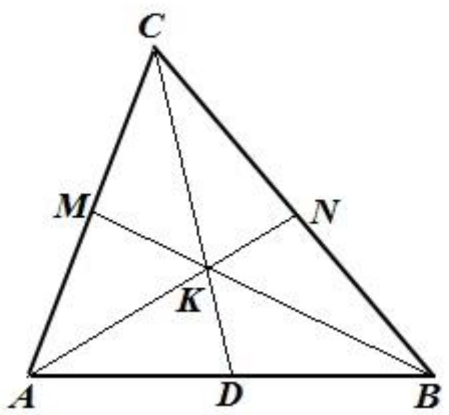
Приклад 2. Знайти точку, симетричну точці $A(-3;0)$ відносно точки $B(2;9)$.

Розв'язання. Якщо C – шукана точка, то B є серединою відрізка AC. За формулами (9) запишемо

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2}\,; \qquad y_B = \frac{y_A + y_C}{2}\,.$$

Тоді $x_C = 2x_B - x_A = 7$; $y_C = 2y_B - y_A = 18$. Отже, шукана точка має координати $C(7;18)$.

Приклад 3. Знайти координати центра ваги трикутника з вершинами $A(1;4)$, $B(-5;0)$, $C(-2;5)$.



Розв'язання. Оскільки CD – одна з медіан, то точка D поділяє сторону AB навпіл.

Тоді за формулами (9)

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2}; \qquad y_D = \frac{y_A + y_B}{2}\,.$$

Точка перетину медіан трикутника поділяє кожну з медіан у відношенні* 2:1, *починаючи від вершини.

Таким чином, для точки K матимемо $\lambda = \dfrac{CK}{KD} = 2$, а координати цієї точки знайдемо за формулами (8):

$$x_K = \frac{x_C + 2x_D}{3}; \quad y_K = \frac{y_C + 2y_D}{3}.$$

Підставивши x_D та y_D, одержимо:

$$x_K = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \qquad y_K = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

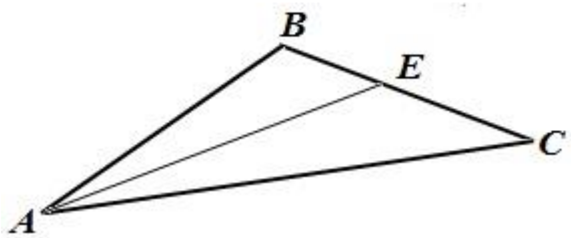
У даному прикладі $x_K = \dfrac{1-5-2}{3} = -2$; $y_K = \dfrac{4+0+5}{3} = 3$. Отже, центр ваги трикутника ABC – точка $K(-2;\,3)$.

Координати центра ваги трикутника дорівнюють середнім арифметичним координат його вершин:

$$\boxed{x_K = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \qquad y_K = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.}$$

Приклад 4. Задано трикутник з вершинами $A(3;-1;-4)$, $B(-1;-1;-1)$, $C(5;7;-1)$. Знайти координати точки перетину бісектриси кута A з протилежною стороною.

Розв'язання. Бісектриса кута A поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам: $\lambda = \dfrac{BE}{EC} = \dfrac{AB}{AC}$. Визначимо довжини сторін AB і AC за формулою (5):



$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(5+1)^2 + (7+1)^2 + (-1+1)^2} = 10;$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(3+1)^2 + (-1+1)^2 + (-4+1)^2} = 5.$$

Тоді $\lambda = 2$. Знайдемо координати точки E за формулами (8):

$$x_E = \frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda}; \qquad y_E = \frac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda}; \qquad z_E = \frac{z_B + \lambda z_C}{1+\lambda}.$$

$$x_E = \frac{5+2\cdot 3}{3} = \frac{11}{3}; \quad y_E = \frac{7+2\cdot(-1)}{3} = \frac{5}{3}; \quad z_E = \frac{-1+2\cdot(-4)}{3} = -3 .$$

Отже, шукана точка $E\left(\frac{11}{3};\frac{5}{3};-3\right)$.

2.7. Напрямок вектора у просторі. Напрямні косинуси

Нехай ненульовий вектор $\overline{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$ утворює з осями *Ox*, *Oy*, *Oz* кути α, β, γ (рис.13).

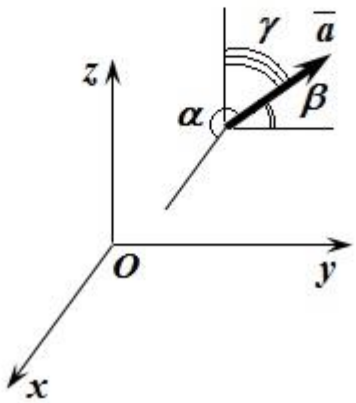


Рис.13

Оскільки координати вектора дорівнюють його проекціям на відповідні осі, то можна записати

$$a_x = \left|\overline{a}\right|\cos\alpha, \quad a_y = \left|\overline{a}\right|\cos\beta, \quad a_z = \left|\overline{a}\right|\cos\gamma,$$

звідки одержимо

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\overline{a}\right|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\overline{a}\right|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\overline{a}\right|}}. \qquad (10)$$

Величини $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називають ***напрямними косинусами вектора*** $\overline{a}$. Вони пов'язані між собою співвідношенням

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}. \qquad (11)$$

Приклад 1. Знайти довжину і напрямок радіус-вектора точки $M(-1;2;2)$.

Розв'язання. Координати радіус-вектора точки M співпадають з координатами самої точки, тобто $\overline{OM} = (-1;2;2)$. За формулою (6) довжина вектора $\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$. Скориставшись формулою (10), отримаємо напрямні косинуси $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$.

Приклад 2. Довжина вектора $\left|\overline{a}\right| = 2$. Вектор утворює з осями Oy та Oz кути $60°$ та $45°$ відповідно. Знайти координати вектора, якщо його абсциса від'ємна.

Розв'язання. Згідно з формулою (11) знаходимо

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\beta - \cos^2\gamma} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \pm\frac{1}{2}.$$

Оскільки абсциса вектора від'ємна, то $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$. Тоді $a_x = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$; $a_y = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$; $a_z = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$. Отже, $\overline{a} = \left(-1;1;\sqrt{2}\right)$.

АУДИТОРНЕ ЗАНЯТТЯ 2

1. Дано $\left|\overline{a}\right| = 3$, $\left|\overline{b}\right| = 4$, $\left|\overline{c}\right| = 2$, $\left|\overline{d}\right| = 8$. Знайти проекцію на вісь l вектора $2\overline{a} + 3\overline{b} - 4\overline{c} + \overline{d}$, якщо вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ і $\overline{d}$ складають з цією віссю відповідно кути $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$.

Відповідь: $10 + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$.

2. Розкласти вектор $\overline{d} = (5;16;8)$ за базисом $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, якщо $\overline{a} = (4;7;3)$, $\overline{b} = (2;-3;4)$, $\overline{c} = (1;2;3)$.

Відповідь: $\overline{d} = \overline{a} - \overline{b} + 3\overline{c}$.

3. Дано дві точки $A(-3;2)$ і $B(1;4)$. На прямій AB знайти точку *C*, віддалену від *A* на відстань, втричі більшу, ніж від *B*, і розташовану з тієї самої сторони від *A*, що й *B*.

Відповідь: $C(3;5)$.

4. Дано дві вершини $A(2;2)$ і $B(3;-2)$ трикутника ABC і точка $M(3;1)$ перетину його медіан. Визначити координати вершини *C*.

Відповідь: $(4;3)$.

5. Дано три послідовні вершини паралелограма $A(-1;-1;2)$, $B(0;1;-3)$, $C(-4;0;-2)$. Знайти четверту вершину *D*, протилежну *B*.

Відповідь: $(-5;-2;3)$.

6. Довести, що чотирикутник з вершинами $A(0;2;-3)$, $B(-1;1;1)$, $C(2;-2;-1)$, $D(-3;-1;-5)$ – паралелограм. Знайти довжини його сторін.

Відповідь: $\sqrt{18}$, $\sqrt{22}$.

7. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від точок $A(1;2;3)$ і $B(-1;-3;4)$.

Відповідь: $C(0;-1,2;0)$.

8. Дано трикутник з вершинами $A(0;0)$, $B(6;8)$, $C(12;9)$. Знайти координати точки перетину бісектриси кута *A* з протилежною стороною.

Відповідь: $\left(\frac{42}{5};\frac{42}{5}\right)$.

9. Чи колінеарні вектори $\overline{c_1}$ і $\overline{c_2}$, що розкладені за векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$, де $\overline{c_1} = 3\overline{a} + \overline{b}$; $\overline{c_2} = \overline{a} - \overline{b}$; $\overline{a} = (2;-2;1)$; $\overline{b} = (5;3;-1)$?

Відповідь: ні.

10. Дано вектор $\overline{a} = (-2;2)$. Знайти координати вектора $\overline{x}$, колінеарного вектору $\overline{a}$, якщо $\left|\overline{x}\right| = 5$.

Відповідь: $\pm\left(-5\sqrt{2};5\sqrt{2}\right)$.

11. Дано точки $A(3;-5;-2)$ і $B(6;-1;-4)$. Знайти координати вектора $\overline{AB}$ і його довжину.

Відповідь: $(3;4;-2)$; $\sqrt{29}$.

12. Дано вектори $\overline{a}=(-2;5;-3)$, $\overline{b}=(0;3;4)$, $\overline{c}=(-5;-3;1)$. Знайти вектор $\overline{d}=2\overline{a}+3\overline{b}-4\overline{c}$.

Відповідь: $(16;31;2)$.

13. Знайти проекції вектора $\overline{a}=\overline{AB}-\overline{AC}$ на осі координат, якщо $A(1;-2;3)$, $B(2;4;-1)$, $C(5;0;2)$.

Відповідь: $(-3;4;-3)$.

14. Знайти довжину і напрямок радіус-вектора точки $M(7;-6;6)$.

Відповідь: $\left|\overline{OM}\right|=11$; $\cos\alpha=\frac{7}{11}$; $\cos\beta=-\frac{6}{11}$; $\cos\gamma=\frac{6}{11}$.

15. Вектор $\overline{a}$ складає з віссю абсцис і ординат кути $60°$. Який кут між вектором $\overline{a}$ і віссю аплікат ?

Відповідь: $45°$ або $135°$.

16. Вектор $\overline{a}$ утворює з координатними осями кути $\alpha=135°$, $\beta=60°$, $\gamma=120°$, а його модуль $\left|\overline{a}\right|=2$. Знайти координати вектора $\overline{a}$.

Відповідь: $\left(-\sqrt{2};1;-1\right)$.

17. Вектор $\overline{a}$ утворює з віссю *Oy* кут удвічі більший, ніж з віссю *Ox*, а з віссю *Oz* – кут $\arcsin\frac{2}{3}$. Знайти координати вектора $\overline{a}$, якщо він складає з віссю *Ox* гострий кут, а його довжина $\left|\overline{a}\right|=6$.

Відповідь: $\left(2\sqrt{3};-2;2\sqrt{5}\right)$, $\left(\sqrt{15};-1;2\sqrt{5}\right)$.

18. Знайти вектор $\overline{d}$, спрямований вздовж бісектриси кута між векторами $\overline{m}=(-4;7;4)$ і $\overline{n}=(1;-2;-2)$, якщо $\left|\overline{d}\right|=2\sqrt{6}$.

Відповідь: $(-2;2;-4)$.

САМОСТІЙНА РОБОТА

1. Вектори $\overline{a}=(3;2;1)$, $\overline{b}=(1;4;-1)$, $\overline{c}=(-1;3;-5)$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\overline{d}=(0;4;-8)$в цьому базисі.

2. Знайти проекцію вектора $\overline{a}=2\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$ на вектор $\overline{b}$, якщо кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ дорівнює $60°$.

3. Дано дві суміжні вершини паралелограма $A(-2;5)$, $B(2;7)$ і точка перетину його діагоналей $M(2;1)$. Знайти дві інші вершини.

4. На осі абсцис знайти точку *M*, відстань якої від точки $A(3;-3)$ дорівнює 5.

5. Задано координати вершин трикутника $A(-2;5;-4)$, $B(4;6;-2)$, $C(7;2;6)$. Обчислити відстань від початку координат до точки перетину медіан цього трикутника.

3. МНОЖЕННЯ ВЕКТОРІВ

3.1. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають число, що дорівнює добутку модулів даних векторів на косинус кута між ними

$$\boxed{\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b})}, \tag{12}$$

де $\varphi=\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}$ – менший кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$, $0\le\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\le\pi$.

Разом із символом $\overline{a}\cdot\overline{b}$ вживають й інші позначення скалярного добутку $\overline{a}\,\overline{b}$ або $(\overline{a},\overline{b})$.

Оскільки проекція вектора на вісь дорівнює його модулю, помноженому на косинус кута нахилу вектора до цієї осі, то маємо:

$$\text{пр}_{\overline{b}}\,\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cos\varphi;\qquad \text{пр}_{\overline{a}}\,\overline{b}=\left|\overline{b}\right|\cos\varphi,$$

тоді формулу (12) можна записати у вигляді

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\text{пр}_{\overline{b}}\,\overline{a} \quad \text{або} \quad \overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{b}\right|\text{пр}_{\overline{a}}\,\overline{b}.$$

Звідси одержимо формули проекцій

$$\boxed{\text{пр}_{\overline{b}}\,\overline{a}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}}, \qquad \boxed{\text{пр}_{\overline{a}}\,\overline{b}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|}}. \tag{13}$$

Оскільки $\dfrac{\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}=\overline{b}^{0}$, $\dfrac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}=\overline{a}^{0}$, формули (13) набувають вигляду

$$\text{пр}_{\overline{b}}\,\overline{a}=\overline{a}\cdot\overline{b}^{0}, \qquad \text{пр}_{\overline{a}}\,\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}^{0}.$$

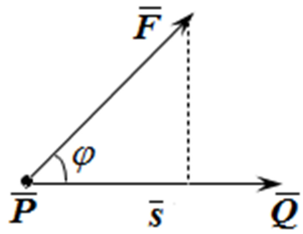
Беручи до уваги, що вектор $\overline{a}^{0}$ задає напрямок у просторі (вектор або вісь), одержимо правило:

проекція вектора на заданий напрям дорівнює скалярному добутку цього вектора на орт заданого напряму.

$$\boxed{\text{пр}_{\overline{l}}\,\overline{a}=\overline{a}\cdot\overline{l}^{0}}. \tag{14}$$

Механічний зміст скалярного добутку. Якщо матеріальна точка переміщується під дією сили $\overline{F}$ з початку в кінець вектора $\overline{s}=\overline{PQ}$, то робота A цієї сили визначається рівністю

$A=\left|\overline{F}\right|\left|\overline{s}\right|\cos\varphi$, тобто $\boxed{A=\overline{F}\cdot\overline{s}}$.



3.2. Властивості скалярного добутку

Для скалярного добутку діють такі закони.

1⁰. *Переміснний:* $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$.

2⁰. *Сполучний* відносно скалярного множника:

$$\left(\lambda\overline{a}\right)\cdot\overline{b}=\lambda\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right).$$

3⁰. *Розподільний:* $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$.

4^0. *Умова перпендикулярності векторів.* Скалярний добуток ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вектори взаємно перпендикулярні:

$$\boxed{\overline{a}\cdot\overline{b}=0}\,.$$

Дійсно, якщо $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, де $|\overline{a}|\neq 0$, $|\overline{b}|\neq 0$, то $\cos\varphi=0$, звідки $\varphi=\pi/2$. Отже, $\overline{a}\perp\overline{b}$.

І зворотно, якщо $\overline{a}\perp\overline{b}$, то $\varphi=\pi/2$, $\cos\varphi=0$, отже, $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$.

5^0. *Скалярний квадрат вектора* дорівнює квадрату його довжини:

$$\overline{a}^2=|\overline{a}|^2. \tag{15}$$

Оскільки в цьому разі кут $\varphi=0$, то $\overline{a}^2=\overline{a}\cdot\overline{a}=|\overline{a}||\overline{a}|\cos 0=|\overline{a}|^2$.

3.3. Скалярний добуток у декартових координатах

Нехай у прямокутній системі координат задано два вектори:

$$\overline{a}=x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k} \quad \text{і} \quad \overline{b}=x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}\,.$$

Перемножаючи вектори скалярно та враховуючи властивості 1^0-5^0, отримаємо:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left(x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}\right)\cdot\left(x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}\right)=x_1x_2\,\overline{i}\cdot\overline{i}+x_1y_2\,\overline{i}\cdot\overline{j}+x_1z_2\,\overline{i}\cdot\overline{k}+$$
$$+y_1x_2\,\overline{j}\cdot\overline{i}+y_1y_2\,\overline{j}\cdot\overline{j}+y_1z_2\,\overline{j}\cdot\overline{k}+z_1x_2\,\overline{k}\cdot\overline{i}+z_1y_2\,\overline{k}\cdot\overline{j}+z_1z_2\,\overline{k}\cdot\overline{k}=$$
$$=x_1x_2\,\overline{i}\cdot\overline{i}+y_1y_2\,\overline{j}\cdot\overline{j}+z_1z_2\,\overline{k}\cdot\overline{k}\,.$$

Тут $\overline{i}\cdot\overline{j}=\overline{i}\cdot\overline{k}=\overline{j}\cdot\overline{k}=0$, оскільки вектори $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ попарно перпендикулярні, а $\overline{i}\cdot\overline{i}=\overline{j}\cdot\overline{j}=\overline{k}\cdot\overline{k}=1$, бо $|\overline{i}|=|\overline{j}|=|\overline{k}|=1$.

Таким чином, ***скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат:***

$$\boxed{\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}\,. \tag{16}$$

3.4. Застосування скалярного добутку

Кут між векторами. Нехай $\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\overline{b} = (x_2; y_2; z_2)$ – ненульові вектори, φ – кут між ними. З визначення скалярного добутку (12) одержимо $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$, або в координатах

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}}\,. \qquad (17)$$

Умова перпендикулярності ненульових векторів випливає з властивості 4^0 і формули (16). Якщо $\overline{a} \perp \overline{b}$, то $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$, або в координатах

$$\boxed{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0}\,. \qquad (18)$$

Проекція вектора на заданий напрямок. Згідно з формулою (13) проекція вектора $\overline{a}$ на напрямок вектора $\overline{b}$ дорівнює

$$\text{пр}_{\overline{b}}\, \overline{a} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{b}|}, \text{ тобто } \text{пр}_{\overline{b}}\, \overline{a} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Приклад 1. Знайти скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ та кут φ між ними, якщо $\overline{a} = (1; -2; 2)$ і $\overline{b} = (-1; 1; 0)$.

Розв'язання. За формулою (16) знайдемо скалярний добуток

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = -3.$$

Модулі векторів $|\overline{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$; $|\overline{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$.

Косинус кута між векторами визначається за формулою $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$, тобто

$\cos\varphi = \dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Таким чином, $\varphi = 3\pi/4 = 135°$.

Приклад 2. Задано дві сили $\overline{F_1} = (3; -2; 6)$, $\overline{F_2} = (1; -7; -8)$. Знайти роботу рівнодійної цих сил, якщо точка, рухаючись прямолінійно, переміщується з початку координат в положення $M(-2; -3; 1)$.

Розв'язання. Рівнодійна двох сил $\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$, $\overline{F} = (4; -9; -2)$; вектор переміщення $\overline{S} = \overline{OM} = (-2; -3; 1)$. Тепер за формулою роботи

$$A = \overline{F} \cdot \overline{S} = 4 \cdot (-2) + (-9) \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 = 17 \text{ (од. роботи)}.$$

Приклад 3. Задано два вектори $\overline{a} = (-2; 3; m)$ і $\overline{b} = (m; 2; 4)$. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні ?

Розв'язання. Згідно з умовою перпендикулярності скалярний добуток векторів дорівнює нулю, тобто $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$. У координатах запишемо $-2m + 6 + 4m = 0$, звідки $m = -3$.

Приклад 4. Обчислити вираз $\left(2\overline{a} - \overline{b}\right) \cdot \left(3\overline{a} + 4\overline{b}\right)$, якщо $\left|\overline{a}\right| = 2$, $\left|\overline{b}\right| = 3$, $\overline{a} \perp \overline{b}$.

Розв'язання. Скориставшись властивостями 1^0, 3^0, 4^0 скалярного добутку, запишемо:

$$\left(2\overline{a} - \overline{b}\right) \cdot \left(3\overline{a} + 4\overline{b}\right) = 6\overline{a}^2 + 5\overline{a} \cdot \overline{b} - 4\overline{b}^2 = 6\left|\overline{a}\right|^2 + 5\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cos 90° - 4\left|\overline{b}\right|^2 =$$

$$= 24 + 0 - 36 = -12.$$

Приклад 5. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\pi/3$, $\left|\overline{a}\right| = 2$, $\left|\overline{b}\right| = 4$. Знайти довжину вектора $\overline{c} = 2\overline{a} + 5\overline{b}$.

Розв'язання. За властивістю 5^0 квадрат довжини вектора дорівнює його скалярному квадрату, тож маємо:

$$\left|\overline{c}\right|^2 = \overline{c}^2 = \left(2\overline{a} + 5\overline{b}\right)^2 = 4\overline{a}^2 + 20\overline{a} \cdot \overline{b} + 25\overline{b}^2 = 4\left|\overline{a}\right|^2 + 20\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\frac{\pi}{3} + 25\left|\overline{b}\right|^2 =$$

$= 4 \cdot 4 + 20 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 25 \cdot 16 = 496$. Тоді $\left|\overline{c}\right| = \sqrt{496} = 4\sqrt{31}$.

Приклад 6. Знайти внутрішній кут A у трикутнику з вершинами $A(1; -1; -4)$, $B(5; 2; 8)$, $C(3; 15; 17)$.

Розв'язання. Позначимо: $\overline{a} = \overline{AB} = (4; 3; 12)$, $\overline{b} = \overline{AC} = (12; 16; 21)$. Кут φ між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ знайдемо за формулою (17), тобто $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|} = \dfrac{4 \cdot 12 + 3 \cdot 16 + 12 \cdot 21}{\sqrt{169}\sqrt{841}} = \dfrac{12}{13}$. Звідси одержимо $\varphi = \arccos\dfrac{12}{13}$.

Приклад 7. Задано три вектори $\overline{a} = (3; 2; -1)$, $\overline{b} = (1; -4; 2)$ і $\overline{c} = (-2; 1; 5)$. Знайти вектор $\overline{d}$, що задовольняє умовам $\overline{a} \cdot \overline{d} = 9$, $\overline{b} \cdot \overline{d} = -11$, $\overline{c} \cdot \overline{d} = -10$.

Розв'язання. Позначимо шуканий вектор як $\overline{d} = (x; y; z)$. Записавши умови $\overline{a} \cdot \overline{d} = 9$, $\overline{b} \cdot \overline{d} = -11$ і $\overline{c} \cdot \overline{d} = -10$ в координатній формі, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 9, \\ x - 4y + 2z = -11, \\ -2x + y + 5z = -10. \end{cases}$$

За формулами Крамера знайдемо розв'язок системи

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -77; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & 2 & -1 \\ -11 & -4 & 2 \\ -10 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -77;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 9 & -1 \\ 1 & -11 & 2 \\ -2 & -10 & 5 \end{vmatrix} = -154; \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 1 & -4 & -11 \\ -2 & 1 & -10 \end{vmatrix} = 154.$$

Знайдемо координати вектора $\overline{d}$:

$$x = \frac{-77}{-77} = 1; \quad y = \frac{-154}{-77} = 2; \quad z = \frac{154}{-77} = -2.$$

АУДИТОРНЕ ЗАНЯТТЯ 3

1. Довести рівність $\left(\overline{a} + \overline{b}\right)^2 + \left(\overline{a} - \overline{b}\right)^2 = 2\left(\overline{a}^{\,2} + \overline{b}^{\,2}\right)$.

2. Обчислити кут між векторами $\overline{a} = (1; -1; -1)$ і $\overline{b} = (2; 0; 2)$.

Відповідь: $\pi/2$.

3. Дано вектори $\overline{a} = (1; 1; 2)$, $\overline{b} = (1; -1; -2)$ і $\overline{c} = (0; 1; 3)$. Знайти проекцію вектора $\overline{m} = \overline{a} - \overline{b}$ на напрямок вектора $\overline{n} = 2\overline{b} + \overline{c}$.

Відповідь: $-\sqrt{6}$.

4. Дано трикутник з вершинами $A(4; 3; 5)$, $B(1; 3; 1)$, $C(8; 3; 2)$. Обчисліть його внутрішній кут при вершині *B*.

Відповідь: $\varphi = \pi/4$.

5. При якому значенні λ вектори $\overline{a} = (1;\, 2;\, \lambda)$ і $\overline{b} = (-1;\, 1;\, 4)$ утворюють кут $45°$?

Відповідь: $\lambda = 2$.

6. Знайти кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 1$ і $(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{a} + 2\overline{b}) = 3$.

Відповідь: $\varphi = \pi/3$.

7. Вектор $\overline{c}$, перпендикулярний векторам $\overline{a} = (1;\, -2;\, 3)$ і $\overline{b} = (1;\, 1;\, 0)$, утворює з віссю *Oy* тупий кут. Знайти координати вектора $\overline{c}$, якщо $|\overline{c}| = 9$.

Відповідь: $\overline{c} = \left(3\sqrt{3};\, -3\sqrt{3};\, -3\sqrt{3}\right)$.

8. Знайти проекцію вектора $\overline{m} = \overline{a} + \overline{b}$ на напрямок вектора $\overline{n} = \overline{b} - \overline{c}$, якщо $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 6$, $|\overline{c}| = 3$, а кути між векторами $(\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{b}) = 60°$, $(\overline{b} \,\hat{,}\, \overline{c}) = 120°$, $(\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{c}) = \arccos(1/5)$.

Відповідь: $57/\sqrt{63}$.

9. Задано вектори $\overline{a} = (1;\, 2)$ і $\overline{b} = (-3;\, 4)$. Знайти вектор $\overline{c}$, що задовольняє умови $\overline{c} \cdot \overline{a} = 5$, $\overline{c} \cdot \overline{b} = 15$.

Відповідь: (–1; 3).

10. Знайти координати вектора $\overline{c}$, колінеарного вектору $\overline{a} = (2;\, 3;\, 1)$, якщо $\overline{a} \cdot \overline{c} = 28$.

Відповідь: $(4;\, 6;\, 2)$.

11. Вектор $\overline{s} = \overline{p} + 3\overline{q}$ перпендикулярний вектору $\overline{m} = 7\overline{p} - 5\overline{q}$, а вектор $\overline{m} = 7\overline{p} - 3\overline{q}$ перпендикулярний вектору $\overline{r} = \overline{p} + 5\overline{q}$. Який кут утворюють ненульові вектори $\overline{p}$ і $\overline{q}$?

Відповідь: $\pi/2$.

12. Вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ мають рівні довжини і утворюють попарно рівні кути. Знайти координати вектора $\overline{c}$, якщо $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j}$, $\overline{b} = \overline{j} + \overline{k}$.

Відповідь: $\overline{c} = (-1/3;\, 4/3;\, -1/3)$ або $\overline{c} = (1;\, 0;\, 1)$.

13. Довжина гіпотенузи AB трикутника ABC дорівнює c. Знайти суму $\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BC} \cdot \overline{BA} + \overline{CA} \cdot \overline{CB}$.

Відповідь: c^2.

14. До вершини куба прикладені три сили, величини яких дорівнюють відповідно 1, 2, 3. Ці сили спрямовані вздовж діагоналей граней куба, що виходять з даної вершини. Знайти величину рівнодійної цих трьох сил і кути, які вона утворює зі складовими силами.

Відповідь: 5, $\arccos\dfrac{7}{10}$, $\arccos\dfrac{8}{10}$, $\arccos\dfrac{9}{10}$.

САМОСТІЙНА РОБОТА

1. Знайти проекцію вектора $\overline{a} = (6;\, -2;\, -1)$ на вісь, що утворює з координатними осями рівні гострі кути.

2. Обчислити роботу сили $\overline{F} = (2;\, -3;\, 1)$ при переміщенні матеріальної точки з положення $A(-2;\, 1;\, 0)$ в положення $B(3;\, 2;\, -1)$.

3. Знайти $\left|2\overline{a} + 3\overline{b}\right|$, якщо $\left|\overline{a}\right| = 1$, $\left|\overline{b}\right| = 2$ і $\left|3\overline{a} + \overline{b}\right| = 4$.

4. Дано вектори $\overline{a} = (6;\, -2)$ і $\overline{b} = (2;\, -1)$. Знайти вектор $\overline{c}$, якщо $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{b} \cdot \overline{c} = -1$.

5. Вектор $\overline{c}$, перпендикулярний векторам $\overline{a} = (4;\, -2;\, -3)$ і $\overline{b} = (0;\, 1;\, 3)$, утворює з віссю Ox тупий кут. Знайти координати вектора $\overline{c}$, якщо $\left|\overline{c}\right| = 26$.

6. Знайти косинус кута між діагоналями AC і BD паралелограма, якщо задано три його вершини $A(1;\, 0;\, 2)$, $B(4;\, 1;\, -2)$ і $C(-4;\, 2;\, -4)$.

3.5. Векторний добуток векторів

Некомпланарні вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$, взяті у вказаному порядку, утворюють ***праву трійку***, якщо з кінця вектора $\overline{c}$ найкоротший поворот від $\overline{a}$ до $\overline{b}$ спостерігається проти ходу годинникової стрілки, і ***ліву трійку***, якщо за годинниковою.

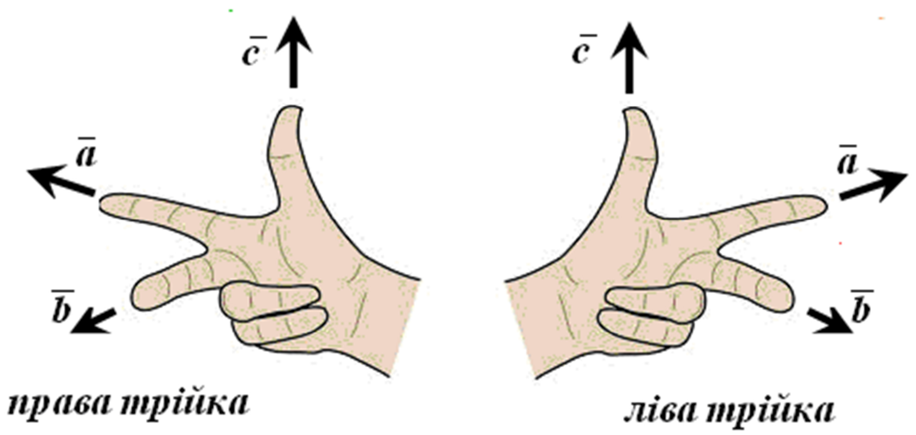


Рис.14

Векторним добутком векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$, який:

1) перпендикулярний векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$;
2) має довжину, яка дорівнює площі паралелограмма, побудованого на цих векторах, тобто

$$\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\varphi; \qquad (19)$$

3) вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ утворюють праву трійку (рис.15).

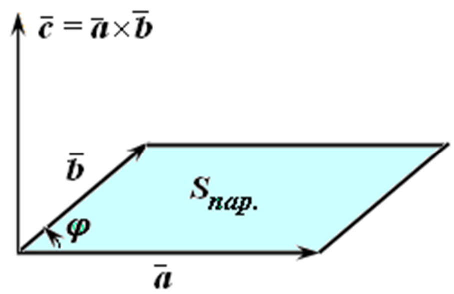


Рис.15

Векторний добуток $\overline{a} \times \overline{b}$ інколи позначають так: $\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$.

Геометричний зміст векторного добутку. Площа паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, дорівнює модулю векторного добутку цих векторів, тобто

$$S_{\text{пар}} = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right|.$$

Механічний зміст векторного добутку. Нехай сила $\overline{F}$ прикладена до точки *A*. Моментом сили $\overline{F}$ відносно точки *O* називається вектор $\overline{M}$, що визначається за формулою $\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F}$, де $\overline{r}$ – радіус-вектор точки прикладення. За визначенням величина моменту дорівнює величині сили, помноженій на відстань *ON* від точки *O* до прямої, вздовж якої діє ця сила (рис.16):

$$\left|\overline{M}\right| = \left|\overline{r}\right|\left|\overline{F}\right|\sin\varphi .$$

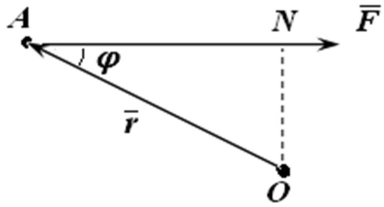


Рис.16

3.6. Властивості векторного добутку

1⁰. *Умова колінеарності векторів.* Векторний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори колінеарні:

$$\boxed{\overline{a} \times \overline{b} = 0}. \tag{20}$$

2⁰. *Антикомутативність*:

$$\overline{a} \times \overline{b} = -\left(\overline{b} \times \overline{a}\right).$$

3⁰. *Асоціативність* відносно множення на скаляр:

$$\lambda\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) = \left(\lambda\overline{a}\right) \times \overline{b} = \overline{a} \times \left(\lambda\overline{b}\right).$$

4⁰. *Дистрибутивність*:

$$\left(\overline{a} + \overline{b}\right) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c} .$$

5⁰. *Векторний квадрат* завжди дорівнює нулю:

$$\boxed{\overline{a} \times \overline{a} = 0}.$$

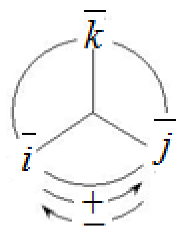
3.7. Координатна форма векторного добутку

Нехай вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задані своїми координатами $\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$, $\overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$. Відповідно до визначення векторного добутку маємо:

$$\overline{i}\times\overline{i} = 0; \qquad \overline{i}\times\overline{j} = \overline{k}; \qquad \overline{j}\times\overline{i} = -\overline{k};$$

$$\overline{j}\times\overline{j} = 0; \qquad \overline{j}\times\overline{k} = \overline{i}; \qquad \overline{k}\times\overline{j} = -\overline{i};$$

$$\overline{k}\times\overline{k} = 0; \qquad \overline{k}\times\overline{i} = \overline{j}; \qquad \overline{i}\times\overline{k} = -\overline{j}.$$



Тоді $\overline{a}\times\overline{b} = \left(x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}\right)\times\left(x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}\right) = \overline{i}\left(y_1z_2 - z_1y_2\right) +$
$+\overline{j}\left(z_1x_2 - x_1z_2\right) + \overline{k}\left(x_1y_2 - y_1x_2\right)$, або

$$\boxed{\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}. \tag{21}$$

Умова колінеарності векторів у координатній формі

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{22}$$

Приклад 1. Дано два вектори $\overline{a} = (2; 3; -2)$ і $\overline{b} = (4; -2; -3)$. Знайти векторний добуток векторів $\left(2\overline{a} + \overline{b}\right)\times\left(\overline{a} - 2\overline{b}\right)$.

Розв'язання. Перший спосіб. При множенні вектора на число його координати множаться на це число, тож маємо $2\overline{a} = (4; 6; -4)$, $-2\overline{b} = (-8; 4; 6)$. А при додаванні векторів їх відповідні координати додаються, отже, $2\overline{a} + \overline{b} = (8; 4; -7)$, $\overline{a} - 2\overline{b} = (-6; 7; 4)$. Далі знаходимо векторний добуток одержаних векторів, розкладаючи визначник за елементами першого рядка:

$$\left(2\overline{a} + \overline{b}\right)\times\left(2\overline{a} - \overline{b}\right) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 8 & 4 & -7 \\ -6 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 65\overline{i} + 10\overline{j} + 80\overline{k}.$$

Другий спосіб. Спростимо заданий вираз, користуючись властивостями векторного добутку:

$$\left(2\overline{a} + \overline{b}\right)\times\left(\overline{a} - 2\overline{b}\right) = 2\overline{a}\times\overline{a} + \overline{b}\times\overline{a} - 4\overline{a}\times\overline{b} - 2\overline{b}\times\overline{b} = 5\overline{b}\times\overline{a}.$$

Далі знаходимо:

$$5\left(\overline{b}\times\overline{a}\right)=5\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 4 & -2 & -3\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}=5\left(13\overline{i}+2\overline{j}+16\overline{k}\right)=65\overline{i}+10\overline{j}+80\overline{k}.$$

Приклад 2. Знайти орт $\overline{e}$, перпендикулярний векторам $\overline{a}=(2;2;1)$ і $\overline{b}=(3;-3;-1)$.

Розв'язання. Шуканий орт паралельний вектору $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$. За формулою (21) знаходимо

$$\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & -3 & -1\end{vmatrix}=\overline{i}+5\overline{j}-12\overline{k}.$$

Тоді довжина вектора $\left|\overline{c}\right|=\sqrt{1^2+5^2+(-12)^2}=\sqrt{170}$, а орт

$$\overline{e}=\frac{\overline{c}}{\left|\overline{c}\right|}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{170}}\overline{i}+\frac{5}{\sqrt{170}}\overline{j}-\frac{12}{\sqrt{170}}\overline{k}\right).$$

Приклад 3. Знайти площу трикутника з вершинами у точках $A(-3;-2;-4)$, $B(-1;-4;-7)$ і $C(1;-2;2)$.

Розв'язання. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Враховуючи геометричний зміст векторного добутку, матимемо:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|,$$

де $\overline{AB}=(2;-2;-3)$, $\overline{AC}=(4;0;6)$. Знайдемо векторний добуток

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-12\overline{i}-24\overline{j}+8\overline{k},$$

тобто $\overline{AB}\times\overline{AC}=4\left(-3\overline{i}-6\overline{j}+2\overline{k}\right)$.

Отже, $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=4\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+2^2}=4\sqrt{49}=28$; $S_{\Delta ABC}=14$ кв.од.

Приклад 4. Обчислити площу палалелограма, побудованого на векторах $\overline{a}=\overline{m}+2\overline{n}$ і $\overline{b}=2\overline{m}+\overline{n}$, якщо $\left|\overline{m}\right|=2$, $\left|\overline{n}\right|=1$; вектори $\overline{m}$ і $\overline{n}$ утворюють кут $\pi/6$.

Розв'язання. Площа паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$

$$S_{\text{пар}}=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|.$$

Враховуючи властивості 1^0-4^0, знайдемо:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\left(\overline{m}+2\overline{n}\right)\times\left(2\overline{m}+\overline{n}\right)=2\overline{m}\times\overline{m}+4\overline{n}\times\overline{m}+\overline{m}\times\overline{n}+2\overline{n}\times\overline{n}=-3\overline{m}\times\overline{n}.$$

Отже, $S_{\text{пар}}=\left|-3\overline{m}\times\overline{n}\right|=3\left|\overline{m}\right|\left|\overline{n}\right|\sin\pi/6=3\cdot2\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=3$ (кв. од.).

Приклад 5. Дано трикутник з вершинами $A(8;-10;12)$, $B(6;-14;16)$, $C(16;-4;16)$. Знайти довжину його висоти, проведеної з вершини *C*.

Розв'язання. Розглянемо вектори $\overline{AB}=(-2;-4;4)$ і $\overline{AC}=(8;6;4)$. Площа трикутника *ABC*

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|.$$

За формулою (21) знаходимо

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & -4 & 4\\ 8 & 6 & 4\end{vmatrix}=-40\overline{i}+40\overline{j}+20\overline{k}=20\left(-2\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}\right).$$

Отже, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot20\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=10\cdot3=30$ (кв. од.). З іншого боку, площа трикутника $S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}\left|\overline{AB}\right|\cdot h$, де h – довжина його висоти, проведеної з вершини *C*. Тоді $h=\dfrac{2S_{\Delta}}{\left|\overline{AB}\right|}$.

Оскільки $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+4^2}=6$, то $h=\dfrac{2\cdot30}{6}=10$ (лін. од.).

Приклад 6. Якій умові мають задовольняти вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, щоб вектори $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)$ і $\left(\overline{a}-\overline{b}\right)$ були колінеарними ?

Розв'язання. Згідно з умовою колінеарності (20) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\left(\overline{a}-\overline{b}\right)=0$, тобто $\overline{b}\times\overline{a}-\overline{a}\times\overline{b}=-2\overline{a}\times\overline{b}$, $-2\overline{a}\times\overline{b}=0$, звідки випливає, що $\overline{a}\parallel\overline{b}$.

АУДИТОРНЕ ЗАНЯТТЯ 4

1. Обчислити довжину вектора $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$, якщо $\overline{a}=(2;-1;-2)$, $\overline{b}=(3;-2;0)$.

Відповідь: $\left|\overline{c}\right|=\sqrt{53}$.

2. Обчислити площу трикутника *ABC*, заданого вершинами $A(-1;-1;-1)$, $B(0;1;2)$, $C(2;1;0)$.

Відповідь: $2\sqrt{6}$.

3. Розкласти вектор $\overline{d} = \overline{m} \times \overline{n}$ за базисом $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, якщо $\overline{m} = 2\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{n} = 4\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$.

Відповідь: $\overline{d} = 8\overline{i} - 10\overline{j} + 2\overline{k}$.

4. Знайти координати одиничного вектора, перпендикулярного площині *ABC*, де $A(1; -2; 3)$, $B(3; 2; 1)$, $C(2; 3; 1)$.

Відповідь: $\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{11}}\overline{i} + \dfrac{1}{\sqrt{11}}\overline{j} + \dfrac{3}{\sqrt{11}}\overline{k}\right)$.

5. Знайти площу паралелограма *ABCD*, якщо відомі його вершини $A(3; 3; 4)$, $B(2; 3; 3)$, $C(2; 3; 1)$.

Відповідь: $S = 2$ кв. од.

6. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{m} = 2\overline{a} + \overline{b}$ і $\overline{n} = \overline{a} - 3\overline{b}$, якщо $\left|\overline{a}\right| = 2$, $\left|\overline{b}\right| = 3$, а кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ становить $30°$.

Відповідь: $S = 42$ кв. од.

7. Дано $\left|\overline{a}\right| = 5$, $\left|\overline{b}\right| = 2$, $\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = 8$. Знайти $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

Відповідь: ± 6.

8. Довести, що $\left(\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|\right)^2 + \left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)^2 = \left|\overline{a}\right|^2 \left|\overline{b}\right|^2$.

9. Дано три некомпланарні вектори $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$. Знайти значення α і β, при яких вектори $\alpha\overline{p} + \beta\overline{q} + 3\overline{r}$ і $4\overline{p} + 6\alpha\overline{q} + \beta\overline{r}$ колінеарні.

Відповідь: $\alpha = 2$, $\beta = 6$.

САМОСТІЙНА РОБОТА

1. Дано вектори $\overline{a} = (2; -1; 4)$ і $\overline{b} = (0; 5; -3)$. Знайти координати вектора $\left(2\overline{a} + \overline{b}\right) \times \left(\overline{a} - \overline{b}\right)$.

2. Обчислити $\left|\left(\overline{a} - 2\overline{b}\right) \times \left(\overline{a} + \overline{b}\right)\right|$, якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\pi/6$, $\left|\overline{a}\right| = 2$, $\left|\overline{b}\right| = 4$.

3. У трикутнику з вершинами $A(2; 0; 3)$, $B(6; -5; 3)$, $C(2; 4; 0)$ знайти довжину висоти *BK*.

4. Сила $\overline{F} = (7; -4; 3)$ прикладена до точки $A(0; 1; -2)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки $B(-3; 2; -3)$.

5. Вектор $\overline{a}$, перпендикулярний осі Ox і вектору $\overline{b} = (5; 4; -3)$, утворює гострий кут з віссю Oz. Знаючи, що $\left|\overline{a}\right| = 5$, знайти його координати.

3.8. Мішаний добуток трьох векторів

Мішаним (векторно-скалярним) добутком векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ називають число, яке дорівнює скалярному добутку векторів $\left(\overline{a} \times \overline{b}\right)$ і $\overline{c}$, де $\overline{a} \times \overline{b}$ – векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Позначають мішаний добуток як $\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c}$.

Геометричний зміст мішаного добутку. Мішаний добуток векторів за абсолютною величиною дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$, як на ребрах (рис.17).

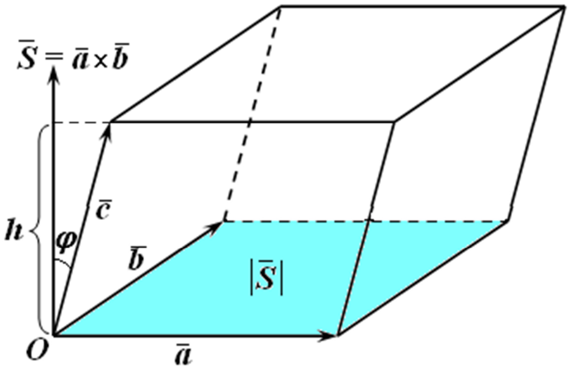


Рис.17

Дійсно, $\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = \overline{S} \cdot \overline{c} = \left|\overline{S}\right| \cdot \left|\overline{c}\right| \cos\varphi = \left|\overline{S}\right| \text{пр}_{\overline{S}}\, \overline{c} = \left|\overline{S}\right| \cdot h = \pm V_{\text{пар}}$.

Тут $\left|\overline{S}\right|$ – площа паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$; h – висота паралелепіпеда. Таким чином,

$$\boxed{V_{\text{пар}} = \left|\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c}\right|}. \qquad (23)$$

Коли вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ задані своїми координатами $\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\overline{b} = (x_2; y_2; z_2)$ і $\overline{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то мішаний добуток обчислюють за формулою

$$\boxed{\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}. \tag{24}$$

3.9. Властивості мішаного добутку

1⁰. Мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці множників, тобто:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\cdot\overline{a}=\left(\overline{c}\times\overline{a}\right)\cdot\overline{b}.$$

Це дозволяє записувати мішаний добуток у вигляді $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$. Знак векторного множення відносять до будь-якої пари сусідніх векторів.

2⁰. Мішаний добуток змінює свій знак при перестановці будь-яких двох векторів-співмножників:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=-\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c},\quad \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=-\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b},\quad \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=-\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}.$$

Дійсно, така перестановка векторів рівнозначна перестановці двох рядків визначника (24), що призводить до зміни знака.

3⁰. ***Умова компланарності векторів.*** Мішаний добуток ненульових векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.

$$\boxed{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=0}. \tag{25}$$

Покажемо, що це так. Нехай $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=0$. Припустимо, що вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ не є компланарними. Тоді на цих векторах можна побудувати паралелепіпед з об'ємом $V_{\text{пар}}\neq 0$. Згідно з виразом (23) у цьому разі $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=V_{\text{пар}}\neq 0$, а це суперечить умові $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=0$.

Зворотно: нехай вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ компланарні. Тоді вектор $\overline{S}=\overline{a}\times\overline{b}$ буде перпендикулярний площині, в якій лежать вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$, відтак $\overline{S}\perp\overline{c}$. Тому $\overline{S}\cdot\overline{c}=0$, тобто $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=0$.

4⁰. Трійка векторів буде ***правою*** тоді і тільки тоді, коли $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}>0$. Якщо $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}<0$, то вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ утворюють ***ліву*** трійку.

5⁰. $\left(\lambda\overline{a}\right)\overline{b}\,\overline{c}=\overline{a}\left(\lambda\overline{b}\right)\overline{c}=\overline{a}\,\overline{b}\left(\lambda\overline{c}\right)=\lambda\left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right)$.

6⁰. $\left(\overline{a_1}+\overline{a_2}\right)\overline{b}\,\overline{c}=\overline{a_1}\,\overline{b}\,\overline{c}+\overline{a_2}\,\overline{b}\,\overline{c}$.

Приклад 1. Довести компланарність векторів $\overline{a}=(2;2;3)$, $\overline{b}=(0;4;-1)$ і $\overline{c}=(1;3;1)$.

Розв'язання. Знайдемо мішаний добуток :

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & 4 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=8-2-12+6=0.$$

Отже, відповідно до властивості $\mathbf{3^0}$ задані вектори компланарні.

Приклад 2. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}=(1;2;3)$, $\overline{b}=(0;6;-1)$ і $\overline{c}=(4;3;1)$. Правою чи лівою буде трійка векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$?

Розв'язання. Знайдемо мішаний добуток векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 6 & -1\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=6-8-72+3=-71<0.$$

Отже, згідно з властивістю $\mathbf{4^0}$ вектори утворюють ліву трійку.

Об'єм паралелепіпеда $V_{\text{пар}}=\left|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right|=\left|-71\right|=71\,(\text{куб. од.})$.

Приклад 3. Точки $A(1;-1;2)$, $B(5;4;5)$, $C(5;3;4)$, $S(4;0;3)$ є вершинами тетраедра *SABC*. Обчислити об'єм тетраедра, площу грані *ABC* і довжину висоти, проведеної до цієї грані.

Розв'язання. Розглянемо вектори $\overline{AB}=(4;5;3)$, $\overline{AC}=(4;4;2)$ і $\overline{AS}=(3;1;1)$. Об'єм піраміди складає шосту частину об'єму паралелепіпеда, тобто $V=\frac{1}{6}V_{\text{пар}}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AS}\right|$. Знайдемо мішаний добуток

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AS}=\begin{vmatrix}4 & 5 & 3\\ 4 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=16+12+30-36-6-20=-6.$$

Таким чином, об'єм тетраедра $V=\frac{1}{6}\left|-6\right|=1\,(\text{куб. од.})$.

Площа грані *ABC* дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, а саме: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

Обчислимо $\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 4 & 5 & 3\\ 4 & 4 & 2\end{vmatrix}=-2\overline{i}+4\overline{j}-4\overline{k}$ і отримаємо:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (кв. од.).

Виходячи з формули об'єму піраміди $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$, де h – довжина висоти, проведеної до грані *ABC*, маємо $h = \frac{3V}{S_{ABC}}$. Отже, $h = \frac{3 \cdot 1}{3} = 1$ (лін. од.).

Приклад 4. З'ясувати, чи утворюють базис вектори $\overline{a} = (2; -1; 0)$, $\overline{b} = (7; 3; 1)$, $\overline{c} = (3; 5; 1)$.

Розв'язання. Три вектори у просторі утворюють базис, якщо вони не компланарні. Знайдемо мішаний добуток векторів:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 3 - 10 + 7 = 0.$$

Вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ компланарні, тому не утворюють базис.

АУДИТОРНЕ ЗАНЯТТЯ 5

1. Задано вершини чотирикутника $A(2; 3; -1)$, $B(5; 2; 6)$, $C(-1; 2; 1)$ і $D(2; 1; 8)$. Чи буде чотирикутник плоским?

Відповідь: Так.

2. Нехай $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – деякі вектори. Перевірити, чи є компланарними вектори $\overline{a} = \overline{m} - \overline{n}$, $\overline{b} = \overline{n} - \overline{r}$ і $\overline{c} = \overline{r} - \overline{m}$.

Відповідь: Так.

3. Дано три некомпланарні вектори $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$. Знайти значення λ, при якому вектори $\overline{a} = \lambda\overline{p} + \overline{q} + \overline{r}$, $\overline{b} = \overline{p} + \lambda\overline{q} + \overline{r}$ і $\overline{c} = \overline{p} + \overline{q} + \lambda\overline{r}$ будуть компланарними.

Відповідь: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$.

4. Об'єм тетраедра з вершинами $A(1; -1; 0)$, $B(1; 5; 3)$, $C(4; 8; -3)$ і $D(1; \lambda; 0)$ дорівнює 6. Знайти значення λ.

Відповідь: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -5$.

5. У квадраті *ABCD* відомі координати вершин $A(7; 1; 8)$ і $B(5; -2; 2)$, вершина *C* лежить у площині *xOy*. Знайти координати вершин *C* і *D* та площу квадрата.

Відповідь: $C_1(2; 4; 0)$, $D_1(4; 7; 6)$; $C_2(152/13; 32/13; 0)$, $D_2(178/13; 7/13; 6)$; $S = 49$ кв. од.

6. У тетраедрі з вершинами $A(3; 1; 1)$, $B(1; 4; 1)$, $C(1; 1; 6)$ і $D(3; 4; 9)$ знайти площу грані *ABC* і довжину висоти, проведеної до цієї грані.

Відповідь: $S = 9{,}5$ кв. од., $h = 78/19$ лін. од.

7. Дано два вектори $\overline{a} = (8; 4; 1)$ і $\overline{b} = (2; -2; 1)$. Знайти вектор $\overline{c}$, який компланарний векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$, перпендикулярний вектору $\overline{a}$ і дорівнює йому за довжиною, а також утворює з вектором $\overline{b}$ тупий кут.

Відповідь: $\overline{c} = \left(-5/\sqrt{2}; 11/\sqrt{2}; -4/\sqrt{2}\right)$.

8. Чи будуть компланарними вектори $\overline{a} = (3; 2; 2)$, $\overline{b} = (1; -1; 3)$ і $\overline{c} = (1; 9; -11)$?

Відповідь: вектори компланарні.

9. Побудувати пiрамиду з вершинами $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 6)$ і $D(2; 3; 8)$. Обчислити її об'єм V і висоту h, опущену на грань ABC.

Відповідь: $V = 14$ куб. од., $h = \sqrt{14}$ лін. од.

САМОСТІЙНА РОБОТА

1. Вектори $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ утворюють праву трійку, взаємно перпендикулярні і мають довжини $\left|\overline{e_1}\right| = 3$, $\left|\overline{e_2}\right| = 2$, $\left|\overline{e_3}\right| = 1$. Обчислити $\overline{e_1}\,\overline{e_2}\,\overline{e_3}$.

2. Встановити, чи утворюють базис вектори $\overline{a} = (2; 4; -1)$, $\overline{b} = (1; 3; 1)$ і $\overline{c} = (4; 10; 2)$.

3. Визначити об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(1; -4; 4)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(-3; -5; 2)$ і $D(2; 1; 3)$.

4. Об'єм піраміди $V = 20$, три її вершини знаходяться в точках $A(1; 10; -7)$, $B(2; 15; -12)$ і $C(5; 10; -4)$. Знайти координати четвертої вершини *D*, якщо вона розташована на осі *Ox*.

5. У тетраедрі з вершинами в точках $A(3; 3; 2)$, $B(4; 2; 3)$, $C(4; 4; 3)$ і $D(5; 6; -2)$ обчислити довжину висоти, опущеної на грань ABC.

4. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Дано точки *A*, *B*, *C* і *D*. Знайти: а) довжину вектора $\overline{a} = m\overline{AB} + n\overline{AC}$; б) скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{AB}$; в) проекцію вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{a}$;

г) векторний добуток векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$; д) мішаний добуток векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$; з'ясувати, чи будуть ці вектори компланарними.

1.1. $A(1; 3; –1)$, $B(1; –5; –3)$, $C(–1; 0; 4)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 1$, $n = 2$.

1.2. $A(3; 5; 2)$, $B(–4; 1; 5)$, $C(3; –3; –2)$ і $D(5; 6; –5)$, $m = –1$, $n = 3$.

1.3.$A(3; 5; 6)$, $B(0; –3; 1)$, $C(–2; –3; 1)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 1$, $n = –2$.

1.4. $A(2; 4; 3)$, $B(3; 1; –2)$, $C(–1; 3; 5)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 2$, $n = 1$.

1.5. $A(–2; –3; 5)$, $B(2; 4; –3)$, $C(1; 5; 3)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = –1$, $n = 2$.

1.6. $A(7; 6; –5)$, $B(–6; –3; 3)$, $C(4; 4; 3)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = –3$, $n = 2$.

1.7. $A(5; 3; 4)$, $B(–6; 0; 7)$, $C(1; –1; –6)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 1$, $n = –3$.

1.8. $A(–6; 5; 4)$, $B(5; 6; 3)$, $C(3; 8; –5)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = –2$, $n = 1$.

1.9. $A(3; 2; 1)$, $B(–3; –2; 4)$, $C(5; 3; –2)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 1$, $n = 2$.

1.10. $A(4; 5; 2)$, $B(6; –3; 7)$, $C(5; 3; –6)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 3$, $n = –2$.

1.11. $A(–5; –2; –7)$, $B(2; 3; 4)$, $C(1; –6; 3)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 1$, $n = 2$.

1.12. $A(4; 5; 6)$, $B(–3; –7; 5)$, $C(6; –1; –2)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = –1$, $n = 2$.

1.13. $A(4; 3; 3)$, $B(–4; 1; 2)$, $C(3; 1; –4)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = –3$, $n = 2$.

1.14. $A(–3; –1; –4)$, $B(4; 8; 3)$, $C(5; 7; –2)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 1$, $n = –3$.

1.15. $A(1; 3; 5)$, $B(–2; 4; 0)$, $C(3; –4; –3)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = –2$, $n = 1$.

1.16. $A(5; 6; 4)$, $B(–3; 3; 4)$, $C(6; –5; –1)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 1$, $n = 2$.

1.17. $A(–3; 2; –5)$, $B(2; –2; 1)$, $C(3; 1; 3)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 1$, $n = 3$.

1.18. $A(4; 3; 5)$, $B(–1; 2; 4)$, $C(3; –1; –2)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = –1$, $n = 2$.

1.19. $A(9; 5; 2)$, $B(–3; 3; 4)$, $C(2; –5; –6)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 1$, $n = – 2$.

1.20. $A(6; 7; 2)$, $B(1; 3;1)$, $C(4; –2; 2)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 3$, $n = –2$.

1.21. $A(–3; –4; –3)$, $B(1; 3; 1)$, $C(1; –5; 2)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 1$, $n = 3$.

1.22. $A(–1; –2; –3)$, $B(3; –3; 1)$, $C(2; 5; 6)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = –3$, $n = 1$.

1.23. $A(1; 3; 6)$, $B(3; –2; 5)$, $C(4; 3; –4)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 1$, $n = 2$.

1.24. $A(2; 3; –5)$, $B(–3; 0; 1)$, $C(1; –4; 0)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = –1$, $n = 2$.

1.25. $A(3; –3; 4)$, $B(–2; –1; 5)$, $C(1; 1; –1)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 1$, $n = –2$.

1.26. $A(0; 2; 1)$, $B(–3; 3; –2)$, $C(0; 2; –3)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = –2$, $n = 2$.

1.27. $A(0; –1; 5)$, $B(0; 4; 6)$, $C(2; 5; 3)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 3$, $n = 2$.

1.28. $A(1; 3; 4)$, $B(0; –3; 2)$, $C(–2; –3; 3)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 2$, $n = –3$.

1.29. $A(3; 5; 4)$, $B(4; 2; –3)$, $C(0; 3; 3)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 3$, $n = –2$.

1.30. $A(–3; –3; 3)$, $B(1; 2; –3)$, $C(1; 3; 1)$ і $D(5; –1; –3)$, $m = 3$, $n = –3$.

2. Задати на площині два таких вектори $\overline{p}$ і $\overline{q}$, щоб $|\overline{p}| = p, |\overline{q}| = q$, а кут між ними $\overline{p} \hat{,} \overline{q} = \varphi$. Необхідно: а) побудувати вектори $\overline{a} = \beta\overline{p} + \gamma\overline{q}$ і $\overline{b} = \delta\overline{p} + \lambda\overline{q}$; б) обчислити скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$; в) знайти проекцію вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{a}$; г) знайти косинус кута між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

2.1. $\beta = 3,\ \gamma = -2, \delta = -1, \lambda = 6, p = 1, q = 4, \varphi = \pi/2$.
2.2. $\beta = 2,\ \gamma = 1, \delta = -3, \lambda = 4, p = 5, q = 6, \varphi = \pi/3$.
2.3. $\beta = 1,\ \gamma = -4, \delta = 1, \lambda = -2, p = 3, q = 2, \varphi = \pi/6$.
2.4. $\beta = 4,\ \gamma = 1, \delta = -2, \lambda = 3, p = 2, q = 3, \varphi = 3\pi/2$.
2.5. $\beta = 2,\ \gamma = -1, \delta = 1, \lambda = -2, p = 3, q = 8, \varphi = 2\pi/3$.
2.6. $\beta = 2,\ \gamma = 3, \delta = 2, \lambda = 1, p = 7, q = 2, \varphi = 4\pi/3$.
2.7. $\beta = -3,\ \gamma = 2, \delta = 1, \lambda = 2, p = 2, q = 3, \varphi = 7\pi/3$.
2.8. $\beta = 3,\ \gamma = 4, \delta = -1, \lambda = 2, p = 3, q = 6, \varphi = 5\pi/3$.
2.9. $\beta = -2,\ \gamma = -3, \delta = 4, \lambda = -1, p = 5, q = 2, \varphi = \pi/4$.
2.10. $\beta = -4,\ \gamma = 5, \delta = 3, \lambda = -2, p = 8, q = 1, \varphi = 7\pi/3$.
2.11. $\beta = 4,\ \gamma = -2, \delta = -2, \lambda = 3, p = 2, q = 3, \varphi = 4\pi/3$.
2.12. $\beta = -3,\ \gamma = 2, \delta = 3, \lambda = -6, p = 1, q = 2, \varphi = 2\pi/3$.
2.13. $\beta = -2,\ \gamma = -5, \delta = 4, \lambda = -3, p = 6, q = 1, \varphi = \pi/3$.
2.14. $\beta = 1,\ \gamma = -2, \delta = -3, \lambda = 2, p = 1, q = 4, \varphi = \pi/2$.
2.15. $\beta = 6,\ \gamma = -1, \delta = -3, \lambda = 2, p = 2, q = 2, \varphi = \pi/6$.
2.16. $\beta = 4,\ \gamma = -3, \delta = -1, \lambda = 2, p = 2, q = 1, \varphi = 4\pi/3$.
2.17. $\beta = 1,\ \gamma = -2, \delta = 2, \lambda = -3, p = 1, q = 8, \varphi = 2\pi/3$.
2.18. $\beta = -1,\ \gamma = 6, \delta = 4, \lambda = -2, p = 6, q = 3, \varphi = 7\pi/3$.
2.19. $\beta = -2,\ \gamma = 4, \delta = 3, \lambda = 4, p = 2, q = 3, \varphi = 5\pi/3$.
2.20. $\beta = -1,\ \gamma = 2, \delta = -3, \lambda = 4, p = 1, q = 2, \varphi = \pi/3$.
2.21. $\beta = -4,\ \gamma = 1, \delta = -1, \lambda = 2, p = 2, q = 2, \varphi = \pi/2$.
2.22. $\beta = 2,\ \gamma = -1, \delta = 1, \lambda = 4, p = 2, q = 3, \varphi = \pi/4$.
2.23. $\beta = 5,\ \gamma = -2, \delta = 4, \lambda = -1, p = 1, q = 8, \varphi = 2\pi/3$.
2.24. $\beta = -2,\ \gamma = 2, \delta = 3, \lambda = -2, p = 3, q = 2, \varphi = 4\pi/3$.
2.25. $\beta = 4,\ \gamma = -3, \delta = -2, \lambda = -2, p = 2, q = 3, \varphi = 7\pi/3$.
2.26. $\beta = -3,\ \gamma = 4, \delta = 2, \lambda = 4, p = 1, q = 2, \varphi = 5\pi/3$.
2.27. $\beta = -1,\ \gamma = 2, \delta = -3, \lambda = 2, p = 3, q = 4, \varphi = \pi/2$.
2.28. $\beta = 2,\ \gamma = 5, \delta = 2, \lambda = -1, p = 2, q = 3, \varphi = \pi/3$.
2.29. $\beta = 1,\ \gamma = 2, \delta = -3, \lambda = 4, p = 1, q = 2, \varphi = \pi/6$.
2.30. $\beta = -2,\ \gamma = 3, \delta = 4, \lambda = 1, p = 1, q = 6, \varphi = \pi/4$.

3. Дано вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$. Визначити: а) при яких значеннях α і β вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні; б) при яких значеннях β вектори $\overline{b}$ і $\overline{c}$ ортогональні.

3.1. $\overline{a} = (-1;\alpha;8)$, $\overline{b} = (1;4;\beta)$, $\overline{c} = (3;2;-1)$.

3.2. $\overline{a} = (2;4;\alpha), \overline{b} = (1;\beta;3), \overline{c} = (-2;2;4)$.

3.3. $\overline{a} = (\alpha;3;2), \overline{b} = (1;-3;\beta), \overline{c} = (6;-2;4)$.

3.4. $\overline{a} = (-3;\alpha;5), \overline{b} = (-1;4;\beta), \overline{c} = (7;2;1)$.

3.5. $\overline{a}=(1;-5;\alpha),\overline{b}=(1;\beta;2),\overline{c}=(-2;6;4)$.

3.6. $\overline{a}=(\alpha;3;2),\overline{b}=(1;-3;\beta),\overline{c}=(6;-2;4)$.

3.7. $\overline{a}=(-2;\alpha;6),\overline{b}=(2;3;\beta),\overline{c}=(8;-2;5)$.

3.8. $\overline{a}=(3;-3;\alpha),\overline{b}=(\beta;1;-2),\overline{c}=(-3;1;5)$.

3.9. $\overline{a}=(\alpha;-4;1),\overline{b}=(1;\beta;-1),\overline{c}=(9;-1;4)$.

3.10. $\overline{a}=(-4;\alpha;8),\overline{b}=(1;3;\beta),\overline{c}=(-4;6;2)$.

3.11. $\overline{a}=(\alpha;-2;-6),\overline{b}=(1;\beta;3),\overline{c}=(9;-1;4)$.

3.12. $\overline{a}=(-9;\alpha;-2),\overline{b}=(\beta;3;2),\overline{c}=(8;2;5)$.

3.13. $\overline{a}=(4;-2;\alpha),\overline{b}=(\beta;1;-2),\overline{c}=(-3;1;5)$.

3.14. $\overline{a}=(\alpha;6;-6),\overline{b}=(1;-1;\beta),\overline{c}=(2;-2;4)$.

3.15. $\overline{a}=(-2;\alpha;6),\overline{b}=(1;4;\beta),\overline{c}=(7;2;-5)$.

3.16. $\overline{a}=(4;-1;\alpha),\overline{b}=(\beta;2;-2),\overline{c}=(3;-3;-6)$.

3.17. $\overline{a}=(\alpha;3;4),\overline{b}=(1;-3;\beta),\overline{c}=(7;-3;4)$.

3.18. $\overline{a}=(-1;\alpha;6),\overline{b}=(-4;8;\beta),\overline{c}=(7;2;6)$.

3.19. $\overline{a}=(5;-10;\alpha),\overline{b}=(1;\beta;2),\overline{c}=(-2;6;4)$.

3.20. $\overline{a}=(\alpha;-2;-4),\overline{b}=(1;-1;\beta),\overline{c}=(2;-2;4)$.

3.21. $\overline{a}=(-10;\alpha;5),\overline{b}=(-2;3;\beta),\overline{c}=(6;-3;7)$.

3.22. $\overline{a}=(1;-1;\alpha),\overline{b}=(\beta;3;-9),\overline{c}=(3;-3;-1)$.

3.23. $\overline{a}=(\alpha;1;-2),\overline{b}=(-6;3;\beta),\overline{c}=(3;9;-3)$.

3.24. $\overline{a}=(-4;\alpha;8),\overline{b}=(1;4;\beta),\overline{c}=(2;2;-5)$.

3.25. $\overline{a}=(2;-2;\alpha),\overline{b}=(\beta;1;-5),\overline{c}=(-2;6;4)$.

3.26. $\overline{a}=(\alpha;1;7),\overline{b}=(2;-1;\beta),\overline{c}=(7;-6;-5)$.

3.27. $\overline{a}=(2;\alpha;3),\overline{b}=(-2;7;\beta),\overline{c}=(4;-1;5)$.

3.28. $\overline{a}=(4;-6;\alpha),\overline{b}=(\beta;3;-6),\overline{c}=(3;-3;-1)$.

3.29. $\overline{a}=(\alpha;-2;1),\overline{b}=(-3;\beta;3),\overline{c}=(7;-1;4)$.

3.30. $\overline{a}=(3;\alpha;9),\overline{b}=(1;4;\beta),\overline{c}=(-2;2;-6)$.

4. Дано вершини піраміди A, B, C і D. Знайти: а) координати центра ваги трикутника ABC; б) площу грані ABC; в) об’єм піраміди $ABCD$; г) довжину висоти DH, проведеної з вершини D на грань ABC.

4.1. $A(-6;-4;5), B(-2;4;-3), C(2;-1;3), D(0;1;1)$.

4.2. $A(2;3;4), B(0;1;0), C(-1;-2;5), D(2;-5;-2)$.

4.3. $A(1;3;1), B(-3;-1;3), C(2;4;-1), D(3;1;-2)$.

4.4. $A(0;2;2), B(-2;4;6), C(-1;-2;3), D(2;3;-3)$.

4.5. $A(2;3;3), B(-2;1;-5), C(2;1;-1), D(5;-4;2)$.

4.6. $A(-4;-2;-3), B(2;4;6), C(2;1;-1), D(7;-2;4)$.

4.7. $A(-3;5;3), B(3;-3;0), C(1;5;-3), D(1;4;-4)$.

4.8. $A(2;-1;5), B(-4;-1;3), C(2;2;-3), D(3;5;-6)$.

4.9. $A(6;4;7), B(-4;-6;3), C(1;-2;4), D(4;0;-5)$.

4.10. $A(2;-1;5), B(-4;-1;3), C(2;2;-3), D(3;5;-6)$.

4.11. $A(-4;-3;-2), B(6;1;-2), C(5;-1;1), D(4;3;-6)$.

4.12. $A(2;-4;-1), B(-4;2;3), C(0;5;6), D(-1;-3;4)$.

4.13. $A(-3;-6;-2), B(-3;-4;6), C(1;-2;2), D(2;1;2)$.

4.14. $A(6;3;8), B(2;-1;-2), C(-4;-2;-1), D(0;-2;3)$.

4.15. $A(-3;-4;-2), B(1;2;4), C(4;6;-5), D(5;-2;4)$.

4.16. $A(4;1;3), B(-2;5;-7), C(2;-4;7), D(8;-2;4)$.

4.17. $A(-5;3;4), B(5;-5;2), C(4;1;-7), D(1;7;-1)$.

4.18. $A(4;2;5), B(-2;-4;3), C(4;-5;7), D(3;-1;-2)$.

4.19. $A(4;-2;3), B(-2;-4;5), C(3;1;-6), D(5;1;-8)$.

4.20. $A(-6;-5;-4), B(4;1;-2), C(7;-3;-1), D(2;3;-6)$.

4.21. $A(6;-1;-2), B(2;7;8), C(2;6;8), D(-2;-4;1)$.

4.22. $A(4;1;6), B(6;-5;2), C(-6;-5;2), D(2;-4;2)$.

4.23. $A(-1;-6;-1), B(-5;-4;7), C(3;-4;1), D(1;0;3)$.

4.24. $A(-5;-2;-4), B(7;0;6), C(2;4;-2), D(3;-1;8)$.

4.25. $A(2;-1;5), B(-4;-1;3), C(2;2;-3), D(3;5;-6)$.

4.26. $A(-7;1;6), B(3;-3;8), C(1;3;-5;), D(3;5;-4)$.

4.27. $A(2;-1;5), B(-4;-1;3), C(2;2;-3), D(3;5;-6)$.

4.28. $A(-8;-6;5), B(-2;2;-1), C(4;-3;1), D(2;3;3)$.

4.29. $A(2;4;2), B(-2;2;6), C(-2;-1;5), D(6;7;-1)$.

4.30. $A(3;1;2), B(-5;-3;2), C(4;6;-3), D(5;3;-6)$.

5. Довести, що вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\overline{d}$ в цьому базисі.

5.1. $\overline{a}=(2;3;1), \overline{b}=(1;1;1), \overline{c}=(2;-1;-1), \overline{d}=(6;12;6)$.

5.2. $\overline{a}=(-1;1;-1), \overline{b}=(3;2;1), \overline{c}=(2;-1;5), \overline{d}=(11;1;13)$.

5.3. $\overline{a}=(3;5;-1), \overline{b}=(1;-1;1), \overline{c}=(4;6;3), \overline{d}=(-7;-17;-11)$.

5.4. $\overline{a}=(2;-5;0), \overline{b}=(3;-1;-2), \overline{c}=(-6;2;-1), \overline{d}=(-17;-3;-1)$.

5.5. $\overline{a}=(1;-3;4), \overline{b}=(-2;5;1), \overline{c}=(3;-2;-4), \overline{d}=(-7;12;15)$.

5.6. $\overline{a}=(-5;-3;1), \overline{b}=(2;-1;0), \overline{c}=(1;-1;1), \overline{d}=(-13;-5;3)$.

5.7. $\overline{a}=(3;1;2), \overline{b}=(-6;2;3), \overline{c}=(3;0;-2), \overline{d}=(0;8;5)$.

5.8. $\overline{a}=(-3;0;1), \overline{b}=(2;6;-3), \overline{c}=(-3;-2;4), \overline{d}=(-2;6;5)$.

5.9. $\overline{a}=(5;1;-2), \overline{b}=(-3;1;2), \overline{c}=(-4;-3;5), \overline{d}=(1;-8;9)$.

5.10. $\overline{a}=(0;3;-4), \overline{b}=(3;-2;-1), \overline{c}=(-4;3;0), \overline{d}=(2;-4;2)$.

5.11. $\overline{a}=(3;-1;4), \overline{b}=(3;2;1), \overline{c}=(4;3;2), \overline{d}=(-2;-9;2)$.

5.12. $\overline{a}=(5;-1;4), \overline{b}=(3;2;1), \overline{c}=(4;3;2), \overline{d}=(-1;3;-5)$.

5.13. $\overline{a}=(2;1;-2), \overline{b}=(-1;3;0), \overline{c}=(0;-1;4), \overline{d}=(4;-2;-14)$.

5.14. $\overline{a}=(5;1;-2), \overline{b}=(-2;1;1), \overline{c}=(-1;-4;3), \overline{d}=(-1;14;-7)$.

5.15. $\overline{a}=(4;3;2), \overline{b}=(-2;-1;-7), \overline{c}=(1;3;-5), \overline{d}=(-1;-10;3)$.

5.16. $\overline{a}=(-1;1;1), \overline{b}=(2;-5;-5), \overline{c}=(-1;-2;1), \overline{d}=(-9;10;6)$.

5.17. $\overline{a}=(1;2;-5), \overline{b}=(-2;3;4), \overline{c}=(1;-6;5), \overline{d}=(-3;7;7)$.

5.18. $\overline{a}=(6;1;0), \overline{b}=(4;1;2), \overline{c}=(-2;3;-4), \overline{d}=(2;-6;-2)$.

5.19. $\overline{a}=(3;-4;5), \overline{b}=(-2;6;-4), \overline{c}=(3;-1;6), \overline{d}=(8;-7;11)$.

5.20. $\overline{a}=(4;2;1), \overline{b}=(-1;4;-1), \overline{c}=(-6;3;2), \overline{d}=(12;-3;-9)$.

5.21. $\overline{a}=(10;1;2), \overline{b}=(-2;2;-3), \overline{c}=(3;-1;6), \overline{d}=(-10;3;1)$.

5.22. $\overline{a}=(8;4;2), \overline{b}=(3;1;-1), \overline{c}=(-3;-6;3), \overline{d}=(4;-11;14)$.

5.23. $\overline{a}=(6;2;1), \overline{b}=(3;-4;5), \overline{c}=(-3;-2;-3), \overline{d}=(9;6;-8)$.

5.24. $\overline{a}=(1;2;3), \overline{b}=(-4;2;-1), \overline{c}=(-5;3;4), \overline{d}=(0;7;3)$.

5.25. $\overline{a}=(-1;4;1), \overline{b}=(2;1;-6), \overline{c}=(3;-2;1), \overline{d}=(10;0;6)$.

5.26. $\overline{a}=(-2;1;2), \overline{b}=(-3;2;-1), \overline{c}=(2;-2;3), \overline{d}=(-9;5;-1)$.

5.27. $\overline{a}=(2;-1;1), \overline{b}=(-2;4;1), \overline{c}=(3;4;-1), \overline{d}=(-5;9;8)$.

5.28. $\overline{a}=(-3;-4;1), \overline{b}=(1;2;1), \overline{c}=(-3;-5;6), \overline{d}=(-2;1;1)$.

5.29. $\overline{a}=(1;-2;1), \overline{b}=(-1;-3;2), \overline{c}=(0;-1;2), \overline{d}=(3;-2;2)$.

5.30. $\overline{a}=(4;6;-1), \overline{b}=(-2;1;2), \overline{c}=(1;3;5), \overline{d}=(0;1;-9)$.

6. Дві сили $\overline{F_1}$ і $\overline{F_2}$ прикладені до точки A. Знайти: а) роботу рівнодійної цих сил по переміщенню матеріальної точки вздовж прямої з положення A в положення B; б) величину і напрямні косинуси моменту рівнодійної цих сил відносно точки B.

6.1. $\overline{F_1}=(3;1;0), \overline{F_2}=(5;4;1), A(0;5;-1), B(3;4;0)$.

6.2. $\overline{F_1}=(4;-1;5), \overline{F_2}=(-3;5;-2), A(2;-3;4), B(5;1;-1)$.

6.3. $\overline{F_1}=(4;-1;3), \overline{F_2}=(-4;5;4), A(-4;1;5), B(4;-3;6)$.

6.4. $\overline{F_1}=(6;2;-5), \overline{F_2}=(4;-1;3), A(-2;-1;5), B(8;-4;4)$.

6.5. $\overline{F_1}=(-5;3;0), \overline{F_2}=(2;7;5), A(4;-5;2), B(7;-1;6)$.

6.6. $\overline{F_1}=(-3;4;5), \overline{F_2}=(-5;5;-4), A(-8;3;7), B(7;-1;6)$.

6.7. $\overline{F_1}=(-3;8;9), \overline{F_2}=(4;0;-4), A(-5;-3;2), B(6;-2;7)$.

6.8. $\overline{F_1}=(-4;5;-2), \overline{F_2}=(3;5;2), A(4;-5;2), B(3;-6;8)$.

6.9. $\overline{F_1}=(6;2;-5), \overline{F_2}=(-5;0;3), A(-6;3;6), B(4;-3;10)$.

6.10. $\overline{F_1}=(5;-1;-4), \overline{F_2}=(-5;3;6), A(-2;3;-5), B(5;6;-2)$.

6.11. $\overline{F_1}=(3;3;-5), \overline{F_2}=(-3;-2;3), A(4;2;-6), B(3;-1;-3)$.

6.12. $\overline{F_1}=(6;4;-8), \overline{F_2}=(-1;-3;2), A(-2;3;0), B(5;3;-2)$.

6.13. $\overline{F_1}=(-5;-7;3), \overline{F_2}=(2;0;-6), A(2;-3;6), B(-1;6;3)$.

6.14. $\overline{F_1}=(6;2;1), \overline{F_2}=(4;2;-5), A(-4;2;6), B(3;7;-4)$.

6.15. $\overline{F_1}=(-9;6;4), \overline{F_2}=(3;-9;6), A(3;-4;8), B(3;6;-6)$.

6.16. $\overline{F_1}=(6;-5;-3), \overline{F_2}=(7;2;-8), A(-2;4;8), B(4;5;-2)$.

6.17. $\overline{F_1}=(5;-2;2), \overline{F_2}=(4;5;-3), A(6;0;-4), B(2;-1;-5)$.

6.18. $\overline{F_1} = (5;7;-3), \overline{F_2} = (-3;-2;6), A(-4;3;-1), B(5;7;-4)$.

6.19. $\overline{F_1} = (3;3;7), \overline{F_2} = (-2;4;-3), A(5;3;-2), B(1;3;-1)$.

6.20. $\overline{F_1} = (5;8;-2), \overline{F_2} = (1;5;-3), A(6;-3;3), B(9;6;-3)$.

6.21. $\overline{F_1} = (-4;5;5), \overline{F_2} = (0;-1;2), A(2;6;-6), B(1;-5;1)$.

6.22. $\overline{F_1} = (5;4;-7), \overline{F_2} = (3;5;5), A(6;-7;3), B(4;-8;-2)$.

6.23. $\overline{F_1} = (-8;6;8), \overline{F_2} = (-2;6;3), A(0;5;-2), B(4;3;4)$.

6.24. $\overline{F_1} = (4;3;8), \overline{F_2} = (5;-2;7), A(5;0;-6), B(5;3;-5)$.

6.25. $\overline{F_1} = (2;-6;6), \overline{F_2} = (-3;-4;2), A(1;2;-6), B(1;5;4)$.

6.26. $\overline{F_1} = (3;10;-6), \overline{F_2} = (2;7;4), A(4;6;2), B(4;-2;-1)$.

6.27. $\overline{F_1} = (-3;6;-8), \overline{F_2} = (-4;5;2), A(5;-1;4), B(8;1;-2)$.

6.28. $\overline{F_1} = (3;11;-5), \overline{F_2} = (1;9;-4), A(6;4;5), B(7;-4;-2)$.

6.29. $\overline{F_1} = (-2;2;-8), \overline{F_2} = (-3;6;-4), A(7;-3;6), B(9;-4;1)$.

6.30. $\overline{F_1} = (4;-4;8), \overline{F_2} = (3;-5;7), A(3;5;-5), B(3;7;-1)$.

5. ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА

1. Дано точки $A(3;1;-1)$, $B(1;-5;-3)$, $C(-1;0;4)$ і $D(5;-1;-3)$, $m=1$; $n=2$. Знайти: а) довжину вектора $\overline{a} = m\overline{AB} + n\overline{AC}$; б) скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{AB}$; в) проекцію вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{a}$; г) векторний добуток векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$; д) мішаний добуток векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$; з’ясувати, чи будуть ці вектори компланарними.

Розв’язання. а) Координати вектора $\overline{AB}$ дорівнюють різницям відповідних координат його кінця B і початку A: $\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$, $\overline{AB} = (1-1;-5-3;-3-(-1))$, $\overline{AB} = (0;-8;-2)$. Аналогічно визначаються координати вектора $\overline{AC}$: $\overline{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A)$, $\overline{AC} = (-1-1;0-3;4-(-1))$, $\overline{AC} = (-2;-3;5)$. При заданих значеннях m і n вектор $\overline{a} = \overline{AB} + 2\overline{AC}$. Оскільки при множенні вектора на число його координати множаться на це число, то $2\overline{AC} = (-4;-6;10)$. При додаванні векторів їх відповідні координати додаються, тобто $\overline{a} = (0+(-4);-8+(-6);-2+10)$; $\overline{a} = (-4;-14;8)$. Довжина вектора $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(-4)^2+(-14)^2+8^2} = \sqrt{276}$;

б) Скалярний добуток векторів у координатах дорівнює сумі добутків однойменних координат, тобто $\overline{a}\cdot\overline{AB}=x\cdot x_1+y\cdot y_1+z\cdot z_1$. Тоді

$$\overline{a}\cdot\overline{AB}=(-4)\cdot 0+(-14)\cdot(-8)+8\cdot(-2)=96;$$

в) Обчислимо координати вектора $\overline{AD}=(x_D-x_A;y_D-y_A;z_D-z_A)$, $\overline{AD}=(5-1;-1-3;-3-(-1))$, $\overline{AD}=(4;-4;-2)$. Проекція вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{a}$ визначається за формулою $\text{пр}_{\overline{a}}\overline{AD}=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{AD}}{\left|\overline{a}\right|}$. Отже,

$$\text{пр}_{\overline{a}}\overline{AD}=\frac{(-4)\cdot 4+(-14)\cdot(-4)+8\cdot(-2)}{\sqrt{276}}=\frac{24}{\sqrt{276}}\approx 1{,}45;$$

г) Векторний добуток векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ може бути обчислений шляхом розкладання визначника третього порядку за елементами першого рядка:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 0 & -8 & -2\\ -2 & -3 & 5\end{vmatrix}=\overline{i}\,((-8)\cdot 5-(-3)\cdot(-2))-\overline{j}\,(0\cdot 5-(-2)\cdot(-2))+$$

$$+\overline{k}\,(0\cdot(-3)-(-2)\cdot(-8))=\overline{i}\,(-40-6)-\overline{j}\,(0-4)+\overline{k}\,(0-16)=-46\overline{i}\,+4\overline{j}\,-16\overline{k}\,;$$

д) Мішаний добуток векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$ дорівнює визначнику третього порядку, що складається з координат цих векторів:

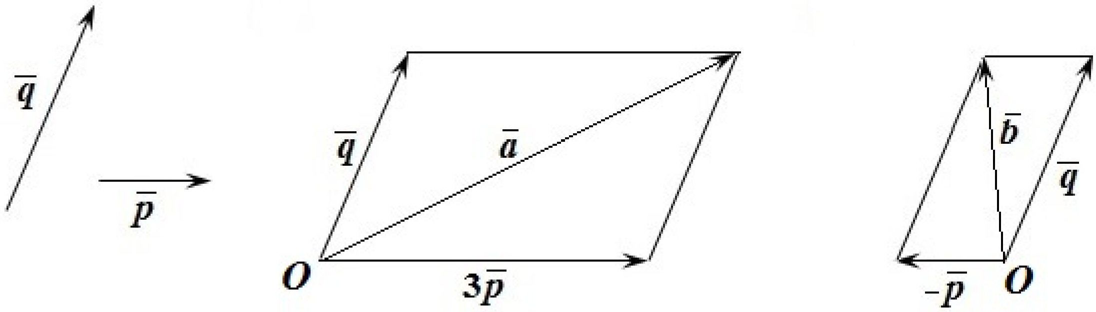
$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\begin{vmatrix}0 & -8 & -2\\ -2 & -3 & 5\\ 4 & -4 & -2\end{vmatrix}=0\cdot(-3)\cdot(-2)+(-2)\cdot(-4)\cdot(-2)+(-8)\cdot 5\cdot 4-$$

$$-4\cdot(-3)\cdot(-2)-(-4)\cdot 5\cdot 0-(-2)\cdot(-8)\cdot(-2)=0-16-160-24-0=32=-168;$$

Оскільки мішаний добуток $\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}$ не дорівнює нулю, то вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$ не є компланарними.

2. Задати на площині два такі вектори $\overline{p}$ і $\overline{q}$, щоб $\left|\overline{p}\right|=1, \left|\overline{q}\right|=2$, а кут між ними $\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q}=\varphi=\pi/3$. Необхідно: а) побудувати вектори $\overline{a}=3\overline{p}+\overline{q}$ і $\overline{b}=-\overline{p}+\overline{q}$; б) обчислити скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$; в) знайти проекцію вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{a}$; г) знайти косинус кута між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Розв'язання. а) Вектори $\overline{a}=3\overline{p}+\overline{q}$ і $\overline{b}=-\overline{p}+\overline{q}$ побудуємо за правилом паралелограма.



б) Користуючись властивостями $1^0 - 4^0$, знайдемо скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(3\overline{p}+\overline{q})\cdot(-\overline{p}+\overline{q})=-3\overline{p}^2+3\overline{p}\cdot\overline{q}-\overline{q}\cdot\overline{p}+\overline{q}^2=-3\overline{p}^2+3\overline{p}\cdot\overline{q}-\overline{p}\cdot\overline{q}+\overline{q}^2=$$

$$=-3\overline{p}^2+2\overline{p}\cdot\overline{q}+\overline{q}^2.$$

Оскільки скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини, то

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=-3\left|\overline{p}\right|^2+2\left|\overline{p}\right|\cdot\left|\overline{q}\right|\cos\frac{\pi}{3}+\left|\overline{q}\right|^2=-3\cdot1^2+2\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}+2^2=-3+2+4=3;$$

в) Проекція вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{a}$ визначається за формулою $\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|}$. Квадрат довжини вектора дорівнює скалярному квадрату вектора, тож маємо:

$$\left|\overline{a}\right|^2=\overline{a}^2=(3\overline{p}+\overline{q})^2=9\overline{p}^2+6\overline{p}\cdot\overline{q}+\overline{q}^2=9\left|\overline{p}\right|^2+6\left|\overline{p}\right|\cdot\left|\overline{q}\right|\cos\frac{\pi}{3}+\left|\overline{q}\right|^2=$$

$$=9\cdot1^2+6\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}+2^2=9+6+4=19.$$ Отже, $|\overline{a}|=\sqrt{19}$, а $\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}=\dfrac{3}{\sqrt{19}}\approx0{,}69;$

г) Визначимо довжину вектора $\overline{b}$:

$$|\overline{b}|^2=\overline{b}^2=(-\overline{p}+\overline{q})^2=\overline{p}^2-2\overline{p}\cdot\overline{q}+\overline{q}^2=|\overline{p}|^2-2\cdot|\overline{p}|\cdot|\overline{q}|\cdot\cos\frac{\pi}{3}+|\overline{q}|^2=1-2\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}+4=3,$$

отже, $\left|\overline{b}\right|=\sqrt{3}$, тоді $\cos(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b})=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{3}}\approx0{,}398.$

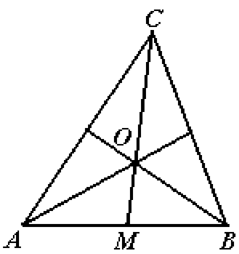
3. Дано вектори $\overline{a}=(2;-4;\alpha)$, $\overline{b}=(-1;\beta;8)$ і $\overline{c}=(3;-1;4)$. Визначити: а) при яких значеннях α і β вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні; б) при яких значеннях β вектори $\overline{b}$ і $\overline{c}$ ортогональні.

Розв'язання. **а)** Умова колінеарності векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ має вигляд: $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ або $\frac{2}{-1} = \frac{-4}{\beta} = \frac{\alpha}{8}$. Звідси $-2 = \frac{-4}{\beta}, \beta = 2, -2 = \frac{\alpha}{8}, \alpha = -16$;

б) Умова ортогональності векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$: $b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z = 0$. Підставивши координати векторів, маємо $(-1) \cdot 3 + \beta \cdot (-1) + 8 \cdot 4 = 0$, $\beta = 29$.

4. Дано вершини піраміди $A(2; 4; 5)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(-2; -3; 4)$ і $D(3; -4; -1)$. Знайти: а) координати центра ваги трикутника *ABC*; б) площу грані *ABC*; в) об'єм піраміди *ABCD*; г) довжину висоти *DH*, проведеної з вершини *D* на грань *ABC*.

Розв'язання. **а)** Центр ваги трикутника лежить в точці перетину його медіан і визначається за формулами



$$x_O = \frac{x_A + x_B + x_C}{3};\ y_O = \frac{y_A + y_B + y_C}{3};\ z_O = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

Тобто

$$x_O = \frac{2-2-2}{3} = -\frac{2}{3};\ y_O = \frac{4+2-3}{3} = 1;\ z_O = \frac{5+1+4}{3} = \frac{10}{3}.$$

Отож, $O(-2/3;1;10/3)$.

б) Площа грані *ABC* дорівнює половині модуля векторного добутку векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Оскільки $\overline{AB} = (-4;-2;-4)$, $\overline{AC} = (-4;-7;-1)$, то

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -4 & -2 & -4 \\ -4 & -7 & -1 \end{vmatrix} = -26\bar{i} + 12\bar{j} + 20\bar{k}.$$

Звідси $\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \sqrt{(-26)^2 + 12^2 + 20^2} = \sqrt{1220}$. Площа грані *ABC*

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{1220}}{2} \approx 17,46 \text{ (кв. од.)};$$

в) Об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}$ і $\overline{AD}$, дорівнює 1/6 модуля мішаного добутку цих векторів. Координати вектора $\overline{AD} = (1;-8;-6)$, тоді

$$V=\frac{1}{6}\text{mod}(\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD})=\frac{1}{6}\text{mod}\begin{vmatrix}-4 & -2 & -4\\ -4 & -7 & -1\\ 1 & -8 & -6\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\text{mod}(-242)=\frac{242}{6}\approx 40,33 \text{ (куб.од.)};$$

г) Об'єм піраміди $ABCD$ дорівнює $V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot DH$. Звідси висота $DH=\frac{3V}{S_{ABC}}$. Таким чином, $DH=\frac{3\cdot 40,33}{17,46}\approx 6,92$.

5. Довести, що вектори $\overline{a}=(3;4;1)$, $\overline{b}=(-3;2;4)$, $\overline{c}=(1;-1;2)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\overline{d}=(2;11;4)$ у цьому базисі.

Розв'язання. Знайдемо мішаний добуток векторів:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}3 & 4 & 1\\ -3 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=12+3+16-2+12+24=65\neq 0.$$

Оскільки $\overline{a}\overline{b}\overline{c}\neq 0$, то вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ лінійно незалежні і утворюють базис. Позначимо через m, n і p координати вектора $\overline{d}$ в новому базисі, тоді його можна подати у вигляді $\overline{d}=m\overline{a}+n\overline{b}+p\overline{c}$. З рівності векторів, що знаходяться в лівій і правій частинах, випливає рівність їх відповідних координат:

$$\begin{cases}d_x=ma_x+nb_x+pc_x,\\ d_y=ma_y+nb_y+pc_y;\\ d_z=ma_z+nb_z+pc_z\end{cases}\quad\text{або}\quad\begin{cases}3m-3n+p=2;\\ 4m+2n-p=11;\\ m+4n+2p=4.\end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему рівнянь за формулами Крамера: $m=\frac{\Delta_m}{\Delta}$; $n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$; $p=\frac{\Delta_p}{\Delta}$. Знаходимо:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -3 & 1\\ 4 & 2 & -1\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}=12+16+3-2+12+24=65;$$

$$\Delta_m=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 11 & 2 & -1\\ 4 & 4 & 2\end{vmatrix}=8+44+12-8+8+66=130;$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 11 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 66 + 16 - 2 - 11 + 12 - 16 = 65;$$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 11 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 32 - 33 - 4 + 48 - 132 = -65.$$

Маємо: $m = \dfrac{130}{65} = 2;\quad n = \dfrac{65}{65} = 1;\quad p = \dfrac{-65}{65} = -1$. Тоді вектор $\overline{d} = 2\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$, тобто його координати у новому базисі такі: $\overline{d} = (2;1;-1)$.

6. Дві сили $\overline{F_1} = (2;-1;3)$ і $\overline{F_2} = (4;3;-1)$ прикладені до точки $A(5;4;1)$. Знайти: а) роботу рівнодійної цих сил по переміщенню матеріальної точки вздовж прямої з положення A в положення $B(5;3;4)$; б) величину і напрямні косинуси моменту рівнодійної цих сил відносно точки B.

Розв'язання. а) Знайдемо рівнодійну сил $\overline{F_1}$ і $\overline{F_2}$: $\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2} = (6;2;2)$. Вектор переміщення $\overline{S} = \overline{AB} = (0;-1;3)$, тоді $A = \overline{F} \cdot \overline{S} = 6 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 4$;

б) Момент сили $\overline{F}$ відносно точки B дорівнює $\overline{M} = \overline{BA} \times \overline{F}$, $\overline{BA} = (0;1;-3)$, тоді

$$\overline{M} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 1 & -3 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8\overline{i} - 18\overline{j} - 6\overline{k}.$$

Величина моменту $\left|\overline{M}\right| = \sqrt{8^2 + (-18)^2 + (-6)^2} = \sqrt{424} \approx 20,59$. Напрямні косинуси моменту рівнодійної сил: $\cos\alpha = \dfrac{8}{\sqrt{424}} \approx 0,39$; $\cos\beta = \dfrac{-18}{\sqrt{424}} \approx -0,87$; $\cos\gamma = \dfrac{-6}{\sqrt{424}} \approx -0,29$.

6. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Що називається вектором?

2. Що називається модулем вектора?

3. Який вектор називається нульовим?

4. Що таке орт?

5. Які вектори називаються колінеарними?

6. Чи існують вектори, колінеарні нульовому вектору?

7. Які вектори називаються рівними між собою?

8. Які вектори називаються компланарними?

9. Що називається сумою векторів?

10. Що називається різницею векторів?

11. Що називається добутком вектора на число?

12. Назвіть властивості лінійних операцій над векторами.

13. Які вектори називаються лінійно незалежними?

14. Сформулюйте необхідну і достатню умову лінійної залежності векторів.

15. Що являє собою базис на площині?

16. Що являє собою базис у просторі?

17. Який базис називається ортонормованим?

18. Що називається координатами вектора в заданому базисі?

19. Чи співпадають координати одного й того самого вектора в різних базисах?

20. Що називають проекцією вектора на вісь?

21. Назвіть основні властивості проекцій вектора на вісь.

22. Як виконуються лінійні операції над векторами, заданими в координатній формі?

23. Сформулюйте умову колінеарності двох векторів у координатній формі.

24. Що являє собою декартова прямокутна система координат?

25. Наведіть формули ділення відрізка в заданому відношенні.

26. Що називається скалярним добутком векторів?

27. Як визначається скалярний добуток векторів, заданих своїми координатами?

28. Як визначається модуль вектора, заданого своїми координатами?

29. Як визначається косинус кута між двома векторами?

30. Сформулюйте необхідні і достатні умови перпендикулярності двох векторів в координатній формі.

31. Як можна знайти проекцію вектора, заданого своїми координатами, на певний напрямок?

32. Наведіть властивості скалярного добутку векторів.

33. Що являють собою напрямні косинуси вектора? Якою тотожністю пов'язані між собою напрямні косинуси вектора?

34. У чому полягає механічний зміст скалярного добутку векторів?

35. Що називають векторним добутком векторів?

36. Як визначається векторний добуток векторів, заданних своїми координатами?

37. Наведіть властивості векторного добутку векторів.

38. У чому полягає геометричний зміст векторного добутку векторів?

39. Що називається мішаним добутком векторів?

40. Як визначається мішаний добуток векторів, заданих своїми координатами?

41. У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку векторів?

42. Які властивості має мішаний добуток векторів?

43. Сформулюйте необхідну і достатню умову компланарності трьох векторів, заданих своїми координатами.

Список літератури

1. Овчинников П.Ф. Высшая математика: учеб. пособие для вузов / П.Ф. Овчинников, Б.М. Лисицын, В.М. Михайленко; под общ. ред. П.Ф. Овчинникова. – К.: Вища шк., 1989. – 679 с.
2. Шкіль М.І. Вища математика. Елементи аналітичної геометрії, диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова; – К.: Вища шк. Головне вид-во, 1984. – 391 с.
3. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О.Н. Цубербиллер. – М.: Наука, 1966. – 336 с.
4. Гусятников П.Б. Векторная алгебра в примерах и задачах: учеб. пособие для студентов инж.-тех. спец. вузов/ П.Б. Гусятников, С.В. Резниченко. – М.: Высш. шк., 1985. – 232 с.
5. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. – М.: Физматгиз, 1963. – 244 с.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
7. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / за ред. Ю.К. Рудавського – Львів: Бескид Біт, 2002.–256 с.
8. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учеб. для вузов / Д.В. Беклемишев. – Изд.11-е, испр., учеб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.
9. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: учебник для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – Изд. 7-е, стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 224 с.
10. Федотов А.Г. Аналитическая геометрия: учебн. пособие / А.Г. Федотов, Б.В. Карпов; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. гос. ин-т электроники и математики (техн. ун-т). – М.: Моск. гос. ин-т электроники и математики, 2005. – 157 с.
11. Резниченко С.В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов/ С.В. Резниченко. – М.: МФТИ, 2001. – 576 с.
12. Векторна алгебра [Електронний ресурс] : сайт Національного гірничого університету/ кафедра вищої математики – Текст. та граф. дані – Днепропетровськ: НГУ, 2014. – Режим доступу: http://do.nmu.org.ua/course/view.php?id=394 (дата звернення: 02.02.2019). – Назва з екрана.

Предметний покажчик

Зміст

Навчальне видання

Уланова Наталія Петрівна

Приходько Віра Володимирівна

Практикум з векторної алгебри

Навчальний посібник

Редактор Л.О. Чуїщева

Підписано до друку 12.08.2019. Формат 30x42/4
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 3,8.
Обл.-вид. арк. 3,8. Тираж 50 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та надруковано
у Національному технічному університеті “Дніпровська політехніка”.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.

49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.