

© О.М. Долгов<sup>1</sup>, І.М. Долгова<sup>2</sup>, Д.Л. Колосов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», Дніпро, Україна

<sup>2</sup> Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, Дніпро, Україна

## КІНЕТИКА ТРІЩИНИ В ІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНІ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

© O. Dolgov<sup>1</sup>, I. Dolgova<sup>2</sup>, D. Kolosov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dnipro University of Technology, Dnipro, Ukraine

<sup>2</sup> Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture, Dnipro, Ukraine

## CRACK KINETICS IN AN ISOTROPIC PLATE OF VARIABLE THICKNESS

**Мета.** Дослідження впливу змінності товщини пластини з тріщиною на кінетику крихкого руйнування.

**Методика досліджень.** Ізотропна пластина з тріщиною моделюється однорідною подвійною консольною балкою, що розщеплюється силами, прикладеними на її кінцях. Як критерій руйнування використовується теорія Гріффітса. За допомогою заміни змінних рівняння енергетичного балансу тріщини, що рухається, представлено у вигляді елементарної катастрофи типу «ластівчин хвіст». У разі нерухомої тріщини досліджується канонічна катастрофа складки. Подальше вивчення кінетики руйнування проводиться з використанням елементарної теорії катастроф. Для окремого випадку постійної товщини пластини або кристалу отримані висновки зіставляються з відомими результатами інших авторів.

**Результати досліджень.** В рамках лінійної теорії крихкого руйнування отримано рівняння енергетичного балансу Гріффітса для однорідної ізотропної балки лінійно-змінної товщини з тріщиною в серединній поверхні, з урахуванням кінетичної енергії руху її берегів в напрямку, перпендикулярному фронту тріщини. Дана оцінка впливу зміни товщини балки на значення критичної довжини квазістатичної і нестійкої тріщини. Отримана залежність початкової довжини динамічної тріщини від зміни товщини подвійної консольної балки.

**Наукова новизна** полягає у встановленні та аналізі залежностей критичних параметрів крихких стаціонарних і динамічних тріщин в пластині змінної жорсткості (товщини), що моделюється подвійною консольною балкою. Отримано нові результати, що ґрунтуються на аналітичних залежностях, придатних для практичного використання.

**Практичне значення.** Отримані результати можуть використовуватися для оцінки міцності елементів реальних конструкцій та їх безпечної експлуатації за умови квазістатичних навантажень. Відносно прості кінцеві формули для визначення критичних довжин тріщин можуть бути в пригоді для аналізу характеристик тріщиностійкості, визначених експериментально на зразках змінного перерізу.

**Ключові слова:** крихке руйнування, тріщина, стійкість, критерій Гріффітса, теорія Мотта, подвійна консольна балка, змінна товщина, теорія катастроф.

**Вступ.** Розрахунки міцності деталей, елементів конструкцій і споруд в більшості випадків, в тому числі – у гірництві, проводяться у припущенні, що вони позбавлені тріщин або подібних їм дефектів. При цьому властивості матеріалів тотожні властивостям, визначеним стандартними методами. У той же час нерідкі випадки, особливо для конструкцій складного обрису, коли в процесі виготовлення або експлуатації виникають дефекти у вигляді тріщин. У всіх цих випадках

виникає необхідність провести розрахунки міцності або стійкості з метою відповіді на питання, на які традиційні дослідження не в змозі їх дати з достатнім ступенем точності. Однією з таких проблем є визначення критичних, тобто руйнуючих розмірів стаціонарних і динамічних тріщин. Означеним питанням присвячена велика кількість досліджень, як експериментального [1,2], так і суто теоретичного характеру [3-5]. При цьому використовуються різні розрахункові схеми, аналітичні і чисельні методи аналізу з використанням сучасних прикладних комп'ютерних програм. В той же час, багато питань потребують подальшого аналізу і вирішення.

**Актуальність і цілі досліджень.** Однією з часто використовуваною моделлю, особливо при експериментальному визначенні параметрів тріщиностійкості, є схема подвійної консольної балки (ПКБ). Метод дослідження, що ґрунтується на моделі ПКБ, спочатку був розроблений для експериментальної оцінки адгезійних властивостей при руйнуванні відриву. При цьому використовувались зразки як з паралельними кромками, так і змінного перерізу. У теоретичних дослідженнях останніх років, присвячених визначенню розмірів докритичних і нестійких тріщин, розглядаються ПКБ постійної жорсткості (постійного перерізу) [3,5-7]. *Актуальними залишаються відповідні дослідження для ПКБ змінної товщини з тріщиною*, модель якої може використовуватись для опису поведінки реальних конструкцій і експериментального визначення параметрів тріщиностійкості.

Цілями дослідження є визначення критичних довжин стійких (квазістатичних) і нестійких тріщин у пластинах лінійно-змінної товщини, що моделюються подвійною консольною балкою.

**Основний зміст роботи.** Розглянемо нескінченно довгу однорідну ізотропну пластину лінійно-змінної товщини, що має тріщину в серединній площині (Рис. 1). Товщина пластини  $2h$  вважається лінійно змінною і малою в порівнянні з ефективною довжиною тріщини  $l$ . Для визначення довжини тріщини як функції сил  $F$  або прогину (розкриття тріщини)  $2\delta$  розглядаються дві однакові половини, на котрі пластину розчіплюється, як балки, що згинаються під дією сил прикладених до їх вільних кінців (ПКБ-модель).

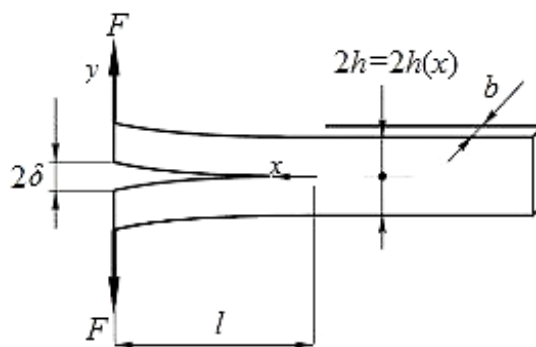


Рис. 1. Розрахункова схема моделі ПКБ

Згинаючий момент дорівнює  $M(x) = F(l - x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ . Тоді пружна енергія деформації кожної балки виражається наступним чином

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M^2(x)}{I(x)} dx, \quad (1)$$

де  $E$  – модуль пружності,  $I(x) = bh^3(x)/12$ .

Нехай товщина балки змінюється за законом  $h = h_0 \left[ \frac{(1-k)x}{l} + k \right]$ ,

$k = \text{const} > 0$ .

З (1) маємо

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{F^2(l-x)^2}{I(x)} dx = \frac{F^2 l^3}{2EI_0} \int_0^l \frac{(l-x)^2}{\left[ (1-k)x + kl \right]} dx, \quad (2)$$

де  $I_0 = \frac{bh_0^3}{12}$ .

Після інтегрування у формулі (2) отримуємо

$$U = \frac{F^2 l^3}{2EI_0} f(k), \quad \text{де } f(k) = \frac{1}{(1-k)^3} \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{2k^2} - \frac{2}{k} - \ln|k| \right). \quad (3)$$

При  $k = 1$ , тобто для балки постійної товщини, після розкриття невизначеності, маємо  $f(k) = 1/3$  і добре звісну формулу для пружної енергії консольної балки, навантаженої на її кінці зосередженою силою  $U = \frac{F^2 l^3}{6EI_0}$ .

Прогин краю пластини (кінця балки при  $x = l$ ) визначається за теоремою Кастиліано з (3)

$$\delta = y_0 = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{Fl^3}{EI_0} f(k). \quad (4)$$

В окремому випадку балки постійної товщини ( $k = 1$ ,  $f(k) = 1/3$ ), з (4) випливає  $\delta = \frac{Fl^3}{3EI_0}$ .

Поверхнева енергія  $S$  одного боку тріщини визначається добутком питомої поверхневої енергії  $\gamma$  і площею поверхні що відкривається

$$S = \gamma bl. \quad (5)$$

При русі тріщини зі швидкістю  $V$ , згідно з теорією Мотта [6], балка здобуває також кінетичну енергію внаслідок розповсюдження тріщини і руху її берегів у напрямку, перпендикулярному фронту тріщини зі швидкістю  $U$ . Визначимо її для лінійно-змінної товщини балки.

Очевидно, що для елементарної ділянки ПКБ  $dT = \frac{1}{2} dm V_y^2$ , де  $dm = \rho b h(x) dx$  - елементарна маса,  $\rho$  - щільність матеріалу.

Швидкість берегів тріщини дорівнює:  $V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{dt} = V \frac{\partial y}{\partial x}$ , де  $V$ - швидкість руху тріщини в напрямку  $x$ . Тоді

$$T = \frac{\rho b h_0 V^2}{2l} \int_0^l [(1-k)x + kl] \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (6)$$

Знайдемо  $\frac{\partial y}{\partial x}$  інтегруванням диференціального рівняння балки змінної товщини

$$y'' = \frac{M(x)}{EI(x)} = \frac{F(l-x)}{EI(x)} = \frac{F(l-x)l^3}{EI_0 [(1-k)x + kl]^3} \quad (7)$$

З урахуванням граничних умов (при  $x = 0, y = y' = 0$ ), після інтегрування рівняння (7), маємо

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{Fl^3}{EI_0(1-k)^2} \left( \frac{1}{z} - \frac{l}{2z^2} - \frac{2k-1}{2k^2l} \right), \quad (8)$$

де  $z = (1-k)x + kl$ .

Тоді, враховуючи (6) і (8), отримаємо

$$T = \frac{\rho b h_0 V^2 F^2 l^5}{2(EI_0)^2 (1-k)^5 \int_{kl}^1 \left( \frac{1}{z} - \frac{l}{2z^2} - \frac{2k-1}{2k^2l} \right) dz} \quad \text{або} \quad T = \frac{b h_0 F^2 l^5}{2EI_0^2} \left( \frac{V}{V_s} \right)^2 g(k), \quad (9)$$

де  $V_s = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  - швидкість поздовжніх звукових хвиль у матеріалі балки,

$$g(k) = \frac{1 - 4k^2(2k^2 + 2k - 1) \ln k + 19k^4 - 28k^3 + 12k^2 - 4k}{8k^4(1-k)^5}.$$

При  $k = 1$ , після розкриття невизначеності, маємо:  $g(k) = 2/15$  і

$T = \frac{b h_0 F^2 l^5}{15EI_0^2} \left( \frac{V}{V_s} \right)^2$ , що співпадає з виразом для кінетичної енергії балки постійної товщини, отриманим в [6].

Якщо виразити кінетичну енергію через енергію пружної деформації, отримаємо

$$T = 12 \frac{g(k)}{f(k)} U \left( \frac{l}{h_0} \right)^2 \left( \frac{V}{V_s} \right)^2. \quad (10)$$

З (10) випливає, що при довгих тріщинах і їх великих швидкостях руху, кінетична енергія може мати значні величини у порівнянні з енергією пружної деформації.

Таким чином, рівняння сумарного виділення і поглинання енергії в пластині змінної товщини при зростанні тріщини, визначене на основі ПКБ-моделі, з урахуванням (3), (5) і (9), має вигляд

$$H = S - U + T = \gamma b l - \frac{F^2 l^3}{2EI_0} f(k) + 12 g(k) \left( \frac{l}{h_0} \right)^2 \left( \frac{V}{V_s} \right)^2 \frac{F^2 l^3}{2EI_0}. \quad (11)$$

Введемо позначення

$$A = \gamma b, B = \frac{F^2 f(k)}{2EI_0}, C = 12 \frac{g(k)}{f(k)} \frac{B}{V_s^2 h_0^2}. \quad (12)$$

Тоді (11) матиме вигляд

$$H = Al - Bl^3 + CV^2 l^5. \quad (13)$$

Перетворимо рівняння (13), вводячи наступні позначення

$$\lambda_1 = -\frac{3B}{5CV^2}, \lambda_2 = \frac{A}{5CV^2}, H^* = \frac{H}{5CV^2}. \quad (14)$$

З урахуванням (14) рівняння (13) можна записати в наступному вигляді

$$H^* = \frac{1}{5} l^5 + \frac{1}{3} \lambda_1 l^3 + \lambda_2 l. \quad (15)$$

Отриманий вираз енергетичного балансу за критерієм Гріффітса (15) являє канонічну форму катастрофи «ластівчин хвіст» за класифікацією, наведеною в [8] або  $A_4$  за [9]. В нашому випадку маємо два комплексних управляючих параметра  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ . При цьому, враховуючи позначення (12) і (14),  $l$  – параметр стану балки з тріщиною, сила  $F$  – зовнішній управляючий параметр,  $E, \gamma, b, h_0, V_s, V$  і  $k$  – внутрішні управляючі параметри.

При нерухомій тріщині, в (13)  $V = 0$ , і повна енергія становить

$$H = Al - Bl^3,$$

що після перетворень (14) уявляє канонічну форму катастрофи складки [8] або  $A_2$  [9]

$$H^* = \frac{1}{3} l^3 + \lambda_3 l, \text{ де } \lambda_3 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (16)$$

Критичні і двічі критичні точки сімейства функцій  $H^*(l, \lambda_3)$  визначаються з умови рівності нулю першої і другої похідної потенційної функції по змінній стану. Двічі вироджена критична точка розташована в точці простору з координатами  $l = 0$  і  $\lambda_3 = 0$ . Таким чином, ізольована точка  $\lambda_3 = 0$  уявляє собою сепаратрису

простору управляючих параметрів, що розділяють функції двох якісно різних видів. З цього випливає, що  $l^2 + \lambda_3 = 0$ , звідки критична довжина тріщини дорівнює

$$l_{кр} = \sqrt{-\lambda_3} = \sqrt{\frac{A}{3B}} = \frac{1}{F} \sqrt{\frac{2\gamma b EI_0}{3f(k)}}. \quad (17)$$

Якщо виразити силу  $F$  через  $\delta$  за (4), отримаємо

$$l_{кр}^2 = \delta \sqrt{\frac{3EI_0}{2\gamma b f(k)}}. \quad (18)$$

При  $k = 1$ , отримаємо критичну довжину тріщини у балці постійної товщини

$$l_{кр}^{const} = \frac{1}{F} \sqrt{2\gamma b EI_0} \quad \text{або} \quad l_{кр}^2 = 3\delta \sqrt{\frac{EI_0}{2\gamma b}}, \quad (19)$$

що співпадає з результатом, наведеним у [5].

Розглянемо динамічну тріщину, для якої сімейство потенційних функцій отримано у формі (15). Знайдемо довжину тріщини при її зупинці. Згідно з [9], критичні токи виродженості  $j$  (для ізольованої критичної точки  $j = 1$ ) можуть бути знайдені прирівнюванням перших чотирьох похідних нулю. Тоді з (15) маємо

$$\text{- ізольовані критичні точки: } l^4 + \lambda_1 l^2 + \lambda_2 = 0; \quad (20)$$

$$\text{- двічі вироджені: } 4l^3 + 2\lambda_1 l = 0; \quad (21)$$

$$\text{- тричі вироджені: } 12l^2 + 2\lambda_1 = 0; \quad (22)$$

$$\text{- чотири рази вироджені: } 24l = 0. \quad (23)$$

Чотири рази вироджені критичні точки визначаються з рівнянь (20)-(23)  $l = 0$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ . Математично це означає, що функція  $H^*(l, 0, 0)$  має чотири рази вироджену критичну (неморсівську) точку  $l = 0$ .

Для тричі вироджених точок з (20) – (22) маємо наступне представлення в просторі управляючих параметрів:  $\lambda_1 = -6l^2$ ,  $l = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ .

Вочевидь, розгляд тричі та чотири разів вироджених критичних точок, не відповідає суті проблеми.

Точки, що характеризують функції з двічі виродженими критичними точками, можуть бути представлені одночасним виконанням рівнянь (20) і (21), звідки

$$l_{дин}^2 = \frac{h_0}{F} \sqrt{\frac{\gamma b EI_0}{30g(k)}} \left( \frac{V_S}{V} \right) \quad \text{або} \quad l_{дин} = \frac{\delta}{h_0 f(k)} \sqrt{\frac{30g(k) EI_0}{\gamma b}} \left( \frac{V}{V_S} \right). \quad (24)$$

Для балки постійної товщини, з (24) маємо

$$l_{дин}^{const} = \frac{6\delta}{h_0} \sqrt{\frac{EI_0}{\gamma b}} \left( \frac{V}{V_S} \right). \quad (25)$$

Проаналізуємо вплив зміни товщини ПКБ на критичну довжину нерухомої тріщини. З формул (17)–(19) випливає, що відношення критичної довжини тріщини у ПКБ постійної товщини до відповідної довжини у балці лінійно-змінної товщини дорівнює

$$\psi = l_{кр}^{const} / l_{кр} = \sqrt[4]{3f(k)}. \quad (26)$$

Таким чином, параметр  $\psi$  визначає вплив змінності товщини балки на критичну довжину стаціонарної тріщини. Для  $k = 1$ , вочевидь,  $f(k) = 1/3$  і  $\psi = 1$ . Графік залежності  $\psi$  від  $k$  наведено на рис.2.

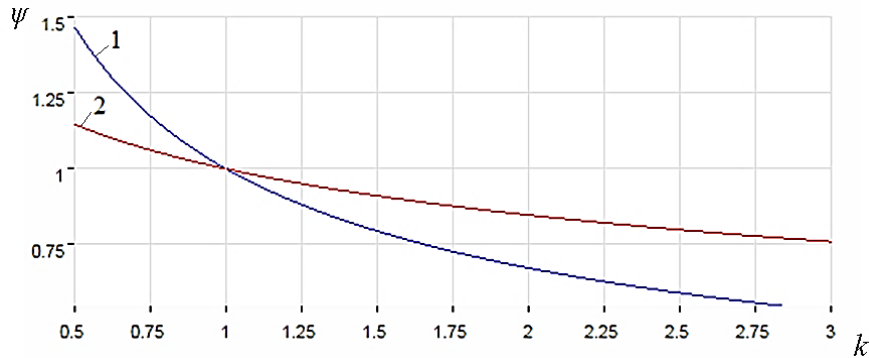


Рис. 2. Залежність параметра критичної довжини тріщини від зміни товщини ПКБ (1- квазістатична тріщина, 2 – динамічна тріщина)

В діапазоні  $0 < k < 1$  критична довжина тріщини зменшується в порівнянні з довжиною тріщини у ПКБ постійної товщини, для  $k > 1$  – довжина зростає. З рис. 2 (крива 1) випливає, що значення критичної довжини тріщини у стані спокою помітно змінюється зі зміною товщини балки (зростанням  $k$ ), при цьому ця залежність суттєво нелінійна. Зменшення товщини балки від її кінця до вершини стаціонарної тріщини в два рази призводить до зростання критичної довжини майже в 1,5 рази. Подібний вплив на критичну довжину тріщини у стані спокою має аналогічне зростання товщини балки. В цьому випадку критична довжина зростає. Відносний вплив подальшого зростання товщини на критичну довжину тріщини зменшується.

Аналогічно (26) введемо у розгляд параметр, що характеризує вплив зміни товщини балки на критичну довжину динамічної тріщини, тобто на довжину тріщини після її зупинки. З (24) і (25) отримаємо

$$\psi_{дин} = \frac{l_{дин}^{const}}{l_{дин}} = f(k) \sqrt{\frac{6}{5g(k)}}. \quad (27)$$

Залежність  $\psi_{дин}$  від  $k$  за (27) наведена на рисунку 2 (крива 2). Аналіз результатів в цьому випадку показує, що з достатнім ступенем точності, її можна апроксимувати прямою лінією, не зважаючи на досить складний характер функції в (27). При цьому, зміна товщини ПКБ не так значно впливає на критичну довжину динамічної тріщини в порівнянні з довжиною стаціонарної тріщини. За інших рівних умов, це пояснюється зміною інертності балки змінної товщини за рахунок її маси.

Доцільно відзначити, що зі зростанням  $k > 1$ ,  $\psi_{дин} < 1$ . Однак, це не означає, що зупинка руху тріщини у балці, товщина якої зростає в напрямку фронту тріщини, тобто для більш міцної ПКБ, відбувається пізніше зупинки руху у балці постійної товщини. Слід брати до уваги, що в цьому разі початок руху тріщини, за рахунок

збільшення її критичної (початкової) довжини, відбувається значно пізніше в порівнянні з балкою постійної товщини, що впливає з аналізу кривої 1 на рисунку 2. Таким чином, приріст довжини тріщини вздовж її фронту у балці, товщина якої зростає, в результаті буде меншою у порівнянні з ПКБ постійної товщини.

З виразів (19) і (24) випливає

$$\frac{l_{дин}}{l_{кр}} = \sqrt{\frac{20g(k)}{f(k)}} \frac{l_{кр}}{h_0} \left( \frac{V}{V_s} \right). \quad (28)$$

Таким чином, оскільки  $\frac{l_{дин}}{l_{кр}} > 1$ , з (28) можна зробити висновок, що для стри-

бка тріщини на величину  $\Delta l = l_{дин} - l_{кр}$  її критична довжина має бути

$$l_{кр} > \frac{h_0}{2} \left( \frac{V_s}{V} \right) \varphi(k), \quad (29)$$

де  $\varphi(k) = \sqrt{\frac{f(k)}{5g(k)}}$ .

Для балки постійної товщини ( $k = 1$ ), як окремий випадок, отримаємо

$$l_{кр}^{const} > \frac{h_0}{2\sqrt{2}} \left( \frac{V_s}{V} \right).$$

Залежність  $\varphi(k)$  наведена на рисунку 3.

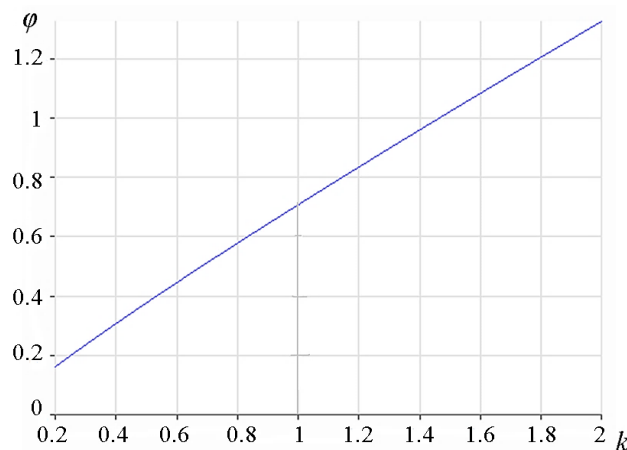


Рис. 3. Залежність початкової довжини динамічної тріщини від зміни товщини ПКБ

З рисунка 3 випливає, що для приросту довжини тріщини на величину  $\Delta l = l_{дин} - l_{кр}$  критична довжина стаціонарної тріщини має зростати зі зростанням товщини балки. Означена залежність від зміни товщини ПКБ носить майже лінійний характер на всьому проміжку  $k$ . Для  $k = 1$  маємо значення  $\varphi(1) = \sqrt{2}/2$ , що відповідає балці постійної товщини.

**Основні висновки та рекомендації.** Рівняння енергетичного балансу крихкого руйнування за критерієм Гріфітса узагальнено для пластини змінної товщини. Проведені дослідження, що ґрунтуються на моделі подвійної консольної



балки, дозволяють дати оцінку впливу зміни її товщини на критичну довжину квазістатичної і нестійкої тріщини. Як і для балки постійної товщини, визначення критичної довжини тріщини зведено до аналізу повної енергії, представленій у формі елементарної катастрофи: для тріщини у стані спокою – до катастрофи складки, для тріщини, що рухається – до катастрофи «ластівчин хвіст». У разі динамічної тріщини критичний стан трактується як її раптова зупинка. Характер зміни товщини балки вздовж фронту тріщини у стані спокою суттєво впливає на її довжину. Градієнт зміни товщини балки у разі нестійкої тріщини впливає на її кінетику помітно менше. Отримана умова стрибка нестійкої тріщини дозволяє оцінити приріст її довжини в залежності від параметру зміни товщини ПКБ, при цьому зазначена залежність з достатнім ступенем точності може вважатися лінійною.

Застосована елементарна теорія катастроф може розглядатись як дієвий інструментарій вирішення складних питань руйнування елементів конструкцій з тріщинами, в тому числі – у дво- і тривимірних об'єктах.

#### Перелік посилань

1. ASTM. (2007). Standard test method for mode I interlaminar fracture toughness of unidirectional fiber-reinforced polymer matrix composites. *ASTM D 5528*, *ASTM International*. doi:10.1520/D5528-01R07E03
2. Davidson, P., & Waas, A.M. (2012). Non-smooth mode I fracture of fibre-reinforced composites: an experimental, numerical and analytical study. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 370, 1942-1965. doi:10.1098/rsta.2011.0381
3. Маркочев, В.М., & Алымов, М.И. (2017). О теории хрупкого разрушения Я. Френкеля и А. Гриффитса. *Чебышевский сб.*, том 18, (3), 381–393. doi:10.22405/2226-8383-2017-18-3-381-393
4. Маркочев, В.М. (2011). Реологическая модель разрушающегося твердого тела. *Заводская лаборатория. Диагностика материалов.*, (6), 44-47.
5. Маркочев, В.М. (1985). Теория катастроф и механика разрушения. *Проблемы прочности.* (7), 43-47.
6. Гилман, Дж. (1963). Скол, пластичность и вязкость кристаллов. *Атомный механизм разрушения*. Москва: Металлургиздат, 220-253.
7. Гаврилкина, М.В., Глаголев, В.В., & Маркин, А.А. (2007). К решению одной задачи механики разрушения. *Прикладная механика и теоретическая физика*, том .48. (4), 121-127.
8. Постон, Т., & Стюарт, И. (1980). *Теория катастроф и ее приложения*. Москва: Мир.
9. Гилмор, Р. (1984). *Прикладная теория катастроф*. Кн.1 – Москва: Мир.

#### АННОТАЦИЯ

**Цель.** Исследование влияния переменности толщины пластины с трещиной на кинетику хрупкого разрушения.

**Методика исследований.** Изотропная пластина с трещиной моделируется однородной двухконсольной балкой, расщепляемой силами, приложенными на ее концах. В качестве критерия разрушения используется теория Гриффитса. Посредством замены переменных уравнение энергетического баланса движущейся трещины представлено в виде элементарной катастрофы типа «ласточкин хвост». В случае покоящейся трещины исследуется каноническая катастрофа складки. Дальнейшее изучение кинетики разрушения проводится с использованием элементарной теории катастроф. Для частного случая постоянной толщины пластины или кристалла полученные выводы сопоставляются с известными результатами других авторов.

**Результаты исследований.** В рамках линейной теории хрупкого разрушения получено уравнение энергетического баланса Гриффитса для однородной изотропной балки линейно-переменной толщины с трещиной в срединной поверхности, с учетом кинетической энергии движения ее берегов в направлении, перпендикулярном фронту трещины. Дана оценка влияния изменения толщины балки на значения критической длины квазистатической и неустойчивой трещины. Получена зависимость начальной длины динамической трещины от изменения толщины двойной консольной балки.

**Научная новизна** заключается в установлении и анализе зависимостей критических параметров хрупких стационарных и динамических трещин в пластине переменной жесткости (толщины), моделируемой двойной консольной балкой. Получены новые результаты, основанные на аналитических зависимостях, пригодных для практического использования.

**Практическое значение.** Полученные результаты могут использоваться для оценки прочности элементов реальных конструкций и их безопасной эксплуатации при квазистатических нагрузках. Относительно простые конечные формулы для определения критических длин трещин могут быть полезными при анализе характеристик трещиностойкости, определяемых экспериментально на образцах переменного сечения.

**Ключевые слова:** *хрупкое разрушение, трещина, устойчивость, критерий Гриффитса, двухконсольная балка, теория Мотта, переменная толщина, теория катастроф.*

#### ABSTRACT

**Purpose.** Study of the thickness variability effect of a plate with crack on a brittle fracture kinetics.

**Research methodology.** An isotropic plate with a crack is modeled by a homogeneous double-cantilever beam, split by the forces applied at its ends. Griffith's theory is used as a destruction criterion. By replacing variables, the equation of energy balance of a moving crack is represented as a dovetail catastrophe. In the case of a resting crack, the canonical fold-type catastrophe is investigated. Further study of the kinetics of destruction carried out by using the elementary theory of catastrophes. For a special case of constant thickness of a plate or crystal, the conclusions obtained are compared with the known results of other authors.

**Research results.** In the framework of the linear theory of brittle fracture, the Griffiths energy balance equation is obtained for a homogeneous isotropic beam of linearly variable thickness with a crack in the middle surface, taking into account its edges motion kinetic energy in the direction perpendicular to the front of crack. The influence of changes in the beam thickness on the critical length of a quasistatic and unstable crack is estimated. The dependence of the initial dynamic crack length on the thickness change of the double cantilever beam is obtained.

**Scientific novelty** is in establishing and analyzing the dependencies of the stationary and dynamic brittle cracks critical parameters in a plate of variable stiffness (thickness), modeled by a double cantilever beam. New results based on analytical dependencies suitable for practical use are obtained.

**Practical value.** The results can be used to assess the strength of elements of real structures and their safe operation under quasistatic loading. Relatively simple final formulas for determining the critical lengths of cracks can be useful in the analysis of crack growth resistance characteristics, experimentally determined on the samples of variable cross section.

**Keywords:** *brittle fracture, crack, stability, Griffith's criterion, double cantilever beam, Mott theory, variable thickness, catastrophe theory.*