



**Конспект лекцій**  
з дисципліни  
«Технічна механіка»  
розділ «Опір матеріалів»

Дніпро, 2020

УДК 539.3/.6  
М33

Матисіна Н.В. Конспект лекцій з дисципліни «Технічна механіка» розділ «Опір матеріалів» [Електронний ресурс] / Н.В. Матисіна, С.В. Онищенко – Дніпро: НТУ «Дніпровська політехніка», 2020 – 75 с.

Зміст конспекту лекцій відповідає програмі дисципліни «Технічна механіка» спеціальностей 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», 275 «Транспортні технології» та програмі дисципліни «Технічна механіка і опір матеріалів» спеціальностей 184 «Гірництво», 185 «Нафтогазова інженерія та технології».

Представлені основні теми опору матеріалів.

## Зміст

<b>Вступ .....</b>	<b>5</b>
<b>Лекція 1. Основні гіпотези, припущення. Метод перерізів. Завдання опору матеріалів.....</b>	<b>6</b>
1.1 Задачі міцності.....	7
1.2 Об'єкти, що вивчаються.....	7
1.3 Поняття про деформації .....	8
1.4 Метод перерізів .....	8
1.5 Основні гіпотези.....	9
1.6 Завдання для самоконтролю .....	10
<b>Лекція 2. Осьовий розтяг та стискання.....</b>	<b>12</b>
2.1 Напруження та деформації. Закон Гука.....	12
2.2 Коефіцієнт поперечної деформації. Коефіцієнт Пуассона .....	14
2.3 Епюри поздовжніх зусиль .....	15
2.4 Приклади побудови епюр поздовжніх сил .....	15
2.5 Завдання для самоконтролю .....	17
<b>Лекція 3. Механічні властивості матеріалів.....</b>	<b>18</b>
3.1 Діаграми розтягу-стискання.....	18
3.2 Допустимі напруження. Умови міцності. Коефіцієнт запасу.....	20
3.3 Завдання для самоконтролю .....	21
<b>Лекція 4. Урахування власної ваги при розтягу-стисканні. Гранична та критична довжина стрижня.....</b>	<b>23</b>
4.1 Зусилля, напруження та деформації з урахуванням ваги .....	23
4.2 Визначення деформацій стрижня з урахуванням власної ваги.....	25
4.3 Розрахунок статично невизначуваних систем.....	27
4.4 Завдання для самоконтролю .....	28
<b>Лекція 5. Геометричні характеристики плоских перерізів .....</b>	<b>29</b>
5.1 Статичний момент перерізу .....	29
5.2 Моменти інерції плоских перерізів .....	30
5.3 Приклади обчислення моментів інерції перерізу .....	31
5.4 Зміна моментів інерції при паралельному перенесенні осей .....	32
5.5 Залежності між моментами інерції при повороті осей. Головні осі та головні моменти інерції.....	33
5.6 Завдання для самоконтролю .....	36
<b>Лекція 6. Основи теорії напруженого та деформованого стану.....</b>	<b>38</b>
6.1 Напружений стан в точці.....	38
6.2 Лінійний (одновісний) напружений стан.....	39
6.3 Плоский (двовісний) напружений стан.....	41
6.4 Круг напружень. Круг Мора .....	43
6.5 Узагальнений закон Гука.....	44
6.6 Завдання для самоконтролю .....	45
<b>Лекція 7. Зсув .....</b>	<b>46</b>
7.1 Поняття про чистий зсув .....	46
7.2 Напруження та деформації при зсуві. Закон Гука при зсуві .....	47

7.3 Умови міцності при зсуві .....	49
7.4 Завдання для самоконтролю .....	49
<b>Лекція 8. Кручення .....</b>	<b>50</b>
8.1 Крутний момент .....	50
8.2 Приклади побудови епюр крутних моментів .....	51
8.3 Визначення деформацій та напружень при крученні .....	52
8.4 Умови міцності та жорсткості при крученні. Підбір перерізу вала .....	55
8.5 Завдання для самоконтролю .....	56
<b>Лекція 9. Згин прямих стрижнів .....</b>	<b>57</b>
9.1 Опори та опорні реакції .....	57
9.2 Внутрішні силові фактори. Поперечна сила та згинальний момент .....	58
9.3 Побудова епюр $Q$ та $M$ .....	59
9.4 Диференціальні залежності Журавського при згині .....	61
9.5 Завдання для самоконтролю .....	62
<b>Лекція 10. Нормальні напруження при плоскому згині прямого стрижня 64</b>	<b>64</b>
10.1 Завдання для самоконтролю .....	68
<b>Лекція 11. Дотичні напруження при поперечному згині .....</b>	<b>69</b>
11.1 Визначення дотичних напружень .....	69
11.2 Побудова епюри дотичних напружень .....	72
11.3 Перевірка міцності балки за дотичними напруженнями .....	73
11.4 Завдання для самоконтролю .....	73
<b>Рекомендована література.....</b>	<b>75</b>

## Вступ

Технічна механіка є однією з базових інженерних дисциплін, з якої починається підготовка студентів багатьох спеціальностей.

Метою нормативної дисципліни «Технічна механіка» у розділі «Опір матеріалів» є формування компетентностей щодо основних понять та принципів статичних, кінематичних та динамічних розрахунків елементів обладнання та систем, та розрахунків на міцність, жорсткість, стійкість і витривалість з урахуванням їхньої надійності та економічності, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів під час побудови фізико-математичної моделі роботи елементів обладнання та систем, постановки та розв'язання задач технічної механіки.

## **Лекція 1. Основні гіпотези, припущення. Метод перерізів. Завдання опору матеріалів**

*У лекції викладено, що вивчає опір матеріалів.*

*Наведено задачі міцності та об'єкти, що вивчаються.*

*Викладено основні види простих деформацій, метод перерізів та основні гіпотези опору матеріалів.*

*Спираючись на матеріал лекції, довідкову та науково-технічну літературу студент повинен уміти:*

- *формулювати задачі опору матеріалів;*
- *описувати сутність умов міцності, жорсткості та стійкості;*
- *тлумачити задачі міцності для об'єктів, що вивчаються;*
- *розрізняти основні види деформацій;*
- *використовувати метод перерізів для обчислювання внутрішніх сил;*
- *давати визначення напруження та його складових;*
- *формулювати основні гіпотези опору матеріалів.*

***Опором матеріалів називають науку про інженерні методи розрахунку елементів машин та споруд на міцність, жорсткість і стійкість.***

В процесі експлуатації машин і споруд їх елементи (стрижні, балки, пластини, болти, заклепки та ін.) в тій чи іншій мірі приймають участь у роботі конструкції і зазнають дії різних сил – навантажень.

Наука про опір матеріалів вивчає поведінку різних матеріалів під дією на них сил і вказує, як підібрати для кожного елемента конструкції належний матеріал та поперечні розміри за умови повної надійності роботи і найбільшої дешевизни споруди.

Іноді опору матеріалів доводиться вирішувати видозмінену задачу – перевіряти достатність розмірів конструкції, що існує або вже запроектованої. Вимога надійності і найбільшої економії суперечать одна іншій. Перша веде, зазвичай, до збільшення витрат матеріалу, друга вимагає зниження витрат. Це протиріччя – найважливіший елемент наукової методики, що обумовлює розвиток опору матеріалів. Опір матеріалів обслуговує будівельну справу, машино-та суднобудування.

Для забезпечення роботи конструкції вона повинна задовольняти необхідним умовам міцності, жорсткості та стійкості.

***Міцність*** – здатність конструкції та її елементів витримувати певне навантаження без руйнування.

***Жорсткість*** – здатність конструкції, її частин та деталей протидіяти зовнішнім навантаженням у відношенні деформації (зміни форми і розмірів). При заданих навантаженнях деформації не повинні перевищувати певної величини, яка встановлюється відповідно до вимог, що висувуються до конструкції.

***Стійкість*** – це здатність конструкції та її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.

## 1.1 Задачі міцності

*Пряма:* визначення міцних розмірів елементів таким чином, щоб вони при мінімальній вартості витримували задане навантаження протягом певного терміну.

*Зворотна:* перевірка на міцність елементів споруд та вузлів, що вже існують.

## 1.2 Об'єкти, що вивчаються

При всьому різноманітті видів конструктивних елементів, що зустрічаються в машинах та спорудах, їх можна звести до невеликого числа основних форм. Це:

1. **Стрижні (бруси)** – тіла, у яких один розмір (довжина) значно більше двох інших (поперечних).

Стрижні можуть бути прямолінійними (вал, вісь, балка) та криволінійними (ланка ланцюга, гак), тонкостінними, а також мати круглий, призматичний чи змінний переріз (рисунок 1.1).

Вісь стрижня – це сукупність точок, рівновіддалених від його поверхні.

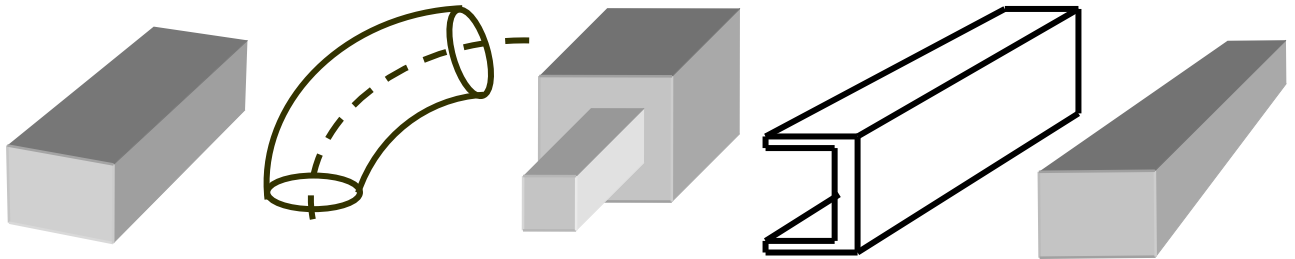


Рисунок 1.1 – Стрижні

2. **Оболонки** – тіла, обмежені криволінійними поверхнями, що розташовані близько одна від одної. У техніці зустрічаються оболонки циліндричної, конічної та сферичної конфігурації (рисунок 1.2). До оболонок відносяться купола будівель, корпуси підводних човнів, неплоскі стінки резервуарів.

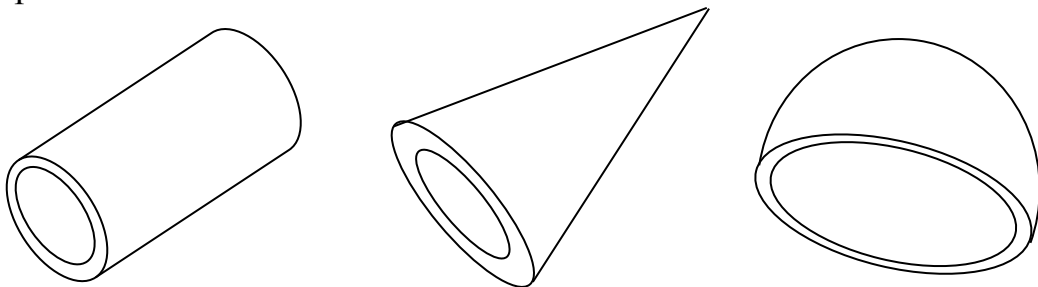


Рисунок 1.2 – Оболонки

3. **Пластини** – оболонки, у яких поверхня є площиною. Існують пластини круглої, прямокутної та іншої форми. До пластин відносяться плоскі днища та кришки резервуарів, диски турбомашин, перекриття інженерних споруд.

4. **Масивні тіла** – тіла, у яких всі три розміри мають однаковий порядок. До них відносяться фундаменти, підпірні стінки та ін.

### 1.3 Поняття про деформації

У теоретичної механіці (статика) вивчається рівновага абсолютно твердого тіла. Цього уявлення про матеріал достатньо для вирішення сформульованої у статичі задачі – визначити умови рівноваги прикладених до тіла сил.

При вивченні опору матеріалів необхідно врахувати, що реальні тіла можуть змінювати свої розміри та форму під дією зовнішніх сил і, врешті-решт, – руйнуватися. Ця зміна називається деформацією. Вперше на цю властивість було вказано Галілеєм у 1638 році.

Деформації бувають *пружні* (які зникають після припинення дії сил, що їх спричинили) та *пластичні, залишкові* (які не зникають після зняття навантажень).

#### *Основні види простих деформацій:*

- розтяг–стискання;
- зсув або зріз;
- кручення;
- згин.

Більш складні деформації – це сума простих видів.

### 1.4 Метод перерізів

Для вирішення задачі міцності необхідно знати зовнішні сили, механічні властивості матеріалів, а також уміти визначати внутрішні сили.

**Внутрішні сили** – це сили міжатомної взаємодії між окремими частинами елемента споруди, що виникають під дією зовнішніх зусиль.

Щоби чисельно характеризувати ступінь впливу зовнішніх зусиль на деформований елемент, необхідно навчитися вимірювати та обчислювати величину внутрішніх міжатомних сил, що виникають як результат деформації. Для цієї мети існує метод перерізів.

Для визначення внутрішніх зусиль в будь-якому перетині елемента потрібно подумки провести переріз (розріз) у цьому місці, відкинувши одну частину, і розглянути рівновагу іншої, замінивши дію відкинутої частини силами (рисунок 1.3).

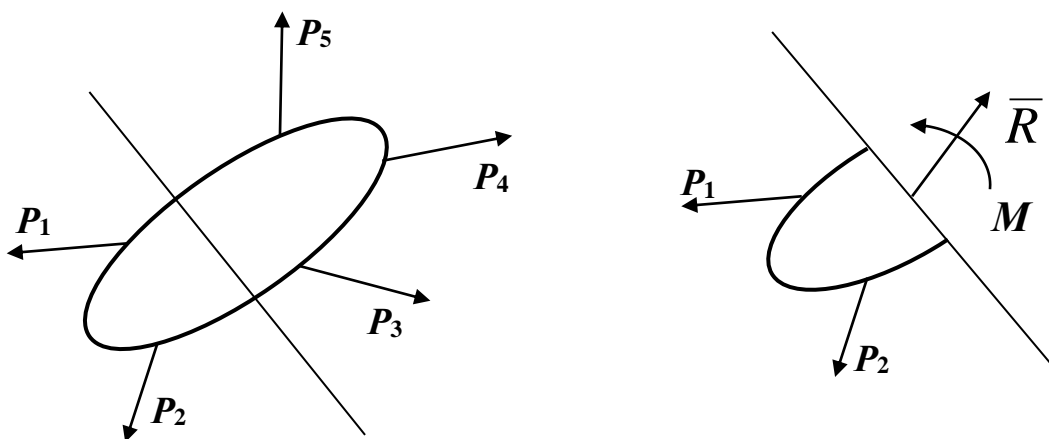


Рисунок 1.3 – Метод перерізів



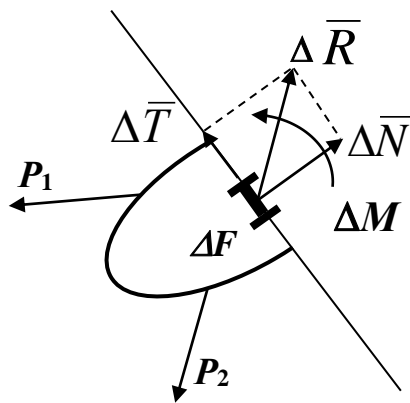


Рисунок 1.4 – Головний вектор та момент

Величину внутрішніх зусиль (**головний вектор  $R$**  і **головний момент  $M$** ) у загальному випадку можна визначити з умов рівноваги (рівнянь рівноваги).

Однак необхідно також знати характер розподілу по перетину внутрішніх зусиль – міру їхньої дії. Такою мірою є напруження.

**Напруження** є векторна величина, що характеризує інтенсивність внутрішніх зусиль в даній точці по даному перерізу.

Виділимо навколо точки, що нас цікавить, елементарну площу  $\Delta F$ . Внутрішні зусилля в ній зводяться до головного вектору  $\Delta \bar{R}$  та головного моменту  $\Delta \bar{M}$  (рисунок 1.4). Через те, що  $\Delta \bar{M}$  – нескінченно мала величина більш вищого порядку, ніж  $\Delta \bar{R}$ , то можемо нею знехтувати.

Тоді напруження – це

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta F} = \bar{\rho}. \quad (1.1)$$

Напрямок вектора  $\bar{\rho}$  співпадає з напрямком  $\Delta \bar{R}$ , якщо  $\Delta F \rightarrow 0$ .

Розмірність напруження –  $[Н/м^2]$ ,  $[кГ/см^2]$ .

Абсолютна величина напруження дорівнює

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, \quad (1.2)$$

де  $\sigma$  та  $\tau$  – відповідно нормальна і дотична складова напруження у даній точці по даному перерізу (рисунок 1.5).

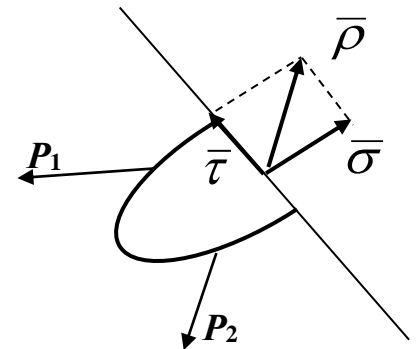


Рисунок 1.5 – Напруження

Якщо внутрішні зусилля розподілені вздовж перерізу рівномірно, то величина напруження дорівнює

$$\sigma = \frac{N}{F}; \quad \tau = \frac{T}{F}; \quad \rho = \frac{R}{F}, \quad (1.3)$$

де  $N$  та  $T$  – нормальна і дотична складова головного вектора внутрішніх зусиль  $R$  по перерізу  $F$ .

### 1.5 Основні гіпотези

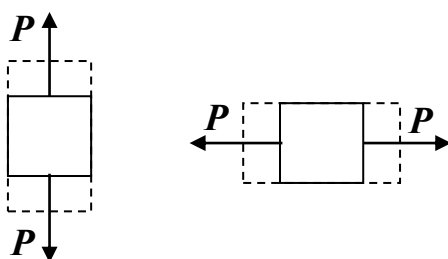


Рисунок 1.6 – Гіпотеза II

Для побудови теорії опору матеріалів приймають деякі гіпотези щодо структури та властивостей матеріалів, а також характеру деформацій.

#### I. Гіпотеза про суцільність матеріалу.

Передбачається, що матеріал суцільно (без пор) заповнює форму тіла.

II. Гіпотеза про однорідність та ізотропність. Передбачається, що в будь-якому

напрямку механічні властивості матеріалу однакові (рисунок 1.6). Однак, іноді ця гіпотеза є неприйнятною. Наприклад, деревина та армовані матеріали є анізотропними.

### III. Гіпотеза про малість деформацій.

Припускається, що деформації нескінченно малі у порівнянні з розмірами тіла. Це дозволяє знехтувати зміною в розташуванні зовнішніх сил відносно частин тіла і скласти рівняння рівноваги як для недеформованого тіла.

IV. Гіпотеза про ідеальну пружність матеріалу. Всі тіла в опорі матеріалів передбачаються абсолютно пружними. Відхилення точок прикладення зусиль при навантаженні реальних тіл несуттєві. Ними можна знехтувати до певних меж.

V. Гіпотеза про пропорційність напружень і деформацій матеріалу. Деформації матеріалу конструкції в кожній його точці прямо пропорційні напруженням в цій точці. Виконується закон Гука (лінійна деформованість матеріалу).

VI. Принцип суперпозиції. Принцип незалежності дії сил і додавання навантажень. Результат дії на конструкцію системи навантажень дорівнює сумі результатів впливу на неї кожного навантаження окремо (рисунок 1.7).

$$f = f_1 + f_2 + f_3 \quad (1.4)$$

VII. Гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі). Поперечні перерізи бруса, що були плоскими та перпендикулярними осі бруса до його навантаження, залишаються плоскими і нормальними до його осі і під дією навантаження (рисунок 1.8).



Рисунок 1.7 –  
Гіпотеза VI

Рисунок 1.8 – Гіпотеза VII

Дану гіпотезу використовують при виведенні більшості формул для розрахунку брусів.

### **1.6 Завдання для самоконтролю**

1. Опишіть, що вивчає опір матеріалів.
2. Сформулюйте визначення міцності, жорсткості, стійкості конструкції.
3. Перелічіть задачі, які вирішує наука про опір матеріалів.
4. Назвіть основні вимоги з точки зору опору матеріалів, що висувуються до машин і споруд, що проектуються.
5. Дайте визначення стрижня, пластини, оболонки, масивного тіла.
6. Дайте визначення осі бруса.
7. Сформулюйте визначення деформації тіла.

8. Поясніть, яка деформація називається пружною, а яка пластичною.
9. Назвіть основні види деформацій, які обумовлені дією зовнішніх зусиль.
10. Опишіть, що являють собою внутрішні сили.
11. Поясніть сутність методу перерізів.
12. Дайте визначення напруження та назвіть його розмірність.
13. Роз'ясніть, яке напруження називається нормальним, а яке дотичним.
14. Опишіть залежність між повним, дотичним і нормальними напруженнями в точці по даному перерізу.
15. Сформулюйте основні передумови, які покладено в основу науки про опір матеріалів.
16. Розтлумачте принцип незалежності дії сил.
17. Дайте тлумачення гіпотези плоских перерізів.

## Лекція 2. Осьовий розтяг та стискання

У лекції викладено загальні відомості про осьовий розтяг та стискання. Представлено поняття напруження та деформації, сформульовано закон Гука.

Введено поняття коефіцієнта Пуассона.

Наведено приклади побудови епюр внутрішніх поздовжніх сил.

Спираючись на матеріал лекції, довідкову та науково-технічну літературу студент повинен уміти:

- визначати випадки осьового розтягу та стискання;
- обчислювати величину поздовжньої сили в поперечному перерізі бруса;
- формулювати закон Гука в абсолютній та відносній формі;
- давати визначення абсолютної та відносної поперечної деформації бруса;
- будувати епюри поздовжніх зусиль бруса та пояснювати їх властивості;
- тлумачити принцип Сен-Венана для центрально розтягнутого стрижня;
- обчислювати розподілені нормальні напруження в поперечних перерізах розтягнутого або стиснутого бруса та будувати їх епюри.

**Центральним (осьовим) розтягом або стисканням є такий вид деформації, при якому в поперечних перерізах бруса виникають тільки поздовжні зусилля (паралельні осі бруса).**

Зазвичай, поздовжні зусилля, що розтягують, вважають позитивними, а що стискають – негативними (рисунок 2.1).

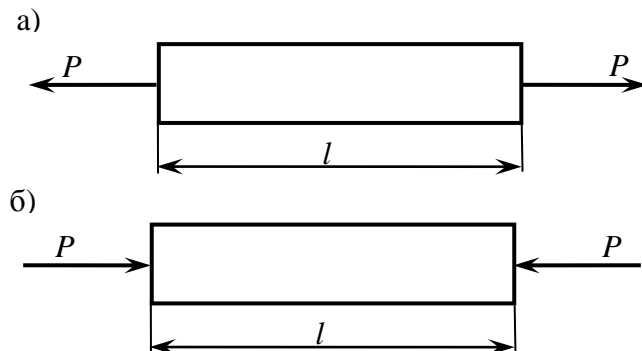


Рисунок 2.1 – Осьовий розтяг-стискання

### 2.1 Напруження та деформації. Закон Гука

Розглянемо прямий брус постійного поперечного перерізу  $F$ , затиснений одним кінцем і навантажений на вільному кінці силою  $P$  (рисунок 2.2). Скористаємося методом перерізів. Подумки відокремлюємо від нього дану частину перерізом, розташованим на довільній відстані  $u$  від вільного кінця стрижня. Дію відкинутої затисненої частини можна замінити внутрішнім поздовжнім зусиллям  $N$ , спрямованим від перерізу. З умови рівноваги розглянутої частини отримаємо невідоме зусилля.

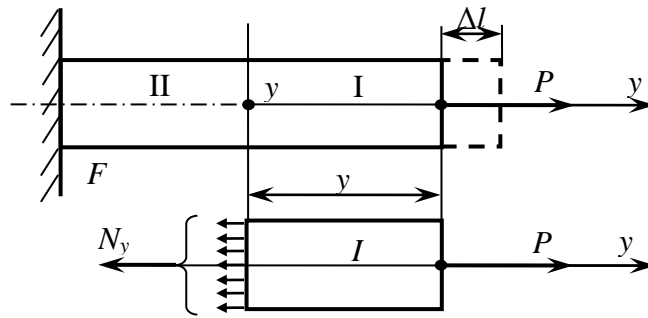


Рисунок 2.2 – Визначення поздовжніх зусиль

$$\sum F_Y = 0: \quad N_Y - P = 0,$$

звідки маємо  $N_Y = P$  при  $0 \leq y \leq l$ , де  $l$  – довжина бруса.

Досліди з розтягуванням стрижнів показують, що при центральному розтягу стрижня внутрішні зусилля (і напруження) розподіляються по перерізу рівномірно, виключаючи лише перерізи досить близькі до тих, в яких прикладені зовнішні зусилля.

Цей висновок був сформульований французьким вченим Барі де Сен-Венаном (1797–1886) як **Принцип Сен-Венана**.

Тому нормальні напруження, що виникають в поперечних перерізах бруса при розтягу-стисканні визначаються рівністю

$$\sigma = \frac{N_Y}{F} = \frac{P}{F}. \quad (2.1)$$

Під дією зовнішнього навантаження початкова довжина бруса  $l$  збільшиться на деяку величину  $\Delta l$ , що називається **абсолютною поздовжньою деформацією** (подовженням) бруса.

Відношення абсолютного подовження бруса  $\Delta l$  до його початкової довжини  $l$  є **відносною поздовжньою деформацією** (відносним подовженням) бруса

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.2)$$

Чим більше величина діючої сили, що розтягує, тим більше подовження бруса. Чим більше площа поперечного перерізу бруса, тим подовження бруса менше. Подовження бруса також залежить від властивостей матеріалу

$$\varepsilon = \frac{N_Y}{EF} \quad (2.3)$$

Тут  $E$  – коефіцієнт, що залежить від фізичних властивостей матеріалу, характеризує опірність матеріалу пружній деформації при розтягу (стисканні) і називається **модулем пружності I роду (модуль Юнга)**. Його розмірність  $[\text{Н/м}^2]$ ,  $[\text{кг/см}^2]$ ,  $[\text{Па}]$ :

- для легованої сталі  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,
- для сірого чавуна  $E = 1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,
- для дерева (вздовж волокон)  $E = 1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ .

Враховуючи (1), отримаємо  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$  або

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.4)$$

Абсолютне подовження бруса виражається формулою

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EF}. \quad (2.5)$$

Добуток  $EF$  є **жорсткістю** поперечного перерізу бруса при розтягу і стисканні.

Формули (2.3) – (2.5) є математичним виразом **закону Гука** (1678).

Закон Гука виконується в певних межах (межах пропорційності матеріалу).

Якщо на розтягнутій ділянці бруса поздовжня сила і поперечний переріз змінні, то абсолютне подовження ділянки довжиною  $l$  визначається як

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(y)dy}{EF(y)}.$$

## 2.2 Коефіцієнт поперечної деформації. Коефіцієнт Пуассона

При дії на брус сили, що розтягує або стискає, крім поздовжньої, виникає також поперечна деформація.

При стисканні бруса поперечні розміри його збільшуються, а при розтягуванні – зменшуються. Якщо поперечний розмір бруса до прикладання до нього сили, що розтягує  $P$ , позначити  $b$ , то зміна його під дією сили  $P$  називається **абсолютною поперечною деформацією** бруса (рисунок 2.3).

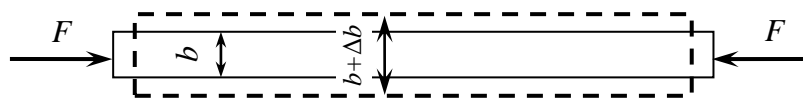


Рисунок 2.3 – Поперечна деформація бруса

Величина  $\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$  є **відносною поперечною деформацією**. Досвід показує, що в межах застосування закону Гука при осьовому розтягу-стисканні поперечна деформація пропорційна поздовжній деформації, але має зворотний знак:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon. \quad (2.6)$$

Коефіцієнт пропорційності залежить від властивостей матеріалу та є **коефіцієнтом поперечної деформації** або коефіцієнтом **Пуассона**, та являє собою відношення поперечної деформації до поздовжньої, узятє по модулю.

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (2.7)$$

Для сталі коефіцієнт Пуассона  $\mu = 0,25 \dots 0,3$ , для пробки  $\mu = 0$ , для гуми  $\mu = 0,5$ , для ряду інших матеріалів (чавуну, цинку, бронзи, міді)  $\mu = 0,23 \dots 0,36$ .

Знаючи  $\mu$ , можна обчислити **зміну об'єму бруса**  $V$  при розтягу-стисканні. Довжина бруса під навантаженням дорівнює  $l + \Delta l = l(1 + \varepsilon)$ , площа поперечного перерізу відповідно дорівнює

$$F(1 - \mu\varepsilon^2).$$

Об'єм бруса під дією навантаження стає рівним

$$V' = Fl(1 + \varepsilon)(1 - \mu^2) = V(1 + \varepsilon)(1 - \mu^2).$$

Через те, що в межах пропорційності  $\varepsilon$  – мала величина, то величиною,  $\varepsilon^2$  можна знехтувати. Тоді

$$V' = V[1 + \varepsilon(1 - 2\mu)].$$

Відносна зміна об'єму бруса дорівнює

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \varepsilon(1 - 2\mu). \quad (2.8)$$

Для більшості матеріалів  $\mu \leq 0,5$  ( $1 - 2\mu \geq 0$ ), тобто при розтягуванні об'єм бруса збільшується, а при стисканні-зменшується.

### 2.3 Епюри поздовжніх зусиль

*Епюрою є графік, що показує зміну внутрішніх силових факторів, що діють в поперечному перерізі бруса, уздовж його поздовжньої осі.*

Основні правила побудови епюр:

- 1) вісь епюри паралельна поздовжній осі бруса;
- 2) значення внутрішнього зусилля, що діє в даному поперечному перерізі бруса, відкладається в масштабі по нормалі до осі епюри, в точці осі епюри, що відповідає даному перерізу;
- 3) епюри забезпечуються:
  - назвою внутрішнього силового фактора;
  - одиницями його вимірювання;
  - знаками;
  - цифровими значеннями в характерних точках.

### 2.4 Приклади побудови епюр поздовжніх сил

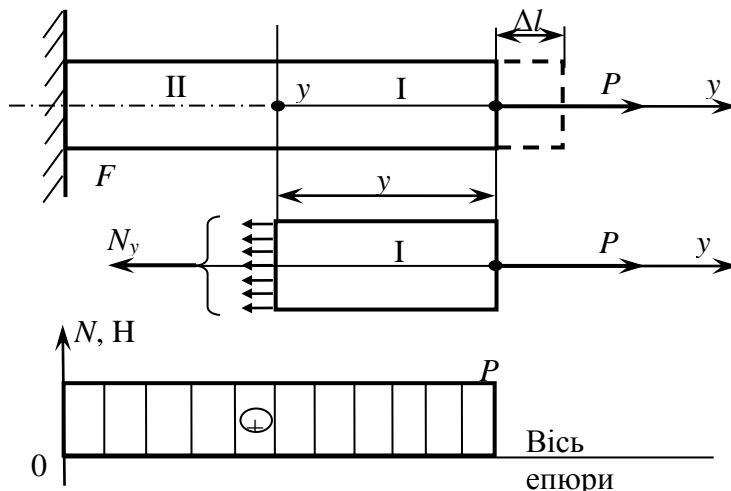


Рисунок 2.4 – Побудова епюри поздовжніх сил

Приклад 1. Розглянемо випадок центрального розтягування бруса силою  $P$  (рисунок 2.4)

У всіх його поперечних перерізах виникають тільки поздовжні зусилля

$$N_y = P. \quad (2.9)$$

Будуємо епюру  $N_y$ , тобто графічно представляємо залежність (2.9).

Приклад 2. Стрижень навантажений зовнішніми силами  $2P$ ,  $P$ ,  $5P$  (рисунок 2.5).

Якщо до бруса докладено кілька зовнішніх сил, то його необхідно розбити на ділянки.

Межами ділянок є:

- 1) перерізи, в яких прикладені зосереджені зовнішні зусилля (в тому числі і опорні реакції);
- 2) перерізи, в яких стрибком змінюється площа поперечного перерізу бруса.

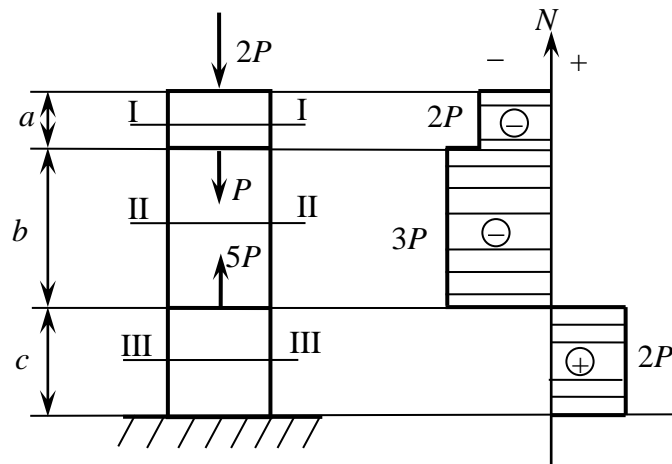


Рисунок 2.5 – Побудова епюри поздовжніх сил

Номери ділянок позначимо римськими цифрами. У довільному перерізі кожної ділянки визначаємо значення поздовжньої сили, складаючи умови рівноваги:

$$N_1 + 2P = 0; \text{ відповідно } N_1 = -2P \text{ при } 0 \leq y \leq a;$$

$$N_2 + P + 2P = 0; \text{ відповідно } N_2 = -3P \text{ при } a \leq y \leq (a + b);$$

$$N_3 - 5P + P + 2P = 0; \text{ відповідно } N_3 = 2P \text{ при } (a + b) \leq y \leq (a + b + c).$$

По значеннях  $N_1, N_2, N_3$  будемо епюру поздовжніх зусиль.

Епюру штрихують перпендикулярно її осі. Довжина штрихування в кожному перерізі бруса дорівнює величині поздовжньої сили в цьому перерізі.

### Висновки:

- 1) на епюрі поздовжніх сил є стрибки в тих перерізах, де прикладені зовнішні зосереджені сили, і рівні за величиною цим силам;
- 2) внутрішні зусилля  $N$  в перерізі рівні алгебраїчній сумі зовнішніх сил, розташованих з однієї сторони від перерізу.

Для прикладу 2 визначимо загальне подовження стрижня як алгебраїчну суму подовжень всіх його ділянок:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{F} = \frac{-2Pa}{F};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{F} = \frac{-3Pb}{F};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{F} = \frac{2Pc}{F};$$

$$\text{Тоді} \quad \Delta l_{\text{заг}} = \sum \Delta l_i = \frac{-2Pa - 3Pb + 2Pc}{F}.$$



## 2.5 Завдання для самоконтролю

1. Назвіть види деформації бруса, які є осьовим розтягом та стисканням.
2. Поясніть, як обчислити значення поздовжньої сили в поперечному перерізі бруса.
3. Дайте визначення абсолютної поздовжньої деформації. Опишіть, що являє собою відносна поздовжня деформація. Назвіть їх розмірності.
4. Дайте визначення модуля пружності (Юнга)  $E$ . Поясніть, що він характеризує та в яких одиницях вимірюється. Опишіть, як впливає величина  $E$  на деформацію бруса.
5. Сформулюйте закон Гука в абсолютній та відносній формі.
6. Дайте визначення абсолютної та відносної поперечної деформації бруса та назвіть їх розмірності.
7. Дайте визначення коефіцієнта Пуассона при осьовому розтягу.
8. Дайте визначення жорсткості поперечного перерізу при розтягу та стисканні.
9. Поясніть, що відбувається з поперечними розмірами бруса при його розтягу та стисканні.
10. Дайте визначення епюри поздовжніх зусиль та поясніть, як вона будується.
11. Назвіть властивості епюр поздовжніх зусиль від зовнішніх зосереджених сил.
12. Дайте тлумачення принципу Сен-Венана для центрально розтягнутого стрижня.
13. Опишіть, як розподілені нормальні напруження в поперечних перерізах розтягнутого або стиснутого бруса і чому вони дорівнюють.
14. Наведіть залежність для визначення відносної зміни об'єму бруса при осьовому розтягу та стисканні.

### Лекція 3. Механічні властивості матеріалів

У лекції представлено діаграми розтягу-стискування, та для чого вони використовуються.

Проаналізовано характерні зони і точки діаграм, напруження в яких є важливими характеристиками матеріалу.

Наведено характерні граничні напруження в матеріалах, сформульовані поняття пластичності та крихкості.

Викладено поняття допустимих напружень та коефіцієнта запасу міцності. Сформульовані умови міцності при розтягу та стискуванні.

Спираючись на матеріал лекції, довідкову та науково-технічну літературу студент має вміти:

- давати визначення границі пропорційності, границі текучості, границі міцності;
- визначати межі застосування закону Гука на діаграмі;
- розтлумачувати геометричний сенс модуля пружності I роду;
- формулювати визначення допустимого напруження та обирати його для пластичних та крихких матеріалів;
- давати визначення коефіцієнта запасу міцності;
- здійснювати підбір необхідного поперечного перерізу стрижня з умов міцності.

#### 3.1 Діаграми розтягу-стискування

При проектуванні і розрахунках на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і споруд необхідно знати властивості матеріалів. Тому випробовують на розтяг, стиск, зріз, кручення, згин та твердість. Одним з головних видів випробувань матеріалів є випробування на розтяг, через те що при цьому виявляються найбільш важливі їх властивості.

На розтяг випробовують зразки, що складаються з робочої частини довжиною  $l$  та хвостовиків для установки зразка в затискачах розривної машини (рисунок 3.1). Зазвичай ці зразки виточують з пруткових заготовок або вирізають з листа. У першому випадку виходять циліндричні зразки, у другому – плоскі.

Подовження визначається на початковій розрахунковій довжині зразка  $l_0$ .

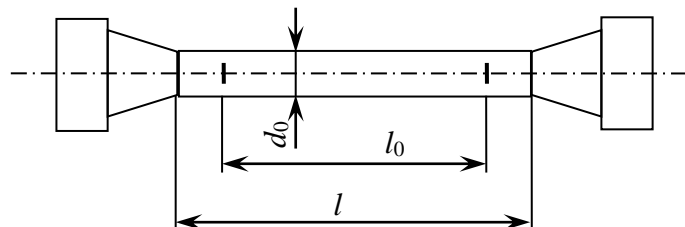


Рисунок 3.1 – Зразок стрижня для досліджень

При випробуванні на розтяг отримують залежність подовження  $\Delta l$  від навантаження  $P$  у вигляді діаграми розтягу (рисунок 3.2, а). Для виключення

залежності такої діаграми від розмірів зразка її перебудовують в координатах  $\sigma - \varepsilon$  (рисунок 3.2, б).

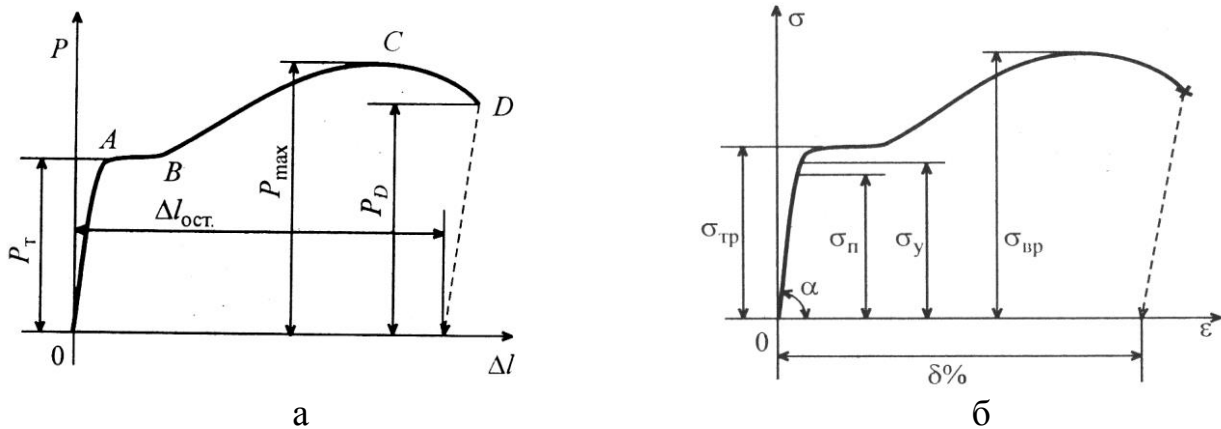


Рисунок 3.2 – Діаграми розтягу сталевго стрижня

На діаграмі розтягу розрізняють характерні зони і точки, напруження в яких є важливими механічними характеристиками матеріалу (рисунок 3.2, а).

*OA – ділянка пружності*, ділянка, в межах якої навантаження і подальше розвантаження супроводжуються відновленням початкової форми та вихідних розмірів зразка.

*AB – ділянка загальної текучості*, ділянка, в межах якої пластичні деформації зразка відбуваються при практично незмінному значенні розтягуючого зусилля. Ця ділянка діаграми називається площадкою текучості.

*BC – ділянка зміцнення*, ділянка, в межах якої розвиток пружно-пластичних деформацій супроводжується підвищенням опірності матеріалу до деформації. В кінці цієї зони (точка C) порушується однорідність зразка і утворюється шийка (потоншення в середній частині зразка), в області якої локалізуються деформації.

*CD – ділянка місцевої текучості*, в межах якої відбуваються пластичні деформації в шийці зразка. В кінці цієї зони зразок руйнується в найбільш вузькому перерізі.

На умовній діаграмі (рисунок 3.2, б)

$\sigma_{np}$  – *границя пропорційності* – найбільше напруження, при якому ще виконується закон Гука. При  $\sigma \leq \sigma_{np}$  зв'язок між напруженнями і деформаціями має вигляд

$$\sigma = E\varepsilon.$$

З умовної діаграми розтягу очевидний геометричний сенс модуля пружності I роду для матеріалу  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \text{tg} \alpha$ .

$\sigma_m$  – *границя текучості* – найменше напруження, при якому деформація зразка протікає при постійному розтягуючому зусиллі.

$\sigma_{вр}$  – *границя міцності* (тимчасовий опір) – напруження, що відповідає максимальній розривній силі, після якої відбувається руйнування зразка.

Наведемо для деяких матеріалів значення характерних напружень:

– сталь:  $\sigma_{np} = 210 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ ;  $\sigma_m = 240 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ ;  $\sigma_{вр} = 380 \dots 400 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ ;

– сірий чавун:  $\sigma_{np} = 10 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$  – при розтягу;  $\sigma_{np} = 100 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$  – при стисканні;

– титанові сплави:  $\sigma_{np} = 1000 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ .

Крім вже перелічених характеристик, при випробуванні на розтяг визначають також

$\delta = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 100 \%$  – відносне подовження після розриву (залишкове);

$\psi = \frac{\Delta F}{F_0} \cdot 100 \%$  – відносне залишкове звуження після розриву.

Відносне подовження  $\delta$  та відносне звуження  $\psi$  є характеристиками пластичності матеріалу.

**Пластичність** – властивість матеріалу набувати значних залишкових деформацій без руйнування.

**Крихкість** – властивість матеріалу руйнуватися без утворення помітних залишкових деформацій.

До пластичних матеріалів відносяться маловуглецева сталь, свинець, алюміній, латунь ( $\delta > 5\%$ ). До крихких відносяться загартована сталь, чавун, скло, камінь, бетон ( $\delta < 5\%$ ). Діаграма розтягу, наведена на рисунку 3.2, характерна для пластичних матеріалів (сталь). Для крихких матеріалів (чавун) діаграма розтягування не має площадки текучості, і руйнування відбувається без утворення шийки при досить малих деформаціях (рисунок 3.3).

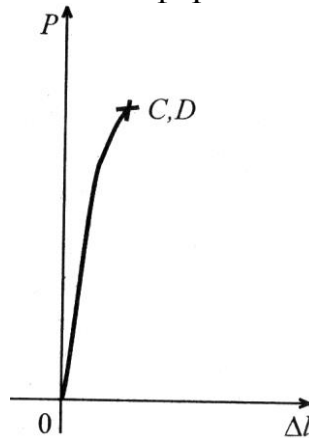


Рисунок 3.3 – Діаграма розтягу чавунного стрижня

### 3.2 Допустимі напруження. Умови міцності. Коефіцієнт запасу

Величини  $\sigma_m$  та  $\sigma_{вр}$  вважають основними характеристиками міцності матеріалів. Очевидно, ці напруження повинні бути менше деякої небезпечної величини  $\sigma_0$ , коли виникає можливість руйнування деталі або порушення нормальної її експлуатації.

Найбільше безпечне значення напруження є **допустимим напруженням** та позначається  $[\sigma]$ .

Тоді **умова міцності при розтягу** (стисканні) матиме вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{F} \leq [\sigma], \quad (3.1)$$

де  $N_{\max}$  – найбільше значення поздовжньої сили,  $F$  – площа поперечного перерізу стрижня.

Допустиме напруження, зазвичай, виражається в частках від небезпечного напруження

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}, \quad (3.2)$$

де  $n$  – коефіцієнт запасу міцності.

Для пластичних матеріалів приймають  $\sigma_0 = \sigma_m$ . Тоді  $[\sigma] = \frac{\sigma_m}{n_m}$  ( $n_m$  – коефіцієнт запасу по границі текучості).

Для крихких матеріалів  $\sigma_0 = \sigma_{ep}$ . Тоді  $[\sigma] = \frac{\sigma_{ep}}{n_{ep}}$  ( $n_{ep}$  – коефіцієнт запасу по границі міцності).

У більшості випадків коефіцієнти запасу для різних матеріалів мають таке значення  $n_m = 1,5 \dots 2,5$  та  $n_{ep} = 2,5 \dots 5$ .

При розрахунку конструкцій на міцність зустрічаються такі **види задач**:

– **перевірка напружень** полягає в обчисленні розрахункових напружень в характерних перерізах елемента при заданій площі поперечного перерізу і поздовжньої сили. Отримане при цьому найбільше напруження порівнюють з допустимим:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{F} \leq [\sigma],$$

– **вибір перерізу** полягає у визначенні необхідної площі поперечного перерізу за відомими поздовжніми силами та допустимому напруженні з умови міцності:

$$F \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}. \quad (3.3)$$

### 3.3 Завдання для самоконтролю

1. Поясніть, в яких координатах будується діаграма розтягу та стискання.
2. Дайте визначення границі пропорційності, границі текучості, границі міцності (тимчасового опору).
3. Сформулюйте визначення площадки текучості, ділянки зміцнення.
4. Опишіть, в якій частині діаграми справедливий закон Гука.
5. Дайте визначення пластичності та крихкості матеріалу.
6. Роз'ясніть, чим відрізняється діаграма розтягу для крихких матеріалів від пластичних.
7. Розтлумачте геометричний сенс модуля пружності I роду.

8. Дайте визначення залишкового відносного подовження зразка та залишкового відносного звуження шийки зразка. Поясніть, для яких матеріалів вони характерні.

9. Сформулюйте визначення допустимого напруження. Поясніть, як воно обирається для пластичних та крихких матеріалів.

10. Назвіть, яке значення напруження є небезпечним.

11. Дайте визначення коефіцієнта запасу міцності, та від яких факторів залежить його величина.

12. Назвіть основні види задач, що зустрічаються при розрахунку міцності конструкцій.

13. Поясніть, у чому полягають умови міцності при осьовому розтягу та стисканні.

14. Роз'ясніть, як здійснити підбір необхідного поперечного перерізу стрижня з умов міцності.

## Лекція 4. Урахування власної ваги при розтягу-стисканні. Гранична та критична довжина стрижня

У лекції розглянуто випадки, в яких є необхідність урахування власної ваги елемента при розтягу-стисканні.

Визначено зусилля, напруження та деформації стрижнів з урахуванням ваги.

Наведено поняття критичної та граничної довжини стрижня.

Проаналізовано розрахунок статично невизначуваних систем.

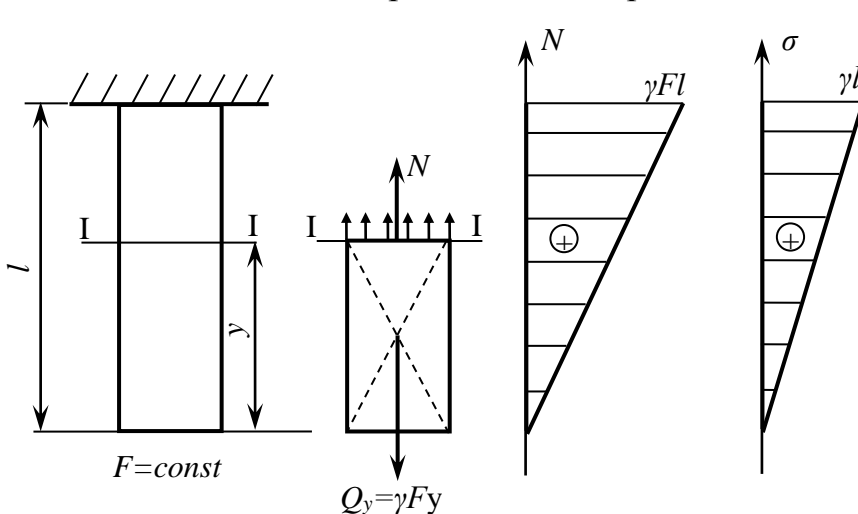
Спираючись на матеріал лекції, довідкову та науково-технічну літературу студент повинен уміти:

- описувати залежність поздовжніх сил та нормальних напружень від власної ваги;
- розрізняти поняття критичної та граничної довжини стрижня;
- формулювати умови міцності стрижня при осьовому розтягу та стисканні з урахуванням власної ваги;
- пояснювати відмінність у підборі перерізу стрижня з урахуванням власної ваги та без;
- розрізняти статично визначувані та невизначувані конструкції;
- складати план розрахунку статично невизначуваних стрижнів та систем;
- тлумачити сутність сумісності деформацій елементів системи та складати рівняння сумісності деформацій статично невизначуваної стрижневої системи.

Вивчаючи розтяг та стискання стрижнів, ми враховували дію тільки зовнішніх сил, ігноруючи їхню власну вагу. Однак при значній довжині бруса (штанги, троса) власною вагою нехтувати не можна.

### 4.1 Зусилля, напруження та деформації з урахуванням ваги

Розглянемо вертикальний стрижень довжиною  $l$ , жорстко закріплений



своїм верхнім кінцем. Площа поперечного перерізу  $F$ , питома вага матеріалу  $\gamma$ , модуль пружності  $E$ .

Використовуючи метод перерізів, визначимо внутрішні поздовжні зусилля  $N$  та нормальні напруження  $\sigma$  по перерізу I-I на відстані  $y$  від вільного кінця стрижня (рисунок 4.1) з умов

Рисунок 4.1 – Епюри  $N$  та  $\sigma$  від власної ваги

рівноваги виділеного елемента:

$$\sum F_Y = 0: N - Q_Y = 0, (0 \leq y \leq l),$$

де  $Q_Y = \gamma \cdot F \cdot y$  – вага ділянки стрижня довжиною  $y$ .

Тоді поздовжні зусилля дорівнюватимуть

$$N = \gamma F y. \quad (4.1)$$

Показуємо їх на епюрі  $N$ . Нормальні напруження в перерізі дорівнюватимуть

$$\sigma_y = \frac{N}{F} = \gamma \cdot y. \quad (4.2)$$

Епюра  $\sigma$  має аналогічний вигляд (див. рисунок 4.1). Найбільші напруження будуть виникати у верхньому кінці стрижня  $\sigma_{\max} = \gamma \cdot l$ . Їхня величина не залежить від розміру перерізу стрижня.

Якщо крім власної ваги на стрижень діє сила  $P$ , прикладена до вільного його кінця, то зусилля та напруження знаходимо з умов рівноваги аналогічно (рисунок 4.2).

$$\sum F_y = 0: N - P - Q_y = 0, (0 \leq y \leq l), \text{ звідки}$$

$$N = P + \gamma F y \quad (4.3)$$

та напруження

$$\sigma_y = \frac{P}{F} + \gamma y. \quad (4.4)$$

Будуємо епюри  $N$  та  $\sigma$ .

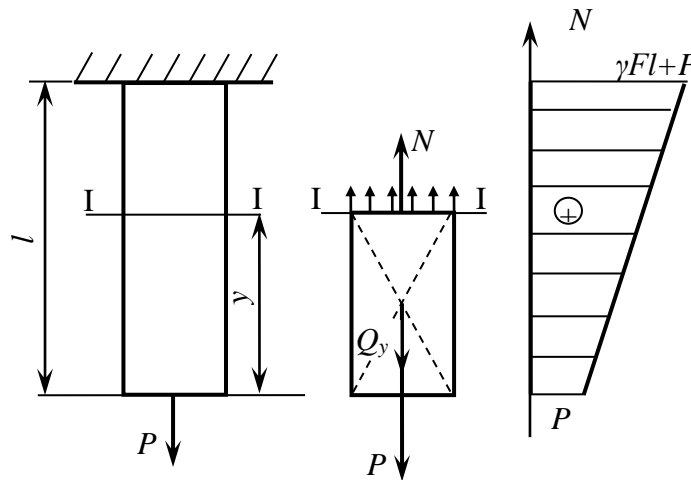


Рисунок 4.2 – Епюра  $N$  з урахуванням власної ваги

### **Висновки:**

1) З виразу (4.4) випливає, що напруження в будь-якому поперечному перерізі стрижня дорівнюють алгебраїчній сумі напружень від зовнішнього навантаження та від власної ваги.

2) З виразу (4.2) випливає, що напруження з урахуванням власної ваги не залежать від площі поперечного перерізу стрижня, а залежать тільки від довжини стрижня і питомої ваги матеріалу.



Довжина стрижня  $l$ , при якій  $\mathcal{N} = \sigma_{\epsilon}$ , стрижень руйнується від власної ваги, є **критичною** довжиною стрижня.

$$l_{кр} = \frac{\sigma_{\epsilon}}{\gamma}. \quad (4.5)$$

Довжина стрижня  $l$ , при якій  $\mathcal{N} = [\sigma]$  в стрижні досягаються допустимі напруження  $[\sigma]$  лише від дії власної ваги, є **граничною довжиною**.

$$l_{np} = \frac{[\sigma]}{\gamma}. \quad (4.6)$$

Наприклад, для сталі 3 допустиме напруження  $[\sigma] = 1600 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$ , питома вага  $\gamma = 7,8 \frac{\text{Г}}{\text{см}^3} = 0,0078 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^3}$ , тоді з (4.6) гранична довжина сталевго стрижня дорівнює

$$l_{np} = \frac{[\sigma]}{\gamma} = 2040 \text{ м}.$$

У найбільш напруженому (небезпечному) перерізі стрижня при  $y = l$  напруження дорівнюватимуть

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \mathcal{N}.$$

Тому **умова міцності з урахуванням власної ваги** матиме вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \mathcal{N} \leq [\sigma]. \quad (4.7)$$

**Підбір перерізу.** Через те, що форма поперечного перерізу при розтягу-стисканні стрижня не має значення, з (4.7) випливає, що

$$F \geq \frac{P}{[\sigma] - \mathcal{N}} \quad (4.8)$$

(для порівняння –  $F \geq \frac{P}{[\sigma]}$  без урахування власної ваги).

## 4.2 Визначення деформацій стрижня з урахуванням власної ваги

Із закону Гука  $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$  – відносне подовження стрижня, тобто з (4.7)

$$\epsilon = \frac{P}{EF} + \frac{\gamma y}{E}.$$

Абсолютне подовження стрижня  $\Delta l = \int_0^l \epsilon \cdot dy$ .

Інтегруючи, отримаємо

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma^2 l^2}{2E} \quad \text{або} \quad \Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{Ql}{2EF}. \quad (4.8)$$

**Висновок:** подовження стрижня від власної ваги вдвічі менше, ніж від сили  $P$ , прикладеної до кінця стрижня та рівній його вазі.

З еюр  $\sigma$  та  $N$  видно, що довгі стрижні постійного перерізу виявляються не вигідними (непрактичними), через те, що лише в одному перерізі досягаються допустимі напруження, а в інших міцність матеріалу недовикористовується.

Тому вигідніше використовувати **стрижні рівного опору**, у яких в усіх перерізах напруження однакові та рівні допустимому  $[\sigma]$ :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = [\sigma]. \quad (4.9)$$

На практиці частіше використовуються **ступінчасті стрижні**, через те, що стрижні рівного опору дуже складні у виготовленні.

Довжину ділянок стрижня та їх поперечні перерізи підбирають так, щоб виконувалася рівність (4.9). Покажемо це на прикладі (рисунок 4.4). Подовження розглянутого стрижня дорівнюватиме сумі подовжень на кожній його ділянці.

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3, \\ \text{де } \Delta l_1 &= \frac{Pl_1}{EF_1} + \frac{Q_1 l_1}{2EF_1}; \\ \Delta l_2 &= \frac{(P+Q_1)l_2}{EF_2} + \frac{Q_2 l_2}{2EF_2}; \\ \Delta l_3 &= \frac{(P+Q_1+Q_2)l_3}{EF_3} + \frac{Q_3 l_3}{2EF_3}. \end{aligned}$$

**Висновки:**

1) на еюрі  $N$  маємо стрибки в тих перерізах, де прикладені зосереджені зовнішні сили і величина стрибка дорівнює модулю прикладеної сили;

2) крива, що огинає еюри  $N$  з урахуванням власної ваги, нахилена на всіх ділянках в одну й ту ж сторону;

3) на еюрі  $N$  є злами (зміна нахилу огинаючої) в тих перерізах, де змінюється площа поперечного перерізу стрижня.

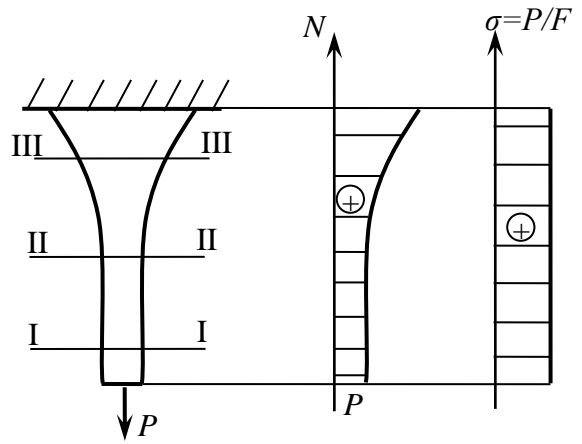


Рисунок 4.3 – Еюри  $N$  та  $\sigma$  для стрижнів рівного опору

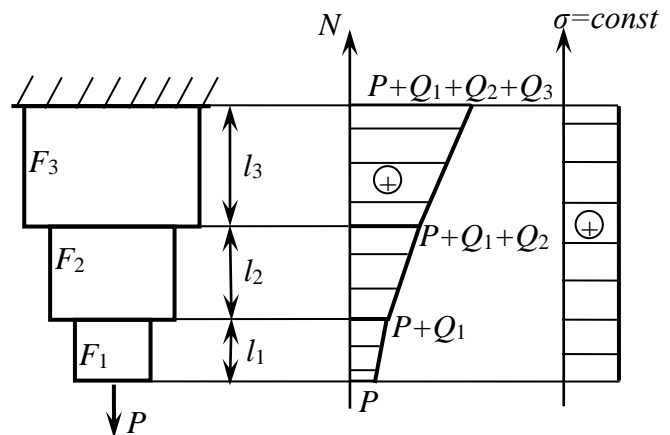


Рисунок 4.4 – Еюри  $N$  та  $\sigma$  ступінчастих стрижнів

### 4.3 Розрахунок статично невизначуваних систем

Уміння обчислювати деформації стрижнів при розтягу та стисканні дає можливість встановити, наскільки змінилися форма та розміри елементів конструкцій під дією зовнішніх сил. Зазвичай ці зміни такі незначні, що їх визначення здається позбавленим практичного сенсу.

Однак існує цілий ряд конструкцій, для яких перевірка міцності та підбір перерізу окремих елементів неможливі без вміння визначати деформації.

Це так звані **статично невизначувані конструкції**. Знаходження внутрішніх зусиль в їхніх елементах складає статично невизначувану задачу. Таку задачу неможна вирішити, використовуючи тільки рівняння статички, через те, що кількість невідомих зусиль в ній перевищує кількість рівнянь рівноваги.

На рисунку 4.5, а наведено приклад статично визначуваної стрижневої системи, а на рисунку 4.5, б приклад статично невизначуваної системи.

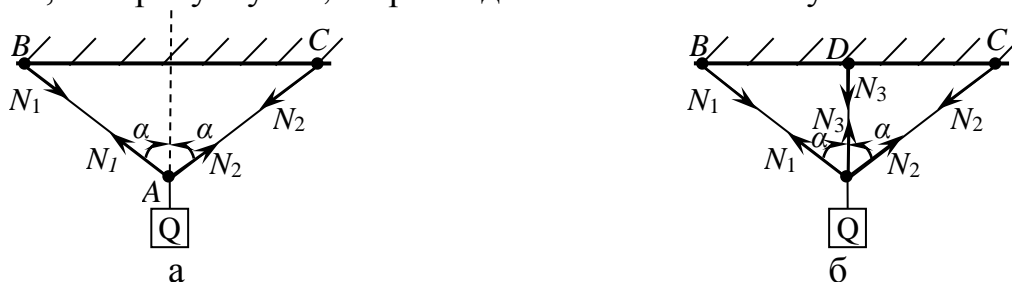


Рисунок 4.5 – Статично визначувані та невизначувані стрижневі системи

Необхідні для розв'язування задачі додаткові рівняння можна скласти, вивчаючи ті деформації, які зазнає конструкція. Ці додаткові рівняння складаються з **умови сумісності** деформацій системи.

**Сумісність деформацій** елементів системи полягає в тому, що у будь-якій конструкції при її деформації не відбувається розривів стрижнів, їх роз'єднання, переміщення однієї частини конструкції відносно іншої.

Загальний метод розрахунку:

- 1) з'ясувати, які зусилля необхідно визначити;
- 2) записати всі рівняння статички твердого тіла;
- 3) скласти необхідні додаткові рівняння сумісності деформацій так, щоби з них знайти невідомі зусилля.

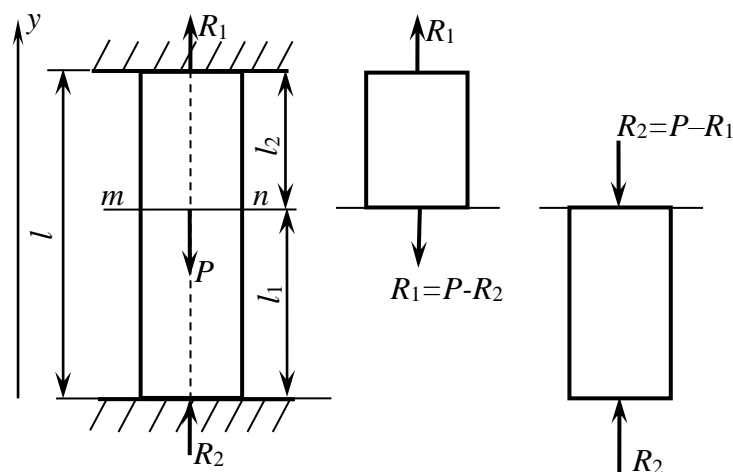


Рисунок 4.6 – Статично невизначуваний стрижень

**Приклад.** Сталевий брус довжиною  $l$  та площею  $F$  поперечного перерізу затиснений обома кінцями і піддається дії сили  $P$  у перерізі  $m-n$  (рисунок 4.6). Визначимо поздовжні зусилля в перерізах стрижня по обидва боки від  $m-n$ .

Сила  $P$  розтягує верхню частину стрижня і стискає

нижню. Тому реакції в обох опорах спрямовані вгору. Для визначення  $R_1$  та  $R_2$  можна записати тільки одне рівняння рівноваги:

$$\sum F_Y = 0: R_1 + R_2 - P = 0.$$

Звідси маємо  $R_1 + R_2 = P$ .

Друге рівняння отримаємо з розгляду деформації бруса. Через те, що кінці бруса затиснені, то подовження верхньої частини бруса дорівнює вкороченню нижньої, тобто

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0 \text{ та } |\Delta l_1| = |\Delta l_2|.$$

Із рисунка 4.6, а маємо  $\Delta l_1 = \frac{R_1 l_1}{EF}$ ; із рисунка 4.6, б –  $\Delta l_2 = \frac{R_2 l_2}{EF}$ .

Тоді  $\frac{R_1 l_1}{EF} = \frac{R_2 l_2}{EF}$  або  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_2}{l_1}$ .

Тобто зусилля в стрижні обернено пропорційні довжині ділянок  $l_1$  та  $l_2$ .  
Вирішуючи це рівняння спільно з рівнянням статичності, отримуємо

$$R_1 = \frac{Pl_2}{l_1 + l_2} = \frac{Pl_2}{l}; R_2 = \frac{Pl_1}{l_1 + l_2} = \frac{Pl_1}{l}.$$

#### 4.4 Завдання для самоконтролю

1. Поясніть, як залежать поздовжні сили та нормальні напруження від власної ваги вертикального бруса постійного перерізу.
2. Дайте визначення критичної та граничної довжини стрижня.
3. Роз'ясніть, у чому полягає умова міцності стрижня при осьовому розтягу та стисканні з урахуванням власної ваги.
4. Поясніть, чи відрізняється підбір перерізу стрижня з урахуванням власної ваги та без нього, та у чому ця відмінність.
5. Поясніть наявність множника  $\frac{1}{2}$  у формулі подовження (4.8) вертикального бруса постійного перерізу від власної ваги.
6. Дайте визначення стрижня рівного опору.
7. Сформулюйте властивості епюри поздовжніх зусиль стрижня з урахуванням власної ваги.
8. Опишіть, які конструкції є статично невизначуваними.
9. Сформулюйте сутність додаткових рівнянь для статично невизначуваних систем.
10. Розтлумачте, у чому полягає сумісність деформацій елементів системи.

## Лекція 5. Геометричні характеристики плоских перерізів

У лекції викладено поняття статичного моменту та моменту інерції перерізу.

Розглянуто приклади обчислення моментів інерції перерізу.

Проаналізовано, як змінюються моменти інерції при паралельному перенесенні осей та при повороті осей.

Сформульовано поняття головних осей та головних центральних осей.

Спираючись на матеріал лекції, довідкову та науково-технічну літературу студент повинен уміти:

- розраховувати, чому дорівнює статичний момент відносно довільної осі та осі, що проходить через центр ваги перерізу;
- визначати центр ваги простих та складних перерізів;
- давати визначення осьового, полярного та відцентрового моменту інерції перерізу та називати їх розмірності;
- обчислювати зміну осьових моментів інерції при паралельному переносі або повороті осей;
- розрізняти головні та головні центральні моменти інерції, пояснювати, що таке головні осі інерції;
- будувати еліпс інерції та формулювати його сутність.

### 5.1 Статичний момент перерізу

При розтягу і стисканні стрижнів їх міцність і жорсткість, а також напруження, що виникають в поперечних перерізах, залежать від розмірів поперечного перерізу стрижня. Причому форма перерізу та його розташування по відношенню до зовнішнього навантаження значення не мають.

Таким чином, площа поперечного перерізу є найпростішою геометричною характеристикою перерізів.

$$F = \int_F dF. \quad (5.1)$$

При розрахунках стрижнів на кручення, згин та складний опір необхідне використання більш складних характеристик, таких як статичний момент, осьовий, полярний та відцентровий моменти інерції, момент опору перерізу.

Геометричні характеристики визначають за формулами або за таблицями Держстандарту (ДСТУ).

Статичним моментом  $S_x$ ,  $S_y$  плоскої фігури відносно осей  $x$  та  $y$  є сума добутків елементарних площадок  $dF$  (рисунок 5.1) на їх відстані до цієї осі, тобто інтеграл виду

$$S_x = \int_F y \cdot dF, \quad S_y = \int_F x \cdot dF. \quad (5.2)$$

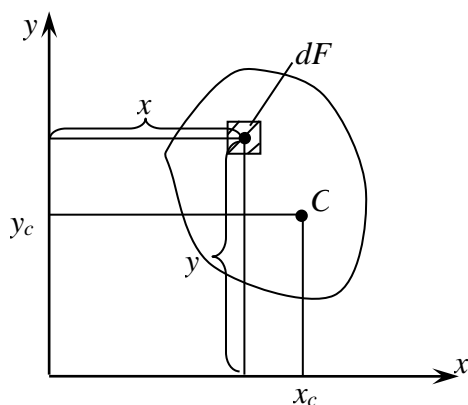


Рисунок 5.1 – Площа перерізу

Розмірність статичних моментів  $S_x$  та  $S_y$  –

$[м^3]$ ,  $[см^3]$ . Індекс  $F$  у (5.1) та (5.2) показує, що інтегрування ведеться по всій площі перерізу.

Якщо відома площа поперечного перерізу і положення його центра ваги, то статичні моменти обчислюють за такими формулами:

$$S_x = y_c \cdot F, \quad S_y = x_c \cdot F. \quad (5.3)$$

Ці формули отримані з відповідних залежностей теоретичної механіки, що визначають положення центра ваги плоскої фігури:

$$x_c = \frac{\sum x_i F_i}{F} = \frac{S_y}{F}, \quad y_c = \frac{\sum y_i F_i}{F} = \frac{S_x}{F}.$$

Із формул (5.3) випливає, що **якщо вісі координат проходять через центр ваги перерізу (центральні вісі), то статичний момент плоскої фігури відносно центральних осей дорівнює нулю.**

Вірне і зворотнє твердження: **якщо статичний момент перерізу відносно будь-якої вісі дорівнює нулю, то ця вісь є центральною, тобто**

$$S_{xc} = 0, \quad S_{yc} = 0.$$

Залежно від положення перерізу відносно координатних осей статичний момент може приймати значення  $< 0$ ,  $> 0$ ,  $= 0$ .

Статичний момент складного перерізу відносно осі дорівнює алгебраїчній сумі статичних моментів усіх простих частин, на які розбито переріз відносно тієї ж осі, тобто

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n.$$

## 5.2 Моменти інерції плоских перерізів

**Осьовими моментами інерції** перерізу називаються інтеграли виду

$$I_x = \int_F y^2 dF, \quad I_y = \int_F x^2 dF. \quad (5.4)$$

**Відцентровий момент інерції** перерізу – це інтеграл виду

$$I_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF. \quad (5.5)$$

**Полярний момент інерції** перерізу – це інтеграл виду

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF. \quad (5.6)$$

Розмірність всіх моментів інерції –  $[м^4]$ ,  $[см^4]$ .

Через те, що  $\rho^2 = x^2 + y^2$  (див. рисунок 5.1),

$$I_\rho = I_x + I_y. \quad (5.7)$$

Якщо початок координат зберігає своє положення, то при будь-якому повороті осей координат  $\rho = const$ , тоді з (5.7) витікає, що **сума осьових моментів інерції дорівнює полярному та є постійною величиною:**

$$I_x + I_y = const. \quad (5.8)$$

Тобто осьові моменти інерції мають **властивість інваріантності** відносно повороту координатних осей.

Осьові та полярний моменти інерції, як видно з (5.4) та (5.6) завжди приймають позитивні значення ( $>0$ ), а відцентровий момент інерції може бути  $>0$ ,  $<0$ ,  $=0$ .

Момент інерції складного перерізу дорівнює алгебраїчній сумі моментів інерції простих складових його частин:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n.$$

### 5.3 Приклади обчислення моментів інерції перерізу

**Приклад 1.** Обчислимо осьові моменти інерції прямокутного перерізу основою  $b$  та висотою  $h$  (рисунок 5.2) відносно центральних осей координат.

Через те, що ширина перерізу постійна, то виділимо елементарну площадку  $dF$  на відстані  $y$  від осі  $x_c$  висотою  $dy$  по всій ширині  $b$ . Її площа дорівнює  $dF = b \cdot dy$ .

Тоді момент інерції прямокутного перерізу відносно осі  $x_c$  буде дорівнювати

$$I_{x_c} = \int_F y^2 dF = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогічно отримуємо значення моменту інерції перерізу відносно осі  $y_c$ :

$$I_{y_c} = \frac{hb^3}{12}.$$

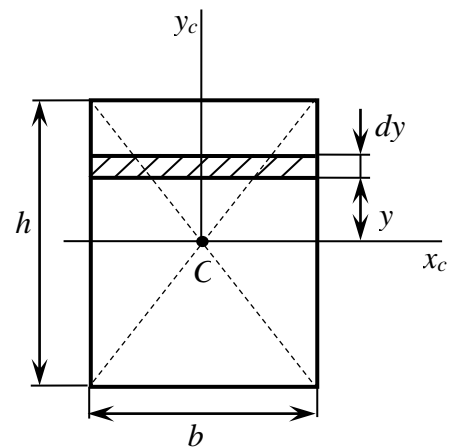


Рисунок 5.2 – Моменти інерції прямокутного перерізу

**Приклад 2.** Визначимо центральний осьовий момент інерції трикутного перерізу довжиною основи  $b$  та висотою  $h$  відносно вісі  $x_c$ , що паралельна основи трикутника (рисунок 5.3).

Виділимо елементарну площадку  $dF$  на

відстані  $y$  від осі  $x_c$  висотою  $dy$  та основою  $b_y$ . Через те, що висота виділеної площадки елементарна, то її площу можна визначити як площу прямокутника:  $dF = b_y \cdot dy$ .

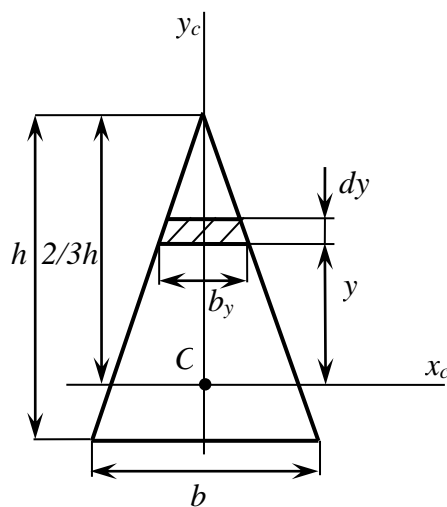


Рисунок 5.3 – Моменти інерції трикутного перерізу

З подоби трикутників (рисунок 5.3) маємо

$$\frac{b_y}{b} = \frac{\left(\frac{2}{3}h - y\right)}{h}.$$

$$\text{Тоді } b_y = \frac{b\left(\frac{2}{3}h - y\right)}{h}$$

Осьовий момент інерції трикутного перерізу відносно осі  $x_c$  дорівнюватиме:

$$I_x = \int_F y^2 dF = \int_{-h/3}^{2h/3} y^2 \left( \frac{b \left( \frac{2}{3}h - y \right)}{h} \right) dy = \frac{bh^3}{36}.$$

#### 5.4 Зміна моментів інерції при паралельному перенесенні осей

Нехай відомо моменти інерції та статичні моменти перерізу відносно деяких заданих координатних осей  $Ox$  та  $Oy$ , а також площу перерізу  $F$  (рисунок 5.4).

Знайдемо моменти інерції того ж перерізу відносно нових осей координат  $O_1x_1$  та  $O_1y_1$ , отриманих паралельним переносом заданих осей.

Із рисунка 5.4 видно, що формули переходу від заданих координатних осей до нових мають вигляд:

$$x_1 = x + b,$$

$$y_1 = y + a.$$

Тоді момент інерції перерізу відносно осі  $O_1x_1$  буде дорівнювати

$$I_{x_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y + a)^2 dF = \int_F y^2 dF + 2a \int_F y dF + a^2 \int_F dF.$$

Порівнюючи доданки з формулами (5.1), (5.2) та (5.4), отримуємо

$$I_{x_1} = I_x + 2a \cdot S_x + a^2 F. \quad (5.9)$$

Аналогічно отримуємо момент інерції перерізу відносно осі  $O_1y_1$

$$I_{y_1} = I_y + 2b \cdot S_y + b^2 F. \quad (5.10)$$

Отримаємо вираз для відцентрового моменту інерції перерізу відносно нових осей координат  $O_1x_1$  та  $O_1y_1$ .

$$\begin{aligned} I_{x_1 y_1} &= \int_F x_1 y_1 dF = \int_F (x + b)(y + a) dF = \\ &= \int_F xy dF + b \int_F y dF + a \int_F x dF + ab \int_F dF. \end{aligned}$$

Порівнюючи доданки з формулами (5.1), (5.2) та (5.5), остаточно отримаємо

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + bS_x + aS_y + abF \quad (5.11)$$

Якщо вихідні осі координат є центральними  $x_c$  та  $y_c$ , то вирази для моментів інерції перерізу приймуть такий вигляд

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= I_x + a^2 F, \\ I_{y_1} &= I_y + b^2 F, \\ I_{x_1 y_1} &= I_{xy} + abF. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Вираз для полярного моменту інерції перерізу тоді матиме вигляд:

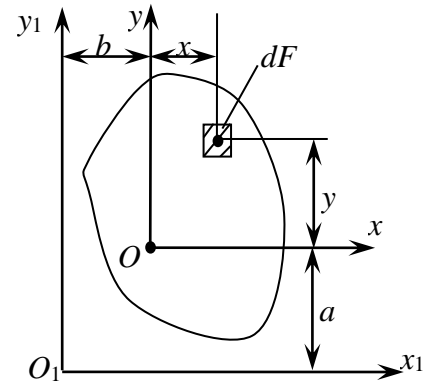


Рисунок 5.4 – Моменти інерції перерізу відносно паралельних осей



$$I_{\rho_1} = I_{\rho} + (a^2 + b^2)F. \quad (5.13)$$

**Теорема Гюйгенса-Штернера:** *Осьовий момент інерції перерізу відносно довільної осі дорівнює осьовому моменту інерції перерізу відносно центральної осі, паралельної даній довільній осі, плюс добуток площі перерізу на квадрат відстані між осями.*

**Висновок:** *Момент інерції перерізу відносно центральної осі є найменшим з усіх осьових моментів інерції відносно інших паралельних осей.*

### 5.5 Залежності між моментами інерції при повороті осей. Головні осі та головні моменти інерції

Нехай моменти інерції перерізу  $I_x$  та  $I_y$  відносно деяких заданих координатних осей  $ox$  та  $oy$ , а також площа перерізу  $F$  відомі (рисунок 5.5).

Визначимо моменти інерції перерізу щодо нових осей  $u$  та  $v$ , отриманих поворотом вихідних осей на кут  $\alpha$ .

Формули переходу від заданих осей до нових:

$$u = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha,$$

$$v = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha.$$

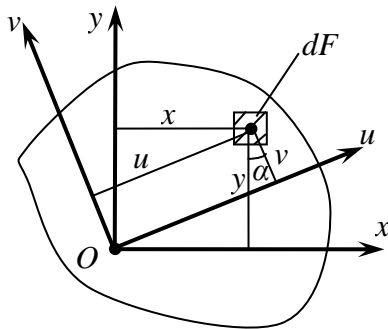


Рисунок 5.5 –  
Моменти інерції  
перерізу при повороті  
осей

Осьові моменти інерції перерізу в нових осях координат дорівнюватимуть

$$\begin{aligned} I_u &= \int_F v^2 dF = \int_F (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)^2 dF = \\ &= \cos^2 \alpha \int_F y^2 dF + \sin^2 \alpha \int_F x^2 dF - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int_F xy dF \end{aligned}$$

Порівнюючи доданки цього виразу з формулами (5.5) та (5.6) та використовуючи формули тригонометричних перетворень, отримаємо

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (5.14)$$

Аналогічно

$$I_v = I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (5.15)$$

Вираз для відцентрового моменту інерції перерізу відносно нових осей

$$\begin{aligned} I_{uv} &= \int_F (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)(y \cdot \sin \alpha + x \cdot \cos \alpha) dF = \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int_F y^2 dF - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int_F x^2 dF + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_F xy dF. \end{aligned}$$

Із (5.5), (5.6) та формул тригонометричних перетворень отримаємо

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \quad (5.16)$$

Додаючи (5.14) та (5.15), отримаємо

$$I_u + I_v = I_x + I_y = \text{const} \quad (5.17)$$

**Властивість інваріантності осьових моментів інерції:** сума осьових моментів інерції при повороті осей залишається незмінною. Цю властивість уже було доведено раніше (див. формулу (5.8)).

Із (5.17) випливає, що можна знайти таку величину  $\alpha_0$  – кута повороту осей, при якому один з осьових моментів досягне найбільшого, а інший – найменшого значення, тобто осьові моменти інерції набудуть екстремальних значень (max, min). Шукане значення  $\alpha_0$  знайдемо, дослідивши на екстремум вираз (5.14). Умова екстремуму –  $\frac{dI_u}{d\alpha} = 0$ .

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = -2I_x \cos \alpha_0 \cdot \sin \alpha_0 + 2I_y \cos \alpha_0 \cdot \sin \alpha_0 - 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0, \text{ тобто}$$

$$(I_x - I_y) \sin 2\alpha_0 + 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Звідси випливає

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}. \quad (5.18)$$

**Правило знаків** для  $\alpha_0$ : якщо отримане з (5.18) значення  $\alpha_0 > 0$ , то кут повороту відкладаємо від осі  $x$  проти годинникової стрілки, якщо  $\alpha_0 < 0$ , то відкладаємо його за годинниковою стрілкою.

Через те, що із (5.18) отримуємо два значення  $\alpha_0$  ( $\alpha_0'$  та  $\alpha_0'' = \alpha_0' + 90^\circ$ ), робимо висновок, що існують дві взаємно перпендикулярні осі, відносно яких осьові моменти інерції приймають екстремальні значення.

Ці осі координат є **головними осями інерції**.

Осьові моменти інерції відносно головних осей інерції називаються **головними моментами інерції**.

Вісь максимум, відносно якої головний момент інерції буде максимальним, знаходиться ближче до тієї з осей  $x$  та  $y$ , по відношенню до якої вихідний осьовий момент інерції приймає більше значення.

Наприклад, на рисунку 5.6 якщо  $I_x > I_y$  та  $\alpha_0 > 0$ , то

$$I_u = I_{\max}$$

Значення головних моментів інерції перерізу обчислюються за формулою:

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}. \quad (5.19)$$

Порівнюючи формули (5.16) та (5.18) приходимо до висновку, що відносно головних осей інерції відцентровий момент інерції дорівнює нулю, тобто

$$I_{uv} = 0.$$

Таким чином, **головні осі – ті, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю.**

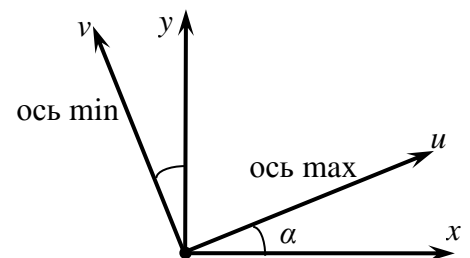


Рисунок 5.6 – Осі максимум та мінімум

Особливе практичне значення мають головні осі, що проходять через центр ваги, тобто головні центральні осі.

Якщо за вихідні осі прийняти головні центральні, то (5.14) – (5.16) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} I_u &= I_{xc} \cos^2 \alpha + I_{yc} \sin^2 \alpha, \\ I_v &= I_{xc} \sin^2 \alpha + I_{yc} \cos^2 \alpha, \\ I_{uv} &= \frac{I_{xc} - I_{yc}}{2} \cdot \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (5.20)$$

**Властивості головних осей інерції:**

– якщо переріз має одну вісь симетрії, то ця вісь а також будь-яка їй перпендикулярна утворюють систему головних осей інерції;

– якщо переріз має дві осі симетрії, то ці осі є головними центральними осями інерції перерізу.

Величина, що дорівнює відношенню осьового моменту інерції перерізу до відстані від цієї осі до найбільш віддаленої від неї точки перерізу називається осьовим моментом опору перерізу. Його розмірність [м<sup>3</sup>].

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}. \quad (5.19)$$

Головні моменти опору перерізу – це відношення виду

$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}}, \quad W_v = \frac{I_v}{u_{\max}}.$$

Ці характеристики перерізу мають особливе практичне значення під час розрахунків стрижнів на кручення та згин.

Момент інерції перерізу можна представити у вигляді

$$I_x = \int_F y^2 dF = F \cdot i_x^2,$$

де  $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}$ ,  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}$  – радіус інерції перерізу відносно осі x та y відповідно, їх

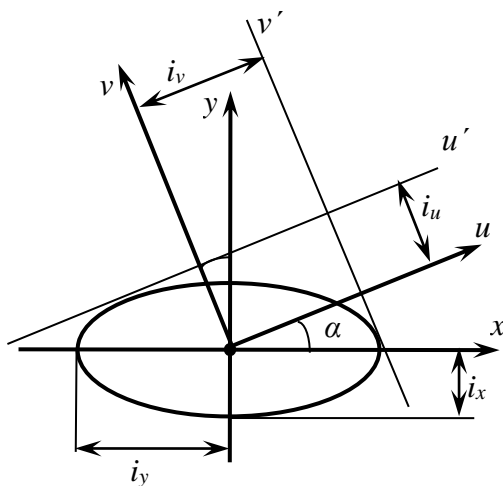


Рисунок 5.7 – Еліпс інерції

розмірність [м].

Радіуси інерції перерізу відносно головних осей є головними радіусами інерції.

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{F}}, \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{F}}. \quad (5.21)$$

Рівняння виду  $\frac{x^2}{i_x^2} + \frac{y^2}{i_y^2} = 1$  є рівнянням

еліпса інерції.

Еліпс інерції (рисунок 5.7) дає можливість легко визначити графічним шляхом радіус інерції перерізу відносно

головних осей, а потім обчислити значення головних моментів інерції перерізу.

Для цього потрібно, визначивши положення головних осей (з 5.18), провести прямі лінії  $u'$  та  $v'$  паралельно до головних осей  $u$  та  $v$  та дотично до еліпса інерції (рисунок 5.7). Відстані від центру еліпса до  $u'$  та  $v'$  відповідно дорівнюватимуть  $i_u$  та  $i_v$ . Головні моменти інерції тоді знаходять за формулами

$$I_u = F \cdot i_u^2, \quad I_v = F \cdot i_v^2.$$

### 5.6 Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення статичного моменту перерізу відносно осі.
2. Назвіть одиниці виміру статичного моменту перерізу.
3. Поясніть, чому дорівнює статичний момент відносно осі, що проходить через центр ваги перерізу.
4. Роз'ясніть, як визначити координати центру ваги простого та складного перерізу.
5. Дайте визначення осьового, полярного та відцентрового моментів інерції перерізу.
6. Назвіть розмірність моментів інерції перерізу.
7. Роз'ясніть, чому дорівнює сума осьових моментів інерції перерізу відносно двох взаємно перпендикулярних осей.
8. Сформулюйте властивість інваріантності осьових моментів інерції перерізу.
9. Наведіть формулу осьового моменту інерції прямокутника щодо центральних осей, паралельних його сторонам.
10. Розтлумачте, як зміняться осьові та відцентрові моменти інерції перерізу при паралельному перенесенні осей.
11. Якщо в площині перерізу проведено ряд паралельних осей, відносно якої з них осьовий момент інерції має найменше значення?
12. Наведіть формули, які виражають зміну осьових і відцентрового моментів інерції перерізу при повороті осей.
13. Доведіть, чи зміниться сума осьових моментів інерції перерізу щодо двох взаємно перпендикулярних осей при повороті цих осей.
14. Назвіть, які моменти інерції називаються головними та головними центральними.
15. Поясніть, які осі називаються головними осями інерції.
16. Поясніть, чому дорівнює відцентровий момент інерції щодо головних осей інерції.
17. Сформулюйте властивості головних осей інерції. В яких випадках їх положення можна визначити без обчислень?
18. Запишіть формули для визначення положення головних осей інерції та величин головних моментів інерції.
19. Дайте визначення осьового моменту опору перерізу та назвіть його розмірність.
20. Дайте визначення радіуса інерції перерізу та скажіть, чому він дорівнює.

21. Сформулюйте сутність еліпса інерції та опишіть, як його побудувати.
22. Поясніть, як за еліпсом інерції графічно визначити радіус інерції перерізу відносно головних осей.
23. Поясніть, як за радіусами інерції перерізу відносно головних осей знайти його головні моменти інерції.

## Лекція 6. Основи теорії напруженого та деформованого стану

У лекції проаналізовано напружений стан в точці.

Викладено лінійний та плоский напружений стан.

Введено поняття круга напружень (круга Мора).

Представлено узагальнений закон Гука.

Спираючись на матеріал лекції, довідкову та науково-технічну літературу студент повинен уміти:

- давати визначення напруженого стану в даній точці по заданому перерізу деформованого твердого тіла;
- тлумачити сутність головних площадок та визначати їх взаємне розташування;
- розраховувати головні напруження та давати їх визначення;
- формулювати закон парності дотичних напружень та властивість інваріантності суми осьових напружень;
- будувати круг напружень (круг Мора) та визначати за ним екстремальні значення напружень.

### 6.1 Напружений стан в точці

Напруженим станом в даній точці деформованого твердого тіла є сукупність нормальних і дотичних напружень, що діють по всіх площадках, які проходять через цю точку.

Під час дослідження напруженого стану тіла в даній точці  $A$ , навколо неї зазвичай виділяють елемент у вигляді нескінченно малого паралелепіпеда (рисунок 6.1, а), який у збільшеному масштабі показано на рисунку 6.1, б.

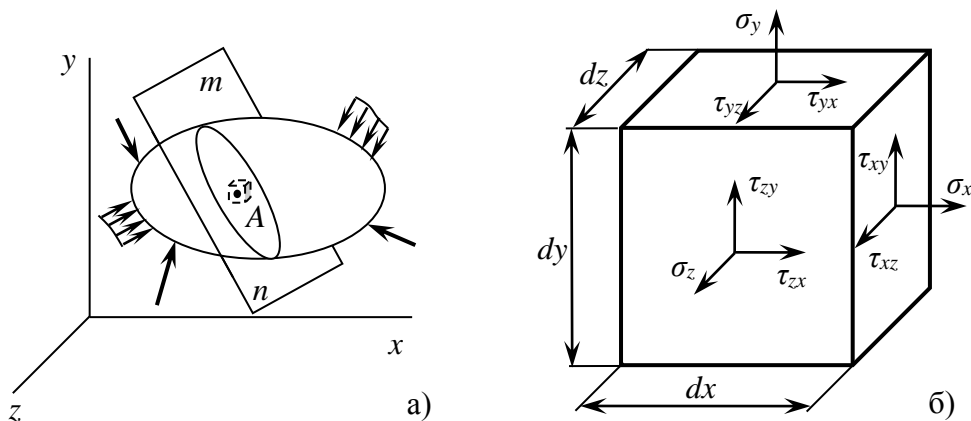


Рисунок 6.1 – Напружений стан тіла в точці

Оскільки даний елемент дуже малий, то можна вважати, що напруження на його гранях розподілені рівномірно. Повні напруження представляємо у вигляді дотичних і нормальних складових. Нормальні напруження позначають  $\sigma$  з індексом, відповідним напрямку нормалі до площадки, на якій вони діють. Дотичні напруження позначають  $\tau$  з двома індексами: перший відповідає напрямку нормалі до площадки, а другий – напрямленню самого напруження. Таким чином, на гранях показаного на рисунку 6.1, б паралелепіпеда,

виділеного навколо точки  $A$  навантаженого тіла, діють дев'ять компонентів напруження. Величини  $\sigma$  і  $\tau$  на площадках залежать від положення цих площадок.

### 6.2 Лінійний (одновісний) напружений стан

Розглянемо випадок лінійного напруженого стану, тобто осевого розтягу-стискання.

На поперечних перерізах стрижня поперечною площею  $F$  діють поздовжні зусилля  $N$ , які дорівнюють розтягуючій силі  $P$ , а напруження  $\bar{\rho}$  зводяться тільки до нормальних напружень. Позначимо їх  $\sigma_1$  (рисунок 6.2).

Тоді, як відомо,

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} = \frac{P}{F}. \quad (6.1)$$

Обчислимо напруження в перерізі площею  $F_\alpha$ , розташованому під кутом

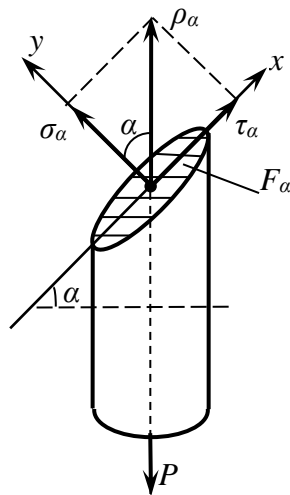


Рисунок 6.3 – Переріз під кутом  $\alpha$  до поперечного

до поперечного перерізу стрижня (кут  $\alpha$  вважають позитивним, якщо відлік проти годинникової стрілки). Напруження на цій площадці  $\bar{\rho}_\alpha$  (рисунок 6.3). Тут

$$\rho_\alpha = \frac{P}{F_\alpha} = \frac{P \cdot \cos \alpha}{F} = \sigma_1 \cdot \cos \alpha, \text{ через те, що } F_\alpha = \frac{F}{\cos \alpha}.$$

Його складові (нормальна і дотична) визначаються як проекції  $\bar{\rho}_\alpha$  на дотичну  $x$  та нормаль  $y$  до перерізу:

$$\sigma_\alpha = \rho_\alpha \cdot \cos \alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha \quad (6.2)$$

$$\tau_\alpha = \rho_\alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha. \quad (6.3)$$

Розглянемо тепер переріз стрижня, перпендикулярний попередньому (рисунок 6.4) і визначимо напруження  $\rho_{\alpha 1}$  на ньому.

Площу перерізу позначимо  $F_{\alpha 1}$

$$\rho_{\alpha 1} = \frac{P}{F_{\alpha 1}} = \frac{P \cdot \cos(90 - \alpha)}{F} = \sigma_1 \cdot \sin \alpha,$$

його складові

$$\sigma_{\alpha 1} = \rho_{\alpha 1} \cdot \cos(90 - \alpha) = \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha, \quad (6.4)$$

$$\tau_{\alpha 1} = -\rho_{\alpha 1} \cdot \sin(90 - \alpha) = -\frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha. \quad (6.5)$$

Порівнюючи вирази для дотичних напружень, приходимо до висновку, що

$$|\tau_\alpha| = |\tau_{\alpha 1}|. \quad (6.6)$$

Це закон парності дотичних напружень, який говорить, що дотичні напруження, що діють на двох

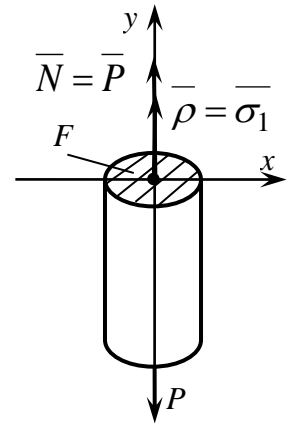


Рисунок 6.2 – Поперечний переріз стрижня

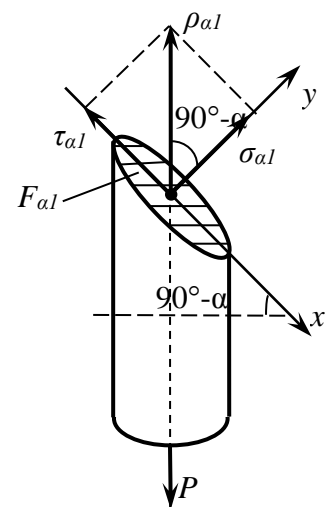


Рисунок 6.4 – Переріз під кутом  $90^\circ - \alpha$  до поперечного

взаємно перпендикулярних площадках, завжди рівні за абсолютною величиною і спрямовані одночасно або до ребра, що з'єднує площадки, або від нього (рисунок 6.5).

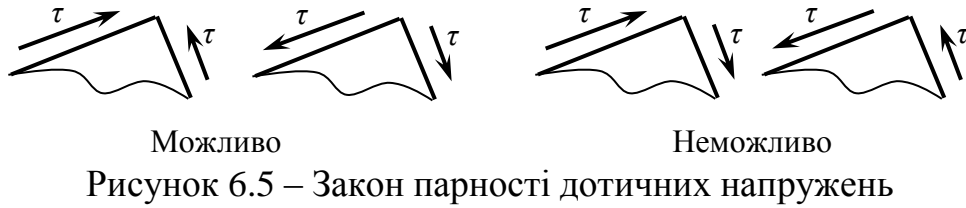


Рисунок 6.5 – Закон парності дотичних напружень

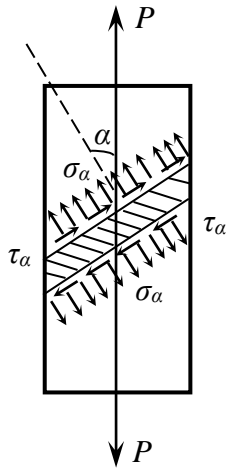


Рисунок 6.6 – Напруження на похилих площадках стрижня

Розглянемо деякий виділений шар у розтягнутому силами  $P$  стрижні, розташованому під кутом  $\alpha$  до поперечного перерізу. По обидва його боки діють дотичні і нормальні напруження.

Як видно з рисунка 6.6, нормальні  $\sigma_\alpha$  прагнуть розтягнути шар, що розглядається, а дотичні  $\tau_\alpha$  прагнуть зрушити поверхні шару один до одного.

Тобто при осьовому розтягу стрижня на його похилих площадках присутні два види деформацій: розтяг і зсув.

#### **Правило знаків $\sigma$ та $\tau$ :**

Нормальні напруження, що розтягують  $\sigma$  вважаємо позитивними, ті, що стискають – негативними.

Дотичні напруження  $\tau$  вважаємо позитивними, якщо вони створюють момент, що обертає елемент за годинниковою стрілкою відносно його центру, проти годинникової стрілки – негативними.

#### **Висновки:**

Із (6.3), (6.5) витікає, що найбільші дотичні напруження  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$  при  $\alpha = 45^\circ$ .

Із (6.2), (6.4) витікає, що в разі одновісного напруженого стану дотичні напруження відсутні  $\tau = 0$  в поперечних перетинах стрижня ( $\alpha = 0$ ), та поздовжніх ( $\alpha_1 = 90^\circ$ ). Нормальні напруження в цих перетинах приймають екстремальні значення та будуть відповідно дорівнювати  $\sigma_\alpha = \sigma_1$ ,  $\sigma_{\alpha_1} = 0$ .

Площадки, на яких немає дотичних напружень, є **головними площадками**.

Нормальні напруження, що діють по головних площадках та приймають екстремальні значення, є головними напруженнями.

Далі, у разі об'ємного (тривісного) напруженого стану, будемо позначати  $\sigma_1$  – найбільше в алгебраїчному сенсі головне напруження,  $\sigma_2$  – середнє та  $\sigma_3$  – найменше, тобто  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .



### 6.3 Плоский (двовісний) напружений стан

Розглянемо випадок головного напруженого стану, коли по двох взаємно перпендикулярних гранях виділеного елементарного паралелепіпеда (головною його площадкою) діють головні напруження  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$ , ( $\sigma_3 = 0$ ).

Задамо деякий кут  $\alpha$  та повернемо паралелепіпед на цей кут проти годинникової стрілки ( $\alpha > 0$ ). Визначимо напруження  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , та  $\tau_{xy}$  на повернутих площадках (рисунок 6.7).

Скористаємося принципом суперпозиції (див. рисунок 6.7).

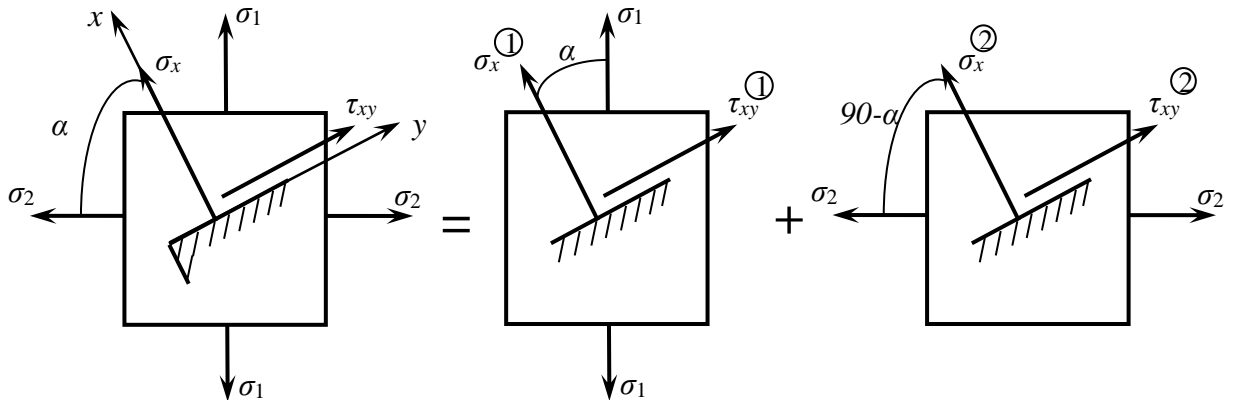


Рисунок 6.7 – Принцип суперпозиції

Визначимо нормальне напруження  $\sigma_x$ , яке отримуємо як суму напружень  $\sigma_{x1}$  та  $\sigma_{x2}$  від діючих незалежно головних напружень  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$ :

$$\sigma_x = \sigma_{x1} + \sigma_{x2}.$$

Згідно з (6.2) та (6.4)

$$\sigma_{x1} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha,$$

$$\sigma_{x2} = \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha$$

Тоді 
$$\sigma_x = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha. \quad (6.7)$$

Аналогічно 
$$\sigma_y = \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha. \quad (6.8)$$

Додаючи (6.7) та (6.8), отримуємо

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (6.9)$$

Рівняння (6.9) є **властивістю інваріантності нормальних напружень**: сума нормальних напружень на двох взаємно перпендикулярних площадках залишається незмінною при повороті цих площадок і дорівнює сумі головних напружень.

Визначимо дотичні напруження на розглянутих площадках. За аналогією з вищевикладеним  $\tau_{yx} = \tau_{yx1} + \tau_{yx2}$ .

Згідно з (6.3), (6.5)

$$\tau_{yx1} = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha, \quad \tau_{yx2} = -\frac{\sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Тоді 
$$\tau_{yx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (6.10)$$

Згідно із законом парності дотичних напружень  $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$ .

Із (6.10) видно, що найбільше значення для дотичних напружень буде при  $\sin 2\alpha = 1$ , тобто  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ .

З властивості інваріантності нормальних напружень можна зробити наступний висновок, що існують *дві взаємно перпендикулярні площадки (головні)*, на яких діють екстремальні нормальні напруження, а дотичні напруження відсутні.

Положення головних площадок по відношенню до довільних можна визначити з умови екстремуму нормальних напружень:  $\frac{d\sigma}{d\alpha} = 0$ .

Кут  $\alpha$ , на який необхідно повернути розглянутий елемент, щоб з довільного положення зорієнтувати його по головних площадках, визначається із (6.7), (6.8), (6.10):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (6.11)$$

Із (6.11) отримуємо два значення кута:  $\alpha$  та  $\alpha' = \alpha + 90^\circ$  (оскільки є дві взаємно перпендикулярні площадки).

Якщо  $\alpha > 0$ , то поворот розглянутого елемента проводиться проти годинникової стрілки.

Значення головних напружень знаходять за формулою

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} \quad (6.12)$$

**Правило визначення положення головних площадок.** Для визначення положення головних площадок по заданих довільних необхідно повернути довільно орієнтований заданий елемент на кут  $\alpha$  в сторону, що вказується напрямком  $\tau$ , чинним на площадці з більшим в алгебраїчному сенсі нормальним напруженням  $\sigma$  (див. приклад на рисунку 6.8).

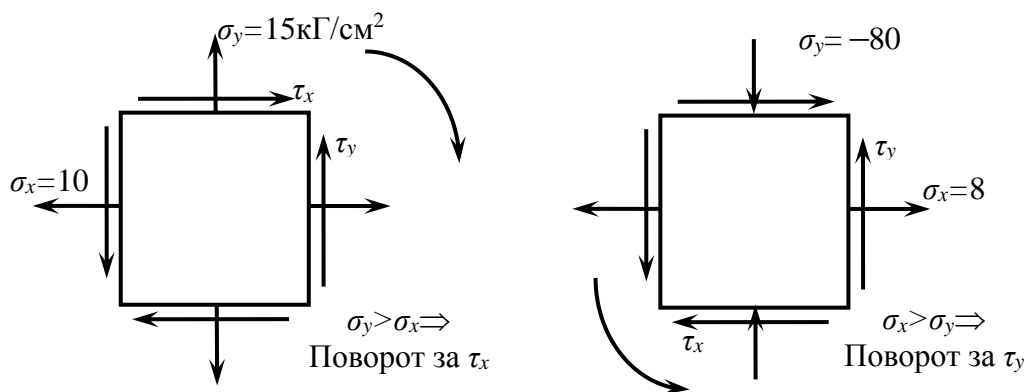


Рисунок 6.8 – Визначення головних площадок

### 6.4 Круг напружень. Круг Мора

Кругова діаграма (рисунок 6.9) дозволяє визначити графічно величини напружень на довільних взаємно перпендикулярних площадках по заданих головних напруженнях.

Розглянемо головний напружений стан елемента (рисунок 6.9), по гранях якого діють головні напруження  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$ . Задамо деякий кут  $\alpha$  і визначимо напруження на площадках, нахилених під кутом  $\alpha$  до головних.

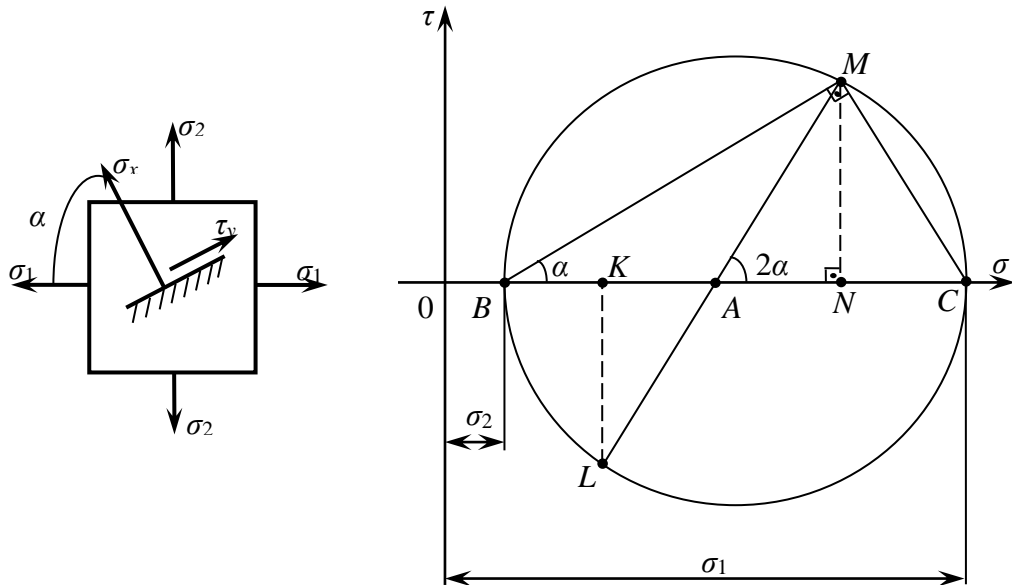


Рисунок 6.9 – Круг Мора

Для цього зобразимо на осі абсцис дві точки з координатами  $B(\sigma_2; 0)$  та  $C(\sigma_1; 0)$ . З середини відрізка  $BC$ , як з центру, будемо коло радіусом  $R = AB = AC$ . Потім проводимо діаметр  $LM$  під кутом, рівним  $2\alpha$ , до осі абсцис.

Стверджуємо, що координати отриманих на круговій діаграмі точок  $M$  та  $L$  відповідають значенням нормальних і дотичних напружень на довільних площадках, розташованих під кутом  $\alpha$  до головних площадок розглянутого елемента, тобто  $ON = \sigma_x$ ,  $OK = \sigma_y$ ,  $LK = MN = \tau$ .

Доведемо, що  $ON = \sigma_x$ .

За побудовою  $OC = \sigma_1$ ,  $OB = \sigma_2$ . Кут  $\angle MBC = \alpha$ , через те що він удвічі менше кута  $\angle MAC = 2\alpha$ .

Тоді  $ON = OB + BN = \sigma_2 + BM \cdot \cos \alpha$ .

Але з трикутника  $MBC$  маємо  $BM = BC \cdot \cos \alpha = (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \cos \alpha$ .

Підставимо це в вираз для  $ON$  та отримаємо

$$ON = \sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \cos^2 \alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha = \sigma_x.$$

Аналогічно доводяться і інші твердження.

Використовуючи круг Мора, можна також вирішити зворотну задачу, тобто визначити головні напруження та положення головних площадок по заданих довільних напруженнях.

### 6.5 Узагальнений закон Гука

Розглянемо випадок одновісного головного напруженого стану (рисунок 6.10), тобто осьовий розтяг стрижня. Гуком було доведено, що в поперечних перетинах стрижня напруження та поздовжні деформації пов'язані співвідношенням

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}.$$

Пізніше було показано, що з огляду на поперечні деформації, пов'язані з поздовжніми через коефіцієнт Пуассона, закон Гука набув вигляду:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E}, \\ \varepsilon_2 &= -\mu \frac{\sigma_1}{E}, \\ \varepsilon_3 &= -\mu \frac{\sigma_1}{E}.\end{aligned}$$

Для випадку плоского (двовісного) напруженого стану (рисунок 6.11) ці залежності мають вигляд:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E}, \\ \varepsilon_3 &= -\mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E}.\end{aligned}$$

У загальному випадку об'ємного (тривісного) головного напруженого стану елемента (рисунок 6.12) деформації та напруження пов'язані наступними залежностями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E}.\end{aligned}$$

Ці залежності є узагальненим законом Гука. Відносна зміна об'єму елементарного паралелепіпеда визначається наступним чином:

$$\Theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{(1-2\mu)}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

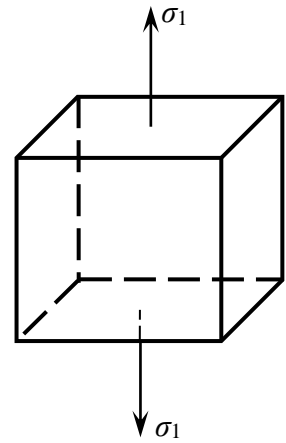


Рисунок 6.10 – Одновісний напружений стан

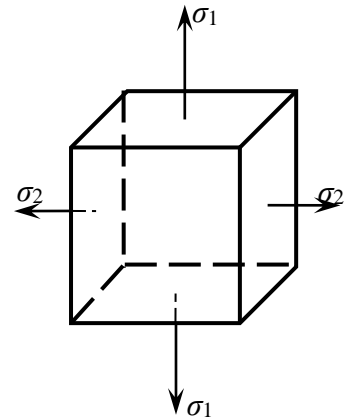


Рисунок 6.11 – Двовісний напружений стан

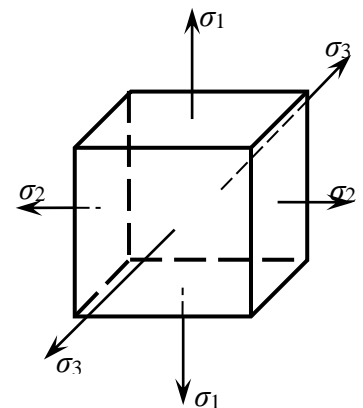


Рисунок 6.12 – Тривісний напружений стан

### 6.6 Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення напруженого стану в даній точці деформованого твердого тіла.
2. Розтлумачте сутність головних площадок та як вони взаємно розташовані.
3. Назвіть, які напруження називаються головними та чому вони дорівнюють.
4. Сформулюйте, яку властивість мають нормальні напруження по двох взаємно перпендикулярних площадках.
5. Назвіть правило знаків для нормальних і дотичних напружень.
6. Сформулюйте сутність закону парності дотичних напружень.
7. Поясніть, для чого існує та як побудувати круг Мора (круг напружень).
8. Роз'ясніть, як визначити, на яких із головних площадок діють найбільші  $\sigma$ , а на яких – найменші.
9. Поясніть, як за кругом Мора визначити екстремальні значення  $\tau$ .
10. Запишіть узагальнений закон Гука для об'ємного напруженого стану.

## Лекція 7. Зсув

У лекції введено поняття про чистий зсув.

Проаналізовано напруження та деформації при зсуві, сформульований закон Гука при зсуві.

Наведено умови міцності при зсуві.

Спираючись на матеріал лекції, довідкову та науково-технічну літературу студент повинен уміти:

- роз'яснювати, який випадок напруженого стану є чистим зсувом;
- формулювати визначення абсолютного зсуву, відносного зсуву та кута зсуву;
- пояснювати, які властивості матеріалу характеризує модуль пружності при зсуві;
- визначати положення площадок чистого зсуву відносно головних площадок елемента;
- формулювати умови міцності при зсуві.

### 7.1 Поняття про чистий зсув

Під зсувом розуміють такий вид деформації, коли в поперечних перерізах стрижня діють тільки поперечні (такі, що перерізують) сили, дотичні до цих перерізів.

Таке навантаження відповідає дії на стрижень двох рівних протилежно спрямованих та близько розташованих сил (рисунок 7.1), що викликають **зріз** по площині, розташованій між силами (як при розрізанні ножицями прутів, листів та ін.).

В цілому ж на практиці зсув у чистому вигляді отримати складно, через те, що зазвичай деформація зсуву супроводжується іншими видами деформацій та найчастіше згином.

При розрахунку ряду елементів конструкцій зустрічається особливий вид напруженого стану, коли на чотирьох гранях прямокутного елемента, виділеного навколо деякої точки, діють тільки дотичні напруження. Цей стан є чистим зсувом.

Типовим прикладом тіла, у всіх точках якого має місце чистий зсув, є скручувана тонкостінна труба, зображена на рисунку 7.2, а. Внаслідок відносного повороту кінцевих перерізів твірні труби нахилиються та її стінки відчувають деформацію зсуву.

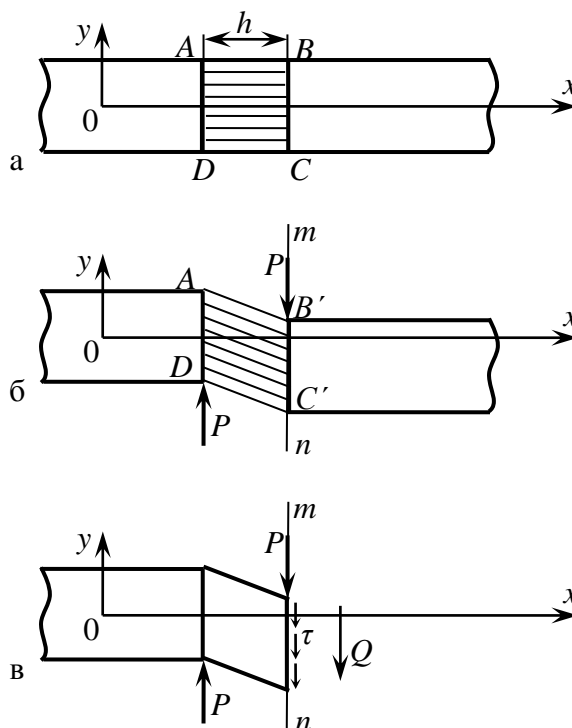


Рисунок 7.1 – Зсув прямолінійного стрижня

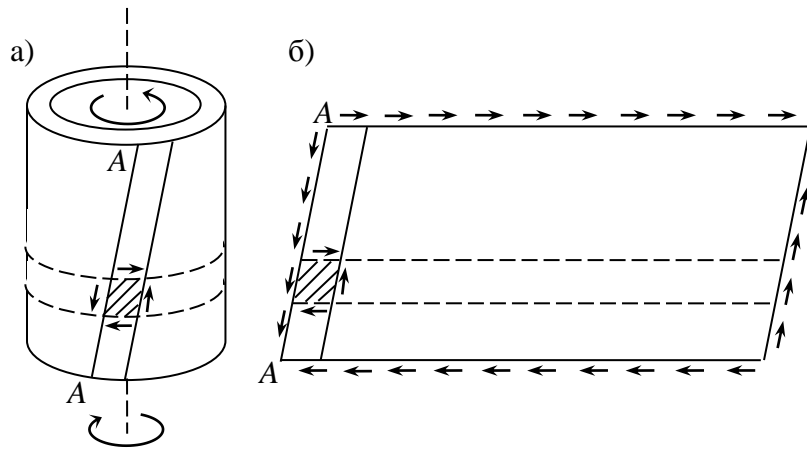


Рисунок 7.2 – Приклад чистого зсуву

Якщо розрізати умовно трубу уздовж твірної  $A-A$  та розгорнути її, то можна побачити що труба є пластиною, що зазнає деформацію чистого зсуву (рисунок 7.2, б).

## 7.2 Напруження та деформації при зсуві. Закон Гука при зсуві

Нехай на стрижень поперечним перерізом  $F$  (рисунок 7.1, а) діють зсувні сили  $P$ . Скористаємося методом перерізів. Відкинемо частину стрижня, розташовану праворуч від перерізу  $m-n$  (рисунок 7.1, б), замінюючи відповідною силою  $Q$  її дію на решту. Ця **поперечна (до осі стрижня) сила** є рівнодіючою дотичних напружень  $\tau$  в даному поперечному перерізі. Умова рівноваги розглянутої частини стрижня має вигляд:

$$\sum F_y = P - Q = 0, \quad \text{звідки маємо } Q = P.$$

Вважаючи, що дотичні напруження рівномірно розподілені по поперечному перерізу, отримаємо

$$\tau = \frac{Q}{F} = \frac{P}{F}. \quad (7.1)$$

Допущення про рівномірність розподілу дотичних напружень по перерізу досить умовне. Однак це припущення в багатьох випадках себе виправдовує, а тому в інженерній практиці його широко використовують при розрахунках болтових та клепаних з'єднань, шпонок, зварних з'єднань та ін.

Розглянемо плоский елемент  $ABCD$  (рисунок 7.3) стрижня, взятий з рисунка 7.1, б.

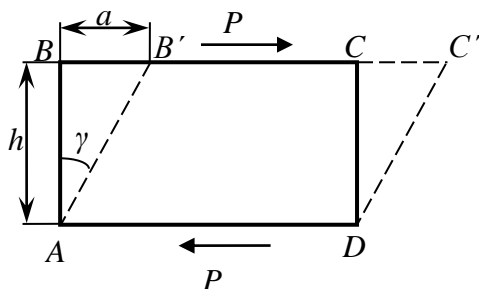


Рисунок 7.3 – Деформації зсуву

Дотичні напруження  $\tau$  викликають в ньому лінійні та кутові деформації, так звані зсуви.

**Абсолютний зсув** елемента, що розглядається  $ABCD$  це відстань  $CC'$ , на яку елементарний відрізок  $BC$  зміщується відносно відрізка  $AD$ .

$$CC' = a \cdot \gamma.$$

**Відносним зсувом** є відношення

абсолютного зсуву  $a$  до товщини виділеного елемента  $h$ .

Через те, що деформації малі та практично не змінюють початкових розмірів тіла, то

$$\frac{a}{h} = \operatorname{tg} \gamma = \gamma, \quad (7.2)$$

де  $\gamma$  – кут зсуву.

Експериментально встановлено, що в певних межах деформація зсуву протікає пружно, а величина її пропорційна дотичним напруженням  $\tau$ :

$$\tau = G \cdot \gamma. \quad (7.3)$$

Це співвідношення є **законом Гука при зсуві**.

Коефіцієнт пропорційності  $G$  є **модулем пружності при зсуві** або **модулем пружності другого роду** (розмірність Н/м<sup>2</sup>, кГ/см<sup>2</sup> або Па).

У загальному вигляді співвідношення між модулем пружності  $G$ , модулем Юнга  $E$  та коефіцієнтом Пуассона  $\mu$  виражається формулою

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (7.4)$$

Враховуючи співвідношення (7.1) та (7.2) закон Гука при зсуві можна записати у вигляді:

$$a = \frac{Q \cdot h}{G \cdot F}. \quad (7.5)$$

Формула (7.5) виражає закон Гука для абсолютного зсуву.

Графічно закон Гука при зсуві показаний на рисунку 7.4.

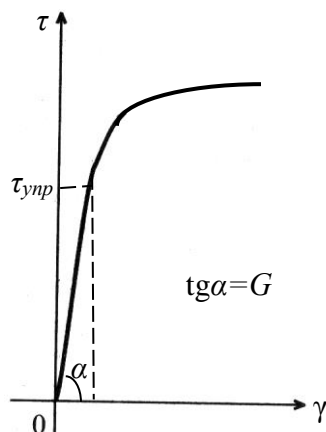


Рисунок 7.4 –  
Діаграма зсуву

Розглянемо випадок плоского напруженого стану елемента (рисунок 7.5), коли по його гранях діють головні напруження  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma$ , ( $\sigma_2 = 0$ ).

Раніше вже було отримано, що найбільші дотичні напруження  $\tau_{\max}$  діють на площадках, розташованих під

кутом  $\alpha = 45^\circ$  по відношенню до головних площадок та дорівнюють

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sigma$$

Нормальні напруження на цих площадках дорівнюють нулю:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 45^\circ + \sigma_3 \sin^2 45^\circ = \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_3}{2} = 0$$

Аналогічно  $\sigma_y = 0$ .

Таким чином, на отриманих площадках відсутні нормальні напруження, а дотичні напруження приймають максимальні значення. Ці площадки є **площадками чистого зсуву**.

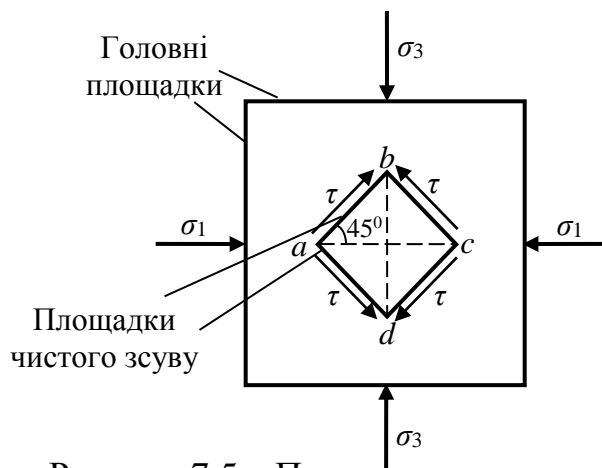


Рисунок 7.5 – Площадки чистого зсуву



### 7.3 Умови міцності при зсуві

У деяких конструкціях по окремих перерізах діють значні дотичні напруження. У цих же перерізах, зазвичай, діють і нормальні напруження, а тому вони не є площадками чистого зсуву.

Однак, якщо нормальні напруження в них значно менші ніж дотичні, то в наближених розрахунках враховуються тільки дотичні напруження, а зазначені перерізи при цьому розглядаються як площадки чистого зсуву.

В цьому випадку при розрахунках на зсув (зріз) умова міцності має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{F} \leq [\tau_c], \quad (7.6)$$

де  $[\tau_c]$  – допустиме напруження на зріз, яке визначається найчастіше через допустиме напруження на розтяг  $[\sigma]$ .

Для пластичних матеріалів приймають зазвичай  $[\tau_c] = (0,5 \dots 0,6)[\sigma]$ , для крихких матеріалів  $[\tau_c] = (0,7 \dots 1,0)[\sigma]$ .

### 7.4 Завдання для самоконтролю

1. Роз'ясніть, який випадок напруженого стану є чистим зсувом.
2. Дайте визначення абсолютного зсуву, відносного зсуву, кута зсуву.
3. Запишіть вираз закону Гука для абсолютного та відносного зсуву.
4. Поясніть, які властивості матеріалу характеризує модуль пружності при зсуві  $G$ .
5. Сформулюйте залежність між модулем Юнга  $E$  та модулем пружності при зсуві  $G$ .
6. Поясніть, як пов'язані одне з одним при чистому зсуві значення  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$ ,  $\tau_{\max}$  та  $\tau_{\min}$ .
7. Поясніть, як розташовані площадки чистого зсуву по відношенню до головних площадок елемента.
8. Роз'ясніть, чому дорівнюють нормальні напруження на площадках чистого зсуву.
9. Сформулюйте умову міцності при зсуві.
10. Роз'ясніть, чому дорівнюють найбільші дотичні напруження на площадках чистого зсуву.

## Лекція 8. Кручення

У лекції введено поняття крутного моменту.

Розглянуто приклади побудови епюр крутних моментів.

Проаналізовано визначення деформацій та напружень при крученні.

Наведено умови міцності та жорсткості при крученні а також розглянуто приклад підбору перерізу вала.

Спираючись на матеріал лекції, довідкову та науково-технічну літературу студент повинен уміти:

- формулювати, який вид деформації називається крученням;
- розраховувати значення крутного моменту в поперечному перерізі вала;
- будувати епюри крутних моментів та пояснювати їх властивості;
- визначати напруження в поперечних перерізах вала при крученні;
- давати визначення полярного моменту інерції та визначати його величину;
- формулювати умову міцності та жорсткості при крученні та виконувати розрахунок круглого вала на міцність.

**Кручення – це такий вид деформації стрижня, коли в його поперечних перерізах виникають лише тільки крутні моменти.**

Стрижень, який зазнає деформацію кручення, називають валом.

Крученню піддаються багато деталей машин та споруд: вали двигунів та верстатів, осі моторних вагонів та локомотивів, гвинтові пружини, елементи просторових конструкцій та ін.

Дослідження показали, що характер деформації багато в чому залежить від форми поперечного перерізу. Найбільш поширені вали круглого та трубчастого перерізу.

### 8.1 Крутний момент

Розглянемо випадок, коли прямий стрижень (вал) знаходиться в стані спокою або рівномірного обертання під дією зовнішніх моментів, що скручують (рисунок 8.1).

Умовою його рівноваги буде

$$\sum M_k = 0, \text{ тобто}$$

$$M_1 - M_2 + M_3 + M_4 = 0.$$

Визначимо величини внутрішніх крутних моментів  $M_{кр}$  для довільно обраного поперечного перерізу. Для цього скористаємося методом перерізів.

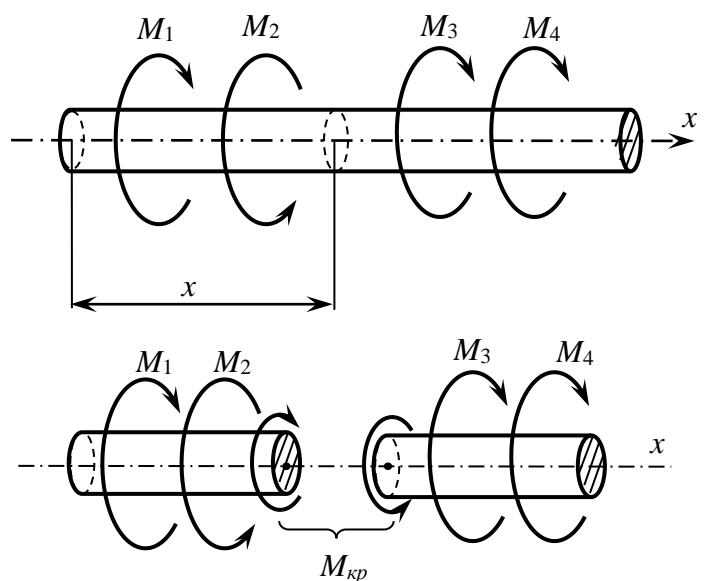


Рисунок 8.1 – Крутний момент вала

Проведемо на деякій відстані  $x$  від лівого кінця вала поперечний переріз  $m-n$  та розглянемо рівновагу однієї з частин вала.

При цьому дію відкинутої частини замінимо відповідним силовим фактором – крутним моментом  $M_{кр}$ .

З умови рівноваги лівої частини вала  $\sum M_i^{лев} = M_1 - M_2 + M_{кр} = 0$  маємо

$$M_{кр}^{лев} = M_2 - M_1.$$

Умови рівноваги правої частини  $\sum M_i^{пр} = M_{кр} - M_3 - M_4 = 0$  дають

$$M_{кр}^{пр} = M_3 + M_4.$$

Порівнюючи отримані значення  $M_{кр}$  в перерізі зліва та справа з умовою рівноваги всього вала, приходимо до висновку, що

$$M_{кр}^{лев} = M_{кр}^{пр}.$$

Таким чином, **крутний момент в довільному перерізі стрижня чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, що скручують, прикладених по одну сторону від перерізу.**

При складанні умов рівноваги було використано таке **правило знаків  $M_{кр}$** . Якщо дивитися на поперечний переріз з боку зовнішньої нормалі, то крутний момент  $M_{кр}$  вважається позитивним, якщо його видно спрямованим проти годинникової стрілки.

Зміну крутних моментів по довжині вала зручно зображувати графічно на епюрі крутних моментів.

## 8.2 Приклади побудови епюр крутних моментів

Приклад 1. Прямий стрижень навантажений трьома моментами, що скручують, та затиснений зліва (рисунок 8.2).

Якщо до вала докладено кілька зовнішніх моментів, то його необхідно розбити на ділянки. Межами ділянок є перерізи, в яких прикладені зосереджені зовнішні моменти (в тому числі й реактивні).

У довільному перерізі кожної ділянки визначаємо значення крутного

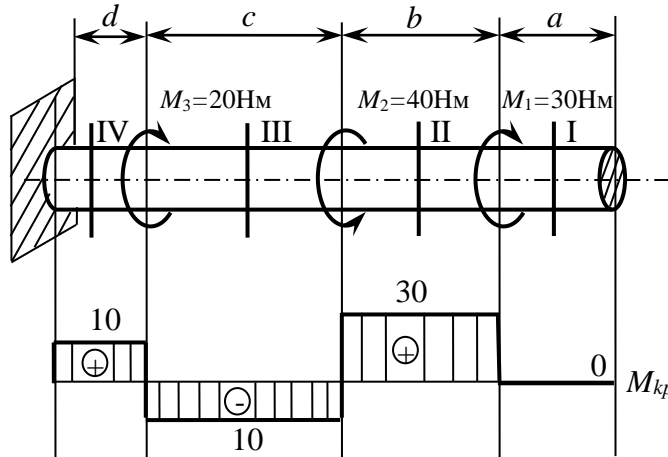


Рисунок 8.2 – Побудова епюри  $M_{кр}$

моменту, складаючи умови рівноваги:

$$M_{кр1} = 0 \text{ при } (0 \leq x \leq a);$$

$$M_{кр2} = M_1 = 30 \text{ Н} \cdot \text{м} \quad \text{при } (a \leq x \leq a+b);$$

$$M_{кр3} = M_1 - M_2 = -10 \text{ Н} \cdot \text{м} \quad \text{при } (a+b \leq x \leq a+b+c);$$

$$M_{кр4} = M_1 - M_2 + M_3 = 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \quad \text{при } (a+b+c \leq x \leq a+b+c+d).$$

За отриманими значеннями  $M_{кр}$  будемо епюру крутних моментів згідно з правилами.

В усіх перерізах кожної ділянки крутний момент залишається постійним та змінюється стрибкоподібно тільки при переході через кордони ділянок – в місцях прикладання зовнішніх зосереджених моментів.

**Приклад 2.** Прямий стрижень навантажений розподіленим крутним моментом інтенсивністю  $t$  та зосередженим  $M_1$ , та затиснений зліва (рисунки 8.3).

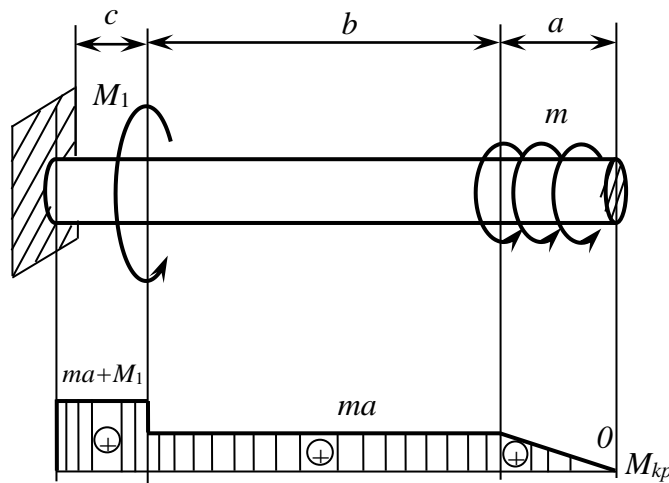


Рисунок 8.3 – Епюра  $M_{кр}$

У разі розподіленого моменту значення  $M_{кр}$  на першій ділянці довжиною  $a$  дорівнює

$$M_{кр1} = t \cdot x \text{ при } (0 \leq x \leq a).$$

Тоді при  $x=0$   $M_{кр1} = 0$ ,  
при  $x=a$   $M_{кр1} = t \cdot a$ .

Відповідно  $M_{кр2} = t \cdot a$  при  
( $a \leq x \leq a+b$ );

$M_{кр3} = M_1 + t \cdot a$  при  
( $a+b \leq x \leq a+b+c$ ).

Будуємо епюру крутних моментів.

### 8.3 Визначення деформацій та напружень при крученні

Спостерігаючи за характером викривлення прямокутної сітки, нанесеної на бічну поверхню циліндричного стрижня, під дією моментів, що скручують, (рисунки 8.4) можна помітити, що

- 1) контури поперечних перерізів в процесі деформації залишаються плоскими, тобто виконується гіпотеза Бернуллі,
- 2) відстані між поперечними перерізами (уздовж осі вала) не змінюються,
- 3) радіуси поперечних перерізів не викривляються (залишаються прямолінійними) та зберігають свою довжину,
- 4) поперечні перерізи, залишаючись плоскими, повертаються навколо осі відносно один одного на деякий кут, що є **кутом закручування**.

**Висновок:** На підставі цих фактів кручення циліндричного стрижня можна уявити як результат послідовних зсувів, викликаних взаємним поворотом поперечних перерізів, внаслідок чого в останніх виникають тільки дотичні напруження, а нормальні дорівнюють нулю.

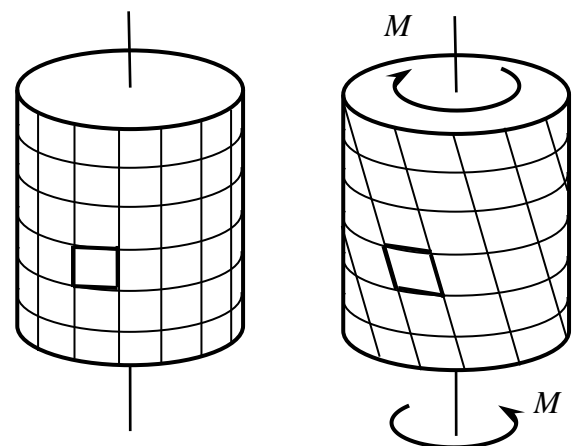


Рисунок 8.4 – Деформації при крученні

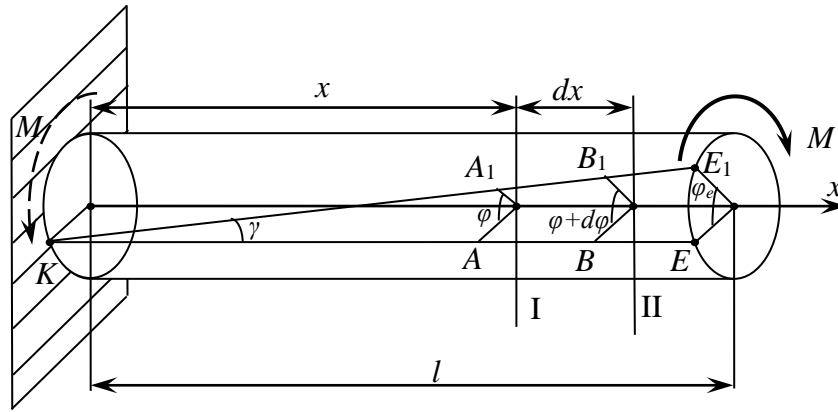


Рисунок 8.5 – Деформації вала при крученні

Розглянемо вал радіусом  $r$ , що затиснений одним кінцем (рисунок 8.5), на вільному кінці якого прикладена пара сил з моментом  $M$ .

На бічній поверхні вала проведемо твірну  $KE$ , яка після закручування займе положення  $KE_1$ .

Внаслідок кручення вала переріз I–I, взятий на відстані  $x$  від защемлення, повернеться на кут  $\varphi$ , а сусідній з ним переріз II–II – на кут  $\varphi + d\varphi$ . Таким чином, переріз II–II по відношенню до перерізу I–I повернеться на кут  $d\varphi$ .

Розглянемо окремо елемент вала довжиною  $dx$ . Для зручності будемо вважати його лівий переріз нерухомим (рисунок 8.6).

Твірна  $AB$  відхилиться на нескінченно малий кут  $\gamma$  та займе положення  $AB_1$ . Кут зсуву поздовжнього волокна, що лежить на поверхні вала, визначається рівністю:

$$\gamma = \frac{BB_1}{AB} = \frac{r \cdot d\varphi}{dx}.$$

Для довільного волокна, що лежить на відстані  $\rho$  від осі, матимемо

$$\gamma_\rho = \frac{CC_1}{DC} = \frac{\rho \cdot d\varphi}{dx}.$$

Відношення  $\frac{d\varphi}{dx} = \Theta$  є **відносним кутом закручування**, а елементарний кут  $d\varphi$  – **абсолютним кутом закручування** вала.

На підставі закону Гука при зсуві можна записати

$$\tau_\rho = \gamma_\rho \cdot G = G \cdot \rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (8.1)$$

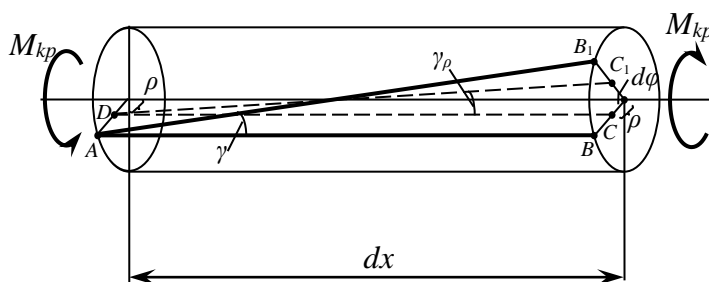


Рисунок 8.6 – Кути зсуву та закручування

Із (8.1) витікає, що значення дотичних напружень в точках поперечного перерізу пропорційні їх відстаням від осі вала. Максимальні напруження діють у найбільш віддалених від осі точках поблизу зовнішньої поверхні вала.

Закон розподілу (епюру) дотичних напружень показано на рисунку 8.7.

$$\tau_{\max} = \gamma \cdot G = G \cdot r \frac{d\varphi}{dx}. \quad (8.2)$$

Величину відносного кута закручування  $\frac{d\varphi}{dx}$  визначимо з тієї умови, що діючі в поперечному перерізі вала дотичні напруження приводяться до пари сил, момент якої дорівнює крутному моменту в перерізі  $M_{kp}$ .

Виділимо навколо довільної точки  $C$  перерізу елементарну площадку  $dF$ , на якій діє елементарна сила  $\tau_{\rho} dF$ .

Елементарний момент цієї сили відносно осі  $x$  буде дорівнювати

$$dM_{kp} = \tau_{\rho} dF \cdot \rho.$$

Крутний момент у перерізі знайдемо, сумуючи всі елементарні моменти

$$M_{kp} = \int_F \tau_{\rho} dF \rho. \quad (8.3)$$

Оскільки добуток  $G \frac{d\varphi}{dx}$  постійний для всіх точок перерізу, то з урахуванням (8.1) маємо

$$M_{kp} = G \frac{d\varphi}{dx} \int_F \rho^2 dF = G \cdot I_{\rho} \frac{d\varphi}{dx}. \quad (8.4)$$

де  $I_{\rho}$  – полярний момент інерції поперечного перерізу вала. Тоді

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{kp}}{G \cdot I_{\rho}}. \quad (8.5)$$

Добуток  $G \cdot I_{\rho}$  – жорсткість стрижня при крученні. Підставивши (8.5) в (8.1), отримаємо вираз для дотичних напружень

$$\tau_{\rho} = \frac{M_{kp} \rho}{I_{\rho}}. \quad (8.6)$$

Максимальні дотичні напруження

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp} r}{I_{\rho}}. \quad (8.7)$$

Величина  $\frac{I_{\rho}}{r} = W_{\rho}$  – полярний момент опору перерізу.

Для суцільного круглого перерізу полярний момент інерції  $I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32}$ . Тоді момент опору

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Для кільцевого перерізу  $I_{\rho}$  та момент опору  $W_{\rho}$  (рисунок 8.8)

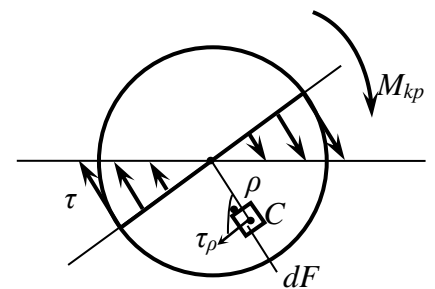


Рисунок 8.7 – Епюра  $\tau$

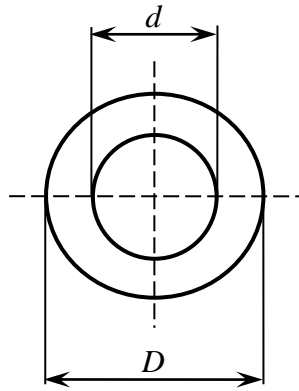


Рисунок 8.8 –  
Кільцевий  
переріз вала

$$I_{\rho} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4), \quad W_{\rho} = \frac{\pi D^3}{16} \left( 1 - \frac{d^4}{D^4} \right).$$

#### 8.4 Умови міцності та жорсткості при крученні.

##### Підбір перерізу вала

З урахуванням вищевикладеного рівняння (8.7) набуде вигляду

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp}}{W_{\rho}}.$$

Тоді умова міцності при крученні матиме вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp}}{W_{\rho}} \leq [\tau]. \quad (8.8)$$

де  $[\tau]$  – допустиме напруження при крученні (чистому зсуві), зазвичай  $[\tau] = (0,5 \dots 0,6)[\sigma]$ .

При проектуванні елемента конструкції (наприклад, вала), зазвичай, необхідно визначити міцні розміри його перерізу (діаметр, та ін.).

Тоді з умов міцності за відомим значенням крутного моменту  $M_{kp}$  в небезпечному перерізі та заданому матеріалі діаметр суцільного перерізу вала визначається

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{kp}}{\pi \cdot [\tau]}} \cong 1,72 \sqrt[3]{\frac{M_{kp}}{[\tau]}}$$

Іноді при розрахунку вала відома потужність на шківках  $N$  (кВт), передана йому, та частота обертання  $n$  (об/хв.). У цьому випадку крутний момент  $M_{kp}$  в розрахункових формулах можна виразити через  $N$  та  $n$  наступним чином:

$$M_{kp} = \frac{30N}{\pi \cdot n} \cong 9,55 \frac{N}{n} \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

Крім розрахунку на міцність вали розраховують і на жорсткість.

Із (8.5) можна визначити повний кут закручування вала довжиною  $l$ .

$$\varphi_l = \int_0^l d\varphi = \int_0^l \frac{M_{kp}}{G \cdot I_{\rho}} dx.$$

Якщо діаметр по всій довжині вала та момент  $M_{kp}$  не змінюються, то кут закручування

$$\varphi_l = \frac{M_{kp} l}{G \cdot I_{\rho}}. \quad (8.9)$$

Якщо стрижень ступінчастий або крутний момент змінюється по довжині стрибкоподібно, то  $\varphi_l$  визначають як суму кутів закручування на окремих ділянках

$$\varphi_l = \sum \frac{M_{kpi} \cdot l_i}{G \cdot I_{\rho i}}$$

**Відносний (погонний) кут закручування** стрижня – це відношення абсолютного кута закручування до довжини стрижня

$$\Theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_{kp}}{G \cdot I_{\rho}}$$

**Умова жорсткості** вала при крученні, яка обмежує відносні кути закручування має вигляд

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{kp}}{G \cdot I_{\rho}} \leq [\Theta], \quad (8.10)$$

де  $[\Theta]$  – допустимий відносний кут закручування при статичному навантаженні. Зазвичай  $[\Theta] = 0,3$  градуси на кожен погонний метр довжини вала.

Для того щоб вал одночасно задовольняв умовам міцності та жорсткості, його необхідно розрахувати за обома умовами та з двох знайдених значень діаметра вибрати більший.

### 8.5 Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення виду деформації, що називають крученням.
2. Поясніть, як обчислюється крутний момент, який передається шківом, по заданій потужності та кількості обертів за хвилину.
3. Роз'ясніть, чому дорівнює величина крутного моменту в поперечному перерізі вала.
4. Назвіть правило знаків, прийняте для крутних моментів.
5. Сформулюйте сутність епюр крутних моментів та як їх побудувати.
6. Назвіть напруження, які виникають в поперечних перерізах круглого вала при крученні.
7. Запишіть формулу для визначення напружень в поперечному перерізі вала.
8. Роз'ясніть, у яких точках вала виникають найбільші дотичні напруження і чому вони дорівнюють.
9. Напишіть вираз полярних моментів інерції круглого (суцільного та кільцевого) перерізу вала.
10. Дайте визначення полярного моменту опору вала та вкажіть, чому він дорівнює.
11. Поясніть, як проводиться розрахунок скручуваного круглого вала на міцність.
12. Розтлумачте, у чому полягає умова жорсткості вала.
13. Наведіть формули відносного та повного кута закручування круглого вала.
14. Сформулюйте умову міцності вала.



## Лекція 9. Згин прямих стрижнів

У лекції розглянуто види опор балок та їхні опорні реакції.

Проаналізовано внутрішні силові фактори. Введено поняття поперечної сили та згинального моменту.

Наведено приклади побудови еюр поперечних сил та згинальних моментів.

Викладено диференціальні залежності Журавського при згині.

Спираючись на матеріал лекції, довідкову та науково-технічну літературу студент повинен уміти:

- формулювати вид деформації, що є згином;
- розраховувати поперечну силу та згинальний момент у поперечному перерізі балки;
- наводити диференціальну залежність, що існує між поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження, перпендикулярного до осі балки;
- будувати еюри поперечних сил та згинальних моментів та аналізувати їх властивості;
- розрізняти типи опор, що використовуються для закріплення балки.

**Згином називають такий вид деформації, коли під дією зовнішніх сил в поперечних перерізах стрижня виникають згинальні моменти.**

Якщо згинальний момент в перерізі є єдиним силовим фактором, а поздовжні та поперечні сили відсутні, то згин є **чистим**.

Якщо в поперечних перерізах стрижня разом із згинальними моментами діють і поперечні сили, то згин є **плоским поперечним**. В цьому випадку всі зовнішні сили перпендикулярні осі стрижня та разом із зовнішніми парами сил лежать в одній з **головних плоскостей**, утворених віссю стрижня та головною віссю його поперечного перерізу (рисунок 9.1).

Прямолінійний стрижень, що працює на згин, є **балкою**. З точки зору розрахунку на міцність, жорсткість та стійкість балкою є не тільки будівельна балка, але й вал, болт, вісь залізничного вагона та ін.

### 9.1 Опори та опорні реакції

Зазвичай, балки мають ті чи інші опори. Конструктивні форми опор дуже різні. Для розрахунків їх систематизують у вигляді трьох основних типів опор:

1) **шарнірно-рухома** опора, в якій може виникати тільки одна складова реакції –  $R_y$ , спрямована

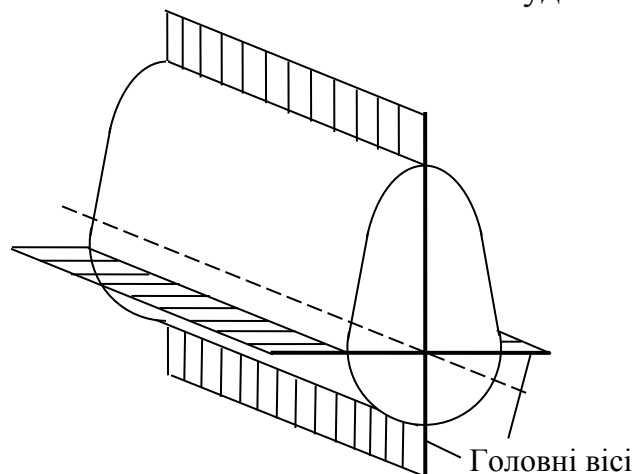


Рисунок 9.1 – Головні вісі балки

перпендикулярно поверхні, на якій знаходиться опора (рисунок 9.2, а);

2) **шарнірно-нерухома** опора, в якій можуть виникати дві взаємно перпендикулярні складові реакції –  $R_x$  та  $R_y$  (рисунок 9.2, б);

3) **жорстке затиснення (закріплення)**, в якому можуть бути три складові – дві взаємно перпендикулярні реакції –  $R_x$  та  $R_y$  та реактивний момент  $M_c$  (рисунок 9.2, в)

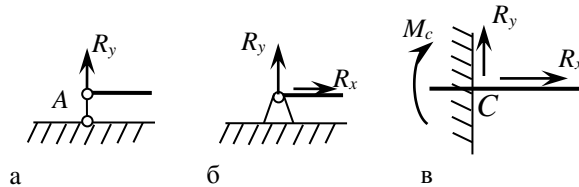


Рисунок 9.2 – Основні види опор

Для того, щоб балка не переміщувалася під дією навантаження, вона повинна бути **геометрично незмінюваною** (нерухомою). Це можливо при накладенні на неї трьох зовнішніх в'язей. Тоді вона є ще й **статично визначуваною**. При більшій кількості в'язей маємо статично невизначувану балку, при меншому – балка змінювана.

Для визначення опорних реакцій в статично визначуваних балках досить скласти три рівняння статички. При знаходженні опорних реакцій розподілене навантаження замінюють зосередженою силою. Для визначення опорних реакцій в статично невизначуваних балках додатково до рівнянь статички складають рівняння **сумісності** деформацій.

Балка на рисунку 9.3, а є **простою, однопрогоною, або двохопорною**, а відстань між опорами називається прогоном.

**Консолю** є балка, затиснена одним кінцем та не має інших опор (рисунок 9.3, б) або частина балки, що звисає за опорою (рисунок 9.3, в).

Шарнірно оперта балка, що має консолі, є **консольною балкою** (рисунок 9.3, в). Балка на рисунку 9.3, г є **нерозрізною та статично невизначуваною**.

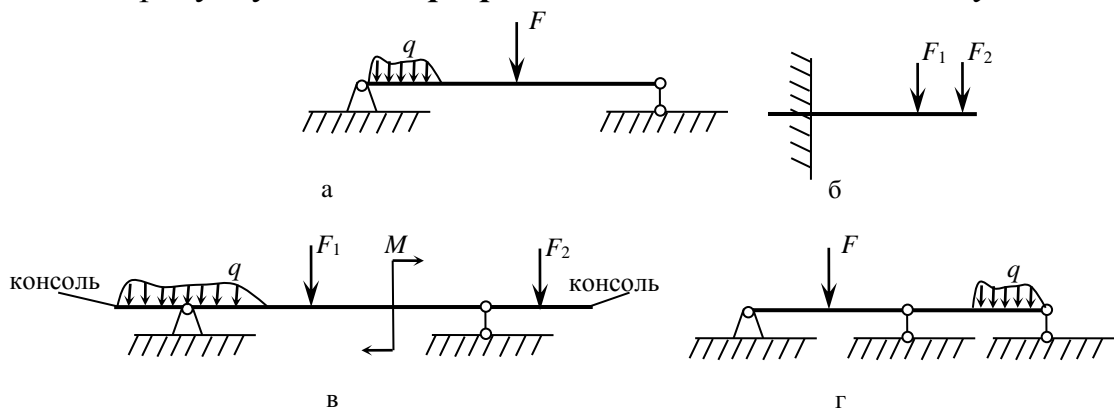


Рисунок 9.3 – Основні види балок

## 9.2 Внутрішні силові фактори. Поперечна сила та згинальний момент

Розглянемо просту балку  $AB$  (рисунок 9.4), на яку діють зосереджені сили  $P_1$  та  $P_2$ .

Для визначення внутрішніх зусиль скористаємося **методом перерізів**. Подумки розріжемо балку перерізом  $m-n$  на відстані  $x$  від лівого кінця та розглянемо рівновагу лівої її частини. Відкинувши зовнішні опори, замінимо їх реакціями лівої та правої опор – відповідно  $R_A$  та  $R_B$ . Для збереження рівноваги розглянутої частини дію відкинутої правої частини замінимо внутрішніми зусиллями: поперечною силою  $Q_y$  та згинальним моментом  $M_z$ .

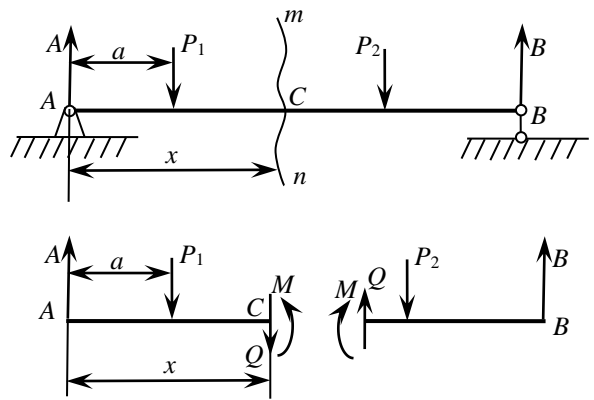


Рисунок 9.4 – Поперечна сила та згинальний момент

Складемо умови рівноваги лівої частини балки:

$$\sum F_y = 0: R_A - P_1 - Q_y = 0;$$

$$\sum M_c = 0: R_A \cdot x - P_1(x - a) - M_z = 0.$$

З рівнянь рівноваги отримаємо

$$Q_y = R_A - P_1;$$

$$M_z = R_A \cdot x - P_1(x - a).$$

Тут  $Q_y$  – головний вектор внутрішніх сил є **поперечною** або **перерізуючою силою** в перерізі та чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, прикладених до балки по одну сторону від перерізу.

$M_z$  – головний момент внутрішніх сил є **згинальним моментом** в перерізі, дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил, прикладених до балки по одну сторону від перерізу, відносно точки, що лежить в перерізі.

Оскільки балка знаходиться в рівновазі, то значення  $Q_y$  та  $M_z$  для лівої та правої частини балки однакові по модулю.

Встановимо наступне **правило знаків** для  $Q_y$  та  $M_z$  (рисунок 9.5):

1) поперечна сила  $Q_y$  в перерізі вважається позитивною, якщо її вектори прагнуть повернути частини розсіченої балки за годинниковою стрілкою, негативною – проти.

2) Згинальний момент  $M_z$  в перерізі вважається позитивним, якщо він згинає балку опуклістю вниз, а негативний – вгору.

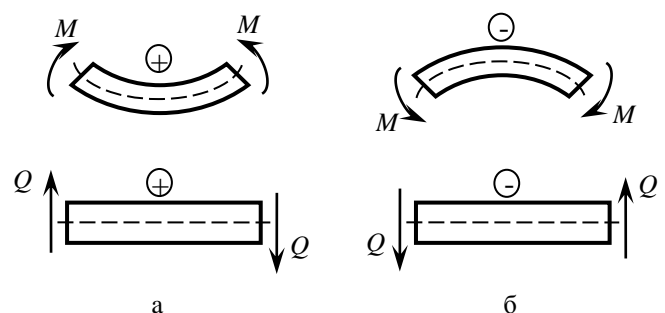


Рисунок 9.5 – Правило знаків при згині

### 9.3 Побудова епюр $Q$ та $M$

Розглянемо побудову епюр поперечних сил та згинальних моментів на кількох простих прикладах

**Приклад 1.** Жорстко затиснена балка довжиною  $l$  (консоль)

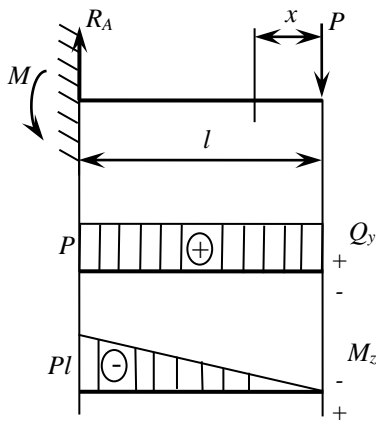


Рисунок 9.6 –  
Епюри  $Q_y$  та  $M_z$

знаходиться під дією сили  $P$ , прикладеної до її вільного кінця (рисунок 9.6).

Проводимо переріз на відстані  $x$  від вільного кінця та розглянемо рівновагу її вільної частини.

Отримаємо

$$Q_y = P; \quad \text{при } 0 \leq x \leq l.$$

$$M_z = -P \cdot x;$$

Тоді для  $x=0$   $Q_y = P$ ;  $M_z = 0$ ; а для  $x=l$   $Q_y = P$ ;  $M_z = -P \cdot l$ .

Будуємо епюри  $Q_y$  та  $M_z$  з урахуванням знаків. При цьому позитивні значення  $M_z$  відкладаємо вниз від осі епюри.

Приклад 2. Проста балка довжиною  $l$  навантажена посередині силою  $P$  (рисунок 9.7). Якщо до балки прикладено декілька зовнішніх сил, то її необхідно розбити на ділянки.

Межами ділянок є:

- 1) перерізи, в яких прикладено зосереджені зовнішні зусилля (в тому числі і опорні реакції);
- 2) перерізи, в яких прикладено зосереджені зовнішні моменти (в тому числі й опорні).

З умов рівноваги балки маємо  $R_A = R_B = \frac{P}{2}$ .

Дана балка має дві ділянки довжиною  $l/2$ . Номери ділянок позначимо римськими цифрами. У довільному перерізі кожної ділянки визначаємо значення поперечної сили та згинального моменту, складаючи умови рівноваги.

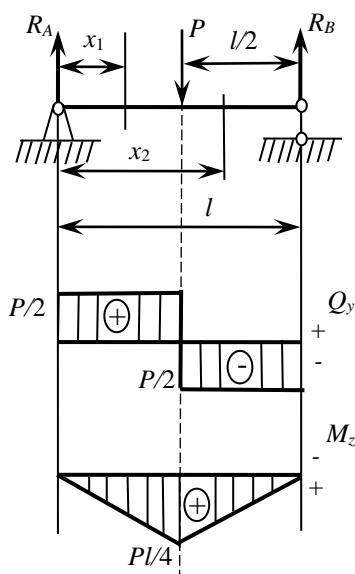


Рисунок 9.7 –  
Епюри  $Q_y$  та  $M_z$

I переріз: ( $0 \leq x < l/2$ ).

$$Q_y = R_A = \frac{P}{2}; \quad M_z = R_A \cdot x = \frac{P}{2} x;$$

II переріз: ( $l/2 \leq x \leq l$ ).

$$Q_y = R_A - P = -\frac{P}{2};$$

$$M_z = R_A \cdot x - P(x - \frac{l}{2}) = \frac{P}{2} l - \frac{P}{2} x;$$

Тоді для  $x=0$ ;  $M_z = 0$ . Для  $x = \frac{l}{2}$   $M_z = \frac{Pl}{4}$ .

Для  $x=l$   $M_z = 0$ .

Отримані результати показуємо на епюрах.

### 9.4 Диференціальні залежності Журавського при згині

Встановимо деякі характерні особливості епюр  $Q$  та  $M$ , знання яких полегшить побудову епюр та дасть можливість в деякій мірі контролювати їх правильність.

Розглянемо довільну балку, що згинається деякими силами (рисунок 9.8). Розподілене навантаження будемо вважати позитивним, якщо воно спрямоване вгору.

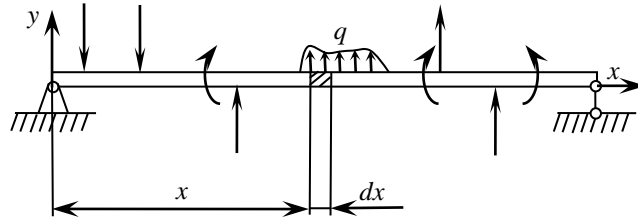


Рисунок 9.8 – Балка під довільним навантаженням

Двома поперечними перерізами, віддаленими один від одного на елементарну відстань  $dx$ , виділимо з балки елемент, до якого не прикладені зосереджені сили та моменти. Зліва в перерізі елемента діють внутрішні зусилля  $Q$  та  $M$ , а справа  $-Q + dQ$  та  $M + dM$ .

Для виведення формул внутрішні зусилля в перерізах зображують спрямованими позитивно (рисунок 9.9).

Величини  $dQ$  та  $dM$  – це збільшення внутрішніх зусиль на ділянці  $dx$  балки. Крім того, на елемент діє розподілене навантаження, перпендикулярне вісі балки, інтенсивність якого на ділянці  $dx$  можна вважати постійним через малість  $dx$ .

Рівняння рівноваги виділеного елемента мають вигляд:

$$\sum F_y = 0: Q + q \cdot x - (Q + dQ) = 0;$$

$$\sum M_c = 0: M + Q \cdot dx + q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - M - dM = 0.$$

З першого рівняння отримаємо

$$\frac{dQ}{dx} = q. \quad (9.1)$$

Із другого рівняння, нехтуючи складовими вищого порядку малості, маємо

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (9.2)$$

З (9.1) та (9.2)

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q. \quad (9.3)$$

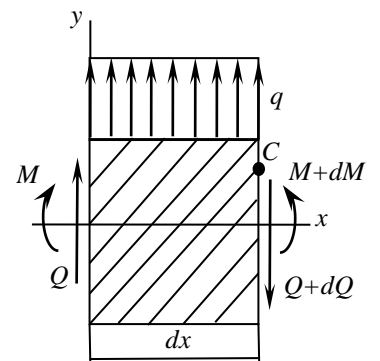


Рисунок 9.9 – Внутрішні зусилля

Співвідношення (9.1) – (9.3) є диференційними залежностями Журавського при згині.

**Приклад 3.** Балка на двох опорах згинається під рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю  $q$ .

Оскільки балка симетрична, із рівнянь рівноваги маємо

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

Розглянемо переріз I–I на відстані  $x$  від лівої опори.

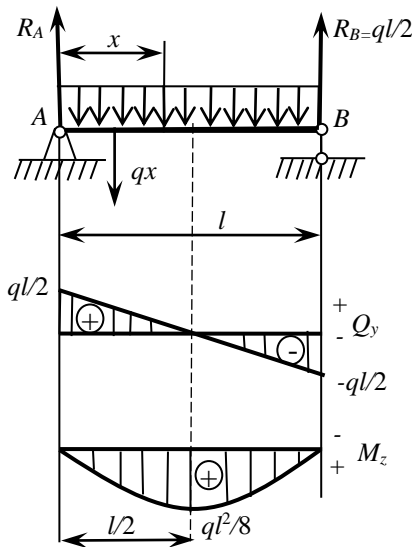


Рисунок 9.10 – Епюри  $Q_y$  та  $M_z$

Для ділянки зліва від перерізу складаємо рівняння рівноваги та отримуємо з них необхідні значення внутрішніх зусиль.

$$\begin{cases} Q = R_A - q \cdot x = \frac{ql}{2} - qx; \\ M = R_A \cdot x - q \cdot x \frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \end{cases}; \quad \text{при } 0 \leq x \leq l.$$

Тоді

$$Q(0) = \frac{ql}{2}; \quad M(0) = 0;$$

$$Q(l/2) = 0; \quad M(l/2) = \frac{ql^2}{8};$$

$$Q(l) = -\frac{ql}{2}; \quad M(l) = 0.$$

При побудові епюри згинального моменту необхідно враховувати диференційні залежності Журавського.

### 9.5 Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте визначення виду деформації, що називають згином.
2. Поясніть, що називається чистим та поперечним згином.
3. Назвіть внутрішні зусилля, що виникають у поперечних перерізах бруса в загальному випадку дії на нього плоскої системи сил.
4. Назвіть правила знаків прийняті для поперечних сил та згинальних моментів.
5. Роз'ясніть, чому дорівнює згинальний момент в поперечному перерізі балки.
6. Поясніть, як обчислюється поперечна сила в поперечному перерізі балки.
7. Назвіть типи опор, що застосовуються для закріплення балок до основи.
8. Поясніть, які рівняння використовуються для визначення величин опорних реакцій балки.
9. Роз'ясніть, як перевірити правильність визначення опорних реакцій.

10. Сформулюйте диференціальну залежність, що існує між поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження, перпендикулярного до осі балки.

11. Сформулюйте диференціальну залежність між поперечною силою та згинальним моментом в поперечному перерізі балки.

12. Сформулюйте сутність епюри поперечних сил та згинальних моментів. Що означає кожна ордината цих епюр.

13. Поясніть, чому при побудові епюр  $Q$  та  $M$  для балки, затисненої одним кінцем, можна не визначати опорні реакції.

14. Роз'ясніть, як змінюється поперечна сила в перерізі, в якому до балки прикладена зовнішня зосереджена сила, перпендикулярна до осі балки.

15. Поясніть, чому дорівнює поперечна сила в перерізах балки, в яких згинальний момент досягає екстремальних значень.

16. Роз'ясніть, як змінюється згинальний момент в перерізі, в якому до балки прикладений зосереджений зовнішній момент.

17. Опишіть, який вигляд мають епюри  $Q$  та  $M$  для балки, затисненої одним кінцем,

а) від зосередженої сили, перпендикулярної до осі балки, яка прикладається до її вільного кінця;

б) від зосередженого моменту, прикладеного до вільного кінця балки;

в) від рівномірно розподіленого навантаження, перпендикулярного до осі балки, що діє по всій її довжині.

## Лекція 10. Нормальні напруження при плоскому згині прямого стрижня

У лекції розглянуто вид деформації балки, що є чистим згином.

Проаналізовано зміну кривизни однорідного стрижня під дією тільки згинальних моментів.

Введено поняття нейтрального шару та нейтральної лінії.

Викладено умову міцності при згині за нормальними напруженнями.

Спираючись на матеріал лекції, довідкову та науково-технічну літературу студент повинен уміти:

- давати визначення чистого згину балки;
- пояснювати сутність нейтрального шару та нейтральної лінії балки;
- обчислювати кривизну нейтрального шару балки при чистому згині;
- формулювати визначення жорсткості перерізу балки при згині;
- пояснювати сутність моменту опору при згині.

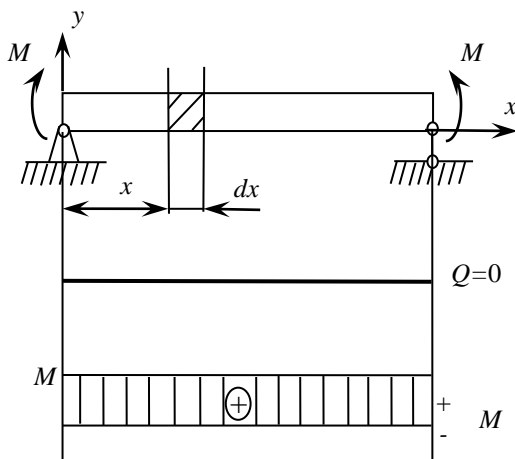


Рисунок 10.1 – Чистий згин балки

Прямокутна сітка, нанесена на балку у випадку чистого згину, деформується наступним чином:

- 1) поздовжні лінії та вісь балки приймають форму дуг кіл,
- 2) поперечні лінії та поперечні перерізи залишаються плоскими і всюди перетинаються з поздовжніми лініями під прямим кутом (гіпотеза плоских перерізів Бернуллі).

Чистий згин балки характеризується ще й тим, що її поздовжні волокна на опуклій стороні розтягуються, а на увігнутій – стискаються.

Тоді очевидно, що існує деякий шар, в якому подовження відсутнє. Цей шар називається **нейтральним шаром**.

Розглянемо найпростіший випадок згину – **чистий згин** (рисунок 10.1), при якому в поперечних перерізах балки діє тільки згинальний момент.

Визначимо закон зміни напружень в поперечному перерізі та знайдемо значення максимальних напружень.

Через те, що в кожному перерізі балки при чистому згині діє однаковий згинальний момент, то зміна кривизни однорідного стрижня буде однакою. Це можна легко побачити, якщо на бічну поверхню балки нанести сітку поздовжніх і поперечних прямих ліній (рисунок 10.2).

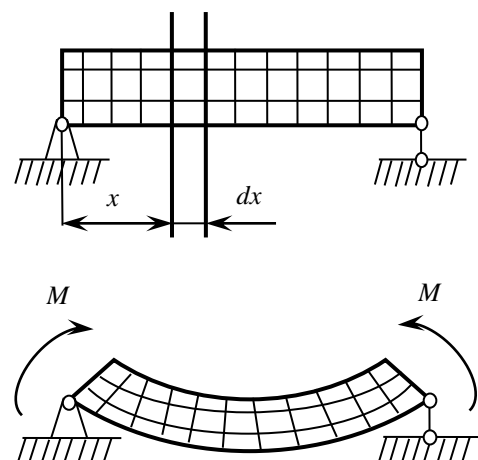


Рисунок 10.2 – Деформації чистого згину



Лінія перетину цього шару з площиною поперечного перерізу називається **нейтральною лінією** (н.л.).

Розглянемо поперечний переріз балки в умовах чистого згину. Для простоти припустимо, що балка має постійний поперечний переріз і площину симетрії, що збігається з площиною дії зовнішніх сил. Початок координатної системи помістимо в точку перетину нейтральної лінії з площиною симетрії. Положення нейтральної лінії заздалегідь не відомо. Оскільки поздовжні волокна балки знаходяться в розтягнутому або стисненому стані, то в її поперечних перерізах діють тільки нормальні напруження  $\sigma_x$ .

Розглянемо елемент балки, розташований між двома суміжними перетинами (рисунок 10.1) на відстані  $dx$  (рисунок 10.3, а).

Домовимося, що лівий переріз нерухомий.

Після деформації між площинами перерізів утворюється кут  $d\varphi$ , та елемент має вигляд (рисунок 10.3, б).

Нейтральний шар позначимо відрізком  $DC$ , радіус кривизни цього шару позначимо  $\rho$  (рисунок 10.3, б).

Оскільки  $dx = \rho \cdot d\varphi$ , то кривизна нейтрального шару

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx}.$$

Довільно взятий відрізок  $AB = dx$  (рисунки 10.3, а-б), віддалений від нейтрального шару на відстань  $y$ , набув подовження  $BB_1 = A_1B_1 - AB$  (абсолютна деформація). Через те, що перерізи залишаються плоскими, то

$$BB_1 = y \cdot d\varphi.$$

Відносне подовження волокна тоді дорівнює

$$\varepsilon_x = \frac{BB_1}{AB} = \frac{y \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (10.1)$$

Якщо прийняти, що поздовжні волокна не тиснуть одне на одне, то кожне

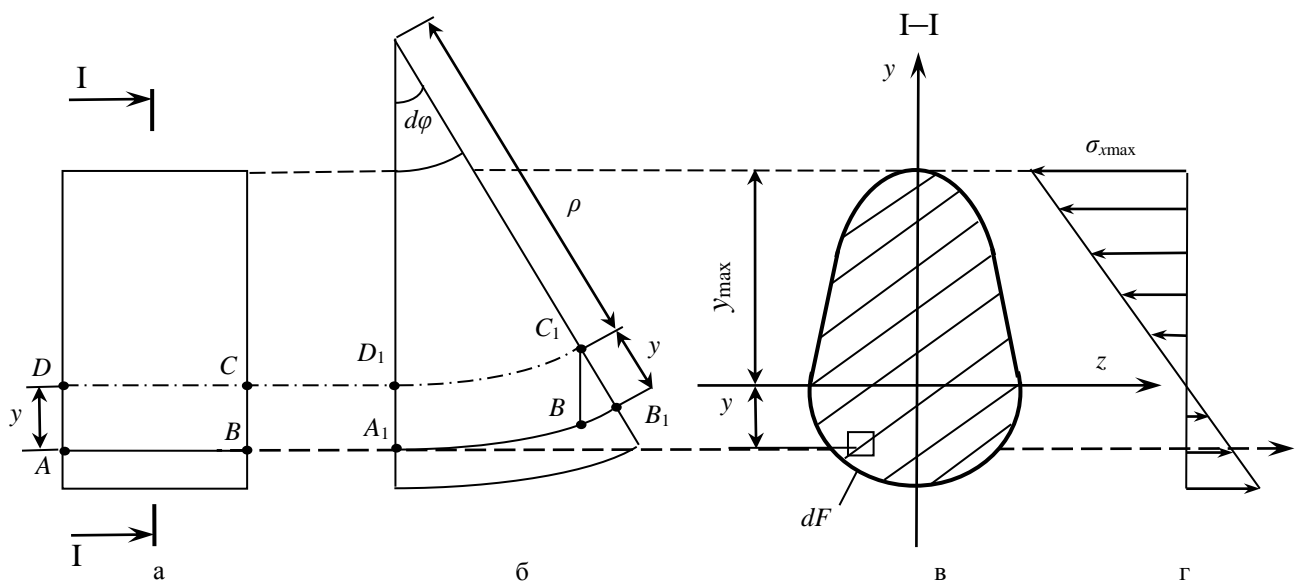


Рисунок 10.3 – Деформації елемента балки

з них буде перебувати в умовах розтягу (стискання). У цьому випадку для визначення напружень можна скористатися законом Гука:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{E y}{\rho}. \quad (10.2)$$

Таким чином, з гіпотези плоских перерізів витікає, що деформації поздовжніх волокон балки і напруження в них лінійно залежать від їхньої відстані до нейтрального шару.

Визначимо положення нейтрального шару, виходячи з того, що поздовжня сила в ньому дорівнює нулю (див. епюру  $N$  на рисунку 10.1). Виділимо елементарну площадку  $dF$  в перерізі (рисунок 10.3, в). Елементарна поздовжня сила на ній дорівнює  $dN = \sigma \cdot dF$ . Тоді поздовжня сила в перерізі

$$N = \int_F \sigma_x \cdot dF = \int_F \frac{E y}{\rho} dF = \frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0.$$

Через те, що відношення  $E/\rho$  не дорівнює нулю і не залежить від змінної інтегрування, то виносячи його за знак інтеграла та скорочуючи, отримаємо

$$\int_F y dF = 0.$$

Цей інтеграл є статичним моментом перерізу балки і він дорівнює нулю:

$$\int_F y dF = S_z = 0.$$

Отже, нейтральна вісь при чистому згині прямої балки проходить через центр ваги перерізу (згідно з властивістю статичного моменту).

Величину кривизни нейтрального шару  $\frac{1}{\rho}$  визначимо з тієї умови, що сума моментів внутрішніх зусиль в поперечному перерізі балки приводиться до згинального моменту.

Із рисунка 10.4 видно, що момент внутрішніх зусиль відносно нейтральної осі дорівнює

$$M_z = \int_F \sigma_x y dF = \int_F \frac{E}{\rho} y^2 dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF. \quad (10.3)$$

З урахуванням того, що інтеграл у виразі (10.3) є осевим моментом інерції перерізу відносно нейтральної осі, співвідношення (10.3) набуває вигляду

$$M_z = \frac{E \cdot I_z}{\rho}, \quad (10.4)$$

звідки кривизна нейтрального шару дорівнюватиме:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}. \quad (10.5)$$

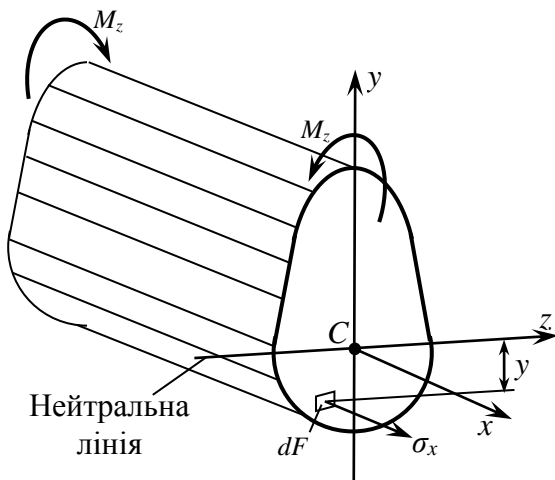


Рисунок 10.4 – Положення нейтральної лінії балки

З рівняння (10.4) видно, що момент інерції  $I_z$  характеризує здатність балки чинити опір викривленню в залежності від розмірів та форми її поперечного перерізу. Чим більше буде значення  $I_z$  при заданій величині  $M_z$ , тим більшим буде радіус кривизни  $\rho$  нейтрального шару балки, тобто, тим менше викривиться балка.

Величина  $E$  характеризує здатність балки чинити опір викривленню в залежності від її матеріалу.

Добуток  $E \cdot I_z$  називають **жорсткістю перерізу при згині**.

Підставляючи  $1/\rho$  з виразу (10.5) у (10.2), остаточно маємо

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y. \quad (10.6)$$

Це і є необхідна формула, що дає можливість обчислити нормальні напруження при чистому згині балки в будь-якій точці її поперечного перерізу.

**Епюра** розподілу **нормальних напружень** по перерізу балки показана на рисунку 10.3, г.

**Властивості епюри  $\sigma$**  :

1) загальний вигляд епюри нормальних напружень при згині не залежить від форми поперечного перерізу балки,

2) нормальні напруження  $\sigma$  дорівнюють нулю у нейтральному шарі балки (при  $y = 0$ ),

3) найбільші нормальні напруження при згині виникають в точках, найбільш віддалених від нейтральної лінії (на поверхні балки) та дорівнюють

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_{\max} = \frac{M_z}{W_z}, \quad (10.7)$$

де  $W_z$  – осьовий момент опору перерізу балки при згині.

**Умова міцності** при згині за нормальними напруженнями з (10.7) буде мати вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z \max}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (10.8)$$

При проектуванні елементів конструкцій, що працюють на згин, міцний поперечний переріз балки підбирають, виходячи з умови міцності (10.8):

$$W_z \geq \frac{M_{z \max}}{[\sigma]}. \quad (10.9)$$

Внутрішні шари балки, особливо поблизу нейтральної лінії, мало напружені. Тому при проектуванні балок, що працюють на згин, вважають за краще використання таких перерізів, у яких буде найбільший момент інерції відносно нейтрального шару. Для цього розподіляють площу поперечного перерізу якнайдалі від нейтральної осі. В ідеальному варіанті це дві смуги, рознесені на найбільшу відстань одна від одної та від нейтрального шару.

На рисунку 10.5 показані приклади економічних стандартних профілів перерізів сталевих прокатних балок, що випускаються металургійними підприємствами для потреб промисловості та будівництва.

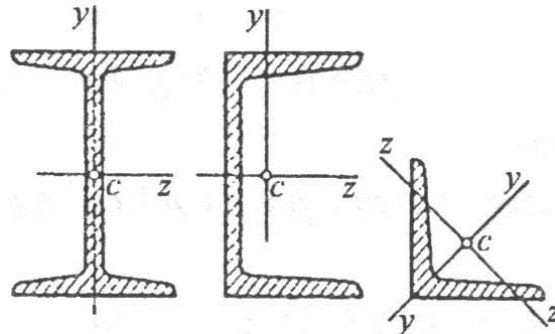


Рисунок 10.5 – Перерізи стандартних профілів  
(зліва направо: двотавр, швелер, кутик)

Слід зазначити, що критерієм, за яким оцінюють якість профілю, можна прийняти відношення  $W/F$  ( $F$  – площа поперечного перерізу балки), оскільки, чим більше цей показник, тим більший згинальний момент зможе витримати переріз із заданою площею (тобто із заданою вагою балки), і тим менше матеріалу піде на виготовлення балки, що витримує заданий згинальний момент.

### 10.1 Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення чистого згину балки.
2. Сформулюйте гіпотезу плоских перерізів.
3. Сформулюйте сутність нейтрального шару та нейтральної лінії балки та поясніть, як вони розташовані.
4. Поясніть, чому дорівнює кривизна нейтрального шару балки при чистому згині.
5. Роз'ясніть, як визначаються нормальні напруження в поперечному перерізі балки при чистому згині та як вони змінюються по висоті балки.
6. Сформулюйте визначення жорсткості перерізу балки при згині.
7. Дайте визначення моменту опору при згині та назвіть його розмірність.
8. Поясніть, як обчислити нормальні напруження в перерізах балки при згині.
9. Опишіть, який вигляд мають епюри нормальних напружень та назвіть їхні властивості.

## Лекція 11. Дотичні напруження при поперечному згині

У лекції наведено визначення дотичних напружень при згині.

Представлено приклади побудови еюр дотичних напружень.

Викладено умови міцності при згині за дотичними напруженнями та перевірка міцності за ними.

Спираючись на матеріал лекції, довідкову та науково-технічну літературу студент повинен уміти:

- визначати дотичні напруження в поперечних перерізах при прямому поперечному згині;
- виводити формулу Журавського, використовуючи закон парності дотичних напружень при поперечному згині;
- аналізувати еюри дотичних напружень в поперечних перерізах різної форми;
- формулювати властивості еюр дотичних напружень;
- виконувати перевірку міцності балки за дотичними напруженнями.

При поперечному згині, коли в перерізах балки діють  $Q$  та  $M$ , виникають не тільки нормальні напруження  $\sigma$ , але і дотичні напруження  $\tau$ .

### 11.1 Визначення дотичних напружень

Отримаємо формулу для визначення дотичних напружень  $\tau$  в найпростішому випадку поперечного згину балки.

Розглянемо балку, навантажену в довільному місці зосередженою силою  $P$  (рисунок 11.1).

Скористаємося методом перерізів. Проведемо на деякій відстані  $x$  від лівого кінця балки два близько розташованих перерізи I–I та II–II, віддалені один від одного на  $dx$ . Як видно з еюр (рисунок 11.1), в обох перерізах  $Q$  та  $M$  позитивні.

Причому, в лівому перерізі діє згинальний момент  $M_z = R_A \cdot x$ , а в правому –  $M_z + dM_z = R_A(x + dx)$ .

Крім того, в обох перерізах діє однакова поперечна сила  $Q = R_A$ .

Виділимо з балки елемент довжиною  $dx$ , обмежений перерізами I–I та II–II, а також перерізом  $a-b$ , паралельним нейтральному шару та віддаленим від нього на відстань  $y_0$  (рисунок 11.2, а). Розглянемо умови рівноваги елемента.

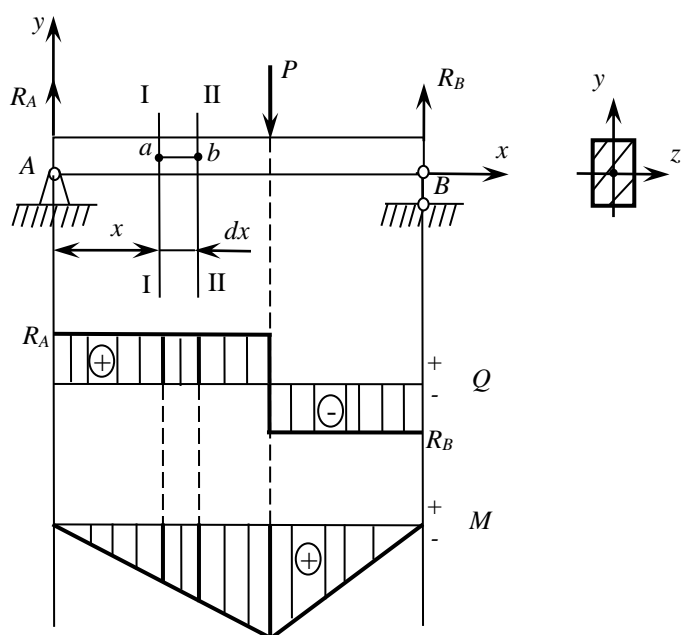


Рисунок 11.1 – Еюри  $Q$  та  $M$

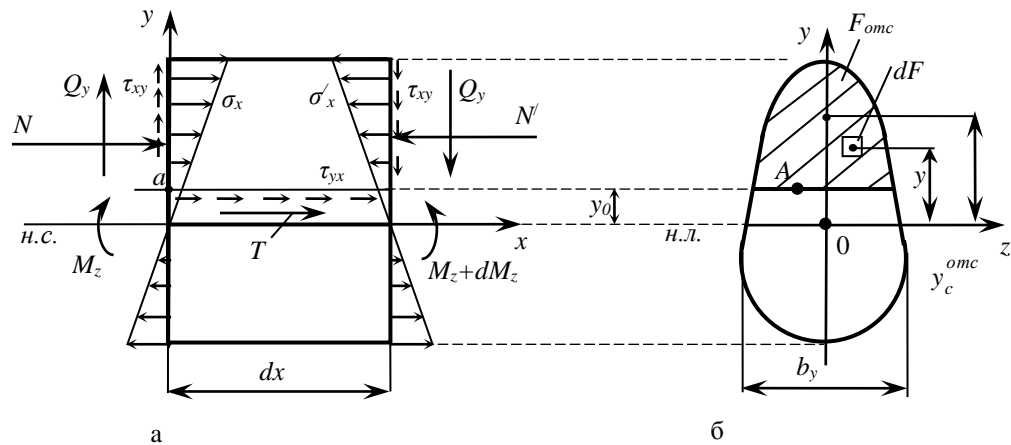


Рисунок 11.2 – Напруження при поперечному згині балки

На лівій його грані від дії зовнішнього навантаження виникають нормальні напруження

$$\sigma_x = \frac{M_z \cdot y}{I_z},$$

по правій грані діють нормальні напруження

$$\sigma'_x = \frac{(M_z + dM_z) y}{I_z} = \sigma_x + d\sigma.$$

З цих рівнянь маємо

$$d\sigma = \frac{dM_z \cdot y}{I_z}.$$

Крім того, вздовж цих бічних поверхонь діють також дотичні напруження  $\tau_{xy}$ . Вважаємо, що ці вертикальні напруження не змінюються по ширині перерізу. Їх напрямок збігається з напрямком поперечної сили  $Q_y$  в перерізі. По нижній основі елемента (в перерізі  $a-b$ ) діють дотичні напруження  $\tau_{yx}$ , існування яких обумовлене законом парності дотичних напружень та підтверджується досвідом.

Умова рівноваги виділеного елемента (рисунок 11.2, а) має вигляд

$$\sum F_x = N - N' + T = 0. \quad (11.1)$$

Тут  $N = \int_{F_{omc}} \sigma_x dF$  та  $N' = \int_{F_{omc}} \sigma'_x dF = N + dN$  – рівнодіючі нормальних напружень, що діють відповідно по лівій та правій гранях елемента,

$T = \tau_{yx} b_y dx$  – рівнодіюча дотичних напружень, що діють по нижній грані (рисунок 11.3),

$F_{omc}$  – площа бічної грані виділеного елемента (рисунок 11.2, б),

$b_y$  – ширина нижньої грані елемента.

Величина

$$dN = \int_{F_{omc}} d\sigma \cdot dF = \int_{F_{omc}} \frac{dM_z y}{I_z} dF.$$

Оскільки  $dM_z$  та  $I_z$  – величини постійні, то, виносячи їх за знак інтегрування, отримуємо

$$dN = \frac{dM_z}{I_z} \int_{F_{omc}} y dF = \frac{dM_z}{I_z} S_z^{omc}, \quad (11.2)$$

де  $S_z^{omc} = \int_{F_{omc}} y dF$  – статичний момент

поперечного перерізу виділеного елемента, розташованого вище ординати  $y_0$  від нейтрального шару балки відносно вісі  $z$  (рисунок 11.2, б).

Підставляючи значення  $N, N'$  та  $T$  в рівняння рівноваги (11.1), отримаємо

$$\int_{F_{omc}} \sigma_x dF - \int_{F_{omc}} \sigma'_x dF + \tau_{yx} b_y dx = 0,$$

Звідки, враховуючи, що для даного перерізу  $M_z$  та  $I_z$  – величини постійні та підставляючи (11.2) в отримане рівняння, маємо

$$-\frac{dM_z}{I_z} S_z^{omc} + \tau_{yx} b_y dx = 0.$$

Виконуючи необхідні перетворення, отримаємо

$$\tau_{yx} = \tau = \frac{dM_z}{dx} \cdot \frac{S_z^{omc}}{I_z b_y}.$$

Оскільки з диференціальних залежностей Журавського похідна  $\frac{dM_z}{dx} = Q_y$ , то остаточно маємо

$$\tau = \frac{Q_y S_z^{omc}}{I_z b_y}. \quad (11.3)$$

Отримана формула носить назву **формули Журавського** та справедлива для балок, що зазнають деформацію поперечного згину, у яких висота перерізу більше його ширини.

Для елемента балки (рисунок 11.2) при визначенні дотичних напружень, наприклад, в точці А поперечного перерізу в формулу (11.3) необхідно підставити:

$Q_y$  – значення поперечної сили, що діє в цьому перерізі балки (з епюри  $Q$ ),

$S_z^{omc}$  – статичний момент заштрихованої частини перерізу відносно нейтральної вісі  $z$ ,

$I_z$  – момент інерції всього перерізу відносно тієї ж вісі,

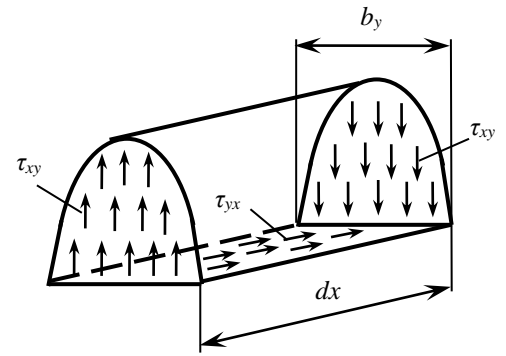


Рисунок 11.3 – Дія дотичних напружень

$b_y$  – ширина перерізу на рівні точки  $A$ , в якій визначають напруження.

Як відомо, статичний момент  $S_z^{omc}$  можна визначити, знаючи площу заштрихованої частини перерізу та положення її центра ваги  $y_c^{omc}$  (рисунок 11.2, б) відносно нейтральної вісі  $z$ :

$$S_z^{omc} = F_{omc} \cdot y_c^{omc}.$$

### 11.2 Побудова епюри дотичних напружень

Для прямокутного перерізу (рисунок 11.4) маємо

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$S_z^{omc} = b \left( \frac{h}{2} - y_0 \right) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y_0 \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_0^2 \right)$$

Підставляємо це в формулу Журавського та, враховуючи, що ширина

перерізу незмінна  $b_y = b$ ,

а координата центра ваги заштрихованої частини

$y_c = \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y_0 \right)$ , отримаємо:

$$\tau = \frac{Qb \left( \frac{h^2}{4} - y_0^2 \right)}{2b} \cdot \frac{12}{bh^3} = \frac{6Q \left( \frac{h^2}{4} - y_0^2 \right)}{bh^3}$$

Як видно з цього рівняння, дотичні напруження по поперечному перерізу змінюються згідно із законом квадратної параболі,

причому, на верхній та нижній поверхнях балки ( $y_0 = h$ ) дорівнюють нулю, а в нейтральному шарі ( $y_0 = 0$ ) – досягають максимуму.

$$\tau_{\max} = \frac{6Qh^2}{4bh^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F}$$

Для двотаврового перерізу епюра дотичних напружень має дещо інший вигляд.

При визначенні дотичних напружень форма поперечного перерізу двотавру спрощується (схематизується) (рисунок 11.5).

Для побудови епюри  $\tau$  визначимо значення цього напруження в трьох точках (1...3) верхньої половини перерізу (для нижньої половини значення  $\tau$  будуть аналогічними). Точки 2 та 3 розташовані нескінченно близько одна до одної, але точка 2 належить полиці, а точка 3 – стійці перерізу.

$$\tau_1 = \frac{Q \cdot F_{omc} y_c^{omc}}{I_z b_y} = \frac{Q}{I_z b_y} \cdot 0 = 0,$$

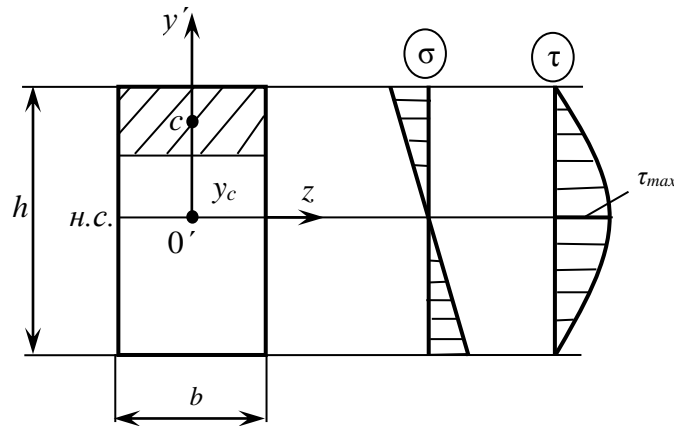


Рисунок 11.4 – Епюри  $\sigma$  і  $\tau$  прямокутної балки



$$\tau_2 = \frac{Q \cdot b \cdot t \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)}{I_z \cdot b}, \quad \tau_3 = \frac{Q \cdot c \cdot t \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)}{I_z \cdot d}.$$

Оскільки  $b \gg d$ , дотичні напруження  $\tau_3 \gg \tau_2$  відповідно.

Загальний вигляд епюр нормальних та дотичних напружень наведено на рисунку 11.5.

**Властивості епюр  $\tau$**  дотичних напружень:

- 1) вигляд епюри  $\tau$  залежить від форми поперечного перерізу балки,
- 2) дотичні напруження  $\tau$  дорівнюють нулю в крайніх найбільш віддалених від нейтральної лінії точках перерізу,
- 3) найбільші дотичні напруження при згині виникають в нейтральному шарі балки,
- 4) на епюрі дотичних напружень є стрибки в тих місцях, де відбувається різка зміна розмірів поперечного перерізу балки.

### 11.3 Перевірка міцності балки за дотичними напруженнями

У розрахунках балки на міцність при згині часто буває недостатнім розрахунку тільки за нормальними напруженнями.

Для балок, поперечні перерізи яких мають тонкі стінки, перпендикулярні нейтральній осі перерізу (двотавровий, коробчастий, кільцевий переріз), може виникнути ситуація, коли і нормальні, і дотичні напруження одночасно приймають близькі між собою небезпечні величини.

Тоді необхідно перевірити підібрані раніше розміри балки (за нормальними напруженнями) **умовою міцності за дотичними напруженнями**:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z^{omc}}{I_z b_y} \leq [\tau]. \quad (11.4)$$

З цієї умови міцності виконують додатковий підбір та перевірку розмірів поперечного перерізу балки, отриманих за нормальними напруженнями.

### 11.4 Завдання для самоконтролю

1. Назвіть формулу, за якою визначаються дотичні напруження в поперечних перерізах при прямому поперечному згині.

2. Роз'ясніть, як використовується при виведенні

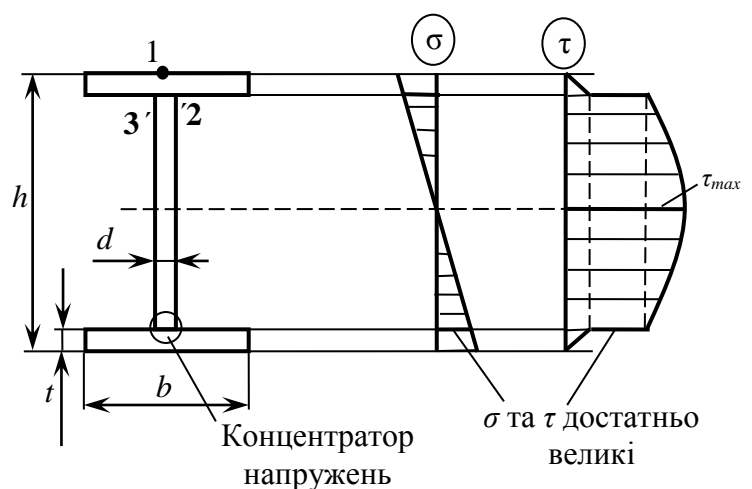


Рисунок 11.5 – Епюри  $\sigma$  і  $\tau$  двотаврової балки

формули Журавського закон парності дотичних напружень при поперечному згині.

3. Опишіть, який вигляд має епюра дотичних напружень в поперечних перерізах прямокутної балки.

4. Поясніть, чим відрізняється епюра дотичних напружень в поперечних перерізах двотаврової балки від відповідної епюри для прямокутної балки.

5. Сформулюйте властивості епюр дотичних напружень.

6. Поясніть, як проводиться перевірка міцності балки за дотичними напруженнями. В яких випадках ця перевірка необхідна.

## Рекомендована література

1. Писаренко Г.С. Опір матеріалів: Підручник / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський; За ред. Г.С. Писаренка. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.: іл. – ISBN 966-642-056-2
2. Александров А. В. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; Под ред. А.В. Александрова. – 3-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2003. – 560 с.: ил. – ISBN 5-06-003732-0
3. Дарков А.В. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро – 5-е изд., перераб. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с. ил. – ISBN 5-06-000491-0
4. Беляев Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев – 15-е изд., перераб. – М.: Наука, 1976. – 608 с.: ил.
5. Сопротивление материалов / Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Высш. шк., 1975. – 480 с.
6. Сборник задач по сопротивлению материалов [Текст] : [Для вузов] / Под ред. В.К. Качурина. – 2-е изд., испр. – Москва : Наука, 1972. – 429 с.
7. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / В.И. Феодосьев. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1999. – 592 с. (Сер. Механика в техническом университете; Т.2). – ISBN 5-7038-1340-9 (Т.2)
8. Гастев В.А. Краткий курс сопротивления материалов: Учебник / В.А. Гастев – 2-е изд., перераб. – М.: гл. ред. физ.-мат. лит. изд. Наука, 1977. – 456 с.: ил.
9. Степин П.А. Сопротивление материалов / П.А. Степин – 9-е изд., испр. – Учебник для машиностроительных специальностей вузов. – М.: Интеграл-Пресс, 1997. – 320 с.: ил. – ISBN 5-89602-005-8